

*MODELOS NEWTONIANOS DE DISCOS GRUESOS PARA  
REGIONES CIRCUNNUCLEARES DE GALAXIAS  
ESPIRALES BARRADAS*

*MIGUEL ANDRÉS PÁEZ MURCIA*

*UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
2010*

*MODELOS NEWTONIANOS DE DISCOS GRUESOS PARA  
REGIONES CIRCUNNUCLEARES DE GALAXIAS  
ESPIRALES BARRADAS*

*Trabajo de Grado como requisito para optar al título de Físico:  
MIGUEL ANDRÉS PÁEZ MURCIA*

*Director:  
Ph.D GUILLERMO ALFONSO GONZÁLEZ*

*UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FISICA  
2010*

---

*Este triunfo va dedicado a los grandes amores de mi vida: mi mamá Lilia a quien amo con todo mi ser, mi hermana Nancy quien con sus sabios consejos siempre me fortalece, a mis hermosas sobrinas Karen y Angélica, a mi consentida Franci Karina quien siempre me acompaña y por último a quienes cada momento me muestran su amor, mi perro "Newton", mi "Choquis", "Bella" y "Lunita".*

# *Agradecimientos*

---

*Quiero agradecer a Dios que cada segundo me permitió ser fuerte, luchar y cumplir todas mis metas.*

*Agradezco a mi Mamá y a mi Hermana por todo el apoyo que me brindaron, a mi sobrina Angélica por su ternura, a mi sobrina Karen por su cariño; a mi novia y sus padres quienes en cada momento me fueron incondicionales. A todos ellos Gracias.*

*Por último agradezco a la familia Bautista Mesa por brindarme su respaldo y compañía durante este gran camino.*

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>1</b>	<b><i>Introducción</i></b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b><i>Modelos Newtonianos De Discos Gruesos</i></b>	<b>21</b>
2.1	<i>Teoría del Potencial y Condiciones de Contorno . . . . .</i>	21
2.2	<i>Modelos de Discos Gruesos . . . . .</i>	22
2.3	<i>Función <math>h(z)</math> . . . . .</i>	25
2.4	<i>Potencial Gravitacional . . . . .</i>	27
2.5	<i>Densidad de Masa . . . . .</i>	29
2.6	<i>Cálculo de la Masa . . . . .</i>	31
<b>3</b>	<b><i>Algunos Modelos Particulares</i></b>	<b>33</b>
3.1	<i>Modelo <math>n = 0</math> . . . . .</i>	34
3.2	<i>Modelo <math>n = 1</math> . . . . .</i>	40
3.3	<i>Modelo <math>n = 2</math> . . . . .</i>	46
3.4	<i>Modelo <math>n = 3</math> . . . . .</i>	52
3.5	<i>Valores de la Masa . . . . .</i>	58
	<b><i>Conclusiones</i></b>	<b>59</b>
	<b><i>Referencias</i></b>	<b>61</b>

# LISTA DE FIGURAS

---

---

1.1	<i>Region circunnuclear de NGC 1672</i>	14
1.2	<i>Galaxias Espirales</i>	15
1.3	<i>Anillos en la región circunnuclaear</i>	17
1.4	<i>Bulbo Clásico - Pseudobulbo</i>	18
1.5	<i>Leadning - Trailing</i>	19
2.1	<i>Líneas del Campo Gravitacional <math>\vec{g}</math></i>	22
2.2	<i>Desplazamiento y Corte</i>	23
2.3	<i>Llenado y Reflexión</i>	23
2.4	<i>Función <math>h(z)</math>, <math>h''(z)</math> y <math>h'''(z)</math></i>	27
3.1	<i>Densidad <math>\varphi_0^i(\chi, \gamma, 0)</math></i>	36
3.2	<i>Densidad <math>\varphi_0^{ii}(\chi, \gamma, 0)</math></i>	37
3.3	<i>Densidad <math>\varphi_0^{iii}(\chi, \gamma, 0)</math></i>	38
3.4	<i>Densidad <math>\varphi_0^{iv}(\chi, \gamma, 0)</math></i>	39
3.5	<i>Densidad <math>\varphi_1^i(\chi, \gamma, 0)</math></i>	42
3.6	<i>Densidad <math>\varphi_1^{ii}(\chi, \gamma, 0)</math></i>	43
3.7	<i>Densidad <math>\varphi_1^{iii}(\chi, \gamma, 0)</math></i>	44
3.8	<i>Densidad <math>\varphi_1^{iv}(\chi, \gamma, 0)</math></i>	45
3.9	<i>Densidad <math>\varphi_2^i(\chi, \gamma, 0)</math></i>	48
3.10	<i>Densidad <math>\varphi_2^{ii}(\chi, \gamma, 0)</math></i>	49

---

3.11	Densidad $\varphi_2^{iii}(\chi, \gamma, 0)$	50
3.12	Densidad $\varphi_2^{iv}(\chi, \gamma, 0)$	51
3.13	Densidad $\varphi_3^i(\chi, \gamma, 0)$	54
3.14	Densidad $\varphi_3^{ii}(\chi, \gamma, 0)$	55
3.15	Densidad $\varphi_3^{iii}(\chi, \gamma, 0)$	56
3.16	Densidad $\varphi_3^{iv}(\chi, \gamma, 0)$	57

# LISTA DE TABLAS

---

---

2.1	<i>Unidades normalizadas</i> . . . . .	31
3.1	<i>Constantes <math>\varphi_0</math></i> . . . . .	35
3.2	<i>Constantes <math>\varphi_1</math></i> . . . . .	40
3.3	<i>Constantes <math>\varphi_2</math></i> . . . . .	47
3.4	<i>Constantes <math>\varphi_3</math></i> . . . . .	53
3.5	<i>Análisis de los Valores de la Masa</i> . . . . .	58

## RESUMEN

### TÍTULO

MODELOS NEWTONIANOS DE DISCOS GRUESOS PARA REGIONES CIRCUNNUCLEARES DE GALAXIAS ESPIRALES BARRADAS \*.

### AUTORES

PÁEZ MURCIA, Miguel Andrés\*\*

### PALABRAS CLAVE

Modelos de galaxias, Discos Gruesos, Gravitación Newtoniana, Galaxias espirales barradas, Pseudobulbos.

### DESCRIPCIÓN

En el presente trabajo se presenta un formalismo matemático apropiado para regiones circunnucleares de galaxias espirales barradas, éste trabajo se construye mediante soluciones de la ecuación de Laplace sin simetría axial, condición impuesta por la naturaleza de los sistemas estudiados. Imponiendo condiciones de contorno a éstas soluciones se obtiene el potencial gravitacional como una suma infinita de ellas.

Usando el método de desplazamiento, corte, llenado y reflexión planteado por *Letelier y González*, el cual matemáticamente consiste en una transformación de la coordenada perpendicular al disco por una función  $h(z)$ , así se podrá tratar discos sin simetría axial con grosor finito, esto permitirá conocer la expresión de la densidad de masa dependiente del potencial gravitacional y de la función  $h(z)$ .

Por último se obtendrán las *Iso-superficies*, sus respectivos *Iso-contornos* y se calculará la masa del disco, para algunos modelos, en donde se podrán interpretar cualidades propias de regiones circunnucleares de galaxias espirales barradas.

---

\*Trabajo de Grado.

\*\*Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo A. González V. (Director).

## SUMMARY

### TITLE

THICK DISKS AS NEWTONIAN MODELS OF AXIALLY SYMMETRIC GALAXIES.

\*

### AUTORES

PÁEZ MURCIA, Miguel Andrés\*\*

### KEY WORDS

Models of galaxies, Thick disks, Newtonian Gravitation, Barred spirals Galaxy, Pseudobulges.

### DESCRIPTION

In this work is present a appropriate mathematical formalism for circumnuclears regions of barred spiral galaxies, it is constructed through of solution Laplace's equation without axial simetry. This condition is own of the studied systems. We impose boundary conditions to the solutions for Laplace equation, we will obtain the gravitational potential, this potential is express for a infinitive sum of these solutions.

We uses the method of displacement, cut, filled and reflection taking onto account by *Letelier y González*, which consists in a transformation of the perpendicular coordinate to the disk for a function  $h(z)$ , of this form we tries disks without axial simetry with finite thick. The last we permit to know the expresion for the density of mass of the disk which dependences of the gravitational potential and the function  $h(z)$ .

Finally we shall obtain the *Iso-surfaces* and their respective *Iso-contours* also shall calculate the mass of disks for some patterns. Where we interpreted own qualities of the circumnuclear region of barred spirals galaxies.

---

\*Undergraduate thesis.

\*\*Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo A. González V. (Director).

---

## *Introducción*

---

Uno de los principales objetos de estudio en astrofísica son los grandes sistemas estelares, con esto nos referimos a un conjunto de estrellas y demás cuerpos celestes, ligados mediante la interacción gravitacional. Entre estos sistemas se encuentran los clusters de estrellas, compuestos por entre  $10^2$  a  $10^6$  estrellas, galaxias formadas hasta por  $10^{12}$  estrellas y, por último, los grandes clusters de galaxias compuestos por miles de ellas. El estudio de estos sistemas estelares proporciona un punto de comparación entre la teoría de la observación y los modelos teóricos. El objetivo de los modelos galácticos es lograr una mejor descripción de las galaxias basándose en características naturales como el tamaño, la morfología y las componentes, teniendo en cuenta leyes fundamentales como la *ley de gravitación universal de Newton*. Estos modelos deben permitir obtener resultados próximos a los datos observados, además de permitir determinar cualidades propias de las galaxias como: el potencial gravitacional, su distribución de masa, las curvas de rotación y el valor de su masa ( $M$ ).

La clasificación de las galaxias planteada por Hubble [41], [42], establece la variedad de morfologías que éstas pueden llegar a presentar. Esta clasificación comprende desde las galaxias elípticas, las galaxias espirales, las galaxias irregulares y, por último, las galaxias lenticulares. De éstas, las galaxias espirales son de gran interés teórico y observacional ya que conforman más del 61 % de las galaxias más cercanas. Éstas se subdividen en dos grandes grupos: las espirales normales y las espirales barradas, ambas caracterizadas por tener un núcleo muy brillante y grandes anchos en las líneas de emisión. *Las galaxias espirales barradas*, identificadas mediante la abreviatura *SB* [42], conforman el 65 % de las galaxias espirales en el cielo [23]. Éstas son compuestas por estrellas, gas y polvo, los cuales se distribuyen en componentes, como el bulbo, el halo esferoidal y por último el elemento más distintivo: el disco. Por su parte el bulbo se puede manifestar como un *pseudobulbo* [25], el cual es una especie de bulbo pero con propiedades y origen diferente. El halo de materia oscura es la componente menos densa que se extiende sobre toda la galaxia; pero sin duda, el disco se considera el

elemento más importante, pues su densidad es elevada, además, en él se localizan los brazos de la galaxia los cuales siguen un patrón espiral.

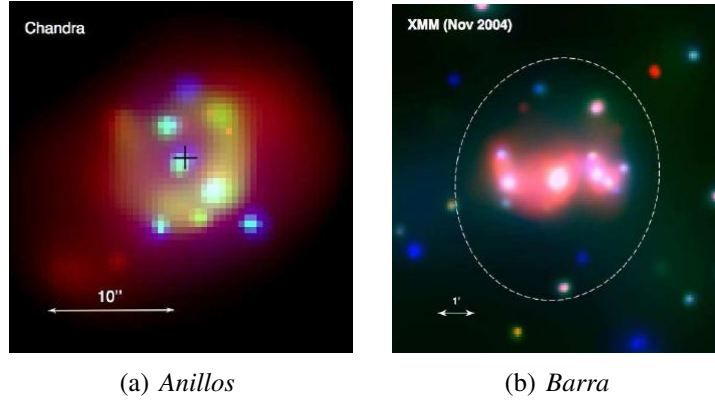


figura 1.1: Imágenes captadas en los observatorios espaciales de rayos X Chandra y XMM-Newton, de la región circunuclear de la galaxia NGC 1672 (SB), las cuales muestran la formación estelar en el anillo y la barra. Tomado de [21]

En una galaxia espiral barrada la zona más interesante es la parte central, más conocida como la *región circunuclear*, ésta es el área enmarcada entre  $1\text{ Kpc}$  y  $6\text{ Kpc}$ . En este lugar se encierran elementos como la barra, los anillos, “*los lentes\**”; éstos últimos entendidos como estructuras esferoidales Figura (1.2). La región circunuclear es la parte más estable de la galaxia pues el valor de su masa es elevado, aproximadamente entre  $10^6 - 10^9 M_{\odot}$  [11]. Ésto la caracteriza con cualidades sobresalientes como luminosidad elevada, la máxima de todo el disco, que es consecuencia de la alta formación estelar [21] que permite la presencia de estrellas jóvenes, las cuales conforman regiones llamadas “*hot-spots*”, o zonas calientes, capaces de producir energías del orden de  $10^{20}\text{ eV}$  [28]. La región circunuclear es una zona de vasto interés en astrofísica, pues encierra interesantes problemas como los concernientes con el agujero negro, la barra y sobre todo los relacionados con un moderno concepto: los *Pseudobulbos*. La presencia de esta estructura se fundamenta en la existencia de anillos, barras, espirales y cualidades del disco en dicha región, atributos que son entendidos mediante el estudio de los procesos seculares de la galaxia, los cuales se manifiestan por las altas inestabilidades de la región central, que desencadena una marcada formación estelar.

\*No confundirse con lente gravitacional.

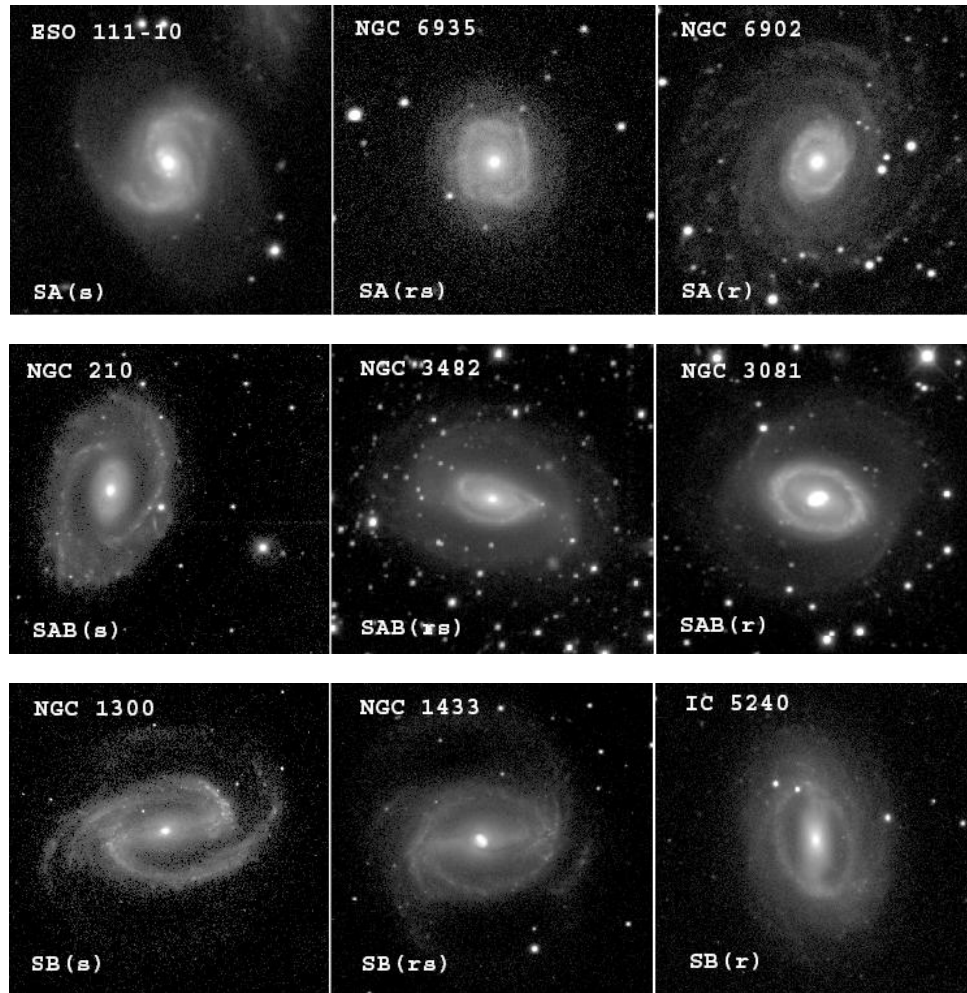


figura 1.2: Galaxias espirales normales y espirales barradas. Tomado de *Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics*, Nature Publishing Group 2001.

Las galaxias barradas se pueden ordenar [9] en ciertos grupos que hacen referencia a cualidades propias de ellas, como el tamaño del bulbo, el grado de enrollamiento de los brazos [12] y la presencia de hidrógeno ionizado en su disco [6]. Las espirales con un bulbo grande presentan brazos enrollados de poca definición y población baja de tipo I (*Tipo Sol*), por el contrario, las espirales con un bulbo pequeño tienen brazos sueltos bien definidos y alta presencia de estrellas de población tipo I. Luego la subdivisión *SBa*, *SBb*, *SBc* va desde bulbos grandes y brazos enrollados hasta bulbos pequeños y brazos bien definidos [12]. Además, la presencia de los anillos permite subdividirlos en *SB(r)* que son las galaxias donde se presentan una distribución en forma de anillo y *SB(s)* Figura (1.2) que simboliza aquellas en las que sus brazos nacen desde el núcleo [10]. El ejemplo más cercano de una galaxia espiral barrada lo conforma La Vía Láctea [6]. Su distribución desordenada de masa es una muestra importante, además de las muestras cinemáticas del gas molecular y del Hidrógeno Ionizado a pocos *Kpc* del centro galáctico, que indican la existencia de la barra [13]. Nuestra galaxia se considera que presenta un radio de *10 Kpc*, un disco delgado de *325 pc* y un disco grueso

---

de  $1.4 Kpc$ , además se conoce que su halo esferoidal es de un tamaño superior a  $33 Kpc$  de radio [34]. Esto permite notar que la diferencia entre el espesor de un disco delgado y un disco grueso no es insignificante.

Elementos como la *barra*, los *anillos* y los “*lenses*” son características propias de galaxias tipo SB. Éstos se ubican en la región central conformando el pseudobulbo. De éstas la barra constituye el factor dominante, sus fuertes distorsiones la convierten en la mejor muestra de una componente sin simetría; además, es un elemento distinguido por sufrir serias inestabilidades dinámicas, la presencia de éstas permite explicar su origen [40] de una manera adecuada, es importante aclarar que éstas llegan a ser tan fuertes que en cualquier momento pueden destruirla. Las barras tienen una morfología generalmente elongada exhiben regiones de HII y gas altamente comprimido por su potencial gravitacional. Por lo general, adquieren un tamaño relativo al del disco que en promedio es de  $1,6 Kpc$  [40], tienen una tercera parte de la luminosidad de la galaxia, pues sus inestabilidades la convierten en una componente con alta presencia de clusters de jóvenes estrellas, las cuales se identifican por ser muy luminosas.

Los anillos que se exhiben en el plano del disco son flujos radiales “gasoconducidos” por la barra y constituyen regiones con formación estelar [7]. Los anillos se pueden interpretar como *nucleares*, *externos* o *internos* Figura (1.2). Los primeros son muy pequeños y son producidos por la afluencia de gas, lo que constituye una respuesta a los torques gravitacionales inducidos por la barra [40] como en *ESO 565-11*. Los anillos externos se caracterizan por ser largos, logran tener un diámetro de  $2,2 \pm 0,4$  veces el de la barra, por ejemplo en *NGC 1543*, o en *NGC 6782*. Los anillos internos son pequeños, generalmente más elípticos, más elongados y paralelos a la barra, con un diámetro comparable al de la barra como sucede en *IC 5240*. Por último los “lenses” o también conocidos como distorsiones ovales [40], son formados por disoluciones de la barra y las altas velocidades de dispersión del disco, estas estructuras tienen forma elipsoidal aplanada como un lente, como en *NGC 1543* y *NGC 4596*, éstos son del tamaño de los anillos internos y forman plataformas de superficies brillantes con una forma aguda en su borde.

En la parte central de la región circunuclear se localiza el bulbo galáctico, y en él posiblemente un agujero negro. El bulbo se puede interpretar bajo dos formas diferentes, la primera es reconocerlo como un *bulbo clásico* [15] y la segunda es entenderlo mediante un concepto más novedoso denominado *Pseudobulbo* [25]. La diferencia entre ellos va desde su forma, origen, evolución, composición, orbitas de estrellas hasta tipo de galaxia donde pueden presentarse. La evidencia de esta doble estructura central puede ser identificada en galaxias con barras, anillos o miniespirales [32]. Los Pseudobulbos se consideran el resultado de una larga *evolución secular* [31], la cual consiste en una combinación de procesos físicos relacionados con el reordenamiento de la energía y la masa [25], como fusiones entre galaxias, colapsos disipativos, fluctuaciones de materia oscura, interacciones entre estrellas y nubes de gas; todos estos procesos seculares son necesarios para entender la evolución de las galaxias, ya que ellos suceden en lapsos entre  $0.4$  a  $2 Gyr^\dagger$  [25] y su principal función es contribuir a la

---

<sup>†</sup>Giga-años

---

concentración de masa en el centro.

