

***NOCIÓN DE ESTADOS VIBRACIONALES DEL CAMPO  
ELECTROMAGNÉTICO: UNA NUEVA VISIÓN SOBRE LOS  
FOTONES LIBRES***

*Leonardo Fabián Calderón Mantilla*

*Universidad Industrial de Santander*

*Facultad de Ciencias*

*Escuela de Física*

*2015*

***NOCIÓN DE ESTADOS VIBRACIONALES DEL CAMPO  
ELECTROMAGNÉTICO: UNA NUEVA VISIÓN SOBRE LOS  
FOTONES LIBRES***

*Trabajo de grado realizado como requisito parcial para optar  
al título de Magíster en Física*

*Autor:*

*Leonardo Fabián Calderón Mantilla*

*Director:*

*Rafael Ángel Torres Amaris*

*Universidad Industrial de Santander*

*Facultad de Ciencias*

*Escuela de Física*

*2015*

*“Digno eres tú, Jehová, nuestro Dios mismo, de recibir la gloria y la honra y el poder, porque tú creaste todas las cosas, y a causa de tu voluntad existieron y fueron creadas”*  
*Revelación 4:11.*

*“Cuando veo tus cielos, las obras de tus dedos, la luna y las estrellas que tú has preparado, ¿qué es el hombre mortal para que lo tengas en cuenta, y el hijo del hombre terrestre para que cuides de él?”*  
*Salmo 8:3,4.*

*Este trabajo lo dedico a mi familia y amigos....*

# *Agradecimientos*

- A Rafael Torres mi director de trabajo de grado de maestría por compartir conmigo su visión sobre la óptica y por permitirme trabajar en una de sus tantas ideas.
- A la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia por haberme otorgado una beca para realizar mis estudios de maestría en física teórica en la Universidad Industrial de Santander.
- A los jurados calificadores de mi trabajo de grado, los profesores Carlos Leonardo Beltrán Ríos de la Universidad Industrial de Santander y Néstor Alonso Arias Hernández de la Universidad de Pamplona, por aceptar evaluar mi trabajo, por todas sus sugerencias y comentarios.
- A la Universidad Industrial de Santander por permitirme llevar a cabo mi formación de pregrado y maestría en Física.
- Al profesor Leonardo Pachón de la Universidad de Antioquía, al cual conocí en el evento “Quantum Control of Light & Matter” realizado en South Hadley, Massachusetts, USA.
- A los profesores: Jorge Martínez, Guillermo González, Harold Paredes y Yeinzon Rodríguez.
- A Karol por compartir estos años junto a mí, por su incondicionalidad.

# Resumen

**TÍTULO:** NOCIÓN DE ESTADOS VIBRACIONALES DEL CAMPO ELECTRO-MAGNÉTICO: UNA NUEVA VISIÓN SOBRE LOS FOTONES LIBRES\*.

**AUTOR:** CALDERÓN MANTILLA, Leonardo Fabián<sup>†</sup>.

**PALABRAS CLAVES:** Fotón libre, emisión espontánea, estado vibracional del campo electromagnético.

**DESCRIPCIÓN:** Las tecnologías relacionadas con la generación y detección de fotones individuales han tenido un interés constante durante por lo menos las pasadas tres décadas. Esto debido al gran potencial en áreas de la física tales como: información cuántica, computación cuántica y fundamentos de la mecánica cuántica. Paralelamente a los desarrollos experimentales sobre la generación y detección de fotones individuales, se han desarrollado diferentes formulaciones acerca del estado cuántico para un fotón individual, con el fin de esclarecer e interpretar la fenomenología asociada a la gran variedad de experimentos realizados. Entre las diferentes formulaciones acerca del estado de un fotón se encuentran principalmente tres: estados de un fotón monocromáticos, policromáticos y el formalismo de la función de onda. Las anteriores formulaciones presentan ciertas falencias al confrontar estas con las observaciones, algunos ejemplos de esto se asocian con la deslocalización de dichos estados (cuantización en modos monocromáticos-ondas planas), la falta de una frecuencia bien definida (cuantización en modos no-monocromáticos, modelo de un fotón como un paquete de ondas o fotones policromáticos), entre otras. En el presente trabajo de grado se formulará un nuevo modelo para fotones libres basado en una nueva noción denominada ‘estado vibracional del campo electromagnético’. Mediante esta nueva formulación se define el estado cuántico para un fotón libre con una frecuencia definida y así mismo con cierto grado de localización.

