

LOS HIPERESPACIOS DE SUBCONTINUOS REGULARES Y SUBCONTINUOS
MAGROS

DIEGO ALEXÁNDER RAMÍREZ ANGARITA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2023

LOS HIPERESPACIOS DE SUBCONTINUOS REGULARES Y SUBCONTINUOS
MAGROS

DIEGO ALEXÁNDER RAMÍREZ ANGARITA

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director
Javier Enrique Camargo García
Doctor en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2023

DEDICATORIA

A mi mamá Gloria Angarita, mi hermana Mariana Ramírez y a la memoria de mi papá
Alexánder Ramírez.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi mamá Gloria Angarita por todo su esfuerzo y apoyo durante estos años, al profesor Javier Camargo por sus explicaciones y ayuda para la realización de este trabajo. Agradezco también a los profesores que despertaron en mi esta pasión por las matemáticas, a mis familiares y amigos que me acompañaron y apoyaron durante mi carrera, y a todas las personas de alguna u otra forma me ayudaron a alcanzar este logro.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	9
1. PRELIMINARES	11
1.1. RESULTADOS BÁSICOS Y NOTACIÓN	11
1.2. HIPERESPACIOS DE CONTINUOS	16
2. COMPLEJIDAD BORELIANA DE $D(X)$ y $M(X)$	22
3. HIPERESPACIO DE SUBCONTINUOS REGULARES	24
3.1. CONTINUOS DONDE $D(X)$ ES FINITO	24
3.2. CONTINUOS DONDE $D(X)$ ES INFINITO	27
3.2.1. $D(X)$ homeomorfo a $\omega^2 n$	28
3.2.2. $D(X)$ los naturales	29
4. CONTRACTIBILIDAD DE $M(X)$	34
BIBLIOGRAFÍA	39

LISTA DE FIGURAS

	pág.
1.1. Continuo de Knaster.	15
3.1. $ D(X) = \aleph_0$	28
3.2. $D(X) \cong \omega^2$	28
3.3. $D(Y_n) \cong \omega^2 m$	29

RESUMEN

TÍTULO: LOS HIPERESPACIOS DE SUBCONTINUOS REGULARES Y SUBCONTINUOS MAGROS *

AUTOR: DIEGO ALEXÁNDER RAMÍREZ ANGARITA **

PALABRAS CLAVE: CONTINUOS, HIPERESPACIOS, SUBCONTINUOS REGULARES, SUBCONTINUOS MAGROS.

DESCRIPCIÓN:

Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Un subcontinuo es un continuo contenido en algún espacio métrico. La colección de todos los subcontinuos de un continuo X dotada de la métrica de Hausdorff, se denota $C(X)$. Un subcontinuo A de un continuo X se dice que es *magro* si $\text{Int}(A) = \emptyset$; y es llamado *regular* si $\text{Cl}(\text{Int}(A)) = A$. Recientemente, el profesor Norberto Ordóñez en los artículos “The hyperspace of regular subcontinua”, de 2018, y “The hyperspace of meager subcontinua”, de 2020, definió y estudió los hiperespacios $D(X)$ y $M(X)$, formados por los subcontinuos regulares de X y los subcontinuos magros de X , respectivamente. En este trabajo presentamos algunos resultados obtenidos por Ordóñez acerca de la compacidad, conexidad y densidad de estos hiperespacios. También se encuentran resultados originales que amplían el conocimiento de propiedades topológicas de $D(X)$ y $M(X)$. Obtenemos la complejidad boreliana de $D(X)$ verificando que es un conjunto Π_3^0 de $C(X)$. Mostramos que el hiperespacio $D(X)$ nunca es infinito discreto. Y damos un ejemplo de un continuo no contráctil tal que su hiperespacio de $M(X)$ es contráctil, respondiendo negativamente a una pregunta planteada por el profesor Ordóñez.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Doctor en Ciencias Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: THE HYPERSPACES OF REGULAR SUBCONTINUA AND MEAGER SUBCONTINUA *

AUTHOR: DIEGO ALEXÁNDER RAMÍREZ ANGARITA **

KEYWORDS: CONTINUA, HYPERSPACES, MEAGER SUBCONTINUA, REGULAR SUBCONTINUA.

DESCRIPTION:

A continuum is a compact connected and nonempty metric space. A subcontinuum is a continuum contained in some metric space. The collection of all subcontinua of a continuum X endowed with the Hausdorff metric, is denoted by $C(X)$. A subcontinuum A of a continuum X is said to be *meager* if $\text{Int}(A) = \emptyset$; and it is called *regular* if $\text{Cl}(\text{Int}(A)) = A$. Recently, the professor Norberto Ordóñez in the articles “The hyperspace of regular subcontinua”, from 2018, and “The hyperspace of meager subcontinua”, from 2020, defined and studied the hyperspaces $D(X)$ and $M(X)$, formed by the regular subcontinua of X and the meager subcontinua of X , respectively. In this paper we present some results obtained by Ordóñez about the compactness, connectedness and density of these hyperspaces. Original results are also found in this paper, which extend the knowledge of topological properties of $D(X)$ and $M(X)$. We obtain the borelian complexity of $D(X)$ by checking that it is a Π_3^0 set of $C(X)$. We show that the hyperspace $D(X)$ never is discrete infinity. And we give a example of a non contractile continuum X such that its hyperspace $M(X)$ is contractile, answering negatively to a question raised by the professor Ordóñez.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Doctor en Ciencias Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Dado un espacio topológico X , un hiperespacio de X es un subconjunto del conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$ dotado de una topología. La noción de hiperespacio tiene sus inicios en los trabajos de Leopold VIETORIS y Felix HAUSDORFF a inicios del siglo XX. En 1914, Hausdorff muestra que si X es un espacio métrico, es posible definir una métrica sobre la familia de todos los subconjuntos no vacíos, cerrados y acotados, tal que la función natural $\varphi(x) = \{x\}$ sea un encaje. A esta métrica la llamamos hoy *Métrica de Hausdorff*. Por otra parte, años más tarde en 1922, Vietoris introduce una topología para la colección de subconjuntos cerrados no vacíos de cualquier espacio topológico X ; este hiperespacio lo denotamos por 2^X y la topología la llamamos *Topología de Vietoris*. Se sabe que cuando X es métrico compacto, la topología inducida por la métrica de Hausdorff coincide con la topología de Vietoris en este hiperespacio 2^X . De esta manera, el trabajo de Vietoris generaliza el trabajo de Hausdorff, dando la posibilidad de estudiar hiperespacios en un contexto más general, el contexto de los espacios topológicos.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo diferente de vacío. Los hiperespacio más estudiados sobre un continuo X son: 2^X la colección de cerrados no vacíos de X (que ya mencionamos en este escrito) y $C(X)$ el hiperespacio de subcontinuos de X . Sin embargo, existen diversas familias de hiperespacios como se puede ver por ejemplo en las definiciones 1.4 a 1.8 de ¹.

Dado un continuo X , un subcontinuo Y de X se dice *magro* si $\text{Int}_X(Y) = \emptyset$ y se dice *regular* si $Y = \text{Cl}_X(\text{Int}_X(Y))$. Recientemente, el profesor Norberto ORDÓÑEZ define los hiperespacios $M(X)$ y $D(X)$ formados por los subcontinuos magros de X y los subcontinuos regulares de X , respectivamente. Los artículos donde define y estudia las primeras propiedades de estos hiperespacios son: “*The hyperspace of regular subcontinua*” ², de 2018, y “*The hyperspace of meager subcontinua*” ³, de 2020.

-
- ¹ ILLANES, Alejandro y NADLER, Sam. *Hyperspaces: fundamentals and recent advances*. Vol. 206. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, Inc, 1999.
 - ² ORDÓÑEZ, Norberto. “The hyperspace of regular subcontinua”. En: *Topology And Its Applications* 234 (2018), págs. 415-427.
 - ³ ORDÓÑEZ, Norberto. “The hyperspace of meager subcontinua”. En: *Houston Journal of Mathematics* 46.3 (2020), págs. 821-834.

En estos artículos el autor estudia propiedades como la compacidad, conexidad, contractilidad y densidad de los espacios $D(X)$ y $M(X)$. Además, propone algunas preguntas. En 2021, Ordóñez amplía el estudio de estos hiperespacios y publica un nuevo artículo que tituló “*Hyperspaces through regular and meager subcontinua*”⁴. El objetivo principal de esta tesis es recopilar la información de estos hiperespacios y mostrar avances a problemas propuestos en la literatura. En este trabajo se encuentran resultados originales que en nuestra opinión, amplía sustancialmente el conocimiento de propiedades topológicas de los hiperespacios $D(X)$ y $M(X)$.

Este trabajo lo dividimos en 4 capítulos. En el primer capítulo presentamos los elementos básicos de topología y la teoría de continuos necesarios para la comprensión de este trabajo. En el segundo capítulo, estudiamos la complejidad boreliana de los hiperespacios $D(X)$ y $M(X)$. Mostramos que de manera general $M(X)$ es un conjunto G_δ y que $D(X)$ es un conjunto Π_3^0 de $C(X)$. En el tercer capítulo nos preguntamos a qué espacios métricos puede ser homeomorfo $D(X)$. Damos una condición necesaria y suficiente para que $D(X)$ conste de un solo punto, mostramos también que el hiperespacio nunca tendrá exactamente 2 o 4 puntos. Finalmente, en el teorema principal de este capítulo, demostramos que $D(X)$ nunca es infinito discreto. En el cuarto y último capítulo, abordamos un problema planteado en³, en el que se pregunta qué relación hay entre la contractibilidad de X y la contractibilidad de $M(X)$. Presentamos algunas condiciones suficientes para que $M(X)$ sea contráctil y mostramos un ejemplo de un continuo X que cumple que $M(X)$ es contráctil, pero X no lo es, mostrando así, que la contractibilidad de $M(X)$ no implica la contractibilidad de X , dando respuesta negativa al Problema 3 planteado en³.

⁴ ORDÓÑEZ, Norberto. “Hyperspaces through regular and meager subcontinua”. En: *Topology and its Applications* 300 (2021), Paper No. 107760, 12.

1. PRELIMINARES

En este capítulo presentamos los conceptos y resultados necesarios para la comprensión de este trabajo. En la primera sección mostramos algunos resultados de topología general y propiedades generales de los continuos. En la segunda sección damos una introducción al concepto de hiperespacio de un continuo; presentamos los hiperespacios que trataremos y mostramos algunos resultados y herramientas utilizadas en el estudio de los hiperespacios.

1.1. RESULTADOS BÁSICOS Y NOTACIÓN

Dados un espacio métrico X y A un subconjunto de X , denotamos el interior y la clausura de A por $\text{Int}_X(A)$ y $\text{Cl}_X(A)$, o simplemente cuando no haya lugar a confusión por A° y \overline{A} , respectivamente.

Definición 1.1.1. Un espacio topológico X se dice *homogéneo*, si dados $p, q \in X$, existe $h: X \rightarrow X$ un homeomorfismo tal que $h(p) = q$.

Es fácil ver que \mathbb{R}^n , S^1 o en general, cualquier grupo topológico (espacio topológico con estructura de grupo donde su operación y la aplicación que manda a cada punto en su inverso, son funciones continuas) son ejemplos de espacios topológicos homogéneos.

Dado un espacio topológico X , diremos que un subconjunto $A \subseteq X$ es un *conjunto* G_δ si existe una colección numerable de abiertos $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X tal que $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Además, decimos que A es un *conjunto* F_σ si existe una colección numerable de cerrados $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X tal que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Definición 1.1.2. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un *espacio de Baire* si la intersección numerable de abiertos densos en X es denso en X .

