

**COMPACIDAD Y CONEXIDAD EN
ESPACIOS MÉTRICOS**
(RECOPIACIÓN BIBLIOGRÁFICA)

MARTHA LILIANA ALDANA LANDAZÁBAL

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE
SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007**

**COMPACIDAD Y CONEXIDAD EN
ESPACIOS MÉTRICOS**

(RECOPIACIÓN BIBLIOGRÁFICA)

MARTHA LILIANA ALDANA LANDAZÁBAL

Trabajo presentado para optar el título de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Directora

SONIA MARLENI SABOGAL PEDRAZA

Doctora en ciencias matemáticas

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE
SANTANDER**

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2007

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	I
1. PRELIMINARES	3
1.1. Espacios Métricos	3
1.2. Topología en espacios métricos.	6
1.3. Conjuntos acotados. Diámetro	15
1.4. Conjuntos totalmente acotados y separables	18
1.5. Propiedad de Bolzano-Weierstrass	24
1.6. Límites y sucesiones	25
2. CONJUNTOS COMPACTOS	31
2.1. Definición de conjunto compacto	31
2.2. Propiedades de los conjuntos compactos	32
2.3. Subconjuntos compactos	35
2.4. Otra definición de compacidad	36
2.5. Compacidad secuencial	38
2.6. Compacidad en espacios métricos completos.	40
2.7. Compacidad en \mathbb{R}^n	43
3. CONEXIDAD EN ESPACIOS MÉTRICOS	47
3.1. Definición de conjunto conexo	48

3.2. Clausura y unión de conexos	50
3.3. Componentes de un conjunto	56
3.4. Espacios localmente conexos.	59
3.5. Conectividad en la recta real	62
4. FUNCIONES CONTINUAS EN CONJUNTOS COMPACTOS Y CONEXOS	64
4.1. Continuidad	64
4.2. Funciones continuas en conjuntos compactos	68
4.3. Funciones continuas en conjuntos conexos.	79
4.4. Arco-conexidad	82
BIBLIOGRAFÍA	87

TÍTULO: COMPACIDAD Y CONEXIDAD EN ESPACIOS MÉTRICOS*

AUTOR: MARTHA LILIANA ALDANA LANDAZÁBAL**

PALABRAS CLAVES: compacidad, conexidad, espacios métricos, funciones continuas en conjuntos compactos, funciones continuas en conjuntos conexos.

DESCRIPCIÓN En esta monografía se analizan los conjuntos compactos y conexos en espacios métricos en general, lo cual es fundamental para un curso serio y riguroso de análisis matemático. Lo que nos motiva a realizar este trabajo es que la mayoría de obras se limitan al estudio del espacio \mathbb{R}^n con la métrica Euclidiana, dejando sin examinar otras propiedades en las cuales son ricos los espacios métricos.

Esta monografía es la continuación de los trabajos realizados por María Eugenia Padilla, Élber Colmenares y Néstor Mendoza. En el primero se hizo un análisis minucioso de las propiedades generales de los espacios métricos, en el segundo se trataron algunos aspectos de la convergencia en espacios métricos y en el tercero se consideraron los conjuntos compactos en espacios topológicos.

El presente trabajo está dividido en cuatro capítulos: en el primer capítulo se realiza un resumen de todos aquellos conocimientos que se supone posee el lector, ya que en el transcurso de esta obra son utilizados. En el segundo capítulo se trabaja con cierto detalle lo concerniente a la compacidad en espacios métricos, en donde se presentan demostraciones completas de los teoremas fundamentales. De igual forma en el capítulo cuatro se analizan las funciones continuas con dominio compacto y conexo en donde se demuestran teoremas como el de valores extremos, el de valor intermedio y el de continuidad uniforme, entre otros.

*Monografía

**Facultad de ciencias humanas, Licenciatura en Matemáticas. Directora: Sonia Marleni Sabogal Pedraza.

TITLE: COMPACTY Y CONNEXITY IN METRIC SPACES*

AUTHOR: MARTHA LILIANA ALDANA LANDAZÁBAL**

KEY WORDS: compacty, conexity, metric spaces, continuous functions in compacted sets, continuous functions in connexed sets.

DESCRIPTION

In this monograph it is analyzed the compacted and connexed sets in metric spaces in general, which is fundamental for a serious course and thorough mathematical analysis. What motivates us to carry out this work is that the majority of works are limited to study the space \mathbb{R}^n with the Euclidian metrics leaving without examine other properties in which metric spaces are rich.

This monograph is the continuation of works carried out by María Eugenia Padilla, Élder Colmenares and Néstor Mendoza. In the first one it was carried out a thorough analysis of the general properties of metric spaces, in the second one it was carried out some aspects of the convergence in metric spaces and in the third one it was considered the compacted sets in topological spaces.

The present word is divided in four chapters: in the first chapter it is carried out a summary of all that knowledge that is supposed the reader has, because during this work they are used. In the second chapter it is worked with some detail the concerned to the compacty in metric spaces where it is presented complete demonstrations of the fundamental theorems. In the same way, in the third chapter it is developed the connexty theory. And the last, in the fourth chapter it is analyzed the continuous functions with compacted and connexed control where it is demonstrated theorems such as the extreme values, the intermediate value and uniform continuity, among others.

*Monograph

**Faculty of Human Sciences, Mathematics Teaching Program. Director: Sonia Marleni Sabogal Pedraza.

INTRODUCCIÓN

Los espacios métricos constituyen un caso particular de los espacios topológicos, y su estudio es fundamental para un curso serio y riguroso de análisis matemático. Pero, por lo general su estudio se limita al caso de \mathbb{R}^n con la métrica Euclidiana, dejando sin examinar otras propiedades en las cuales son ricos los espacios métricos.

El propósito de esta monografía es continuar la exploración elemental de los espacios métricos iniciada en las de María Eugenia Padilla [6], Élber Colmenares [2] y Néstor Mendoza [4]. En la primera se hizo un análisis minucioso de las propiedades generales de los espacios métricos, en la segunda se trataron algunos aspectos de la convergencia en espacios métricos, y en la tercera se analizaron las propiedades de los conjuntos compactos en espacios topológicos. En esta monografía se conserva el punto de vista general ya mencionado, esta vez para considerar el tema de compacidad y conexidad en espacios métricos.

Para ello, dividimos este trabajo en 4 capítulos: en el primer capítulo, comenzamos con un breve resumen de todos aquellos conocimientos que se supone posee el lector, ya que en el transcurso de esta obra son utilizados. Luego en el capítulo 2, se trata con cierto detalle lo concerniente a la compacidad en espacios métricos, en donde se presentan demostraciones completas de

los teoremas fundamentales. De igual forma en el capítulo 3 se desarrolla la teoría de conexidad en espacios métricos.

Para culminar el trabajo se analizan las funciones continuas con dominio compacto y conexo, y se demuestran teoremas como el de valores extremos, el de continuidad uniforme y el de valor intermedio, entre otros, los cuales son de mucha aplicación en el análisis.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo haremos un breve resumen de todos aquellos conocimientos que se supone el lector, debe poseer para poder estudiar la compacidad y conexidad en espacios métricos, ya que en el transcurso de esta obra serán utilizados con entera libertad sin citarlos expresamente. Para un estudio más riguroso, preferimos remitir al lector a los libros [1] y [3].

1.1. Espacios Métricos

Para empezar es conveniente recordar lo que es un espacio métrico y cuáles son sus características fundamentales. Los conceptos, teoremas y sus demostraciones que se presentan en esta sección se pueden encontrar en [6].

Como se sabe, un espacio métrico es un conjunto arbitrario entre cuyos elementos está definida una función llamada distancia o métrica. Más exactamente:

Definición 1.1.1. *Sea M un conjunto no vacío y \mathbb{R} el conjunto de los números reales, y considérese la función*

$$\begin{aligned} d : M \times M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:

- i. $\forall x, y \in M : d(x, y) = 0 \iff x = y.$
- ii. $\forall x, y, z \in M : d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z).$ ("Desigualdad triangular")

Entonces la dupla (M, d) se denomina **espacio métrico**, y la función d **métrica** o **distancia** en el espacio M .

De la definición anterior se obtienen las siguientes dos propiedades fundamentales cuyas demostraciones son inmediatas:

Teorema 1.1.1. $\forall x, y \in M : d(x, y) \geq 0.$

Teorema 1.1.2. $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x).$

Ahora veamos algunos ejemplos de espacios métricos.

Ejemplo 1.1. Sea M un conjunto cualquiera y sea

$$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Este espacio se denomina espacio métrico **discreto**, y la métrica se denota por \check{d} .

Ejemplo 1.2. Sea M el conjunto \mathbb{R} de los números reales y sea d_u la función

$$d_u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto d(x, y) = |x - y|$$

Se comprueba fácilmente de las propiedades del valor absoluto que d_u es una métrica sobre \mathbb{R} . Este espacio se llama espacio de los números reales con la métrica **usual**, la cual denotaremos como d_u

Ejemplo 1.3. Considérese el conjunto de las funciones reales continuas en un intervalo $[a, b]$, con métrica definida así:

$$d_u : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \rightarrow d(f, g) = \int_b^a |f - g|,$$

forman un espacio métrico bien definido. (ver demostración en [6])

Ejemplo 1.4. En el conjunto de las funciones reales continuas en un intervalo $[a, b]$ dotado de la distancia

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [a, b]} \{|f(x) - g(x)|\},$$

es un espacio métrico. En efecto, la continuidad de las funciones nos garantiza la existencia del máximo y verifiquemos que d es una métrica:

1. $d_\infty(f, g) = 0 \iff \max_{x \in [a, b]} \{|f(x) - g(x)|\} = 0 \iff |f(x) - g(x)| = 0 \iff f(x) = g(x).$

- 2.

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [a, b]} \{|f(x) - g(x)|\} = \max_{x \in [a, b]} \{|\langle f(x) - h(x) \rangle + \langle h(x) - g(x) \rangle|\} \leq$$

$$\max_{x \in [a, b]} \{|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|\} \leq \max_{x \in [a, b]} \{|f(x) - h(x)|\} + \max_{x \in [a, b]} \{|h(x) - g(x)|\} =$$

$$d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g).$$

Ejemplo 1.5. $M = \mathbb{R}^n$;

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Esta métrica se llama métrica **euclídea**. Cuando nos refiramos al espacio euclídeo \mathbb{R}^n , se sobreentendrá que su métrica es la euclídea si no se especifica alguna otra.

Definición 1.1.2. Sea (M, d) un espacio métrico y $S \subset M$, $S \neq \emptyset$. Definamos la función

$$d_1 : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\forall x, y \in S : d_1(x, y) = d(x, y).$$

De inmediato se comprueba que d_1 es una métrica para el conjunto S . A d_1 suele llamársele métrica inducida en S por d y, por sencillez, se acostumbra designar también por d sin peligro de confusión. Nótese que d_1 no es otra cosa que la restricción de d a $S \times S$.

De manera que (S, d) es, a su vez, un espacio métrico y se le llama **subespacio** de (M, d) .

1.2. Topología en espacios métricos.

En esta sección definiremos por medio de bolas en un espacio métrico los conceptos de adherencia, interior, frontera y el derivado de un conjunto. Además, definiremos un conjunto abierto, cerrado y demostraremos algunos teoremas al respecto.

Comenzemos por definir una bola.

Definición 1.2.1. Sean dados un espacio métrico (M, d) , un elemento $a \in M$ y un número real positivo r . El conjunto

$$\{x \in M \mid d(a, x) < r\}$$

se denomina **bola** con centro en a y radio r , y se denota $\beta(a; r)$ ó $\beta_M(a; r)$.

Definición 1.2.2. Sean dados un espacio métrico (M, d) , un elemento $a \in M$ y un número real positivo r . El conjunto

$$\{x \in M \mid 0 < d(a, x) < r\}$$

se denomina **bola perforada** con centro en a y radio r , y se denota $\overset{\circ}{\beta}(a; r) = \beta(a; r) - \{a\}$

Ejemplo 1.6. En el espacio euclídeo \mathbb{R} la bola $\beta(0; 1)$ es el intervalo abierto $(-1, 1)$.

Ejemplo 1.7. En el subespacio métrico $S = [0, 1]$ de \mathbb{R} la bola $\beta(0; 1)$ es el intervalo semiabierto $[0, 1)$.

Ejemplo 1.8. En el espacio $(C[0, 2\pi], d_\infty)$, la bola $\beta(\text{sen}; 1)$ está conformada por todas las funciones continuas definidas en el interval $[0, 2\pi]$ y cuyas gráficas están contenidas en la figura limitada por el eje vertical del plano cartesiano, por la recta $x = 2\pi$, por la gráfica de la función $\text{sen}x - 1$ y por la gráfica de la función $\text{sen}x + 1$. (ver figura 1.1)

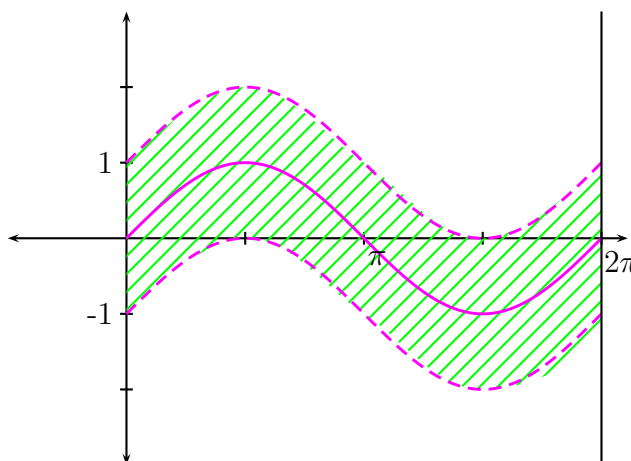


Figura 1.1: bola con centro en seno y radio 1.

La siguiente definición constituye una de las ideas fundamentales sobre la cual se apoya el análisis y la topología. Conceptos como el de límite, continuidad, derivada y otros tienen allí su origen.

Definición 1.2.3. Sean dados un espacio métrico (M, d) , $x \in M$ y $V \subset M$. Se dice que V es una **vecindad** o **entorno** de x si dentro de V existe una bola a la cual pertenece el elemento x :

$$V \text{ es vecindad de } x \iff \exists a \in V, \exists r > 0 \mid x \in \beta(a; r) \subset V.$$

Evidentemente, toda bola es vecindad de su propio centro.

Definición 1.2.4. Sean dados un espacio (M, d) , $S \subset M$, $x \in S$. Se dice que x es un **punto interior** de S , si con centro en x se puede construir una bola contenida en S , es decir,

$$x \text{ es un punto interior de } S \iff \exists r > 0 \mid \beta(x; r) \subset S.$$

El conjunto de todos los puntos interiores de un conjunto S se denomina **interior** de S , y se representa por $\text{int } S$ ó S° .

Definición 1.2.5. Sean dados un espacio (M, d) , $S \subset M$, $x \in M$.

$$x \text{ es un punto de adherencia de } S \iff \forall r > 0 : \beta(x; r) \cap S \neq \emptyset.$$

El conjunto formado por todos los puntos de adherencia de un conjunto S se llama **adherencia**, **cerradura** o **clausura** de S , y se denota \bar{S} .

Definición 1.2.6. Sean dados un espacio (M, d) , $S \subset M$, $x \in S$.

$$x \text{ es un punto de acumulación de } S \iff \forall r > 0 : \overset{\circ}{\beta}(x; r) \cap S \neq \emptyset.$$

El conjunto formado por todos los puntos de acumulación de S se denomina **derivado** de S , y se denota S' .

Es obvio, como consecuencia de las anteriores definiciones, que

$$S^\circ \subset S \subset \bar{S} \text{ y } S^\circ \subset S' \subset \bar{S}.$$

Sin embargo, no hay ninguna relación necesaria entre los conjuntos S y S' .

Definición 1.2.7. Sea (M, d) un espacio métrico, $S \subset M$, $x \in S$.

$$x \text{ es un punto aislado de } S \iff \exists r > 0 \mid \overset{\circ}{\beta}(x; r) \cap S = \emptyset.$$

El conjunto de todos los puntos aislados de S se denota \ddot{S} .

Definición 1.2.8. Sea (M, d) un espacio métrico, $S \subset M, x \in M$.

x es un **punto fronterizo** de $S \iff \forall r > 0 : \beta(x; r) \cap S \neq \emptyset, \wedge, \beta(x, r) \cap S^c \neq \emptyset$.

El conjunto de todos los puntos fronterizos de S se denomina **frontera** de S , y se representa por ∂S o ΓS . Nótese que cualquier punto fronterizo puede pertenecer bien sea a S , o a su complemento.

A continuación definiremos un conjunto abierto.

Definición 1.2.9. Sea (M, d) un espacio métrico y $S \subset M$. Se dice que S es **abierto** si coincide con su interior. Sintéticamente:

$$S \text{ es abierto} \iff S = S^\circ.$$

Es de anotar que la contención $S^\circ \subset S$ ya está dada por definición de punto interior, por lo tanto la definición anterior solo exige que $S \subset S^\circ$.

La colección de todos los subconjuntos abiertos de (M, d) (entre los cuales se encuentra \emptyset y el mismo M) recibe el nombre de **topología** del espacio (M, d) y se simboliza $\mathcal{T}_{(M, d)}$ o simplemente \mathcal{T}_M o \mathcal{T} .

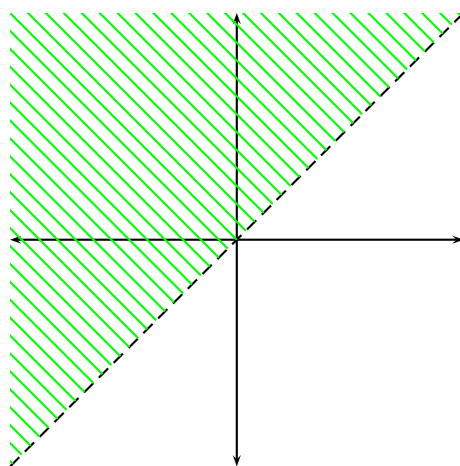
Definición 1.2.10. Sea (M, d) un espacio métrico y $S \subset M$. Se dice que el conjunto S es **cerrado** si coincide con su clausura, i.e., si $S = \bar{S}$.

Puesto que la contención $S \subset \bar{S}$ está garantizada, la definición solo exige que $\bar{S} \subset S$.

La colección de todos los subconjuntos cerrados de M se representa como $\bar{\mathcal{T}}_M$ o $\bar{\mathcal{T}}$.

Ejemplo 1.9. Analizar topológicamente los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, (a, b)$ como subconjuntos de \mathbb{R} .

S	S°	S'	\bar{S}	\ddot{S}	∂S	Abierto	Cerrado
\mathbb{N}	\emptyset	\emptyset	\mathbb{N}	\mathbb{N}	\mathbb{N}	no	si
\mathbb{Z}	\emptyset	\emptyset	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	no	si
\mathbb{Q}	\emptyset	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\emptyset	\mathbb{R}	no	no
\mathbb{I}	\emptyset	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\emptyset	\mathbb{R}	no	no
(a, b)	(a, b)	$[a, b]$	$[a, b]$	\emptyset	$\{a, b\}$	si	no
\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\emptyset	\emptyset	si	si

Cuadro 1.1: Análisis topológico de: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$ Figura 1.2: $S = \{(x, y) \mid y > x\}$.

