ASPECTOS DE LA TEORÍA DE RETÍCULOS Y ALGUNAS APLICACIONES

Melissa Silva Gélvez

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga

2007

ASPECTOS DE LA TEORÍA DE RETÍCULOS Y ALGUNAS APLICACIONES

Melissa Silva Gélvez

Trabajo de grado presentado como
requisito parcial para optar al título de

Licenciada en Matemáticas

Director
M.Sc. Rafael Fernando Isaacs Giraldo

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bucaramanga

2007

Un matemático francés dijo:
"Una teoría matemática no debe ser considerada
completa hasta que sea tan clara de entender
que pueda ser explicada al primer hombre
que pase por la calle".
(Hilbert, 1900)

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a:

Dios, que me ha dado la vida para realizar mis sueños.

La Santísima Virgen María, por ser mi dulce compañía.

Luz Stella Gélvez y Narciso Silva, mis maravillosos padres, quienes han sido un ejemplo para mí, por toda su comprensión y cariño.

Pebbles y Javy, mis adorados hermanos, por todo su amor.

El profesor Rafael Fernando Isaacs, mi admirable director, por su colaboración, paciencia y dedicación en la realización del presente trabajo.

Todos los profesores por la formación y orientación brindada durante mis estudios.

Mis tíos y sus respectivas familias, por su gran cariño.

Mi tío Rafita Q.E.P.D.

Félix Páez, por todo su afecto y apoyo incondicional.

Mis grandes amigos Co, Nico, Adri, Juankis, Giss, y Caro por su valiosa amistad.

Nubia Moreno, Rosalba Puentes y especialmente al profesor Gilberto Arenas por brindarme su afecto y colaboración.

Demás familiares, amigos y compañeros que me han apoyado de alguna manera durante la carrera.

TITLE: ASPECTS OF THE LATTICE THEORY AND SOME APPLICATIONS*
AUTHOR: Melissa Silva Gélvez**

KEY WORDS: Lattice, filter, pretopologie, the lattice of filters, the lattice of pretopologies.

DESCRIPTION

In the present work, we have identified the pretopologies of an arbitrary set S in natural mode from a certain collection of filters on S. From this identification a great part of this lattice structure is studied.

In order to get a major comprehension it has taken a decision to orders the content of this document as following: At the first chapter some previous concepts about the sets partially ordered as well as some propositions are presented. At the second chapter, it is given some notions about the lattice and their properties and the results in isomorphic lattices. At the third chapter, some basic concepts about filters and the filters lattice are studied. At the fourth chapter, the pretopology concept is presented and besides it is made a short study of this one, several examples about pretopology which are not topology are shown. Additionally we characterized the pretopologies on a set S from the several collections of filters on the S set usually called neighborhood filters. The order in the set is defined on the all pretopologies in S set, Pret(S). In the last chapter, the lattice structure of the pretopologies is studied.

In each chapter a collection of exercises are proposed and some of them will have a keys for their respectively solutions. At the same way, the all document are illustrated with many examples in a didactic form in order to facilitate its comprehension.

---

*Thesis

** FACULTY OF SCIENCES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR M.Sc. Rafael Fernando Isaacs Giraldo.

TITULO: ASPECTOS DE LA TEORÍA DE RETÍCULOS Y ALGUNAS APLICACIONES*
AUTOR: Melissa Silva Gélvez**

PALABRAS CLAVES: Retículo, filtros, pretopología, retículo de los filtros, retículo de las pretopologías.

DESCRIPCIÓN

En el presente documento se identifican las pretopologías de un conjunto arbitrario S de manera natural a partir de cierta colección de filtros sobre S, y de esta identificación se estudia gran parte de la estructura de este retículo.

Para una mayor comprensión, se ha decidido organizar el contenido de este documento de la siguiente forma: En el primer capítulo se exponen algunos conceptos previos sobre conjuntos parcialmente ordenados y algunas proposiciones. En el segundo capítulo se dan algunas nociones sobre retículos, propiedades y resultados en retículos isomorfos. En el tercer capítulo, se trabajan algunos conceptos básicos de filtros y se estudia el retículo de los filtros. En el cuarto capítulo, se introduce el concepto de pretopología, se hace un breve estudio de las mismas, mostramos algunos ejemplos de pretopologías sobre un conjunto que no son topologías, y caracterizamos a las pretopologías sobre un conjunto S a partir de cierta colección de filtros sobre S llamados filtros de Vecindades. Se define un orden en el conjunto de todas las pretopologías sobre un conjunto S, Pret(S). En el quinto capítulo, se estudia la estructura del retículo de las pretopologías.

En cada capítulo se proponen ejercicios, de los cuales algunos en el último capítulo tendrán ciertas claves para su solución. De igual manera todo el documento viene ilustrado con ejemplos de forma didáctica para facilitar aún más su comprensión.

---

*Tesis

** FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR M.Sc. Rafael Fernando Isaacs Giraldo.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Gran parte del presente escrito está basado en el artículo “The Lattice of Pretopologies on an Arbitrary Set S” de Allan M. Carstens [2]. Allí se identifican las pretopologías de un conjunto S de manera natural a partir de cierta colección de filtros sobre S, y de esta identificación se estudiará gran parte de la estructura de este retículo.

Para una mayor comprensión, se ha decidido organizar el contenido de este documento de la siguiente forma: En el primer capítulo se exponen algunos conceptos previos sobre conjuntos parcialmente ordenados y algunas proposiciones. En el segundo capítulo se dan algunas nociones sobre retículos, propiedades, resultados en retículos isomorfos y ciertas proposiciones. En el tercer capítulo, se trabajan algunos conceptos básicos de filtros y se estudia el retículo de los filtros. En el cuarto capítulo, se introduce formalmente el concepto de pretopología, se hace un breve estudio de las mismas, mostramos algunos ejemplos de pretopologías sobre un conjunto que no son topologías, y caracterizamos a las pretopologías sobre un conjunto S a partir de cierta colección de filtros sobre S llamados filtros de Vecindades. También definimos un orden en el conjunto de todas las pretopologías sobre un conjunto S. $\mathrm{Pret}(S)$. En el quinto capítulo, se estudia la estructura del retículo de las pretopologías. En este capítulo a partir de proposiciones mencionadas por Carstens, se han generado otras para caracterizar los co-átomos de $\mathrm{Pret}(S)$.

En cada sección se proponen ejercicios, de los cuales algunos en la sexta sección tendrán ciertas claves para su solución. De igual forma todo el documento viene ilustrado con ejemplos de forma didáctica para que sirva de guía en próximos trabajos.

Con éste trabajo espero familiarizar a los estudiantes de pregrado con temas bastante interesantes que poco a poco se han venido trabajando como lo son los retículos, el retículo de los filtros, el retículo de las pretopologías de un conjunto arbitrario y lo que ello implica, por lo tanto se ha generado una gama de ejemplos que facilitan aún más su comprensión. Se concluye con la solución a algunos de los ejercicios propuestos en cada sección.

APORTES

Para el desarrollo de este trabajo prácticamente me basé en el artículo de Allan Carstens [2], y como aporte a éste, desarrollé algunas afirmaciones y proposiciones que estaban planteadas en el libro de ČECH [3] como lo son las afirmaciones 4.2, 4.3, 4.4, y para el caso de la Proposición 4.2, nace a partir de la Afirmación 4.5. Ahora de la definición de orden de las pretopologías 5.1, se creó la Afirmación 5.1. El capítulo 5, es prácticamente realizado a partir de consecuencias de otras afirmaciones y es donde se dá parte de la estructura del retículo de la pretopologías, es decir, creé las afirmaciones 5.2, 5.3, y 5.5 a partir de la definición del orden en $\mathrm{Pret}(S)$, la Afirmación 5.4 se creó con base en el artículo de Carstens [2] y a partir de las Proposición 4.2 y de la Afirmación 5.1. Como consecuencia de las afirmaciones 5.2, 5.3, 5.4, y 5.5 se obtuvo la Proposición 5.1. Y por último las proposiciones 5.2 y 5.3 se crean con base en el artículo de Carstens [2], de la sección 2 las proposiciones 1 y 2, y de la sección 3 la Proposición 6.1.2.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En esta sección damos algunas nociones básicas sobre conjuntos, retículos, filtros sobre un conjunto que usaremos a lo largo de este escrito.

Definición 1.1. Si X es un conjunto cualquiera, la colección de todos los subconjuntos de X es un conjunto que se denota $\mathcal{P}(X)$ y se llama el conjunto "partes de X".

Ejemplo 1.1. Si $X = \{s, m, j\}$ entonces

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{s\}, \{m\}, \{j\}, \{s, m\}, \{s, j\}, \{m, j\}, \{s, m, j\}\}.$$

Si X es un conjunto finito con n elementos, entonces $\mathcal{P}(X)$ contiene 2^n elementos.

Definición 1.2. Un conjunto se dice que es **parcialmente ordenado**, si el par $(X, \leq)$ donde X es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación binaria en X que cumple con las siguientes propiedades:

1. Reflexiva, si para todo $x \in X$ se cumple que $x \leq x$.

2. Antisimétrica, si para todo $x, y \in X$ se cumple que $x \leq y$, e, $y \leq x$ entonces $x = y$.

3. Transitiva, si para todo $x, y, z \in X$, $x \leq y$, e, $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

Ejemplo 1.2.

1. Los enteros positivos con la relación "ser menor o igual a" forman un conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, \leq)$.
2. Los naturales unidos con el cero (que lo denotamos por $\mathbb{N}_0$) y la relación "ser divisor de" ($|$) forman un conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{N}_0, |)$.

Definición 1.3. Dado $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado,

1. u es el **máximo** si para cada $x \in X, x \leq u$;
2. w es el **mínimo** si para cada $x \in X, w \leq x$.

Definición 1.4. Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq X$. Una **cota superior** para A en X es el elemento x que está por encima de todos los elementos de A, es decir:

$$s \text{ es cota superior de } A \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \leq s).$$

Se define una **cota inferior** para A, como el elemento que está por debajo de todos los elementos de A, es decir:

$$m \text{ es una cota inferior de } A \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow m \leq x).$$

Cuando existe por lo menos una cota superior se dice que A es **acotado superiormente**, si admite al menos una cota inferior se dice que A es **acotado inferiormente**. Por último se dice que A es acotado, si esta acotado tanto superior como inferiormente.

Ejemplo 1.3. Sea $(S, |)$ donde $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 20\}$, es un conjunto parcialmente ordenado con respecto a la relación $|$ "ser divisor de". Si tomamos $M \subseteq S$, $M = \{2, 5\}$ entonces 1 y 5 son cotas inferiores de M, y 10 y 20 son cotas superiores de M, por lo tanto M es acotado.
Ahora si tomamos el conjunto $R = \{9, 6\}$, $R \subseteq S$ entonces este conjunto no está acotado superiormente pero sí inferiormente por 1 y 3.

Definición 1.5. Dado A, B conjuntos parcialmente ordenados la aplicación $f : A \to B$ es un **homomorfismo** si satisface la siguiente condición:
para cada par $x, y \in A$, $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$.

Definición 1.6. Sean A y B conjuntos parcialmente ordenados, la aplicación $\varphi : A \to B$ es llamada un **isomorfismo**, si es biyectiva y satisface la siguiente condición:
para cada par $x, y \in A$, $x \leq y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$.

Ejemplo 1.4. Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$ conjuntos parcialmente ordenados como se muestra en la Figura 1.4, sea $f : A \to B$ un homomorfísmo de orden; se puede pensar que habrá problemas al tomar el par $b, c \in A$, pero resulta que éste como no cumple que $c \leq b$, ni $b \leq c$ entonces se acepta el resultado.

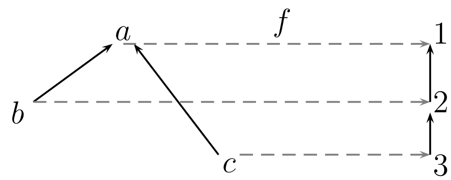

Figura 1.1:

Aunque f es homomorfismo de orden biyectivo no es isomorfismo. Podemos ver que f^{-1} no es homomorfismo de orden, para ello tomamos el par $2, 3 \in B$, $3 \leq 2 \Rightarrow f^{-1}(3) \leq f^{-1}(2)$ lo cual no se cumple porque $f^{-1}(3) = c$, y ,$f^{-1}(2) = b$ de lo que se tendría que $c \leq b$ y esto es falso. Luego un homomorfísmo de orden biyectivo entre conjuntos parcialmente ordenados no implica un isomorfismo.

Definición 1.7. Dado el conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ y $A \subseteq X$ acotado superiormente, llamamos **supremo** de A (denotado por $supA$) a la menor de las cotas superiores. Es decir, $supA$ es el Supremo de A si y sólo si $supA$ es cota superior de A y para cada cota superior s de A; $supA \leq s$. Análogamente, dado $(X, \leq)$ y $A \subseteq X$ acotado inferiormente, se define el **infimo** de A ($infA$) a la mayor de las cotas inferiores. Es decir, $infA$ es el infimo de A si y sólo si $infA$ es cota inferior de A y para cada cota inferior m de A, $m \leq infA$.

Ejemplo 1.5.

1. $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, es (en su totalidad) acotado inferior pero no superiormente, tiene inf pero el sup no existe, el $inf\ \mathbb{Z}^+ = 0$.

2. $(\mathbb{N}_0, |)$ un conjunto parcialmente ordenado ver Ejemplo (1.2), es acotado inferior y superiormente, tiene sup e inf, son 0 y 1 respectivamente. De aquí podemos afirmar que cualquier subconjunto finito no vacío tiene sup e inf.

A manera de conclusión citamos el siguiente teorema que va a ser muy útil para la sección de retículos, más especificamente cuando se trabaje con retículos completos.

Teorema 1.1. Sea A un conjunto parcialmente ordenado, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. cada subconjunto de A tiene un sup;

2. cada subconjunto de A tiene un inf.

Demostración. Asumimos que se tiene (1.), luego A tiene un *sup*, que es necesariamente el elemento más grande de A, y $\emptyset$ tiene un *sup*, que es el elemento más pequeño de A. Sea M el elemento más grande de A, y sea m el elemento más pequeño de A. Entonces tomemos un subcojunto de A, $B \subseteq A$, si $B = \emptyset$ entonces $inf\ B = M$; si $B \neq \emptyset$ entonces es acotado inferiormente por m, ahora como todo subconjunto no vacío de A que es acotado inferiormente tiene un inf, B tiene inf. De igual forma se garantiza el dual. ■

CAPÍTULO 2

RETÍCULOS

La terminología y notación de esta subsección es tomada de [6] con excepción de las definiciones 2.5 y 2.6 las cuales son tomadas de [5] así como los términos co-átomo, co-atómico, co-cubrimiento y co-compactamente generado que usaremos para la noción dual de átomo, atómico, cubrimiento y compactamente generado respectivamente.

Definición 2.1. Si $(S, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y para cada par de elementos $x, y \in S$ exiten tanto $inf\{x, y\}$ como $sup\{x, y\}$ decimos que $(S, \leq)$ es un **retículo**.

Notación:

- Para cada $x, y \in S$ se nota $inf\{x, y\} = x \wedge y$ mientras $sup\{x, y\} = x \vee y$.
- Si S tiene un elemento mínimo lo notamos por 0 o $\perp$ y si tiene un elemento máximo lo notamos por 1 o $\top$.

Ejemplo 2.1. 1. Sea $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$ el conjunto parcialmente ordenado, por la relación de inclusión. Para cualquier $x, y \subseteq \mathcal{P}(\{a, b, c\})$, el $sup\{x, y\}$ es precisamente $x \cup y$, y, el $inf\{x, y\}$ es $x \cap y$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \{b,c\} \arrow[rr] & & \{a,b,c\} \\
\{c\} \arrow[rr] \arrow[ur] & & \{a,c\} \arrow[ur] & \\
 & \{b\} \arrow[rr] \arrow[uu] & & \{a,b\} \arrow[uu] \\
\emptyset \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[uu] & & \{a\} \arrow[ur] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.1:

Retomando este ejemplo pero sea $A \subseteq \mathcal{P}(\{a, b, c\})$, $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$ no formaría un retículo con respecto a la relación de $\subseteq$, pues si tomo el par $\{a\}, \{b, c\} \in A$ tenemos que el *sup* de A no está en A. En general $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un retículo, en el cuál el inf $\{\mathcal{P}(X)\} = \emptyset$ y el *sup* es el todo, es decir, *sup* $\{\mathcal{P}(X)\} = X$.