---

\*Trabajo de grado de Maestría en Física

<sup>†</sup>Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Rafael Ángel Torres Amaris (Director).

# *Abstract*

**TITLE:** NOTION OF VIBRATIONAL STATES OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD: A NEW VISION ABOUT FREE PHOTONS<sup>‡</sup>.

**AUTHOR:** CALDERÓN MANTILLA, Leonardo Fabián<sup>§</sup>.

**KEYWORDS:** Free photon, spontaneous emission, vibrational state of the electromagnetic field.

**DESCRIPTION:** The technologies related to the generation and detection of single photons have had a continuing interest for at least the past three decades. This is due to the great potential in areas of physics such as quantum information, quantum computing and the foundations of quantum mechanics. Analogously to the experimental developments on the generation and detection of individual photons, have been developed various formulations for the quantum state of a single photon, in order to clarify and interpret the phenomena associated to a wide variety of experiments. Among the different formulations about the state of a photon are found mainly three: monochromatic photon states, polychromatic photon states and the formalism of the wave function. The above formulations have certain shortcomings in confronting these with observations, some examples are associated with the delocalization of these states (quantization in monochromatic plane-wave modes), the lack of a well defined frequency (quantization in non-monochromatic modes or polychromatic photon), among others. In this thesis a new model for free photons based on a new concept called ‘vibrational state of the electromagnetic field’ is formulated. Through this new formulation, it can to define the quantum state for a localized free photon with a defined frequency.

---

<sup>‡</sup>Master’s degree project

<sup>§</sup>Faculty of Sciences, School of Physics, Rafael Ángel Torres Amaris (Supervisor)

# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>¿Qué es un fotón?: Principales visiones</b>	<b>17</b>
2.1	Cuantos de luz: El fotón según Einstein . . . . .	17
2.2	Cuantización del campo electromagnético . . . . .	18
2.2.1	Cavidad de paredes perfectamente reflectoras: cuantización monomodo	19
2.2.2	Cavidad ficticia en el espacio libre: cuantización multimodo . . .	23
2.3	Fotones policromáticos . . . . .	24
2.4	Discusiones . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Noción de estados vibracionales del campo electromagnético</b>	<b>26</b>
3.1	Proceso de emisión . . . . .	26
3.1.1	Función de perfil de línea espectral $\mathcal{G}(\nu)$ . . . . .	27
3.2	Energía de un fotón . . . . .	28
3.3	Paquetes de onda: Análisis de Fourier . . . . .	29
3.3.1	Paquetes de onda: óptica clásica . . . . .	30

3.4	El fotón como un paquete de ondas . . . . .	31
3.5	Formulación del modelo . . . . .	33
3.5.1	Estado cuántico de un fotón libre . . . . .	34
3.6	Función de onda para el fotón . . . . .	36
3.6.1	Sobre la fuente de emisión y la realización de diferentes estados vibracionales . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Noción de estados vibracionales en la fenomenología de experimentos con fotones libres</b>	<b>40</b>
4.1	Divisor de haz: relaciones de entrada y salida . . . . .	40
4.2	Interferómetro de Michelson: Coherencia temporal . . . . .	42
4.3	Límite clásico . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Conclusiones y perspectivas</b>	<b>46</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>48</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>52</b>
<b>A</b>	<b>Señal analítica</b>	<b>53</b>