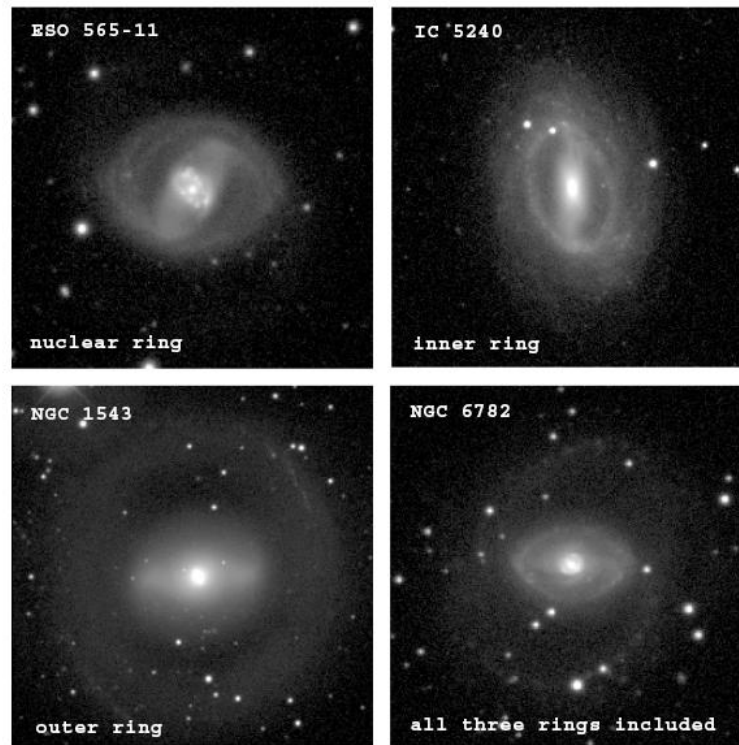
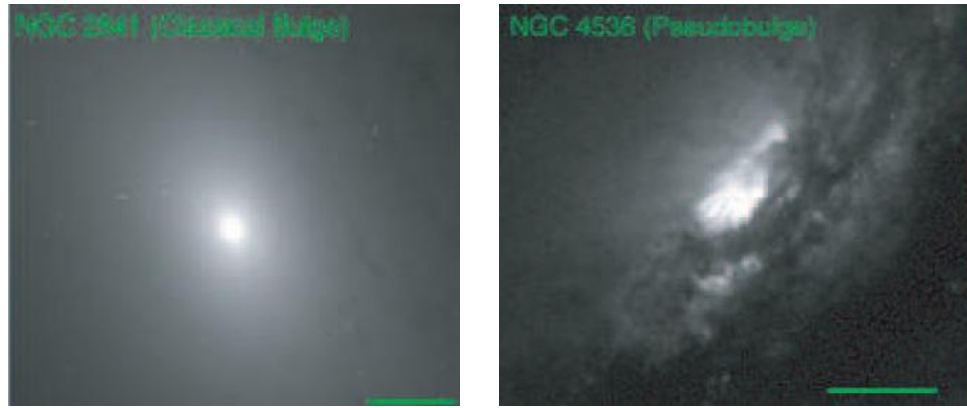


figura 1.3: Anillos en la región circunuclear de galaxias espirales barradas. Credito: Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics, Nature Publishing Group 2001.

Por otro lado, un bulbo clásico está compuesto por estrellas antiguas, lo que permite decir que su origen coincide con el de la galaxia. Un ejemplo de estas estructuras se refleja en galaxias como M31 y M81, en ellas se puede admirar la propiedad principal de este tipo de estructuras, un bulbo clásico se caracteriza por tener cualidades diferentes a las del disco Figura (1.4), condición que permite diferenciarlo de un pseudobulbo.

Los pseudobulbos son estructuras más largas que los bulbos clásicos Figura (1.4), menos densos y con un perfil luminoso más pronunciado, éste último consecuencia de su alta formación estelar [16], la cual permite que tengan luminosidades de  $10^6 - 10^7 L_{\odot}$  [25], atributo ocasionado por la evolución secular. Los Pseudobulbos presentan cualidades del disco galáctico, propiedad que no deja percibirlos fácilmente, además presentan estructura espiral, barras nucleares, enmarcándolos como pruebas axialmente no simétricas del disco [25] e implicando su presencia en galaxias barradas.



(a) *NGC 2841*

(b) *NGC 4536*

figura 1.4: (a) *Bulbo Clásico*. (b) *Pseudobulbo*. Tomado de [15]

El disco de una galaxia espiral tiene un comportamiento gaseoso, está conformado por estrellas, polvo y gas, presenta distribuciones de masa sin simetría llamados *brazos*; éstos, además de conformar una prueba de la larga evolución de la galaxia mediante procesos gravitacionales y dispersión de estrellas [6], se consideran sitios de formación estelar, esto provocado por compresiones o colapsos de nubes de gas molecular causados por las inestabilidades gravitacionales [43] en las grandes zonas de *hidrógeno ionizado HII*. Los brazos tienen la responsabilidad de modelar las propiedades del disco, como la composición química, dinámica y el balance térmico del gas interestelar [40]; son caracterizados por caminos de gas molecular y polvo (*dust lane*) observados como bandas o huecos negros debido al efecto de extinción de la luz [37]. Además son marcados por tres objetos cuando se observa en el visible; cúmulos abiertos que son agrupaciones de estrellas que incluyen las de tipo *O* y *B* las cuales son estrellas jóvenes, luminosas, masivas y calientes que tienen vida corta <sup>‡</sup>.

El estudio de los brazos en la zona exterior a la región circunuclear conforma una gran discusión en astrofísica, la teoría más aceptada para su descripción se basa en ondas de densidad [12], la cual explica de forma apropiada su comportamiento y las perturbaciones gravitacionales que causan la formación de estrellas. El modelo de ondas de densidad describe el comportamiento de los brazos mediante espirales logarítmicas, las cuales pueden ser en sentido anti-horario como la rotación de la galaxia, o en sentido horario, el primer carácter es conocido de tipo *Trailing*, y el segundo como *Leading*.

<sup>‡</sup>El factor principal de evolución estelar es la masa, entre más masa tenga una estrella su evolución será más rápida.

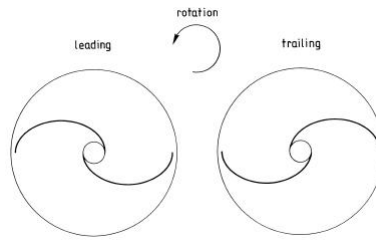


figura 1.5: *Leading - Trailing*. Tomado de *Galactic Dynamics*, J. Binney and S. Tremaine, 2008

La mayoría de modelos galácticos han sido planteados usando discos delgados o planos. Uno de los primeros trabajos fue el desarrollado por Kuzmin [26], quien diseñó un modelo plano basándose en un potencial como función de  $R^{-1/2}$  generado por una distribución superficial de masa. En 1975, Miyamoto y Nagai [29] diseñaron un disco galáctico a partir de un potencial en coordenadas cilíndricas y dependiente de dos parámetros, los cuales mediante una escogencia adecuada permiten representar el potencial de un disco delgado o el de un sistema esférico. Toomre [44] y Satoh [39], aprovechando la linealidad en la ecuación de Poisson, diferenciaron  $n$  veces el par potencial-densidad de Kuzmin [26] y Plummer [36] respectivamente y, en el límite de  $n \rightarrow \infty$ , lograron obtener potenciales de distribuciones de materia aplanada.

Aprovechando la naturaleza geométrica de la fuente, González y Reina [17] basados en el método de Hunter [19], plantean el par potencial densidad en coordenadas esferoidales oblatas [30] de una familia infinita de discos delgados con simetría axial. El método propuesto por Hunter es un procedimiento basado en la obtención de soluciones de la ecuación de Laplace en términos de las coordenadas esferoidales oblatas [5] que son apropiadas para el estudio de discos de extensión finita. Se calcula el potencial en regiones libres de materia, debido a que en un principio no se conoce como es la distribución de materia que lo genera; por último, se expresa el potencial gravitacional como la superposición de soluciones, el ejemplo más simple obtenido por este método es el disco de Kalnajs [22].

Trabajos previos han utilizado distintos enfoques, como modelar una galaxia mediante un disco delgado axialmente simétrico [17], o imponer la falta de simetría axial a un modelo plano [33]. Por otra parte, en el formalismo de modelos no-planos se encuentran investigaciones como [18], que trata discos gruesos relativistas con simetría axial, y [3] trabaja discos gruesos a un nivel clásico de gravitación newtonina bajo simetría axial. Ésto permite notar que propiedades como el aspecto y el tamaño han sido manejadas por caminos independientes; por lo tanto, el interés de modelar una galaxia espiral teniendo en cuenta su espesor es la obtención de modelos heterogéneos que permitan explorar el problema desde un nuevo punto de vista.

De acuerdo con lo anterior, en el presente Trabajo de Grado se consideran modelos para galaxias espirales barradas basados en modelos de discos gruesos sin simetría axial. La importancia de modelar estos sistemas mediante dichos modelos es querer representar las propiedades

---

reales de estos sistemas como la presencia de su región circunnuclear, que encierra elementos de espesor como el pseudobulbo y en él la barra, la cual consiste en un elemento grueso y una prueba de la distribución desordenada de la masa [23], [40]. De esta manera uno de los propósitos del proyecto es mostrar las novedades que implica manejar un modelo con características que reflejan cualidades específicas las galaxias SB.

Los modelos son construidos a partir del potencial gravitacional, el cual satisface ciertas condiciones de contorno; éste se reconoce como una suma infinita de soluciones exactas de la ecuación de Laplace [20] en coordenadas esféricas [2]. Describir en un principio el modelo bajo este tipo de coordenadas constituye la manera más cómoda de tratar el problema pues estas soluciones dependen de las *Funciones Asociadas de Legendre*, las cuales son muy reconocidas en la física-matemática su simplicidad y elegancia. El grosor en el disco se plantea mediante una sencilla herramienta geométrica llamada *método de desplazamiento, corte, llenado y reflexión* [18]. Ésto es equivalente a la transformación de la coordenada perpendicular al disco por una función  $\tilde{z} = h(z) + b$ , sujeta a ciertas condiciones físicas y matemáticas. Al imponer esta función sobre la ecuación de Laplace, se obtienen soluciones de la ecuación de Poisson, las cuales nos permiten conocer la expresión para densidad de masa  $\rho$  dependiente las derivadas de la función  $h(z)$  y las derivadas del potencial respecto de dicha función. Dichas derivadas se conocen utilizando relaciones de recurrencia de las Funciones Asociadas de Legendre [2], [30] y así se llega a la expresión final para la densidad de masa como una serie infinita de términos en los que se incluyen las Funciones asociadas de Legendre y términos de la forma  $\cos(2m\varphi)$ .

Conocida la expresión general para la densidad de masa, se plantean algunos modelos en donde se muestra el potencial  $\Psi_n$  y la densidad de masa  $\rho_n$ . En cada uno se obtienen cuatro casos particulares, cada uno con parámetros diferentes. En cada modelo se plantea un análisis gráfico de la función  $\varphi$ , la cual representa la densidad normalizada respecto del espesor del disco  $a$ . En está exploración gráfica se obtienen la *iso-superficie*, el *iso-contorno* de  $\varphi$  para el plano  $z = 0$ , y ciertas curvas de algunos cortes. El objetivo es analizar el comportamientos de los modelos ante la variación de dichos parámetros y querer interpretar el adecuado comportamiento de la función densidad de masa en la descripción de las regiones circunnucleares de las galaxias barradas. Por último como análisis de la función densidad se plantea el cálculo del valor de la masa  $\mathcal{M}$  para el disco, en donde se demuestra la adecuada disposición de  $\rho$  en el infinito.

---

## *Modelos Newtonianos De Discos Gruesos*

---

Con el objetivo de lograr un modelo que reconozca propiedades de las galaxias barradas, como su espesor y propiedades sin simetría axial, se plantea la construcción de un modelo de disco grueso, pues lo que se quiere es tener un modelo teórico para describir propiedades reales de estos sistemas como el pseudobulbo y por supuesto la barra. Los modelos se construyen a partir del potencial gravitacional, el cual debe satisfacer ciertas condiciones físicas y matemáticas, que son impuestas por la naturaleza de los sistemas analizados. Sobre el potencial también se impone un método sencillo propuesto en [18], el cual permite dar espesor a los modelos. Conocido el potencial se plantea una estrategia para calcular la densidad de masa, así se podrá llegar a calcular los valores de masa.

### **2.1. *Teoría del Potencial y Condiciones de Contorno***

Un modelo de disco está caracterizado por un *potencial gravitacional*  $\Phi$  y por una *función de distribución de masa*  $\rho$ . Este potencial es representado por soluciones de la ecuación de Laplace, dichas soluciones y sus derivadas normales deben satisfacer ciertas condiciones de contorno impuestas por la naturaleza del problema, estas condiciones son las que imponen el sentido físico a  $\Phi$ .

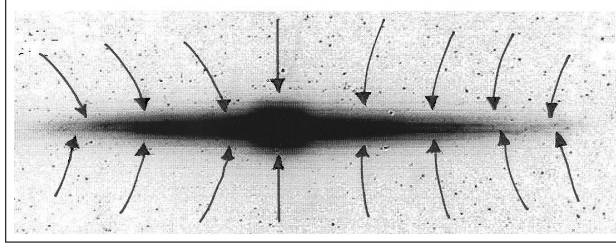


figura 2.1: Líneas del Campo Gravitacional  $\vec{g}$  para un disco grueso

El potencial gravitacional  $\Phi(R, \varphi, z)$ , generado por la distribución de masa  $\rho(R, \varphi, z)$ , se describe en función de las coordenadas cilíndricas  $(R, \varphi, z)$  debido al carácter de los sistemas estudiados; la dependencia de  $\Phi$  y  $\rho$  de la coordenada  $\varphi$  establece la falta de simetría axial en el disco. Una de las cualidades de  $\Phi(R, \varphi, z)$  es simetría de reflexión respecto a  $z = 0$  causada por el carácter atractivo de la masa y por supuesto el de las líneas de campo gravitacional  $\vec{g}$ , que implican que la masa esté igualmente distribuida por encima del plano ecuatorial como por debajo de este, ( Figura (2.1) ). Esta relación matemáticamente se expresa como

$$\Phi(R, \varphi, z) = \Phi(R, \varphi, -z) . \quad (2.1)$$

Esta expresión logra garantizar

$$\left. \frac{\partial \Phi(R, \varphi, z)}{\partial z} \right|_{z=a^-} = - \left. \frac{\partial \Phi(R, \varphi, z)}{\partial z} \right|_{z=-a^+} , \quad (2.2)$$

ratificando el carácter atractivo del campo gravitacional  $-\nabla\Phi$ , para  $z > a$  y  $z < -a$ .

La derivada del potencial respecto de  $z$  debe ser continua en  $z = a$  y  $z = -a$ ,

$$\left. \frac{\partial \Phi(R, \varphi, z)}{\partial z} \right|_{z=a^-} = \left. \frac{\partial \Phi(R, \varphi, z)}{\partial z} \right|_{z=a^+} , \quad (2.3)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi(R, \varphi, z)}{\partial z} \right|_{z=-a^-} = \left. \frac{\partial \Phi(R, \varphi, z)}{\partial z} \right|_{z=-a^+} , \quad (2.4)$$

estas expresiones logran garantizar que  $\Phi$  y  $-\nabla\Phi$  existan en un volumen y sean continuas en todo el espacio.

## 2.2. Modelos de Discos Gruesos

El objetivo del proyecto es modelar regiones circunucleares de galaxias espirales barradas, esto implica tener en cuenta su componenete principal: *la barra*. Ésta además de ser una

muestra de falta de simetría axial del disco, es la componente más gruesa que tienen las SB [24], esto muestra la necesidad de diseñar un modelo de disco con un espesor que logre reflejar esta propiedad natural en dichas galaxias.

Para construir el disco grueso se utiliza el *método de desplazamiento, corte, llenado y reflexión* [18], éste consiste en una simple estrategia geométrica que se resume en las siguientes pasos:

1. Se plantea una superficie que divide al espacio en dos partes.
  - Uno con singularidades o fuentes.
  - Uno sin ellas.
2. Se omite el espacio con singularidades.
3. Se reemplaza el espacio sin singularidades por un cascarón grueso, de tal forma que la materia contenida dentro de él se describa por funciones con primeras derivadas continuas.
4. Luego se utiliza la parte inferior del cascarón para realizar la inversión.

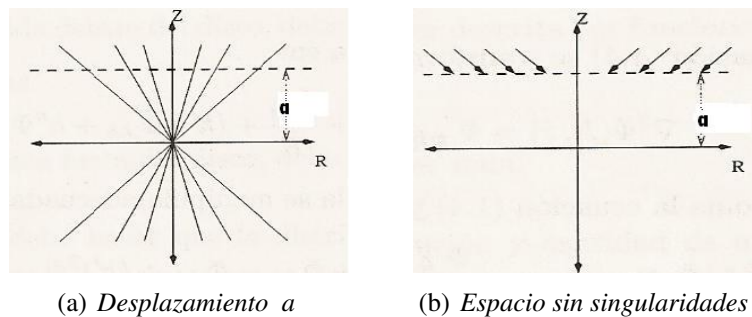


figura 2.2: Desplazamiento - Corte

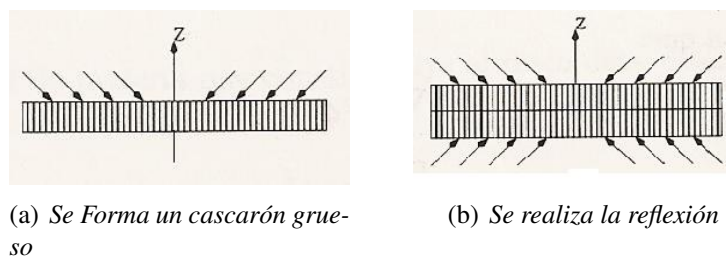


figura 2.3: Llenado - Reflexión

El método anterior matemáticamente consiste en una sencilla *transformación* de la coordenada  $z$  por una función, que bajo ciertos requisitos es apta de representar el espesor del disco galáctico.

La transformación matemática

$$z \implies \tilde{z} = h(z) + b, \quad (2.5)$$

siendo  $b$  la constante encargada de evitar la singularidad en el centro. La expresión (2.5) es la que permite que el grosor del disco se manifieste; por su parte, las coordenadas  $R$  y  $\varphi$  no sufren cambio alguno:

$$R = \tilde{R}, \quad \varphi = \tilde{\varphi}. \quad (2.6)$$

Conociendo que el potencial gravitacional  $\Phi(R, \varphi, z)$  es solución de la ecuación de Laplace [2], se debe cumplir.

$$\nabla^2 \Phi(R, \varphi, z) = \Phi_{,RR} + \frac{\Phi_{,R}}{R} + \frac{\Phi_{,\varphi\varphi}}{R^2} + \Phi_{,zz} = 0. \quad (2.7)$$

Por la transformación (2.5), el último término de (2.7) cambia del siguiente modo:

$$\Phi_{,zz} = (\Phi_{,z})_{,z}, \quad \text{donde:} \quad (2.8)$$

$$\Phi_{,z} = \Phi_{,\tilde{z}} \tilde{z}_{,z}, \quad \text{quedando,} \quad (2.9)$$

$$\Phi_{,zz} = (h')^2 \Phi_{,hh} + h'' \Phi_{,h}, \quad (2.10)$$

al remplazarlo en (2.7) y manipular adecuadamente esta expresión,

$$\nabla^2 \Phi(R, \varphi, z) = \Phi_{,RR} + \frac{\Phi_{,R}}{R} + \frac{\Phi_{,\varphi\varphi}}{R^2} + \underline{\Phi_{,hh}} + (h')^2 \Phi_{,hh} + h'' \Phi_{,h} - \underline{\Phi_{,hh}} \neq 0, \quad (2.11)$$

se puede construir el  $\tilde{\nabla}^2 \Phi(\tilde{R}, \tilde{\varphi}, \tilde{z})$  transformandose (2.11) en

$$\nabla^2 \Phi(R, \varphi, z) = \tilde{\nabla}^2 \Phi(\tilde{R}, \tilde{\varphi}, \tilde{z}) + [(h')^2 - 1] \Phi_{,hh} + h'' \Phi_{,h}. \quad (2.12)$$

Por el valor del laplaciano se dice que (2.12) equivale a

$$\nabla^2 \Phi(R, \varphi, z) = [(h')^2 - 1] \Phi_{,hh} + h'' \Phi_{,h}. \quad (2.13)$$

Dicha expresión es comparable con la *ecuación de Poisson*:

$$\nabla^2 \Phi(R, \varphi, z) = 4 \pi G \rho(R, \varphi, z); \quad (2.14)$$

de (2.13 - 2.14) se logra obtener la función densidad de masa dependiente del potencial y de sus derivadas,

$$\rho(R, \varphi, z) = \frac{1}{4 \pi G} \left[ [(h')^2 - 1] \Phi_{,hh} + h'' \Phi_{,h} \right]. \quad (2.15)$$

La anterior denota la dependencia de la coordenada  $\varphi$  que expresa la falta de simetría del disco, además muestra la necesidad de conocer la función  $h(z)$ ,  $\Phi_{,h}$  y  $\Phi_{,hh}$ .

### 2.3. Función $h(z)$

La función  $h$  es de vital importancia, constituye el límite entre el formalismo de discos planos y discos gruesos. Al querer describir el espesor del disco,  $h(z)$  debe satisfacer ciertas condiciones físicas y matemáticas. Éstas se resumen en:

1. La densidad de masa fuera del disco debe ser nula.
2. La materia en el interior debe ser descrita por una función continua con primeras derivadas continuas.
3. La mayor cantidad de materia debe estar contenida en el plano  $z = 0$ .
4. La función  $h(z)$ , debe permitir que la distribución de masa para valores  $|z| \leq a$ , sean iguales lo que debe garantizar:

$$\rho(R, \varphi, z) = \rho(R, \varphi, -z); \quad (2.16)$$

$h(z)$  debe ser capaz de describir diferentes comportamientos, en el exterior e interior del disco, esto permite afirmar que debe ser una función compuesta.