Ejemplo *2.2.* 1. Sea $(\mathbb{N}_0, |)$ conjunto parcialmente ordenado, es un retículo con $\perp$ y $\top$, en el que el *sup* es el mínimo común múltiplo y inf es el máximo común divisor, por lo tanto $\perp = inf\ \{\mathbb{N}_0\} = 1$ y $\top = sup\{\mathbb{N}_0\} = 0$.

2. Sabemos que al unir (o intersectar) dos subconjuntos cerrados de un espacio topológico se obtiene un conjunto cerrado. Así, los conjuntos cerrados de cualquier espacio topológico forman un retículo con respecto a las operaciones (unión e intersección). De igual forma sucede con los abiertos de un espacio topológico.

3. Sea H y K dos subgrupos arbitrarios de un grupo G. El $inf\{H, K\} = H \cap K$ denota la intersección de los subgrupos H, K (la cual es un subgrupo de G), y Y el $sup\{H, K\} = \langle H \cup K \rangle$ el subgrupo generado por H y K. Con respecto a las dos operaciones, el conjunto de todos los subgrupos de G es un retículo, el retículo de los subgrupos de G.

Nota *2.1.* A partir de la definición de retículo se generan las siguientes consecuencias. Si a y b son elementos arbitrarios de un retículo A, entonces:

- $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$ porque $a \vee b$ es una cota superior de a y b.

Además, si $c \in A$, entonces:

- $a \leq c$ y $b \leq c \Rightarrow a \vee b \leq c$, ya que si c es una cota superior de a y b, entonces $a \vee b \leq c$ porque $a \vee b$ es la menor cota superior de a y b.

De la misma forma se obtiene el caso analogo:

- $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$.
- $c \leq a$ y $c \leq b \Rightarrow c \leq a \wedge b$.

Así como en las álgebras se trabaja conceptos de subálgebras, producto de álgebras e imágen homomorfica, lo mismo sucede en los retículos, se puede observar que los retículos se pueden ver como estructuras con dos operaciones binarias ($\wedge$ y $\vee$) que tienen algunas propiedades evidentes como se representa en la siguiente proposición:

Proposición 2.1. Sea S un retículo y a, b, c cualesquiera tres elementos de S, entonces éste cumple que:

(A1) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$. (Asociatividad respecto a $\wedge$);

(A2) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$. (Asociatividad respecto a $\vee$);

(A3) $a \wedge b = b \wedge a$. (Conmutatividad respecto a $\wedge$);

(A4) $a \vee b = b \vee a$. (Conmutatividad respecto a $\vee$);

(A5) $a \wedge (a \vee b) = a$. (Absorción);

(A6) $a \vee (a \wedge b) = a$. (Absorción).

Demostración. (A2) Primero se prueba que

$$(a \vee b) \vee c \leq a \vee (b \vee c)$$

Veamos, $a \leq a \vee (b \vee c)$ y $b \leq b \vee c \leq a \vee (b \vee c)$, luego $a \vee b \leq a \vee (b \vee c)$, de donde se tiene que $c \leq b \vee c \leq a \vee (b \vee c)$ por lo cual, $(a \vee b) \vee c \leq a \vee (b \vee c)$. La desigualdad $a \vee (b \vee c) \leq (a \vee b) \vee c$ se prueba de igual forma, por lo tanto $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$. El dual de éste resultado es $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

(A5) Para probar $a \wedge (a \vee b) = a$ debemos probar efectivamente que

$$a = Inf\{a, a \vee b\}.$$

Ahora a es cota inferior de $\{a, a \vee b\}$ porque $a \leq a \vee b$ pues $a \vee b$ es cota superior de a y de b, (ver Nota 2.1). Además, si existe c cualquier cota inferior de $\{a, a \vee b\}$, entonces $c \leq a$; así a es la máxima cota inferior de $\{a, a \vee b\}$. Esto prueba que $a \wedge (a \vee b) = a$. El dual de éste resultado es $a \vee (a \wedge b) = a$.

■

Las anteriores afirmaciones se pueden considerar como axiomas para los retículos cuando los consideramos como estructuras algebraicas con dos operaciones. Es decir, se puede ver que cualquier conjunto con dos operaciones $\wedge$ y $\vee$ que cumplan (A1)-(A6), se le puede definir un orden en donde resulta que $\wedge$ y $\vee$ son el inf y el sup respectivamente de dicho orden.

Ejercicio 2.1. Queda como ejercicio para el lector las pruebas restantes del axioma mencionado anteriormente.

Definición 2.2. Sean S_1 y S_2 retículos. La aplicación $\varphi : S_1 \to S_2$ es llamada un **homomorfísmo** (o una aplicación homomórfica) si para cada par de elementos $a, b \in S_1$ se cumple:

1. $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$;
2. $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$.

Ejemplo 2.3.

1. ¿La aplicación $\varphi : D_6 \to \mathbb{N}$ definida por:

$$\varphi(1) = 1,\ \varphi(2) = 2,\ \varphi(3) = 3 \text{ y } \varphi(6) = 4$$

   es un homomorfísmo entre los retículos $(D_6, |)$ y $(\mathbb{N}, \leq)$? La respuesta es NO. Sean $2, 3 \in D_6$ se ve que $\varphi(2 \wedge 3) = \varphi(1) = 1 \neq \varphi(2) \wedge \varphi(3) = 2 \wedge 3 = 2$, por lo tanto φ no es una aplicación homomórfica.

2. Si tomamos los retículos $(D_6, |)$ y $(D_{15}, |)$, la aplicación $\varphi : D_6 \to D_{15}$ definida por

$$\varphi(1) = 1,\ \varphi(2) = 3,\ \varphi(3) = 5, \text{ y, } \varphi(6) = 15$$

   forma un homomorfismo.

Ejercicio 2.2. Exhiba un homomorfismo en $\varphi : D_{12} \to D_{15}$.

Ejercicio 2.3. Demostrar que todo homomorfismo de retículos es un homomorfimo de orden.

Definición 2.3. Sean S_1 y S_2 retículos. La aplicación $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ es llamado un **Isomorfismo** (o una aplicación isomórfica) si φ es biyectiva, es decir, si φ, φ^{-1} son homomórficas.

Proposición 2.2. Sean S_1 y S_2 retículos. La aplicación $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ biyectiva, es un isomorfismo si y solo si, se cumple conjuntamente:

1. para cada par de elementos $a, b \in S_1$, $a \leq b \Leftrightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$;

2. para cada par de elementos $a, b \in S_2$, $a \leq b \Leftrightarrow \varphi^{-1}(a) \leq \varphi^{-1}(b)$.

Ejemplo 2.4. Los retículos $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$, y $(D_{30}, |)$ donde $\mathcal{D}_{30}$ son los divisores de 30 bajo la relación "ser divisor de" son retículos isomorfos, y además se puede ver que un Isomorfísmo entre retículos implica isomorfismo de orden.
$\varphi : D_{\mathcal{P}(\{a,b,c\})} \rightarrow D_{30}$ definida por:

$$\varphi(\{\emptyset\}) = 1,\ \varphi(\{a\}) = 5,\ \varphi(\{b\}) = 3,\ \varphi(\{c\}) = 2,\ \varphi(\{a,c\}) = 10,\ \varphi(\{a,b\}) = 15,$$
$$\varphi(\{b,c\}) = 6 \text{ y } \varphi(\{a,b,c\}) = 30.$$

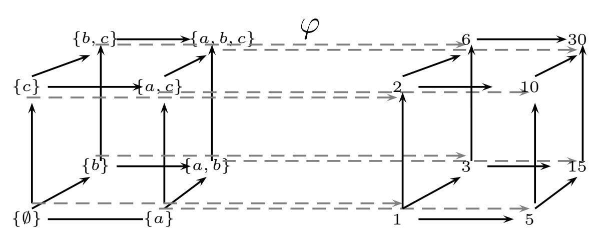

Figura 2.2:

Definición 2.4. Sean A un retículo y $B \subseteq A$. Si $x \in B$ e $y \in B$ entonces $x \vee y \in B$ y $x \wedge y \in B$, en este caso B es llamado un **subretículo** de A.

Por otro lado, se dice que un retículo $(S, \leq)$ es **completo**, si para cada $A \subseteq S$, existe el inf y el sup. Notaremos $inf(A) = \bigwedge A$ y $sup(A) = \bigvee A$.

Ejemplo 2.5.

1. $(\mathcal{D}_{30}, |)$ un conjunto parcialemente ordenado ver Figura (2.4), es un retículo con $\perp = 1$ y $\top = 30$, es completo pues es claro que para cualquier subconjunto de $\mathcal{D}_{30}$ existen el sup e inf. Si tomamos $A \subseteq D_{30}$ donde $A = \{1, 3, 5, 15\}$,

se puede ver claramente que A es un subretículo de $(D_{30}, |)$, pero si se toma a $A' = \{1, 2, 3, 5, 10\}$ aunque es un retículo con la relación $|$ es de notar que no forma un subretículo de $(D_{30}, |)$. Es preciso mencionar que siempre que $(A, \leq)$ sea un retículo, si A es finito entonces es un retículo completo.

2. Considere $(\mathbb{N}, |)$. Dados $a, b \in \mathbb{N}$ siempre existen el inf y el sup en $\mathbb{N}$, es más, el $sup\{a, b\}$ es precísamente el mínimo común múltiplo, y el $inf\{a, b\}$ es precisamente el máximo común divisor, formando así $(\mathbb{N}, |)$ un retículo. Se ve también que el conjunto de todos los divisores y el de todos los múltiplos de cualquier natural forman subretículos de $(\mathbb{N}, |)$. Este retículo no es completo, dado que no existe el sup de conjuntos infinitos, sin embargo $(\mathbb{N}_0, |)$ si es completo.

3. El retículo $(\mathbb{N}, \leq)$ no es completo, pues ¿quién sería el $sup\,\mathbb{N}$? Este retículo se puede completar tomando $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \leq)$.

Ejercicio 2.4. 1. Demostrar que efectivamente $(\mathbb{N}_0, |)$ si es un retículo completo.

2. Probar que si G es un grupo, $S(G)$ la colección de los subgrupos de G, con el orden de la inclusión es un retículo completo.

Ejercicio 2.5. Sea X un conjunto infinito y $\mathcal{P}_{fin}(X)$ la colección de subconjuntos finitos de X. Demostrar que efectivamente $(\mathcal{P}_{fin}(X), \subseteq)$ sí es un retículo pero no es completo.

Definición 2.5. Sean $(S, \leq)$ un retículo completo y $E \subseteq S$. Se dice que E es **sup-denso** ($\vee$-denso) en S, si para cada elemento $a \in S$ existe un $A \subseteq E$ tal que $a = \bigvee A$. De igual forma, E es **inf-denso** ($\wedge$-denso) en S, si para cada elemento $a \in S$ existe un $A \subseteq E$ tal que $a = \bigwedge A$.

Ejemplo 2.6. 1. En el retículo $(\mathbb{N}_0, |)$ encontramos el subretículo $(\mathbb{N}, |)$, el cuál es $\vee$-denso e $\wedge$-denso en $(\mathbb{N}_0, |)$.

2. En el retículo $(D_6, |)$ encontramos que $\{2, 3\}$ es $\vee$-denso, e,$\wedge$-denso.

Ejercicio 2.6. Considere el retículo $(\mathbb{N}_0, |)$.

1. Explique por qué los primos no son ni $\wedge$-denso ni $\vee$-denso.

2. Demuestre que E, el conjunto de números que son potencias de primos, es $\vee$-denso.

Definición 2.6. Sean $(S, \leq)$ un retículo completo y $E \subseteq S$. Se dice que E es un **esqueleto** de S si $E \neq S$ y E es simultaneamente $\wedge$-denso y $\vee$-denso en S.

Ejemplo 2.7. Sabemos que $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}),\subseteq)$ es un retículo completo, en tal caso $E \subseteq \mathcal{P}(\{a,b,c\})$ forma un esqueleto de $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$ siendo $E = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ porque E es *sup*-denso e inf-denso en $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$. También $E' = \{\{a\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$ es un esqueleto de $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}),\subseteq)$.

Definición 2.7. Sea $(S,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $x, y \in S$, se dice que y "cubre" a x, y se escribe $x \prec y$ si

1. $x < y$, y
2. $(\forall\ z \in S)(x \leq z < y \Rightarrow z = x)$.

Ejemplo 2.8.
1. Considere el retículo $(D_{15}, |)$, en éste retículo $1 \prec 3$, $1 \prec 5$, $3 \prec 15$, y $5 \prec 15$.
2. En el retículo $(D_{18}, |)$ (ver Figura 2.3) se tiene que $1 \prec 2$, $1 \prec 3$, $6 \prec 18$, y $9 \prec 18$ pero no se tiene que $2 \prec 18$, $3 \prec 18$, ni $1 \prec 6$ y $1 \prec 9$ pues si $2 \prec 18$ entonces debe cumplir por definición que $2 \leq 6 < 18 \Rightarrow 2 = 6$ lo cuál es falso porque $2 \neq 6$, y de igual forma se prueba que los demás cubrimientos enunciados no se cumplen.

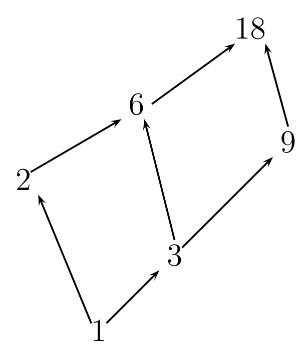

Figura 2.3:

Definición 2.8. Sean $(S,\leq)$ un retículo con 0 y 1, y $a \in S$. Se dice que a es un **átomo** en $(S,\leq)$ si $0 \prec a$. De la misma manera, se dice que a es un **co-átomo** si $a \prec 1$.

Ejemplo 2.9.
1. Considérese $(\mathbb{N}_0, |)$ retículo completo. Los átomos de $\mathbb{N}_0$ serían todos los números primos. Pero no existen co-átomos.
2. En $(D_{12}, |)$ se tiene que 2 y 3 son átomos, y, 4 y 6 son co-átomos, pues $1 \prec 2$, $1 \prec 3$, $4 \prec 12$ y $6 \prec 12$.

Ejercicio 2.7. En el retículo de los cerrados de la recta real con la topología usual de $\mathcal{R}$, cuáles son los átomos? Demuestre que no existen co-átomos; formule el resultado dual para el retículo de los abiertos.

Definición 2.9. Si $(S, \leq)$ un retículo con 0 y 1, se dice que $(S, \leq)$ es **atómico** si dado cualquier elemento $x \in S$ distinto de 0, existe un átomo $a \in S$ tal que $a \leq x$. De igual forma, se dice que $(S, \leq)$ es **co-atómico** si dado cualquier elemento $x \in S$ distinto de 1, existe un co-átomo $a \in S$ tal que $x \leq a$.

Ejemplo 2.10. En el retículo completo $(D_{12}, |)$, como se dijo anteriormente los átomos de $(D_{12}, |)$ son $2, 3$ y los co-átomos son $4, 6$, es atómico y co-atómico, pues para cada $x \in\ D_{12}$, $x \neq \perp$, existe un $a \in\ D_{12}$ tal que $a \leq x$, de igual forma es co-atómico .

Definición 2.10. Sean $(S, \leq)$ un retículo con 0 y 1, y $a \in S$. Se dice que un elemento $b \in S$ es un **complemento** de a en S, si $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$. En tal caso, se dice que a y b son complementarios.