# *Lista de figuras*

2.1	Cavidad de paredes perfectamente reflectoras en $z = 0$ y $z = L$ . . . . .	19
3.1	Emisión espontánea de un fotón de frecuencia $\nu$ en la transición atómica del estado excitado $ b\rangle$ al estado de menor energía $ a\rangle$ . . . . .	27
3.2	Función de perfil de línea espectral. . . . .	27
3.3	Los electrones emitidos poseen una energía cinética $K_{e^-}$ igual a la diferencia entre la energía del fotón incidente $\mathcal{E}_\gamma = h\nu$ y la función de trabajo del material $\sigma$ . . . . .	28
3.4	Representación cualitativa de la distribución de energía electromagnética asociada a un fotón con respecto a el paquete de ondas. La mancha roja hace referencia a la energía del fotón. . . . .	29
3.5	Paquete de ondas . . . . .	31
3.6	Dispersión espectral de un fotón a través de un prisma. . . . .	32
3.7	Paquete de ondas - Función armónica. . . . .	33
3.8	Representación gráfica del operador creación $\hat{\mathcal{B}}(\varphi(t; \nu'), \nu', \phi_o)$ . . . . .	35
3.9	La energía electromagnética de un fotón vibra de manera armónica a la frecuencia $\nu'$ y viaja de manera localizada. . . . .	36
3.10	Función de onda mecano-cuántica $\gamma(t)$ asociada al estado vibracional $ \gamma\rangle =  \varphi(t; \nu'), \nu', \phi_o\rangle$ . . . . .	38

3.11	Emisión de fotones con diferentes frecuencias. . . . .	39
3.12	Fotones de la misma frecuencia en diferentes estados vibracionales. . . .	39
4.1	Divisor de haz. Brazos de entrada (1) y (2). Brazos de salida (3) y (4).	41
4.2	Interferómetro de Michelson. . . . .	43
4.3	Paquete de ondas clásico formado a partir de un conjunto muy grande de fotones. . . . .	44
4.4	Espectro de la fuente a partir del ensamble de posibles estados vibracionales en los que se puede realizar la fuente. . . . .	45

# Capítulo 1

## Introducción

En la actualidad hay diferentes visiones acerca de la formulación de los fotones, de hecho artículos, libros entre otros siguen en respuesta de la pregunta ¿Qué es un fotón? Lo anterior, probablemente se debe a que los modelos hasta la fecha no brindan una respuesta del todo satisfactoria, al punto que muchos adoptan una postura basada en los cálculos sin prestar mucha atención a la interpretación del fenómeno de manera fundamental.

Formalmente hablando, los fotones individuales representan el carácter cuántico de la luz en su estado más fundamental. El estado cuántico para un fotón representa el ejemplo por excelencia de luz no-clásica. En la óptica cuántica un fotón es considerado como la excitación elemental de un modo espacio-temporal del campo electromagnético cuantizado [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

En la explicación del efecto fotoeléctrico, Albert Einstein asumió que la radiación electromagnética estaba cuantizada de manera fundamental. De esta forma, la energía asociada a la luz no está distribuida de manera continua en el espacio; un rayo de luz consiste en un número finito de cuantos de energía localizados en el espacio que viajan sin fraccionarse, y en la interacción con la materia son emitidos o absorbidos como entidades completas, cumpliendo con la relación  $\mathcal{E} = h\nu$ , en donde  $\mathcal{E}$  representa la energía y  $\nu$  la frecuencia asociada a cada cuanto de energía de radiación electromagnética [14, 15, 16, 17]. Es curioso que a pesar de que la cuantización canónica del campo electromagnético (segunda cuantización - teoría cuántica de campos) ya había sido introducida años atrás, y la electrodinámica cuántica ya había sido establecida como una teoría (Dirac, Fermi, Weisskopf, Bethe, Tomonaga, Schwinger, Feynman, Dyson), Albert

Einstein considerara lo siguiente en 1954: “All these fifty years of conscious brooding have brought me no nearer to the answer to the question, ‘What are light quanta?’ Nowadays every Tom, Dick and Harry thinks he knows it, but he is mistaken”. Lo anterior deja entrever que la formulación de la teoría cuántica de campos no era satisfactoria y no se ajustaba a su visión original sobre los fotones.