Algunos autores conocen el siguiente resultado como el Teorema de Baire. Una prueba se puede consultar en el Corolario 9.14 de ⁵.

Teorema 1.1.3. *Todo espacio de Hausdorff localmente compacto es de Baire.*

⁵ CAMARGO, Javier y VILLAMIZAR, Élder. *Topología general*. Bucaramanga: Ediciones UIS, 2019.

Como todo continuo es localmente compacto, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.1.4. *Todo continuo es un espacio de Baire.*

Definición 1.1.5. Una σ -álgebra sobre un conjunto X es una colección \mathcal{A} de subconjuntos de X , tal que $\emptyset \in \mathcal{A}$ y es cerrado bajo uniones numerables y complementos.

Un espacio topológico X se dice *polaco* si es separable y metrizable con una métrica completa. No es difícil verificar que todo continuo es polaco. Denotamos por $\mathcal{B}(X)$ a la colección de borelianos de un polaco X ; esto es, la menor σ -álgebra (respecto a la contención) sobre X , que contiene a los abiertos de X . La noción que presentamos a continuación, conocida como *Jerarquía Boreliana*, la usaremos en el Capítulo 2.

Definición 1.1.6. Sea X un espacio polaco, definimos $\Sigma_1^0(X)$ la colección de los abiertos de X y $\Pi_1^0(X)$ la colección de los cerrados de X . Recursivamente definimos para cada $1 < \alpha < \omega_1$ (donde ω_1 es el primer ordinal no numerable),

$$\Sigma_\alpha^0(X) = \left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n : B_n \in \Pi_\beta^0(X), \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y para algún } \beta < \alpha \right\};$$

$$\Pi_\alpha^0(X) = \{X \setminus B : B \in \Sigma_\alpha^0(X)\}.$$

Nótese que de la definición tenemos que $\Sigma_2^0(X)$ es la colección de conjuntos F_σ de X . Así mismo, $\Pi_2^0(X)$ es la colección de los conjuntos G_δ de X . La prueba del siguiente teorema se puede consultar en la sección 2.2 de ⁶.

Teorema 1.1.7. *Sea X un espacio polaco no numerable. Si $1 \leq \alpha, \beta < \omega_1$ y $\alpha < \beta$, entonces:*

$$\begin{aligned} \Sigma_\alpha^0 &\subsetneq \Sigma_\beta^0; \\ \Pi_\alpha^0 &\subsetneq \Pi_\beta^0; \\ \Sigma_\alpha^0 &\subsetneq \Sigma_\beta^0; \\ \Pi_\alpha^0 &\subsetneq \Pi_\beta^0. \end{aligned}$$

⁶ DI PRISCO, Carlos y UZCÁTEGUI, Carlos. *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. Bogotá: Ediciones Uniandes, 2020.

Los borelianos los podemos representar como mostramos en el siguiente resultado, tomado del Teorema 2.4 de ⁶.

Teorema 1.1.8. *Si X es un espacio polaco, entonces $\mathcal{B}(X) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Sigma_\alpha^0(X) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Pi_\alpha^0(X)$.*

Una descomposición \mathcal{D} de un espacio métrico X es una familia de subconjuntos no vacíos, disjuntos dos a dos, tales que $X = \bigcup \mathcal{D}$, dotado con la topología cociente.

Definición 1.1.9. Dados X espacio métrico y \mathcal{D} una descomposición de X , decimos que \mathcal{D} es *semicontinua superior* o simplemente *scs*, si para todo $D \in \mathcal{D}$ y cualquier abierto U de X tal que $D \subseteq U$, existe un abierto V de X , con $D \subseteq V$, tal que si $D' \in \mathcal{D}$ y $D' \cap V \neq \emptyset$, entonces $D' \subseteq U$.

El siguiente teorema caracteriza las descomposiciones semicontinuas superior. Una prueba se puede consultar en el Teorema 1.2.19 de ⁷.

Teorema 1.1.10. *Sea X un espacio métrico y \mathcal{D} una descomposición de X . Entonces, \mathcal{D} es scs si, y solo si, para todo U abierto de X , el conjunto $\{D \in \mathcal{D} \mid D \subseteq U\}$ es un abierto de \mathcal{D} .*

Es fácil mostrar ejemplos de descomposiciones de un continuo X que no son espacios métricos (ver por ejemplo la página 37 de ⁸). Es importante tener en cuenta el siguiente resultado que tomamos del Teorema 3.10 de ⁸.

Teorema 1.1.11. *Sean X un continuo y \mathcal{D} una descomposición de X . Si \mathcal{D} es scs, entonces \mathcal{D} es un continuo.*

Denotamos $X/A = \{\{x\} : x \in X \setminus A\} \cup \{A\}$ una descomposición de X , para cualquier A subconjunto de X . En particular, tenemos el siguiente resultado. Una prueba se puede consultar en el Ejemplo 3.14 de ⁸.

Corolario 1.1.12. *Sean X un continuo y A un subconjunto de X . Si A es cerrado, entonces X/A es un continuo.*

De manera dual tenemos la siguiente definición.

⁷ MACÍAS, Sergio. *Topics on continua*. 2.^a ed. Ciudad de México: Springer, 2018.

⁸ NADLER, Sam. *Continuum theory: an introduction*. Vol. 158. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker, Inc., 1992.

Definición 1.1.13. Sea X un espacio métrico y \mathcal{D} una descomposición de X . Decimos que \mathcal{D} es *semicontinua inferior* o *sci*, si para cada $D \in \mathcal{D}$ y cualquier abierto U de X donde $U \cap D \neq \emptyset$, tenemos que para cada $x \in D$ existe un abierto V en X con $x \in V$, tal que si $D' \in \mathcal{D}$ y $D' \cap V \neq \emptyset$, entonces $D' \cap U \neq \emptyset$. Finalmente, decimos que \mathcal{D} es *continua* si \mathcal{D} es *scs* y *sci*.

Del Teorema 1.2.23 de ⁷ y del Teorema 3 en la página 185 de ⁹ tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.1.14. Sea X un espacio métrico y \mathcal{D} una descomposición de X . Entonces, \mathcal{D} es *sci* si, y solo si, para todo F cerrado de X , se tiene que $\{D \in \mathcal{D} \mid D \subseteq F\}$ es cerrado de \mathcal{D} .

La demostración del siguiente teorema se puede encontrar en la Proposición 6.3 de ⁸.

Proposición 1.1.15. Sea X un continuo y K un subcontinuo de X . Si $X \setminus K = U \cup V$, con U y V mutuamente separados, entonces $U \cup K$ y $V \cup K$ son continuos.

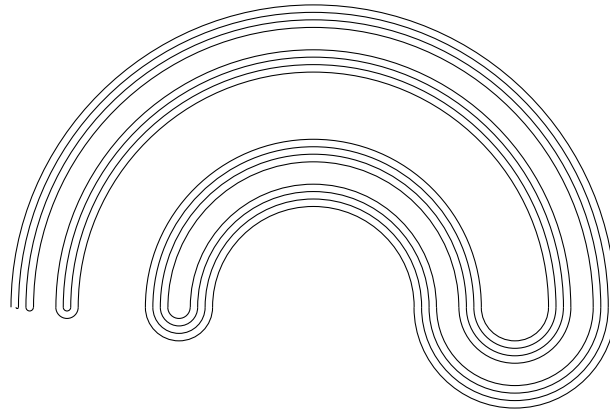
Definición 1.1.16. Un continuo X se dice *descomponible* si existen subcontinuos propios A y B de X , tales que $X = A \cup B$. En caso contrario decimos que X es *indescomponible*. Además, se dice que un continuo es *hereditariamente descomponible*, si todo subcontinuo no degenerado es descomponible y finalmente, un continuo se dice *hereditariamente indescomponible* si todo subcontinuo es indescomponible.

El arco (cualquier continuo homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$) es un continuo hereditariamente descomponible y un ejemplo de continuo indescomponible es el continuo de *Knaster*, Figura 1.1; su construcción se puede ver en el Ejemplo 1 en la página 204 de ¹⁰. Una 2-celda es un ejemplo de un continuo descomponible que no es hereditariamente descomponible, pues, contiene una copia de un continuo de Knaster. Más adelante trabajamos, sin entrar en detalles de construcción, con un ejemplo de continuo hereditariamente indescomponible.

⁹ KURATOWSKI, K. *Topology*. Vol. I. New York-London: Academic Press, 1966.

¹⁰ KURATOWSKI, K. *Topology*. Vol. II. New York-London: Academic Press, 1968.

Figura 1.1: Continuo de Knaster.



El siguiente teorema caracteriza los continuos indescomponibles. Una prueba se puede consultar en el Corolario 1.7.26 de ⁷.

Teorema 1.1.17. *Un continuo X es indescomponible si, y solo si, todo subcontinuo propio de X tiene interior vacío.*

Definición 1.1.18. Dado un continuo X , decimos que X es *irreducible*, si existen $p, q \in X$, tales que no existe un subcontinuo propio A tal que $\{p, q\} \subseteq A$.

Es fácil ver que un arco es irreducible. También es conocido que todo continuo indescomponible (ver Definición 1.1.16) es irreducible (ver el Corolario 11.15.1 en ⁸). Por otro lado, la 2-celda, $[0, 1]^2$, y S^1 son ejemplos de continuos que no son irreducibles. El siguiente teorema es tomado del Corolario 11.9 de ⁸.

Teorema 1.1.19. *Sea X es un continuo y K es un subcontinuo de X . Si X es irreducible, entonces K° es conexo.*

Definición 1.1.20. Dado un espacio métrico X , una colección $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ de subconjuntos abiertos de X es una ε -cadena, si para cada i , $\text{diam}(U_i) < \varepsilon$, y $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si, y solo si, $|i - j| \leq 1$. Además, decimos que $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ es una ε -cadena circular si para todo i , $\text{diam}(U_i) < \varepsilon$, y $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si, y solo si $|i - j| \leq 1$ ó $i, j \in \{1, n\}$. En ambos casos cada conjunto U_i es llamado *eslabón*.

Definición 1.1.21. Un continuo X se dice *encadenable* si para todo $\varepsilon > 0$, existe una ε -cadena que cubre a X . De manera análoga se dice que es *circularmente encadenable* si para todo $\varepsilon > 0$, existe una ε -cadena circular que cubre a X .

Definición 1.1.22. Un continuo X es un *pseudo-arco* si X es no degenerado, encadenable y hereditariamente indescomponible. Ver ¹¹ y ¹² para detalles del pseudo-arco.

Definición 1.1.23. Un *triodo* es un continuo Z tal que tiene un subcontinuo Y donde $Z \setminus Y$ tiene al menos tres componentes.

Definición 1.1.24. Un continuo se dice *atriodico*, si no contiene un subcontinuo que sea un triodo.

Como consecuencia del Teorema 2.5.8 de ⁷ y del Corolario 2.1.46 de ⁷ se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.1.25. *Sea X un continuo. Si X es circularmente encadenable, entonces X es atriodico.*

1.2. HIPERESPACIOS DE CONTINUOS

Dado un continuo X , un hiperespacio de X , es un espacio topológico formado por subconjuntos de X . A continuación definimos los hiperespacios que usaremos en este trabajo:

Definición 1.2.1. Dado un continuo X , se definen los siguientes hiperespacios de X :

- $2^X = \{A \subseteq X \mid A \text{ es cerrado y } A \neq \emptyset\}$;
- $C(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es conexo}\}$;
- $F_1(X) = \{\{x\} \mid x \in X\}$;
- $D(X) = \{A \in C(X) \mid \overline{A^\circ} = A\}$;
- $M(X) = \{A \in C(X) \mid A^\circ = \emptyset\}$.