Definición 2.11. Un retículo $(S, \leq)$ con 0 y 1, es **complementado** si todo elemento en S tiene un complemento, es decir; un retículo $(S, \leq)$ con 0 y 1 es complementado si para cada $a \in S$, existe $b \in S$ tal que $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$.
Si además, cada elemento tiene un único complemento, se dice que $(S, \leq)$ es complementado de manera única o que es únicamente complementado.

Ejemplo 2.11. En el retículo $(D_{30}, |)$, los pares de elementos complementarios son $\{1, 30\}$, $\{2, 15\}$, $\{3, 10\}$, y $\{5, 6\}$ veamos:
$1 \vee 30 = 30$ y $1 \wedge 30 = 1$; $2 \vee 15 = 30$ y $2 \wedge 15 = 1$; $3 \vee 10 = 30$ y $3 \wedge 10 = 1$; $5 \vee 6 = 30$ y $5 \wedge 6 = 1$. Por lo tanto con la definición que sigue podemos concluir que este retículo es complementado, pues todos sus elementos tienen complemento.

Ejemplo 2.12. **??**

1. $(D_{12}, |)$ es un retículo no complementado pues 2 y 3 no tienen complemento, probemos $2 \vee 6 = 12$ y $2 \wedge 6 = 2$ pero 2 no es el inf de D_{12}, ahora $2 \wedge 3 = 1$ y $2 \vee 3 = 6$ pero 6 no es el sup de D_{12}, lo mismo sucede cuando tomamos $2 \vee 4 = 4$ y $2 \wedge 4 = 2$ en este caso 2 no es el inf de D_{12} ni 4 es el sup de D_{12}, luego 2 no tiene complemento. De igual forma se prueba para 3.

2. Sea A un conjunto arbitrario y sea $\mathcal{P}(A)$ un retículo con la relación de inclusión, tenemos que $\mathcal{P}(A)$ es un retículo complementado pues cada elemento en el retículo $\mathcal{P}(A)$ posee un complemento, es decir, para cada $b \in\ A$, su complemento que es $A \setminus \{b\}$ está en A.

Ejercicio 2.8. En el retículo de los cerrados de la recta real con la topología usual de $\mathbb{R}$ ¿cuáles elementos son complementados?

Ejercicio 2.9. En el retículo de los cerrados de un espacio topológico X ¿cuáles elementos son complementados?

Definición 2.12. Un retículo $(S, \leq)$ es **modular**, si para cada $a, b, c \in S$ tales que $a \leq c$, se tiene que $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.

Ejemplo 2.13. El retículo mostrado en la Figura 2.4 es un retículo modular, es posible pensar que falla para los elementos $3, 5, 6$ veamos que sucede.
Tenemos que $3 \nleq 5$, $3 \nleq 6$ y $5 \nleq 6$ (es decir, $3, 5, 6$ son incomparables). Ahora, siendo a y b cualquiera de los siguientes elementos: 3, 5 ó 6 del retículo, entonces sólo podríamos compararlos con 1 o 30 de la siguiente forma:

- $a \vee (b \wedge 30) = (a \vee b) \wedge 30$;

- $1 \vee (b \wedge c) = (1 \vee b) \wedge c$.

Por lo tanto el retículo es modular.

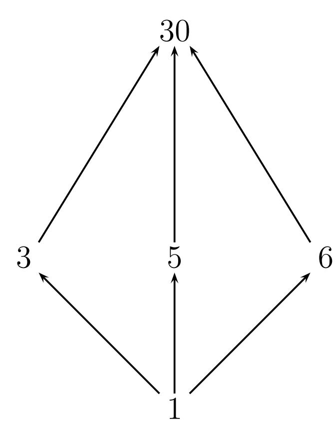

Figura 2.4:

Definición 2.13. Un retículo $(S, \leq)$ es **distributivo**, si para cada $a, b, c \in S$ se satisfacen:

i) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,

ii) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Ejemplo 2.14. 1. El retículo completo $(\mathbb{N}_0, |)$ es un retículo distributivo, para ver detalles de este hecho, consultar [6, pág. 84].

2. El retículo completo $(D_{64}, |)$ es un retículo distributivo. Tomemos los elementos $2, 4, 8 \in D_{64}$ entonces comprobemos:

$$\begin{aligned} 2 \vee (4 \wedge 8) &= (2 \vee 4) \wedge (2 \vee 8) \\ 2 \vee 4 &= 4 \vee 4 \\ 4 &= 4. \end{aligned}$$

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 16 \longrightarrow 32 \longrightarrow 64$$

Figura 2.5:

De igual forma:

$$\begin{aligned} 2 \wedge (4 \vee 8) &= (2 \wedge 4) \vee (2 \wedge 8) \\ 2 \wedge 8 &= 2 \vee 2 \\ 2 &= 2. \end{aligned}$$

Así al comprobarlo para cualesquiera $a, b, c \in D_{64}$ se demuestra que es un retículo distributivo.

3. Ahora véase que el subretículo $D_4 \subseteq D_{64}$ es modular (ver Figura 2), comprobemos tomando los elementos $1, 2, 4 \in D_4$:

$$\begin{aligned} 1 \vee (2 \wedge 4) &= (1 \vee 2) \wedge 4 \\ 1 \vee 2 &= 2 \wedge 4 \\ 2 &= 2. \end{aligned}$$

Así, claramente D_4 es un retículo modular. De igual forma, al comprobarlo para cualesquiera $a, b, c \in D_{64}$ se demuestra que D_{64} también es un retículo modular.

4. El retículo que se muestra en la Figura 2.6 es un retículo que no es distributivo pues al comparar los elementos 2, 3, y 4 de la siguiente forma se espera que

$$4 \wedge (3 \vee 2) = 4 \wedge 12 = 4 \text{y} (4 \wedge 3) \vee (4 \wedge 2) = 1 \vee 2 = 2$$

sean iguales, pero $4 \neq 2$, luego no cumple la propiedad distributiva.
Ahora veamos que tampoco es un retículo modular, si usamos los elementos 2, 3, y 4 del retículo, tal que $2 \leq 4$ se espera que

$$2 \vee (3 \wedge 4) = 2 \vee 1 = 2 \text{y} (2 \vee 3) \wedge 4 = 12 \wedge 4 = 4$$

sean iguales, pero $2 \neq 4$, luego no es un retículo modular.

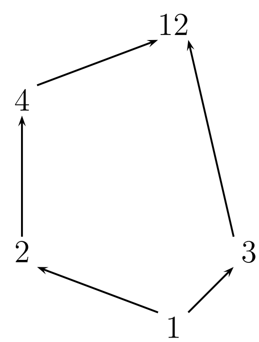

Figura 2.6:

5. El retículo mostrado en la Figura 2.4, el cual es modular pero veamos que no es distributivo, tomando los elementos 3, 5, y 6 del retículo se espera que ahí se presente el problema, probemos:
$3 \vee (5 \wedge 6) = 3 \vee 1 = 3$, y, $(3 \vee 5) \wedge (3 \vee 6) = 30 \wedge 30 = 30$, y efectivamente se presenta el problema porque $3 \neq 30$ por lo tanto éste retículo es modular pero no distributivo.

De la definición anterior se sigue que todo retículo distributivo es modular.

Ejercicio 2.10. Queda como ejercicio para el lector, demostrar que si un retículo es distributivo entonces es modular.

Nótese además, que para que un retículo sea distributivo, es suficiente con que se satisfaga alguna de las dos condiciones de la definición anterior, pues estás son equivalentes como se ve a continuación:

Proposición 2.3. Sea $(S, \leq)$ un retículo. Entonces, para cada $a, b, c \in S$ se tiene que:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \text{si y sólo si} a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Demostración.
$\Rightarrow$) Para cualesquiera elementos $a, b, c \in S$ se tiene que

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= [(a \wedge b) \vee a] \wedge [(a \wedge b) \vee c] && (\vee\text{-distribución}) \\
&= a \wedge [(a \wedge b) \vee c] && (\text{definición de } inf\{a, b\}, \text{Absorción}) \\
&= a \wedge [(a \vee c) \wedge (b \vee c)] && (\wedge\text{-distribución}) \\
&= a \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) && (\text{distributividad}) \\
&= [a \wedge (a \vee c)] \wedge (b \vee c) && \\
&= a \wedge (b \vee c) && (\text{definición de } sup\{a, c\})
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Se obtiene análogamente a la anterior intercambiando $\wedge$ y $\vee$. ■

La siguiente definición es dada debido a que más adelante se probarán algunos hechos para los cuales es necesaria su aplicación, como son los conceptos de compactos, co-compactos, compactamente generado, co-compactamente generado en los retículos.

Definición 2.14. Sean $(S, \leq)$ un retículo completo y $a \in S$. Una colección $\{b_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de elementos de S es **cubrimiento** de a, si $a \leq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} b_\gamma$. De manera dual, una colección $\{b_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de elementos de S es un **co-cubrimiento** de a, si $a \geq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} b_\gamma$.

Ejemplo 2.15. En el retículo de los cerrados en la recta real con la topología usual de $\mathbb{R}$, si tomamos el elemento $[1, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ tenemos que $[1, \infty) \leq sup[1, n]$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, luego $[1, n]$ es un cubrimiento en $\mathbb{R}$.
Ahora veamos que $[0, 1]$ por ser un elemento compacto en $\mathbb{R}$ (Teorema de Heine-Borel), es un cubrimiento en $\mathbb{R}$.
Cabe generalizar que cada elemento de la forma $[a, b]$ es un cubrimiento en $\mathbb{R}$.

Definición 2.15. Sea $(S, \leq)$ un retículo completo. Un elemento a de S es **compacto**, si para cada cubrimiento $\{b_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de a, existe un número finito $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ tales que $a \leq \bigvee_{i=1}^{n} b_{\gamma_i}$. De manera dual, $a \in S$ es **co-compacto**, si para cada co-cubrimiento $\{b_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de a, existe un número finito $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ tales que $a \geq \bigwedge_{i=1}^{n} b_{\gamma_i}$.

Definición 2.16. Un retículo completo $(S, \leq)$ es **compactamente generado**, si todo elemento de S se puede expresar como el *sup* de una colección de elementos compactos de S, es decir; un retículo completo $(S, \leq)$ es compactamente generado si el conjunto de los elementos compactos de S es $\vee$-denso en S. De manera dual, un retículo completo $(S, \leq)$ es **co-compactamente** generado si el conjunto de los elementos anti-compactos de S es $\wedge$-denso en S.

Ejemplo 2.16. En el retículo de los cerrados en la recta real con la topología usual de $\mathbb{R}$, cada cerrado en $\mathbb{R}$ se puede ver como el Sup de todos los cerrados y acotados que estén contenidos en el.

2.1. Algunos resultados en retículos isomorfos

En esta sección se trabajarán algunas propiedades enunciadas antes para los retículos pero aplicandolas ahora sobre retículos isomorfos.
Un isomorfismo preserva los *sup* e inf existentes, bajo este hecho podemos citar la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1. Si $(S, \leq), (S', \preceq)$ son conjuntos parcialmente ordenados, y $\phi : (S, \leq) \longrightarrow (S', \preceq)$ un isomorfismo de orden, y $A \subseteq S$ tal que $\bigwedge A$ y $\bigvee A$ existen, entonces

$$\phi(\bigvee A) = \bigvee \phi(A), \quad \text{y} \quad \phi(\bigwedge A) = \bigwedge \phi(A).$$

Este hecho es útil para probar que la modularidad, la distributividad y la compacidad son propiedades que se preservan bajo isomorfismos.

Afirmación 2.1.1. *Sea ϕ un isomorfismo del retículo $(S, \leq)$ en el retículo $(S', \preceq)$, si $(S, \leq)$ es distributivo entonces $(S', \preceq)$ es distributivo.*

Demostración. Si ϕ es un isomorfismo del retículo $(S, \leq)$ en el retículo $(S', \preceq)$, por ser ϕ biyectiva se tiene que para cada $a', b', c' \in S'$ existen $a, b, c \in S$ únicos tales que

$\phi(a) = a'$, $\quad \phi(b) = b'$ y $\phi(c) = c'$. Luego si $(S, \leq)$ es distributivo, tenemos que:

$$\begin{aligned} a' \wedge (b' \vee c') &= \phi(a) \wedge (\phi(b) \vee \phi(c)) \\ &= \phi(a) \wedge \phi(b \vee c) \\ &= \phi(a \wedge (b \vee c)) \\ &= \phi((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) \\ &= \phi(a \wedge b) \vee \phi(a \wedge c) \\ &= (\phi(a) \wedge \phi(b)) \vee (\phi(a) \wedge \phi(c)) \\ &= (a' \wedge b') \vee (a' \wedge c') \end{aligned}$$

y por tanto $(S', \preceq)$ es distributivo. ■

De igual manera se tiene que si $(S, \leq)$ es modular, $(S', \preceq)$ también lo es.
Con los anteriores resultados se llega a la siguiente proposición:

Proposición 2.1.2. Si $(S, \leq)$ y $(S', \preceq)$ son retículos isomorfos, entonces:

1. $(S, \leq)$ es modular si, y sólo si, $(S', \preceq)$ es modular.

2. $(S, \leq)$ es distributivo si, y sólo si, $(S', \preceq)$ es distributivo.

Proposición 2.1.3. Ahora bien si $(S, \leq)$ es completo, del isomorfismo ϕ se sigue que $(S', \preceq)$ es completo, y si $a \in S$ es compacto, $\phi(a)$ es compacto en S'.

Demostración. De hecho; si $\{b'_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es un cubrimiento de $\phi(a)$, para cada $\gamma \in \Gamma$ existe un único $b_\gamma \in S$ tal que $\phi(b_\gamma) = b'_\gamma$, luego si $\phi(a) \preceq \bigvee\limits_{\gamma\in\Gamma} b'_\gamma = \bigvee\limits_{\gamma\in\Gamma} \phi(b_\gamma)$, entonces como ϕ preserva el *sup*, se tiene que $\phi(a) \preceq \phi(\bigvee\limits_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma)$, luego por ser ϕ isomorfismo, $a \leq \bigvee\limits_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma$ y como a es compacto en S, existe un número finito de elementos de Γ, digamos $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ tales que $a \leq \bigvee\limits_{i=1}^{n} b_{\gamma_i}$, por tanto $\phi(a) \preceq \phi(\bigvee\limits_{i=1}^{n} b_{\gamma_i}) = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \phi(b_{\gamma_i}) = \bigvee\limits_{i=1}^{n} b'_{\gamma_i}$.
Así, $\phi(a)$ es compacto en S'.
■

De manera análoga se tiene que si a es co-compacto en S, $\quad \phi(a)$ es co-compacto en S'.
Si $(S, \leq)$ es compactamente (co-compactamente) generado, $(S', \preceq)$ también lo es.
A manera de resumen, tenemos que:

Proposición 2.1.4. Si $(S, \leq)$ es retículo completo, y $\phi : (S, \leq) \longrightarrow (S', \preceq)$ es un isomorfismo, entonces:

1. a es compacto (co-compacto) en S si y sólo si $\phi(a)$ es compacto (co-compacto) en S'.

2. $(S, \leq)$ es compactamente (co-compactamente) generado si y sólo si $(S', \preceq)$ es compactamente (co-compactamente) generado.

CAPÍTULO 3

FILTROS

En esta sección introducimos algunas propiedades básicas de los filtros sobre un conjunto S.

Definición 3.1. Un **filtro** $\mathcal{F}$ sobre un conjunto no vacío S es una colección no vacía de subconjuntos de S $\quad (\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S))$ que satisface:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
3. Si $F \in \mathcal{F}$ y $W \subseteq S$ es tal que $F \subseteq W$, entonces $W \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 3.1.

1. Sea X un conjunto no vacío, sea $A \subseteq X$ un conjunto no vacío y sea F el conjunto de todos los subconjuntos de X que contiene a A, es decir, $\mathcal{F} = \{F \subset X : \; A \subset F\}$ es un filtro sobre X.
2. En un espacio topológico X, el conjunto de todas las vecindades de un punto $x \in \; X$, es un filtro sobre X.
3. Los complementos de los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ son elementos de un filtro sobre $\mathbb{N}$, es decir, $\mathcal{F} = \{F \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} \smallsetminus F \text{ es finito}\}$ es un filtro llamado el filtro de Fréchet.