Al tener en cuenta la condición en el exterior del disco, se nota que en la expresión (2.15) el término derecho debe ser nulo

$$[(h')^2 - 1]\Phi_{,hh} + h''\Phi_{,h} = 0, \quad (2.17)$$

implicando que

$$[(h')^2 - 1] = 0 \quad \text{y} \quad h'' = 0, \quad (2.18)$$

luego,

$$h'(z) = \kappa, \quad (2.19)$$

$$h(z) = \kappa z + \omega. \quad (2.20)$$

Del mismo modo se ve que  $[(h')^2 - 1]$  es equivalente a

$$[h'(z)]^2 - 1 = 0, \quad (2.21)$$

$$h'(z)^2 = 1, \quad (2.22)$$

$$h'(z) = \pm 1 \quad (2.23)$$

$$h(z) = \pm \kappa' z + \omega'. \quad (2.24)$$

En el interior del disco se debe cumplir que  $\rho \neq 0$ ; luego, para garantizar continuidad en el borde del disco se propone una función simple

$$h(z) = \lambda z^2 + \beta z + \mu, \quad (2.25)$$

la cual se ajustará aplicando dos propiedades:

- La propiedad 3 implica que  $\mu$  debe ser igual a cero.
- La Propiedad 4 implica que el término  $\beta z$  debe anularse para que  $h(z)$  garantice la igualdad (2.16);

luego la expresión (2.25) queda resumida en

$$h(z) = \lambda z^2. \quad (2.26)$$

De la propiedad 2, se ve que la función  $h(z)$  y  $h'(z)$  deben ser continuas en el borde superior e inferior de disco

$$h(z) \Big|_{\pm a} = h(z) \Big|_{\mp a}, \quad (2.27)$$

$$h'(z) \Big|_{\pm a} = h'(z) \Big|_{\mp a}. \quad (2.28)$$

Para  $h(z)$ :

◆ En  $z = a$ :

$$\kappa'a + \omega' = \lambda a^2, \quad (2.29)$$

◆ En  $z = -a$ :

$$-\kappa'a(-a) + \omega' = \lambda a^2, \quad (2.30)$$

de las previas ecuaciones se tiene que:

$$\kappa'a + \omega = \lambda a^2. \quad (2.31)$$

Para  $h'(z)$ :

◆ En  $z = a$ :

$$\kappa' = 2\lambda a, \quad (2.32)$$

◆ En  $z = -a$ :

$$-\kappa' = -2\lambda a. \quad (2.33)$$

Si reemplazamos la expresión (2.32) o (2.33) con  $\kappa$  en (2.31):

$$a + \omega' = \frac{a}{2}, \quad (2.34)$$

$$\omega' = -\frac{a}{2}. \quad (2.35)$$

Luego conociendo las constantes podemos enunciar la expresión para  $h(z)$

$$h(z) = \begin{cases} z - \frac{a}{2}, & \text{Si } z \geq a, \\ \frac{z^2}{2a}, & \text{Si } -a \leq z \leq a ; \\ -z - \frac{a}{2}, & \text{Si } z \leq -a. \end{cases} \quad (2.36)$$

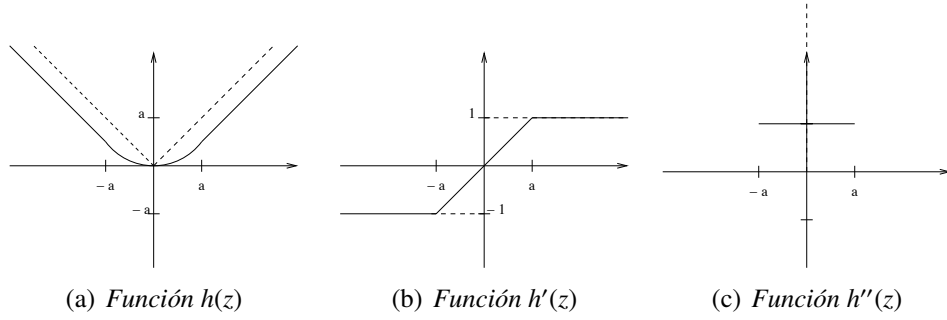


figura 2.4: Funciones  $h(z)$ ,  $h'(z)$  y  $h''(z)$  para un disco grueso (línea continua) y un disco delgado (línea discontinua)

Esta función expresa el espesor del disco como  $2a$ , localizado en la región  $|z| \leq a$ . En (2.36) se ve que  $h(z)$  en  $|z| > a$  es una función lineal implicando que su  $h'(z) = 1$  y sus segundas derivadas son nulas, garantizando que la expresión (2.15) logre sentido físico para valores exteriores al disco.

Con la función  $h(z)$ , podemos particularizar la expresión de la densidad de masa reemplazando en la ecuación (2.15) la parte de (2.36) que representa el interior del disco, llegando a una expresión de la forma:

$$\rho(R, \varphi, z) = \frac{1}{4\pi G a^2} \left[ a \Phi_{,h} + (z^2 - a^2) \Phi_{,hh} \right], \quad (2.37)$$

donde  $\Phi_{,h}$  indica la derivada del potencial gravitacional con respecto a la función  $h$  y por supuesto  $\Phi_{,hh}$  es la doble derivada del potencial.

## 2.4. Potencial Gravitacional

Conocer el potencial gravitacional en nuestro modelo galáctico es identificar un campo escalar que ayude a visualizar propiedades del disco como el campo gravitacional y la densidad de masa (2.15), la cual constituye uno de los objetivos del proyecto y en la que sólo hace falta conocer las derivadas de potencial respecto de la función  $h(z)$ . El potencial debe manifestar un comportamiento apto como tener un valor finito en el centro del disco, anularse en el infinito y satisfacer las identidades (2.1 - 2.2 - 2.3 - 2.4). Éste se tomará como un conjunto infinito  $\Psi$  de soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas [20], cabe anotar que se relacionará el sistema de coordenadas esféricas con el sistema de coordenadas cilíndricas, relación que es impuesta por la simetría del problema.

La solución del Laplaciano en coordenadas esféricas constituye una doble sumatoria, donde la primera se caracteriza por ser una suma infinita; los términos de la suma se consideran

pares con el fin de garantizar la existencia de simetría de reflexión, la notación se particulariza para índices de la forma  $2\ell$  y  $2m$ . El potencial  $\Psi$  es

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = - \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{A_{2\ell}^{2m} P_{2\ell}^{2m}(\cos \theta) \cos(2m\varphi)}{r^{2\ell+1}}. \quad (2.38)$$

La forma discoidal del modelo galáctico hace necesario describir el problema en las coordenadas cilíndricas, por tanto se plantea la siguiente relación:

$$\Phi(R, \varphi, \tilde{z}) = \Psi \left( r(R, \tilde{z}), \theta(R, \tilde{z}), \varphi \right) = \Psi(R, \varphi, \tilde{z}), \quad (2.39)$$

esto implica:

$$r = \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2} = \sqrt{R^2 + \tilde{z}^2}, \quad (2.40)$$

$$\tilde{z} = r \cos \theta = \sqrt{R^2 + \tilde{z}^2} \cos \theta, \quad (2.41)$$

siendo

$$\tilde{z} = h(z) + b. \quad (2.42)$$

Establecidas dichas relaciones podemos plantear la derivada del potencial respecto a  $h(z)$  usando la regla de la cadena

$$\Phi_{,h} = \Psi_{,r} r_{,\tilde{z}} + \Psi_{,\varphi} \varphi_{,\tilde{z}} + \Psi_{,\theta} \theta_{,\tilde{z}}, \quad (2.43)$$

donde

$$\varphi_{,\tilde{z}} = 0; \quad (2.44)$$

la segunda derivada sería

$$\Phi_{,hh} = \Psi_{,rr} (r_{,\tilde{z}})^2 + \Psi_{,r} r_{,\tilde{z}\tilde{z}} + \Psi_{,\theta\theta} (\theta_{,\tilde{z}})^2 + \Psi_{,\theta} \theta_{,\tilde{z}\tilde{z}} + 2\Psi_{,r\theta} r_{,\tilde{z}} \theta_{,\tilde{z}}. \quad (2.45)$$

De la expresiones (2.40 - 2.41) se pueden conocer

$$r_{,\tilde{z}} = \frac{\tilde{z}}{\sqrt{R^2 + \tilde{z}^2}} = \cos \theta, \quad (2.46)$$

$$r_{,\tilde{z}\tilde{z}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \tilde{z}^2}} - \frac{\tilde{z}^2}{\sqrt{(R^2 + \tilde{z}^2)^3}} = \frac{1}{r} - \frac{\cos^2 \theta}{r}, \quad (2.47)$$

$$\theta_{,\tilde{z}} = \frac{-R}{R^2 + \tilde{z}^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad (2.48)$$

$$\theta_{,\tilde{z}\tilde{z}} = \frac{\sin(2\theta)}{r^2}, \quad (2.49)$$

de la ecuación (2.38) se pueden obtener las derivadas del potencial gravitacional:

$$\Psi_{,r} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(2\ell + 1) A_{2\ell}^{2m} P_{2\ell}^{2m}(\cos \theta) \cos(2m\varphi)}{r^{2\ell+2}}, \quad (2.50)$$

$$\Psi_{,rr} = - \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(2\ell + 1) (2\ell + 2) A_{2\ell}^{2m} P_{2\ell}^{2m}(\cos \theta) \cos(2m\varphi)}{r^{2\ell+3}}, \quad (2.51)$$

$$\Psi_{,\theta} = - \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{A_{2\ell}^{2m} P_{2\ell}^{2m'}(\cos \theta) \cos(2m\varphi)}{r^{2\ell+1}}, \quad (2.52)$$

$$\Psi_{,\theta\theta} = - \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{A_{2\ell}^{2m} P_{2\ell}^{2m''}(\cos \theta) \cos(2m\varphi)}{r^{2\ell+1}}, \quad (2.53)$$

$$\Psi_{,r\theta} = \Psi_{,\theta r} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(2\ell + 1) A_{2\ell}^{2m} P_{2\ell}^{2m'}(\cos \theta) \cos(2m\varphi)}{r^{2\ell+2}}. \quad (2.54)$$

De las expresiones (2.52 - 2.53 - 2.54), se ve que lo único que hace falta para conocer la ecuación de la densidad de masa son las derivadas de las Funciones Asociadas de Legendre  $P_{2\ell}^{2m}$ , éstas se conocerán aplicando relaciones de recurrencia [4]. Dichas identidades deben ser manipuladas de tal manera que los subíndices y supraíndices sean siempre positivos; además, es indispensable evitar términos frecuentes en este tipo de relaciones [2], [4], [1], [30], como  $P_{\ell-1}^m$ ,  $P_{\ell-1}^{m-1}$  o incluso  $-P_{\ell}^{m-1}$ , pues en el cálculo no llegarían a tener sentido físico en el caso que alguno o ambos de nuestros índices sean cero.

Otro detalle importante de mencionar, es que este trabajo debe ser diseñado de forma tal que si queremos pasar al caso axialmente simétrico sea tan sencillo como hacer  $m = 0$ , luego las formulas de recurrencia deben organizarse de manera tal que las Funciones Asociadas queden con el superíndice  $2m$ . Las expresiones útiles para ser reemplazadas son

$$P_{2\ell}^{2m'}(\cos \theta) = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ (1 + 2\ell) \cos \theta P_{2\ell}^{2m}(\cos \theta) + (2m - 2\ell - 1) P_{2\ell+1}^{2m}(\cos \theta) \right], \quad (2.55)$$

$$P_{2\ell}^{2m''}(\cos \theta) = \frac{1}{\sin^4 \theta} \left[ (1 + 2\ell) [(2\ell + 2) \cos^2 \theta + 1] P_{2\ell}^{2m}(\cos \theta) + (2m - 2\ell - 1) \right. \\ \left. [ (4\ell + 5) \cos \theta P_{2\ell+1}^{2m}(\cos \theta) + (2m - 2\ell - 2) P_{2\ell+2}^{2m}(\cos \theta) ] \right]. \quad (2.56)$$

## 2.5. Densidad de Masa

Conocidas las derivadas del potencial (2.43 - 2.45), es posible plantear la expresión para la densidad de masa  $\rho$ . Ésta es descrita de forma similar a  $\Psi$ , por una doble sumatoria, la del índice dominante  $n$  y la suma interior del índice  $m$ . Para un manejo adecuado de esta serie infinita es indispensable acotarla hasta un número entero  $n$ , este límite nos dará el número de términos a usar en el  $n$ -ésimo modelo de densidad de disco grueso:

$$\begin{aligned}
 \rho_n (R, \varphi, \vec{z}) = & \frac{1}{4\pi G a^2} \sum_{\ell=0}^n \sum_{m=0}^{\ell} W \frac{A_{2\ell}^{2m} P_{2\ell}^{2m}(\cos \theta) \cos(2m\varphi)}{r^{2\ell+2}} \\
 & + \frac{1}{4\pi G a^2} \sum_{\ell=0}^n \sum_{m=0}^{\ell} Q \frac{A_{2\ell}^{2m} P_{2\ell+1}^{2m}(\cos \theta) \cos(2m\varphi)}{r^{2\ell+2}} \\
 & + \frac{(z^2 - a^2)}{4\pi G a^2} \sum_{\ell=0}^n \sum_{m=0}^{\ell} E \frac{A_{2\ell}^{2m} P_{2\ell}^{2m}(\cos \theta) \cos(2m\varphi)}{r^{2\ell+3}} \\
 & - \frac{(z^2 - a^2)}{4\pi G a^2} \sum_{\ell=0}^n \sum_{m=0}^{\ell} D \frac{A_{2\ell}^{2m} P_{2\ell+1}^{2m}(\cos \theta) \cos(2m\varphi)}{r^{2\ell+3}} \\
 & - \frac{(z^2 - a^2)}{4\pi G a^2} \sum_{\ell=0}^n \sum_{m=0}^{\ell} N \frac{A_{2\ell}^{2m} P_{2\ell+2}^{2m}(\cos \theta) \cos(2m\varphi)}{r^{2\ell+3}},
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

donde los términos de la densidad se definen como:

$$W = \frac{a(2\ell + 1) \cos \theta (1 + \sin \theta)}{\sin \theta},$$

$$Q = \frac{a(2m - 2\ell - 1)}{\sin \theta},$$

$$E = \frac{1}{2}(2\ell + 1) \cot^2 \theta \left[ -9 - 6\ell + (3 + 2\ell) \cos 2\theta - 8(\ell + 1) \sin \theta \right],$$

$$D = (2m - 2\ell - 1) \cot \theta \csc \theta \left[ 5 + 4\ell + 4(\ell + 1) \sin \theta \right],$$

$$N = \csc^2 \theta \left[ (2m - 2\ell - 1) (2m - 2\ell - 2) \right].$$

## 2.6. Cálculo de la Masa

Uno de los cálculos teóricos de un modelo de disco galáctico es su valor de masa  $\mathcal{M}$ . Éste consiste en un dato aproximado que intenta de cierto modo dar una aproximación del valor real, pues como se sabe en un cálculo de este tipo existe una limitante, ya que no conocemos datos exactos de las galaxias que permitan un mejor manejo de los parámetros  $a$  y  $b$ . Bajo la aclaración anterior, el cálculo de  $\mathcal{M}$  es garantizado por la densidad de masa (2.57), pues  $\rho$  es una función que al integrarse en el volumen del disco permite obtener el valor de la masa. Lograr conocer este valor constituye el modo más claro de mostrar que la función de densidad de masa tiene un comportamiento matemático adecuado tanto en el centro como en el límite del disco que hace que su integral sea convergente; dicho de otra forma,  $\rho$  debe partir de un valor finito en el centro, y a medida que se acerque al borde del disco decrezca de forma tal que sus contribuciones se vuelvan inapreciables.

El cálculo de la masa del disco grueso se plantea bajo una integral en todo el volumen del disco, ésta se plantea en coordenadas cilíndricas por la simetría de los sistemas estudiados:

$$\mathcal{M} = \int_{-a}^a \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho(R, \varphi, z) R d\varphi dR dz. \quad (2.58)$$

Para mayor necesidad se normaliza el cálculo respecto del grosor del disco  $a$ , en la tabla siguiente se muestra como se normalizan las variables del disco.

Variable Normalizada	Variable
$\widetilde{R}$	$R/a$
$\widetilde{\zeta}$	$z/a$
$\widetilde{h}$	$h/a$
$\widetilde{A}_{2\ell}^{2m}$	$A_{2\ell}^{2m}/a^{2\ell+1}$
$\widetilde{\Psi}$	$a \Psi$
$\widetilde{\wp}$	$4\pi G a \rho$
$\widetilde{\mathcal{M}}$	$4\pi G \mathcal{M}/a$

Tabla 2.1: Variables normalizadas

Aplicando las definiciones de la tabla (2.1) a la expresión (2.58) podemos hallar  $\widetilde{\mathcal{M}}$ , que corresponde a la masa normalizada:

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \int_{-1}^1 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \wp(\widetilde{R}, \varphi, \zeta) \widetilde{R} d\varphi d\widetilde{R} d\zeta. \quad (2.59)$$

Según la expresión anterior y la relación entre  $\widetilde{\mathcal{M}}$  y  $\mathcal{M}$  de la tabla (2.1) se calculan

los valores de la masa del disco. La integral (2.59) es una integral separable en  $\varphi$ , lo que permite decir que los términos axialmente simétricos de la expresión (2.57) son los únicos en contribuir al valor de la masa  $\mathcal{M}$ .

---

## *Algunos Modelos Particulares*

---

En cada modelo galáctico es indispensable conocer la expresión de la densidad de masa, pues ésta conforma una pieza clave en la interpretación de resultados, ya que muestra cualidades importantes del modelo como concentraciones de masa y garantiza el cálculo (2.58). Para realizar un análisis detallado de cada modelo, se plantean para el plano  $z = 0$  las *iso-superficies* y los *iso-contornos* de la función de la densidad de masa normalizada  $\varphi$ . Establecida la expresión general para el potencial gravitacional (2.38) y la densidad de masa (2.57), podemos hallar ciertos modelos de disco con solo dar un límite a la sumatoria dominante, así el potencial y la densidad sólo corresponderán a una suma finita de términos. Para poder calcular las distintas funciones  $\Psi_n$  y  $\rho_n$ , se plantean (2.38 - 2.57) de una manera más ordenada con el fin de un manejo adecuado a la gran cantidad de términos.

El potencial (2.38) se puede expresar de la forma

$$\Psi_n(R, \varphi, \vec{z}) = - \sum_{\ell=0}^n \sum_{m=0}^{\ell} \psi_{2\ell}^{2m}(R, \varphi, \vec{z}), \quad (3.1)$$

la cual se puede organizar como una relación de recurrencia, así:

$$\Psi_n(R, \varphi, \vec{z}) = \Psi_{n-1}(R, \varphi, \vec{z}) - [\psi_{2n}^0(R, \varphi, \vec{z}) + \psi_{2n}^2(R, \varphi, \vec{z}) + \dots + \psi_{2n}^{2n}(R, \varphi, \vec{z})]. \quad (3.2)$$

La ecuación (2.57) se puede expresar incluyendo todos los términos dentro de las sumatorias, así:

$$\rho_n(R, \varphi, \vec{z}) = \frac{1}{4\pi G a^2} \sum_{\ell=0}^n \sum_{m=0}^{\ell} \sigma_{2\ell}^{2m}(R, \varphi, \vec{z}), \quad (3.3)$$

lo cual es equivalente a:

$$\rho_n(R, \varphi, \vec{z}) = \rho_{n-1}(R, \varphi, \vec{z}) + \frac{1}{4\pi G a^2} [\sigma_{2n}^0(R, \varphi, \vec{z}) + \sigma_{2n}^2(R, \varphi, \vec{z}) + \dots + \sigma_{2n}^{2n}(R, \varphi, \vec{z})]; \quad (3.4)$$

así, sólo será necesario mostrar los términos  $\sigma_{2n}^{2m}(R, \varphi, \bar{z})$  y  $\psi_{2n}^{2m}(R, \varphi, \bar{z})$  por separado. Debido a la presencia de varios parámetros en el cálculo, se obtienen diferentes iso-superficies e iso-contornos de un mismo modelo expresados en coordenadas cartesianas\*, cada uno corresponde a valores diferentes de dichas constantes, procedimiento que se define como *submodelo* para el cual se usa la siguiente notación:  $\varphi_n^{\text{Sub-Modelo}}$ . Se aclara que en cada modelo se plantean cuatro submodelos.

Las curvas mostradas en los resultados gráficos corresponden a cortes hechos en la iso-superficie en planos constantes  $\chi$  y  $\gamma$ . Debido a la definición de las coordenadas cilíndricas en función de las coordenadas cartesianas solo se muestran los cortes de planos constantes en el primer octante de la superficie. Los planos constantes son:  $\chi = 0, \chi = 1/2, \chi = 1, \chi = 3/2, \chi = 2, \chi = 5/2$ ;  $\gamma = 0, \gamma = 1/2, \gamma = 1, \gamma = 3/2, \gamma = 2, \gamma = 5/2$ .

### 3.1. Modelo $n = 0$

Las expresiones (2.38 - 2.57) con  $n = 0$ , permiten conocer el único modelo con un comportamiento simétrico, pues en su definición se manifiesta independencia de la coordenada  $\varphi$ . La expresión para el potencial y la densidad de este modelo son

$$\Psi_0(R, \bar{z}) = -\psi_0^0(R, \bar{z}) = -\frac{A_0^0 P_0(\cos \theta)}{r} \quad (3.5)$$

y

$$\rho_0(R, \bar{z}) = \frac{\sigma_0^0(R, \bar{z})}{4\pi G a^2}, \quad (3.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_0^0(R, \bar{z}) = & \frac{W A_0^0 P_0^0(\cos \theta)}{r^2} + \frac{Q A_0^0 P_1^0(\cos \theta)}{r^2} + \\ & \frac{(z^2 - a^2) E A_0^0 P_0^0(\cos \theta)}{r^3} - \frac{(z^2 - a^2) D A_0^0 P_1^0(\cos \theta)}{r^3} - \\ & \frac{(z^2 - a^2) N A_0^0 P_2^0(\cos \theta)}{r^3}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dicha expresión permite calcular la superficie y el contorno de densidad en  $z = 0$ , para varios valores de las constantes  $a, b, A_0^0$ . La siguiente tabla muestra las constantes utilizadas en el análisis gráfico de  $\varphi_0(R, 0)$ .