Ejemplo 1.10. En (\mathbb{R}^2, d_u) , consideremos $S = \{(x, y) \mid y > x\}$

$$S^\circ = S$$

$$\bar{S} = \{(x, y) \mid y \geq x\}$$

$$S' = \{(x, y) \mid y \geq x\}$$

$$\partial S = \{(x, y) \mid y = x\}$$

S es abierto

S no es cerrado

Notemos, que si un conjunto no es abierto no implica que sea cerrado, existen

conjuntos como \emptyset y \mathbb{R} que son a la vez abiertos y cerrados, y conjuntos que no son ni abiertos, ni cerrados como \mathbb{Q} y \mathbb{I} .

Esto se debe a que las definiciones de conjuntos abiertos y cerrados son independientes, aunque si hay una relación entre ellos en cuanto los conceptos “abierto ”y “cerrado ”son conceptos duales como lo expresa el siguiente teorema:

Teorema 1.2.1. *Sea (M, d) un espacio métrico y $S \subset M$. Entonces*

$$S \text{ es cerrado} \iff S^c \text{ es abierto.}$$

Demostración. **i.** Sea S cerrado y $x \in S^c$. Entonces $x \notin S = \bar{S}$, por tanto $\exists r > 0$ tal que $\beta(x; r) \cap S = \emptyset$. Por consiguiente, $\beta(x; r) \subset S^c$, lo cual significa que x es un punto interior de S^c , luego S^c es abierto.

ii. Sea S^c abierto. Entonces $\forall x \in S^c : \exists \beta(x; r) \subset S^c$, así que $\beta(x; r) \cap S = \emptyset$, o sea que $x \notin \bar{S}$. Pero $x \in S^c$ es equivalente a que $x \notin S$, así que lo demostrado significa que $x \notin S \implies x \notin \bar{S}$, o, lo que es lo mismo, que $x \in \bar{S} \implies x \in S$; por consiguiente S es cerrado. ■

Del teorema anterior es fácil probar que un conjunto S de un espacio métrico (M, d) es abierto si el complemento es cerrado.

A continuación probaremos que toda bola es abierta.

Teorema 1.2.2. *Toda bola en un espacio métrico es un conjunto abierto.*

Demostración. Tomemos en (M, d) , una bola con centro en a y radio r , y sea $x \in \beta(a; r)$. Debemos demostrar que $\exists \beta(x, \epsilon) \subset \beta(a; r)$. Para ello, basta con tomar $\epsilon < r - d(a, x)$. En efecto, si $y \in \beta(x, \epsilon)$ entonces,

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < \langle r - \epsilon \rangle + \epsilon = r,$$

y por consiguiente $y \in \beta(a; r)$. ■

Corolario 1.2.1. *Toda bola es vecindad de cada uno de sus puntos.*

Teorema 1.2.3. *Sea (M, d) un espacio métrico y $S \subset M$.*

$x \in S' \iff$ *toda vecindad perforada de x contiene infinitos puntos del conjunto.*

Demostración. i. \implies Demostración por contradicción. Sea $x \in S'$ y supongamos que

$$\overset{o}{V}_x \cap S = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}.$$

designemos por

$$r_k = d(x, x_k) > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Por otra parte como V es abierto y contiene a x , existe un $r_0 > 0$ tal que

$$\beta(x, r_0) \subset V.$$

Sea $r = \min\{r_0, r_1, \dots, r_n\}$.

Supongamos $\overset{o}{\beta}(x; r) \cap S \neq \emptyset$. Sea $y \in \overset{o}{\beta}(x; r) \cap S$ entonces, $y = x_k$ para algún k , lo que implica $r_k = d(x_k, x) < r \leq r_k$, lo que contradice la definición de r , por lo tanto $\overset{o}{\beta}(x; r) \cap S = \emptyset$. Pero, esto contradice el hecho de que x es un punto de acumulación de S .

ii. \impliedby Demostración por contradicción. Por hipótesis tenemos que toda $\overset{o}{V}_x$ contiene infinitos puntos de S . Supongamos que $x \notin S'$ entonces por definición de punto de acumulación $\exists \epsilon > 0$ tal que $\overset{o}{\beta}(x; \epsilon) \cap S = \emptyset$, lo que contradice la hipótesis, ya que toda bola es vecindad de cada uno de sus puntos (corolario 1.2.1). Luego $x \in S'$

De i y ii se prueba el teorema. ■

Corolario 1.2.2. *Si $S' \neq \emptyset$, entonces S es infinito.*

El recíproco del corolario anterior no es cierto. Contraejemplo: \mathbb{N} . Ahora, probaremos otra propiedad de los conjuntos cerrados.

Teorema 1.2.4. *Sea (M, d) un espacio métrico y $S \subset M$. S es cerrado si y sólo si, S contiene todos sus puntos de acumulación.*

Demostración. **i** S es cerrado $\implies S' \subset S$.

Sea $x \in S'$ y veamos que $x \in S$. En efecto, $\forall r > 0 : \overset{\circ}{\beta}(x; r) \cap S \neq \emptyset$. Entonces $\beta(x; r) \cap S \neq \emptyset$, luego $x \in \bar{S}$ lo que implica que $x \in S$, ya que S es cerrado.

ii $S' \subseteq S \implies S$ es cerrado.

Por definición sabemos que $S \subset \bar{S}$, luego para probar que S es cerrado, debemos demostrar que $\bar{S} \subset S$. En efecto, sea $x \in \bar{S}$ entonces $\forall r > 0 : \beta(x; r) \cap S \neq \emptyset$. Si $x \in S$, ya se tiene.

Si $x \notin S$ entonces, $\overset{\circ}{\beta}(x; r) \cap S \neq \emptyset$, luego $x \in S'$ y como $S' \subset S$ entonces $x \in S$.

■

Ejemplo 1.11. En (\mathbb{R}, d_u) consideremos $S = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_1\}$. S no es cerrado, ya que $0 \in S'$ y $0 \notin S$.

El siguiente teorema describe la relación que existe entre los conjuntos abiertos en M y los abiertos en S , donde (S, d) es un subespacio métrico de (M, d) .

Teorema 1.2.5. *Sea (S, d) un subespacio métrico de (M, d) , y sea X un subconjunto de S . Entonces X es abierto en S , si y sólo si, $X = A \cap S$ para algún conjunto A abierto en M .*

Demostración. **i.** \longleftarrow Sea A un conjunto abierto en M y sea $X = A \cap S$.

Si $x \in X$ entonces $x \in A$ y por lo tanto $\beta_M(x; r) \subseteq A$ para algún $r > 0$. Entonces

$$\beta_S(x; r) = \beta_M(x; r) \cap S \subseteq A \cap S = X,$$

luego X es abierto en S .

ii. \implies Supongamos X abierto en S . Probaremos que $X = A \cap S$ para un conjunto A , abierto en M . Para todo $x \in X$ existe una bola $\beta_S(x; r_x)$ contenida en X . Ahora bien,

$$\beta_S(x; r_x) = \beta_M(x; r_x) \cap S.$$

Si hacemos $A = \bigcup_{x \in X} \beta_M(x; r_x)$ entonces A es abierto en M y es fácil verificar que $A \cap S = X$. ■

Ejemplo 1.12. En el subespacio métrico $S = [0, 1]$ del espacio métrico (\mathbb{R}, d_u) , cada intervalo de la forma $[0, x)$ o $(x, 1]$, donde $0 < x < 1$, es un conjunto abierto en S . Estos conjuntos no son abiertos en \mathbb{R} .

El ejemplo 1.12 muestra que, si S es un subespacio métrico de M , los conjuntos abiertos en S no son necesariamente abiertos en M .

Algo similar al teorema 1.2.5 sucede con los conjuntos cerrados en un subespacio.

Teorema 1.2.6. *Sea (S, d) un subespacio métrico de (M, d) y sea Y un subconjunto de S . Entonces Y es cerrado en S , si y sólo si, $Y = B \cap S$ para algún conjunto B cerrado en M . Ver su demostración en [1].*

El siguiente teorema muestra cómo construir nuevos conjuntos abiertos (o cerrados) a partir de conjuntos abiertos (o cerrados) dados.

Teorema 1.2.7. 1. *La unión de una colección arbitraria de conjuntos abiertos es abierta, y la intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es abierta.*

2. *La unión de una colección finita de conjuntos cerrados es cerrada, y la intersección arbitraria de una colección de conjuntos cerrados es cerrada.*

Las intersecciones infinitas de conjuntos abiertos pueden no ser abiertas. Por ejemplo, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_1} (0, 1 + \frac{1}{n}) = (0, 1]$ NO es un conjunto abierto en (\mathbb{R}, d_u) .

Y las uniones infinitas de conjuntos cerrados pueden no ser cerradas, ya que por ejemplo, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} [0, 1 - \frac{1}{n}] = [0, 1)$ NO es un conjunto cerrado en (\mathbb{R}, d_u)

Teorema 1.2.8. *Si $A \in \tau$ y $C \in \bar{\tau}$, entonces $A - C \in \tau$ y $C - A \in \bar{\tau}$.*

Demostración. **1.** $A - C = A \cap (X - C) \in \tau$.

2. $C - A = C \cap (X - A) \in \bar{\tau}$.

■

1.3. Conjuntos acotados. Diámetro

En el conjunto de los números reales conocemos el concepto de conjunto acotado superior e inferiormente, pero tal noción está ligada a la relación de orden en \mathbb{R} , y como un espacio métrico no está, en general, provisto de una relación de orden no podemos extender la idea directamente. No obstante, podemos pensar, de una manera intuitiva que un conjunto acotado en el plano o en el espacio es aquel que “no se extiende indefinidamente”, o que se mantiene “dentro de ciertos límites”.

Definición 1.3.1. *Sea S un conjunto no vacío en un espacio métrico (M, d) .*

*Decimos que S es **acotado**, si existe algún número real $k > 0$ tal que*

$$\forall x, y \in S : d(x, y) \leq k.$$

Es consecuencia inmediata de esta definición que todo subconjunto no vacío de un conjunto acotado es también acotado.

Ahora veamos lo que significa ser acotado en los reales con la métrica usual.

Ejemplo 1.13. En (\mathbb{R}, d_u) , $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, S es acotado si existe $k > 0$ tal que

$$\forall x, y \in S : d(x, y) = |x - y| \leq k.$$

Tomemos $x_1 \in S$ fijo; entonces

$$\forall x \in S : |x - x_1| \leq k,$$

luego,

$$\forall x \in S : x_1 - k \leq x \leq x_1 + k$$

es decir, S está acotado superior e inferiormente.

Ejemplo 1.14. Toda bola en un espacio métrico es acotada. En efecto, tomemos en (M, d) una bola con centro en a y radio ϵ ,

$$\forall x, y \in \beta(a; \epsilon) : d(x, y) \leq d(x, a) + d(y, a) < 2\epsilon,$$

y por consiguiente $\beta(a; \epsilon)$ es acotada.

De acuerdo con la definición de conjunto acotado, decir que S es acotado es equivalente a decir que el conjunto de números reales

$$\{d(x, y) \mid x, y \in S\}$$

está acotado superiormente.

Definición 1.3.2. *El extremo superior del conjunto $\{d(x, y) \mid x, y \in S\}$ al cual designamos*

$$\delta(S) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in S\}$$

*recibe el nombre de **diámetro** del conjunto S .*

Obsérvese que un conjunto S tiene diámetro si y sólo si es acotado. Además el diámetro de un conjunto es mayor o igual que cero, ya que la distancia entre dos puntos de un conjunto es mayor o igual que cero.

Ejemplo 1.15. Sea S un subconjunto no vacío de un espacio métrico (M, d) .

$$\delta(S) = 0, \text{ si y sólo si, } S \text{ está constituido por un solo elemento.}$$

En efecto, si $\delta(S) = 0$ entonces $\forall x, y \in S : 0 \leq d(x, y) \leq 0$, es decir, $d(x, y) = 0$, o sea que $x = y$, lo que indica que S está constituido por un solo punto. Recíprocamente, si S contiene un solo punto, el conjunto $\{d(x, y) \mid x, y \in S\}$ está únicamente constituido por 0, de donde el $\delta(S) = 0$.

Conviene advertir que si S es acotado, pueden no existir puntos $x, y \in S$ tales que $d(x, y) = \delta(S)$, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.16. El diámetro del intervalo abierto (a, b) , (para $a < b$) en la recta real, es $b - a$, y sin embargo, la distancia entre cualquier par de puntos es siempre estrictamente menor que $b - a$.

En resumen, el diámetro es algo así como la “máxima” distancia que se puede “medir” dentro del conjunto.

Si S es acotado y T no es vacío, es consecuencia inmediata de la definición de diámetro que

$$T \subset S \implies \delta(T) \leq \delta(S).$$

El recíproco no es, en general, cierto, por ejemplo:

Tomemos (\mathbb{R}, d_u) y sea $T = \{c\}$, $S = (a, b)$, (con $a < b < c$), $\delta(T) = 0 \leq \delta(S) = b - a$, pero, $T \not\subset S$. El siguiente teorema es de gran utilidad en el estudio de los conjuntos acotados.

Teorema 1.3.1. *Sea S un conjunto no vacío en un espacio métrico (M, d) . S es acotado si y sólo si, está contenido en una bola cuyo centro puede ser cualquier punto de M .*

Demostración. Si S está contenido en una bola entonces S es acotado por ser subconjunto de un conjunto acotado. Recíprocamente, supongamos que S es acotado y sea $\delta(S)$ su diámetro. Tomemos $a \in M$ y construyamos una bola con centro en a y que contenga a S . En efecto, como S no es vacío, elegimos arbitrariamente un $x_1 \in S$ y con radio $r = d(a, x_1) + \delta(S) + 1$, consideremos

la bola $\beta(a; r)$. Tenemos

$$\forall x \in S : d(x, a) \leq d(a, x_1) + d(x, x_1) \leq d(a, x_1) + \delta(S) < d(a, x_1) + \delta(S) + 1$$

es decir, $x \in \beta(a; r)$. ■

1.4. Conjuntos totalmente acotados y separables

Un concepto nuevo, de gran importancia y utilidad, es el de conjunto totalmente acotado. Es una propiedad más restrictiva que la de ser acotado, como veremos a continuación.

Definición 1.4.1. *Sea S un conjunto no vacío en un espacio métrico (M, d) . Decimos que S es **totalmente acotado** ó **T.A** si a cualquier número real $\epsilon > 0$ corresponde un conjunto finito de puntos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ tales que*

$$S \subset \bigcup_{k=1}^n \beta(x_k; \epsilon).$$

La definición anterior significa informalmente que un conjunto es totalmente acotado si siempre se puede recubrir con un número finito de bolas, tan pequeñas como se quiera y todas del mismo tamaño.

Ejemplo 1.17. En (\mathbb{R}, d_u) $[0, 1]$ es T.A.

Ejemplo 1.18. Todo conjunto finito es T.A: basta con tomar todos los puntos de S como centros de las esferas. El recíproco es cierto en un espacio métrico discreto, pero no en cualquier espacio; por ejemplo, $[0, 1]$ es infinito y es T.A.

Teorema 1.4.1. *En un espacio métrico cualquiera, todo conjunto T.A es acotado.*

Demostración. Sea S un conjunto $T.A$ en un espacio métrico (M, d) . Tomando $\epsilon = 1$, existe un conjunto finito de puntos $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ tales que

$$S \subset \bigcup_{k=1}^n \beta(x_k; 1). \quad (1.1)$$

Sea h el máximo de todas las distancias $d(x_i, x_j)$, para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tomemos ahora $x, y \in S$ cualesquiera. En virtud de (1.1)

$$x \in \beta(x_i; 1), \quad y \in \beta(x_j; 1), \quad \text{para algunos } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

luego

$$\forall x, y \in S, \quad d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(y, x_i) \leq d(x, x_i) + d(y, x_j) + d(x_i, x_j),$$

o sea que

$$d(x, y) < 2 + h$$

por lo tanto S es acotado. ■

El recíproco de este teorema no es, en general cierto.

Ejemplo 1.19. Sea (\mathbb{N}, \ddot{d}) donde \ddot{d} es la métrica descrita en el ejemplo 1.1, \mathbb{N} es acotado. En efecto $\mathbb{N} \subset \beta_{\ddot{d}}(1; 2)$ (exactamente $\beta_{\ddot{d}}(1; 2) \{n \in \mathbb{N} \mid \ddot{d}(n, 1) < 2\} = \mathbb{N}$). Por otra parte, sea $\epsilon = \frac{1}{2}$. Supongamos que (\mathbb{N}, \ddot{d}) es $T.A$ es decir, existen n_1, n_2, \dots, n_k naturales tales que

$$\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{i=1}^k \beta_{\ddot{d}}(n_i; \frac{1}{2}) = \{n_1\} \cup \{n_2\} \cup \dots \cup \{n_k\}$$

luego $\mathbb{N} \subset \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ lo cual es absurdo. Por tanto (\mathbb{N}, \ddot{d}) no es $T.A$.

Pasamos a definir el concepto de separabilidad. Esta es una propiedad de considerable importancia en topología general, y se usará como una noción auxiliar para el estudio de la compacidad en espacios métricos.

Definición 1.4.2. Se dice que un subconjunto no vacío S de un espacio métrico (M, d) es **separable**, si existe un conjunto contable T con $T \subset S$, tal que $S \subset \bar{T}$.

En el caso $S = M$, la definición se reduce a que existe un conjunto denso y contable.

Ejemplo 1.20. La recta real es separable, ya que el conjunto \mathbb{Q} de los números racionales es denso y contable.

Se deja como tarea al lector demostrar que todo espacio contable (incluyendo los finitos) es separable.

Definición 1.4.3. Sea (M, d) un espacio métrico, $S \subset M$, $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ una colección de subconjuntos de M se dice que \mathcal{A} es un **recubrimiento** de S si

$$S \subset \bigcup_{\alpha} A_\alpha.$$

Si \mathcal{A} es una colección de conjuntos abiertos, entonces \mathcal{A} se denomina **recubrimiento abierto** de S .

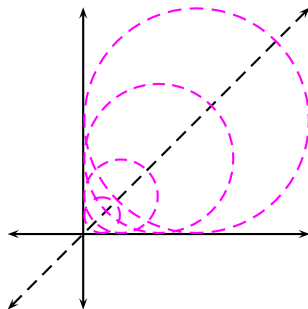
Ejemplo 1.21. En (\mathbb{R}, d_u) , consideremos $S = [0, 1]$

$$\mathcal{A} = \left\{ \left(\frac{-1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}_1} \text{ es un recubrimiento abierto de } S$$

$$[0, 1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{-1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right).$$

Además es un recubrimiento numerable.

Ejemplo 1.22. En (\mathbb{R}^2, d_u) tomemos $S = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ la colección \mathcal{A} de todos los discos con centros en (x, x) y radios $x, x > 0$, es un recubrimiento de S . Este recubrimiento no es numerable. Sin embargo, contiene un subrecubrimiento numerable de S , a saber, todos los círculos para los que x es racional.