4. Si X es un conjunto infinito, $\mathcal{F} = \{F \subset X : X \setminus F \text{ es finito}\}$ es el filtro de complementos finitos de X.

Nota 3.1. Denotamos por $F\text{il}(S)$ al conjunto de todos los filtros sobre S.

Si $\emptyset \neq A \subseteq S$, la colección $\{B \subseteq S \mid A \subseteq B\}$ es un filtro sobre S llamado el **filtro principal** generado por A y, lo notaremos por $\langle A \rangle$. De igual forma denotaremos por $\langle x \rangle$ al filtro principal generado por el conjunto unitario $\{x\}$.

Definición 3.2. Una colección no vacía $\beta \subseteq \mathcal{P}(S)$ es una **base** para un filtro sobre S, si $\emptyset \notin \beta$, y si $B_1, B_2 \in \beta$, existe $B_3 \in \beta$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
Si β es una base para un filtro sobre S, el filtro

$$\langle \beta \rangle = \{A \subseteq S \mid \text{existe } \ B \in \beta \ \text{ tal que } \ B \subseteq A\}$$

es llamado el filtro generado por la base β.

Ejemplo 3.2. Como en el Ejemplo 3.1.1., sea X un conjunto no vacío, el conjunto de todos los subconjuntos de X que contiene un subconjunto no vacío A de X, $\mathcal{F} = \{F \subset X : A \subset F\}$ un filtro sobre X, si se toma a $\beta = \{A\}$ entonces β es una base para el filtro $\mathcal{F} = \{F \subset X : A \subset F\}$.

Definición 3.3. Una colección no vacía $\beta' \subseteq \mathcal{P}(S)$ es una **sub-base** para un filtro sobre S, si cada intersección finita de elementos de β' es no vacía.
Si $\beta' \subseteq \mathcal{P}(S)$ es una sub-base para un filtro sobre S, entonces la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de β' es base para un filtro sobre S. El filtro

$$\langle \beta' \rangle = \left\{ A \subseteq S | \text{existe } B_1, B_2, \ldots, B_n \in \beta' \text{ tales que } \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq A \right\}$$

es llamado el filtro generado por la subbase β'.

Ejemplo 3.3. Si X es un conjunto no vacío $\emptyset \neq A \subseteq X$, el conjunto de todos los subconjuntos de X que contiene a A, $\mathcal{F} = \{F \subset X : A \subset F\}$ un filtro sobre X, tal que $\beta' = \{A\}$ es una sub-base para el filtro $\mathcal{F} = \{F \subset X : \ A \subset F\} = \langle A \rangle$.

Como consecuencia de los Ejemplos 3.2 y 3.3, se tiene que:
Todo filtro es base de filtro y toda base de filtro es también sub-base de filtro.

Definición 3.4. Sean S un conjunto no vacío y $\mathcal{U}$ un filtro sobre S. Decimos que $\mathcal{U}$ es un **ultrafiltro** si para cada $\mathcal{F} \in F\text{il}(S)$ tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, se tiene que $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.

Ejemplo 3.4. 1. El conjunto $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$ con filtro $\mathcal{F} = \{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$, el generado por $\{c\}$, $\langle\{c\}\rangle$ es un ultrafiltro de $|\{a,b,c\}|$.

2. Si X es un conjunto no vacío y $a \in X$, $\mathcal{F} = \{F \subset X : a \in F\} = \langle\{a\}\rangle$ es un ultrafiltro sobre X y es llamado el ultrafiltro trivial o principal generado por a.

Proposición 3.1. Dado cualquier filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto S, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre S tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

Teorema 3.1. Todo filtro es la intersección de todos los ultrafiltros que lo contienen. Es decir, si $\mathcal{F} \in F\text{il}(S)$, entonces

$$\mathcal{F} = \bigcap \{\mathcal{U} \in F\text{il}(S) \mid \mathcal{U} \text{ es un ultrafiltro y } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}\}.$$

Las demostraciones de la proposición y el teorema anterior se pueden consultar en [1]. A continuación probaremos algunas proposiciones que serán necesarias más adelante.

Proposición 3.2. Sean S un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ un filtro sobre S. Si existe un subconjunto finito B de S tal que $B \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} = \langle A\rangle$ para algún $A \subseteq B$.

Demostración.
Sean $\mathcal{F} \in F\text{il}(S)$ y $B \subseteq S$, B finito con $|B| = n$ tal que $B \in \mathcal{F}$. Veamos que existe $A \subseteq B$ tal que $\mathcal{F} = \langle A\rangle$.
Sea $\mathcal{C} = \{C \subseteq B \mid C \in \mathcal{F}\}$. La colección $\mathcal{C}$ es no vacía pues $B \in \mathcal{C}$.
Afirmamos que $\mathcal{F} = \left\langle \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \right\rangle$. En efecto; puesto que la colección $\mathcal{C}$ tiene menos de 2^n elementos, entonces $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \in \mathcal{F}$ (pues para cada $C \in \mathcal{C}$, $C \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es cerrado para intersecciones finitas), y así $\left\langle \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \right\rangle \subseteq \mathcal{F}$. Por otro lado, si $F \in \mathcal{F}$, entonces $F \cap B \in \mathcal{C}$ y por tanto $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \subseteq F \cap B \subseteq F$, es decir, $F \in \left\langle \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \right\rangle$ y por consiguiente $\mathcal{F} \subseteq \left\langle \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \right\rangle$. Por tanto, si tomamos $A = \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \subseteq B$ tenemos que $\mathcal{F} = \langle A\rangle$. ■

Afirmación 3.1. Sea S un conjunto no vacío. Entonces: S es finito si, y sólo si, todo filtro sobre S es principal.

Demostración.
Si S es finito y $\mathcal{F}$ es un filtro sobre S, de la Proposición 3.2 se sigue que $\mathcal{F}$ es principal. Recíprocamente, si S no es finito, existe el filtro de los complementos finitos

$\mathcal{F}_{cofin} = \{A \subseteq S \mid S \setminus A$ es finito$\}$, el cual no es principal, pues si $A \in \mathcal{F}_{cofin}$ entonces para cada $a \in A$, $A \setminus \{a\} \in \mathcal{F}_{cofin}$ (pues $S \setminus A$ es finito y por consiguiente $S \setminus (A \setminus \{a\}) = (S \setminus A) \cup \{a\}$ también lo es), y es claro que $A \nsubseteq A \setminus \{a\}$, luego $A \setminus \{a\} \notin \langle A \rangle$. Por tanto, $\mathcal{F}_{cofin} \neq \langle A \rangle$ para todo $A \subseteq S$. ■

3.1. El retículo de los filtros

Véase que $(F\text{il}(S), \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado ($\leq$ es el orden de la inclusión), y puesto que la intersección de filtros sobre un conjunto S, es de nuevo un filtro sobre S, dada cualquier colección $\{\mathcal{F}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ de elementos de $F\text{il}(S)$, se tiene que $\bigwedge\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma = \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ siempre existe. Para el caso en el que $\{\mathcal{F}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una colección de elementos de $F\text{il}(S)$, se tiene que $\bigvee\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ no existe. Por lo tanto $(F\text{il}(S), \leq)$ es sólo un conjunto parcialmente ordenado que no es un retículo pues existe siempre el inf pero no el sup.
Esto último lo podemos ver mediante un ejemplo.

Ejemplo 3.5. Si S es un conjunto no vacío y $a, b \in\ S, a \neq b$, y sean $\langle\{a\}\rangle, \langle\{b\}\rangle$ ultrafiltros distintos sobre S, claramente el inf entre ellos existe, pues la intersección de filtros sobre un conjunto S es nuevamente un filtro sobre S, pero el sup entre ellos no existe pues si existiera éste debe contenerlo a ambos, es decir, debe existir un filtro $\mathcal{G}$ sobre S tal que $\langle\{a\}\rangle \cap \langle\{b\}\rangle \in\ \mathcal{G}$ pero como $\langle\{a\}\rangle, \langle\{b\}\rangle$ son ultrafiltros distintos sobre S entonces $\langle\{a\}\rangle \cap \langle\{b\}\rangle = \emptyset$ lo cuál contradice que $\mathcal{G}$ es un filtro sobre S.

Nota 3.1.1. *El filtro formado por $\mathcal{P}(S) = \mathcal{F}$ es llamado filtro impropio, pues $\emptyset \in\ \mathcal{F}$.*

Ahora, como lo que se espera ver es el retículo de los filtros entonces a $(F\text{il}(S), \leq)$ lo completamos uniendole $\mathcal{P}(S)$, es decir, se trabaja con filtros impropios. Por tanto, si admitimos a $\mathcal{P}(S)$ como filtro sobre S, $F\text{il}(S) \cup \mathcal{P}(S)$ es un retículo completo que tiene como elemento máximo a $\mathcal{P}(S)$.

Afirmación 3.1.1. *Sea S un conjunto no vacío. Si $\{\mathcal{F}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una colección de elementos de Fil(S) entonces: $\bigvee\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ existe si, y sólo si, $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ es una sub-base para un filtro sobre S. En tal caso $\bigvee\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ es el filtro generado por la sub-base $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$.*

Demostración. Si $\{\mathcal{F}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una colección de elementos de $F\mathrm{il}(S)$, sabemos que $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ es una sub-base para un filtro sobre S si y sólo si cada intersección finita de elementos de $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ es no vacía. Por supuesto, si tomamos $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{F}_\gamma$ para un $\gamma \in \Gamma$, es claro que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{F}_\gamma$ y por tanto $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i \neq \emptyset$, luego para que $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ sea una sub-base para un filtro sobre S, es suficiente y necesario que para cada $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ y para cada $F_\gamma \in \mathcal{F}_\gamma$ y para cada $F_{\gamma'} \in \mathcal{F}_{\gamma'}$, $\quad F_\gamma \cap F_{\gamma'} \neq \emptyset$.
Además, si esto ocurre, es decir, si $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ es una sub-base para un filtro sobre S, entonces en $F\mathrm{il}(S)$, $\quad \bigvee\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ existe y es el filtro generado por la sub-base $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$, es decir; $\bigvee\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma = \langle \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma \rangle$. En efecto; es claro que para cada $\gamma \in \Gamma$, $\quad \mathcal{F}_\gamma \subseteq \langle \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma \rangle$, y por tanto $\langle \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma \rangle$ es cota superior del conjunto $\{\mathcal{F}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Por otra parte, si $\mathcal{G} \in F\mathrm{il}(S)$ es tal que para cada $\gamma \in \Gamma$, $\quad \mathcal{F}_\gamma \subseteq \mathcal{G}$, entonces si $A \in \langle \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma \rangle$, existen $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ tales que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i \subseteq A$, y como para cada $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\quad B_i \in \mathcal{G}$ (pues para cada $i \in I$, $\quad B_i \in \mathcal{F}_{\gamma_i}$ para algún $\gamma_i \in \Gamma$ y $\mathcal{F}_\gamma \subseteq \mathcal{G}$ para cada $\gamma \in \Gamma$), entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{G}$ y por tanto $A \in \mathcal{G}$, es decir; si $\mathcal{G} \in \mathrm{Fil}(S)$ es tal que para cada $\gamma \in \Gamma$, $\quad \mathcal{F}_\gamma \subseteq \mathcal{G}$, entonces $\langle \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma \rangle \subseteq \mathcal{G}$ y por consiguiente $\langle \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma \rangle$ es la menor de las cotas superiores del conjunto $\{\mathcal{F}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Luego $\bigvee\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma = \langle \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma \rangle$. ■

Por otro lado, nótese que si existen $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ tales que para algún $F_\gamma \in \mathcal{F}_\gamma$ y para algún $F_{\gamma'} \in \mathcal{F}_{\gamma'}$ se tiene que $F_\gamma \cap F_{\gamma'} = \emptyset$, entonces en $\mathrm{Fil}(S)$, $\quad \bigvee\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ no existe (pues ningún filtro $\mathcal{G}$ sobre S puede contener a $\mathcal{F}_\gamma$ y $\mathcal{F}_{\gamma'}$ ya que de lo contrario $\emptyset = F_\gamma \cap F_{\gamma'} \in \mathcal{G}$ lo cual contradice que $\mathcal{G}$ es un filtro sobre S).

Claro, en $F\mathrm{il}(S) \cup \mathcal{P}(S)$ el *sup* de cualquier colección de elementos de $F\mathrm{il}(S)$ siempre existe, pues $F\mathrm{il}(S) \cup \mathcal{P}(S)$ es un retículo completo. En el caso en que la unión de los elementos de la colección dada, no sea una sub-base para un filtro sobre S, entonces el *sup* de la colección es $\mathcal{P}(S)$.

CAPÍTULO 4

PRETOPOLOGÍAS

En está sección introducimos el concepto de pretopología sobre un conjunto S, se hace un breve estudio de las mismas, mostramos algunos ejemplos de pretopologías sobre un conjunto que no son topologías, y caracterizamos las pretopologías y las topologías sobre S, a partir de la operación de interior asociada a estas y también, a partir de cierta colección de filtros sobre S llamados filtros de vecindades de los puntos de S.
Gran parte de la terminología y notación de esta sección es tomada de [3].

Definición 4.1. Una pretopología o un operador pretopológico sobre un conjunto S es una función $p : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ que cumple las siguientes propiedades:

(K1) $p(\emptyset) = \emptyset$.

(K2) $A \subseteq p(A)$ para cada $A \subseteq S$.

(K3) $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$ para cada $A, B \subseteq S$.

El par (S, p) es llamado un espacio pretopológico y el conjunto $p(A)$ es llamado la clausura de A en (S, p).
Si además de las propiedades $(K1), (K2)$ y $(K3)$, p satisface la propiedad

$$(K4) \qquad p(p(A)) = p(A) \text{ para cada } A \subseteq S,$$

entonces p es una topología sobre S o un operador topológico de clausura de Kuratowski, y el par (S, p) es llamado un espacio topológico.

Ejemplo 4.1. 1. La función $p : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ definida por:

$$p(A) := A \quad \text{para cada} \quad A \subseteq S \tag{4.1}$$

es una pretopología sobre S pues:

- $p(\emptyset) = \emptyset$;
- $p(A \cup B) = A \cup B = p(A) \cup p(B)$;
- $A \subseteq p(A) = A$.

2. La función $p : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ definida para cada $A \subseteq S$ por

$$p(A) := \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad A = \emptyset, \\ S & \text{si} \quad A \neq \emptyset. \end{cases} \tag{4.2}$$

es una pretopología sobre S pues:

- $p(\emptyset) = \emptyset$;
- $A \subseteq p(A) = S$;
- Si $A \cup B = \emptyset$, $p(A \cup B) = \emptyset = p(A) \cup p(B)$;
  Si $A \cup B \neq \emptyset$, entonces $p(A \cup B) = S = p(A) \cup p(B)$.

3. Sea S un conjunto con por lo menos dos elementos, a y s donde $a \neq s$, entonces la función $p_{a,s} : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ definida por:

$$p_{a,s}(A) := \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad A = \emptyset, \\ S \setminus \{s\} & \text{si} \quad A = \{a\}, \\ S & \text{si} \quad A \neq \{a\} \text{ y } A \neq \emptyset \end{cases} \tag{4.3}$$

es una pretopología sobre S pues:

- $p(\emptyset) = \emptyset$;
- $A \subseteq p(A)$ miremos:
  Si $A = \{a\}$ entonces $p(A) = S \setminus \{s\}$, luego $A \subseteq p(A)$ pues $a \neq s$.
  Si $A \neq \{a\}$ entonces $p(A) = S$ y, claramente $A \subseteq S$, por lo cual $A \subseteq p(A)$.