---

\*El cálculo se plantea en coordenadas cartesianas normalizadas  $\chi, \gamma$ , que satisfacen la normalización propuesta en la tabla (2.1)

Submodelo	$a$	$b$	$A_0^0$
<i>i</i>	1	2.5	145
<i>ii</i>	0.8	1.5	145
<i>iii</i>	0.6	1.5	185
<i>iv</i>	1	1.5	105

Tabla 3.1: Valores de los parámetros con los cuales se construyeron las iso-superficies, iso-contornos, curvas y con los que se calcularon los valores de  $M$ . Las unidades de  $a$ ,  $b$  se consideran en  $Kpc$ .

Al analizar los resultados gráficos Figuras (3.1 - 3.1 - 3.1 - 3.1) del modelo  $n = 0$ , vemos como la densidad logra un adecuado comportamiento que la hace apta de representar regiones centrales de discos galácticos. Las iso-superficies, iso-contornos y curvas muestran ella como decae, de tal manera que en pocas unidades, corresponde a un pequeño valor de la parte central. Esta parte central es la que asociaremos con la descripción del bulbo galáctico.

Este modelo se caracteriza por tener simetría axial, lo cual se refleja en los resultados gráficos. Su comportamiento libre de asimetrías se puede relacionar con la presencia de un bulbo clásico, pues el comportamiento de éste es totalmente diferente al disco, cualidad que se reconoce en la iso-superficie, donde se ve que no aparece alguna otra protuberancia alrededor de la central.

En los resultados se ve que el máximo central no depende solo del parámetro  $a$  o  $b$ , sino que depende de la razón  $b/a$ . También se reconoce la importancia de la constante  $A_0^0$ , ella es el segundo factor que decide el valor del máximo.

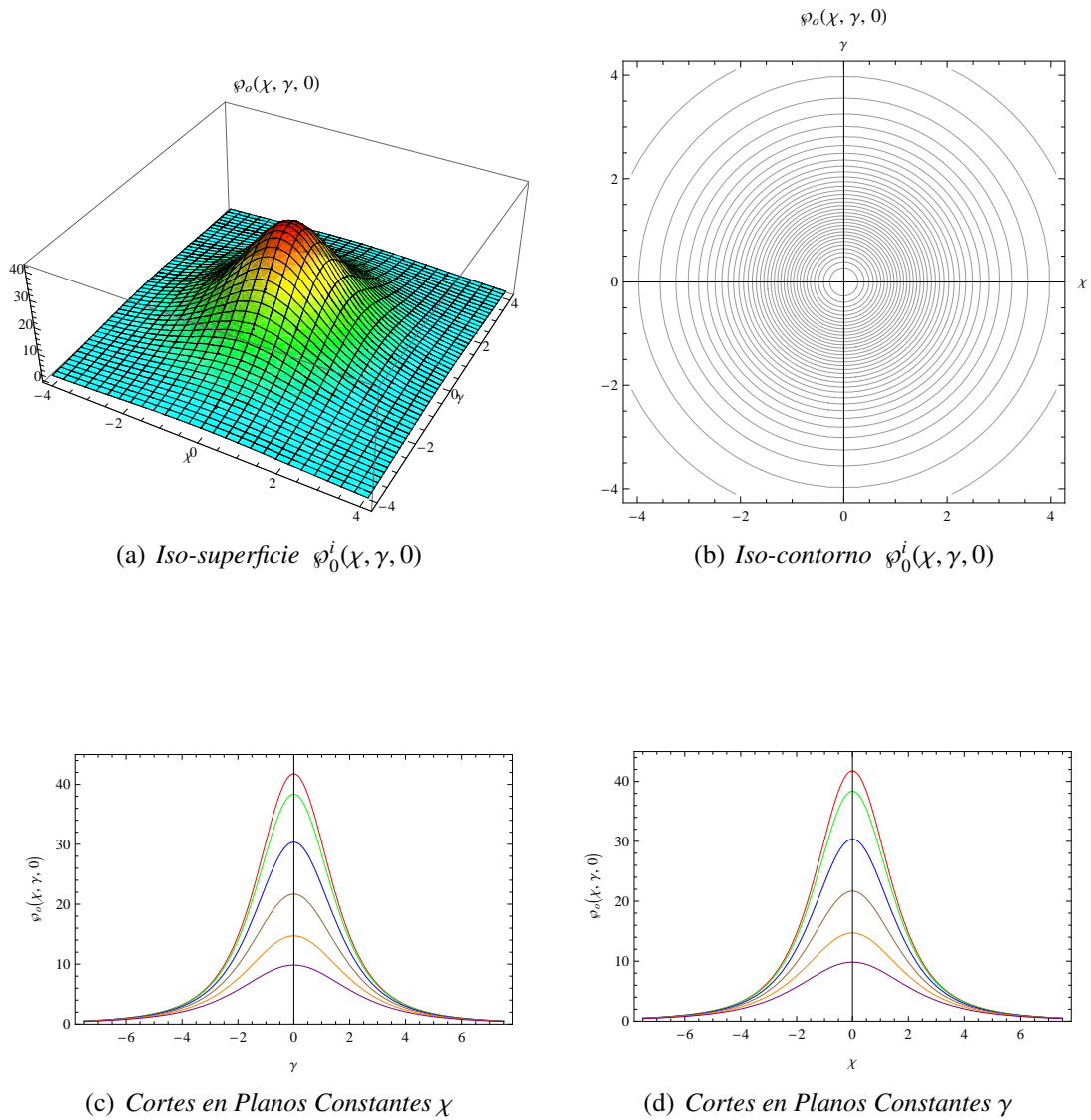


figura 3.1: Resultados gráficos de  $\varphi_0^i(\chi, \gamma, 0)$ , con los valores de  $a$ ,  $b$  y  $A_{2\ell}^{2m}$  definidos en la tabla (3.1). En (a) se nota como la función densidad cumple con ser positiva, además se aprecia que ella logra un valor finito en el centro y como a pocas unidades tiene valores que son inapreciables. La iso-superficie e iso-contorno muestran el carácter simétrico del modelo. Los colores rojo, verde, azul, café, naranja, y purpura, en (c) y (d), representan los cortes de  $\chi$  y  $\gamma$  en los planos constantes: 0, 1/2, 1, 3/2, 2 y 5/2 respectivamente. Por el comportamiento de las curvas se dice que el submodelo es apto para describir un bulbo clásico.

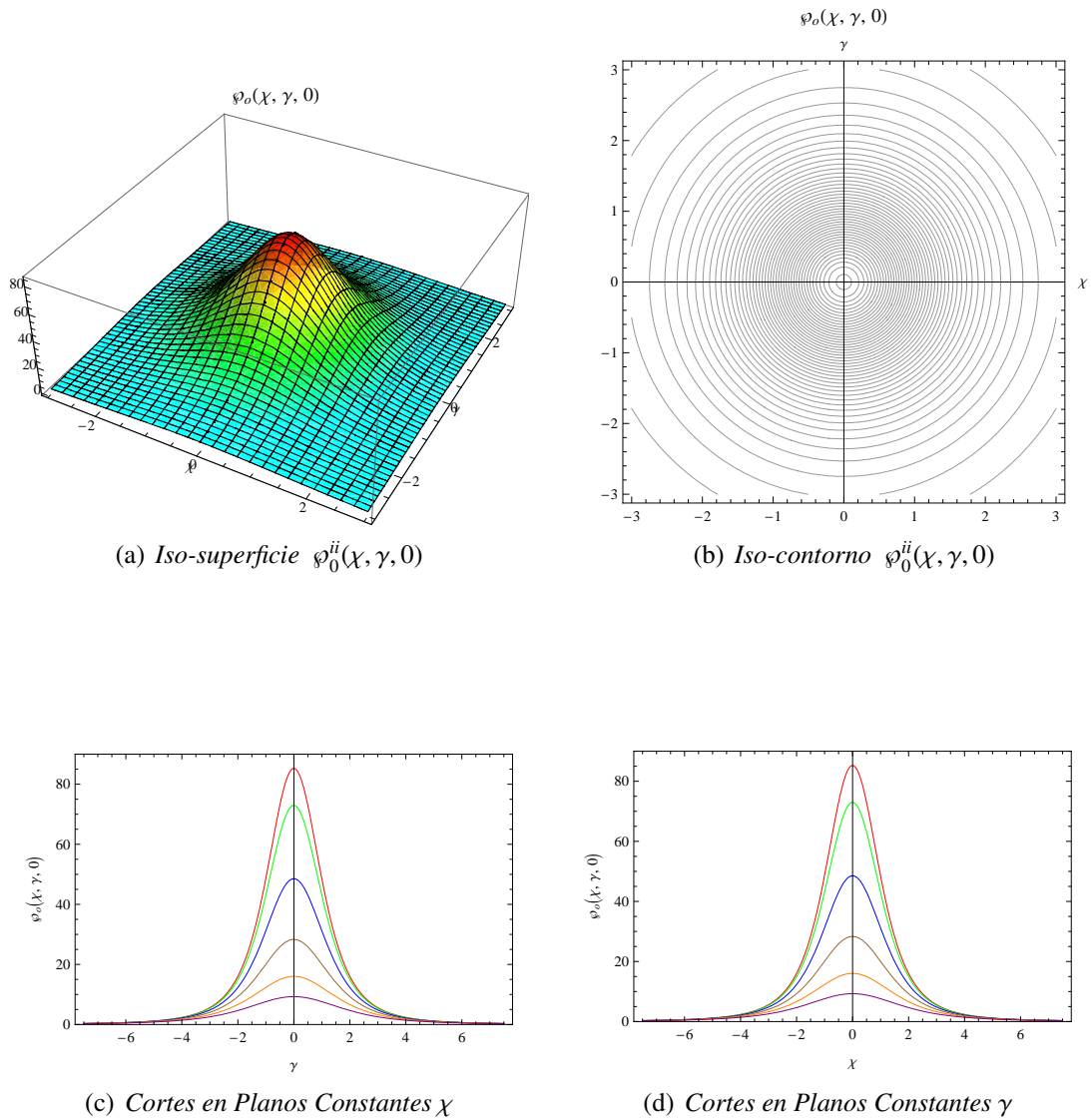


figura 3.2: Resultados gráficos de  $\varphi_0^i(\chi, \gamma, 0)$ , con los valores de  $a$ ,  $b$  y  $A_{2\ell}^{2m}$  definidos en la tabla (3.1). En (a) se nota como  $\varphi \geq 0$ , además se nota que tiene un valor finito en el centro y como decae a valores inapreciables en pocas unidades. En la iso-superficie e iso-contorno muestran el carácter simétrico del modelo. Los colores rojo, verde, azul, café, naranja, y púrpura, en (c) y (d), representan los cortes de  $\chi$  y  $\gamma$  en los planos constantes: 0, 1/2, 1, 3/2, 2 y 5/2 respectivamente. Por el comportamiento de las curvas se dice que el submodelo es apto para describir un bulbo clásico.

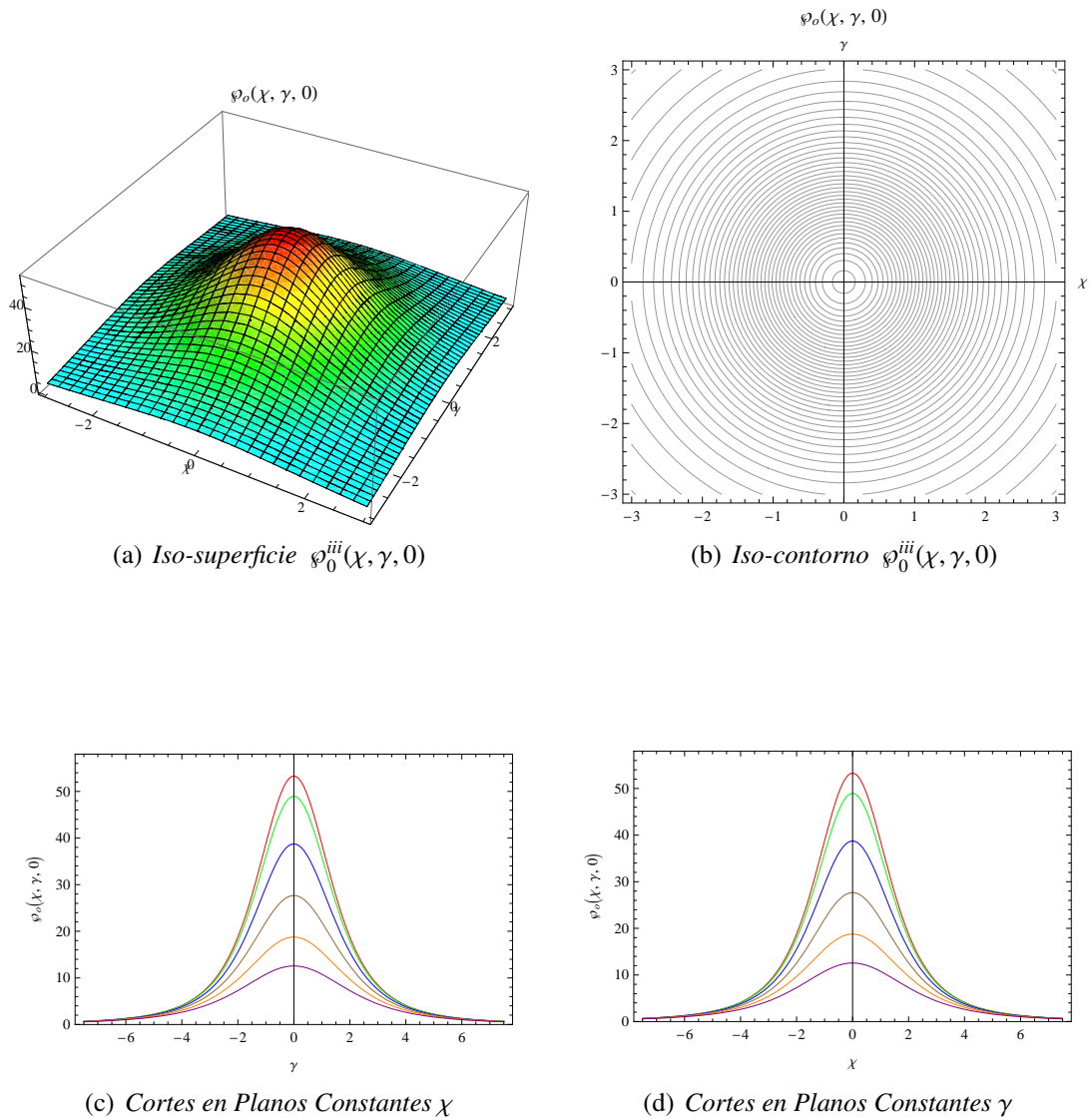
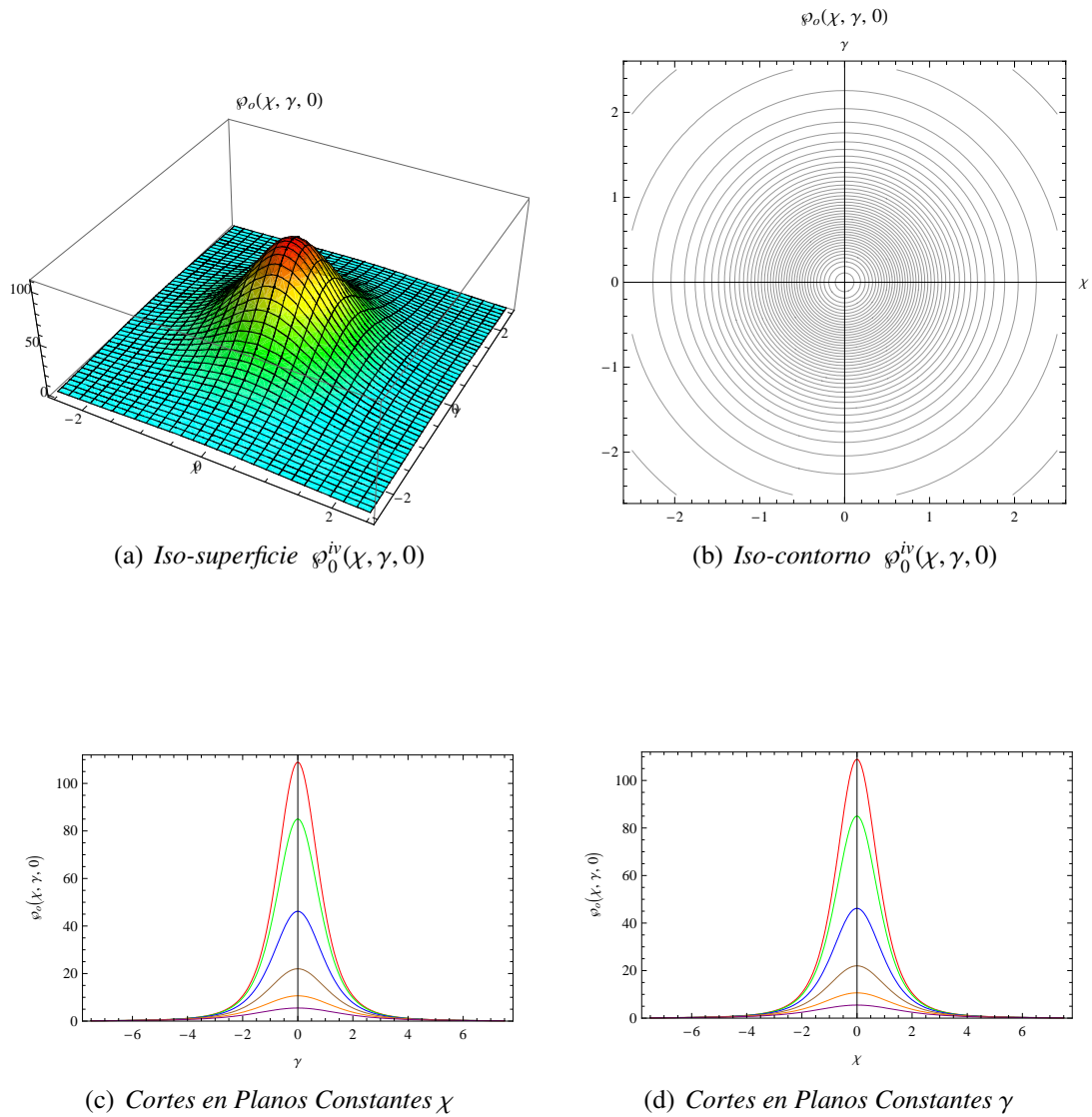


figura 3.3: Resultados gráficos de  $\varphi_0^{iii}(\chi, \gamma, 0)$ , con los valores de  $a$ ,  $b$  y  $A_{2\ell}^{2m}$  definidos en la tabla (3.1). En (a) se nota como la funci3n densidad cumple con ser positiva, sim3trica, y se distingue que ella logra un valor finito en el centro y como en pocas unidades tiene valores que son inapreciables. Los colores rojo, verde, azul, caf3, naranja, y púrpura, en (c) y (d), representan los cortes de  $\chi$  y  $\gamma$  en los planos constantes: 0, 1/2, 1, 3/2, 2 y 5/2 respectivamente. Por el comportamiento de las curvas se dice que el submodelos es apto para describir la regi3n central de galaxias espirales barradas.



**figura 3.4:** Resultados gráficos de  $\varphi_0^{iv}(\chi, \gamma, 0)$ , con los valores de  $a$ ,  $b$  y  $A_{2\ell}^{2m}$  definidos en la tabla (3.1). En (a) muestra como la función densidad cumple con ser positiva, además se ve que logra un valor finito en el centro y como a pocas unidades tiene valores que son insignificantes; (a) y (b) reflejan la presencia de simetría axial. En este submodelo la razón  $b/a$  es mayor que en los anteriores, permitiendo un máximo de mayor al de los otros submodelos. Los colores rojo, verde, azul, café, naranja, y púrpura, en (c) y (d), representan los cortes de  $\chi$  y  $\gamma$  en los planos constantes: 0, 1/2, 1, 3/2, 2 y 5/2 respectivamente.