Figura 1.3: Recubrimiento abierto de $[0, 1)$.Figura 1.4: Recubrimiento abierto de $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$.

Ejemplo 1.23. En (\mathbb{R}, d_u) , tomemos \mathbb{R}^+ y $\mathcal{A} = \{[n, n+1] \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ es un recubrimiento de \mathbb{R}^+ numerable y no abierto.

$$\mathbb{R}^+ \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} [n, n+1].$$

Teorema 1.4.2. Si S es un conjunto separable de un espacio métrico todo recubrimiento abierto de S admite un subrecubrimiento contable.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ un recubrimiento abierto de S , es decir, $S \subset \bigcup_\alpha A_\alpha$. Como S es separable existe un subconjunto contable T tal que

$$T \subset S \text{ y } S \subset \bar{T}$$

Designemos $T = \{x_1, x_2, \dots\}$. Sea \mathcal{G} la familia contable de todas las esferas abiertas de la forma

$$C_m^n = \beta(x_n; \frac{1}{m}),$$

para $x_n \in T$ y $m \geq 1$ es un número natural, como

$$\mathcal{G} = \{C_m^n\}_{\substack{m \geq 1 \\ n \geq 1}}, n \in \mathbb{N}$$

entonces \mathcal{G} es contable.

Designemos $\mathcal{G} = \{B_1, B_2, \dots\}$.

Tomemos las bolas $B_k \in \mathcal{G}$ para las cuales existe un $A_k \in \mathcal{A}$ tal que $B_k \subset A_k$.

Construimos de esta forma una subfamilia contable \mathcal{A}_1 de $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots\}$.

Demostremos que \mathcal{A}_1 cubre S , es decir, $S \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Sea $x \in S$. como \mathcal{A} es una cobertura de S , existe algún $A \in \mathcal{A}$ con $x \in A$; pero como A es abierto, $\exists r > 0$ tal que $\beta(x, r) \subset A$.

Elijamos un número natural $m \geq 1$ con $0 < \frac{1}{m} < \frac{r}{2}$. Ahora bien, $x \in \bar{T}$, ya que $S \subset \bar{T}$, y esto implica que $\beta(x; \frac{1}{m}) \cap T \neq \emptyset$, es decir, existe $x_n \in S$ y $x_n \in \beta(x; \frac{1}{m})$; entonces

$$d(x_n, x) < \frac{1}{m} \quad \text{para algún } n \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte, si

$$y \in \beta(x_n; \frac{1}{m})$$

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(y, x_n) < \frac{2}{m} < r$$

o sea

$$y \in \beta(x; r),$$

entonces

$$\beta(x_n; \frac{1}{m}) \subset \beta(x; r) \subset A$$

pero, sabiendo que

$$\beta(x_n; \frac{1}{m}) \in \mathcal{G},$$

la construcción de \mathcal{A}_1 nos dice que

$$\beta(x_n; \frac{1}{m}) \subset A_k \text{ para } A_k \in \mathcal{A}_1.$$

De allí que $x \in A_k$, es decir $S \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ y \mathcal{A}_1 constituye un subrecubrimiento contable de \mathcal{A} . ■

Corolario 1.4.1. *Teorema de recubrimiento de Lindelöf. Supongamos que $S \subset \mathbb{R}^n$ y que $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_\alpha$ es un recubrimiento de S . Entonces existe una subcolección numerable de \mathcal{A} que también cubre a S .*

Demostración. Se obtiene directamente del hecho que \mathbb{R}^n es separable y aplicando el teorema 1.4.2. (Otra versión se puede ver en [1]). ■

Teorema 1.4.3. *En un espacio métrico todo conjunto totalmente acotado es separable.*

Demostración. Sea S un conjunto $T.A$ de un espacio (M, d) . $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ existe un conjunto finito de puntos

$$x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \dots, x_{m_n} \in S$$

tales que

$$S \subset \bigcup_{i=1}^n \beta(x_{m_i}; \frac{1}{m}).$$

Designemos $T = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{x_{m_1}, \dots, x_{m_n}\}$ es contable (unión contable de finitos).

Claramente $T \subset S$, T contable, si demostramos que $S \subset \bar{T}$ entonces S es separable. Sea $x \in S$ y $\epsilon > 0$ un número real. Elijamos $m \in \mathbb{N} \mid 0 < \frac{1}{m} < \epsilon$. En virtud de la definición de T , existe un $x_{m_i} \in T$ con $x \in \beta(x_{m_i}; \frac{1}{m})$, es decir,

$$d(x, x_{m_i}) < \frac{1}{m} < \epsilon$$

luego,

$$x_{m_i} \in \beta(x; \epsilon),$$

lo que implica

$$\forall \epsilon > 0 : \beta(x; \epsilon) \cap T \neq \emptyset,$$

entonces $x \in \bar{T}$. O sea que $S \subset \bar{T}$. ■

El recíproco de este teorema no es, en general cierto.

Ejemplo 1.24. El conjunto \mathbb{R} en la recta real, es separable pero no es totalmente acotado.

1.5. Propiedad de Bolzano-Weierstrass

En esta sección definiremos la propiedad de Bolzano-Weierstrass, propiedad que poseen los espacios métricos compactos como se demostrará más adelante.

Definición 1.5.1. Sea S un conjunto no vacío de un espacio métrico. Decimos que S posee la propiedad de **Bolzano-Weierstrass**, si todo subconjunto infinito T de S admite un punto de acumulación en S , es decir, $T' \cap S \neq \emptyset$. Para abreviar, a tales conjuntos los llamaremos *BW*.

Ejemplo 1.25. En (\mathbb{R}, d_u) el conjunto $S = (0, 1)$ no posee la propiedad *BW*, en efecto, sea $T = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ un subconjunto infinito de S , $T' = \{0\}$ y $0 \notin S$.

El siguiente teorema es de carácter puramente auxiliar en la tarea de demostrar la equivalencia entre conjuntos compactos y *BW*.

Teorema 1.5.1. *Todo conjunto BW en un espacio métrico es totalmente acotado.*

Demostración. (Por contradicción). Sea S un conjunto *BW* en un espacio (M, d) . Supongamos que S no es *T.A.* Debe entonces existir algún número real $\epsilon_1 > 0$ tal que no existe secuencia finita de puntos de S , de forma que las bolas con centro esos puntos y radio ϵ_1 , cubra S .

Esto nos permite construir una sucesión infinita de puntos de S que designaremos $T = \{x_1, x_2, \dots\}$ de la siguiente manera: Tomamos arbitrariamente x_1

de S . En virtud de nuestra hipótesis, S no puede estar contenido en $\beta(x_1; \epsilon_1)$; elegimos $x_2 \in S - \beta(x_1; \epsilon_1)$. De nuevo por la hipótesis se tiene que

$$S \not\subset \beta(x_1; \epsilon_1) \cup \beta(x_2; \epsilon_1),$$

luego existe $x_3 \in S$ tal que $d(x_1, x_3) \geq \epsilon$ y $d(x_3, x_2) \geq \epsilon$. Suponiendo contru-
idos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , notamos que S no puede estar contenido en $\bigcup_{i=1}^{n-1} \beta(x_i; \epsilon_1)$
y tomamos $x_n \in S - \bigcup_{i=1}^{n-1} \beta(x_i; \epsilon_1)$. Hemos formado así, por inducción, al con-
junto infinito T con $T \subset S$. En virtud de su construcción posee la propiedad

$$\forall x_i, x_j \in T \cap \beta(x; \frac{\epsilon_1}{2}) \text{ con } i \neq j, \quad d(x_i, x_j) \geq \epsilon_1. \quad (1.2)$$

Dado que S es BW , existe un punto $x \in S$ que es de acumulación de T . Ello implica que $\beta(x; \frac{\epsilon_1}{2})$ contiene infinitos puntos de T y podemos tomar

$$x_i, x_j \in T \cap \beta(x; \frac{\epsilon_1}{2}) \text{ con } i \neq j;$$

entonces

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x) + d(x_j, x) < \epsilon_1$$

lo cual contradice (1.2).

Luego S debe ser totalmente acotado. ■

1.6. Límites y sucesiones

En esta sección haremos un breve resumen sobre límites de sucesiones y funciones. Iniciaremos con el concepto de límite de una función.

Definición 1.6.1. Sean (M_1, d_1) y (M_2, d_2) espacios métricos y sea

$$\begin{aligned} f : M_1 &\rightarrow M_2 \\ x &\rightarrow f(x). \end{aligned}$$

Supongase además que $a \in D'(f)$, $b \in M_2$. Se dice que el **límite** de $f(x)$ es b cuando x tiende a a , y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

si

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 \mid \langle \forall x \in D(f) : 0 < d_1(x, a) < \delta \implies d_2(f(x), b) < \epsilon \rangle$$

Antes de definir el límite de una sucesión recordemos la definición de sucesión.

Definición 1.6.2. Si tenemos una función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow (M, d) \\ n &\rightarrow f(n) = x_n, \end{aligned}$$

la función f se denomina **sucesión**. La sucesión completa la denotaremos $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definición 1.6.3. Sea $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico (M, d) . Decimos que un punto $p \in M$ es **límite** de (\mathcal{X}_n) , si toda bola con centro en p deja por fuera sólo un número finito de elementos de (\mathcal{X}_n) . O lo que es lo mismo, sí $\forall \epsilon > 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N \implies x_n \in \beta(p; \epsilon).$$

También se expresa diciendo que $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a p ó $\mathcal{X}_n \rightarrow p$. Así pues, si una sucesión tiene límite, se dice que es **convergente**.

Ejemplo 1.26. En (\mathbb{R}, d_u) , una sucesión $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se llama **creciente** si $x_n \leq x_{n+1}$ para todo n . Si una sucesión creciente está acotada superiormente (esto es, si $x_n \leq K$ para $K > 0$ y para todo n), entonces (\mathcal{X}_n) converge hacia el supremo de su recorrido, $\sup\{x_1, x_2, \dots\}$. Análogamente, (\mathcal{X}_n) se llama **decreciente** si $x_{n+1} \leq x_n$ para todo n . Cada sucesión decreciente acotada inferiormente converge hacia el ínfimo de su recorrido. Por ejemplo, $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}_1} = \left(\frac{1}{n}\right)$ converge hacia 0.

A continuación demostraremos que una sucesión convergente admite un límite único.

Teorema 1.6.1. *Una sucesión $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de un espacio métrico (M, d) puede converger hacia un punto de S , a lo sumo.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{X}_n \rightarrow p$ y que $(\mathcal{X}_n) \rightarrow q$. Entonces para un n suficientemente grande, $d(x_n, p) < \epsilon/2$, $d(x_n, q) < \epsilon/2$ y

$$0 \leq d(p, q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q) < \epsilon,$$

o sea

$$0 \leq d(p, q) < \epsilon.$$

Así pues, $d(p, q)$ es un número no negativo no menor que cualquier positivo, y por consiguiente sólo puede ser 0, lo que quiere decir, de acuerdo con el primero de los axiomas de la métrica, que $p = q$. ■

Ejemplo 1.27. En el espacio (\mathbb{R}, d_u) tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. La misma sucesión en el espacio métrico $T = (0, 1]$ no converge puesto que el único candidato para límite es 0 y $0 \notin T$. Este ejemplo muestra que la convergencia o divergencia de una sucesión depende tanto del espacio elegido como de la métrica.

Definición 1.6.4. *Sea*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow (M, d) \\ n &\rightarrow f(n) = x_n \end{aligned}$$

una sucesión y $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función inyectiva. Decimos que

$$\begin{aligned} f \circ k : \mathbb{N} &\rightarrow (M, d) \\ n &\rightarrow f \circ k(n) = f[k(n)] = x_{k(n)} \end{aligned}$$

*es una **subsucesión** de f . La subsucesión completa se denota $(\mathcal{X}_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ó $(\mathcal{X}_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.*

Ciertamente, los x_{k_n} son todos términos de (\mathcal{X}_n) . Por otra parte, si $n \neq m$ entonces $k(n) \neq k(m)$, por ser k inyectiva, de manera que $x_{k(n)}$, $x_{k(m)}$ no son el mismo término de (\mathcal{X}_n) .

Ejemplo 1.28. Toda sucesión es subsucesión de sí misma. En efecto, la inyección k es la función idéntica (biyectiva) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Cuando se trata de sucesiones en un espacio métrico, muchas de sus propiedades son heredadas por sus subsucesiones. Veremos en seguida que ello sucede con la convergencia, más aún, se conserva el mismo límite.

Teorema 1.6.2. *En un espacio métrico (M, d) una sucesión $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge hacia p si, y sólo si, cada subsucesión $(\mathcal{X}_{k(n)})$ converge hacia p .*

Demostración. **i.** \implies Supongamos que $\mathcal{X}_n \rightarrow p$ por definición $\forall \epsilon > 0 :$
 $\exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N$ se tiene que $x_n \in \beta(p; \epsilon)$, es decir,

$$\{x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\} \subset \beta(p; \epsilon).$$

Considere la subsucesión $(\mathcal{X}_{k(n)})$ de (\mathcal{X}_n) . Entonces

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq k_0 \{x_{k_0}, x_{k_0+1}, x_{k_0+2}, \dots\} \subset \{x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\} \subset \beta(p; \epsilon).$$

Luego $(\mathcal{X}_{k(n)}) \rightarrow p$.

ii. \impliedby Se verifica trivialmente, ya que (\mathcal{X}_n) es una subsucesión de sí misma.

■

Ejemplo 1.29. En (\mathbb{R}, d_u) , consideremos $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$.

Si tomamos las sucesiones constantes $(1, 1, 1, \dots)$ y $(-1, -1, -1, \dots)$ son subsucesiones de (\mathcal{X}_n) por medio de las inyecciones $k(n) = 2n$ y $k(n) = 2n - 1$ respectivamente, convergen a 1 y -1, entonces por el teorema anterior (\mathcal{X}_n) NO es convergente.

En la familia de todas las sucesiones en un espacio métrico, conviene distinguir aquellas, que llamaremos de Cauchy, que poseen la propiedad de que sus términos se van acercando unos a otros tanto como se desee.

Definición 1.6.5 (Sucesión de Cauchy). Una sucesión $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de un espacio métrico se llama sucesión de **Cauchy** si satisface la siguiente condición

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } d(x_n, x_m) < \epsilon \text{ siempre que } n \geq N \text{ y } m \geq N.$$

Ejemplo 1.30. En $S = (0, 1)$ con la métrica usual la sucesión $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. En efecto, sea $\epsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}_1$ tal que: $N > \frac{1}{\epsilon}$ (propiedad Arquimédiana). Tenemos: Si $m, n \geq N \implies \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$ y si $m > n \geq N$

$$d(x_n, x_m) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| = \left| \frac{m - n}{mn} \right| = \frac{m - n}{mn} \leq \frac{m}{mn} = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Tales sucesiones están estrechamente relacionadas con las convergentes, como veremos enseguida.

Teorema 1.6.3. En un espacio métrico toda sucesión convergente es de Cauchy.

Demostración. Sea $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico (M, d) , tal que $\mathcal{X}_n \rightarrow p, p \in M$. Entonces por definición para cada $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N : d(x_n, p) < \frac{\epsilon}{2}$. $\forall n, m \geq N$ resulta pues que $d(x_n, p) < \frac{\epsilon}{2}$ y $d(x_m, p) < \frac{\epsilon}{2}$, de donde

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, p) + d(p, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

o sea que (\mathcal{X}_n) es de Cauchy. ■

El recíproco en general, no es cierto como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.31. No toda sucesión de Cauchy es convergente. Por ejemplo, la sucesión $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el subespacio $T = (0, 1]$ de (\mathbb{R}, d_u) , pero dicha sucesión no converge en T .

El recíproco del teorema anterior se cumple en cada espacio euclídeo \mathbb{R}^n

Teorema 1.6.4. *En el espacio euclídeo \mathbb{R}^n toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Ver su demostración en [1].

CAPÍTULO 2

CONJUNTOS COMPACTOS

Es difícil interpretar intuitivamente el concepto de conjunto compacto o motivar su definición. No obstante, puede decirse que se trata de una generalización de conjunto finito. En efecto, todo conjunto finito es compacto, como se demostrará más adelante y a pesar de que existen conjuntos compactos infinitos, veremos que sus propiedades topológicas los hacen muy semejantes a los finitos.

2.1. Definición de conjunto compacto

Definición 2.1.1. *Sea S un conjunto no vacío en un espacio métrico. Decimos que S es **compacto** si todo recubrimiento abierto de S admite un subrecubrimiento finito.*

Ejemplo 2.1. La recta real \mathbb{R} no es compacta, pues el recubrimiento de \mathbb{R} por intervalos abiertos

$$\mathcal{A} = \{(n, n + 2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

no admite un subrecubrimiento finito que cubra \mathbb{R} .

Ejemplo 2.2. El siguiente subespacio de \mathbb{R} es compacto:

$$S = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$

En efecto, sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_\alpha$ un recubrimiento abierto de S , es decir,

$$S \subset \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}.$$

Como $0 \in S$, existe un A_0 de \mathcal{A} tal que $0 \in A_0$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ número real tal que

$$\beta(0; \varepsilon) \subset A_0,$$

ya que A_0 es abierto.

Además, $0 \in S'$ por lo tanto $\beta(0; \varepsilon)$ contiene infinitos puntos de S , es decir,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0, \frac{1}{n} \in \beta(0; \varepsilon) \subset A_0.$$

$\forall n < n_0$ tomemos un A_n de \mathcal{A} tal que $\frac{1}{n} \in A_n$. Luego $\{A_0, A_1, \dots, A_{n_0-1}\}$ es un recubrimiento finito de S .

Ejemplo 2.3. Todo subconjunto finito en un espacio métrico es compacto. En efecto, sea S un subconjunto finito de un espacio métrico (M, d) y $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ un recubrimiento abierto de S , es decir

$$S \subset \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}.$$

Designemos $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Ahora, para cada $x \in S$ escojamos algún A de \mathcal{A} tal que $\{x_i\} \subset A$ y lo llamamos A_i . Luego $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es un recubrimiento finito de S , por lo tanto S es compacto. Claramente el recíproco no se cumple como lo muestra el ejemplo 2.2.

2.2. Propiedades de los conjuntos compactos

Teorema 2.2.1. *Todo conjunto compacto en un espacio métrico es cerrado.*

Demostración por contradicción. Sea S un subconjunto compacto de un espacio métrico (M, d) .

Supongamos que S no es cerrado. Entonces existe un punto $y \in S'$ tal que $y \notin S$.