- Sean $A, B \subseteq S$ se puede tomar que $A \neq \emptyset \neq B$ (pues si $A = \emptyset$, o $B = \emptyset$, entonces $A \cup B = A$, o $A \cup B = B$; y $p(A \cup B) = p(A) = p((A) \cup \emptyset) = p(A) \cup p(B)$, por lo cual $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$, de igual forma cuando $A \cup B = B$).
  Si $A \cup B = \{a\}$ entonces $A = B = \{a\}$, por lo tanto $p(A \cup B) = S \setminus \{s\} = (S \setminus \{s\}) \cup (S \setminus \{s\}) = p(A) \cup p(B)$.
  Si $A \cup B \neq \{a\}$ entonces $A \neq \{a\}$, o $B \neq \{a\}$, de lo cual se tiene que $p(A) \cup p(B) = S$. Por otro lado, $p(A \cup B) = S$ (porque $A \cup B \neq \{a\}$). Luego $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$.

Ejemplo 4.2. Sean S un conjunto no vacío y $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una colección no vacía de pretopologías sobre S. Entonces, la función $p_{\wedge_\Gamma} : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ definida por

$$p_{\wedge_\Gamma}(A) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(A) \qquad \text{para cada} \qquad A \subseteq S,$$

es una pretopología sobre S. En efecto: es claro que $p_{\wedge_\Gamma}(\emptyset) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(\emptyset) = \emptyset$ (pues $p_\gamma(\emptyset) = \emptyset$ para cada $\gamma \in \Gamma$) y que $A \subseteq p_{\wedge_\Gamma}(A) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(A)$. Sean $A, B \subseteq S$, entonces, como para cada $\gamma \in \Gamma$, $\quad p_\gamma(A \cup B) = p_\gamma(A) \cup p_\gamma(B)$ (pues p_γ es una pretopología sobre S para cada $\gamma \in \Gamma$), se tiene que

$$\begin{aligned} p_{\wedge_\Gamma}(A \cup B) &= \bigcup_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(A \cup B) \\ &= \bigcup_{\gamma\in\Gamma} (p_\gamma(A) \cup p_\gamma(B)) \\ &= \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(A)\right) \bigcup \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(B)\right) \\ &= p_{\wedge_\Gamma}(A) \cup p_{\wedge_\Gamma}(B). \end{aligned}$$

Por consiguiente $p_{\wedge_\Gamma}$ es una pretopología sobre S.

Ejercicio 4.1. Teniendo en cuenta el Ejemplo 4.1.3., la función definida como $p_{a,s}$ de igual forma definimos $p_{b,t}$ entonces bajo estas condiciones qué es $p_{a,s} \cup p_{b,t}$?

La definición anterior es tomada de [4], aunque allí le piden a una pretopología (además de las tres condiciones de la definición anterior) que sea monótona, lo cual es una consecuencia de la propiedad $(K2)$ tal y como se afirma a continuación.

Afirmación 4.1. Sea S un conjunto no vacío. Si $p : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ es una pretopología sobre S entonces, para cada $A, B \subseteq S$ tales que $A \subseteq B$ se tiene que $p(A) \subseteq p(B)$.

Ejercicio 4.2. Queda como ejercicio para el lector la prueba de la Afirmación 4.1.

En [3, pág. 237] a las pretopologías sobre un conjunto S, les dan el nombre de operación de clausura para S, y a los espacios pretopológicos les dan el nombre de espacios clausura.

De la definición anterior tenemos que toda topología sobre un conjunto S, es una pretopología sobre S. A continuación, presentamos un ejemplo de pretopología sobre un conjunto S, que no es una topología sobre S.

Ejemplo 4.3. Sea $S = \mathbb{N}$ y sea $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una relación definida por $(n, m) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si, $n = m$ o $m = n + 1$.
Ahora, para un subconjunto A de $\mathbb{N}$ tenemos que
$\mathcal{R}(A) = \{m \in \mathbb{N} \mid (\exists\, n \in A)((n, m) \in \mathcal{R})\}$ y por consiguiente $A \subseteq \mathcal{R}(A)$ (pues si $m \in A$ existe $n \in A$ $(n = m)$ tal que $(n, m) \in \mathcal{R}$ y así $m \in \mathcal{R}(A)$.)

Por otra parte, si $A, B \subseteq \mathbb{N}$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(A \cup B) &= \{m \in \mathbb{N} \mid (\exists\, n \in A \cup B)((n, m) \in \mathcal{R})\} \\
&= \{m \in \mathbb{N} \mid [(\exists\, n \in A)((n, m) \in \mathcal{R})] \vee [(\exists\, n \in B)((n, m) \in \mathcal{R})]\} \\
&= \{m \in \mathbb{N} \mid (\exists\, n \in A)((n, m) \in \mathcal{R})\} \cup \{m \in \mathbb{N} \mid (\exists\, n \in B)((n, m) \in \mathcal{R})\} \\
&= \mathcal{R}(A) \cup \mathcal{R}(B),
\end{aligned}$$

(nótese que la segunda igualdad se tiene puesto que el cuantificador existencial distribuye con respecto a la disyunción).
Además, es claro que $\mathcal{R}(\emptyset) = \emptyset$.
De lo expuesto anteriormente tenemos que si tomamos $p : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por $p(A) := \mathcal{R}(A)$ para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, entonces p satisface

(K1) $p(\emptyset) = \emptyset$.

(K2) $A \subseteq p(A)$ para cada $A \subseteq \mathbb{N}$.

(K3) $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$ para cada $A, B \subseteq \mathbb{N}$

y por consiguiente p es una pretopología sobre $\mathbb{N}$.
Además, nótese que p no satisface la propiedad $(K4)$, pues

$$p(p(\{0, 1\})) = \{0, 1, 2, 3\} \neq \{0, 1, 2\} = p(\{0, 1\}).$$

Así, existe $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $p(p(A)) \neq p(A)$ y por tanto p no es una topología sobre $\mathbb{N}$.

Ejemplo 4.4. Sea $(S, \leq)$ un conjunto bien ordenado y sea $p : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ definido por $p(A) := A \cup \{y \in S \mid (\exists\, x \in A)(x \longrightarrow\!\!< y)\}$ para cada $A \subseteq S$. Entonces p es una pretopología sobre S. Además, si S tiene por lo menos tres elementos p no es una topología sobre S.

En primer lugar, veamos que p es una pretopología sobre S.

De la definición de p, es claro que $p(\emptyset) = \emptyset$ y que $A \subseteq p(A)$ para cada $A \subseteq S$, con lo cual sólo falta probar que para cada $A, B \subseteq S$ se tiene que $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$, pero esto, al igual que en el ejemplo anterior, se sigue de la distributividad del cuantificador existencial con respecto a la disyunción.

Así, p es una pretopología sobre S. Ahora veamos que si S tiene por lo menos tres elementos, p no es una topología sobre S.

Supongamos que $|S| \geq 3$. Como $(S, \leq)$ es un conjunto bien ordenado, S tiene un primer elemento x_1. Sea A el conjunto unitario formado por el primer elemento de S, es decir; $A = \{x_1\}$. Nuevamente, puesto que S es bien ordenado y $|S| \geq 3$, el conjunto $A_1 := \{x \in S \mid x_1 < x\}$ es no vacío y por tanto tiene un primer elemento x_2. Luego tenemos que $x_1 < x_2$ y que si $x \in S$ es tal que $x \neq x_2$ y $x_1 < x$, entonces $x \in A_1$ y además $x_2 < x$ (pues x_2 es el primer elemento de A_1), y por tanto $x_1 \longrightarrow\!\!< x_2$. Así, $p(A) = \{x_1, x_2\}$. Nuevamente, por ser S un conjunto bien ordenado con más de dos elementos, el conjunto $A_2 := \{x \in S \mid x_2 < x\}$ es no vacío y por tanto tiene un primer elemento x_3 el cual cubre a x_2. Así, $p(\{x_1, x_2\}) = \{x_1, x_2, x_3\}$. Luego tenemos que

$$p(p(A)) = p(\{x_1, x_2\}) = \{x_1, x_2, x_3\} \neq \{x_1, x_2\} = p(A).$$

Por consiguiente, si $|S| \geq 3$, existe $A \subseteq S$ tal que $p(p(A)) \neq p(A)$ y por tanto p no es una topología sobre S.

Por supuesto, el Ejemplo 4.6 es una generalización del Ejemplo 4.3.

Definición 4.2. Sean S un conjunto no vacío y p una pretopología sobre S. Definimos el operador de interior (asociado a p) denotado por int_p como la función de $\mathcal{P}(S)$ en $\mathcal{P}(S)$ definida por

$$int_p(A) = S \setminus p(S \setminus A), \quad \text{para cada } A \subseteq S.$$

El conjunto $int_p(A)$ es llamado el interior de A en el espacio pretopológico (S, p).

Ejemplo 4.5. 1. En la función p definida en el Ejemplo 4.1.1., al hallar el int_p definimos:

$int_p(A) = S \setminus p(S \setminus A)$, pero como $p(S \setminus A) = S \setminus A$ entonces $int_p(A) = S \setminus S \setminus A = A$, por lo tanto $int_p(A) = A$.

2. En la función p definida en el Ejemplo 4.1.2., si se quiere hallar el $int_p(A)$ entonces tenemos que:

$$int_p(A) := \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad A \neq S, \\ S & \text{si} \quad A = S. \end{cases} \tag{4.4}$$

pues: Si $A = S$ entonces $int_p(A) = S \setminus p(S \setminus S) = S \setminus \emptyset = S$, y
Si $A \neq S$ entonces $int_p(A) = S \setminus p(S \setminus A) = S \setminus S = \emptyset$, pues $p(S \setminus A) = S$.

Ejercicio 4.3. Hallar el $int_p(A)$ de la función definida en el Ejemplo 4.1.3.

Ejercicio 4.4. Hallar el $int_p(A)$ de la función definida en el Ejemplo 4.3.

Nota 4.1. De la definición anterior tenemos que para cada $A \subseteq S$, $\;int_p(A) = (p(A^c))^c$. Además, es claro que la operación de interior (o el operador de interior) está determinado de manera única por la pretopología p.

Afirmación 4.2. Sean S un conjunto no vacío y p una pretopología sobre S. Entonces el operador de interior int_p satisface las siguientes propiedades:

(i1) $int_p(S) = S$;

(i2) Para cada $A \subseteq S$, $\;int_p(A) \subseteq A$;

(i3) Para cada $A, B \subseteq S$, $\;int_p(A \cap B) = int_p(A) \cap int_p(B)$.

Demostración.

1. Veamos que $int_p(S) = S$. Puesto que p es una pretopología sobre S, $p(S \setminus S) = p(\emptyset) = \emptyset$, así $int_p(S) = S \setminus p(S \setminus S) = S \setminus \emptyset = S$.

2. Sea $A \subseteq S$. Veamos que $int_p(A) \subseteq A$.
Puesto que $S \setminus A \subseteq p(S \setminus A)$ entonces $S \setminus p(S \setminus A) \subseteq S \setminus (S \setminus A)$, es decir $int_p(A) \subseteq A$.

3. Sean $A, B \subseteq S$. Veamos que $int_p(A \cap B) = int_p(A) \cap int_p(B)$.
   Si $A, B \subseteq S$ entonces, como p es una pretopología sobre S, de la propiedad $(K3)$ y la definición de int_p se sigue que

$$\begin{aligned} int_p(A \cap B) &= S \setminus p(S \setminus (A \cap B)) \\ &= S \setminus p((S \setminus A) \cup (S \setminus B)) \\ &= S \setminus [p(S \setminus A) \cup p(S \setminus B)] \\ &= [S \setminus p(S \setminus A)] \cap [S \setminus p(S \setminus B)] \\ &= int_p(A) \cap int_p(B). \end{aligned}$$

■

Observación 4.1. Obsérvese además que el operador de interior es monótono, pues si $A, B \subseteq S$ son tales que $A \subseteq B$, entonces $S \setminus B \subseteq S \setminus A$ y por la Afirmación 4.1 se tiene que $p(S \setminus B) \subseteq p(S \setminus A)$, luego $(S \setminus p(S \setminus A)) \subseteq (S \setminus p(S \setminus B))$, es decir, $int_p(A) \subseteq int_p(B)$.

Afirmación 4.3. Sea S un conjunto no vacío. Si $int : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ es una función que satisface las tres propiedades de la afirmación anterior, es decir; si $int : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ es una función que satisface:

(i1) $int(S) = S$;

(i2) Para cada $A \subseteq S$, $\ int(A) \subseteq A$;

(i3) Para cada $A, B \subseteq S$, $\ int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$,

entonces existe una única pretopología p sobre S para la cual $int_p(A) = int(A)$ para cada $A \subseteq S$.

Demostración.
Supongamos que la función int satisfaces las tres condiciones mencionadas y definamos $p : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ mediante

$$p(A) := S \setminus int(S \setminus A) \ \text{ para cada } \ A \subseteq S. \tag{4.5}$$

Veamos que p es una pretopología sobre S.
1) $p(\emptyset) = S \setminus int(S \setminus \emptyset) = S \setminus int(S) = S \setminus S = \emptyset$.

2) Sea $A \subseteq S$. Veamos que $A \subseteq p(A)$. Puesto que por hipótesis $int(S \setminus A) \subseteq (S \setminus A)$, entonces $A \subseteq S \setminus int(S \setminus A)$, es decir, $A \subseteq p(A)$.

3) Sean $A, B \subseteq S$. Veamos que $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$. De la definición de p tenemos que $p(A \cup B) = S \setminus int(S \setminus (A \cup B)) = S \setminus int((S \setminus A) \cap (S \setminus B))$ y como por hipótesis $int((S \setminus A) \cap (S \setminus B)) = int(S \setminus A) \cap int(S \setminus B)$ entonces $S \setminus int((S \setminus A) \cap (S \setminus B)) = S \setminus (int(S \setminus A) \cap int(S \setminus B)) = (S \setminus int(S \setminus A)) \cup (S \setminus int(S \setminus B))$, luego $p(A \cup B) = (S \setminus int(S \setminus A)) \cup (S \setminus int(S \setminus B)) = p(A) \cup p(B)$.

Luego de $1), 2)$ y 3) se sigue que p es una pretopología sobre S.
Ahora veamos que para cada $A \subseteq S$, $\;int_p(A) = int(A)$.
Sea $A \subseteq S$. De la Definición 4.2 se tiene que $int_p(A) = S \setminus p(S \setminus A)$. Ahora, como por (4,5) $\;p(S \setminus A) = S \setminus int(S \setminus (S \setminus A))$ entonces $p(S \setminus A) = S \setminus int(A)$ y por tanto $S \setminus p(S \setminus A) = int(A)$. Es decir, $int_p(A) = int(A)$.

Para ver que p es la única pretopología sobre S para la cual $int_p(A) = int(A)$ para cada $A \subseteq S$, supongamos que q es una pretopología sobre S para la cual $int_q(A)$ coincide con $int(A)$ para cada $A \subseteq S$. Veamos que $p = q$.
Sea $A \subseteq S$. Veamos que $p(A) = q(A)$. Puesto que para cada subconjunto de S los conjuntos interiores en los espacios pretopológicos (S, p) y (S, q) coinciden con su imagen según la función int, entonces $int_p(S \setminus A) = int(S \setminus A)$ y $int_q(S \setminus A) = int(S \setminus A)$, luego $int_p(S \setminus A) = int_q(S \setminus A)$, es decir, $S \setminus p(S \setminus (S \setminus A)) = S \setminus q(S \setminus (S \setminus A))$ y por tanto $p(A) = q(A)$. Así $p = q$. ■

De lo anterior tenemos que toda pretopología esta completamente determinada por su operador de interior.

A continuación, definimos quienes son los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados en un espacio pretopológico.

Definición 4.3. Sean (S, p) un espacio pretopológico y $A \subseteq S$. Decimos que A es abierto en (S, p) si A coincide con su interior, es decir, si $A = int_p(A)$. Decimos que A es cerrado en (S, p) si A coincide con su clausura, es decir, si $A = p(A)$.