¹¹ MOISE, Edwin. "An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerate subcontinua". En: *Transactions of the American Mathematical Society* 63 (1948), págs. 581-594.

¹² BING, Ronly. "Concerning hereditarily indecomposable continua". En: *Pacific Journal of Mathematics* 1 (1951), págs. 43-51.

La colección $C(X)$ lo llamamos el *hiperespacio de subcontinuos de X* , $D(X)$ se le llama el *hiperespacio de subcontinuos regulares*, y $M(X)$ el *hiperespacio de subcontinuos magros*. De la definición tenemos que $X \in D(X)$ y $F_1(X) \subseteq M(X)$ para todo continuo X .

Ahora se introduce la métrica de Hausdorff, la cual define una distancia entre conjuntos cerrados, y por tanto, da estructura de espacio topológico a los hiperespacios definidos anteriormente.

Definición 1.2.2. Dados X un continuo con métrica d , y A y B subconjuntos cerrados no vacíos de X , definimos la *métrica de Hausdorff*, que denotamos por H_d , por:

$$H_d(A, B) = \inf\{r \in \mathbb{R}^+ \mid A \subseteq N_d(B, r) \text{ y } B \subseteq N_d(A, r)\};$$

donde

$$N_d(A, r) = \bigcup_{x \in A} B_d(x, r),$$

y $B_d(x, r)$ es la bola con centro en x y radio r .

La demostración de que H_d es una métrica se puede encontrar en el Teorema 4.2 de ⁸. Es fácil ver que la función $h : X \rightarrow F_1(X)$, dada por $h(x) = \{x\}$ es una isometría. Acerca de la estructura topológica de 2^X y $C(X)$ se tiene el siguiente resultado, su demostración se puede encontrar en el Teorema 1.13 de ¹³.

Teorema 1.2.3. *Para todo continuo X , 2^X y $C(X)$ son continuos arcoconexos.*

Algunos resultados respecto a la estructura topológica de $D(X)$ y $M(X)$ son los siguientes, sus demostraciones se pueden consultar en ² y ³.

Teorema 1.2.4. *Sea X un continuo. Entonces, $D(X)$ es compacto si, y solo si, $D(X)$ es finito.*

Teorema 1.2.5. *Si X es un continuo locamente conexo, entonces $D(X)$ es arcoconexo y es denso en $C(X)$.*

Teorema 1.2.6. *Para todo continuo X , $M(X)$ es conexo.*

Teorema 1.2.7. *Si X es un continuo arcoconexo, entonces $M(X)$ es arcoconexo.*

¹³ NADLER, Sam. *Hyperspaces of sets*. Vol. 45. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker, Inc., 1992.

Definición 1.2.8. Sea X un continuo. Definimos la *topología de Vietoris* para 2^X como la topología mas pequeña (respecto a la contención) que cumple que si U es abierto en X , entonces $\{A \in 2^X \mid A \subseteq U\}$ es abierto, y si F es cerrado en X , entonces $\{A \in 2^X \mid A \subseteq F\}$ es cerrado.

Dado X un continuo, y A_1, A_2, \dots, A_n subconjuntos de X , definimos:

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle = \{F \in 2^X \mid F \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ y } F \cap A_i \neq \emptyset \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

En el siguiente teorema se muestra una base para la topología de Vietoris. Su demostración se puede consultar en el Teorema 1.2 de ¹.

Teorema 1.2.9. Sea X un continuo, y consideremos:

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \subseteq 2^X \mid U_i \text{ abierto en } X \text{ para cada } i\}.$$

Entonces \mathcal{B} es una base para la topología de Vietoris en 2^X .

Si X es un continuo la topología de Vietoris coincide con la topología inducida por la métrica de Hausdorff, la demostración de este hecho se puede encontrar en el Teorema 4.5 de ⁸.

Teorema 1.2.10. Si \mathcal{D} una descomposición continua de un continuo X , entonces $\mathcal{D} \subseteq 2^X$ y su topología coincide con la topología como subespacio de 2^X .

Demostración. Puesto que \mathcal{D} es scs, del Lema 3.8 de ⁸, $\mathcal{D} \subseteq 2^X$. Denotemos τ_c la topología cociente de \mathcal{D} y τ_V la topología de \mathcal{D} como subespacio de 2^X . Notemos que de los teoremas 1.1.10 y 1.1.14, y la definición de la topología de Vietoris, tenemos que $\tau_V \subseteq \tau_c$.

Mostremos ahora que $\tau_c \subseteq \tau_V$. Sea A un abierto de \mathcal{D} . Luego, $\bigcup A$ es abierto de X y $A = (\bigcup A) \cap \mathcal{D}$. Así, $A \in \tau_V$ y $\tau_c \subseteq \tau_V$. De lo anterior, $\tau_c = \tau_V$. \square

Definición 1.2.11. Sea X un espacio topológico, y $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sucesión de subconjuntos de X . Definimos:

- $\liminf A_n = \{x \in X \mid \text{para cada abierto } U \text{ tal que } x \in U, \text{ el conjunto } \{n \in \mathbb{N} \mid U \cap A_n = \emptyset\} \text{ es finito}\};$

- $\limsup A_n = \{x \in X \mid \text{para cada abierto } U \text{ tal que } x \in U, \text{ el conjunto } \{n \in \mathbb{N} \mid U \cap A_n \neq \emptyset\} \text{ es infinito}\}.$

De la definición anterior podemos ver que $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$. En la página 21 de ¹, se puede encontrar un ejemplo para el cual $\liminf A_n \neq \limsup A_n$. Usando estos conceptos de límite inferior y superior, podemos calcular límites en 2^X , como se expresa en el siguiente teorema, cuya demostración se puede hallar en el Teorema 4.11 de ⁸.

Teorema 1.2.12. *Sean X un continuo y $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X . Entonces $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A respecto a la métrica de Hausdorff si, y solo si, $\liminf A_n = \limsup A_n = A$.*

Del teorema anterior tenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.2.13. *Sean X un continuo y $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de 2^X . Si para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subseteq A_{n+1}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.*

La siguiente proposición se encuentra como ejercicio en ¹. Presentamos una demostración para comodidad del lector.

Proposición 1.2.14. *Sea X un continuo. La función unión $u : 2^{2^X} \rightarrow 2^X$, dada por $u(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$ es continua, y además, si $\mathcal{A} \in C(C(X))$, entonces $u(\mathcal{A}) \in C(X)$.*

Demostración. Veamos que la función u está bien definida. Sea $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$ y tomemos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $u(\mathcal{A})$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ para algún $x \in X$. Tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $x_n \in A_n$. Consideremos la sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como \mathcal{A} es compacto, existe una subsucesión $(A_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a algún A de \mathcal{A} . Además, $x \in \liminf A_{n_k}$, por lo que $x \in A$. Así, $x \in u(\mathcal{A})$ y $u(\mathcal{A}) \in 2^X$.

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in 2^{2^X}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\mathcal{B} \subseteq N_{H_d}(\mathcal{A}, \varepsilon)$ y $\mathcal{A} \subseteq N_{H_d}(\mathcal{B}, \varepsilon)$. Si $b \in u(\mathcal{B})$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $b \in B$. También, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $H_d(A, B) < \varepsilon$; en particular, $B \subseteq N_d(A, \varepsilon)$. Por tanto, existe $a \in A \subseteq u(\mathcal{A})$ tal que $d(b, a) < \varepsilon$. Esto es, $u(\mathcal{B}) \subseteq N_d(u(\mathcal{A}), \varepsilon)$. De manera análoga $u(\mathcal{A}) \subseteq N_d(u(\mathcal{B}), \varepsilon)$. Con esto concluimos que $H_d(u(\mathcal{A}), u(\mathcal{B})) \leq H_{H_d}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, y esto implica que u es continua.

Finalmente, consideremos $\mathcal{A} \in C(C(X))$ y veamos que $u(\mathcal{A}) \in C(X)$. Basta mostrar que $u(\mathcal{A})$ es conexo. Supongamos que $u(\mathcal{A})$ no es conexo; es decir, supongamos que existen U y V abiertos no vacíos disjuntos de X tales que $u(\mathcal{A}) \subseteq U \cup V$, $u(\mathcal{A}) \cap U \neq \emptyset$ y $u(\mathcal{A}) \cap V \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{A}$. Tenemos que $A \subseteq u(\mathcal{A}) \subseteq U \cup V$. Observemos que si $A \cap U \neq \emptyset$, entonces tenemos que $A \subseteq U$, pues A es conexo; esto es, $A \in \langle U \rangle$. De manera análoga

tenemos que $A \in \langle V \rangle$ si $A \cap V \neq \emptyset$. Con esto tenemos que $\mathcal{A} \subseteq \langle U \rangle \cup \langle V \rangle$. Notemos también que $\mathcal{A} \cap \langle U \rangle \neq \emptyset$; pues, tomando $x \in u(A) \cap U$ y $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$, tenemos que $A \in \langle U \rangle$. De la misma manera concluimos que $\mathcal{A} \cap \langle V \rangle \neq \emptyset$. Pero esto contradice la conexidad de \mathcal{A} . Así, $u(A) \in C(X)$. \square

Definición 1.2.15. Decimos que X tiene la *propiedad de Kelley*, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $p, q \in X$, $d(p, q) < \delta$ y $A \in C(X)$ con $p \in A$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $H_d(A, B) < \varepsilon$. Además, decimos que X tiene la *propiedad de Kelley hereditariamente* si todo subcontinuo de X tiene la propiedad de Kelley.

Es fácil ver que todo continuo localmente conexo tiene la propiedad de Kelley. En la Figura 27 de ¹ podemos encontrar un continuo sin la propiedad de Kelley. El siguiente teorema da condiciones suficientes para que un continuo tenga la propiedad de Kelley hereditariamente. Este resultado fue tomado del Teorema 10.1 de ¹⁴.

Teorema 1.2.16. Si X es un continuo atriodico y homogéneo, entonces X tiene la propiedad de Kelley hereditariamente.

Un problema interesante es tratar de asignarle un tamaño a cada uno de los subconjuntos cerrados de un continuo X , este es el objetivo de las funciones de Whitney que definimos a continuación.

Definición 1.2.17. Sean X un continuo y $\mathcal{H} \subseteq 2^X$, una *función de Whitney* para \mathcal{H} es una función continua $w : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty)$ tal que para cualesquiera $A, B \in \mathcal{H}$:

1. Si $A \subsetneq B$, entonces $w(A) < w(B)$.
2. $A \in F_1(X)$ si, y solo si, $w(A) = 0$.

El siguiente teorema garantiza la existencia de funciones de Whitney, el resultado lo tomamos del Teorema 23.3 de ¹.

Teorema 1.2.18. Sean X un continuo y \mathcal{H} un subconjunto cerrado no vacío de 2^X . Entonces, cada función de Whitney para \mathcal{H} se puede extender a una función de Whitney para 2^X .

¹⁴ ACOSTA, Gerardo e ILLANES, Alejandro. "Continua which have the property of Kelley hereditarily". En: *Topology And Its Applications* 102.2 (2000), págs. 151-162.