Si $x \in S$, sea

$$r_x = d(x, y)/2.$$

Cada r_x es positivo ya que $y \notin S$ y la colección

$$\{\beta(x; r_x) : x \in S\}$$

es un recubrimiento abierto de S . Como S es compacto

$$S \subset \bigcup_{i=1}^n \beta(x_i; r_i) \text{ para algún } n \in \mathbb{N}.$$

Designemos r al menor de los r_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Comprobemos que $\beta(y; r)$ no tiene puntos en común con ninguna de las bolas $\beta(x_i; r_i)$. De hecho, si $z \in \beta(y; r)$, entonces $d(z, y) < r \leq r_i$, y por la desigualdad triangular tenemos que

$$d(y, x_i) \leq d(y, z) + d(z, x_i),$$

luego

$$d(z, x_i) \geq d(y, x_i) - d(y, z) = 2r_i - d(z, y) > 2r_i - r_i = r_i.$$

Por lo tanto, $z \notin \beta(x_i; r_i)$. Resulta, pues,

$$\beta(y; r) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n \beta(x_i; r_i) \right) = \emptyset$$

entonces $\beta(y; r) \cap S$ es vacío, lo que contradice que $y \in S'$. Luego S es cerrado. ■

Teorema 2.2.2. *Todo conjunto compacto en un espacio métrico es TA.*

Demostración. Sea S compacto y $\varepsilon > 0$ un número real. La familia de las bolas $\beta(x; \varepsilon)$ para todo $x \in S$ es, evidentemente, un recubrimiento abierto de S . Por hipótesis, existe un subrecubrimiento finito.

$$\{\beta(x_1; \varepsilon), \beta(x_2; \varepsilon), \dots, \beta(x_n; \varepsilon)\},$$

es decir,

$$S \subset \bigcup_{i=1}^n \beta(x_i; \varepsilon), \text{ donde } x_1, x_2, \dots, x_n \in S.$$

Luego S es TA . ■

Teorema 2.2.3. *Todo conjunto compacto en un espacio métrico es acotado.*

Demostración. Sea S un conjunto compacto en un espacio métrico (M, d) , por el teorema 2.2.2 S es TA y aplicando el teorema 1.4.1 se tiene que S es acotado. ■

El recíproco de los teoremas 2.2.1, 2.2.2, 1.2.1, no es cierto en general, como se mostrará en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.4. Un conjunto cerrado pero no compacto.

En \mathbb{R} con la métrica usual. Sea

$$S = \left\{ 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \dots, \frac{1}{n}, n, \dots \right\} \cup \{0\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Este conjunto es cerrado ya que $S' = \{0\}$ y $S' \subseteq S$. Este conjunto no es compacto ya que no es acotado.

Ejemplo 2.5. Un conjunto acotado pero no compacto.

En (\mathbb{R}, d_u) . Sea

$$S = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+2}{n+1}, \dots \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

S es acotado:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < \frac{n+2}{n+1} \leq \frac{3}{2}$$

pero, S no es compacto ya que no es cerrado, puesto que 1 es un punto de acumulación de S y no pertenece al conjunto S .

En un espacio métrico, compacto implica cerrado y acotado, pero, el recíproco en general, no se cumple como lo veremos a continuación.

Ejemplo 2.6. Sea (\mathbb{N}, \check{d}) , \mathbb{N} es acotado y cerrado, pero no es compacto, ya que, \mathbb{N} no es totalmente acotado como se demostró en el ejemplo 1.19 del capítulo 1.

Ejemplo 2.7. En (M, d_u) , el conjunto $M = (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ es cerrado, acotado (queda como ejercicio su demostración) pero no es compacto. En efecto, la sucesión $(1, 1,41, 1,414, \dots)$ es una sucesión en M que no admite subsucesión convergente en M .

En resumen, la compacidad implica ser cerrado, acotado y totalmente acotado, pero ninguna de las tres propiedades ni por parejas, ni las tres juntas implica la compacidad.

Más adelante se demostrará que en (\mathbb{R}^n, d_u) ser compacto es equivalente a ser cerrado y acotado.

2.3. Subconjuntos compactos

Es fácil darse cuenta de que no todo subconjunto de un compacto es compacto; sin embargo, si el conjunto es cerrado, ello basta para asegurar su compacidad. Esto se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. *Todo subconjunto cerrado de un espacio métrico compacto es compacto.*

Demostración. Sea S un subconjunto cerrado de un espacio métrico (M, d) . Sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_\alpha$ un recubrimiento abierto de S , es decir,

$$S \subset \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}.$$

Como S es cerrado entonces $S^c = M - S$ es abierto, luego

$$\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \right) \cup S^c$$

es un recubrimiento abierto de M , y como M es compacto existen $A_1, A_2, \dots, A_n, S^c$ tales que

$$S \subset M \subset \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cup S^c$$

luego $S \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$ por lo tanto S es compacto. ■

Uno de nuestros propósitos principales es demostrar la equivalencia entre compacidad y la propiedad de Bolzano-Weierstrass (BW)* lo cual haremos en la siguiente sección.

2.4. Otra definición de compacidad

Teorema 2.4.1. *En un espacio métrico un conjunto es compacto si y sólo si es BW . Lo haremos en dos partes:*

i. S es compacto $\Rightarrow S$ es BW .

Demostración por contradicción. Sea S un subconjunto compacto de un espacio (M, d) . Supongamos que S no es BW , es decir, existe un subconjunto infinito T de S tal que $T' \cap S = \emptyset$; entonces $\forall x \in S, x \notin T'$, es decir,

$$\exists \varepsilon > 0 \mid B(x; \varepsilon) \cap T = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } x \notin T \\ \{x\}, & \text{si } x \in T \end{cases} \quad (2.1)$$

lo que implica $B(x; \varepsilon)$ contiene a lo sumo un punto de T . $\{B(x; \varepsilon) : \forall x \in S\}$ es un recubrimiento abierto de S y como S es compacto

$$S \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i; \varepsilon)$$

*ver definición de BW en la sección 1.5

lo que implica

$$T \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i; \varepsilon)$$

ya que $T \subset S$. Esto teniendo en cuenta (2.1) contradice el hecho de que T sea infinito. Por lo tanto S es *BW*. ■

ii. S es *BW* $\Rightarrow S$ es compacto.

Demostración por contradicción. Sea S un subconjunto *BW* de un espacio métrico (M, d) . Supongamos que S no es compacto.

Sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ un recubrimiento abierto de S tal que \mathcal{A} no se puede reducir a un subrecubrimiento finito. En virtud de teorema 1.5.1 S es totalmente acotado y, por el teorema 1.4.3 de la página 23 S es separable. Aplicando el teorema 1.4.2 existe una subfamilia contable \mathcal{A}_1 de \mathcal{A} que también recubre S , es decir

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Designemos $\mathcal{A}_1 = \{A_1, A_2, \dots\}$. Por la escogencia de \mathcal{A} , para todo número natural $n \geq 1$,

$$S \not\subset \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Esto, nos permite construir un conjunto infinito $T = \{x_1, x_2, \dots\}$ con $T \subset S$, de la siguiente manera: Tomamos $x_1 \in S$ y,

$$x_n \in S - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i, \forall n > 1.$$

Ahora bien, como S es *BW*, existe un punto $x \in S$, tal que $x \in T'$, y como \mathcal{A}_1 cubre S , existe A_k de \mathcal{A}_1 tal que $x \in A_k$ para algún k natural. Pero entonces A_k es una vecindad de x , ya que es abierto, luego A_k contiene infinitos puntos de T .

Forzosamente, debe existir algún $x_n \in T \cap A_k$ con $n > k$; pero esto

contradice la construcción de T , la cual hace que $x_n \notin A_k$, si $n > k$.

Luego S debe ser compacto. ■

2.5. Compacidad secuencial

En la sección anterior demostramos la equivalencia entre la propiedad de BW y compacidad; ahora demostraremos que éstas son equivalentes a la compacidad secuencial. Para este propósito, introducimos el concepto de compacidad secuencial:

Definición 2.5.1. Sea S un subconjunto de un espacio métrico (M, d) .

Decimos que S es **secuencialmente compacto**, si toda sucesión en S admite una subsucesión convergente en S . Para abreviar a tales conjuntos los llamaremos **SC**.

Ejemplo 2.8. En (\mathbb{R}, d_u) el intervalo $(0, 1)$ no es SC.

En efecto, consideremos la sucesión

$$(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n} \right),$$

luego es obvio que $\mathcal{X}_n \rightarrow 0$ y toda subsucesión de $(\mathcal{X}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a cero, pero $0 \notin (0, 1)$ por tanto $(0, 1)$ no es secuencialmente compacto.

Teorema 2.5.1. Sea S un subconjunto de un espacio métrico (M, d) .

S es BW, si y sólo si, S es SC. Lo haremos en dos partes:

i. S es BW $\Rightarrow S$ es SC.

Demostración. Sea S un subconjunto de un espacio (M, d) , S con la propiedad BW y sea $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en S . Llamemos $T = \{x_1, x_2, \dots\}$ el recorrido de (\mathcal{X}_n) . Si T es finito entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq n_0, \quad x_n = x_{n_0},$$

luego $(x_{n_0}, x_{n_0}, x_{n_0}, \dots)$ es una subsucesión constante de $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge al punto x_{n_0} de S .

Si T es infinito, por la hipótesis existe un punto $p \in T'$ tal que $p \in S$. Como $p \in T'$ entonces toda bola con centro en p contiene infinitos puntos de T , es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0, x_n \in B(p; \varepsilon)$$

por lo tanto $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a p , y como toda sucesión es subsucesión de sí misma se tiene que S es SC . ■

ii. S es $SC \Rightarrow S$ es BW .

Demostración. Sea S un subconjunto SC en un espacio métrico (M, d) . Sea T un subconjunto infinito de S ; construyamos en T una sucesión $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_1 \in T, x_2 \in T - \{x_1\}, x_3 \in T - \{x_1, x_2\}$, así sucesivamente la sucesión tendrá la propiedad:

$$x_n \neq x_m, \text{ si } m \neq n.$$

Como S es SC , existe una subsucesión

$$(\mathcal{X}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow p, p \in S.$$

Como los términos de $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son todos distintos, serán diferentes dos a dos los términos de $(\mathcal{X}_{k(n)})$, lo cual implica que el rango de esta última sea infinito; designémoslo B . Como $(\mathcal{X}_{k(n)}) \rightarrow p$ entonces

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} \mid n \geq N, \mathcal{X}_{k(n)} \in B(p; \varepsilon)$$

es decir, toda bola con centro en p contiene infinitos puntos de B luego por el teorema 1.2.3, $p \in B'$. Como $B \subset T, p \in T'$, ya que $B' \subset T'$, por lo tanto $T' \cap S \neq \emptyset$, luego S es BW . ■

De los teoremas 2.4.1, 2.5.1 se obtiene directamente el siguiente teorema:

Teorema 2.5.2. *S es un subconjunto compacto en un espacio métrico (M, d) si, y sólo si, S es secuencialmente compacto.*

Se deduce que para espacios métricos, ser compacto, ser secuencialmente compacto y poseer la propiedad de Bolzano-Weiersstras, son condiciones equivalentes. La acotación total por sí sola no es equivalente a ninguna de las tres anteriores pero, si le agregamos la completitud del espacio métrico, entonces puede probarse la equivalencia, lo que se demostrará en la siguiente sección.

2.6. Compacidad en espacios métricos completos.

Hasta ahora tenemos tres argumentos distintos para definir un conjunto compacto. En esta sección estudiaremos uno más: todo conjunto totalmente acotado y completo es compacto, para ello introduciremos inicialmente el concepto de completitud.

Definición 2.6.1. *Un subconjunto S de un espacio métrico (M, d) se llama **completo** si toda sucesión de Cauchy en S converge en S .*

Ejemplo 2.9. En (\mathbb{Q}, d_u) , la sucesión 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, ... de números con una cantidad finita de decimales, que converge (en \mathbb{R}) a $\sqrt{2}$, es una sucesión de Cauchy en \mathbb{Q} que no converge en \mathbb{Q} , luego (\mathbb{Q}, d_u) no es completo.

Ejemplo 2.10. (\mathbb{R}, d_u) es completo. Ver su demostración en [1].

El teorema que presentamos a continuación relaciona la completitud con la compacidad.

Teorema 2.6.1. *En todo espacio métrico (M, d) , cada subconjunto compacto S es completo.*

Demostración. sea $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en S y $T = \{x_1, x_2, \dots\}$ el recorrido de $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si T es finito, entonces (\mathcal{X}_n) converge hacia uno de los puntos de T , luego $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en S .

Si T es infinito, por la propiedad de *BW* T admite un punto de acumulación p en S puesto que T es compacto. Probaremos que $\mathcal{X}_n \rightarrow p$.

Dado

$$\varepsilon > 0, \text{ elijamos } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n, m \geq n_0 \text{ implique } d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que $p \in T'$ se puede afirmar que la bola $\beta(p; \frac{\varepsilon}{2})$ contiene un punto x_m con $m \geq n_0$. Por lo tanto si $n \geq n_0$ la desigualdad triangular nos conduce a

$$d(x_n, p) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

luego $\mathcal{X}_n \rightarrow p$ de lo cual se deduce que toda sucesión de Cauchy en S converge en S , luego S es completo. ■

El recíproco de este teorema no es cierto, por ejemplo (\mathbb{R}, d_u) es completo y \mathbb{R} no es compacto, ya que no es acotado.

El siguiente teorema como ya se mencionó, es de gran importancia, ya que, nos proporciona nuevos criterios para decidir cuando un conjunto es compacto.

Teorema 2.6.2. *Un subconjunto de un espacio métrico (M, d) es compacto si, y sólo si, es completo y totalmente acotado.*

Sea S un subconjunto compacto de un espacio métrico (M, d) .

i. *S es compacto $\Rightarrow S$ es completo y totalmente acotado.*

Demostración. Se obtiene directamente del teorema 2.2.2 y del teorema 2.6.1. ■

ii *S es completo y totalmente acotado $\Rightarrow S$ es compacto.*

Demostración. Vamos a probar que S es secuencialmente compacto lo cual es suficiente.

Sea $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de S . Vamos a construir una subsucesión de (\mathcal{X}_n) que sea una sucesión de Cauchy, de manera que necesariamente converja.

Si el conjunto de puntos de la sucesión es finito, existirá al menos un punto que se repite infinitas veces y dichas repeticiones constituirán una subsucesión constante y por consiguiente convergente.

Supongamos que el conjunto de puntos de la sucesión es infinito.

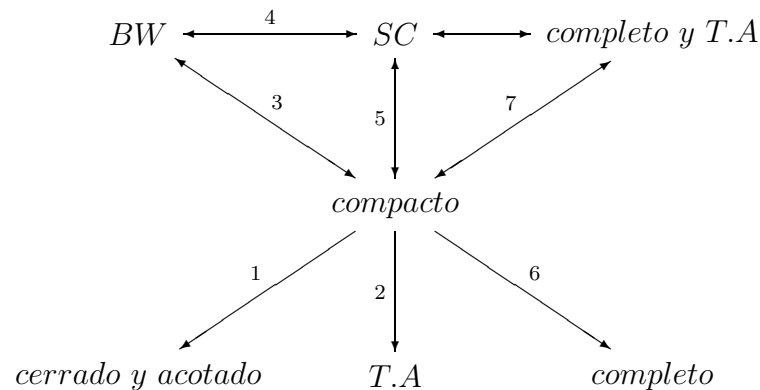
Siendo S totalmente acotado, para $\varepsilon = 1$ existe un conjunto finito de bolas de radio 1 cuya unión contiene a S . Claramente en al menos una de esas bolas llamémosla β_1 existen infinitos puntos de la sucesión (\mathcal{X}_n) ; sea y_1 uno de ellos. Para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existe un conjunto finito de bolas de radio $\frac{1}{2}$ cuya unión contiene a β_1 , luego de los infinitos puntos de (\mathcal{X}_n) que están β_1 , habrá infinitos puntos en al menos una de las bolas de radio $\frac{1}{2}$, llamémosla $\beta_{\frac{1}{2}}$; sea y_2 uno de tales puntos; para $\varepsilon = \frac{1}{3}$ existirán análogamente finitas bolas de radio $\frac{1}{3}$ cuya unión (que contiene a S) contiene a $\beta_1 \cap \beta_{\frac{1}{2}}$ y por consiguiente de los infinitos puntos de (\mathcal{X}_n) que están $\beta_1 \cap \beta_{\frac{1}{2}}$, habrá infinitos en al menos una de las bolas anteriores de radio $\frac{1}{3}$, llamémosla $\beta_{\frac{1}{3}}$; sea y_3 uno de tales puntos.

Continuando el proceso se obtiene una sucesión $(\mathcal{B}_{\frac{1}{k}})_{k \in \mathbb{N}}$ de bolas de radio $\frac{1}{k}$ con infinitos puntos de la sucesión (\mathcal{X}_n) inicial en

$$\beta_{\frac{1}{k}} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{k-1} \beta_{\frac{1}{n}} \right);$$

si y_k es uno de tales puntos, se obtiene una subsucesión $(\mathcal{Y}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (de la sucesión inicial) que es de Cauchy ya que los radios de las bolas tienden a cero y para todo $m \geq k$, $y_m \in \beta_{\frac{1}{k}}$. Como el espacio es completo dicha sucesión es convergente, quedando demostrado que S es secuencialmente compacto, y por el teorema 2.5.2 se tiene que S es compacto. ■

El siguiente diagrama resume la compacidad en un espacio métrico en general.



Notemos que compacto implica ser cerrado, acotado, totalmente acotado y completo, pero ninguna de estas propiedades implica la compacidad. Los números de las flechas corresponden al orden en el cual hemos hecho las demostraciones.

En la siguiente sección estudiaremos la compacidad en \mathbb{R}^n

2.7. Compacidad en \mathbb{R}^n

Con anterioridad vimos que un subconjunto compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado pero, el recíproco no es cierto para espacios métricos en general, pero sí para \mathbb{R}^n , lo cual demostraremos en esta sección. Éste teorema es conocido como el famoso teorema de Heine-Borel y para su demostración requerimos del teorema de encaje de Cantor el cual citaremos a continuación.

Teorema 2.7.1 (Encaje de Cantor). *Sea $\{Q_1, Q_2, Q_3, \dots\}$ una colección numerable de conjuntos, no vacíos de \mathbb{R}^n tales que:*

- i. $Q_{k+1} \subseteq Q_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$
- ii. *Cada uno de los conjuntos Q_k es cerrado y Q_1 está acotado.*
Entonces la intersección $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$, es cerrada y no vacía.

Ver su demostración en [1].

Teorema 2.7.2 (Heine-Borel). *Sea \mathcal{A} un recubrimiento abierto de un conjunto S de \mathbb{R}^n , cerrado y acotado. Entonces existe una subcolección finita de \mathcal{A} que también recubre a S .*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_\alpha$ un recubrimiento abierto de S , es decir,

$$S \subset \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}.$$

Por el teorema de recubrimiento de Lindelöf visto en el capítulo 1, se tiene que existe un subrecubrimiento de \mathcal{A} numerable, llamémoslo $\mathcal{A}_1 = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ que recubre S es decir,

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Consideremos, para $m \geq 1$, la reunión finita

$$S_m = \bigcup_{i=1}^m A_i.$$

Cada uno de los S_m es abierto, ya que es reunión de conjuntos abiertos. Probaremos que, para algún valor de m , la reunión de S_m recubre a S .