Nótese que en un espacio pretopológico (S, p), un subconjunto A de S es abierto si y sólo si su complemento $S \setminus A$ es cerrado. De hecho;

$$\begin{aligned} A \text{ es abierto en } (S,p) &\Leftrightarrow A = int_p(A) \\ &\Leftrightarrow A = S \setminus p(S \setminus A) \;\; (\text{definición de } int_p(A)) \\ &\Leftrightarrow S \setminus A = p(S \setminus A) \\ &\Leftrightarrow S \setminus A \text{ es cerrado en } (S,p). \end{aligned}$$

De la definición de pretopología se sigue que la clausura de un conjunto no necesariamente es cerrada. De igual forma se tiene que el interior de un conjunto no necesariamente es abierto tal y como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.6. Sea $(\mathbb{N}, p)$ el espacio pretopológico del Ejemplo 4.3, recuérdese que para $A \subseteq \mathbb{N}$, $p(A) = \mathcal{R}(A) = \{m \in \mathbb{N} \mid \text{existe } n \in A \text{ tal que } (n,m) \in \mathcal{R}\}$ donde $\mathcal{R}$ es la relación definida por $(n,m) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow n = m \text{ o } m = n+1$.
Sea $A = \{2,5,6\}$. Entonces $2,5 \in p(\mathbb{N} \setminus A)$ pues $(1,2),(4,5) \in \mathcal{R}$ y $1,4 \in \mathbb{N} \setminus A$, además, $6 \notin p(\mathbb{N} \setminus A)$ pues 6 solo esta relacionado (según $\mathcal{R}$) con él mismo y con el 5 y, ninguno de los dos está en $\mathbb{N} \setminus A$. Así $p(\mathbb{N} \setminus A) = p(\mathbb{N} \setminus \{2,5,6\}) = \mathbb{N} \setminus \{6\}$ y por tanto $int_p(A) = \mathbb{N} \setminus p(\mathbb{N} \setminus A) = \mathbb{N} \setminus (\mathbb{N} \setminus \{6\}) = \{6\}$. Por otra parte, nótese que $int_p(int_p(A)) = int_p(\{6\}) = \emptyset$ pues $p(\mathbb{N} \setminus \{6\}) = \mathbb{N}$ (ya que $\mathbb{N} \setminus \{6\} \subseteq p(\mathbb{N} \setminus \{6\})$ y $(5,6) \in \mathcal{R}$, es decir; $6 \in p(\mathbb{N} \setminus \{6\})$). Luego $int_p(int_p(A)) \neq int_p(A)$.

Lo expuesto anteriormente conlleva a la siguiente afirmación:

Afirmación 4.4. Sean S un conjunto no vacío y p una pretopología sobre S. Entonces: p es una topología sobre S si y sólo si para cada $A \subseteq S$ se tiene que $int_p(int_p(A)) = int_p(A)$. Es decir, p es una topología sobre S si y sólo si el operador de interior int_p es idempotente.

Demostración.
Sean S un conjunto no vacío y p una pretopología sobre S. De la Definición 4.1 tenemos que p es una topología sobre S si y sólo si p es idempotente, es decir, p es una topología sobre S si y sólo si $p(p(A)) = p(A)$ para cada $A \subseteq S$. Sea $A \subseteq S$. Veamos que

$int_p(int_p(A)) = int_p(A)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
int_p(int_p(A)) &= S \setminus p(S \setminus int_p(A)) && \text{(definición de } int_p)\\
&= S \setminus p(S \setminus [S \setminus p(S \setminus A)]) && \text{(definición de } int_p)\\
&= S \setminus p(p(S \setminus A)) && \\
&= S \setminus p(S \setminus A) && (p \text{ es idempotente})\\
&= int_p(A) && \text{(definición de } int_p)
\end{aligned}$$

Por tanto, si p es una topología sobre S, para cada $A \subseteq S$ se tiene que

$$int_p(int_p(A)) = int_p(A).$$

Recíprocamente, veamos que si para cada $A \subseteq S$ se cumple que $int_p(int_p(A)) = int_p(A)$, entonces p es una topología sobre S. En primer lugar nótese que $S \setminus int_p(S \setminus A) = S \setminus [S \setminus p(S \setminus (S \setminus A))] = p(A)$. Sea $A \subseteq S$ y supongamos que int_p es idempotente. Entonces:

$$\begin{aligned}
p(p(A)) &= S \setminus int_p(S \setminus p(A))\\
&= S \setminus int_p(S \setminus [S \setminus int_p(S \setminus A)]) && (p(A) = S \setminus int_p(S \setminus A))\\
&= S \setminus int_p(int_p(S \setminus A))\\
&= S \setminus int_p(S \setminus A) && (int_p \text{ es idempotente})\\
&= p(A)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si el operador de interior int_p es idempotente entonces p es una topología sobre S, es decir; si para cada $A \subseteq S$ se cumple que $int_p(int_p(A)) = int_p(A)$, entonces p es una topología sobre S. ■

Con las anteriores afirmaciones 4.3 y 4.4 se tiene inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 4.1. *Sea S un conjunto no vacío. Si $int : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ es una función que satisface:*

(i1) $int(S) = S$;

(i2) Para cada $A \subseteq S$, $int(A) \subseteq A$;

(i3) Para cada $A, B \subseteq S$, $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$;

(i4) Para cada $A \subseteq S$, $int(int(A)) = int(A)$,

entonces existe una única topología p sobre S para la cual $int_p(A) = int(A)$ para cada $A \subseteq S$.

Definición 4.4. Sean (S,p) un espacio pretopológico y $x \in S$. Una vecindad de x en el espacio pretopológico (S,p), es un subconjunto A de S que contiene a x en su interior, es decir; un subconjunto A de S es una vecindad de x en (S,p) si y sólo si $x \in int_p(A)$.

Ejemplo 4.7. Del Ejemplo 4.6 se sigue que $A = \{2,5,6\}$ es una vecindad de 6 en $(\mathbb{N}, p)$ (pues $6 \in int_p(A) = \{6\}$), pero A no es vecindad ni del 2 ni del 5.

Afirmación 4.5. Sea (S,p) un espacio pretopológico y para cada $x \in S$ sea $\mathcal{V}_p(x)$ la colección de subconjuntos de S definida por:

$$\mathcal{V}_p(x) := \{A \subseteq S \mid x \notin p(S \setminus A)\}.$$

Entonces, para cada $x \in S$, la colección $\mathcal{V}_p(x)$ satisface las siguientes propiedades:

(FV1) $x \in V$ para cada $V \in \mathcal{V}_p(x)$.

(FV2) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_p(x)$ entonces, $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_p(x)$.

(FV3) Si $V \in \mathcal{V}_p(x)$ y $V \subseteq W \subseteq S$, entonces $W \in \mathcal{V}_p(x)$.

Demostración.

1. Veamos que $\mathcal{V}_p(x)$ satisface la propiedad $(FV1)$. Sea $V \in \mathcal{V}_p(x)$, por definición de $\mathcal{V}_p(x)$ se tiene que $x \notin p(S \setminus V)$, y como $S \setminus V \subseteq p(S \setminus V)$ (pues p es una pretopología sobre S) se sigue que $x \notin S \setminus V$ y por tanto, $x \in V$.

2. Veamos que $\mathcal{V}_p(x)$ satisface la propiedad $(FV2)$. Sean $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_p(x)$. Veamos que $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_p(x)$.
   Puesto que $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_p(x)$, entonces $x \notin p(S \setminus V_1)$ y $x \notin p(S \setminus V_2)$, luego $x \notin (p(S \setminus V_1) \cup p(S \setminus V_2))$. Ahora, como p es una pretopología sobre S, se tiene que $p(S \setminus V_1) \cup p(S \setminus V_2) = p((S \setminus V_1) \cup (S \setminus V_2)) = p(S \setminus (V_1 \cap V_2))$. Tenemos entonces que, el hecho que $x \notin (p(S \setminus V_1) \cup p(S \setminus V_2))$ implica que $x \notin p(S \setminus (V_1 \cap V_2))$ y por tanto $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_p(x)$.

3. Veamos que $\mathcal{V}_p(x)$ satisface la propiedad $(FV3)$. Sean $V \in \mathcal{V}_p(x)$ y $W \subseteq S$ tales que $V \subseteq W$. Veamos que $W \in \mathcal{V}_p(x)$, es decir, veamos que $x \notin p(S \setminus W)$.
   Puesto que $V \subseteq W$, $S \setminus W \subseteq S \setminus V$ y como p es una pretopología sobre S se sigue que $p(S \setminus W) \subseteq p(S \setminus W)$ (Afirmación 4.1). Ahora, puesto que $V \in \mathcal{V}_p(x)$, $x \notin p(S \setminus V) \supseteq p(S \setminus W)$, se tiene que $x \notin p(S \setminus W)$ y por consiguiente $W \in \mathcal{V}_p(x)$.

$\blacksquare$

Definición 4.5. En un espacio pretopológico (S,p) para cada $x \in S$, la colección $\mathcal{V}_p(x)$ es llamada el filtro de vecindades de x.

Ejemplo 4.8. Para la pretopología del Ejemplo 4.1.1. definida por $p_{\top}(A) := A$ para cada $A \subseteq S$, se tiene que para cada $x \in S$, $\quad \mathcal{V}_{p_{\top}}(x) = \langle x \rangle = \{A \subseteq S \mid x \in A\}$, pues si $A \in \langle x \rangle$, entonces $x \in A$ y por tanto $x \notin S \setminus A = p(S \setminus A)$, es decir, $A \in \mathcal{V}_{p_{\top}}(x)$. Luego $\langle x \rangle \subseteq \mathcal{V}_{p_{\top}}(x)$ y como $\langle x \rangle$ es un ultrafiltro se sigue que $\mathcal{V}_{p_{\top}}(x) = \langle x \rangle$ para cada $x \in S$.

Proposición 4.1. Sean S un conjunto no vacío, p una pretopología sobre S, $\;A \subseteq S$ y $x \in S$. Entonces $x \in p(A)$ si y sólo si para cada $V \in \mathcal{V}_p(x)$, $\;V \cap A \neq \emptyset$.

Ejercicio 4.5. Se plantea como ejercicio para el lector la prueba de la anterior proposición.

Proposición 4.2. Sea S un conjunto no vacío. Si para cada $x \in S$ se ha asignado una colección $\mathcal{F}_x$ de subconjuntos de S que satisface las propiedades de la Afirmación 4.5, es decir, si para cada $x \in S$ la colección $\mathcal{F}_x$ satisface que:

(FV1) $x \in F$ para cada $F \in \mathcal{F}_x$.

(FV2) Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_x$ entonces, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_x$.

(FV3) Si $F \in \mathcal{F}_x$ y $F \subseteq W \subseteq S$, entonces $W \in \mathcal{F}_x$,

entonces existe una única pretopología p sobre S para la cual el filtro de vecindades de cada $x \in S$, $\;\mathcal{V}_p(x)$ coincide con la colección $\mathcal{F}_x$; es decir; existe una única pretopología p sobre S para la cual $\mathcal{V}_p(x) = \mathcal{F}_x$ para cada $x \in S$.

Demostración.
Supongamos que para cada $x \in S$ la colección $\mathcal{F}_x$ satisface $(FV1), (FV2)$ y $(FV3)$ y definamos $p : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ mediante

$$p(A) := \{x \in S \mid \text{ para cada } F \in \mathcal{F}_x, \;\; F \cap A \neq \emptyset\} \;\; \text{, para cada } \; A \subseteq S. \tag{4.6}$$

Veamos que p es una pretopología sobre S.
De la definición de p (4,6) se sigue que $p(\emptyset) = \emptyset$, y que $A \subseteq p(A)$ para cada $A \subseteq S$ (si $x \in A$, puesto que la colección $\mathcal{F}_x$ satisface $(FV1)$, para cada $F \in \mathcal{F}_x$, $\;x \in F$ y por tanto para cada $F \in \mathcal{F}_x$, $\;x \in F \cap A \neq \emptyset$, así $x \in p(A)$), con lo cual solo falta probar que para cada $A, B \subseteq S$, $\;p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$.
Sean $A, B \subseteq S$. Veamos que $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$. Si $x \notin p(A \cup B)$, de la

definición de p (4,6), se tiene que existe $F \in \mathcal{F}_x$ tal que $(A \cup B) \cap F = \emptyset$, luego $(A \cup B) \cap F = (A \cap F) \cup (B \cap F) = \emptyset$ y por tanto $A \cap F = \emptyset$ y $B \cap F = \emptyset$. Así, $x \notin p(A)$ y $x \notin p(B)$ y por consiguiente $x \notin p(A) \cup p(B)$. De lo cual tenemos que $p(A) \cup p(B) \subseteq p(A \cup B)$.
Recíprocamente, si $x \notin p(A) \cup p(B)$, entonces $x \notin p(A)$ y $x \notin p(B)$, luego de $(**)$ se sigue que existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_x$ tales que $F_1 \cap A = \emptyset$ y $F_2 \cap B = \emptyset$. Ahora, puesto que $\mathcal{F}_x$ satisface $(FV2)$ y $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_x$, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_x$ y además

$$(F_1 \cap F_2) \cap (A \cup B) = ((F_1 \cap F_2) \cap A) \cup ((F_1 \cap F_2) \cap B) = ((F_1 \cap A) \cap F_2) \cup ((F_2 \cap B) \cap F_1) = \emptyset.$$

Luego, existe $F \in \mathcal{F}_x$ $(F = F_1 \cap F_2)$ tal que $F \cap (A \cup B) = \emptyset$ y por tanto $x \notin p(A \cup B)$. De lo cual tenemos que $p(A \cup B) \subseteq p(A) \cup p(B)$.
Así, p es una pretopología sobre S.

Ahora veamos que para cada $x \in S$, $\mathcal{V}_p(x) = \mathcal{F}_x$.
Sea $x \in S$. Si $V \in \mathcal{V}_p(x)$, entonces de la definición de $\mathcal{V}_p(x)$ (Afirmación 4.5) se tiene que $x \notin p(S \setminus V)$, luego de la definición de p (4,6) se sigue que existe $F \in \mathcal{F}_x$ tal que $(S \setminus V) \cap F = \emptyset$, luego $F \subseteq V$, y por tanto $V \in \mathcal{F}_x$ (pues $\mathcal{F}_x$ satisface $(FV3)$). Recíprocamente, si $F \in \mathcal{F}_x$, de (4,6) se sigue que $x \notin p(S \setminus F)$ (pues $(S \setminus F) \cap F = \emptyset$), y por la definición de $\mathcal{V}_p(x)$ se sigue que $F \in \mathcal{V}_p(x)$. Así $\mathcal{V}_p(x) = \mathcal{F}_x$.

Para concluir la prueba, veamos que p es la única pretopología sobre S para la cual $\mathcal{V}_p(x) = \mathcal{F}_x$ para cada $x \in S$.
Sea q una pretopología sobre S para la cual $\mathcal{V}_q(x) = \mathcal{F}_x$ para cada $x \in S$. Veamos que $p = q$, es decir, veamos que para cada $A \subseteq S$, $p(A) = q(A)$. Puesto que para cada $x \in S$, $\mathcal{V}_q(x) = \mathcal{F}_x = \mathcal{V}_p(x)$, entonces $\mathcal{V}_q(x) = \mathcal{V}_p(x)$ para cada $x \in S$. Ahora, si $A \subseteq S$, entonces:

$$\begin{aligned} x \in p(A) &\Leftrightarrow \text{para cada } V \in \mathcal{V}_p(x),\ V \cap A \neq \emptyset && \text{(Afirmación 4.1)} \\ &\Leftrightarrow \text{para cada } V \in \mathcal{V}_q(x),\ V \cap A \neq \emptyset && (\mathcal{V}_p(x) = \mathcal{V}_q(x) \text{ para cada } x \in S) \\ &\Leftrightarrow x \in q(A) && \text{(Afirmación 4.1)} \end{aligned}$$

Luego $p = q$ y por tanto p es la única pretopología sobre S para la cual $\mathcal{V}_p(x) = \mathcal{F}_x$ para cada $x \in S$. ■

De lo expuesto anteriormente tenemos que una pretopología sobre un conjunto S está completamente determinada por la especificación del filtro de vecindades de cada

$x \in S$.
Algunos autores (por ejemplo, ver [8]) dan la definición de pretopología a partir de la colección de los filtros (o de una base para estos) de vecindades de cada punto del conjunto en cuestión.