En el teorema anterior si tomamos $\mathcal{H} = F_1(X)$, y consideramos la función $f : F_1(X) \rightarrow [0, \infty)$, dado por $f(\{x\}) = 0$, para todo $x \in X$, podemos ver que para todo continuo X existe una función de Whitney para 2^X y por tanto también para $C(X)$.

Definición 1.2.19. Sean X un continuo y w una función de Whitney para $C(X)$. Para cada $(x, t) \in X \times [0, w(X)]$, definimos:

$$F_w(x, t) = \{A \in w^{-1}(t) \mid x \in A\}.$$

Podemos interpretar a F_w como una función con dominio $X \times [0, w(X)]$ y contradominio $\mathcal{P}(2^X)$. La demostración de la siguiente proposición se puede encontrar en la Proposición 20.8 de ¹.

Proposición 1.2.20. Sean X un continuo y w una función de Whitney para $C(X)$. Entonces, $F_w(x, t) \in 2^{2^X}$, para todo $(x, t) \in X \times [0, w(X)]$.

La siguiente proposición caracteriza la continuidad de F_w , una demostración se puede consultar en la Proposición 20.11 de ¹.

Proposición 1.2.21. Sean X un continuo y w una función de Whitney para $C(X)$. Entonces, $F_w : X \times [0, w(X)] \rightarrow 2^{2^X}$ es continua si, y solo si, X tiene la propiedad de Kelley.

En la siguiente definición introducimos las funciones inducidas. Esta clase de funciones es de mucha utilidad cuando estudiamos hiperespacios de continuos.

Definición 1.2.22. Dados X y Y continuos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua, definimos las *funciones inducidas*: $2^f : 2^X \rightarrow 2^Y$ y $C(f) : C(X) \rightarrow C(Y)$, dadas por $2^f(A) = f(A)$ y $C(f) = 2^f|_{C(X)}$.

La demostración del siguiente resultado se puede encontrar en el Lema 13.3 de ¹.

Lema 1.2.23. Sean X y Y continuos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces las funciones inducidas 2^f y $C(f)$ son también funciones continuas.

Utilizando el Teorema 1.2.12 no es difícil verificar el siguiente lema.

Lema 1.2.24. Sean X y Y continuos. Entonces, la función $f : 2^X \times 2^Y \rightarrow 2^{X \times Y}$, definida para cada $(K_1, K_2) \in 2^X \times 2^Y$, por:

$$f(K_1, K_2) = K_1 \times K_2,$$

es una función continua.

2. COMPLEJIDAD BORELIANA DE $D(X)$ y $M(X)$

El objetivo de este capítulo es determinar la complejidad boreliana de los hiperespacios $D(X)$ y $M(X)$; es decir, determinar en que nivel de la Jerarquía Boreliana de $C(X)$ se encuentran. Cabe resaltar que hay ejemplos en los cuales estos hiperespacios tienen una estructura simple, por ejemplo: $D([0, 1])$ es abierto y $M([0, 1]) = F_1([0, 1])$ es cerrado. El siguiente es consecuencia del Ejercicio 23.9 de ¹⁵. Presentamos una demostración para comodidad del lector.

Teorema 2.0.1. *Si X es un continuo, entonces el hiperespacio $M(X)$ es un conjunto G_δ de $C(X)$.*

Demostración. Como X es segundo numerable, podemos tomar una base numerable $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ para la topología de X . Observemos que si $K \in C(X)$, entonces:

$$K \in M(X) \iff (\forall n \in \mathbb{N})(V_n \not\subseteq K).$$

De este modo, si para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $M_n = \{K \in C(X) \mid V_n \not\subseteq K\}$, tenemos que:

$$M(X) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n.$$

Para terminar la prueba, basta mostrar que M_n es abierto para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $K \in M_n$. Tenemos que $V_n \cap (X \setminus K) \neq \emptyset$. Sea U un abierto de X tal que $\bar{U} \subseteq V_n \cap (X \setminus K)$. Notemos que $K \in \langle X \setminus \bar{U} \rangle \subseteq M_n$. Así, cada M_n es abierto. De lo anterior, $M(X)$ es un conjunto G_δ de $C(X)$. □

Con el siguiente teorema describimos la complejidad boreliana del hiperespacio de continuos regulares $D(X)$.

Teorema 2.0.2. *Si X es un continuo, entonces $D(X) \in \Pi_3^0(C(X))$.*

Demostración. Sea $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para la topología de X . Notemos que si $K \in C(X)$, entonces:

$$K \in D(X) \iff (\forall n \in \mathbb{N})(V_n \cap K \neq \emptyset \Rightarrow V_n \cap K^\circ \neq \emptyset).$$

¹⁵ KECHRIS, Alexander. *Classical descriptive set theory*. Vol. 156. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1995.

Por tanto, si definimos $D_n = \{K \in C(X) \mid V_n \cap K^\circ \neq \emptyset\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$D(X) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\{K \in C(X) \mid V_n \cap K = \emptyset\} \cup D_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\langle X \setminus V_n \rangle \cup D_n).$$

Observemos que si $K \in C(X)$, entonces:

$$K \in D_n \iff (\exists m \in \mathbb{N})(V_m \subseteq V_n \cap K) \iff (\exists m \in \mathbb{N})(V_m \cap V_n \neq \emptyset \text{ y } V_m \cap V_n \subseteq K).$$

De esta modo, si definimos $H_n^m = \{K \in C(X) \mid V_m \cap V_n \neq \emptyset \text{ y } V_m \cap V_n \subseteq K\}$, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, entonces:

$$D_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} H_n^m.$$

De lo anterior, para obtener el resultado basta ver que H_n^m es cerrado para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Sea $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en H_n^m , tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = K$ para algún cerrado K . Supongamos que $K \notin H_n^m$; esto es, $V_m \cap V_n \cap (X \setminus K) \neq \emptyset$. Sea U un abierto no vacío de X tal que $\bar{U} \subseteq V_m \cap V_n \cap (X \setminus K)$. Notemos que $K \in \langle X \setminus \bar{U} \rangle$, por lo que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $K_i \in \langle X \setminus \bar{U} \rangle$, pero esto implica que $K_i \notin H_n^m$. Una contradicción. Por tanto, $K \in H_n^m$ y así, H_n^m es cerrado. \square

Existen continuos para los cuales $D(X)$ no es G_δ . En efecto, consideramos $X = [0, 1]^2$. Supongamos que $D(X)$ es G_δ . Del teorema 1.2.5 y del Teorema 11 de ³, tenemos que $D(X)$ y $M(X)$ son densos en $C(X)$. Además, del Teorema 2.0.1, $M(X)$ es G_δ . Pero, $D(X) \cap M(X) = \emptyset$, esto contradice que $C(X)$ es un espacio de Baire. De manera análoga podemos ver que $M(X)$ no es F_σ , y por tanto no está mas abajo en la jerarquía de borel.

Teniendo el Teorema 2.0.2, nos preguntamos si el nivel $\Pi_3^0(C(X))$ es el óptimo para ubicar a $D(X)$, es decir si existe un continuo X tal que $D(X)$ no esté en un nivel inferior a $\Pi_3^0(C(X))$, esto es equivalente a que $D(X) \notin \Sigma_3^0(C(X))$. Con esto, terminamos este capítulo planteando la siguiente pregunta:

Pregunta 2.0.3. ¿Existe un continuo X tal que $D(X) \notin \Sigma_3^0(C(X))$?

3. HIPERESPACIO DE SUBCONTINUOS REGULARES

Ya hemos mostrado algunas propiedades del hiperespacio de subcontinuos regulares de un continuo X , que denotamos por $D(X)$. En este capítulo, nos enfocaremos principalmente a dar respuestas parciales al siguiente problema.

Problema 3.0.1. Caracterizar la familia de espacios métricos S para los cuales existe un continuo X tal que $D(X) \cong S$.

En la primer sección consideramos el caso en el que $D(X)$ es finito. Mostramos que $|D(X)| \notin \{2, 4\}$ para todo continuo X . En las últimas dos secciones trabajamos el caso $D(X)$ infinito, en particular, con el Teorema 3.2.13, uno de los resultados más importantes de este capítulo, mostramos que no existe un continuo X tal que $D(X)$ es homeomorfo a \mathbb{N} .

3.1. CONTINUOS DONDE $D(X)$ ES FINITO

A continuación un lema sencillo que nos será de utilidad más adelante para construir elementos del hiperespacio $D(X)$.

Lema 3.1.1. Sean X un continuo y U un abierto no vacío de X . Si \bar{U} es un continuo, entonces $\bar{U} \in D(X)$.

Demostración. Notemos que $U \subseteq \bar{U}^\circ \subseteq \bar{U}$. De esto, se sigue que $\bar{U} \subseteq \overline{\bar{U}^\circ} \subseteq \bar{U}$. Así, $\overline{\bar{U}^\circ} = \bar{U}$ y $\bar{U} \in D(X)$. \square

Si X es un continuo indescomponible, entonces por el Teorema 1.1.17, $D(X) = \{X\}$. Por otra parte, en ³, el autor muestra un ejemplo de un continuo descomponible tal que $D(X) = \{X\}$, y plantea la siguiente pregunta:

Pregunta 3.1.2. ¿Existe un continuo hereditariamente descomponible X tal que su hiperespacio $D(X) = \{X\}$?

En relación a la pregunta anterior, el siguiente teorema caracteriza cuando el hiperespacio $D(X)$ tiene un único punto. Debemos resaltar que esta pregunta permanece sin responder.

Teorema 3.1.3. Sea X un continuo. Entonces, $D(X) = \{X\}$ si, y solo si, para todo $K \in C(X) \setminus \{X\}$, se satisface algunas de las siguientes afirmaciones:

1. $K^\circ = \emptyset$; o

2. Existen subconjuntos no vacíos A y B de X , tales que $K^\circ = A \cup B$ y $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $D(X) = \{X\}$. Sea $K \in C(X) \setminus \{X\}$ tal que $K^\circ \neq \emptyset$. Mostremos que existen los conjuntos A y B que satisfacen la afirmación 2. Por el Lema 3.1.1, tenemos que $\overline{K^\circ}$ es desconexo. Luego, existen cerrados no vacíos disjuntos P y Q de X , tales que $\overline{K^\circ} = P \cup Q$. Sean $A = K^\circ \cap P$ y $B = K^\circ \cap Q$. Es claro que $K^\circ = A \cup B$, y A y B son no vacíos. Por otro lado, $\overline{A} \subseteq P$ y $\overline{B} \subseteq Q$. Como $P \cap Q = \emptyset$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

Recíprocamente, supongamos que existe $K \in C(X) \setminus \{X\}$, tal que $\overline{K^\circ} = K$. Es evidente que $K^\circ \neq \emptyset$. Luego, por 2, existen conjuntos no vacíos A y B tales que $K^\circ = A \cup B$ y $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. De lo anterior, $\overline{K^\circ} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Esto contradice la conexidad de K . Así, $D(X) = \{X\}$. \square

A continuación mostramos algunas condiciones para que $D(X)$ tenga más de un punto.