Para este fin consideremos el complementario $\mathbb{R}^n - S_m$, que es cerrado. Definimos una colección numerable de conjuntos $\{Q_1, Q_2, Q_3, \dots\}$ de la siguiente manera:

- i $Q_1 = S$
- ii $Q_m = S \cap \{\mathbb{R}^n - S_m\}$, para $m > 1$.

Esto es, Q_m consta de todos los puntos de S que están fuera de S_m . Si podemos probar que, para algún valor de m , el conjunto Q_m es vacío, habremos demostrado que, para éste valor de m , ningún punto de S está fuera de S_m ; en otras palabras, habremos probado que existe un S_m que recubre a S .

Observemos las siguientes propiedades de los Q_m : cada conjunto Q_m es cerrado, ya que es intersección finita de cerrados. Los conjuntos Q_m son decrecientes, ya que los conjuntos S_m son crecientes; esto es,

$$Q_{m+1} \subset Q_m.$$

Los conjuntos Q_m por ser subconjuntos de S , están acotados. Por lo tanto, si ninguno de los conjuntos Q_m es vacío, podemos aplicar el teorema de encaje de Cantor para concluir que la intersección

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$$

tampoco es vacía. Ello implica la existencia de un cierto punto $p \in S$ tal que $p \in Q_m, \forall m \geq 1$ o, lo que es equivalente, la existencia de un punto de S que esté fuera de todos los conjuntos S_m . Pero esto es imposible, ya que

$$S \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k.$$

Por lo tanto algún Q_m debe ser vacío, y esto termina la demostración. ■

A continuación presentaremos un teorema que caracteriza los conjuntos compactos en \mathbb{R}^n .

Teorema 2.7.3. *Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^n . Entonces las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- i. S es compacto.
- ii. S es cerrado y acotado.
- iii. Todo subconjunto infinito de S tiene un punto de acumulación en S .

Demostración. Del teorema 2.4.1 se tiene que

$$i \Leftrightarrow iii. \tag{2.2}$$

De los teoremas 2.2.1 y 1.2.1 respectivamente se tiene

$$i \Rightarrow ii.$$

Del teorema de Heine-Borel se tiene que

$$\text{ii} \Rightarrow \text{i},$$

luego

$$\text{i} \Leftrightarrow \text{ii}. \quad (2.3)$$

Si aplicamos transitividad en (2.2) y (2.3) se tiene que

$$\text{ii} \Leftrightarrow \text{iii}$$

por lo tanto se cumplen las equivalencias. ■

Ejemplo 2.11. En (\mathbb{R}^n, d_u) el intervalo $[a, b]$ es compacto, ya que es cerrado y acotado.

En [1] se demuestra directamente de la definición de conjunto compacto.

Ejemplo 2.12. Sea S el conjunto

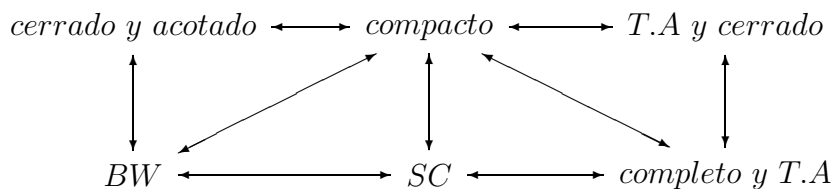
$$\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

S no es compacto porque no es cerrado, ya que 1 y -1 son puntos de acumulación de S y no pertenecen a S .

Ejemplo 2.13. En (\mathbb{R}^2, d_u) , el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ es un conjunto cerrado y acotado, por lo tanto es compacto.

Ejemplo 2.14. En (\mathbb{R}, d_u) el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x\}$ es un conjunto cerrado pero no acotado, luego no es compacto.

Podemos resumir la compacidad de un conjunto en el espacio métrico (\mathbb{R}^n, d_u) en el siguiente diagrama.



CAPÍTULO 3

CONEXIDAD EN ESPACIOS MÉTRICOS

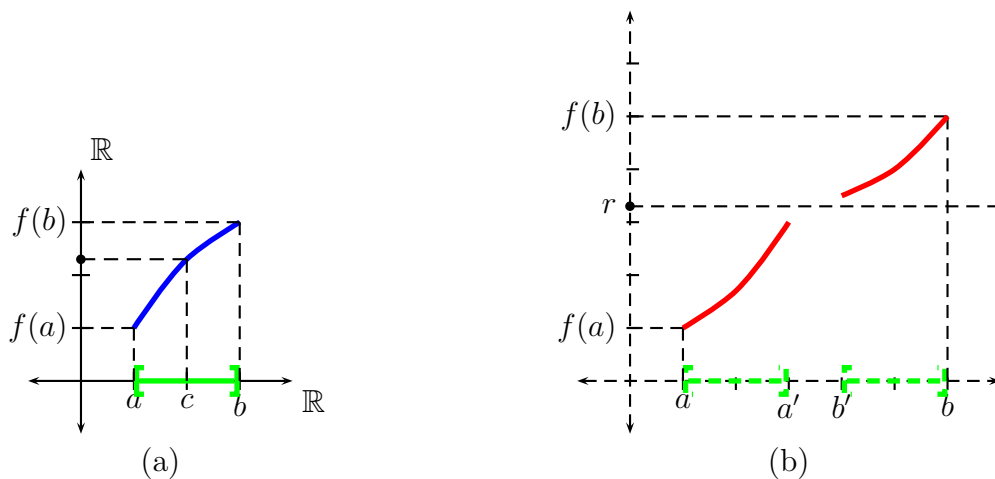


Figura 3.1:

Uno de los teoremas básicos del cálculo elemental acerca de las funciones continuas y que demostraremos más adelante es el Teorema de Valor Intermedio: Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y r es un número real comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un elemento $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = r$ (ver figura 3.1a). Este teorema no solo depende de la continuidad de f sino también de cierta

propiedad del intervalo $[a, b]$. Del capítulo anterior sabemos que el intervalo $[a, b]$ es compacto pero, no es a ésta propiedad a la que nos referimos aquí; si observamos la figura (3.1b), notamos que f es continua y el dominio de f es compacto sin embargo, el teorema no se cumple. La propiedad de $[a, b]$ que nos permite enunciar el teorema del valor intermedio se llama Conexión o conexidad.

3.1. Definición de conjunto conexo

La idea intuitiva que motiva el concepto de conjunto conexo es la “de ser de una sola pieza” es decir, que no está “constituido por dos partes separadas”. Formalmente tenemos:

Definición 3.1.1. *Sea (M, d) un espacio métrico. M es **no conexo** ó **disconexo** si existen $A, B \subset M$, no vacíos, abiertos disjuntos tales que $M = A \cup B$. En tal caso decimos que A y B son una **disconexión** de M . Decimos que M es **conexo** si no admite una desconexión.*

Un subconjunto $S \subset M$ se llama conexo si considerado como subespacio métrico de M , es un espacio métrico conexo.

Ejemplo 3.1. i. El espacio métrico $M = \mathbb{R} - \{0\}$ con la métrica usual es no conexo, ya que es unión de dos abiertos disjuntos, no vacíos: los números reales positivos y los números reales negativos.

ii. \mathbb{R} es conexo y todos los intervalos, lo cual se demostrará más adelante.

iii. Las gráficas siguientes ilustran los conceptos acabados de definir en (\mathbb{R}^2, d_u) :

Nótese que si A y B son una desconexión de M , A y B son también cerrados en (M, d) . En efecto, como $A \cap B = \emptyset$, entonces $A = M - B$, $B = M - A$, y aplicando el teorema 1.2.1 se tiene que A y B son cerrados. O sea que A

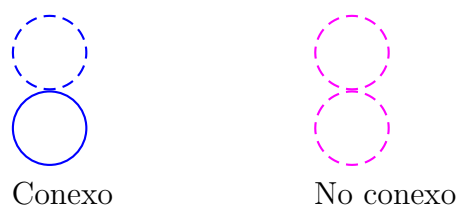


Figura 3.2:

y B son abiertos y cerrados en (M, d) . De lo anterior se deduce el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1. *Sea (M, d) un espacio métrico, M es desconexo si y sólo si existe un subconjunto propio no vacío de M que es abierto y cerrado en (M, d) .*

Demostración. **i.** \implies Supongamos que M es desconexo y que A y B son una desconexión de M . $A \neq \emptyset$ y tampoco coincide con M , ya que $B = M - A \neq \emptyset$; además, A es abierto y cerrado en (M, d) .

ii. \impliedby Supongamos que existe un subconjunto propio (no vacío y no coincidente con M) A de M que es abierto y cerrado en (M, d) . Consideremos $B = M - A$. B es no vacío por que A no coincide con M , y es abierto en (M, d) por ser A cerrado en (M, d) . Por otra parte, es evidente que

$$A \cap B = \emptyset \text{ y } M = A \cup B.$$

De manera que A y B son una desconexión de M y éste es desconexo. ■

El teorema anterior también se puede expresar así: M es conexo si y sólo si los únicos conjuntos abiertos y cerrados en (M, d) son el conjunto \emptyset y M .

Ahora veamos una caracterización de espacios conexos en términos de fronteras.

Teorema 3.1.2. *Un espacio métrico es conexo si y sólo si todo subconjunto propio tiene frontera no vacía.*

Demostración. Sea (M, d) un espacio métrico, A un subconjunto propio no vacío de M . Demostremos que:

$$M \text{ es desconexo} \iff \partial A = \emptyset.$$

- i. \Leftarrow Si $\partial A = \emptyset$ entonces $\partial A = \bar{A} - A^\circ = \emptyset$ lo cual implica que $\bar{A} = A^\circ = A$ ya que $A \subset \bar{A} = A^\circ$ y $A^\circ \subset A$, lo que implica que A es abierto y cerrado en (M, d) . O sea que M es desconexo lo que contradice la hipótesis.
- ii. \Rightarrow Supongamos que M es desconexo. Existe entonces un subconjunto propio A de M abierto y cerrado, es decir, $A = \bar{A} = A^\circ$, lo cual implica: $\partial A = \emptyset$.

■

En resumen tenemos: Para un espacio métrico (M, d) las tres siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i. M es conexo.
- ii. Los únicos conjuntos abiertos y cerrados en (M, d) son \emptyset y M .
- iii. Todo subconjunto propio no vacío de M tiene frontera no vacía.

3.2. Clausura y unión de conexos

Ahora estudiaremos lo que sucede con la conectividad al clausurar o unir conjuntos conexos.

Teorema 3.2.1. *Si A y B son conjuntos en (M, d) tales que A es conexo y $A \subset B \subset \bar{A}$ entonces B es conexo. En otras palabras: si B se forma añadiéndole a A algunos o todos sus puntos límites, entonces B es conexo.*

Demostración. Supongamos que S y T son conjuntos abiertos en (M, d) tales que

$$B = (S \cap B) \cup (T \cap B) \text{ y } (S \cap B) \cap (T \cap B) = \emptyset.$$

Verifiquemos que $S \cap B = \emptyset$ ó $T \cap B = \emptyset$. Como $A \subset B$,

$$A = (S \cap A) \cup (T \cap A) \text{ y } (S \cap A) \cap (T \cap A) = \emptyset;$$

pero A es conexo y, por lo tanto, no admite desconexión, osea que

$$S \cap A = \emptyset \quad (*)$$

(o bien $T \cap A = \emptyset$, lo cual conducirá a resultados análogos).

Demostremos ahora que $S \cap \bar{A} = \emptyset$, supongamos que existe $x \in \bar{A} \cap S$, luego $x \in \bar{A}$ y $x \in S$ como S es abierto se tiene que S es un entorno de x por lo tanto $x \in A \cap S \neq \emptyset$. Lo que contradice (*).

Como $S \cap \bar{A} = \emptyset$ y $B \subset \bar{A}$ entonces $S \cap B = \emptyset$ y B es conexo por no admitir desconexión alguna. ■

El recíproco de este teorema no es cierto como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. En (\mathbb{R}, d_u) sea $A = \mathbb{R} - \{0\}$ y $B = \bar{A} = \mathbb{R}$, es decir, $A \subset B \subset \bar{A}$, B es conexo sin embargo A es desconexo como se demostró en el ejemplo (3.1).

Ejemplo 3.3. En (\mathbb{R}^2, d_u) , sea A el conjunto de la figura 3.3 como $A \subset B \subset \bar{A}$, por el teorema anterior se tiene que B es conexo.

Corolario 3.2.1. Si A es un conjunto conexo, entonces \bar{A} es conexo.

Demostración. Teniendo en cuenta que $A \subset \bar{A} \subset \bar{\bar{A}}$ y por el teorema anterior $\bar{\bar{A}}$ es conexo. ■

En el capítulo 4 se demostrará que la conexidad es una propiedad topológica es decir, la conexidad es invariante ante una transformación continua, lo cual utilizaremos en el siguiente ejemplo.



Figura 3.3:

Ejemplo 3.4. Sea S el siguiente subconjunto del plano

$$S = \left\{ \left\{ x \right\} \times \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \mid 0 < x \leq 1 \right\}.$$

Como S es la imagen del conjunto conexo $(0,1]$ bajo una aplicación continua, S es conexo. De esta forma, su adherencia \bar{S} en \mathbb{R}^2 también es conexa. El conjunto adherencia es un ejemplo clásico en topología que se conoce como **curva seno del topólogo**. Está ilustrada en la figura 3.4 y es simplemente la curva inicial S con el intervalo vertical $\{0\} \times [-1, 1]$.

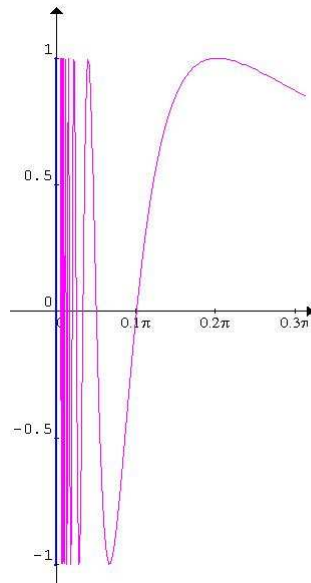


Figura 3.4: curva seno del topólogo

Lema 3.2.1. *Si los conjuntos A y B son una desconexión de M , y además S es un subconjunto conexo de M , entonces S está contenido bien en A , ó bien en B .*

Demostración. Como A y B son abiertos en M , los conjuntos $A \cap S$ y $B \cap S$ son abiertos en S . Estos dos conjuntos son disjuntos y su unión es S ; si fueran ambos no vacíos, constituirían una desconexión de S . De esta forma alguno de ellos es vacío. Por lo tanto, S está contenido enteramente en A ó en B . ■

La unión de conjuntos conexos puede no ser conexa.

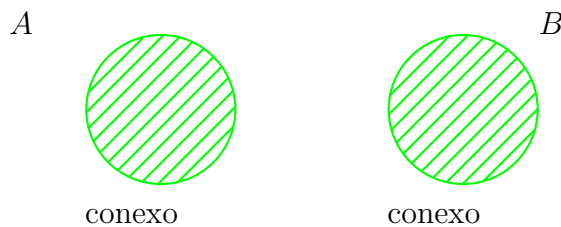


Figura 3.5: Unión de conexos desconexa.

Ejemplo 3.5. En (\mathbb{R}^2, d_u) dos bolas cerradas A, B como los de la figura 3.5 son conexas pero $M = A \cup B$ es desconexo en \mathbb{R}^2

Sin embargo, si la intersección en la familia es NO vacía, entonces la unión es conexa, pero podemos demostrar algo más general.

Teorema 3.2.2. *Sea \mathcal{F} una familia de conjuntos conexos en (M, d) . Si existe un $A_0 \in \mathcal{F}$ tal que*

$$\forall A \in \mathcal{F}, A \cap A_0 \neq \emptyset,$$

entonces

$$B = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \text{ es conexo.}$$

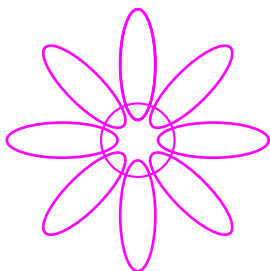


Figura 3.6: Una unión de conexos

Demostración. Sea S, T conjuntos abiertos en (M, d) . Supongamos que $S \cap B$, $T \cap B$ son una desconexión de B es decir,

$$B = (S \cap B) \cup (T \cap B), \quad (S \cap B) \cap (T \cap B) = \emptyset \text{ y } S \cap B \neq \emptyset, \quad T \cap B \neq \emptyset.$$

Tomemos un $A \in \mathcal{F}$ cualquiera; $A \subset B$ y como A es conexo por el lema 3.2.1 $A \subset S \cup B$ ó $A \subset T \cap B$.

$$\forall A \in \mathcal{F} : A \subset S \cap B \text{ ó } \forall A \in \mathcal{F} : A \subset T \cap B.$$

En efecto, si tomamos en particular $A_0, A \in \mathcal{F}$ tal que $A_0 \subset S \cap B$ y $A \subset T \cap B$ se tiene

$$A_0 \cap A \subset (S \cap B) \cap (T \cap B) = \emptyset$$

lo que contradice la hipótesis $\forall A \in \mathcal{F}, A_0 \cap A \neq \emptyset$.

Si $\forall A \in \mathcal{F} : A \subset S \cap B$ entonces $A \subset S$ lo que implica $B = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \subset S$ por lo tanto $S \cap B = B$ y $T \cap B = \emptyset$, (contradicción)

Análogamente,

$$\forall A \in \mathcal{F} : A \subset T \cap B \text{ se concluye que } S \cap B = \emptyset.$$

por lo tanto B es conexo por no admitir desconexión alguna. ■

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco de este teorema no se cumple.

Ejemplo 3.6. En (\mathbb{R}, d_u) los intervalos $(-\infty, 0)$ y $[0, \infty)$ son conexos cuya unión \mathbb{R} es conexa. Sin embargo, $(-\infty, 0) \cap [0, \infty) = \emptyset$.

Corolario 3.2.2. Si \mathcal{F} es una familia de conjuntos conexos de (M, d) tal que

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \neq \emptyset,$$

entonces

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \text{ es conexo.}$$

Demostración. Sea $A_0 \in \mathcal{F}$, por hipótesis $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \neq \emptyset$ lo que implica $A_0 \cap (\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A) \neq \emptyset$ luego $A_0 \cap (\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A) \subseteq A_0 \cap A$, entonces $A_0 \cap A \neq \emptyset \forall A \in \mathcal{F}$ y por el teorema 3.2.2 $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ es conexo. ■

Ejercicio 3.2.1. Si A y B son conjuntos conexos de (M, d) y $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$, demuéstrese que $A \cup B$ es conexo.

A continuación mostraremos con un ejemplo que la intersección de conexos en general no es conexa.

Ejemplo 3.7. En (\mathbb{R}^2, d_u) , sea $A = \{\text{circunferencia con centro en el origen y radio } 1\}$ y $B = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, ambos conjuntos son conexos. Sin embargo $\{-1, 1\} = A \cap B$ es disconexo.