### 3.2. Modelo $n = 1$

De modo semejante que en  $\rho_0$ , para el modelo  $\rho_1$  reemplazamos  $n = 1$  en (3.2 - 3.3); de esta forma,  $\Psi_1$  y  $\rho_1$  quedan constituidos del siguiente modo

$$\begin{aligned}\Psi_1(R, \varphi, \bar{z}) &= \Psi_0(R, \varphi, \bar{z}) - \psi_2^0(R, \varphi, \bar{z}) - \psi_2^2(R, \varphi, \bar{z}) \\ &= -\frac{A_0^0 P_0(\cos \theta)}{r} - \frac{A_2^0 P_2^0(\cos \theta)}{r^3} - \frac{A_2^2 P_2^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^3}.\end{aligned}$$

La densidad de masa sería:

$$\rho_1(R, \varphi, \bar{z}) = \rho_0(R, \bar{z}) + \frac{1}{4\pi G a^2} [\sigma_2^0(R, \varphi, \bar{z}) + \sigma_2^2(R, \varphi, \bar{z})]; \quad (3.8)$$

y de la expresión (3.4) se ve que sólo es necesario mostrar los términos  $\sigma_2^0(R, \varphi, \bar{z})$  y  $\sigma_2^2(R, \varphi, \bar{z})$ . Éstos son:

$$\begin{aligned}\sigma_2^0(R, \varphi, \bar{z}) &= \frac{W A_2^0 P_2^0(\cos \theta)}{r^4} + \frac{Q A_2^0 P_3^0(\cos \theta)}{r^4} + \\ &\frac{(z^2 - a^2) E A_2^0 P_2^0(\cos \theta)}{r^5} - \frac{(z^2 - a^2) D A_2^0 P_3^0(\cos \theta)}{r^5} - \\ &\frac{(z^2 - a^2) N A_2^0 P_4^0(\cos \theta)}{r^5},\end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}\sigma_2^2(R, \varphi, \bar{z}) &= \frac{W A_2^2 P_2^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^4} + \frac{Q A_2^2 P_3^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^4} + \\ &\frac{(z^2 - a^2) E A_2^2 P_2^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^5} - \frac{(z^2 - a^2) D A_2^2 P_3^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^5} \\ &\frac{(z^2 - a^2) N A_2^2 P_4^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^5}.\end{aligned} \quad (3.10)$$

Los valores de las parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $A_0^0$ ,  $A_2^0$ , y  $A_2^2$  utilizados son:

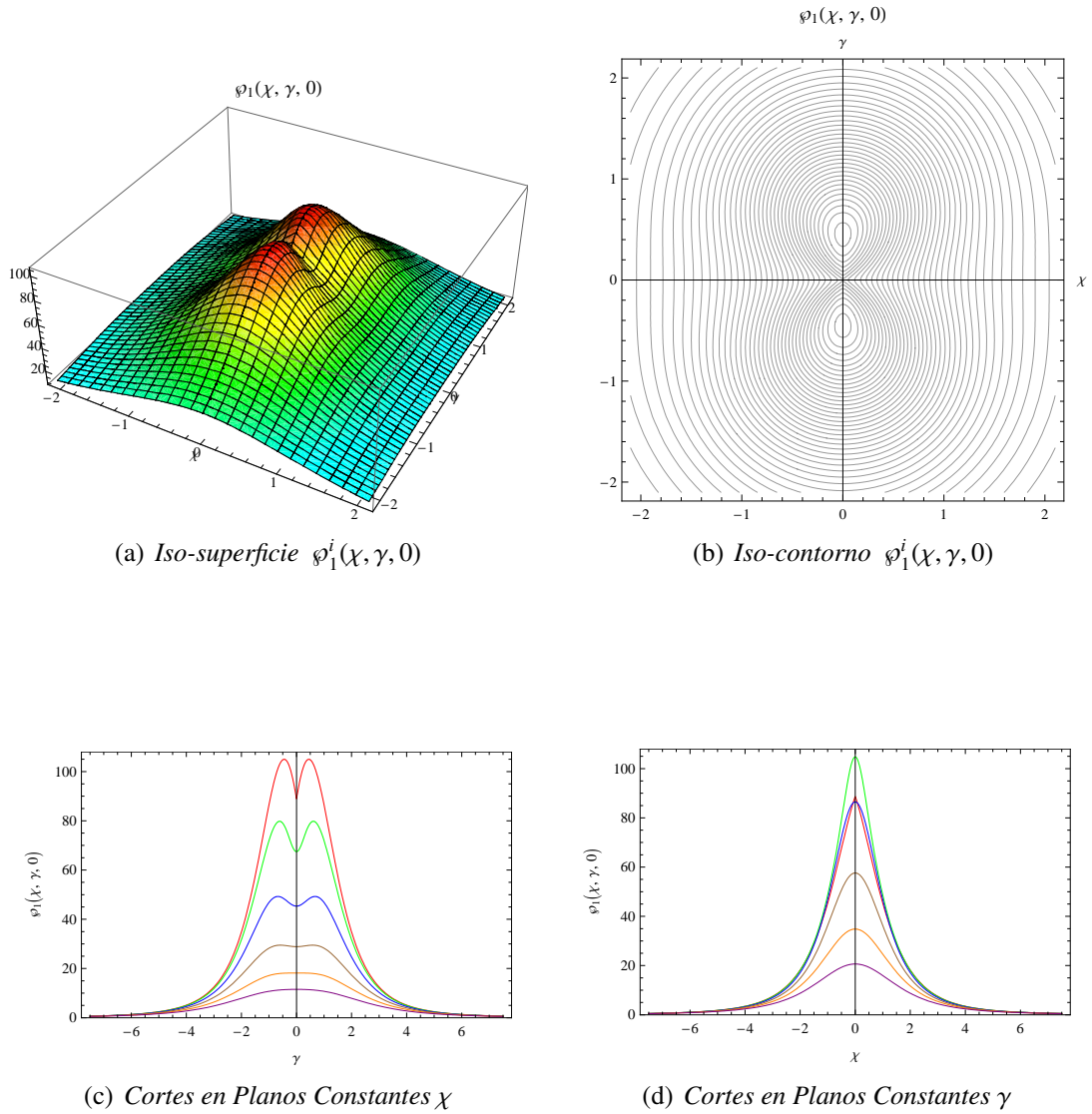
Submodelo	$a$	$b$	$A_0^0$	$A_2^0$	$A_2^2$
<i>i</i>	0.2	0.5	145	180	200
<i>ii</i>	1.4	2.5	120	110	105
<i>iii</i>	1.1	2.3	170	190	95
<i>iv</i>	1.2	2.8	102	85	180

Tabla 3.2: Valores de los parámetros con los cuales se construyeron las iso-superficies, iso-contornos, curvas y con los que se calcularon los valores de  $M$ . Las unidades de  $a$ ,  $b$  se consideran en Kpc.

Este modelo es donde empiezan a manifestarse las propiedades sin simetría de los discos. Éstas tienen su origen en la expresión (3.10) en el término  $\cos(2\varphi)$ . Éste es un modelo con unos resultados con significado totalmente diferente al anterior. En los resultados Figuras (3.2 - 3.2 - 3.2 - 3.2) podemos ver como la densidad logra un adecuado comportamiento, pues en todo punto del disco se garantiza que ella es positiva, además de que en ellos, también se aprecia que  $\varphi$  decae desde un valor finito en el centro, y a pocas unidades logra en un pequeño porcentaje del valor máximo.

En los resultados gráficos, se nota como todas las iso-superficies de todos los submodelos siguen la misma estructura, dos máximos desplazados y opuestos del centro que logran formar una región alargada. En las curvas se puede reconocer como el intervalo donde la  $\varphi$  es significativa mayor en  $\gamma$  que en  $\chi$  garantizándose la región alargada. En las curvas se logra ver un detalle importante, en ellas se ve como la densidad sólo describe el comportamiento central, ya que en pocas unidades ella logra puntos de poco valor. El hecho de que ella se manifieste de manera adecuada en la región central es lo que permite relacionarla con la región circunnuclear de galaxia espirales barradas.

Para los diferentes submodelos que se muestran en los resultados, se ve que las propiedades axialmente no simétricas se manipulan al cambiar de manera razonable las constantes  $A_{2\ell}^{2m}$  para  $m \geq 1$ . Con el manejo de éstas se puede realizar dos cambios principalmente. Uno es el valor del máximo cambie, claro que aquí es importante tener en cuenta la razón  $b/a$ ; ya que entre cada vez sea más pequeña, el valor del máximo aumenta de manera razonable. La otra transformación, es lograr manejar la morfología de la iso-superficie. En la superficies se nota como podemos hacer que los picos se acerquen, o que se separen. También se logra mostrar, que en los modelos las constantes simétricas siempre deben ser mayores que las no simétricas. La presencia de estos picos lo que hace es representar las propiedades sin simetría de la región circunnuclear; están son las relacionadas con la presencia de un pseudobulbo; el cual tiene características totalmente diferentes a las de un bulbo clásico.



**figura 3.5:** Resultados gráficos de  $\varphi_1^i(\chi, \gamma, 0)$ , con los valores de  $a$ ,  $b$  y  $A_{2\ell}^{2m}$  definidos en la tabla (3.2). En (a) se nota como la función densidad cumple con ser positiva, además se aprecia el valor finito en el centro y como en pocas unidades tiene valores que son inapreciables. En (b) se muestra que la protuberancia central corresponde a una zona alargada que reflejan la falta de simetría, afirmación que se puede comprobar en las curvas (c) y (d); en ellas se ve que el intervalo donde la densidad es apreciable es mayor en  $\gamma$  que  $\chi$ . Los colores rojo, verde, azul, café, naranja, y púrpura, en (c) y (d), representan los cortes de  $\chi$  y  $\gamma$  en los planos constantes: 0, 1/2, 1, 3/2, 2 y 5/2 respectivamente. Por el comportamiento de las curvas se dice que el submodelo es apto para describir la región circunuclear de las galaxias SB.

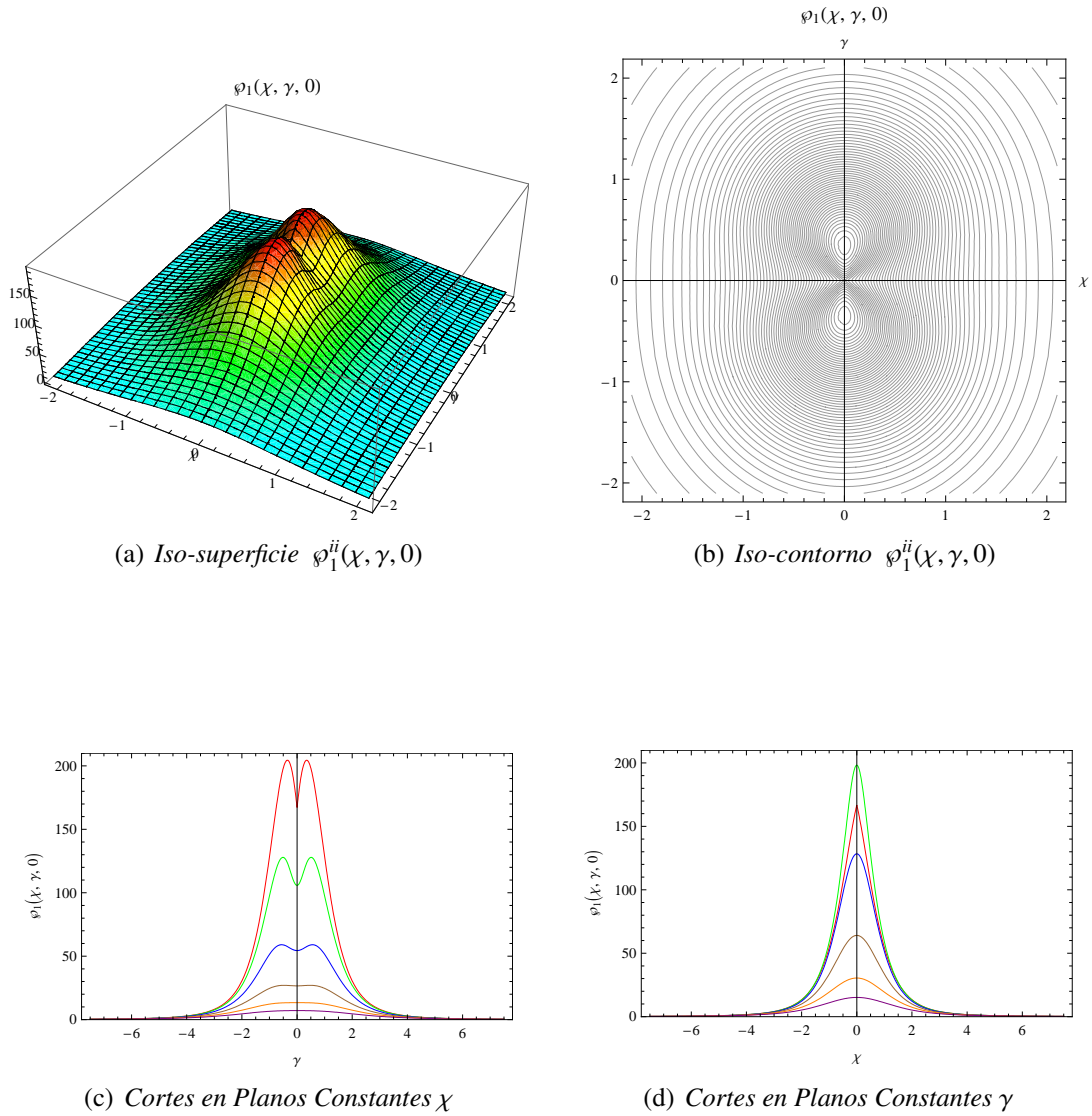


figura 3.6: Resultados gráficos de  $\varphi_1^{ii}(\chi, \gamma, 0)$ , con los valores de  $a$ ,  $b$  y  $A_{2\ell}^{2m}$  definidos en la tabla (3.2). En (a), se nota como la funci3n densidad cumple con ser positiva, además se vislumbra como ella logra un valor finito en el centro y como a pocas unidades sus valores que son insignificantes. Tambi3n se ven ciertas características que reflejan la falta de simetría. En (b) se muestra que la protuberancia central corresponde a una zona alargada; afirmaci3n que se puede comprobar en las curvas (c) y (d); en ellas se ve que el intervalo donde la densidad es apreciable es mayor en  $\gamma$  que  $\chi$ . Los colores rojo, verde, azul, caf3, naranja, y púrpura, en (c) y (d), representan los cortes de  $\chi$  y  $\gamma$  en los planos constantes: 0, 1/2, 1, 3/2, 2 y 5/2 respectivamente. Por el comportamiento de las curvas se dice que el submodelo es apto para describir la regi3n central de una galaxia barrada.

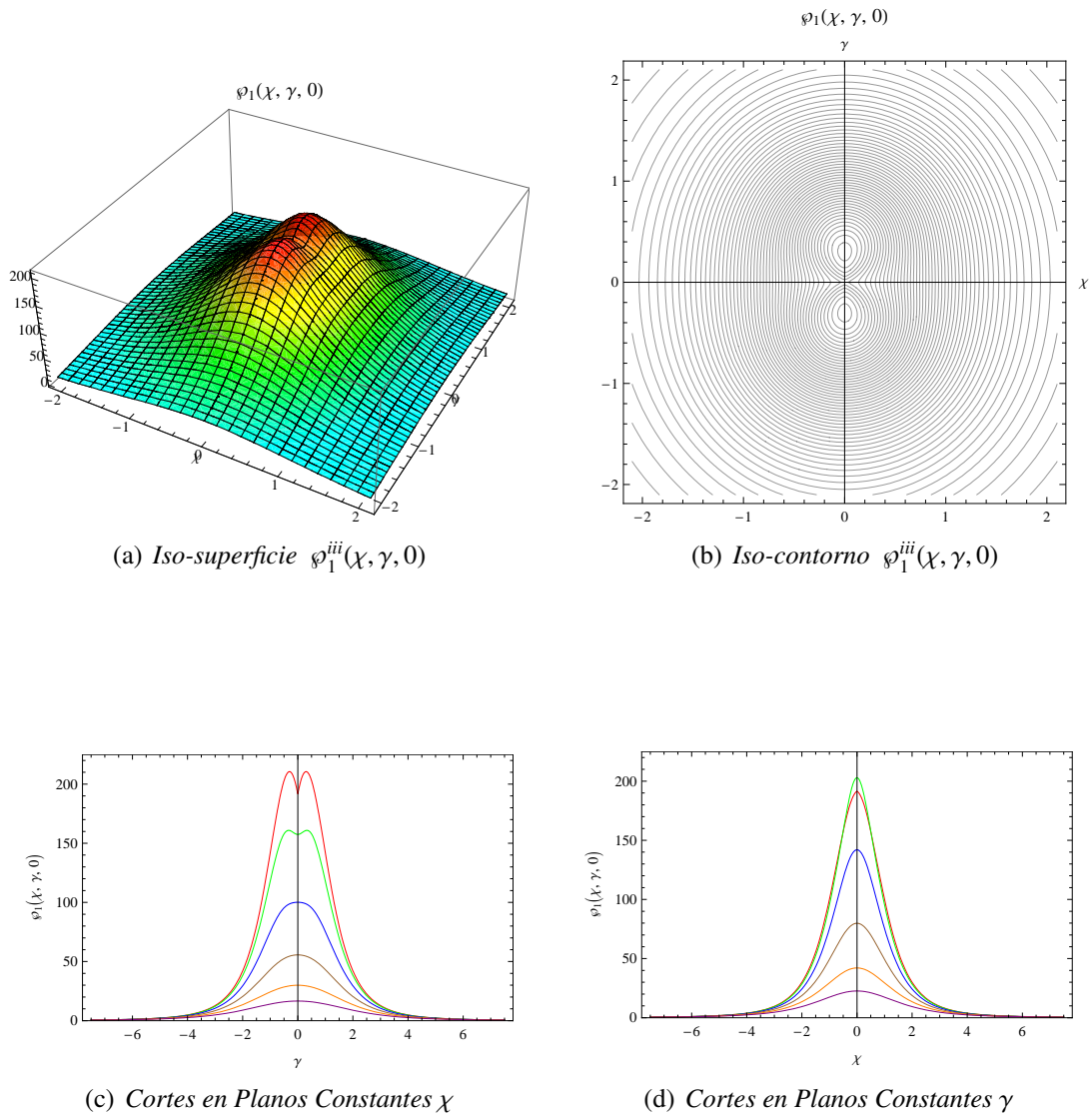


figura 3.7: Resultados gráficos de  $\varphi_1^{iii}(\chi, \gamma, 0)$ , con los valores de  $a$ ,  $b$  y  $A_{2\ell}^{2m}$  definidos en la tabla (3.2). En (a) se nota como la función densidad cumple con ser positiva, además se ve como logra un valor finito en el centro y como en pocas unidades tiene valores que son inapreciables. En (b) se muestra que la protuberancia central corresponde a una zona elongada que refleja la falta de simetría axial. Los colores rojo, verde, azul, café, naranja, y púrpura, en (c) y (d), representan los cortes de  $\chi$  y  $\gamma$  en los planos constantes: 0, 1/2, 1, 3/2, 2 y 5/2 respectivamente. Por el comportamiento asimétrico del submodelo se explica por la presencia del pseudobulbo en la región circunuclear de las galaxias SB

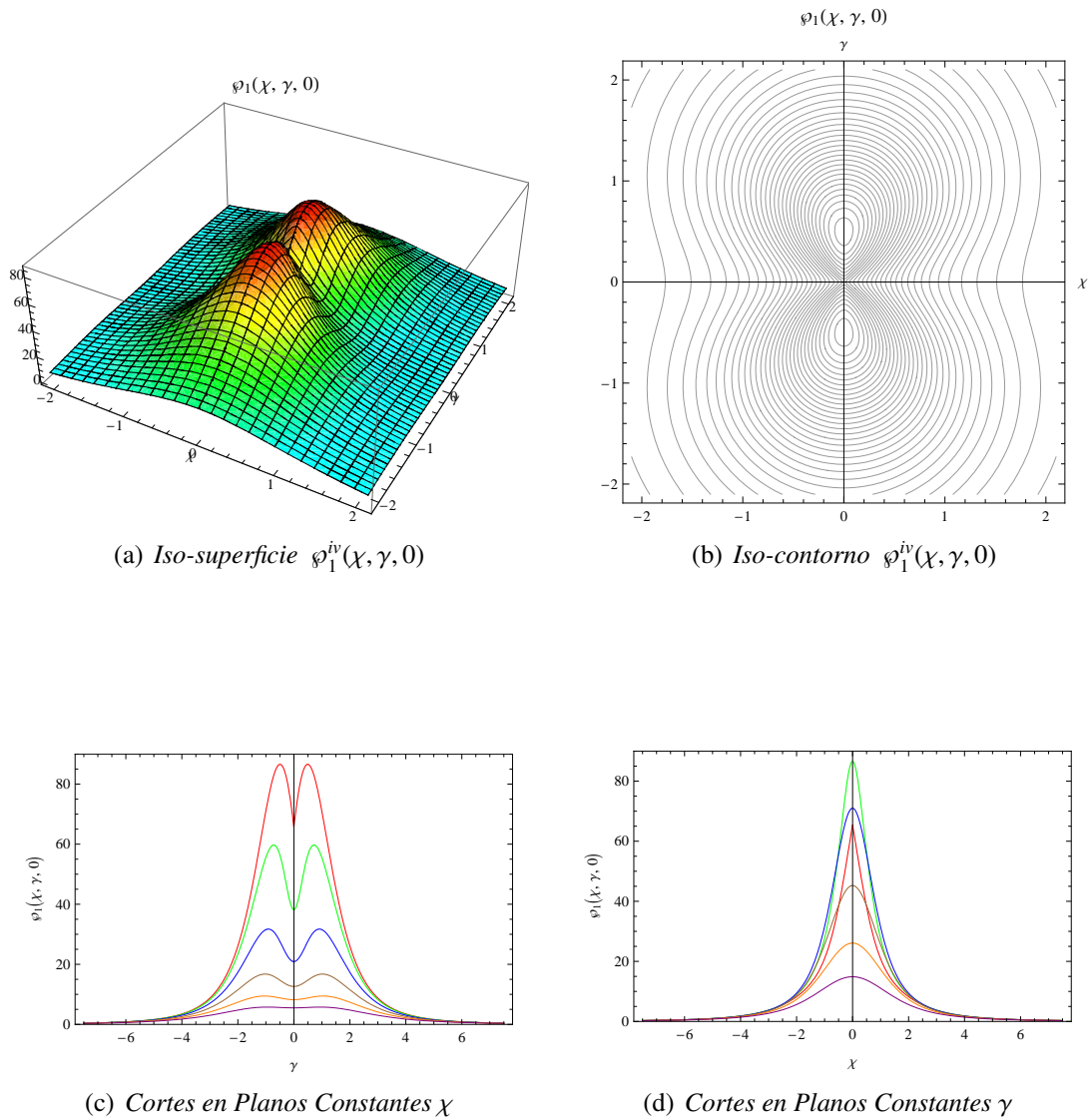


figura 3.8: Resultados gráficos de  $\varphi_1^{iv}(\chi, \gamma, 0)$ , con los valores de  $a$ ,  $b$  y  $A_{2\ell}^{2m}$  definidos en la tabla (3.2). En (a) se nota como  $\varphi \geq 0$ , y se muestra como dicha funci3n logra un valor finito en el centro y como a pocas unidades tiene valores que son insignificantes; (b) es prueba de la falta de simetría axial, pues la protuberancia central corresponde a una zona alargada. Los colores rojo, verde, azul, café, naranja, y púrpura, en (c) y (d), representan los cortes de  $\chi$  y  $\gamma$  en los planos constantes: 0, 1/2, 1, 3/2, 2 y 5/2 respectivamente. Por el comportamiento de las curvas se dice que el submodelo es apto para describir la regi3n central de galaxias espirales barradas.