Teorema 3.1.4. *Sea X un continuo descomponible. Si X es irreducible, entonces tenemos que $|D(X)| \geq 3$.*

Demostración. Sean A y B subcontinuos propios tales que $X = A \cup B$. Notemos que $A^\circ \neq \emptyset$ y $B^\circ \neq \emptyset$. Además, por el Teorema 1.1.19, A° y B° son conexos. De esta manera, por el Lema 3.1.1, $\overline{A^\circ}, \overline{B^\circ} \in D(X)$. Como $X \in D(X)$, $|D(X)| \geq 3$. \square

Lema 3.1.5. *Sean X un continuo y $p \in X$. Si $X \setminus \{p\}$ es desconexo (p es punto de corte de X), entonces $D(X)$ tiene al menos tres elementos.*

Demostración. Sean U y V abiertos no vacíos disjuntos de X tales que $X \setminus \{p\} = U \cup V$. Por la Proposición 1.1.15, $\overline{U} = U \cup \{p\}$ y $\overline{V} = V \cup \{p\}$ son subcontinuos de X . Además, \overline{U} y \overline{V} son puntos distintos de $D(X)$, por el Lema 3.1.1. Como $X \in D(X)$, $D(X)$ tiene al menos tres elementos. \square

La siguiente pregunta fue planteada en ².

Pregunta 3.1.6. Dado un entero positivo $n \in \mathbb{N}$, ¿existe un continuo X tal que $|D(X)| = n$?

En relación a esta pregunta la Proposición 4.15 de ² muestra la siguiente respuesta parcial de manera afirmativa.

Proposición 3.1.7. Sean $n \in \mathbb{N}$, K_1, K_2, \dots, K_n continuos indescomponibles, y $p_i \in K_i$ tales que $p_i \neq p_j$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $i \neq j$. Tomemos $X = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$.

1. Si $K_i \cap K_j = \{p_i\}$ si, y solo si, $|i - j| = 1$, entonces $|D(X)| = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Si $K_i \cap K_j = \{p_i\}$ si, y solo si, $|i - j| = 1$ o $|i - j| = n - 1$, entonces $|D(X)| = n(n-1) + 1$.
3. Si $K_i \cap K_j = \{p_1\}$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $i \neq j$, entonces $|D(X)| = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 2^n - 1$.

En el Corolario 3.1.9 y la Proposición 3.1.12 que mostramos más adelante, probamos que $|D(X)| \notin \{2, 4\}$, para todo continuo X . Dando respuesta negativa a la Pregunta 3.1.6 en algunos casos particulares.

Proposición 3.1.8. Sea X un continuo y $K \in D(X) \setminus \{X\}$. Entonces,

1. Si $X \setminus K$ es conexo, entonces $|D(X)| \geq 3$.
2. Si $X \setminus K$ es desconexo, entonces $|D(X)| \geq 4$.

Demostración. Supongamos primero que $X \setminus K$ es conexo. Entonces, por el Lema 3.1.1, $\overline{X \setminus K}$ es un continuo regular diferente a X y a K . Así, $|D(X)| \geq 3$.

Ahora supongamos que $X \setminus K$ es desconexo. Luego, existen U y V abiertos no vacíos disjuntos tales que $X \setminus K = U \cup V$. De la Proposición 1.1.15, $K \cup U$ y $K \cup V$ son continuos. Notemos que $K \cup U = \overline{K^\circ \cup U}$ y $K \cup V = \overline{K^\circ \cup V}$. Por tanto, $\{X, K, K \cup U, K \cup V\} \subseteq D(X)$ y así, $|D(X)| \geq 4$. \square

De la Proposición 3.1.8, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.1.9. No existe un continuo X tal que $|D(X)| = 2$.

Definición 3.1.10. Sea X un continuo. Un continuo A de $D(X) \setminus \{X\}$ es llamado *maximal* (*minimal*), cuando cumple que: si $B \in D(X)$ y $A \subsetneq B$, entonces $B = X$ (si $B \subseteq A$, entonces $B = A$, respectivamente).

Lema 3.1.11. Sea X un continuo y $K \in D(X) \setminus \{X\}$. Si K es maximal, entonces $\overline{X \setminus K}$ es un elemento minimal de $D(X)$.

Demostración. Veamos que $X \setminus K$ es conexo. Supongamos que $X \setminus K = U \cup V$ con U y V abiertos disjuntos no vacíos. De la demostración de la Proposición 3.1.8, $U \cup K \in D(X) \setminus \{X\}$. Además, $K \subsetneq U \cup K$, una contradicción. Así, del Lema 3.1.1, $\overline{X \setminus K} \in D(X)$.

Mostremos ahora que $\overline{X \setminus K}$ es minimal. Supongamos que existe $B \in D(X)$ tal que $B \subsetneq \overline{X \setminus K}$. Recordemos que $\overline{X \setminus K} = (X \setminus K) \cup \text{Fr}(X \setminus K)$, donde $\text{Fr}(X \setminus K) = \overline{X \setminus K} \cap \overline{K}$. Consideremos dos casos:

1. $B \subseteq X \setminus K$. Si $X \setminus B$ es conexo, por el Lema 3.1.1, $\overline{X \setminus B} \in D(X) \setminus \{X\}$ y $K \subsetneq \overline{X \setminus B}$, una contradicción. Si $X \setminus B$ es desconexo, entonces $X \setminus B = U \cup V$, con U y V abiertos no vacíos disjuntos. Podemos suponer que $K \subseteq U$. Del Lema 3.1.8, $U \cup B \in D(X) \setminus \{X\}$ y $K \subsetneq U \cup B$, de nuevo una contradicción.

2. $B \cap \text{Fr}(X \setminus K) \neq \emptyset$. Tenemos que $B \cap K \neq \emptyset$. Como $B \subsetneq \overline{X \setminus K}$, $K \cup B \neq X$. Por tanto, $K \cup B \in D(X)$. Lo que contradice la maximalidad de K .

De este modo, $\overline{X \setminus K}$ es un elemento minimal de $D(X)$. □

Proposición 3.1.12. *No existe un continuo X tal que $|D(X)| = 4$.*

Demostración. Sea X continuo tal que $D(X)$ es finito y $|D(X)| > 3$. Puesto que $D(X)$ es finito, existe $K_1 \in D(X) \setminus \{X\}$ maximal. Por el Lema 3.1.11, $K_2 = \overline{X \setminus K_1}$ es un elemento minimal de $D(X)$. Sea $K_3 \in D(X) \setminus \{X, K_1, K_2\}$. Notemos que $K_3 \not\subseteq K_2$; por tanto, $K_3 \cap (K_1)^\circ \neq \emptyset$. Consideremos dos casos:

1. $X \setminus K_3$ es conexo. Entonces $\overline{X \setminus K_3} \in D(X) \setminus \{X, K_1, K_2, K_3\}$, y por tanto, $|D(X)| \geq 5$.

2. $X \setminus K_3$ es desconexo. Entonces $X \setminus K_3 = U \cup V$, donde U y V son abiertos no vacíos disjuntos. Podemos suponer que $(X \setminus K_1) \cap (U \cup K_3) \neq \emptyset$. Por el Lema 3.1.8, $U \cup K_3 \in D(X) \setminus \{X, K_1, K_2, K_3\}$. Así, $|D(X)| \geq 5$.

De lo anterior $|D(X)| \neq 4$. □

Es fácil verificar que en la lista de naturales obtenidos en la Proposición 3.1.7, no hay potencias de 2, salvo 2^0 . Teniendo en cuenta esto, el Corolario 3.1.9 y la Proposición 3.1.12, finalizamos esta sección planteando la siguiente pregunta:

Pregunta 3.1.13. ¿Existe un continuo X tal que $|D(X)| = 2^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$?

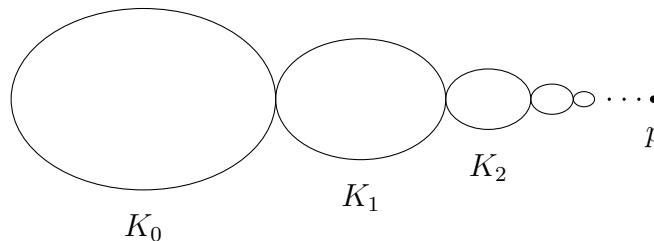
3.2. CONTINUOS DONDE $D(X)$ ES INFINITO

En esta sección abordamos el estudio de propiedades del hiperespacio cuando $D(X)$ es infinito. Dividimos esta parte en dos. En la primera, mostramos ejemplos de continuos cuando $D(X)$ es numerable. En la segunda parte, mostramos que es imposible construir un continuo tal que $D(X)$ sea homeomorfo a \mathbb{N} .

3.2.1. $D(X)$ homeomorfo a $\omega^2 n$ En esta breve sección damos un ejemplo de un continuo X para el que $D(X)$ es un ordinal infinito numerable.

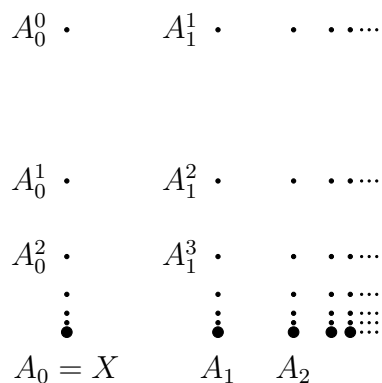
Ejemplo 3.2.1. Consideremos una sucesión $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de continuos indescomponibles que convergen a un punto p . Los cuales cumplen que si $|n - m| > 1$, entonces $K_n \cap K_m = \emptyset$; y, si $|m - n| = 1$, entonces $|K_n \cap K_m| = 1$. Tomemos el continuo $X = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n) \cup \{p\}$ como lo representamos en la Figura 3.1. Teniendo en cuenta el Teorema 1.1.17, tenemos que si $A \in D(X)$ y $p \in A$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $A = \{p\} \cup \bigcup_{n \geq n_0} K_n$. Si $p \notin D(X)$, entonces existen $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, tales que $A = \bigcup_{n_0 \leq n \leq n_1} K_n$. Con esto tenemos que $|D(X)| = \aleph_0$.

Figura 3.1: $|D(X)| = \aleph_0$



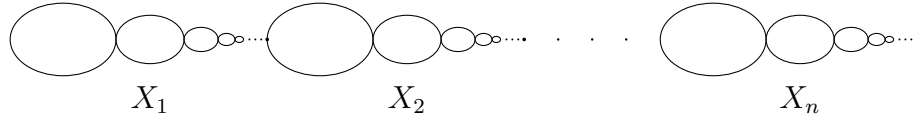
Para cada $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, denotemos $A_{n_0} = \{p\} \cup \bigcup_{n \geq n_0} K_n$ y $A_{n_0}^{n_1} = \bigcup_{n_0 \leq n \leq n_1} K_n$. Usando el Teorema 1.2.12 es fácil ver que $\lim_{n_1 \rightarrow \infty} A_{n_0}^{n_1} = A_{n_0}$. También podemos ver que los $A_{n_0}^{n_1}$ son elementos aislados de $D(X)$. Con estas observaciones obtenemos un modelo geométrico de $D(X)$, Figura 3.2. Y con esto vemos que $D(X) \cong \omega^2$, donde ω es el primer ordinal infinito.

Figura 3.2: $D(X) \cong \omega^2$



Siguiendo esta misma idea definimos Y_n como la unión de n continuos X_1, X_2, \dots, X_n homeomorfos al continuo de la Figura 3.1 unidos por un punto, ver Figura 3.3.

Figura 3.3: $D(Y_n) \cong \omega^2 m$



Respecto a este continuo hacemos la siguiente conjetura.

Conjetura 3.2.2. *Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $D(Y_n) \cong \omega^2 m$.*

3.2.2. $D(X)$ los naturales El objetivo de esta sección es mostrar que no existe un continuo X tal que $D(X) \cong \mathbb{N}$. Para el siguiente lema y los resultados presentados en esta sección recomendamos tener en cuenta la Definición 3.1.10 donde se introducen las nociones de continuos regulares maximales y minimales.