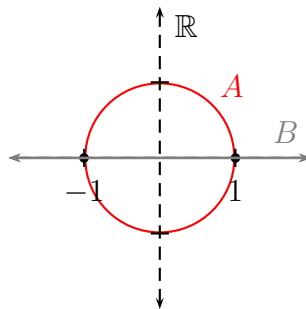


Figura 3.7: Intersección de conexos, no conexa

3.3. Componentes de un conjunto

En esta sección demostraremos que todo espacio métrico M puede expresarse de forma única como reunión de “trozos” conexos llamados componentes.

Definición 3.3.1. *Componente de un espacio métrico.* Sea A un conjunto no vacío de (M, d) . Dado $x \in A$, la unión de todos los subconjuntos conexos contenidos en A y que contienen a x , se denomina **componente** con respecto a A , y se denota $C(x)$. Así, $C(x)$ es el subconjunto de A conexo maximal que contiene a x . Llamamos componentes del espacio a los componentes del conjunto M .

En el caso que las componentes sean únicamente conjuntos unitarios tenemos la siguiente definición.

Definición 3.3.2. Si $\forall x \in A, C(x) = \{x\}$, decimos que A es **totalmente disconexo**. Decimos que el espacio (M, d) es **totalmente disconexo** si lo es el conjunto M .

Definición 3.3.3. El conjunto de Cantor C es el conjunto de todos los números reales x que pueden ser representados de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n 3^{-n},$$

donde $\alpha_n \in \{0, 2\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.8. i. Todo espacio métrico discreto es totalmente disconexo.

ii. En (\mathbb{R}, d_u) , el conjunto \mathbb{Q} de los números racionales es totalmente disconexo. En efecto, sea $C \subseteq \mathbb{Q}$ una componente de \mathbb{Q} que posee dos elementos distintos $x < y$. Si r es un número irracional tal que $x < r < y$ entonces

$$C = C \cap (-\infty, r) \cup C \cap (r, \infty),$$

luego C es la unión de dos conjuntos disjuntos, abiertos, no vacíos ya que

$x \in C \cap (-\infty, r)$ y $y \in C \cap (r, \infty)$, por lo tanto C es desconexo, lo cual es una contradicción. Lo que implica que $C(x) = \{x\}$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

- iii. El espacio de Cantor \mathcal{C} es totalmente desconexo. (Ver su demostración en [9] corolario 30.4 o [7] sección 8.3)

Teorema 3.3.1. *Las componentes de A forman una colección de conjuntos disjuntos dos a dos cuya unión es A .*

Demostración. Sea A un conjunto no vacío de un espacio métrico (M, d) , es evidente que

$$A \subset \bigcup_{x \in A} C(x).$$

Por otra parte, las componentes de A son disjuntos dos a dos. En efecto, sean $x, y \in A$ y supongamos $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$. Entonces, aplicando el corolario 3.2.2, el conjunto $C(x) \cup C(y)$ es conexo y contiene a x ; luego $C(x) \cup C(y) \subset C(x)$ y, como siempre $C(x) \subset C(x) \cup C(y)$, resulta $C(x) = C(x) \cup C(y)$, lo que implica que $C(y) \subset C(x)$. Análogamente, concluiríamos $C(x) \subset C(y)$. O sea que $C(x) = C(y)$. ■

Los siguientes teoremas muestran otra caracterización de los conjuntos conexos.

Teorema 3.3.2. *Sea A un subconjunto de un espacio métrico (M, d) . A es conexo si y sólo si admite una única componente.*

Demostración. Si A es conexo, es inmediato que $A = C(x)$, $\forall x \in A$; o sea que existe sólo una componente. Recíprocamente, como la unión de todas las componentes de A es igual a A , si existe sólo un componente C tendremos que $A = C$ y, por lo tanto A es conexo. ■

Teorema 3.3.3. *El espacio métrico (M, d) es conexo si y sólo si todo par de puntos está contenido en un conjunto conexo.*

Demostración. Si M es conexo la afirmación es trivial ya que todo par de puntos está contenido en M . Recíprocamente, si $\forall x, y \in M$ existe un conexo que los contiene, se tiene $C(x) = C(y)$, o sea que todos los puntos de M pertenecen a una misma componente, lo cual nos dice que existe una sólo componente y por el teorema anterior M es conexo. ■

Ejemplo 3.9. En (\mathbb{R}, d_u) , sea $A = [0, 1] \cup \{2\} \cup [3, 4] \cup (5, 6)$, sus componentes conexas son $[0, 1]$, $\{2\}$, $[3, 4]$ y $(5, 6)$. Todas ellas son abiertas y cerradas en A ; son

“pedazos ” constituyentes del espacio.

Ejemplo 3.10. En un espacio métrico en el cual toda bola es conexa, es conexo, ya que cualquier par de puntos del espacio siempre se puede encerrar en una esfera abierta.

Teorema 3.3.4. *Si A es un conjunto no vacío de (M, d) sus componentes son cerrados en el subespacio (A, d)*

Demostración. Sea C una componente de A . Teniendo en cuenta que $C \subset A$, tenemos: $C \subset \bar{C} \cap A \subset \bar{C}$, lo cual implica por el teorema 3.2.1, siendo C conexo, que $\bar{C} \cap A$ es conexo; pero, como C es el máximo conjunto conexo que contiene cualquiera de sus puntos $C = \bar{C} \cap A$, y por el teorema 1.2.6, C es cerrado en el subespacio (A, d) . ■

En particular, las componentes del espacio son conjuntos cerrados. No es cierto, en general, que las componentes de A sean abiertos en (A, d) . Por ejemplo, hemos visto que los componentes de \mathbb{Q} en la recta real son conjuntos constituidos por un solo punto, que no son abiertos en \mathbb{Q} . Sin embargo, si el número de componentes de A es finito, ellos son también abiertos en (A, d) . En efecto, como $A = \bigcup_{i=1}^n C_i$ y teniendo en cuenta el teorema 3.3.4, que la unión finita de cerrados es cerrada, que si un conjunto es cerrado el complemento es abierto y representando a cada componente de la siguiente forma:

$$C_1 = A - \bigcup_{i=2}^n C_i,$$

$$C_k = A - \left[\left\langle \bigcup_{i=k+1}^n C_i \right\rangle \cup \left\langle \bigcup_{i=1}^{k-1} C_i \right\rangle \right]$$

y

$$C_n = A - \bigcup_{i=1}^{n-1} C_i;$$

se concluye que cada componente es abierta en (A, d) .

3.4. Espacios localmente conexos.

Los espacios conexos son importantes por la riqueza de sus propiedades, sin embargo, para ciertos propósitos sólo se requiere la conexión local, la cual estudiaremos en esta sección. A grandes rasgos, la conexión local significa que cada punto tiene entornos conexos arbitrariamente pequeños. Siendo más precisos, podemos establecer la siguiente definición.

Definición 3.4.1. *Decimos que un espacio métrico (M, d) es **localmente conexo**, si para todo punto $x \in M$ y todo entorno S de x , existe un entorno T de x tal que $T \subset S$ y T es conexo.*

Es necesario destacar que conectividad y conectividad local son conceptos independientes. Es decir, un espacio métrico puede ser conexo sin serlo localmente; así mismo puede ser localmente conexo sin ser conexo. Existen espacios que son ambas cosas y otros que no son ninguna de las dos.

Ejemplo 3.11. i. (\mathbb{R}, d_u) es un espacio conexo y localmente conexo.

ii. Un espacio métrico discreto con más de un punto es localmente conexo pero no es conexo.

iii. $\mathbb{Q} \subset (\mathbb{R}, d_u)$, \mathbb{Q} no es ni conexo, ni localmente conexo.

El siguiente resultado es de frecuente utilidad.

Teorema 3.4.1. *Sea (M, d) un espacio métrico. Si en (M, d) toda bola es un conjunto conexo, entonces (M, d) es un espacio conexo y localmente conexo.*

Demostración. Sea $x \in M$ y S un entorno cualquiera de x . Como S es abierto y $x \in S$, existe un $r > 0$ tal que $\beta(x, r) \subset S$; pero $\beta(x, r)$ es un entorno de x , y, por hipótesis conexo. (M, d) es pues localmente conexo.

Para demostrar que M es conexo, tomemos un $x_0 \in M$ cualquiera. Es inmediato

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} \beta(x_0; n).$$

Ahora bien, cada una de las bolas $\beta(x_0; n)$ es conexa y la intersección de todas ellas es no vacía, ya que x_0 está en todas. Concluimos que su unión, o sea M , es conexo. ■

Finalmente, caracterizaremos los espacios localmente conexos en términos de componentes de conjuntos abiertos.

Teorema 3.4.2. *Un espacio métrico (M, d) es localmente conexo si y sólo si las componentes de todo conjunto abierto son abiertas.*

Demostración. Supongamos que las componentes de todo conjunto abierto son abiertas. Sea $x \in M$ y S un entorno cualquiera de x . Designemos por T a la componente de S que contiene a x . Entonces T es conexo, $T \subset S$ y T es un entorno de x por ser abierto en virtud de la hipótesis. O sea que (M, d) es localmente conexo.

Recíprocamente, supongamos que (M, d) es localmente conexo y sea A un conjunto abierto. Consideremos un componente C de A y demostremos que es abierto. Tomemos un $x \in C$, de donde $x \in A$ y por ser A abierto, A es un entorno de x . Por hipótesis existe un entorno conexo S de x tal que $S \subset A$, lo cual implica, por ser un componente, que $S \subset C$. Ahora bien, C es evidentemente la unión de todos estos conjuntos abiertos S correspondiente a cada uno de sus puntos. C es, pues, un conjunto abierto por ser unión de abiertos. ■

Corolario 3.4.1. *Cualquier componente C de un espacio (M, d) localmente conexo es abierta y cerrada.*

La demostración se deja como ejercicio.

Ejemplo 3.12. El siguiente espacio NO es localmente conexo. Por cada entero positivo n definamos el segmento de recta $A_n \subset \mathbb{R}^2$ como $A_n = \{(x, \frac{1}{n}) : 0 \leq x \leq 1\}$ y $A_0 = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$. Sea $A = A_0 \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$. Las componentes conexas de A son A_0, A_1, A_2, \dots . Sabemos que A_0 es cerrada, pero claramente no es abierta en A .

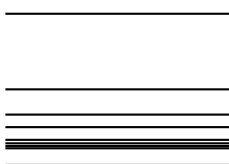


Figura 3.8: Espacio NO localmente conexo

Ejemplo 3.13. Si al conjunto del ejemplo anterior $A = A_n \cup A_0$ lo unimos con $\{0\} \times [0, 1]$ tenemos el conjunto llamado “la peinilla”. (ver figura 3.9). Éste conjunto es conexo pero NO es localmente conexo.

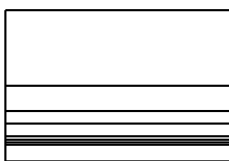


Figura 3.9: La peinilla. Conexa pero no localmente conexa.

En particular, para un espacio localmente conexo, las componentes del espacio son conjuntos abiertos y cerrados. Esto implica, de paso, que si el espacio es disconexo, cualquier componente y su complemento constituyen una disconexión.

3.5. Conectividad en la recta real

Ahora estudiaremos los conjuntos conexos en el espacio métrico (\mathbb{R}, d_u) . La relación de orden total de que está provisto \mathbb{R} juega un papel decisivo en descubrir la naturaleza de los conjuntos conexos.

Comenzemos por precisar el concepto de intervalo.

Definición 3.5.1. *Sea I un conjunto no vacío de números reales, decimos que I es un **intervalo**, si para todo par de puntos $x, z \in I$ se cumple que para todo $y \in \mathbb{R}$ con $x \leq y \leq z$, entonces $y \in I$.*

Es decir, I es un intervalo si I contiene todos los puntos comprendidos entre cualquier par de sus puntos. Así pues, \mathbb{R} es un intervalo, lo mismo que un conjunto constituido por un solo punto. También son intervalos (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $(c, +\infty)$, $(-\infty, c)$, $[c, +\infty)$, $y(-\infty, c]$. Estamos ahora en condiciones de demostrar el resultado fundamental.

Teorema 3.5.1. *Un subespacio de (\mathbb{R}, d_u) es conexo si y sólo si I es un intervalo.*

Demostración. Sea A un conjunto no vacío de números reales y conexo. Si A contiene solo un punto es un intervalo. Supongamos que A contiene más de un punto. Tomemos $x, z \in A$ con $x < z$ y consideremos que para algún $y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y < z$ sucede que $y \notin A$.

Los conjuntos $(-\infty, y)$, $(y, +\infty)$ son abiertos en \mathbb{R} , luego $(-\infty, y) \cap A$, $(y, +\infty) \cap A$ son abiertos en A y constituyen una desconexión de A . En efecto, no son vacíos, ya que el primero contiene a x y el segundo contiene a z ; su unión es A y son disjuntos por serlo $(-\infty, y)$, $(y, +\infty)$. O sea que A es desconexo lo que contradice la hipótesis. Entonces A es intervalo.

Recíprocamente, Si I contiene sólo un punto ya sabemos que es conexo. Supongamos que I contiene más de un punto y que es desconexo, sea $I = A \cup B$ con A y B no vacíos, disjuntos y cerrados en I .

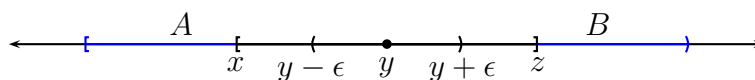


Figura 3.10:

Tomemos $x \in A$ y $z \in B$; como A y B son disjuntos, $x \neq z$, por ejemplo $x < z$.

Puesto que $x, z \in I$ e I es un intervalo, $[x, z] \subseteq I$. Sea $y = \sup([x, z] \cap A)$, es claro que $x \leq y \leq z$, así que $y \in I$. Como A es cerrado en I , $y \in A$ y por definición de y , para todo $\epsilon > 0$ se cumple que

$$\overset{\circ}{\beta}(y; \epsilon) \cap B \neq \emptyset$$

luego $y \in B'$ y como B es cerrado en I , entonces $y \in B$; así y estaría en A y B , lo cual es una contradicción. Luego I es conexo. ■

En particular \mathbb{R} es conexo; pero podemos establecer algo más poderoso:

Corolario 3.5.1. *La recta real es un espacio conexo y localmente conexo.*

Demostración. En (\mathbb{R}, d_u) una bola es un intervalo y, en virtud del teorema anterior es conexo. Aplicando el teorema 3.4.1 concluimos que \mathbb{R} es conexo y localmente conexo. ■

CAPÍTULO 4

FUNCIONES CONTINUAS EN CONJUNTOS COMPACTOS Y CONEXOS

En este capítulo estudiaremos las funciones continuas definidas en conjuntos compactos y conexos. Demostraremos para espacios métricos en general, teoremas como el de valores extremos, el de Bolzano, el de valor intermedio y el de continuidad uniforme, entre otros.

Comenzemos con un breve resumen sobre el concepto de continuidad.

4.1. Continuidad

En esta sección estudiaremos la continuidad, sin duda, uno de los conceptos fundamentales de la topología y el análisis. Los conceptos, teoremas y sus demostraciones se pueden ver en [1] y [3]. Iniciamos con la definición de continuidad de una función en un punto.

Definición 4.1.1. *Sea (M_1, d_1) y (M_2, d_2) espacios métricos cualesquiera y S un subconjunto de M_1 . Consideremos la función $f : S \subset M_1 \rightarrow M_2$. Se*

dice que f es **continua** en el punto $p \in S$ si a toda vecindad $V_{f(p)}$ de $f(p)$ corresponde una vecindad V_p de p tal que

$$f(V_p \cap S) \subset V_{f(p)},$$

es decir,

$$\forall x \in V_p \cap S : f(x) \in V_{f(p)}.$$

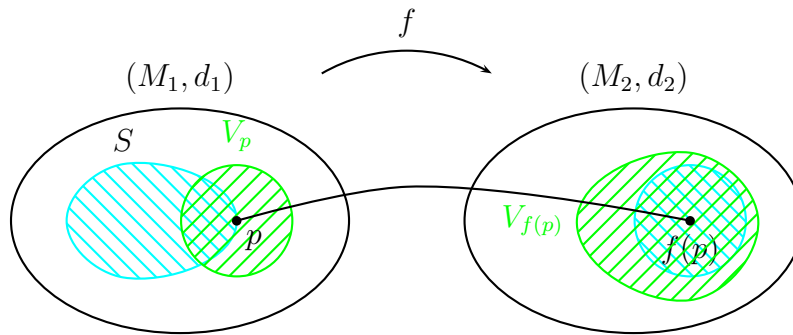


Figura 4.1: Representación de una función continua

Ejemplo 4.1. Una función constante $f : S \subset M_1 \rightarrow M_2$ tal que $\forall x \in S : f(x) = b$, f es continua en todo punto p de S . En efecto, cualquier vecindad de p satisface la definición, sin importar cual sea la vecindad de $f(p) = b$.

Esta definición se puede expresar en términos de bolas como se demostrará en el siguiente teorema.

Teorema 4.1.1. Sean (M_1, d_1) y (M_2, d_2) espacios métricos y S un subconjunto de M_1 . Consideremos la función $f : S \subset M_1 \rightarrow M_2$: f es continua en un punto p de S si, y sólo si, par cada $\epsilon > 0$ corresponde un $\delta > 0$ tal que

$$f(\beta_{M_1}(p; \delta) \cap S) \subset \beta_{M_2}(f(p); \epsilon).$$

Demostración. **i.** \implies Sea f continua en un punto p de S . Dado $\epsilon > 0$, $\beta(f(p), \epsilon)$ es una vecindad de $f(p)$ en M_2 , luego existe una vecindad V_p de p en M_1 tal que

$$f(V_p \cap S) \subset \beta(f(p); \epsilon), \quad (1)$$

pero $p \in V_p$ y V_p es abierto, por tanto existe un $\delta > 0$ con

$$\beta(p; \delta) \subset V_p,$$

lo cual implica, en virtud de (1), que

$$f(\beta(p; \delta) \cap S) \subset \beta(f(p); \epsilon). \quad (2)$$

ii. \longleftarrow Supongamos que $\forall \epsilon > 0$ corresponde un $\delta > 0$ tal que se verifica (2). Demostremos que f es continua. En efecto, sea $V_{f(p)}$ una vecindad de $f(p)$ en M_2 , existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$\beta(f(p); \epsilon) \subset V_{f(p)},$$

pero en virtud de nuestra suposición, a ϵ corresponde un $\delta > 0$ para el cual se cumple (2) de donde

$$f(\beta(p; \delta) \cap S) \subset V_{f(p)}.$$

■

El teorema anterior se puede expresar también así: f es continua en a , si y sólo si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in S, d(x, a) < \delta \implies d(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Ejemplo 4.2. La función idéntica $I : S \subset (M, d) \rightarrow (M, d)$ tal que $I(x) = x \forall x \in S$ es una función continua en todo punto de M , ya que $\forall \epsilon > 0$ si tomamos $\delta = \epsilon$ se tiene $d(f(x), f(p)) = d(x, p) < \delta = \epsilon$.

El siguiente teorema revela, la relación entre el concepto de continuidad en un punto y límite de la función en ese punto.