### 3.3. Modelo $n = 2$

Para el modelo de densidad  $\rho_2$  hacemos  $n = 2$ ; así,  $\Psi_2$  sigue la expresión (3.2) :

$$\begin{aligned}\Psi_2(R, \varphi, \bar{z}) &= \Psi_1(R, \varphi, \bar{z}) - \psi_4^0(R, \varphi, \bar{z}) - \psi_4^2(R, \varphi, \bar{z}) - \psi_4^4(R, \varphi, \bar{z}) \\ &= \Psi_1(R, \varphi, \bar{z}) - \frac{A_4^0 P_4(\cos \theta)}{r^5} - \frac{A_4^2 P_4^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^5} \\ &\quad - \frac{A_4^4 P_4^4(\cos \theta) \cos(4\varphi)}{r^5},\end{aligned}\quad (3.11)$$

y la densidad es descrita por (3.3)

$$\rho_2(R, \varphi, \bar{z}) = \rho_1(R, \varphi, \bar{z}) + \frac{1}{4\pi G a^2} [\sigma_4^0(R, \varphi, \bar{z}) + \sigma_4^2(R, \varphi, \bar{z}) + \sigma_4^4(R, \varphi, \bar{z})]. \quad (3.12)$$

Por la expresión (3.4) sólo es necesario mostrar los elementos  $\sigma_4^0(R, \varphi, \bar{z})$ ,  $\sigma_4^2(R, \varphi, \bar{z})$  y  $\sigma_4^4(R, \varphi, \bar{z})$  :

$$\begin{aligned}\sigma_4^0(R, \varphi, \bar{z}) &= \frac{W A_4^0 P_4^0(\cos \theta)}{r^6} + \frac{Q A_4^0 P_5^0(\cos \theta)}{r^6} + \\ &\quad \frac{(z^2 - a^2) E A_4^0 P_4^0(\cos \theta)}{r^7} - \frac{(z^2 - a^2) D A_4^0 P_5^0(\cos \theta)}{r^7} - \\ &\quad \frac{(z^2 - a^2) N A_4^0 P_6^0(\cos \theta)}{r^7},\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}\sigma_4^2(R, \varphi, \bar{z}) &= \frac{W A_4^2 P_4^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^6} + \frac{Q A_4^2 P_5^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^6} + \\ &\quad \frac{(z^2 - a^2) E A_4^2 P_4^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^7} - \frac{(z^2 - a^2) D A_4^2 P_5^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^7} \\ &\quad \frac{(z^2 - a^2) N A_4^2 P_6^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^7},\end{aligned}\quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}\sigma_4^4(R, \varphi, \bar{z}) &= \frac{W A_4^4 P_4^4(\cos \theta) \cos(4\varphi)}{r^6} + \frac{Q A_4^4 P_5^2(\cos \theta) \cos(4\varphi)}{r^6} + \\ &\quad \frac{(z^2 - a^2) E A_4^4 P_4^4(\cos \theta) \cos(4\varphi)}{r^7} - \frac{(z^2 - a^2) D A_4^4 P_5^2(\cos \theta) \cos(4\varphi)}{r^7} \\ &\quad \frac{(z^2 - a^2) N A_4^4 P_6^4(\cos \theta) \cos(4\varphi)}{r^7}.\end{aligned}\quad (3.15)$$

Las constantes utilizadas en el cálculo son:

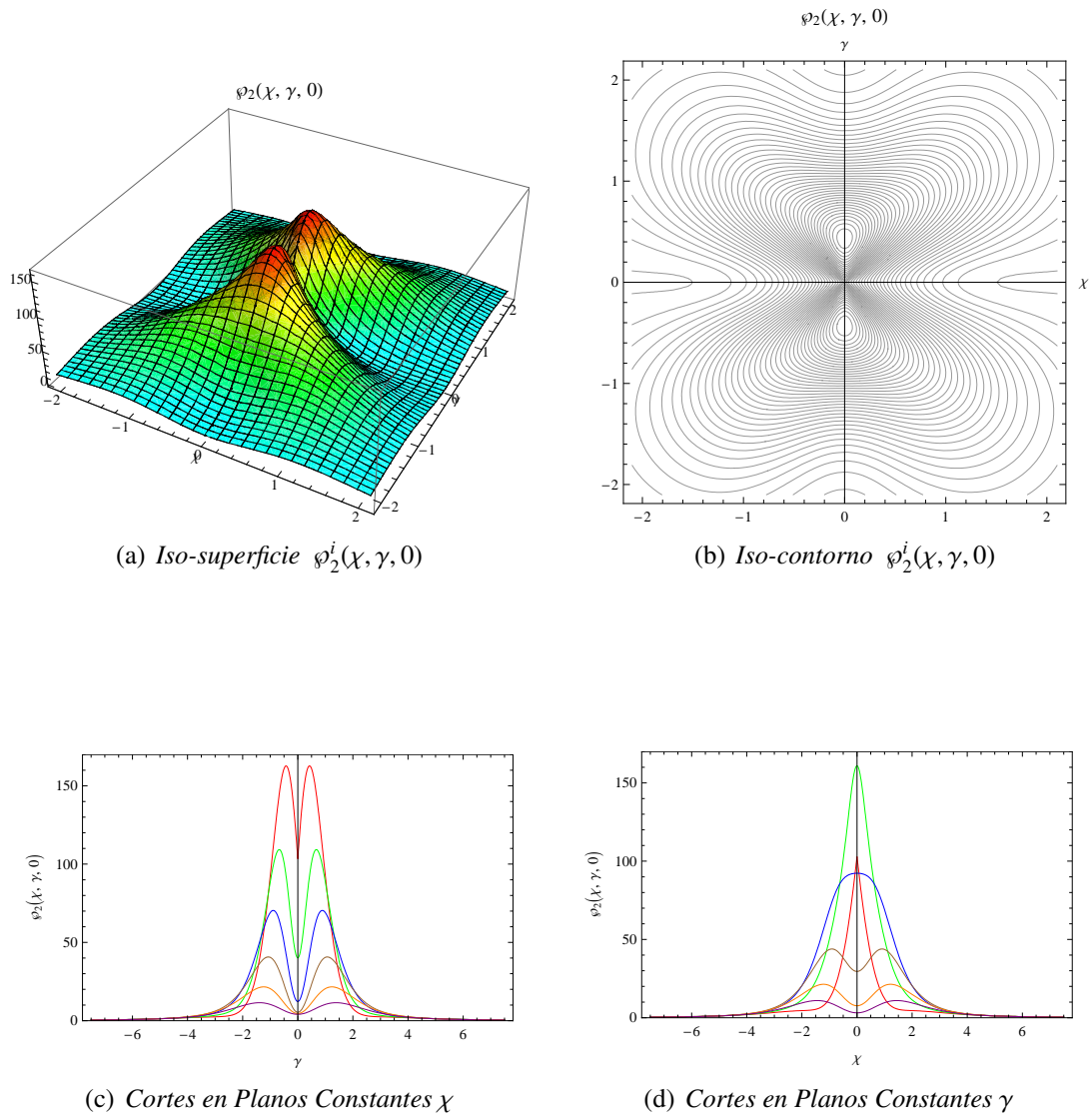
Submodelo	$a$	$b$	$A_0^0$	$A_2^0$	$A_2^2$	$A_4^0$	$A_4^2$	$A_4^4$
<i>i</i>	1	2.3	125	105	140	150	89	90
<i>ii</i>	1.1	2.0	98	170	86	100	80	90
<i>iii</i>	0.8	2.5	195	200	173	160	230	150
<i>iv</i>	0.9	2.1	200	110	120	90	150	120

Tabla 3.3: Valores de los parámetros con los cuales se construyeron las iso-superficies, iso-contornos, curvas y con los que se calcularon los valores de  $\mathcal{M}$ . Las unidades de  $a, b$  se consideran en Kpc.

En este modelo podemos ver como los términos  $\cos(2\varphi)$  y  $\cos(4\varphi)$  generan cualidades diferentes. En los resultados de  $\rho_2$  Figuras (3.3 - 3.3 - 3.3 - 3.3), se ve como la densidad es positiva en todo punto del disco, lo que permite asignarle sentido físico, además en ella se nota como logra describir de una manera adecuada la región central. También presenta los picos del centro, al igual que los modelos anteriores, pero ahora ellos tienen un carácter más agudo.

La parte central se caracteriza por ser alargada, sus características no simétricas se pueden relacionar con la existencia de una estructura como el pseudobulbo presente en la región circunuclear de las galaxias barradas. En las curvas se ve como la función densidad logra un comportamiento adecuado, pues su valor del centro es un valor finito, y decae de forma adecuada, tanto, que en menos de cinco unidades su valor es muy pequeño en comparación con el valor central.

En el modelo se logra destacar que los máximos centrales, los cuales aumentan para situaciones en donde la razón  $b/a$  se reduce de un submodelo a otro. Otro factor importante de mencionar es que las constantes de las contribuciones  $\sigma(R, \varphi, \bar{z})$  simétricas deben ser mayores que las no simétricas, además las constantes  $A_{2\ell}^0$  son las de mayor prioridad, pues en el cálculo se vio que estas son las que no permiten regiones negativas, y permiten acumulaciones en el centro.



**figura 3.9:** Resultados gráficos de  $\varphi_2^i(\chi, \gamma, 0)$ , con los valores de  $a$ ,  $b$  y  $A_{2\ell}^{2m}$  definidos en la tabla (3.3). La iso-superficie muestra como la función densidad cumple con ser positiva, además se ve como ella logra un valor finito en el centro y como a pocas unidades sus valores son inapreciables. En (b) se muestra que la protuberancia central corresponde a una zona alargada. Las curvas (c) y (d) muestran que la función densidad es apta para modelar regiones circunnucleares de galaxias barradas, pues las características no simétricas de los resultados expresan la existencia del pseudobulbo. Los colores rojo, verde, azul, café, naranja, y púrpura, en (c) y (d), representan los cortes de  $\chi$  y  $\gamma$  en los planos constantes: 0, 1/2, 1, 3/2, 2 y 5/2 respectivamente.

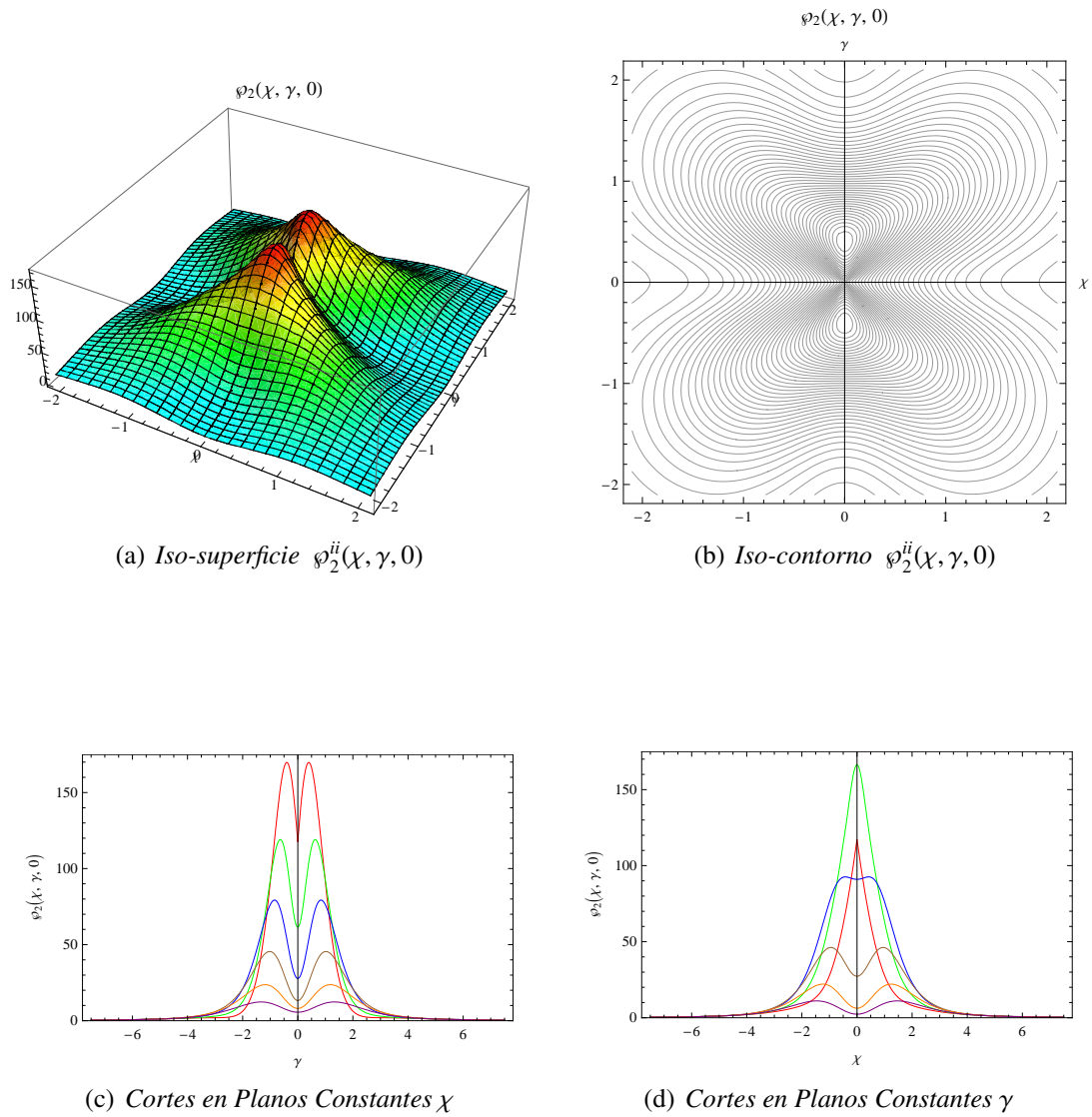


figura 3.10: Resultados gráficos de  $\varphi_2^{ii}(\chi, \gamma, 0)$ , con los valores de  $a$ ,  $b$  y  $A_{2\ell}^{2m}$  definidos en la tabla (3.3). En (a) se nota como  $\varphi \geq 0$ , además se ve como logra un valor finito en el centro y como en pocas unidades tiene valores que son inapreciables. Las zonas alargadas de menor valor que la central se pueden entender como el sitio donde nacen los brazos de la galaxia. En (b) se muestra que la protuberancia central corresponde a una zona elongada que refleja la falta de simetría. Los colores rojo, verde, azul, café, naranja, y púrpura, en (c) y (d), representan los cortes de  $\chi$  y  $\gamma$  en los planos constantes: 0, 1/2, 1, 3/2, 2 y 5/2 respectivamente.

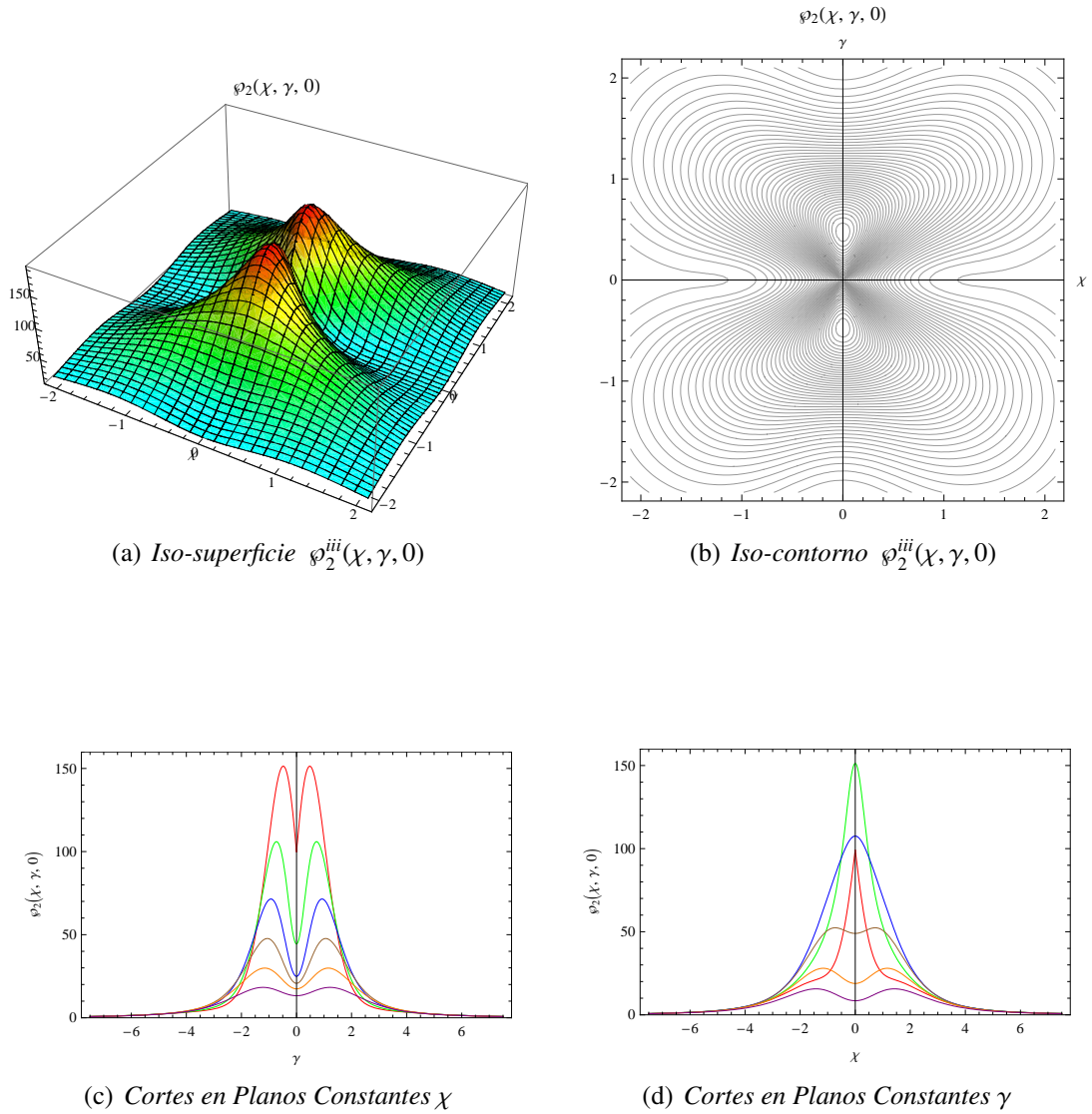


figura 3.11: Resultados gráficos de  $\varphi_2^{iii}(\chi, \gamma, 0)$ , con los valores de  $a$ ,  $b$  y  $A_{2\ell}^{2m}$  definidos en la tabla (3.3). La iso-superficie muestra como la función densidad cumple con ser positiva, además se aprecia como ella logra un valor finito en el centro y como a pocas unidades sus valores son insignificantes. (b) es una prueba de la falta de simetría axial del modelo, pues la protuberancia central corresponde a una zona extendida. Los colores rojo, verde, azul, café, naranja, y púrpura, en (c) y (d), representan los cortes de  $\chi$  y  $\gamma$  en los planos constantes: 0, 1/2, 1, 3/2, 2 y 5/2 respectivamente. El comportamiento de las curvas permite decir que el submodelo es apropiado para describir la región circunnuclear de una galaxia SB.