Lema 3.2.3. *Sean X un continuo y $K_1, K_2 \in D(X) \setminus \{X\}$ maximales. Si K_1 y K_2 son diferentes, entonces $K_1 \cup K_2 = X$.*

Demostración. Del Lema 3.1.11, $K_2 \not\subseteq X \setminus K_1$. Por tanto, $K_2 \cap K_1 \neq \emptyset$. Notemos que $K_2 \not\subseteq K_1$. Es decir, $K_2 \cap (X \setminus K_1) \neq \emptyset$. Entonces $K_1 \cup K_2 \in D(X)$ y $K_1 \subsetneq K_1 \cup K_2$. Así, como K_1 es maximal, $K_1 \cup K_2 = X$. \square

Teorema 3.2.4. *Sea X un continuo. Si $D(X)$ tiene infinitos maximales, entonces X no es un punto aislado de $D(X)$.*

Demostración. Sea \mathcal{K} la familia de continuos regulares maximales de X . Por la compacidad de $C(X)$, existe $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos diferentes de \mathcal{K} tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = K$, para algún $K \in C(X)$.

Veamos que $K = X$. Supongamos que $X \setminus K \neq \emptyset$. Sea U abierto no vacío tal que $\bar{U} \subseteq X \setminus K$. Es claro que $K \in \langle X \setminus \bar{U} \rangle$. Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \in \langle X \setminus \bar{U} \rangle$ para todo $n \geq n_0$. Esto contradice el Lema 3.2.3. De este modo, $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = X$. \square

Lema 3.2.5. *Sean X un continuo y $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $D(X)$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = K$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subseteq K$, entonces $K \in D(X)$.*

Demostración. Del Teorema 1.2.3, $K \in C(X)$. Veamos que $\overline{K^\circ} = K$. Sean $x \in K$ y U un abierto de X tal que $x \in U$. Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $K_{n_0} \cap U \neq \emptyset$. Puesto que K_{n_0} es regular, $K_{n_0}^\circ \cap U \neq \emptyset$. Además, $K_{n_0}^\circ \cap U \subseteq K^\circ \cap U$. Así, $x \in \overline{K^\circ}$ y $K \in D(X)$. \square

El siguiente teorema es consecuencia inmediata del lema anterior.

Teorema 3.2.6. *Sean X un continuo y $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $D(X)$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subsetneq K_{n+1}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n$ está en $D(X)$. En particular, $D(X)$ no es discreto.*

Demostración. Nótese que $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n}$, por el Corolario 1.2.13. Por tanto, del Lema 3.2.5, concluimos que $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n} \in D(X)$. \square

Corolario 3.2.7. *Sea X un continuo. Si $D(X)$ es discreto y $A \in D(X)$, entonces existe un maximal $K \in D(X) \setminus \{X\}$, tal que $A \subseteq K$.*

Demostración. Supongamos que no existe $K \in D(X) \setminus \{X\}$ maximal, tal que $A \subseteq K$. Entonces, inductivamente podemos construir una sucesión $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $D(X)$ tal que $A \subsetneq K_n$ y $K_n \subsetneq K_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego $D(X)$ no es discreto, por el Teorema 3.2.6. \square

Lema 3.2.8. *Sea X un continuo. Si $K \in D(X)$, entonces $D(K) = D(X) \cap \mathcal{P}(K)$.*

Demostración. Veamos que $D(K) \subseteq D(X) \cap \mathcal{P}(K)$. Sea $K' \in D(K)$. Tenemos que $K' \in C(X)$. Mostremos que $K' \in D(X)$. Sean $x \in K'$ y un abierto U de X , tal que $x \in U$. Entonces $\text{Int}_K(K') \cap U \neq \emptyset$. Notemos que existe un abierto V de X tal que $\text{Int}_K(K') = V \cap K$. Como $K \in D(X)$, tenemos que $U \cap V \cap \text{Int}_X(K) \neq \emptyset$ y $U \cap V \cap \text{Int}_X(K) \subseteq K'$. Por tanto, $K' \in D(X)$.

Recíprocamente, demostremos que $D(X) \cap \mathcal{P}(K) \subseteq D(K)$. Sea $K' \in D(X) \cap \mathcal{P}(K)$. Tenemos que $K' \in C(K)$. Mostremos que $K' \in D(K)$. Sean $x \in K'$ y un abierto U de X , tal que $x \in U$. Tenemos que $U \cap K \cap \text{Int}_X(K') \neq \emptyset$. De esto $K' \in D(K)$ y concluimos la prueba del lema. \square

Lema 3.2.9. *Sean X un continuo y $K \in D(X)$. Si $D(X)$ es discreto y C es una componente de $X \setminus K$, entonces $\overline{C} \in D(X)$.*

Demostración. Primero veamos que para todo $K \in D(X)$, $X \setminus K$ tiene una cantidad finita de componentes. Supongamos que existe $K_0 \in D(X)$ tal que $X \setminus K_0$ tiene una cantidad infinita de componentes. Entonces, $X \setminus K_0 = U_0 \cup V_0$ con U_0 y V_0 abiertos no vacíos disjuntos. Podemos suponer que V_0 tiene una cantidad infinita de componentes. Por el Lema 3.1.8, $K_1 = K_0 \cup U_0$ y $K_0 \cup U_0 \in D(X)$. Además, $X \setminus K_1 = V_0$. Por tanto, existen U_1

y V_1 abiertos no vacíos disjuntos tales que $X \setminus K_1 = U_1 \cup V_1$. De nuevo, podemos suponer que V_1 tiene una cantidad infinita de componentes. Así tenemos del Lema 3.1.8 que $K_2 = K_1 \cup U_1 \in D(X)$. De esta manera, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos recursivamente $K_n \in D(X)$ tal que $K_n \subsetneq K_{n+1}$. Esto contradice que $D(X)$ es discreto, por el Teorema 3.2.6. Así, concluimos que para todo $K \in D(X)$, $X \setminus K$ tiene un cantidad finita de componentes. Sean $K \in D(X)$ y C_1, C_2, \dots, C_m las componentes de $X \setminus K$. Veamos que $\overline{C_1} \in D(X)$. Por el Lema 3.1.1, basta ver que C_1 es abierto. Supongamos que existen $x \in C_1$ y una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $X \setminus C_1$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. De esta manera, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$, entonces $x_n \in X \setminus K$. Por el principio del palomar, existe $i \in \{2, 3, \dots, m\}$, tal que $\{x_n \mid n \geq n_0\} \cap C_i$ es infinito. Esto implica que $x \in \overline{C_i}$, una contradicción. Así, C_1 es abierto y $\overline{C_1} \in D(X)$. De la misma manera tenemos que $\overline{C_i} \in D(X)$ para cada $i \in \{2, 3, \dots, m\}$. \square

Teorema 3.2.10. *Sea X un continuo. Si $D(X)$ es discreto y existe $K \in D(X) \setminus \{X\}$ tal que K es simultáneamente maximal y minimal, entonces $|D(X)| = 3$.*

Demostración. Del Lema 3.1.11, $\overline{X \setminus K} \in D(X)$. Supongamos que existe $K' \in D(X) \setminus \{X, K, \overline{X \setminus K}\}$. Del Lema 3.1.11 y la minimalidad de K , tenemos que $K' \not\subseteq K$ y $K' \not\subseteq \overline{X \setminus K}$. Por tanto, $K' \cap (X \setminus K) \neq \emptyset$ y $K' \cap K \neq \emptyset$. De este modo, $K \cup K' \in D(X)$.

Veamos que $K \cup K' \neq X$. Supongamos que $K \cup K' = X$. Entonces $\overline{X \setminus K} \subsetneq K'$. Sea C una componente de $K' \setminus (\overline{X \setminus K})$. De los lemas 3.2.9 y 3.2.8, $\overline{C} \in D(X)$. Además, $\overline{C} \subseteq K$; lo que contradice la minimalidad de K .

De este modo, $K \cup K' \in D(X) \setminus \{X\}$ y $K \subsetneq K \cup K'$. Contradiciendo la maximalidad de K . Concluimos de esta manera que $D(X) = \{X, K, \overline{X \setminus K}\}$ y así, $|D(X)| = 3$. \square

Lema 3.2.11. *Sea X un continuo y $K \in D(X) \setminus \{X\}$ maximal. Si $D(X)$ es infinito y discreto, entonces $D(K)$ es infinito.*

Demostración. Definamos $R = \{A \in D(X) \mid X \setminus K \subseteq A\}$. Veamos que $D(X) = D(K) \cup R$. Sea $A \in D(X)$. Del Lema 3.1.11, $A \not\subseteq X \setminus K$, de este modo, $K \cap A \neq \emptyset$, por tanto, $K \cup A \in D(X)$. Supongamos que $A \notin D(K)$ y $A \notin R$. Esto es, $A \not\subseteq K$ y $X \setminus K \not\subseteq A$. Con lo que tenemos que $K \cup A \in D(X)$, $K \subsetneq K \cup A$ y $K \cup A \neq X$, lo que contradice la maximalidad de A . Así, $D(X) = D(K) \cup R$.

Sea $A \in R \setminus \{\overline{X \setminus K}\}$. Es claro que

$$A = \overline{X \setminus K} \cup \bigcup C_A$$

Donde $\mathcal{C}_A = \{\overline{C} \mid C \text{ es componente de } A \setminus \overline{(X \setminus K)}\}$, de los lemas 3.2.9 y 3.2.8, tenemos que $\mathcal{C}_A \subseteq D(K)$. Con esto, podemos definir una función inyectiva de $R \setminus \{\overline{X \setminus K}\}$ a $\mathcal{P}(D(K))$, dada por $A \mapsto \mathcal{C}_A$. De este modo si suponemos que $D(K)$ es finito, entonces R es finito, lo que implica que $D(X)$ es finito. Por tanto, $D(K)$ es infinito. \square

Teorema 3.2.12. *Sea X un continuo. Si $D(X)$ es infinito discreto, entonces $D(X)$ tiene infinitos maximales.*

Demostración. Definamos $K_0 = X$. Por el Teorema 3.2.6, existe $K_1 \in D(X) \setminus \{X\}$ maximal. Del Lema 3.2.11, K_1 tiene infinitos subcontinuos regulares propios. Luego existe $K_2 \subsetneq K_1$ maximal en $D(K_1)$, por el Lema 3.2.8 y el Teorema 3.2.6. Así recursivamente, construimos una sucesión $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $D(X)$, tal que:

1. $K_{n+1} \subsetneq K_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. K_{n+1} es maximal en $D(K_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
3. Sea $N_{n+1} = \overline{K_n \setminus K_{n+1}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 3.1.11, N_{n+1} es minimal en $D(K_n)$. Por tanto, minimal en $D(X)$.
4. $N_n^\circ \cap N_m^\circ = \emptyset$, para cada $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Supongamos que $n < m$. Entonces, $K_{m-1} \subsetneq K_{n-1}$. Por tanto, $N_n^\circ \cap K_{m-1} = \emptyset$. Dado que $N_m \subseteq K_{m-1}$, $N_n^\circ \cap N_m^\circ = \emptyset$.