Teorema 4.1.2. *Sea $f : S \subset M_1 \rightarrow M_2$ y $p \in S$.*

- i. *Si p es un punto aislado de S ($p \in S - S'$), entonces f es continua en p .*
- ii. *Si p es un punto de acumulación de S ($p \in S \cap S'$), entonces f es continua en p si y sólo si $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.*

Corolario 4.1.1. *Toda función definida en un espacio métrico discreto es continua.*

Veamos ahora como se relaciona la continuidad en un punto con sucesiones convergentes.

Teorema 4.1.3. *Se $f : S \subset M_1 \rightarrow M_2$ y $p \in S$. f es continua en el punto p si y sólo si, para toda sucesión $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S , con $\mathcal{X}_n \rightarrow p$ se tiene $f(\mathcal{X}_n) \rightarrow f(p)$.*

El siguiente teorema trata la continuidad de las funciones compuestas.

Teorema 4.1.4. *Sean $f : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$ y $g : (f(M_1), d_2) \rightarrow (M_3, d_3)$ funciones, y sea h la función compuesta definida sobre M_1 por medio de la ecuación*

$$h(x) = g(f(x)) \text{ para todo } x \text{ de } S.$$

Si f es continua en p y si g es continua en $f(p)$, entonces h es continua en p .

Definición 4.1.2. *Continuidad en un conjunto. Sea $f : S \subset M_1 \rightarrow M_2$ una función. Decimos que f es **continua en el conjunto** S si f es continua en todo punto p de S .*

El conjunto de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ lo notaremos $C[a, b]$.

Teorema 4.1.5. Sea $f : S \subset M_1 \rightarrow M_2$ f es continua en $S \iff$ para cada conjunto abierto Y de M_2 , la preimagen $f^{-1}(Y)$ es abierta en M_1 .

Teorema 4.1.6. Sea $f : S \subset M_1 \rightarrow M_2$ f es continua en $S \iff$ para cada conjunto cerrado Y de M_2 , la preimagen $f^{-1}(Y)$ es cerrada en M_1 .

Definición 4.1.3. Se dice que una función $f : S \subset M_1 \rightarrow M_2$ es **uniformemente continua** en el conjunto S si a cada $\epsilon > 0$ corresponde $\delta > 0$ tal que $\forall x, y \in S$ con $d_1(x, y) < \delta : d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Es obvio que si f es uniformemente continua en S , entonces f es continua. Sin embargo el recíproco no es cierto, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$, para $x > 0$ y consideremos $S = (0, 1]$. Esta función es continua en S pero no es uniformemente continua en S . Demostremos que f no es uniformemente continua, supongamos que lo es, entonces por la definición se tiene que para $\epsilon = 10$, existe un δ , $0 < \delta < 1$ tal que

$$\forall x, y \in S : |f(x) - f(y)| < \epsilon = 10 \text{ siempre que } |x - y| < \delta.$$

Haciendo $x = \delta$, $y = \delta/11$ tendríamos $|x - y| < \delta$ y

$$|f(x) - f(y)| = \frac{11}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{10}{\delta} > 10,$$

lo que contradice la definición de continuidad uniforme. Luego f **no** es uniformemente continua.

4.2. Funciones continuas en conjuntos compactos

Aquí demostraremos las propiedades de una función cuando es continua en su dominio y éste es compacto. Demostraremos teoremas como el de valores extremos, el de Bolzano y el de continuidad uniforme, entre otros, que son

de gran importancia en el estudio del cálculo elemental.

Comenzaremos demostrando que las funciones continuas “transportan” compactos a compactos, es decir, la compacidad es invariante con respecto a una transformación continua; es lo que se llama una propiedad topológica.

Teorema 4.2.1. *Sea $f : (M_1, d_1) \longrightarrow (M_2, d_2)$ una función continua en M_1 , $S \subset M_1$. Si S es compacto en M_1 , entonces $f(S)$ es compacto en M_2 .*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_\alpha$ un recubrimiento abierto de $f(S)$, es decir,

$$f(S) \subset \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}. \quad (4.1)$$

Probaremos que $f(S)$ admite un subrecubrimiento finito de \mathcal{A} .

Como f es continua en S y por el teorema 4.1.5, $\{f^{-1}(A_\alpha)\}$ es una colección de abiertos en S . Entonces si aplicamos la imagen inversa de f en (4.1) se tiene

$$S \subset f^{-1}f(S) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} \langle f^{-1}(A_{\alpha}) \rangle$$

lo que implica $\{f^{-1}(A_\alpha)\}$ es un recubrimiento abierto de S . Como S es compacto:

$$S \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(A_i) \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \quad (4.2)$$

aplicando la imagen directa de f en (4.2) se tiene

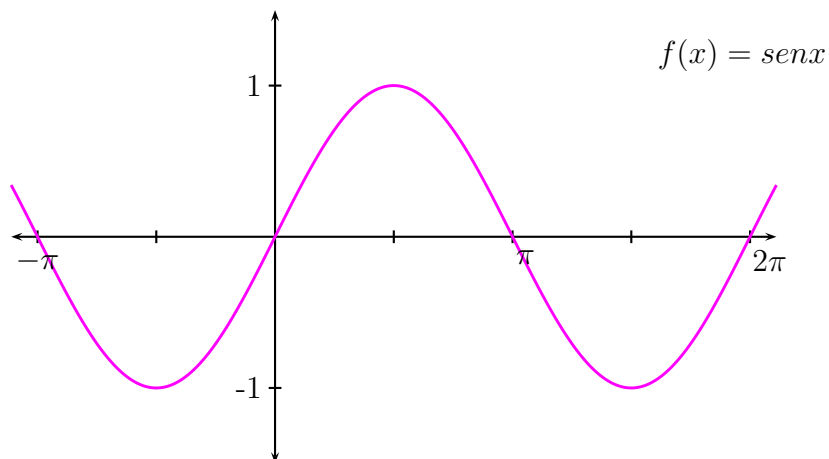
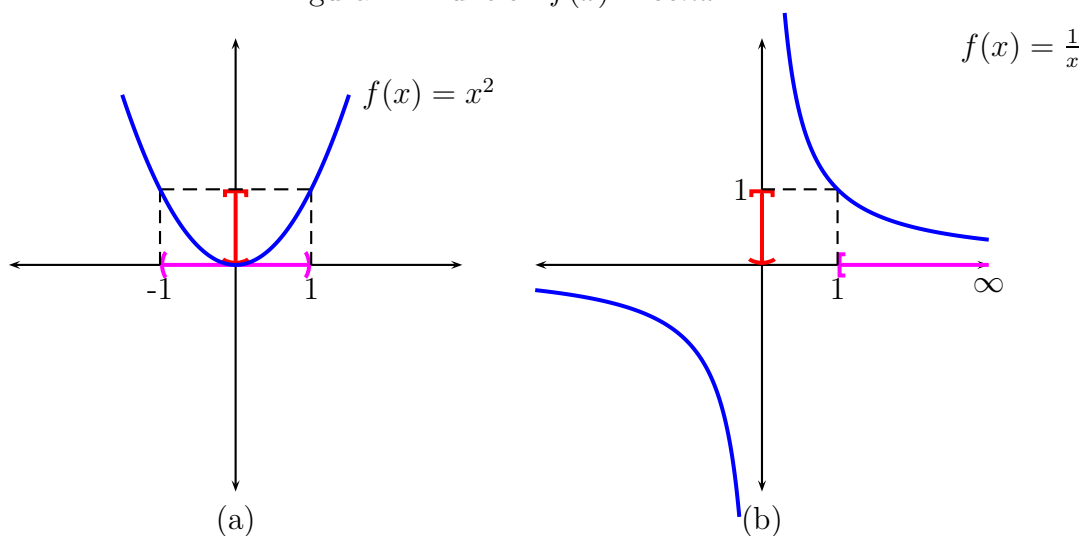
$$f(S) \subset \bigcup_{i=1}^n f f^{-1}(A_i) \subset \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Por lo tanto $f(S)$ es compacto. ■

El recíproco de este teorema no es cierto, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4. En (\mathbb{R}, d_u) sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Figura 4.2: función $f(x) = \text{sen } x$ Figura 4.3: (a) función continua y uniformemente continua en $[-1, 1]$ (b) función continua, pero no uniformemente continua en \mathbb{R}^*

f es continua en \mathbb{R} .

El recorrido de f es $[-1, 1]$ que es compacto en \mathbb{R} por ser cerrado y acotado; pero el dominio de f que es \mathbb{R} no es compacto. (Ver figura 4.2)

Una función continua no necesariamente “envía” abiertos en abiertos, o cerrados en cerrados; por ejemplo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es continua, $(-1, 1)$ es abierto y $f(((-1, 1))) = [0, 1)$ no es abierto. (ver figura 4.3 (a))

Por otra parte $f : \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en \mathbb{R}^* , $[1, \infty]$ es cerrado en \mathbb{R}^* pero $f([1, \infty)) = (0, 1)$ **no** es cerrado en \mathbb{R} , (ver figura 4.3(b)) sin embargo, en este sentido, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 4.2.1. *Sea $f : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$ una función continua en M_1 , S compacto, $T \subset S \subset M_1$. Si T es un conjunto cerrado en (M_1, d_1) , entonces $f(T)$ es cerrado en (M_2, d_2) .*

Demostración. Si $T = \emptyset$, también $f(T) = \emptyset$ que es cerrado en (M_2, d_2) .

Si $T \neq \emptyset$ por el teorema 2.3.1 T es compacto y por el teorema anterior $f(T)$ es compacto en (M_2, d_2) lo que implica que $f(T)$ es cerrado. ■

En muchas cuestiones matemáticas es importante determinar si una función alcanza extremos absolutos y existe una variedad de condiciones suficientes que garantizan la propiedad. En tal sentido demostraremos un importante y famoso teorema, debido a Weierstrass, el cual establece que una función continua en un conjunto compacto alcanza ambos extremos absolutos. Antes, definiremos cuándo una función está acotada y probaremos un sencillísimo lema.

Definición 4.2.1. *Una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ está acotada en M si existe un número positivo K tal que $\|f(x)\| \leq K$ para todo x de S .*

En resumen, sea $f : M_1 \rightarrow M_2$ una función, f es acotada en M_1 si $f(M_1)$ es acotada en M_2 .

Ejemplo 4.5. En (\mathbb{R}, d_u) la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

es acotada, ya que el recorrido de la función f es acotado. (Ver figura 4.4)

La función del ejemplo (4.1) es también acotada.

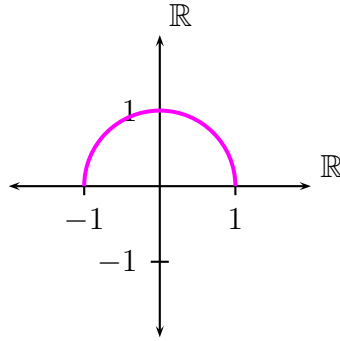


Figura 4.4: función acotada

Lema 4.2.1. *Un conjunto compacto S , en la recta real, admite extremos inferior y superior y ambos pertenecen a S .*

Demostración. Como S es compacto entonces S es acotado, y en la recta real, ello equivale a decir que está acotado inferior y superiormente. Existen por el axioma de completitud de \mathbb{R} $a = \inf S$ y $b = \sup S$. Demostraremos que $b \in S$; que $a \in S$ se establece de manera análoga. Como $b = \sup S$ por definición del supremo se tiene $\forall \epsilon > 0$ existe $x \in S$ tal que

$$b - \epsilon < x \leq b$$

luego,

$$b - \epsilon < x < b + \epsilon,$$

es decir,

$$|x - b| < \epsilon,$$

entonces

$$x \in \beta(b; \epsilon);$$

lo que implica

$$\beta(b; \epsilon) \cap S \neq \emptyset,$$

luego $b \in \bar{S}$, y como S es cerrado, $b \in S$. ■

Teorema 4.2.2 (Weierstrass. Teorema de valores extremos). *Sea $f : (M, d) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en M y S un subconjunto compacto de M . Entonces f alcanza su máximo y su mínimo en S .*

Demostración. Como f es continua y S compacto, por el teorema 4.2.1 $f(S)$ es compacto en \mathbb{R} , y por el lema 4.2.1, existen $a = \inf[f(S)]$, $b = \sup[f(S)]$, $a, b \in f(S)$. Entonces deben existir puntos $x_1, x_2 \in S$ con $f(x_1) = a$, $f(x_2) = b$. Ahora bien, $\forall x \in S : f(x) \in f(S)$, de donde $a = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = b$ luego b es el máximo y a es el mínimo de f . ■

El teorema anterior es de tipo existencial: nos asegura la existencia de los extremos, pero no indica como hallar los puntos donde los alcanza, lo que a veces puede resultar muy difícil en la práctica. Debemos mencionar que el recíproco de este teorema no es cierto, es decir, el hecho de que una función continua alcance en su recorrido valores extremos, no implica que el dominio de la función sea compacto, por ejemplo una función constante de \mathbb{R} en \mathbb{R} , la función alcanza máximos y mínimos en todo su dominio \mathbb{R} , y éste no es compacto. La función $\sin x$ del ejemplo (4.1) también es una muestra de ello.

Ejemplo 4.6. Sea

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, d_u) &\rightarrow (\mathbb{R}, d_u) \\ x &\rightarrow f(x) = x^2 \end{aligned}$$

f es una función continua. Por el teorema anterior podemos garantizar que en todo intervalo cerrado $[a, b]$, la función alcanza valores extremos, ya que $[a, b]$ es compacto en \mathbb{R} .

El siguiente resultado, de gran utilidad, garantiza la continuidad de la función inversa de una biyección continua en un conjunto compacto.

Teorema 4.2.3. *Sea $f : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$ una función continua en M_1 , M_1 compacto, f una biyección, de modo que la función inversa f^{-1} existe. Entonces f^{-1} es continua en M_2 .*

Demostración. Por el teorema 4.1.6 (aplicado a f^{-1}) bastará probar solamente que para cada conjunto cerrado S de M_1 la imagen $f(S)$ es cerrado en M_2 . (obsérvese que $f(S)$ es la imagen inversa de S por medio de f^{-1}). Como S es cerrado y M_1 es compacto se tiene que S es compacto (por el teorema 2.3.1), luego por el teorema 4.2.1 $f(S)$ es compacto y por el teorema 2.2.1 se tiene que $f(S)$ es cerrado. Por lo tanto f^{-1} es continua. ■

Ejemplo 4.7. Sea $M_1 = [0, 1)$ con la métrica usual de \mathbb{R} y $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, consideremos la función f con valores complejos definida por

$$\begin{aligned} f : [0, 1) &\rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C} \\ x &\rightarrow f(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \end{aligned}$$

Ésta es una aplicación continua ya que está compuesta por dos funciones

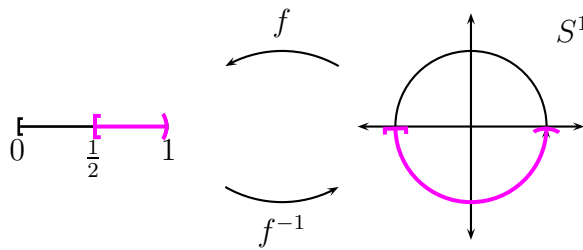


Figura 4.5:

continuas, uno a uno del semi-intervalo abierto $[0, 1)$ en el círculo unidad $|z| = 1$ del plano complejo. Sin embargo f^{-1} no es continua, en efecto si tomamos el semi-intervalo $[\frac{1}{2}, 1)$ es cerrado en $[0, 1]$ y

$$f^{-1}([\frac{1}{2}, 1)) = f([\frac{1}{2}, 1))$$

es el arco de S^1 que une los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ **sin** el extremo $(1, 0)$, **no** es cerrado en S^1 . Éste ejemplo muestra que la compacidad de M_1 es esencial en el teorema anterior.

El recíproco de éste teorema no es cierto, basta con tomar un conjunto no compacto M_1 y considerar la función idéntica $i : (M_1, d) \rightarrow (M_1, d)$, la cual es continua en M_1 , así como su inversa i . Luego la compacidad no es, una condición necesaria para la continuidad de la función inversa. Ahora, nos dedicaremos al famoso teorema de Bolzano que concierne a una propiedad global de las funciones reales continuas en intervalos compactos $[a, b]$ de \mathbb{R} . Si la gráfica de f está por encima del eje de las x en a y por debajo de los x en b , el teorema de Bolzano afirma que la gráfica debe cruzar, por lo menos una vez, a dicho eje entre a y b . Nuestra demostración se basará en una propiedad local de las funciones continuas conocida con el nombre de propiedad de la conservación del signo.

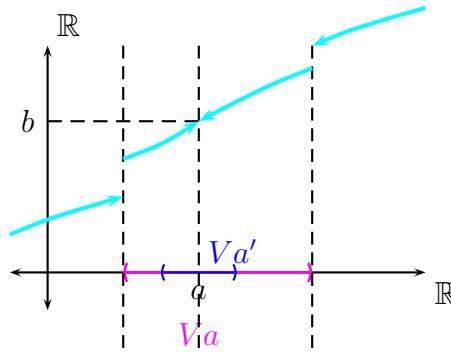


Figura 4.6: Esquema del teorema de la conservación del signo

Teorema 4.2.4 (Teorema de la conservación del signo). Sean $f : S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $a \in S'$ tal que existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq 0$ y existe una vecindad V_a de a tal que f es continua en $\overset{\circ}{V}_a$. Entonces existe una vecindad V'_a de a tal que para todo $x \in \overset{\circ}{V}'_a$ se tiene que $f(x)$ y b tienen el mismo signo, es decir, $f(x)b > 0$.

Demostración. Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq 0$ entonces $\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0$ tal que

$$d(f(x), b) < \epsilon \quad (*)$$

siempre que $x \in S$ y $0 < d(a, x) < \delta$:

- i. Supongamos que $b > 0$ escojemos $0 < \epsilon < b$ entonces $b - \epsilon > 0$ por lo tanto, $-\epsilon < f(x) - b < \epsilon$

$$0 < b - \epsilon < f(x) < b + \epsilon;$$

luego $f(x) > 0$.

- ii. Supongamos que $b < 0$ escojemos ϵ tal que $b < -\epsilon < 0$ por lo tanto, $b + \epsilon < 0$; de (*) se tiene

$$b - \epsilon < f(x) < b + \epsilon < 0$$

entonces $f(x) < 0$.

■

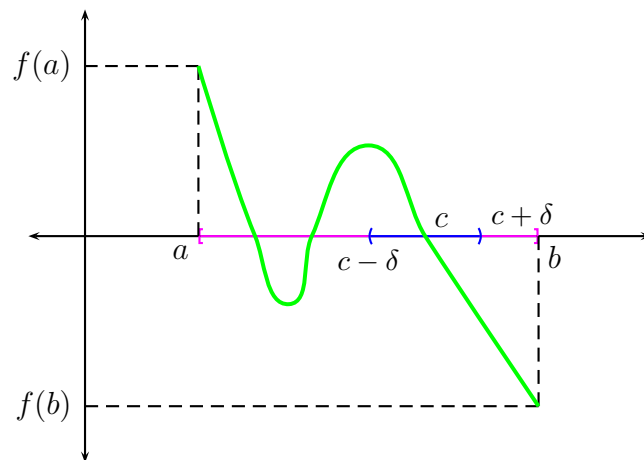


Figura 4.7: Esquema del teorema de Bolzano

Teorema 4.2.5 (Teorema de Bolzano). *Sea f real y continua en un intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} , y supongamos que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe, por lo menos un punto c del intervalo abierto (a, b) tal que $f(c) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$. Sea

$$S = \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq 0\}.$$

$S \neq \emptyset$, puesto que $a \in S$, y S está acotado por b . Sea $c = \sup S$. Entonces $a < c < b$. Probaremos que $f(c) = 0$.