Ejemplo 4.9. Si S es un conjunto no vacío y $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una colección no vacía de pretopologías sobre S, entonces para cada $x \in S$, $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$ es una subbase para un filtro sobre S (para cada $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$ es el filtro de vecindades de x en la pretopología p_γ), pues si B es cualquier elemento de $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$, entonces $B \in \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$ para algún $\gamma \in \Gamma$ y por tanto (de la propiedad FV1 para $\mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$) se tiene que $x \in B$. Así, todo elemento de $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$ tiene al punto x y por consiguiente cualquier intersección finita de elementos de $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$ tiene al punto x y por tanto es no vacía, además de esto se sigue que si V pertenece al filtro generado por $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$, entonces $x \in V$.
Así, para cada $x \in S$, el filtro generado por esta sub-base, $\langle \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)\rangle$, satisface la propiedad FV1, y por ser un filtro, también satisface las propiedades FV2 y FV3. Luego de la Proposición 4.2 se sigue que existe una única pretopología (la cual denotaremos por $p_{\vee\Gamma}$) para la cual el filtro de vecindades de cada $x \in S$ es precisamente el filtro $\langle \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)\rangle$. Además, de la demostración de la Proposición 4.2 podemos observar que la pretopología $p_{\vee\Gamma}$ está definida por

$$p_{\vee\Gamma}(A) := \{x \in S \mid A \cap F \neq \emptyset \text{ para cada } F \in \langle \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)\rangle\}, \quad \text{para cada} \quad A \subseteq S.$$

Ejemplo 4.10. Sea S un conjunto con por lo menos dos elementos y sea $s \in S$. Si a cada $x \in S$ con $x \neq s$ le asignamos la colección $\mathcal{F}_x = \langle x\rangle$ y a s le asignamos la colección $\mathcal{F}_s = \mathcal{U} \cap \langle s\rangle$ donde $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro distinto de $\langle s\rangle$, entonces para todo $x \in S$, la colección $\mathcal{V}_p(x)$ satisface las condiciones FV1, FV2 y FV3 de la Afirmación 4.5. Luego de la Proposición 4.2 se sigue que existe una única pretopología sobre S (la cual denotaremos por $p_{s,\mathcal{U}}$) para la cual cada $x \in S$, el filtro de vecindades $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x)$ es precisamente la colección $\mathcal{F}_x$.
Claro, no es sencillo visualizar como es esta función, pues depende de dos ultrafiltros distintos, sin embargo estas pretopologías (al igual que las de el ejemplo anterior) nos serán de gran utilidad para describir mas adelante el retículo de las pretopologías sobre un conjunto S.

CAPÍTULO 5

ESTRUCTURA DEL RETÍCULO DE LAS PRETOPOLOGÍAS

En esta sección se estudia cierta parte de la estructura del retículo de las pretopologías y definimos un orden en el conjunto de todas las pretopologías sobre un conjunto S. Se han generado algunas afirmaciones apartir de otras proposiciones y afirmaciones que tienen como objetivo describir la estructura de dicho retículo.

Definición 5.1. Sea S un conjunto no vacío y denotemos por $\mathrm{Pret}(S)$ al conjunto de todas las pretopologías sobre S. Definimos en $\mathrm{Pret}(S)$ la relación: dadas $p, q \in \mathrm{Pret}(S)$ $p \leq q$ si y sólo si $q(A) \subseteq p(A)$ para cada $A \subseteq S$.

Entonces con la definición anterior se puede asegurar que $(\mathrm{Pret}(S), \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.
La siguiente afirmación nos será de gran utilidad para estudiar parte de la estructura de $(\mathrm{Pret}(S), \leq)$.

Afirmación 5.1. Sean $p, q \in \mathrm{Pret}(S)$ $p \leq q$ si y sólo si $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ para cada $x \in S$.

Demostración.

Sean $p, q \in \text{Pret}(S)$, $\;x \in S$ y supongamos que $p \leq q$. Veamos que $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$.

Sea $A \in \mathcal{V}_p(x)$. Puesto que $p \leq q$, se tiene que $q(S \smallsetminus A) \subseteq p(S \smallsetminus A)$ y puesto que $x \notin p(S \smallsetminus A)$ (pues $A \in \mathcal{V}_p(x)$), entonces $x \notin q(S \smallsetminus A)$ y por tanto $A \in \mathcal{V}_q(x)$. Así, tenemos que, si $p \leq q$ entonces para cada $x \in S\;\; \mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$.

Recíprocamente, supongamos que para cada $x \in S$, $\;\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ y veamos que $p \leq q$, es decir, supongamos que para cada $x \in S$, $\;\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ y veamos que $q(A) \subseteq p(A)$ para cada $A \subseteq S$.

Sea $A \subseteq S$. Si $x \notin p(A)$ de la Afirmación 4.1 se sigue que existe $V \in \mathcal{V}_p(x)$ tal que $V \cap A = \emptyset$, y puesto que $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ para cada $x \in S$, entonces $V \in \mathcal{V}_q(x)$ y por tanto, existe $V \in \mathcal{V}_q(x)$ tal que $V \cap A = \emptyset$ lo cual (nuevamente por la Afirmación 4.1) implica que $x \notin q(A)$. Luego si $x \notin p(A)$, entonces $x \notin q(A)$ y por consiguiente $q(A) \subseteq p(A)$. Así, tenemos que si para cada $x \in S$, $\;\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ entonces $p \leq q$. ■

Para probar que $(\text{Pret}(S), \leq)$ es un retículo completo se hacen las siguientes afirmaciones.

Afirmación 5.2. Sea S un conjunto no vacío y $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una colección no vacía de pretopologías sobre S. Entonces, el *inf* de la colección $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ que notamos $(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma)$ es la pretopología $p_{\wedge_\Gamma} : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ definida por

$$p_{\wedge_\Gamma}(A) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(A) \quad \text{para cada} \quad A \subseteq S.$$

Demostración. Ya vimos que la función $p_{\wedge_\Gamma}$ es una pretopología sobre S, ver Ejemplo 4.2.

Ahora, es claro que para cada $A \subseteq S$, y para cada $\gamma \in \Gamma$, $p_\gamma(A) \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(A) = p_{\wedge_\Gamma}(A)$, y por tanto, de la definición del orden en $\text{Pret}(S)$, se tiene que para cada $\gamma \in \Gamma$, $p_{\wedge_\Gamma} \leq p_\gamma$ y por consiguiente $p_{\wedge_\Gamma}$ es cota inferior de la colección $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Por otra parte, si $q \in \text{Pret}(S)$ es tal que $q \leq p_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$, es decir, si q es una cota inferior de la colección $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, entonces para cada $\gamma \in \Gamma$ y para cada $A \subseteq S$, se tiene (de la Definición 5.1 del orden en $\text{Pret}(S)$) que $p_\gamma(A) \subseteq q(A)$ y por ende $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(A) \subseteq q(A)$ para cada $A \subseteq S$, es decir, $p_{\wedge_\Gamma}(A) \subseteq q(A)$ para cada $A \subseteq S$ y por tanto $q \leq p_{\wedge_\Gamma}$. Así, $p_{\wedge_\Gamma}$ es la mayor de las cotas inferiores de la colección $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ y en consecuencia, $\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma = p_{\wedge_\Gamma}$. ■

Afirmación 5.3. Sea S un conjunto no vacío y $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una colección no vacía de pretopologías sobre S. Entonces, el *sup* de la colección $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, $(\bigvee_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma)$ es la pretopología $p_{\vee_\Gamma} : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ definida por

$$p_{\vee_\Gamma}(A) := \left\{ x \in S \mid A \cap F \neq \emptyset \text{ para cada } F \in \langle \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \rangle \right\} \text{para cada} \quad A \subseteq S.$$

Demostración.
Ya vimos que la función $p_{\vee_\Gamma}$ es una pretopología sobre S. Ver Ejemplo 4.9, puesto que para cada $\gamma \in \Gamma$ y para cada $x \in S$ se tiene que

$$\mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \subseteq \left\langle \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \right\rangle = \mathcal{V}_{p_{\wedge_\Gamma}}(x),$$

de la Proposición 5.1 se sigue que $p_\gamma \leq p_{\vee_\Gamma}$ para cada $\gamma \in \Gamma$ y por tanto $p_{\vee_\Gamma}$ es cota superior del conjunto $\{p_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Por otra parte, si $q \in \mathrm{Pret}(S)$ es cota superior del conjunto $\{p_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ entonces $p_\gamma \leq q$ para cada $\gamma \in \Gamma$, y por consiguiente para cada $\gamma \in \Gamma$ y para cada $x \in S$, $\quad \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ (nuevamente de la Proposición 5.1), luego para cada $x \in S$, $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ y por tanto $\langle \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \rangle \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ (pues si $F \in \langle \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \rangle$, existen $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x)$ tales que $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq F$ y puesto que $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_{p_\gamma}(x) \subseteq \mathcal{V}_q(x)$ y $\mathcal{V}_q(x)$ es cerrado para intersecciones finitas por ser un filtro, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{V}_q(x)$ y por tanto $F \in \mathcal{V}_q(x)$), luego (otra vez de la Proposición 5.1) $p_{\vee_\Gamma} \leq q$. Así, $p_{\vee_\Gamma}$ es la menor de las cotas superiores del conjunto $\{p_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ y por tanto

$$\bigvee_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma = p_{\vee_\Gamma}.$$

■

Afirmación 5.4. $(\mathrm{Pret}(S), \leq)$ tiene como elemento máximo "1" la pretopología $p_\top : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ definida por

$$p_\top(A) := A \quad \text{para cada} \quad A \subseteq S. \tag{5.1}$$

Demostración.
En el Ejemplo 4.1.1., vimos que $p_\top$ es una pretopología sobre S.
Ahora, si $p \in \mathrm{Pret}(S)$ se tiene que, para cada $A \subseteq S$, $A \subseteq p(A)$, es decir, $A = p_\top(A) \subseteq p(A)$

para cada $A \subseteq S$ y por tanto $p \leq p_\top$ para cada $p \in \operatorname{Pret}(S)$.
Así, la pretopología $p_\top$ es el "1" en $(\operatorname{Pret}(S), \leq)$. ■

Afirmación 5.5. $(\operatorname{Pret}(S), \leq)$ tiene como elemento mínimo "0" la pretopología $p_\perp : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ definida por:

$$p_\perp(A) := \begin{cases} \emptyset & \text{si } \; A = \emptyset, \\ S & \text{si } \; A \neq \emptyset. \end{cases} \tag{5.2}$$

Demostración.
En el Ejemplo 4.1.2., vimos que $p_\perp$ es una pretopología sobre S.
Ahora, si $p \in \operatorname{Pret}(S)$ se tiene que, para cada $\emptyset \neq A \subseteq S$, $p(A) \subseteq S$, es decir, $p(A) \subseteq S = p_\perp(A)$ para cada $\emptyset \neq A \subseteq S$. Por otro lado, es claro que $\emptyset = p(\emptyset) \subseteq p_\perp(\emptyset) = \emptyset$.
Luego, $p(A) \subseteq p_\perp(A)$ para cada $A \subseteq S$ y por tanto $p_\top \leq p$ para cada $p \in \operatorname{Pret}(S)$.
Así, la pretopología $p_\perp$ es el "0" en $(\operatorname{Pret}(S), \leq)$. ■

Como consecuencia de las afirmaciones 5.2 , 5.3, 5.4 y 5.5 se tiene la siguiente Proposición:

Proposición 5.1. $(\operatorname{Pret}(S), \leq)$ es un retículo completo.

La siguiente Proposición muestra que $(\operatorname{Pret}(S), \leq)$ es atómico.

Proposición 5.2. $(\operatorname{Pret}(S), \leq)$ es atómico, sus átomos son precisamente las pretopologías $p_{a,s} : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ definidas por:

$$p_{a,s}(A) := \begin{cases} \emptyset & \text{si } \; A = \emptyset, \\ S \setminus \{s\} & \text{si } \; A = \{a\}, \\ S & \text{si } \; A \neq \{a\} \text{ y } A \neq \emptyset \end{cases} \tag{5.3}$$

donde s y a son dos puntos distintos en S.

Demostración.
En el Ejemplo 4.1.3., vimos que las funciones $p_{a,s}$ son pretopologías sobre S para cada $a, s \in S$ con $a \neq s$.
Ahora, veamos que para $s, a \in S \quad (a \neq s)$ la función $p_{a,s}$ es un átomo en $\operatorname{Pret}(S)$.
Sea $p \in \operatorname{Pret}(S)$ tal que $p < p_{a,s}$. Tenemos que si $\emptyset \neq A \subseteq S$ y $A \neq \{a\}$ entonces $p_{a,s}(A) = S$, luego como $p < p_{a,s}$ se tiene que $S = p_{a,s}(A) \subseteq p(A)$ y por tanto

$S = p(A) = p_{a,s}(A)$ para cada $A \neq \{a\}$, y nuevamente como $p < p_{a,s}$ se debe tener que $S \setminus \{s\} = p_{a,s}(\{a\}) \subsetneq p(\{a\})$ y por consiguiente $p(\{a\}) = S$. Así, tenemos que si $p \in \text{Pret}(S)$ es tal que $p < p_{a,s}$, entonces $p(A) = S$ para cada $\emptyset \neq A \subseteq S$, y claro $p(\emptyset) = \emptyset$ (pues p es una pretopología), es decir, $p = p_\perp = 0$, y por tanto la función $p_{a,s}$ es un átomo para cada $s, a \in S$ con $a \neq s$.

Por otra parte, nótese que si $p \in \text{Pret}(S)$ y $p \neq 0 = p_\perp$, existe $a \in S$ tal que $p(\{a\}) \neq S$ (pues si no, como p es monótona (Afirmación 4.1), dado $\emptyset \neq A \subseteq S$, se tendría que para cada $a \in A$, $S = p(\{a\}) \subseteq p(A)$ y por tanto $p = 0$), luego $p(\{a\}) \subseteq S \setminus \{s\}$ para algún $s \in S$ con $s \neq a$. Luego tenemos que si $p \in \text{Pret}(S)$, $\quad p \neq 0$, existen $a, s \in S \quad (a \neq s)$, tal que la función $p_{a,s} : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ dada en (5.3), satisface que $p_{a,s} \leq p$. Es decir, dada una pretopología p sobre S, $p \neq 0$, existe un átomo $p_{a,s} \in \text{Pret}(S)$ tal que $p_{a,s} \leq p$ y por consiguiente $(\text{Pret}(S), \leq)$ es atómico.
El hecho que $(\text{Pret}(S), \leq)$ sea atómico garantiza que todo átomo en $\text{Pret}(S)$ es de la forma dada en (5.3). ■

Ahora veamos que $(\text{Pret}(S), \leq)$ es co-atómico. Denotaremos los co-átomos por $p_{s,\mathcal{U}}$. Antes de hacer la prueba, recuérdese que en $\text{Pret}(S)$ del Ejemplo 4.8 se sigue en términos de filtro de vecindades, que el $1 = p_\top$, es precisamente la pretopología que tiene como filtro de vecindades para cada $x \in S$, la colección $\mathcal{V}_{p_\top}(x) = \langle x \rangle$.

Proposición 5.3. $(\text{Pret}(S), \leq)$ es co-atómico. $p_{s,\mathcal{U}} \in \text{Pret}(S)$ es un co-átomo si y sólo si, existe $s \in S$ tal que p tiene como filtro de vecindades para cada $x \neq s$ la colección $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x) = \langle x \rangle = \{A \subseteq S \mid x \in A\}$ y para s, $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(s) = \mathcal{U} \cap \langle s \rangle$ donde $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro distinto de $\langle s \rangle$.