Consideremos las siguientes colecciones:

$$\mathcal{N} = \{N_{n+1} \in D(X) \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{M} = \left\{ \bigcup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{N} \text{ es finito no vacío y } \bigcup \mathcal{S} \text{ es conexo} \right\}.$$

Notemos que $\mathcal{M} \subseteq D(X)$. De este modo, si $S \in \mathcal{M}$, del Teorema 3.2.6 y 4, existe L maximal de \mathcal{M} , tal que $S \subseteq L$. Sea:

$$\mathcal{M}' = \{S \in \mathcal{M} \mid S \text{ es maximal en } \mathcal{M}\}.$$

Es claro que $\bigcup \mathcal{M}' = \bigcup \mathcal{N}$, pues $N_{n+1} \in \mathcal{M}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Observemos también que si $S_1, S_2 \in \mathcal{M}$ y $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, entonces $S_1 \cup S_2 \in \mathcal{M}$. Por tanto, si L_1 y L_2 son elementos maximales diferentes de \mathcal{M} , entonces $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. De este modo, \mathcal{M}' es una partición de $\bigcup \mathcal{N}$. Puesto que \mathcal{N} es infinito, \mathcal{M}' es infinito. Escribamos $\mathcal{M}' = \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Afirmación. Si $L_n = \overline{X \setminus S_n}$, entonces $L_n \in D(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sean $N_{m_1}, N_{m_2}, \dots, N_{m_k}$ tales que $S_n = N_{m_1} \cup \dots \cup N_{m_k}$, donde $m_1 < \dots < m_k$. Observemos que $X = K_{m_k} \cup (\bigcup_{i=1}^{m_k} N_i)$. Además, $L_n = K_{m_k} \cup (\bigcup\{N_i \mid i \in \{1, 2, \dots, m_k\} \setminus \{m_1, \dots, m_k\}\})$. Dado que $S_n \in \mathcal{M}'$, $N_m \cap N_i = \emptyset$ para cada $m \in \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ e $i \in \{1, 2, \dots, m_k\} \setminus \{m_1, \dots, m_k\}$. Por tanto, puesto que X es conexo, obtenemos que $K_{m_k} \cap N_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, m_k\} \setminus \{m_1, \dots, m_k\}$ y así, L_n es un continuo. De este modo, $L_n \in D(X)$.

Del Corolario 3.2.7, existe $M_n \in D(X) \setminus \{X\}$ maximal tal que $L_n \subseteq M_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, $X \setminus M_n \subseteq S_n$ y S_1, S_2, \dots son dos a dos disjuntos. Por tanto, $M_n \neq M_m$ siempre que $n \neq m$. Así, $D(X)$ tiene infinitos maximales. \square

El siguiente teorema se sigue claramente de la contradicción entre los teoremas 3.2.12 y 3.2.4.

Teorema 3.2.13. *No existe un continuo X tal que $D(X)$ es homeomorfo a \mathbb{N} .*

En este mismo sentido, planteamos la siguiente pregunta:

Pregunta 3.2.14. ¿Existe un continuo X tal que $D(X) \cong \mathbb{Q}$ o $D(X) \cong \mathbb{I}$?

4. CONTRACTIBILIDAD DE $M(X)$

En este capítulo estudiamos la contractibilidad de $M(X)$ y abordamos las preguntas 4.0.1 y 4.0.2 planteadas en ³.

Pregunta 4.0.1. Sea X un continuo. ¿Si $M(X)$ es contráctil, entonces X es contráctil?

Pregunta 4.0.2. Sea X un continuo. ¿Si X es contráctil, entonces $M(X)$ es contráctil?

Damos una respuesta negativa a la Pregunta 4.0.1, y trabajamos algunos casos particulares de la Pregunta 4.0.2. Recordemos la definición de espacio contráctil:

Definición 4.0.3. Un espacio topológico X se dice que es *contráctil* si existen $p \in X$ y una función continua $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = p$ para todo $x \in X$.

De la definición tenemos que todo espacio métrico contráctil es arcoconexo. Empezamos presentando algunos casos particulares de la Pregunta 4.0.2. El siguiente lema nos será de utilidad para construir las funciones de contracción, su demostración se puede encontrar en el Teorema 3.9 de ⁵.

Lema 4.0.4. Sean X un espacio topológico, A y B subespacios de X tales que $X = A \cup B$, y $f: X \rightarrow Y$ una función. Si $f|_A: A \rightarrow Y$ y $f|_B: B \rightarrow Y$ son continuas y A y B son cerrados, entonces f es continua.

A continuación mostramos que el hiperespacio de subcontinuos magros de un cilindro de un espacio contráctil, es contráctil.

Teorema 4.0.5. Sea X un continuo. Si X es contráctil, entonces $M(X \times [0, 1])$ es contráctil.

Demostración. Definimos $h: X \times [0, 1] \times [0, 1/2] \rightarrow X \times [0, 1]$, para cada $(x, s, t) \in X \times [0, 1] \times [0, 1/2]$, por $h(x, s, t) = (x, s - 2ts)$. Como X es contráctil, existen $p \in X$ y una función continua $g: X \times [0, 1] \rightarrow X$ tales que $g(x, 0) = x$ y $g(x, 1) = p$, para cada $x \in X$. Sea $f: X \times \{0\} \times [1/2, 1] \rightarrow X \times \{0\}$ definida por $f(x, 0, t) = (g(x, 2t - 1), 0)$. Notemos que $f(x, 0, 1/2) = (x, 0)$ y $f(x, 0, 1) = (p, 0)$ para cada $(x, 0) \in X \times \{0\}$. Consideremos también la función $\pi_0: X \times [0, 1] \rightarrow X \times \{0\}$, $\pi_0(x, t) = (x, 0)$. Sea $H_1: M(X \times [0, 1]) \times [0, 1/2] \rightarrow M(X \times [0, 1])$, definida de la siguiente manera:

$$H_1(A, t) = C(h)(A \times \{t\}).$$

Veamos que H_1 está bien definida. Sea $(A, t) \in M(X \times [0, 1]) \times [0, 1/2]$. Es claro que $H_1(A, t) \in C(M \times [0, 1])$, luego, mostremos que $H_1(A, t) \in M(X \times [0, 1])$. Si $t = 1/2$, entonces $H_1(A, t) \subseteq X \times \{0\}$. Y tenemos que $\text{Int}(X \times \{0\}) = \emptyset$, por tanto $H_1(A, t) \in M(X \times [0, 1])$. Supongamos ahora que $t \in [0, 1/2)$. Sea $(x, r) \in H_1(A, t)$. Así, existe $(y, s) \in A$, tal que $(x, r) = h(y, s, t) = (y, s - 2ts)$. Como $A \in M(X \times [0, 1])$, existe una sucesión $((y_n, s_n))_{n \in \mathbb{N}}$ en $(X \times [0, 1]) \setminus A$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n, s_n) = (y, s)$. Consideremos la sucesión $((y_n, s_n - 2ts_n))_{n \in \mathbb{N}}$ en $X \times [0, 1]$. Como $(y_n, s_n) \notin A$, $(y_n, s_n - 2ts_n) \notin H_1(A, t)$. Tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n, s_n - 2ts_n) = (x, r)$ y por tanto, $(x, r) \notin \text{Int}(H_1(A, t))$. De esta manera $H_1(A, t) \in M(X \times [0, 1])$.

Sea $H_2: M(X \times [0, 1]) \times [1/2, 1] \rightarrow M(X \times [0, 1])$ definida por:

$$H_2(A, t) = C(f)(C(\pi_0)(A) \times \{t\}).$$

Mostremos que H_2 está bien definida. Sea $(A, t) \in M(X \times [0, 1]) \times [1/2, 1]$. Como $H_2(A, t) \in C(X \times [0, 1])$, basta ver que $\text{Int}(H_2(A, t)) = \emptyset$. Notemos que $X \times \{0\}$ tiene interior vacío y $H_2(A, t) \subseteq X \times \{0\}$. Así, $H_2(A, t) \in M(X \times [0, 1])$.

Finalmente, notemos que dado $A \in M(X \times [0, 1])$, $H_1(A, 1/2) = h(A \times \{1/2\}) = \pi_0(A) = f(\pi_0(A) \times \{1/2\}) = H_2(A, 1/2)$. Consideremos la función $H: M(X \times [0, 1]) \times [0, 1] \rightarrow M(X \times [0, 1])$, definida de la siguiente manera:

$$H(A, t) = \begin{cases} H_1(A, t), & \text{si } t \in [0, 1/2]; \\ H_2(A, t), & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Por el Lema 4.0.4, H es continua. Además, $H(A, 0) = A$ y $H(A, 1) = X \times \{0\}$. Esto muestra que $M(X \times [0, 1])$ es contráctil. \square

Dado X un espacio topológico, definimos el cono sobre X , como el espacio cociente $\text{Cono}(X) = (X \times [0, 1]) / (X \times \{0\})$. Con ideas similares a las que usamos en el teorema anterior, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.0.6. *Si X un continuo, entonces $M(\text{Cono}(X))$ es contráctil.*

Demostración. Definimos $g: \text{Cono}(X) \times [0, 1] \rightarrow \text{Cono}(X)$, de la siguiente manera:

$$g(Y, t) = \begin{cases} X \times \{0\}, & \text{si } Y = X \times \{0\} \text{ o } t = 1; \\ \{(x, s - ts)\}, & \text{si } Y = \{(x, s)\} \text{ y } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Veamos que g es continua. Sea $(Y, t) \in \text{Cono}(X) \times [0, 1]$. Es claro que si $(Y, t) \in (\text{Cono}(X) \setminus \{X \times \{0\}\}) \times [0, 1]$, g es continua en (Y, t) . Supongamos $Y = X \times \{0\}$, sea $((Y_n, t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\text{Cono}(X) \times [0, 1]$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (Y_n, t_n) = (Y, t)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $Y_n = \{(x_n, s_n)\}$ y $t_n \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, observemos que $g(Y_n, t_n) = \{(x_n, s_n - t_n s_n)\}$. Notemos que $s_n - t_n s_n \leq s_n$ y puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(x_n, s_n)\} = X \times \{0\}$, concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(x_n, s_n - t_n s_n)\} = X \times \{0\}$. De lo anterior g es continua en (Y, t) . Supongamos ahora que $t = 1$. Sea $((Y_n, t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\text{Cono}(X) \times [0, 1]$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (Y_n, t_n) = (Y, t)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $Y_n = \{(x_n, s_n)\}$ y $t_n \neq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$, por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - t_n s_n) = 0$. Así $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(x_n, s_n - t_n s_n)\} = Y \times \{0\}$. Por tanto g es continua.

Consideremos la función $H : M(\text{Cono}(X)) \times [0, 1] \rightarrow M(\text{Cono}(X))$, definida por $H(A, t) = C(g)(A \times \{t\})$. Veamos que H está bien definida. Sea $(A, t) \in M(\text{Cono}(X))$. Es claro que $H(A, t) \in C(\text{Cono}(X))$. Mostremos que $H(A, t) \in M(\text{Cono}(X))$. Si $t = 1$, el resultado es trivial. Si $t \in [0, 1)$. La demostración es análoga a la que dimos del Teorema 4.0.5. Tenemos que $H(A, 0) = A$ y $H(A, 1) = \{X \times \{0\}\}$. Esto muestra que $M(\text{Cono}(X))$ es contráctil. \square

Finalizamos esta sección dando respuesta negativa a la Pregunta 4.0.1.

Definición 4.0.7. Dado un continuo X , decimos que un subcontinuo propio K de X es *terminal*, si para todo subcontinuo propio K' de X tal que $K \cap K' \neq \emptyset$, tenemos que $K \subseteq K'$ o $K' \subseteq K$.