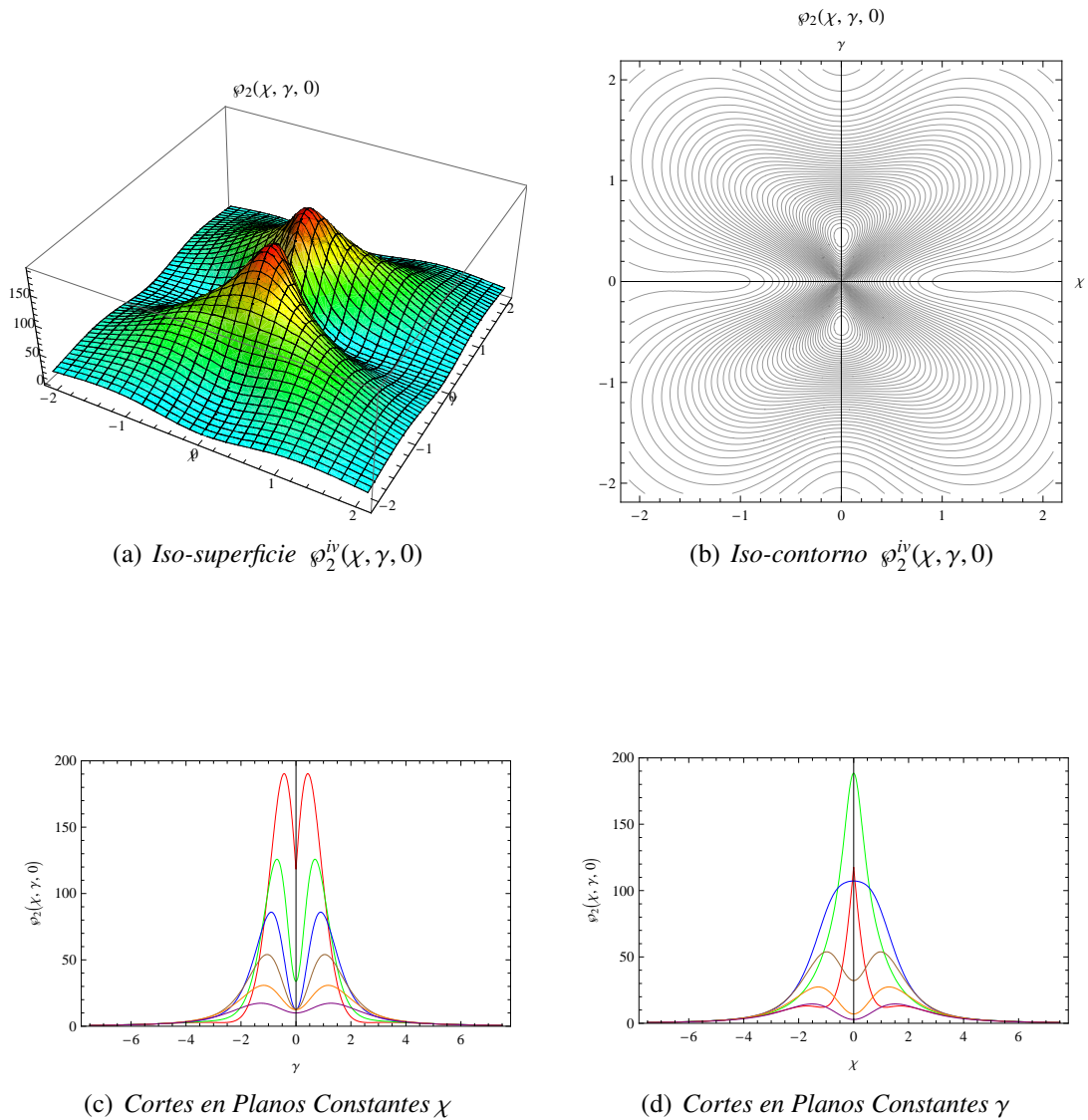


figura 3.12: Resultados gráficos de  $\varphi_2^{iv}(\chi, \gamma, 0)$ , con los valores de  $a$ ,  $b$  y  $A_{2\ell}^{2m}$  definidos en la tabla (3.3). En (a) se nota como la función densidad cumple con ser positiva, además se ve como logra un valor finito en el centro y como a escasas unidades sus valores son inapreciables. En (b) se muestra que la protuberancia central corresponde a una zona alargada, acompañada de regiones de menor valor que la central. Los colores rojo, verde, azul, café, naranja, y púrpura, en (c) y (d), representan los cortes de  $\chi$  y  $\gamma$  en los planos constantes: 0, 1/2, 1, 3/2, 2 y 5/2 respectivamente. Las propiedades no simétricas en los resultados reflejan la presencia del pseudobulbo en la región circunuclear de las galaxias SB

### 3.4. Modelo $n = 3$

El modelo con densidad  $\rho_3$  implica al igual que para los modelos anteriores hacer  $n = 3$ . Según (3.2) y (3.3). El potencial gravitacional está dado por:

$$\begin{aligned}\Psi_3(R, \varphi, \vec{z}) &= \Psi_2(R, \varphi, \vec{z}) - \psi_6^0(R, \varphi, \vec{z}) - \psi_6^2(R, \varphi, \vec{z}) - \psi_6^4(R, \varphi, \vec{z}) - \psi_6^6(R, \varphi, \vec{z}) \\ &= \Psi_2(R, \varphi, \vec{z}) - \frac{A_6^0 P_6^0(\cos \theta)}{r^7} - \frac{A_6^2 P_6^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^7} - \frac{A_6^4 P_6^4(\cos \theta) \cos(4\varphi)}{r^7} \\ &\quad - \frac{A_6^6 P_6^6(\cos \theta) \cos(6\varphi)}{r^7},\end{aligned}$$

y la densidad de masa es

$$\rho_3(R, \varphi, \vec{z}) = \rho_2(R, \varphi, \vec{z}) + \frac{1}{4\pi G a^2} [\sigma_6^0(R, \varphi, \vec{z}) + \sigma_6^2(R, \varphi, \vec{z}) + \sigma_6^4(R, \varphi, \vec{z}) + \sigma_6^6(R, \varphi, \vec{z})]. \quad (3.16)$$

Por (3.4) se ve sólo la necesidad de conocer a  $\sigma_6^0(R, \varphi, \vec{z})$ ,  $\sigma_6^2(R, \varphi, \vec{z})$ ,  $\sigma_6^4(R, \varphi, \vec{z})$  y  $\sigma_6^6(R, \varphi, \vec{z})$  :

$$\begin{aligned}\sigma_6^0(R, \varphi, \vec{z}) &= \frac{W A_6^0 P_6^0(\cos \theta)}{r^8} + \frac{Q A_6^0 P_7^0(\cos \theta)}{r^8} + \\ &\quad \frac{(z^2 - a^2) E A_6^0 P_6^0(\cos \theta)}{r^9} - \frac{(z^2 - a^2) D A_6^0 P_7^0(\cos \theta)}{r^9} - \\ &\quad \frac{(z^2 - a^2) N A_6^0 P_8^0(\cos \theta)}{r^9},\end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}\sigma_6^2(R, \varphi, \vec{z}) &= \frac{W A_6^2 P_6^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^6} + \frac{Q A_6^2 P_7^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^6} + \\ &\quad \frac{(z^2 - a^2) E A_6^2 P_6^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^9} - \frac{(z^2 - a^2) D A_6^2 P_7^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^9} \\ &\quad \frac{(z^2 - a^2) N A_6^2 P_8^2(\cos \theta) \cos(2\varphi)}{r^9},\end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}\sigma_6^4(R, \varphi, \vec{z}) &= \frac{W A_6^4 P_6^4(\cos \theta) \cos(4\varphi)}{r^8} + \frac{Q A_6^4 P_7^4(\cos \theta) \cos(4\varphi)}{r^8} + \\ &\quad \frac{(z^2 - a^2) E A_6^4 P_6^4(\cos \theta) \cos(4\varphi)}{r^9} - \frac{(z^2 - a^2) D A_6^4 P_7^4(\cos \theta) \cos(4\varphi)}{r^9} \\ &\quad \frac{(z^2 - a^2) N A_6^4 P_8^4(\cos \theta) \cos(4\varphi)}{r^9},\end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\sigma_6^6(R, \varphi, \bar{z}) = \frac{W A_6^6 P_6^6(\cos \theta) \cos(6\varphi)}{r^8} + \frac{Q A_6^6 P_7^2(\cos \theta) \cos(6\varphi)}{r^8} + \frac{(z^2 - a^2) E A_6^6 P_6^6(\cos \theta) \cos(6\varphi)}{r^9} - \frac{(z^2 - a^2) D A_6^6 P_7^2(\cos \theta) \cos(6\varphi)}{r^9} - \frac{(z^2 - a^2) N A_6^6 P_8^4(\cos \theta) \cos(6\varphi)}{r^9} \quad (3-20)$$

Las parámetros utilizados en el cálculo son:

Submodelo	$a$	$b$	$A_0^0$	$A_2^0$	$A_2^2$	$A_4^0$	$A_4^2$	$A_4^4$	$A_6^0$	$A_6^2$	$A_6^4$	$A_6^6$
<i>i</i>	1	2.5	200	250	80	180	80	50	190	60	50	40
<i>ii</i>	0.9	2.3	220	250	110	150	30	40	70	50	20	30
<i>iii</i>	1.6	3.5	280	195	70	230	80	40	25	50	35	20
<i>iv</i>	1.2	2.9	270	350	180	220	120	70	55	70	80	30

Tabla 3.4: Valores de los parámetros con los cuales se construyeron las iso-superficies, iso-contornos, curvas y con los que se calcularon los valores de  $M$ . Las unidades de  $a, b$  se consideran en  $Kpc$ .

En este modelo se nota que la función densidad tiene un comportamiento físico aceptable Figuras (3.4 - 3.4 - 3.4 - 3.4),, además muestra grandes pruebas de la falta de simetría axial, como la presencia de los máximos y de las regiones cercanas al centro que logran valores mucho menores que el central. Es importante destacar que en el manejo de las contantes  $A_{2\ell}^{2m}$ , se notó que las contantes que dan peso a las contribuciones  $\sigma_6^2(R, \varphi, \bar{z})$ ,  $\sigma_6^4(R, \varphi, \bar{z})$ ,  $\sigma_6^6(R, \varphi, \bar{z})$ , debían ser de poco valor, pues de lo contrario arrojaban densidades con zonas negativas. En este modelo también los máximos se desarrollan cuando de un submodelo a otro la fracción  $b/a$  se hace más pequeña y las contantes  $A_{2\ell}^0$  aumentan; también las curvas logran mostrar como el modelo  $n = 3$  está en capacidad de representar regiones centrales debido a su adecuado comportamiento.

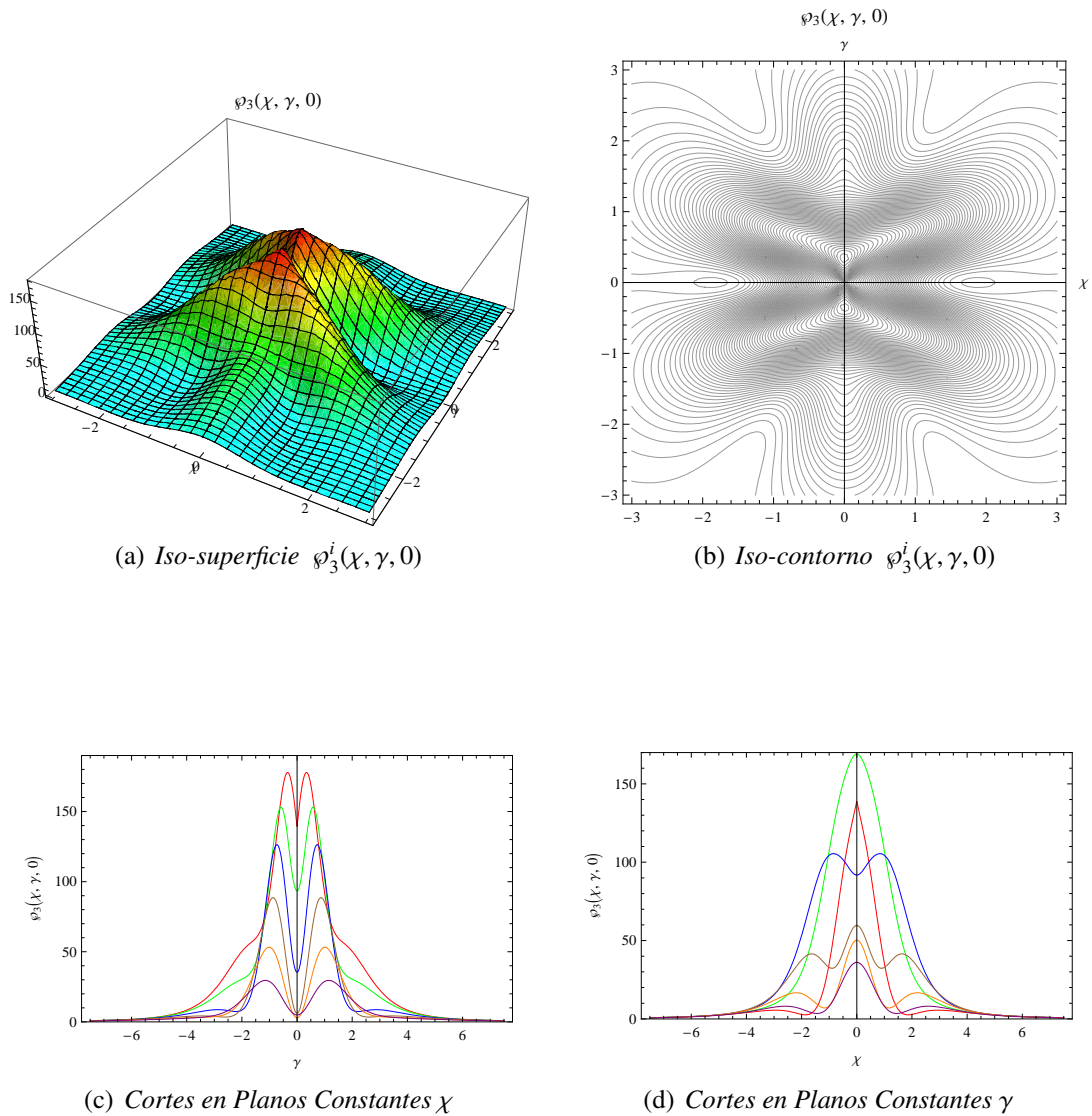


figura 3.13: Resultados gráficos de  $\varphi_3^i(\chi, \gamma, 0)$ , con los valores de  $a$ ,  $b$  y  $A_{2\ell}^{2m}$  definidos en la tabla (3.4). La iso-superficie muestra como  $\varphi \geq 0$ , además se ve como ella logra un valor finito en el centro y como a pocas unidades tiene valores que son de poco porcentaje al de los valores centrales. El iso-contorno muestra un comportamiento diferente al de los modelos anteriores, marcado por la presencia de protuberancias centrales que expresan más propiedades sin simetría axial del modelo. Los colores rojo, verde, azul, café, naranja, y púrpura, en (c) y (d), representan los cortes de  $\chi$  y  $\gamma$  en los planos constantes: 0, 1/2, 1, 3/2, 2 y 5/2 respectivamente. Por el comportamiento de las curvas se dice que el submodelo es apropiado para describir la región central de galaxias barradas.

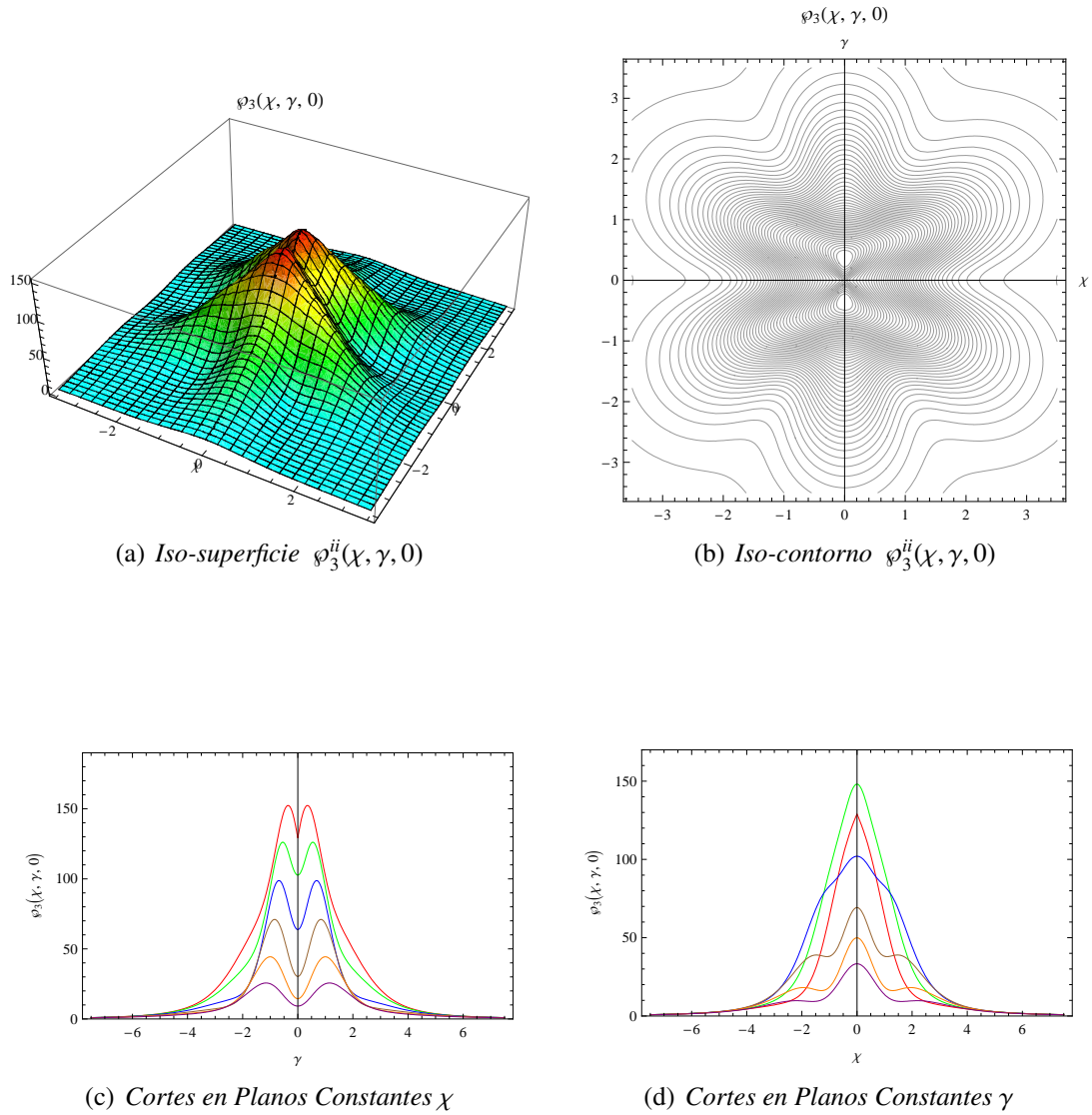


figura 3.14: Resultados gráficos de  $\varphi_3^{ii}(\chi, \gamma, 0)$ , con los valores de  $a$ ,  $b$  y  $A_{2\ell}^{2m}$  definidos en la tabla (3.4). En (a) se nota como la función densidad cumple con ser positiva, además se ve como la que logra un valor finito en el centro y como a pocas unidades sus valores que son inapreciables. El iso-contorno muestra que la protuberancia central corresponde a una zona elongada. Los colores rojo, verde, azul, café, naranja, y púrpura, en (c) y (d), representan los cortes de  $\chi$  y  $\gamma$  en los planos constantes: 0, 1/2, 1, 3/2, 2 y 5/2 respectivamente. Las características no simétricas del modelo se explican por la presencia del pseudobulbo en la región circunuclear de las galaxias espirales barradas.

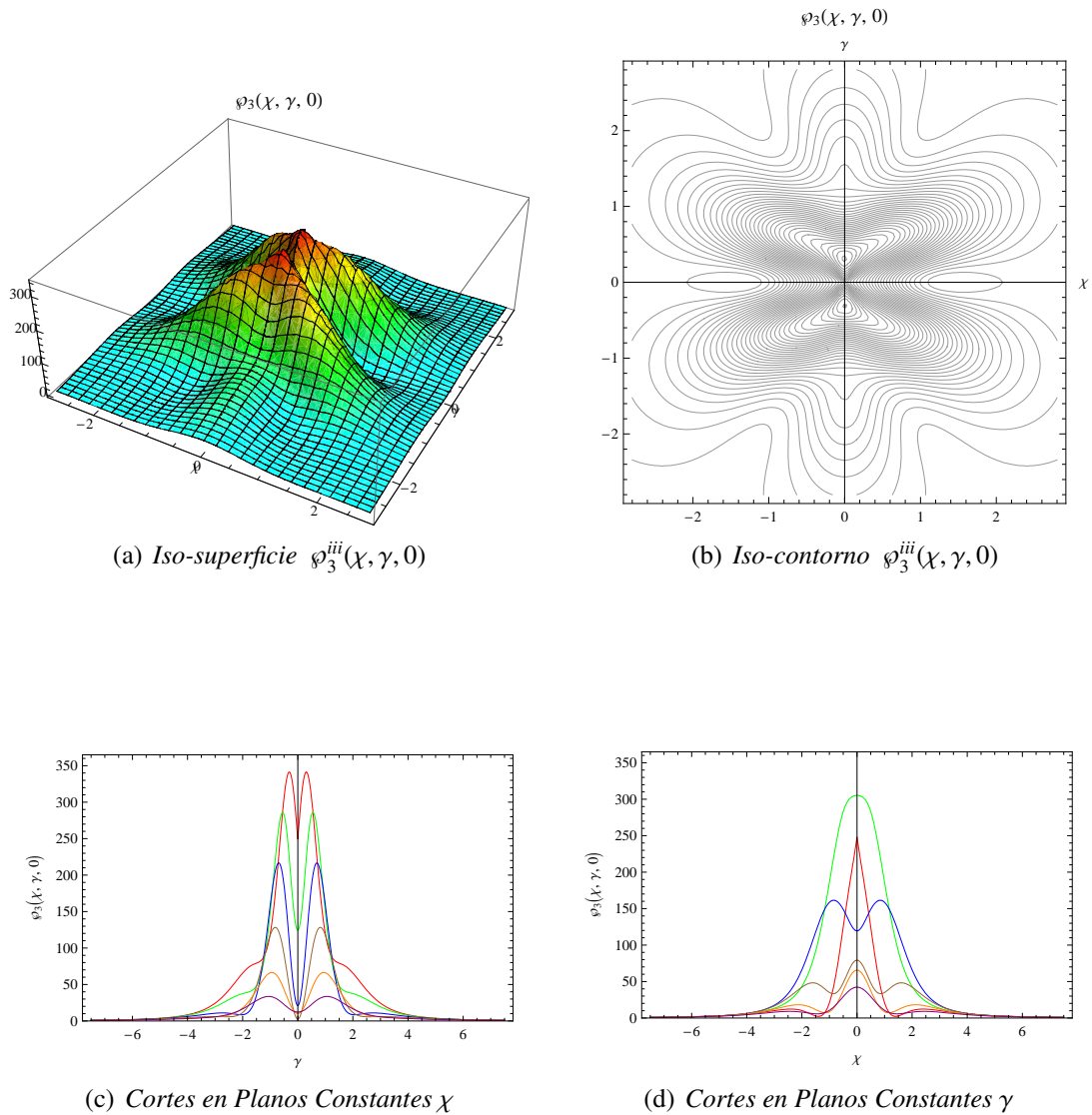


figura 3.15: Resultados gráficos de  $\varphi_3^{iii}(\chi, \gamma, 0)$ , con los valores de  $a$ ,  $b$  y  $A_{2\ell}^{2m}$  definidos en la tabla (3.4). En (a) se nota como la función densidad cumple con ser positiva, además se ve como ella logra un valor finito en el centro y como a pocas unidades tiene valores que son inapreciables. En (b) se muestran cualidades que reflejan la falta de simetría axial del submodelo, afirmación que se puede comprobar en las curvas (c) y (d). Los colores rojo, verde, azul, café, naranja, y púrpura, en (c) y (d), representan los cortes de  $\chi$  y  $\gamma$  en los planos constantes: 0, 1/2, 1, 3/2, 2 y 5/2 respectivamente.