Demostración.
En primer lugar, veamos que si $p_{s,\mathcal{U}} \in \text{Pret}(S)$ es tal que existe $s \in S$ tal que p tiene como filtro de vecindades para cada $x \neq s$ la colección $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x) = \langle x \rangle = \{A \subseteq S \mid x \in A\}$ y para s, $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(s) = \mathcal{U} \cap \langle s \rangle$ donde $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro distinto de $\langle s \rangle$, entonces p es un co-átomo.
Sea $p \in \text{Pret}(S)$ tal que $p \neq 1$ y $p_{s,\mathcal{U}} \leq p$. Veamos que $p_{s,\mathcal{U}} = p$.
De la Proposición 5.1 se sigue que $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x) \subseteq \mathcal{V}_p(x)$ para cada $x \in S$. Ahora, si $x \neq s$, $\quad \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x) = \langle x \rangle$ y como $\langle x \rangle = \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x) \subseteq \mathcal{V}_p(x)$, y $\langle x \rangle$ es un ultrafiltro, se tiene que $\mathcal{V}_p(x) = \langle x \rangle$. Luego para cada $x \neq s$, $\quad \mathcal{V}_p(x) = \langle x \rangle$. Por otra parte, como $\mathcal{V}_p(x) \neq 1$, entonces se debe tener que $\mathcal{V}_p(s) \neq \langle s \rangle$ (pues sino se tendría que $\mathcal{V}_p(x) = \langle x \rangle$ para todo $x \in S$ y por tanto $p = 1$), y así, se tiene que $\mathcal{U} \cap \langle s \rangle = \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(s) \subseteq \mathcal{V}_p(s) \subsetneq \langle s \rangle$. Veamos

que $\langle s\rangle \cap \mathcal{U} = \mathcal{V}_p(s)$. Puesto que $\mathcal{V}_p(s) \subsetneqq \langle s\rangle$, la colección $\beta = \{F \setminus \{s\} | F \in \mathcal{V}_p(s)\}$ es base para un filtro $\mathcal{G}$ sobre S. En efecto, puesto que $\mathcal{V}_p(s) \subsetneqq \langle s\rangle$, para cada $F \in \mathcal{V}_p(s)$, $F \neq \{s\}$ y así $\emptyset \notin \beta$. Por otra parte si $B_1 = F_1 \setminus \{s\}$ y $B_2 = F_2 \setminus \{s\}$ están en β, entonces $B_1 \cap B_2 = (F_1 \setminus \{s\}) \cap (F_2 \setminus \{s\}) = (F_1 \cap F_2) \setminus \{s\} \in \beta$. Por otro lado, puesto que si $F \in \mathcal{V}_p(s)$, F contiene a $F \setminus \{s\}$ y $F \in \langle s\rangle$, entonces $\mathcal{V}_p(s) \subseteq \langle s\rangle \cap \mathcal{G}$ y si $A \in \langle s\rangle \cap \mathcal{G}$, entonces $s \in A$ y existe $F \in \mathcal{V}_p(s)$ tal que $F \setminus \{s\} \subseteq A$, así $F \subseteq A \cup \{s\} = A$ y por tanto $A \in \mathcal{V}_p(s)$ luego $\langle s\rangle \cap \mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}_p(s)$ y por consiguiente $\langle s\rangle \cap \mathcal{G} = \mathcal{V}_p(s)$.
Ahora, si existe $U \in \mathcal{U}$ tal que para cada $F \in \mathcal{V}_p(s)$, $F \nsubseteq U$, entonces para cada $F \in \mathcal{V}_p(s)$ se tiene que $F \nsubseteq U \subseteq U \cup \{s\}$ y por tanto $U \cup \{s\} \notin \mathcal{V}_p(s)$, lo cual contradice que $\langle s\rangle \cap \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}_p(s)$ (pues $U \cup \{s\} \in \langle s\rangle \cap \mathcal{U}$). Así, se tiene que para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $F \in \mathcal{V}_p(s)$ tal que $F \subseteq U \subseteq U \cup \{s\}$ y por consiguiente, para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $F \in \mathcal{V}_p(s)$ tal que $F \setminus \{s\} \subseteq U$, es decir, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$ y como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, se tiene que $\mathcal{U} = \mathcal{G}$, luego $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(s) = \langle s\rangle \cap \mathcal{U} = \langle s\rangle \cap \mathcal{G} = \mathcal{V}_p(s)$ y por consiguiente, para cada $x \in S$, $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x) = \mathcal{V}_p(x)$ y así, $p_{s,\mathcal{U}} = p$ y por tanto $p_{s,\mathcal{U}}$ es un co-átomo en $\mathrm{Pret}(S)$.
Además, es claro que todo co-átomo en $\mathrm{Pret}(S)$ es de esta forma, pues si $p \in \mathrm{Pret}(S)$ y $p \neq 1$, entonces existe $s \in S$ tal que $\mathcal{V}_p(s) \subsetneqq \langle s\rangle$, y por tanto $\mathcal{V}_p(s)$ no es un ultrafiltro y por ende, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$, $\mathcal{U} \neq \langle s\rangle$ tal que $\mathcal{V}_p(s) \subseteq \mathcal{U}$ (pues si el único ultrafiltro que contiene a $\mathcal{V}_p(s)$ es $\langle s\rangle$ entonces $\mathcal{V}_p(s) = \langle s\rangle$ ya que todo filtro es la intersección de todos los ultrafiltros que lo contienen). Por otro lado, como $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \langle x\rangle$ para cada $x \in S$, y $\mathcal{V}_p(s) \subseteq \langle s\rangle \cap \mathcal{U}$, entonces si tomamos para cada $x \neq s$, $x \in S$, $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x) = \langle x\rangle$ y para s, $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(s) = \mathcal{U} \cap \langle s\rangle$ donde $\mathcal{U}$ es el ultrafiltro mencionado anteriormente, se tiene que $\mathcal{V}_p(x) \subseteq \mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x)$ para cada $x \in S$, y por tanto $p_{s,\mathcal{U}}$ es un co-átomo tal que $p \leq p_{s,\mathcal{U}}$ ($p_{s,\mathcal{U}}$ es la pretopología asociada a $\mathcal{V}_{p_{s,\mathcal{U}}}(x)$).
El hecho que $\mathrm{Pret}(S)$ sea co-atómico, garantiza que todos los co-átomos son de la forma mencionada anteriormente y esto completa la prueba. $\blacksquare$

CAPÍTULO 6

SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

En esta sección daremos claves para la solución de algunos de los ejercicios propuestos.

- Ejercicio 2.2. Exhiba un homomorfismo de $D_{12} \Rightarrow D_{15}$?
  Si definimos la función φ de la siguiente forma, obtenemos un homomorfísmo de retículos

  $$\varphi(1) = 1,\ \varphi(2) = 5,\ \varphi(3) = 3,\ \varphi(6) = 15,\ \varphi(4) = 5,\ \text{y},\ \varphi(12) = 15.$$

- Ejercicio 2.4.1. $(\mathbb{N}_0, |)$ es un retículo complementado?
  Respuesta NO, escojemos un número natural primo y lo relacionamos con otro arbitrario, entonces el $inf\{p, q\} = M.C.D(p, q) = 1$, y el $sup\{p, q\} = p \times q$ aquí radica el problema pues $p \times q \neq 0$ la única forma en que $p \times q$ pueda ser igual a cero, es que esté comparado con él. Ahora para el caso en que el número natural escogido no se sea primo basta con descomponerlos en sus factores primos por el teorema fundamental de la aritmética y al hallar el m.c.m encontramos que éste no dá el sup de $(\mathbb{N}_0, |)$, aunque el inf de cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}_0$ sigue siendo 1.

- Ejercicio 2.4.2. Sea G un grupo, $S(G)$ los subgrupos de G entonces $(S(G), \subseteq)$ es completo?
  El $inf\{S(G)\}$ es la intersección, y el $sup\{S(G)\}$ es el menor subgrupo que contiene a la unión, es decir, es el subgrupo generado por la unión.

- Ejercicio 2.6.1. En $(\mathbb{N}_0, |)$, explique porqué los primos no son $\wedge$-densos ni $\vee$-densos.
  De una colección de primos el M.C.D de la colección es igual a $= 1$, si se cumple que cada número se pueda ver como el inf $\{\mathbb{N}_0\}$ para que este retículo sea $\wedge$-denso, pero el único elemento que se puede escribir como el inf $\{\mathbb{N}_0\}$ es 1, por lo tanto este retículo no es $\wedge$-denso.
  Ahora, veamos que si es $\vee$-denso, tomamos $8 \in \mathbb{N}_0$, y lo descomponemos en sus factores primos, es decir, $8 = 2^3$ y al hallar el M.C.D de sus factores primos se tiene que es 2, por lo tanto no es $\vee$-denso.

- Ejercicio 2.6.2. En $(\mathbb{N}_0, |)$, demuestre que E el conjunto de los números que son potencia de primos es $\vee$-denso.
  Por el Teorema Fundamental de la Aritmética todo número natural se puede ver como producto de potencias de primos entonces sea n un número natural, tal que al escribirlo como producto de primos es:

  $$n = p_1\alpha^1 \times p_2\alpha^2 \times \ldots \times p_n\alpha^n,$$

  donde p_i es primo, y $\alpha^i \geq 1$, luego como el

  $$inf\ \{p_1\alpha^1, p_2\alpha^2, \ldots, p_n\alpha^n\} = \text{M.C.D}(p_1\alpha^1, p_2\alpha^2, \ldots, p_n\alpha^n) = 1$$

  entonces el

  $$sup\ \{p_1\alpha^1, p_2\alpha^2, \ldots, p_n\alpha^n\} = m.c.m(p_1\alpha^1, p_2\alpha^2, \ldots, p_n\alpha^n) = n$$

  pues el

  $$\begin{aligned} m.c.m(p_1\alpha^1, p_2\alpha^2, \ldots, p_n\alpha^n) &= \frac{p_1\alpha^1 \times p_2\alpha^2 \times \ldots \times p_n\alpha^n}{M.C.D(p_1\alpha^1, p_2\alpha^2, \ldots, p_n\alpha^n)} \\ &= p_1\alpha^1 \times p_2\alpha^2 \times \ldots \times p_n\alpha^n = n, \end{aligned}$$

  ya que son primos relativos. Por lo tanto el conjunto de los números que son potencia de primos es $\vee$-denso.

- Ejercicio 2.7. En el retículo de los cerrados de la recta real con la topología usual de $\mathbb{R}$, cuáles son los átomos? Demuestre que no existen co-átomos, formule el resultado dual para el retículo de los abiertos.

Suponer a S como un cerrado maximal, luego $\mathbb{R} \setminus S \neq \emptyset$, tomar un punto $x \in \mathbb{R} \setminus S$. Entonces $S \subseteq S \cup \{x\}$ pues unión finita de cerrados es cerrada, por lo tanto hay alguien más grande que S que lo contiene, luego no existen co-átomos. Los átomos son todos los conjuntos unitarios en $\mathbb{R}$. En el caso de los abiertos los co-átomos serían los complementos de los conjuntos unitarios pero no existen átomos.

- Ejercicio 2.8. En el retículo de los cerrados de la recta real con la topología usual de $\mathbb{R}$, cuáles elementos son complementados?

  Sólo $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son los complementados pues el sup es la intersección de todos los cerrados que contienen a la unión, en otras palabras es la adherencia de la unión, y el inf es la intersección. Es más si existieran dos subconjuntos cerrados propios no vacíos que fuesen complementarios, estos formarían una disconexión de $\mathbb{R}$, lo cual contradice que $\mathbb{R}$ es conexo. Por consiguiente los únicos complementados son $\emptyset$ y $\mathbb{R}$.

- Ejercicio 2.9. En el retículo de los cerrados de un espacio topológico X ¿cuáles elementos son complementados?

  Para el caso en el que X es conexo, sencillamente retomamos a la solución del Ejercicio 2.8. Cuando X es disconexo, tenemos que la unión disyunta de dos cerrados es cerrada, es decir, que todos los pares de conjuntos que forman una disconexión del espacio son complementados.

- Ejercicio 4.2. Prueba de la Afirmación 4.1.

  Demostración.

  Sean $A, B \subseteq S$ tales que $A \subseteq B$. Veamos que $p(A) \subseteq p(B)$.

  Puesto que $A \subseteq B$, $B = A \cup B$ luego $p(B) = p(A \cup B)$, pero por ser p una pretopología sobre S de la propiedad $(K2)$ tenemos que $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$ y por tanto $p(B) = p(A) \cup p(B)$ lo cual implica que $p(A) \subseteq p(B)$. ■

- Ejercicio 4.3. En la función p definida en el Ejemplo 4.1.3., si se quiere hallar el

int_p entonces se define

$$int_p(A) := \begin{cases} S & \text{si } \ A = S, \\ \{s\} & \text{si } A = S \setminus \{a\}, \\ \emptyset & \text{si } \ A \neq S. \end{cases} \tag{6.1}$$

pues si $A = S$ entonces $int_p(A) = S \setminus p(S \setminus A) = S \setminus p(S \setminus S) = S \setminus \emptyset = S$.
Si $A = S \setminus \{a\}$ entonces $int_p(A) = S \setminus p(S \setminus A)$, pero

$$p(S \setminus A) = p(S \setminus (S \setminus \{a\}) = p(\{a\}) = S \setminus \{s\}.$$

Entonces $int_p(A) = S \setminus S \setminus \{s\} = \{s\}$, por lo tanto $int_p(A) = \{s\}$ y;
Si $A \neq S \setminus \{a\}$, entonces $S \setminus A \neq \{a\}$, y $p(S \setminus A) = S$, luego $int_p(A) = S \setminus S = \emptyset$.

- Ejercicio 4.5. Prueba de la Proposición 4.1.

Demostración.
Si existe $V \in \mathcal{V}_p(x)$ tal que $V \cap A = \emptyset$, entonces $V \subseteq S \setminus A$ y por $(FV3)$ se sigue que $S \setminus A \in \mathcal{V}_p(x)$ y por tanto $x \notin p(S \setminus (S \setminus A)) = p(A)$. Luego tenemos que si $x \in p(A)$, entonces $A \cap V \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{V}_p(x)$.

Recíprocamente, si $x \notin p(A) = p(S \setminus (S \setminus A))$, entonces $S \setminus A \in \mathcal{V}_p(x)$, y como $(S \setminus A) \cap A = \emptyset$, entonces se tiene que existe $V \in \mathcal{V}_p(x)$ $(V = S \setminus A)$ tal que $V \cap A = \emptyset$. Luego tenemos que si $A \cap V \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{V}_p(x)$, entonces $x \in p(A)$. ■

REFERENCIAS

[1] BOURBAKI, N., *General Topology*, Part 1, Elements of Mathematics, Addison Wesley, 1966.

[2] CARSTENS, A. M., *The Laticce of Pretopologies on an Arbitrary Set S*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 29, No. 1, 1969.

[3] ČECH, E.,*Topological Spaces*, John Wiley & Sons, 1966.

[4] CHICOURRAT, M. & HORVÁTH, C.D.,*Pretopologies, Preuniformities and Probabilistic Metric Spaces*, Acta Math. Hungar, 110(1-2)(2006),91-116.

[5] DE CASTRO, R. & RUBIANO, G.,*Esqueletos de retículos completos*, Boletín de Matemáticas Nueva Serie, Vol 10, No. 2, 2004.

[6] SZÁSZ, G., *Introduction to Laticce Theory*, Academic Press, New York, 1963.

[7] WILLARD, S., *General Topology*, Addison Wesley, 1968.

[8] STADLER, B. M.R., STADLER, P. F., SHPAK, M. & WAGNER, G. P., *Recombination Space, Metrics, and Pretopologies*, Z. Phys. Chem. 216(2002),217-234.

[9] SPINTER, CHARLES C., *Set Theory*, Addison Wesley Publishing Company, 1971.