A continuación definimos arco de pseudoarcs.

Definición 4.0.8. Un *arco de pseudoarcs* T es un continuo, para el cual existe una descomposición continua \mathcal{D} en pseudoarcs, tal que \mathcal{D} es homeomorfo a $[0, 1]$ y cada elemento de \mathcal{D} es un subcontinuo terminal de T .

Lema 4.0.9. Si T es un arco de pseudoarcs, entonces existe $f : T \rightarrow [0, 1]$ continua y sobreyectiva, tal que:

1. Para todo $t \in [0, 1]$, $f^{-1}(t)$ es homeomorfo al Pseudoarco.
2. Para todo $t \in [0, 1]$, $f^{-1}(t)$ es un subcontinuo terminal de T .
3. $\mathcal{D} = \{f^{-1}(t) \mid t \in [0, 1]\}$ es una descomposición continua de T .
4. La función $g : [0, 1] \rightarrow C(T)$, definida por $g(t) = f^{-1}(t)$ es un encaje.

Demostración. Consideremos \mathcal{D} la descomposición continua en pseudoarcos de T . Definimos $f = h_2 \circ h_1$, donde $h_1 : T \rightarrow \mathcal{D}$ es una función cociente y $h_2 : \mathcal{D} \rightarrow [0, 1]$ un homeomorfismo. \square

En lo que sigue de la sección, T denotará un arco de pseudoarcos, \mathcal{D} la descomposición en pseudoarcos y f la función obtenida en el Lema 4.0.9.

Definición 4.0.10. Un *círculo de pseudoarcos* S es un continuo para el cual existe una descomposición continua \mathcal{P} en pseudoarcos, tal que \mathcal{P} es homeomorfo a S^1 y cada elemento de \mathcal{P} es un subcontinuo terminal.

La existencia de un arco de pseudoarcos y un círculo de pseudoarcos se garantiza en ¹⁶. Si consideramos $g_1 : S \rightarrow \mathcal{P}$ una función cociente, $g_2 : \mathcal{P} \rightarrow S^1$ un homeomorfismo y I un subarco de S^1 , entonces $(g_1 \circ g_2)^{-1}(I) \subseteq S$ es un arco de pseudoarcos. Además, de ¹⁷ se tiene que el círculo de pseudoarcos es circularmente encadenable y homogéneo. Por tanto, del Teorema 1.1.25, S es atridico. Y del Teorema 1.2.16, S tiene la propiedad de Kelley hereditariamente. Con esto, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.0.11. *El arco de pseudoarcos T tiene la propiedad de Kelley.*

La siguiente proposición caracteriza los continuos magros de T . Parte de la demostración la tomamos de ³.

Proposición 4.0.12. *Sea $X \in C(T)$. Entonces, $X \in M(T)$ si, y solo si, $X \subseteq f^{-1}(t)$ para algún $t \in [0, 1]$.*

Demostración. Sea $A \in M(T)$, basta ver que $f(A)$ es degenerado. Supongamos que $f(A) = [a, b]$ con $0 \leq a < b \leq 1$. Para cada $s \in [a, b]$, se tiene que $A \cap f^{-1}(s) \neq \emptyset$, y dado que $f^{-1}(s)$ es terminal y $A \not\subseteq f^{-1}(s)$, concluimos que $f^{-1}(s) \subseteq A$. De esta manera $f^{-1}((a, b))$ es un abierto no vacío contenido en A , lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, sea $A \subseteq f^{-1}(t)$ para algún $t \in [0, 1]$. Notemos que $\lim_{x \rightarrow t} f^{-1}(x) = f^{-1}(t)$. Por tanto, del Teorema 1.2.12, $(f^{-1}(t))^\circ = \emptyset$. Así, $A \in M(T)$. \square

¹⁶ LEWIS, Wayne. "Continuous curves of pseudo-arcs". En: *Houston Journal of Mathematics* 11.1 (1985), págs. 91-99.

¹⁷ BING, Ronly y JONES. "Another homogeneous plane continuum". En: *Transactions of the American Mathematical Society* 90.1 (1959), págs. 171-192.

Con el resultado de la proposición anterior, dado $A \in M(T)$, denotaremos t_A el único elemento de $[0, 1]$, tal que $A \subseteq f^{-1}(t_A)$. Además, si consideramos la composición de $C(f) : M(T) \rightarrow F_1([0, 1])$ y $h : F_1([0, 1]) \rightarrow [0, 1]$, donde h es un homeorfismo. Podemos ver que la función de $M(T)$ a $[0, 1]$, definida por $h(C(f)(A)) = t_A$ es continua y sobreyectiva. A continuación el teorema principal de esta sección. De la Observación 1 de ³, T no es arcoconexo, y por tanto no es contráctil. De este modo, el siguiente teorema responde completamente la Pregunta 4.0.1, de forma negativa. Con este resultado terminamos nuestro trabajo de investigación.

Teorema 4.0.13. $M(T)$ es contráctil.

Demostración. Consideremos la función $g : \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty)$, definida por $g(f^{-1}(t)) = 1/2$ para cada $t \in [0, 1]$. De manera trivial g es una función de Whitney para \mathcal{D} . Además, $\mathcal{D} \cong [0, 1]$, del Teorema 1.2.10, \mathcal{D} es un subconjunto cerrado de $C(T)$. De esta manera, por el Teorema 1.2.18, existe una función de Whitney $w : C(T) \rightarrow [0, \infty)$, tal que $w(f^{-1}(t)) = 1/2$, para todo $t \in [0, 1]$. Consideremos la función $h : T \times [0, w(T)] \rightarrow 2^T$, definida por $h(x, t) = u(F_w(x, t))$, donde u y F_w son las funciones definidas en 1.2.14 y 1.2.19. Por las proposiciones 4.0.11, 1.2.21 y 1.2.14, h es continua. Notemos además que $h(x, t) \in C(T)$, para todo $(x, t) \in T \times [0, w(T)]$, pues $x \in K$ para todo $K \in F_w(x, t)$. De este modo, la función inducida $C(h) : C(T \times [0, w(T)]) \rightarrow C(C(T))$ es continua. Definimos la función $H_1 : M(T) \times [0, 1/2] \rightarrow M(T)$, de la siguiente manera:

$$H_1(A, t) = u(C(h)(A \times \{t\})).$$

Veamos que H_1 está bien definida. Sea $(A, t) \in M(T) \times [0, 1/2]$. Nótemos que, $H_1(A, t) \in C(T)$, por la Proposición 1.2.14. Basta ver que $\text{Int}(H_1(A, t)) = \emptyset$. Sean $x \in A$ y $K \in F_w(x, t)$. Veamos que $K \subseteq f^{-1}(t_A)$. Supongamos que $K \not\subseteq f^{-1}(t_A)$. Como $f^{-1}(t_A)$ es terminal, $f^{-1}(t_A) \subsetneq K$. Por definición de función de Whitney, $w(K) > 1/2$; pero por otra parte $w(K) = t$ y $t \in [0, 1/2]$. Una contradicción. Concluimos que $K \subseteq f^{-1}(t_A)$. Por tanto $h(x, t) \subseteq f^{-1}(t_A)$. Así, $H_1(A, t) \subseteq f^{-1}(t_A)$, esto es $H_1(A, t) \in M(T)$.

Consideremos también la función $H_2 : M(T) \times [1/2, 1] \rightarrow M(T)$, definida por:

$$H_2(A, t) = f^{-1}((2 - 2t)t_A).$$

Observemos que H_1 y H_2 son continuas, pues son composición de funciones continuas. A continuación vamos a definir una función de contracción para $M(T)$. Para esto, veamos

primero que $H_1(A, 1/2) = H_2(A, 1/2)$. Sean $A \in M(T)$ y $x \in A$. Como vimos, $K \subseteq f^{-1}(t_A)$. Además, $w(f^{-1}(t_A)) = 1/2 = w(K)$, por tanto, $K = f^{-1}(t_A)$. Así, $H_1(A, 1/2) = f^{-1}(t_A)$. Por otro lado, $H_2(A, 1/2) = f^{-1}(t_A - 2(1/2 - 1/2)t_A) = f^{-1}(t_A)$. Es decir, $H_1(A, 1/2) = H_2(A, 1/2)$. Por tanto, podemos consideremos la función $H : M(T) \times [0, 1] \rightarrow M(T)$, definida por:

$$H(A, t) = \begin{cases} H_1(A, t), & \text{si } t \in [0, 1/2]; \\ H_2(A, t), & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Por el Lema 4.0.4, H es continua. Además, $H(A, 0) = H_1(A, 0) = A$, pues $h(x, 0) = \{x\}$ para todo $x \in T$, y $H(A, 1) = H_2(A, 1) = f^{-1}((2 - 2)t_A) = f^{-1}(0)$. Así, $M(T)$ es contráctil. \square

Bibliografía

- ACOSTA, Gerardo e ILLANES, Alejandro. "Continua which have the property of Kelley hereditarily". En: *Topology And Its Applications* 102.2 (2000), págs. 151-162 (vid. pág. 20).
- BING, Ronly. "Concerning hereditarily indecomposable continua". En: *Pacific Journal of Mathematics* 1 (1951), págs. 43-51 (vid. pág. 16).
- BING, Ronly y JONES. "Another homogeneous plane continuum". En: *Transactions of the American Mathematical Society* 90.1 (1959), págs. 171-192 (vid. pág. 37).
- CAMARGO, Javier y VILLAMIZAR, Élder. *Topología general*. Bucaramanga: Ediciones UIS, 2019 (vid. págs. 11, 34).
- DI PRISCO, Carlos y UZCÁTEGUI, Carlos. *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. Bogotá: Ediciones Uniandes, 2020 (vid. págs. 12, 13).
- ILLANES, Alejandro y NADLER, Sam. *Hyperspaces: fundamentals and recent advances*. Vol. 206. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, Inc, 1999 (vid. págs. 9, 18-21).
- KECHRIS, Alexander. *Classical descriptive set theory*. Vol. 156. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1995 (vid. pág. 22).
- KURATOWSKI, K. *Topology*. Vol. I. New York-London: Academic Press, 1966 (vid. pág. 14).
- *Topology*. Vol. II. New York-London: Academic Press, 1968 (vid. pág. 14).
- LEWIS, Wayne. "Continuous curves of pseudo-arcs". En: *Houston Journal of Mathematics* 11.1 (1985), págs. 91-99 (vid. pág. 37).
- MACÍAS, Sergio. *Topics on continua*. 2.^a ed. Ciudad de México: Springer, 2018 (vid. págs. 13-16).

MOISE, Edwin. "An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerate subcontinua". En: *Transactions of the American Mathematical Society* 63 (1948), págs. 581-594 (vid. pág. 16).

NADLER, Sam. *Continuum theory: an introduction*. Vol. 158. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker, Inc., 1992 (vid. págs. 13-15, 17-19).

– *Hyperspaces of sets*. Vol. 45. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker, Inc., 1992 (vid. pág. 17).

ORDÓÑEZ, Norberto. "Hyperspaces through regular and meager subcontinua". En: *Topology and its Applications* 300 (2021), Paper No. 107760, 12 (vid. pág. 10).

– "The hyperspace of meager subcontinua". En: *Houston Journal of Mathematics* 46.3 (2020), págs. 821-834 (vid. págs. 9, 10, 17, 23, 24, 34, 37, 38).

– "The hyperspace of regular subcontinua". En: *Topology And Its Applications* 234 (2018), págs. 415-427 (vid. págs. 9, 17, 25).