Supongamos que $f(c) \neq 0$, por el teorema anterior, existe una vecindad $(c - \delta, c + \delta)$ de c en la que f tiene el mismo signo que $f(c)$.

- i. Si $f(c) > 0$, entonces $f(x) > 0$ siempre que $x \in (c - \delta, c + \delta)$ entonces existe un $x_0 \in S$ tal que $c < x_0$ lo que contradice que $c = \sup S$.
- ii. Si $f(c) < 0$, entonces $f(x) < 0$ siempre que $x \in (c - \delta, c + \delta)$ lo que implica que $c - \delta/2$ no es una cota superior de S , entonces existe $x_0 \in S$ tal que $c - \delta/2 < x_0 < c$. Pero $f(x_0) \geq 0$ por que $x_0 \in S$ y por otra parte $f(x_0) < 0$ porque $x_0 \in (c - \delta, c + \delta)$ lo cual es una contradicción. Luego $f(c) = 0$.

■

El teorema anterior también se puede demostrar teniendo en cuenta la conexidad del intervalo $[a, b]$. (Ver corolario 4.3.1) Del teorema de Bolzano se deduce fácilmente el teorema del valor intermedio para funciones continuas.

Corolario 4.2.2. *Supongamos que f es real y continua en un intervalo compacto S de \mathbb{R} . Supongamos que existen dos puntos $a < b$ de S tales que $f(a) \neq f(b)$. Entonces f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ en el intervalo (a, b) .*

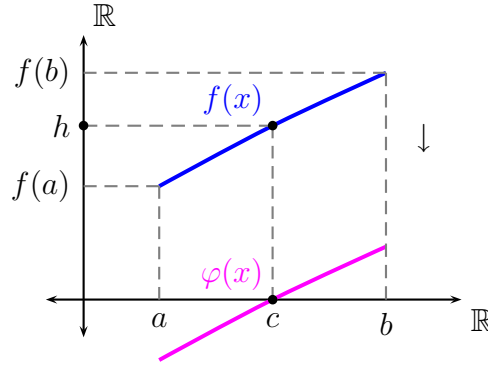


Figura 4.8: Esquema de la demostración del corolario 4.2.2

Demostración. Si $f(a) < f(b)$, sea h tal que $f(a) < h < f(b)$ y apliquemos el teorema 4.2.4 a la función φ definida en $[a, b]$ por medio de la ecuación $\varphi(x) = f(x) - h$, φ es continua en $[a, b]$. Entonces $\varphi(a) = f(a) - h < 0$ y $\varphi(b) = f(b) - h > 0$ por lo tanto existe $c \in (a, b) \mid f(c) = 0$ es decir, $f(c) - h = 0$ entonces $f(c) = h$. ■

Pasamos ahora a demostrar un famoso e importantísimo teorema, atribuido a Heine: el teorema de continuidad uniforme, el cual se utiliza, entre otras cosas para demostrar que cada función continua es integrable. El teorema establece que si a continuidad añadimos la hipótesis de compacidad del dominio de la función ésta se hace uniforme.

Teorema 4.2.6 (Teorema de continuidad uniforme). *Sea $f : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$ una función. Sea S un subconjunto compacto de M_1 y supongamos f continua en S . Entonces f es uniformemente continua en S .*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Para cada $a \in S$, como f es continua en S , existe un $r > 0$, que corresponde a $\epsilon/2$, tal que

$$\forall x \in S \cap \beta(a; r) : d_2(f(x), f(a)) < \epsilon/2. \quad (1)$$

Ahora bien, la familia de esferas $\beta(a; r/2)$, para todo $a \in S$, es, evidentemente, un recubrimiento abierto del conjunto compacto S . Entonces S se

puede cubrir con un número finito de éstas bolas, o sea

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^n \beta(a_i; \frac{r_i}{2}). \quad (2)$$

Sea $\delta = \min\{\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}, \dots, \frac{r_n}{2}\}$. Probaremos que este δ satisface la definición de continuidad uniforme.

En efecto, $\forall x_1, x_2 \in S$ con $d_1(x_1, x_2) < \delta$, se tiene que (por (2)) $x_1 \in \beta(a_i; \frac{r_i}{2})$ (para algún $i = 1, 2, \dots, n$), de donde

$$d_1(x_2, a_i) \leq d_1(x_2, x_1) + d_1(x_1, a_i) < \delta + \frac{r_i}{2} \leq \frac{r_i}{2} + \frac{r_i}{2} = r_i;$$

o sea que

$$x_1, x_2 \in S \cap \beta(a_i; r_i),$$

lo que implica, en virtud de (1), que

$$d_2(f(x_1), f(a_i)) < \frac{\epsilon}{2}, \quad d_2(f(x_2), f(a_i)) < \frac{\epsilon}{2};$$

luego,

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq d_2(f(x_1), f(a_i)) + d_2(f(x_2), f(a_i)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

■

4.3. Funciones continuas en conjuntos conexos.

En este capítulo analizaremos las funciones continuas definidas en conjuntos conexos. Para relacionar la conexión con la continuidad introduciremos el concepto de función a dos valores.

Definición 4.3.1. Sea $f : (M, d) \rightarrow (\{0, 1\}, \check{d})$. Si f es continua en M se dice que f es **una función a dos valores** sobre M . El conjunto de todas las funciones a dos valores sobre M lo denotamos \mathcal{F}_2^M .

Recuérdese que cada subconjunto de un espacio métrico discreto M es a la vez abierto y cerrado en M . El siguiente teorema proporciona una útil caracterización de los conjuntos conexos.

Teorema 4.3.1. M es conexo $\iff \forall f \in \mathcal{F}_2^M : f$ es constante.

Demostración. **i.** \implies Supongamos que M es conexo, y sea f una función a dos valores definida sobre M . Probemos que f es constante. Sean $A = f^{-1}(\{0\})$ y $B = f^{-1}(\{1\})$ las anti-imagenes de los conjuntos $\{0\}$ y $\{1\}$. Como $\{0\}$ y $\{1\}$ son subconjuntos abiertos del espacio métrico discreto $\{0, 1\}$, tanto A como B son abiertos en M . Por lo tanto, $M = A \cup B$, donde A y B son conjuntos abiertos disjuntos. Pero, al ser M conexo, o A es vacío y $B = M$, o bien B es vacío y $A = M$. Tanto en un caso como en el otro f es constante en M .

ii. \impliedby Supongamos que M es no conexo, luego $M = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos de M abiertos disjuntos y no vacíos. Presentaremos ahora una función a dos valores definida sobre M que no será constante. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A, \\ 1 & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Como A y B son no vacíos, f toma los valores 0 y 1 y por tanto no es constante. Además f es continua sobre M ya que la imagen inversa de cada subconjunto abierto de $\{0, 1\}$ es abierto en M . ■

A continuación demostraremos que la imagen continua de un conjunto conexo es conexa, es decir, la continuidad es invariante con respecto a una transformación continua y por tanto es una propiedad topológica.

Teorema 4.3.2. Sea $f : M_1 \rightarrow M_2$ una función, $S \subset M_1$, S conexo, $f \in C(S)$ entonces $f(S)$ es un subconjunto conexo de M_2 .

Demostración. Sea g una función a dos valores definida sobre $f(S)$. Probaremos que g es constante. Consideremos la función compuesta h definida en S por medio de la ecuación $h(x) = g(f(x))$. Entonces h es continua en S y puede tomar solo valores 0 y 1, luego h es una función a dos valores en S . Como S es conexo, h es constante en S y esto implica que g es constante en $f(S)$. Por consiguiente $f(S)$ es conexo. ■

El recíproco de este teorema no es en general, cierto. Puede suceder, que f sea continua en un conjunto desconexo S y que $f(S)$ sea conexo. Tal es el caso si f es una función constante; $f(S)$ es siempre conexo, por estar constituido por un solo punto, con independencia de la naturaleza de S . El teorema precedente junto con el teorema 3.5.1, según el cual los únicos conjuntos conexos en la recta real son los intervalos, origina toda una cadena de proposiciones cuando hacemos intervenir la recta real \mathbb{R} .

A continuación presentamos una lista de tales proposiciones, omitiendo las demostraciones cuando son evidentes.

$P_1)$ Si $f : S \subset M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en el conjunto conexo S , entonces $f(S)$ es un intervalo.

$P_2)$ Si $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en el intervalo I , entonces $f(I)$ es un intervalo.

Es claro que se trata de un caso particular de P_1 .

$P_3)$ Si $f : S \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en el conjunto conexo y compacto S , entonces $f(S)$ es un intervalo cerrado y acotado.

Demostración. Por P_1 sabemos que $f(S)$ es un intervalo y, por el teorema 4.2.1 también es compacto, por lo tanto cerrado y acotado. ■

$P_4)$ Si $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ su recorrido es un intervalo cerrado y acotado.

Es un caso particular de P_3 , ya que $[a, b]$ es conexo y compacto.

P_5) Sea $f : S \subset M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ continua en el conjunto conexo S . Si para todo $a, b \in S$ se tiene que $f(a) < f(b)$ y c es un número real con $f(a) < c < f(b)$, entonces existe un $x \in S$ tal que $f(x) = c$.

Demostración. En efecto por P_1 , $f(S)$ es un intervalo y es claro que $f(a), f(b) \in f(S)$; luego, en virtud de la definición de intervalo, $c \in f(S)$, lo cual implica la existencia de un $x \in S$ (no necesariamente único) tal que $f(x) = c$. ■

Como corolario de la proposición P_5 tenemos el siguiente teorema que es una extensión del de Bolzano.

Corolario 4.3.1 (Teorema del valor intermedio para funciones reales continuas.) Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en S . Si f alcanza dos valores distintos sobre S , tales como $f(a)$ y $f(b)$, entonces para cada c comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ existe por lo menos un punto $x \in S$ en el que $f(x) = c$.

4.4. Arco-conexidad

Procedemos a estudiar un nuevo tipo de conexidad algo más especializada que la empleada hasta ahora.

Comenzemos con una definición fundamental.

Definición 4.4.1. Sea $\varphi[a, b] \rightarrow M$, $\varphi \in C[a, b]$, φ se llama **arco** ó **camino** desde a hasta b . $\Gamma(\varphi) = \varphi(a, b) = T_\varphi = \text{curva o trayectoria entre } \varphi(a) \text{ y } \varphi(b)$

Teniendo en cuenta que un intervalo cerrado es un conjunto conexo y compacto y aplicando los teoremas 4.2.1, 4.3.2, concluimos que un arco es siempre un conjunto conexo y compacto.

Ejemplo 4.8. El ejemplo más sencillo lo constituye un conjunto $\{a\}$ de un solo punto en (M, d) . La función constante $f : [0, 1] \rightarrow M$, tal que $\forall t \in [0, 1] :$

$f(t) = a$, es evidentemente continua en $[0, 1]$ y su recorrido es $\{a\}$ que es, por lo tanto, un arco.

Definición 4.4.2. Sea $S \subset (M, d)$. S es **arco-conexo** $\iff \forall a, b \in S$: existe un arco

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow S \mid \varphi(0) = a, \varphi(1) = b.$$

En otras palabras, un subconjunto S es arco-conexo si cada dos puntos de S pueden unirse por medio de un arco contenido en S . Si $f(t) = tb + (1 - t)a$ para $0 \leq t \leq 1$, la curva que une a y b se llama **segmento rectilíneo**.

Ejemplo 4.9. El conjunto de la 4.9 (reunión de dos discos cerrados tangentes) es arco-conexo.

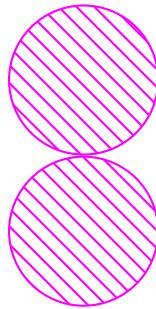


Figura 4.9: Reunión de dos discos cerrados tangentes

Resulta oportuno establecer de una vez que arco-conexidad es una propiedad topológica, es decir, es invariante respecto a una transformación continua. Dicho de otra manera, la imagen continua de un conjunto arco-conexo es arco-conexo.

Teorema 4.4.1. Si $f : S \subset M_1 \rightarrow M_2$ es continua en el conjunto arco-conexo S , entonces su recorrido $f(S)$ es arco-conexo.

Demostración. Tomemos $x', y' \in f(S)$. Deben existir $x, y \in S$ con $f(x) = x', f(y) = y'$.

Ahora bien, S es arco-conexo, luego existe una función $g : [0, 1] \rightarrow M_1$ continua en $[0, 1]$, cuyo recorrido (un arco) está contenido en S y con $g(0) = x, g(1) = y$.

Definamos la función $h : [0, 1] \rightarrow M_2$ tal que $h = f \circ g$, lo cual es posible, ya que el recorrido de g está contenido en el dominio S de f . En virtud del teorema (4.1.4) h es continua en $[0, 1]$. Por otra parte, el recorrido de h está obviamente contenido en $f(S)$ y $h(0) = f[g(0)] = f(x) = x', h(1) = f[g(1)] = f(y) = y'$. En resumen hemos hallado un arco (descrito por h), contenido en $f(S)$ y que une los puntos x', y' . ■

El teorema que sigue relaciona la conexión por arcos con la conexión.

Teorema 4.4.2. *Todo conjunto arco-conexo es conexo.*

Demostración. Para todo par de puntos del espacio existe una curva que los une, entonces para todo par de puntos del espacio existe un conexo que los contiene, luego por el teorema 3.3.3 el espacio es conexo. ■

El recíproco de este teorema no se cumple.

Ejemplo 4.10. En el ejemplo 3.4 se demostró que la curva seno del topólogo es un espacio conexo, sin embargo, NO es arco-conexo. En efecto, supongamos que existiera un camino $f : [a, b] \rightarrow \bar{S}$ empezando en el origen y terminando en un punto cualquiera de S . El conjunto de los números t para los cuales $f(t) \in \{0\} \times [-1, 1]$ es cerrado y, por tanto, tiene un máximo que denotaremos por c . Entonces $f : [c, b] \rightarrow \bar{S}$ es un camino que aplica c en el intervalo vertical $\{0\} \times [-1, 1]$ mientras el resto de puntos de $[c, b]$ se aplican en puntos de S .

Sustituyamos $[c, b]$ por $[0, 1]$ para simplificar la prueba; sea $f(t) = (x(t), y(t))$. Entonces $x(0) = 0$, mientras que $x(t) > 0$ e $y(t) = \text{sen}(\frac{1}{x(t)})$ para $t > 0$. Vamos a demostrar que existe una sucesión de puntos $t_n \rightarrow 0$ tales que

$y(t_n) = (-1)^n$. Entonces tendremos que la sucesión $y(t_n)$ no es convergente, contradiciendo la continuidad de f . Para encontrar los números t_n procedemos del siguiente modo: dado n , elegimos u con $0 < u < x(1/n)$ tal que $\text{sen}(1/u) = (-1)^n$. Usando entonces el teorema del valor intermedio podemos encontrar t_n con $0 < t_n < 1/n$ tal que $x(t_n) = u$.

Hemos visto anteriormente que hay conjuntos conexos que no son arco-conexos. Sin embargo, ambos conceptos son equivalentes en el caso de conjuntos abiertos.

Teorema 4.4.3. *Un conjunto abierto conexo de \mathbb{R}^n es arco-conexo.*

Demostración. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ abierto conexo y sea $x \in S$. Probaremos que x puede unirse con cualquier otro punto y de S por medio de un arco contenido en S . designemos por A el subconjunto de S formado por los puntos que pueden unirse con x , y sea $B = S - A$. Entonces $S = A \cup B$, donde A y B son disjuntos. Ahora demostraremos que tanto A como B son abiertos en \mathbb{R}^n .

Sea $a \in A$ y unamos a con x por medio de un arco Γ contenido en S . Como

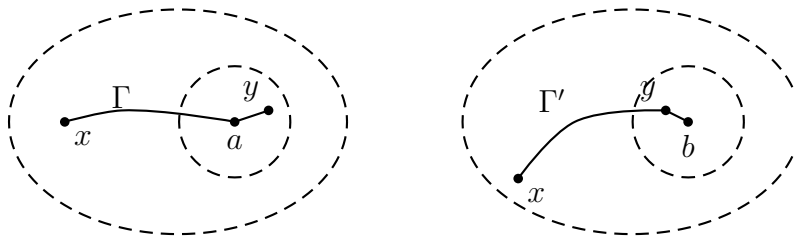


Figura 4.10:

$a \in S$ y S es abierto, existe una bola n -dimensional $\beta(a) \subset S$. Cada y de

$\beta(a)$ puede unirse con a por medio de un segmento rectilíneo (contenido en S) y por lo tanto con x por medio de Γ . Así pues, si $y \in \beta(a)$, entonces $y \in A$. Esto implica que $\beta(a) \subset A$, y por lo tanto A es abierto.

Para ver que B también es abierto, supongamos que $b \in B$. Entonces existe una bola n -dimensional $\beta(b) \subset S$, ya que S es abierto. Ahora bien, si un punto y de $\beta(b)$ pudiese unirse con x por medio de un arco Γ' , contenido en S , el punto b también podría unirse con x , uniendo primeramente b con y (por medio de un segmento rectilíneo contenido en $\beta(b)$) y utilizando después Γ' . Pero como $b \notin A$, ningún punto de $\beta(b)$ deberá pertenecer a A . Así, $\beta(b) \subseteq B$, luego B es abierto.

Como tanto A como B son abiertos y disjuntos, uno de los dos deberá ser vacío, ya que de lo contrario $S = A \cup B$ no sería conexo. Claramente $A \neq \emptyset$ puesto que $x \in A$, luego $B = \emptyset$, es decir, $S = A$ y en consecuencia S es arco-conexo. ■

BIBLIOGRAFÍA

- [1] APOSTOL TOM M. **Análisis Matemático**. Reverté, Barcelona, 1972.
- [2] COLMENARES Elber. **Convergencia en espacios métricos**. Monografía de grado, UIS, Bucaramanga, 1996.
- [3] IRIBARREN Ignacio. **Topología de espacios métricos**. Limusa, Mexico, 1973.
- [4] MENDOZA Nestor. **Espacios y conjuntos compactos**. Monografía de grado, UIS, Bucaramanga, 1997.
- [5] MUÑOZ José M. **Topología Básica**. Bogotá:Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 2003.
- [6] PADILLA María Eugenia. **Espacios métricos**. Monografía de grado, UIS, Bucaramanga, 1990.
- [7] RUBIANO Gustavo N. **Topología General**. Panamericana, formas e impresos S.A. Bogotá, D.C. Colombia, 2002.
- [8] SIMMONS George. **Introduction to Topology and Modern Analysis**. Mc. Graw-Hill, New York, 1963.

- [9] WILLARD Stephen. **General Topology**. Publishing Company, India, 1970.