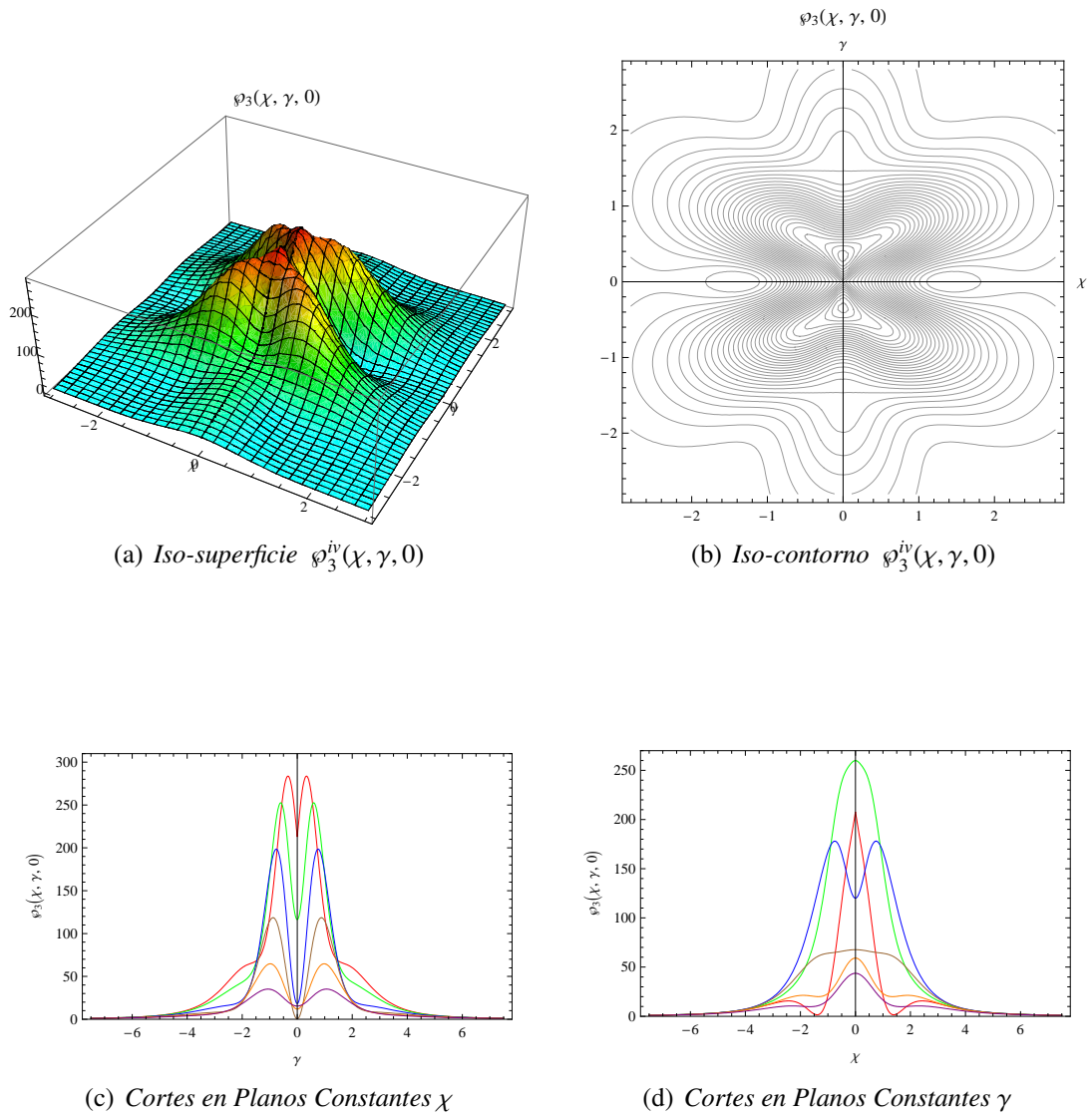


figura 3.16: Resultados gráficos de  $\varphi_3^{iv}(\chi, \gamma, 0)$ , con los valores de  $a$ ,  $b$  y  $A_{2\ell}^{2m}$  definidos en la tabla (3.4). En la iso-superficie se nota como  $\varphi \geq 0$ , además muestra como logra un valor finito en el centro y como a pocas unidades sus valores son insignificantes. En (b) se muestran las cualidades no simétricas del submodelo, las cuales son relacionadas con la existencia del pseudobulbo en la parte central de región circunnuclear de las galaxias barradas. Los colores rojo, verde, azul, café, naranja, y purpura, en (c) y (d), representan los cortes de  $\chi$  y  $\gamma$  en los planos constantes: 0, 1/2, 1, 3/2, 2 y 5/2 respectivamente.

### 3.5. Valores de la Masa

El cálculo del valor de la masa se realiza siguiendo el planteamiento de la Sección (2.6). El cálculo del valor  $\mathcal{M}$  se plantea en todo el disco a pesar que el estudio está particularizado a la región central o región circunnuclear. Éste valor aproximado<sup>†</sup> se basa en la morfología de las iso-superficies, pues en ellas se ve como la función densidad tiene una zona central pronunciada y luego decae abruptamente a valores de muy pequeño porcentaje del valor central.

Calcular a  $\mathcal{M}$  de ésta manera permite enunciar dos estrategias del proyecto. El cálculo de la masa en todo el volumen del disco constituye la manera más natural de mostrar que la función densidad de masa decae de tal forma que después de cierto punto sus contribuciones son insignificantes. La otra intención es por un motivo computacional, al plantear la integral (2.59) con el infinito como límite superior de la integral, permite que el cálculo sea más sencillo.

El cálculo de  $\mathcal{M}$  se plantea siguiendo la relación  $\mathcal{M} = \frac{a\widetilde{\mathcal{M}}}{4\pi G}$  que sugiere la tabla (2.1): donde  $\widetilde{\mathcal{M}}$  corresponde a la integral (2.59). Los valores de la masa del disco para cada submodelo se organizan en la tabla (3.5). Las unidades y constantes utilizadas son:  $1 \text{ Kpc} = 3,086 \times 10^{19} \text{ m}$ ,  $G = 6,672 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{Kgs}^2$ .

Submodelo	<i>i</i>	<i>ii</i>	<i>iii</i>	<i>iv</i>
$n = 0$				
$\mathcal{M} \times 10^{37}$	6.71	5.37	5.14	4.86
$\mathcal{M}(M_{\odot}) \times 10^7$	3.37	2.70	2.58	2.44
$n = 1$				
$\mathcal{M} \times 10^{37}$	1.87	13.03	12.56	7.45
$\mathcal{M}(M_{\odot}) \times 10^7$	0.94	6.55	6.31	3.74
$n = 2$				
$\mathcal{M} \times 10^{37}$	8.13	12.04	8.62	10.28
$\mathcal{M}(M_{\odot}) \times 10^7$	4.09	6.06	4.33	5.16
$n = 3$				
$\mathcal{M} \times 10^{37}$	13.36	12.57	28.58	22.99
$\mathcal{M}(M_{\odot}) \times 10^7$	6.71	6.32	14.38	11.56

Tabla 3.5: Valores de la región circunnuclear en masa solares  $M_{\odot}$ . El valor de  $\mathcal{M}$  es en Kg.  $M_{\odot} = 1,9884 \times 10^{30} \text{ Kg}$  [6].

<sup>†</sup>Pues aquí es imposible tener en cuenta la cantidad de materia oscura de disco galáctico

# Conclusiones

---

Con el fin de interpretar nuestros resultados se plantea un análisis de la función densidad 2.57 tanto matemático como gráfico, este último de carácter cualitativo. La función densidad de los modelos debe cumplir ciertos requisitos matemáticos y físicos:  $\rho$  debe ser una función positiva en todo la puntos del disco, pues de lo contrario no tendría sentido físico; además, debe partir de un valor finito en el centro y decaer hasta la condición que en el infinito su valor sea inapreciable.

Un punto destacable en el proyecto es el manejo de los parámetros o constantes:  $a$ ,  $b$  y  $A_{2\ell}^{2m}$ , presentes en la función la densidad (2.57). El manejo de estos no sigue regla alguna; y solo se contemplan como validos aquellos que permiten que  $\rho$  converja en el límite del disco y que  $\rho \geq 0$ . Los parámetros  $a$  y  $b$  son relacionados con el espesor del disco y con el valor que evita la singularidad en cero respectivamente, donde se debe cumplir que  $b \geq a$ . Acerca de cada constante  $A_{2\ell}^{2m}$  se concluye que éstas cumplen con dar peso a su respectiva contribución  $\sigma_{2\ell}^{2m}(R, \varphi, \bar{z})$ ; de esta manera, manipulando las constantes se impone el carácter al disco, pues se controla el comportamiento de la parte simétrica y la no simétrica. En los distintos cálculos de las iso-superficies e iso-contornos se nota que las  $A_{2\ell}^{2m}$  de las contribuciones simétricas debían ser mayores que las no simétricas.

Con base en lo anterior, se analizó para qué situaciones un modelo maximiza sus valores centrales, llegándose a dos conclusiones. La primera se basa en la idea de que el valor de  $a$  aumente y el valor de  $b$  disminuya, condición que se resume en que sí la razón  $b/a$  disminuye de un submodelo a otro, los valores centrales aumentan. La segunda condición, se basa en que el pico central es proporcional al valor de las constantes  $A_{2\ell}^0$ . Finalmente, las características sin simetría de la parte central van ligadas al valor de las constantes  $A_{2\ell}^{2m}$  para  $m \geq 1$ .

Lo interesante de los modelos planteados, es que, aunque el modelamiento matemático se realice para todo un disco infinito, solo se obtienen valores apreciables en la zona central. Lo cual muestra que las densidades  $\rho_0$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $\rho_3$  tienen un comportamiento matemático y físico aceptable, el cual se evidencia en sus iso-superficies e iso-contornos, los cuales expresan acumulaciones de masa en la parte central que siguen un patrón alargado o elongado y muestran propiedades que son prueba de la falta de simetría axial. La zona en donde se identifica que la densidad logra valores significativos, se entiende como la parte que modela la región circunnuclear de una galaxia espiral barrada.

Las partes centrales de nuestros modelos además de expresar grandes acumulaciones de masa, muestran el modelamiento de un pseudobulbo, pues como se sabe, éste se relaciona con las características axialmente no simétricas, y éstas a su vez lo que hacen es reflejar la evolución secular que presentan las

---

galaxias espirales barradas. El único modelo que no está en capacidad de caracterizar dicha estructura es el modelo del límite  $n = 0$ , describiéndose un modelo totalmente simétrico que está en capacidad de simular un bulbo clásico, pues cumple con la condición de ser diferente al resto del disco ya que no presenta alguna otra protuberancia alrededor de su máximo central.

En el modelo  $\rho_1$  (3.8), se ve como se presenta una distribución extendida en la parte central con la presencia de dos picos que se asocian a las propiedades de la región circunnuclear; en todos las iso-superficies de los submodelos para  $n = 1$ , se nota como la densidad decae de forma tal que solo es capaz de representar el área central, ya que después de 4 unidades, su valor aproximadamente es inapreciable. En  $\rho_2$  (3.12), sobresalen propiedades que lo diferencian de los anteriores modelos. En éste modelo los valores centrales se definen más, y aparecen zonas con valores significativos pero menores que los de la parte central; las cuales en una primera aproximación se pueden interpretar como lugares donde nacen los brazos de la galaxia. Sin embargo, luego la densidad decae de manera similar a como sucede en los modelos preliminares.

Por último, el modelo  $\rho_3$  (3.16) constituye el modelo con más características que evidencian la falta de simetría axial. Aquí se notan más protuberancias menores que el central, las cuales pronto desaparecen. Ésto se refleja en las iso-superficies  $\varphi_3$ , pues ellas decrecen un radio menor que 3. Los iso-contornos de los modelos sirven para analizar las distribuciones elongadas de materia en la parte central y ayudan, de cierta manera, a expresar la presencia de una distribución semejante a una barra, lo que afianza la relación de los modelos planteados con las galaxias tipo SB.

Hasta el momento las pruebas del comportamiento aceptable de la función densidad de masa (2.57) son de carácter gráfico, pues las conclusiones llegadas hasta ahora han sido basadas en las iso-superficies e iso-contornos. Pero para garantizar el carácter de  $\rho$ , se calcularon los valores de la masa del disco siguiendo la estrategia planteada en las secciones [2.6] y [3.5]. Este cálculo constituye la manera más simple y veraz de mostrar que la función densidad decrece de tal forma que hace que la integral (2.59) sea convergente, implicando que después de la parte central las contribuciones de  $\rho$  son inapreciables.

Por último, es importante destacar que nuestros modelos basados en un concepto geométrico relativamente sencillo, como lo es el método de *desplazamiento, corte, llenado y reflexión* y con la teoría newtoniana, representen de manera aceptable la región circunnuclear de galaxias tipo SB, y en ella la presencia de un pseudobulbo que envuelve elementos no simétricos como la barra. Finalmente, se concluye que los resultados cualitativos y numéricos están correlacionados con los datos observados de dichos sistemas estelares, pues las dimensiones y los valores de la masa  $\mathcal{M}$  (ver Tabla (3.5)) para la zona central están entre el rango de los valores estipulados para la región circunnuclear de una galaxia espiral barrada.

## Referencias

---

- [1] ABRAMOVITZ, Milton and STEGUN, Irene. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied Mathematics Series, Department of Commerce, National Bureau of Standards, U. S. 1978.
- [2] ARFKEN, George and WEBER, Hans. *Mathematical Methods for Physicists*. 6 ed. California: Academic Press, 2008.
- [3] ARGÜELLO, Alexander, *Discos gruesos como modelos newtonianos de galaxias axialmente simétricas*. Trabajo de grado Físico. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Física, 2006.
- [4] BATEMAN, Harry. *Higher Transcendental Functions*. vol. 1. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [5] BATEMAN, Harry. *Partial Differential Equations*. New York: Dover Publications, 1944.
- [6] BINNEY, James and TREMAINE, Scott. *Galactic Dynamics*. 2 ed. New Jersey: Princeton University Press, 2008.
- [7] BUTA, Ronald and ZHANG, Xiaolei. *Pattern Corotation Radii from Potential-Density Phase-Shifts for 153 OSUBGS Sample Galaxies*. 2009, En: [arXiv:0903.4695v1](#).
- [8] DE GRIJS, R. PELETIER R. and VAN DER KRUIT, P. *The z-structure of disk galaxies towards the galaxy planes*. En: *Astron. & Astroph.* 1997, vol. 327, p. 966-982
- [9] DE VAUCOULEURS, Gerard. *Classification and Morphology of external galaxies*. En: *Handbush der Physik*. 1959, vol. 53, p. 275-310
- [10] DE VAUCOULEURS, Gerard. *External Galaxies and ocasistellar objects*. En: *Astroph. J. Suppl. Ser.* 1975, vol. 29, p. 193
- [11] DÍAZ, Angeles, *et al.* *Properties of the ionized gas of circumnuclear star-forming regions in early type spirals*. En: *Astrophys. Space Sci.* 2009, vol. 324, p. 209-214
- [12] ELMEGREEN, Debra. *Galaxies and Galactic Structure*. New Jersey: Prentice Hall, 1998.
- [13] ENGLAIMER, Peter, POHL, Martin and BISANTZ, Nicolai. *The milky way spiral arm pattern*. *Memorie della Societa Astronomica Italiana*. 2008, En: [arXiv:0812.3491v1](#).

- 
- [14] FABER, T. *Galactic halos and gravastars: static spherically symmetric spacetimes in modern general relativity and astrophysics*. M. Sc. Thesis in Applied Mathematics, Victoria University of Wellington 2006.
- [15] FISHER, David. *Central Formation in Pseudobulges and classical bulges*. 2006, En: *arXiv:0603455v1*.
- [16] GADOTTI, Dimitri. *Structural properties of Pseudo-bulges, classical bulges and elliptical galaxies an SDSS perspective*. En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. 2009, vol. 393, p. 1531-1552
- [17] GONZÁLEZ, Guillermo and REINA Jerson. *An infinite family of generalized Kalnajs disks*. En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2006, vol. 371, p. 1873-1876
- [18] GONZÁLEZ, Guillermo and Letelier Patricio. *Exact general relativistic thick disks*. En: *Phys. Rev. D*, 2004, vol. 69, p. 69-78
- [19] HUNTER, Chris. *The structure and stability of self-gravitating disks*. En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1963, vol. 126, p. 299-315
- [20] JACKSON, John. *Classical Electrodynamics*. 3 ed. California: John Wiley & Sons Inc, 1998.
- [21] JENKINS, L. *et al.* *New insights into the X-ray properties of the nearby barred spiral galaxy NGC 1672, ESAC faculty workshop on X-rays from Nearby galaxies*. 2008, En: *arXiv:0801.2356v1*.
- [22] KALNAJS, Agris. *The equilibria and oscillations of a family of uniformly rotating stellar disks*. En: *Astrophys. J.* 1972, vol. 175, p. 63-76
- [23] KLYPIN, Anatoly, *et al.* *Dynamics of barred galaxies: effects of disk height*. En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2009, vol. 398, p. 1027-1041
- [24] KORMENDY, John and FISHER, David. *Formation and Evolution of Galaxy Disks ASP Conference Series*. 2008, Vol. 396
- [25] KORMENDY, John and KENNICUTT, Robert. *Secular evolution and the formation of Pseudobulges in disks galaxies*. En: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 2004, Vol 42.
- [26] KUZMIN, G. *A stationary model admting triaxial velocity distribution*. En: *Astron. Zh.* 1956, vol. 33, p. 27
- [27] LAURIKAINEN, E, *et al.* *Properties of bars and bulges in the Hubble Sequence*. En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2007, vol. 381, p. 401-417
- [28] MELO, Diego. *Reconstrucción de lluvias de partículas, análisis de los primeros datos y extensión híbrida del detector de fluorescencia a energías  $\leq 10^{18}$  eV*, Trabajo de grado Doctor en Ciencia y Tecnología. Argentina: Universidad Nacional de General San Martín, 2007.
- [29] MIYAMOTO, Massanori and NAGAI, Ryuzaburo. *Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies*. En: *Publ. Astron. Soc. Japan.* 1975, vol. 27, p. 533-543
- [30] MORSE, Philip and FESHBACH, Herman. *Methods of Theoretical Physics*. vol. 1-2. New York: Mc Graw Hill, 1953.

- 
- [31] NOWAK Nina., THOMAS, Jens and ERWIN Peter. En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* vol. 1, p. 28
- [32] NOWAK Nina, *et al.* *Do black hole masses, scale with classical bulge luminosities only? The case of the two composite pseudobulge galaxies NGC 3368 and NGC 3489.* En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2009, vol. 403, p. 646-673
- [33] OSPINA, Paolo. Potencial gravitacional and densidad superficial de masa para modelos planos finitos de galaxias no axialmente simétricas, Trabajo de grado Físico. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Física, 2006.
- [34] PANDMANABHAM, T. *Theoretical Astrophysics*. vol. 3. *s.l.* Cambridge University Press, 1977.
- [35] PELETIER, Reyner. *On classical and pseudobulges: The nature of bulges of early-type spiral.* 2007, En: *arXiv:0707.4063v2*.
- [36] PLUMMER, H., 1911, En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* vol. 28, p. 460-471
- [37] RIBYCKI, George and LIGHTMAN, Alan. *Radiative Processes in Astrophysics*. Germany: Wiley-VCH, 2004.
- [38] ROAD, Brunel. *Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics, s.l.:* Nature Publishing Group, 2001.
- [39] SATOH, Coichi. *Dynamical models of axisymmetric galaxies and their application to the elliptical galaxy NGC 4697.* En: *Publ. Astron. Soc. Japan.* 1980, vol. 32, p. 41-62
- [40] SELLWOOD J. and WILKINSON, A. *Reports on Progress in Physics*. 1993, vol. 56, p. 173-255
- [41] SHU, Frank. *An Introduction to Astronomy*. California: University Science Books, 1982.
- [42] SPINAR, Hyron. *Galaxy Formation and Evolution*. Chichester, UK: Praxis Publishing, 2005.
- [43] SPITZER, Lyman. *Physical Processes in the Intelestellar Medium*. Birkash: Wiley-VCH, 2004.
- [44] TOOMRE, Alar. *On the distribution of matter within highly flatened galaxies.* En: *Astrophys. J.* 1963, vol. 138, p. 385-392
- [45] VOGT, David and LETELIER, Patricio. *New models of general relativistic static thick disks.* En: *Phys. Rev. D.* 2005, vol. 71, p. 69-77