Las tecnologías relacionadas con la generación y detección de fotones individuales han tenido un interés constante durante por lo menos las pasadas tres décadas [18, 13, 19, 20]. Esto debido al gran potencial en áreas de la física tales como: información cuántica, computación cuántica y fundamentos de la mecánica cuántica [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34]. Adicionalmente, un fotón individual representa la manifestación más elemental en la que se puede medir el campo electromagnético, lo cual permite realizar mediciones lo más sensibles posibles en campos como: astrofísica, biología molecular, medicina, entre otras [20].

Ahora bien, los fotones generados en la gran mayoría de experimentos realizados en óptica corresponden a fotones que son localizados, excepto en experimentos con cavidades. De esta forma, se presenta una disparidad entre la teoría y el experimento, ya que la formulación teórica para el estado de un fotón a partir de la formulación canónica está asociada a fotones en cavidades, cuyo estado es deslocalizado [1, 4].

En vista de lo anterior, se hicieron formulaciones para estados de un único fotón con cierto grado de localización [1], como una composición de estados de Fock deslocalizados. Dichos estados, conocidos como estados de un sólo fotón paquete de ondas, o fotones policromáticos poseen ciertas inconsistencias conceptuales, como por ejemplo, que no tienen una frecuencia bien definida, lo cual es inconsistente con el modelo de fotón como una partícula que satisface la relación de Einstein  $\mathcal{E} = h\nu$ .

Ahora bien, los procesos de emisión y absorción de la luz por la materia demuestran el carácter corpuscular de la radiación electromagnética. Dicha corpuscularidad se ve reflejada en la instantaneidad de dichos procesos. Además, en vista del papel trascendental de las fuentes de un sólo fotón en todos los desarrollos tecnológicos relacionados a la generación de números aleatorios, procesamiento cuántico de la información, teletransportación cuántica, criptografía cuántica, computación cuántica óptica lineal, entre otros, de esta forma, se hace necesario desde el punto de vista conceptual formular un modelo para fotones que viajan de manera localizada con una frecuencia bien definida. Con el propósito de que un modelo teórico se ajuste a los aspectos observacionales de mayor importancia, en el presente trabajo de grado se formulará un modelo que contempla la localización de los fotones y a su vez describe estos como partículas con

frecuencia y vector de onda definidos. Para llevar a cabo esto, se hará una revisión de las principales características asociadas a las fuentes de luz policromática, lo cual conlleva a una descripción del campo electromagnético mediante paquetes de onda.

# Capítulo 2

## ¿Qué es un fotón?: Principales visiones

En el presente capítulo se pretende mostrar las principales visiones con las que se cuenta sobre el concepto del fotón en la óptica cuántica. Partiendo de la visión original propuesta por Albert Einstein, se analizará los fotones en cavidades reales (cuantización monomodo), fotones en cavidades ficticias (cuantización multimodo) y fotones como paquetes de ondas.

### 2.1 Cuantos de luz: El fotón según Einstein

Albert Einstein introdujo por primera vez la hipótesis sobre la cuantización de la luz a nivel fundamental\*. Según su visión la energía asociada a la luz no está distribuida de manera continua en el espacio. En lugar de esto, un rayo de luz consiste en un número finito de cuantos de energía<sup>†</sup> localizados en el espacio que viajan sin fraccionarse, y en la interacción con la materia son emitidos o absorbidos como entidades completas. A partir de esto Einstein formuló las principales cualidades para dichas partículas, en lo que se conoce como las relaciones de Einstein para el fotón

$$\mathcal{E} = h\nu , \tag{2.1a}$$

$$\mathbf{p} = h\mathbf{k} , \tag{2.1b}$$

---

\*En la explicación de la radiación de cuerpo negro, Max Planck había llegado a la conclusión que los osciladores mecánicos asociados a las paredes perfectamente reflectoras dentro de una cavidad sólo podían absorber o emitir energía en cantidades discretas, lo cual queda reflejado en la expresión  $\mathcal{E} = h\nu$  [39]. Es importante notar que dicha cuantización no es respecto a la luz sino a la materia.

<sup>†</sup>Posteriormente Gilbert N. Lewis acuñó el término «fotón» [40].

en donde  $\mathcal{E}$  representa la energía,  $\mathbf{p}$  el momentum,  $\nu$  la frecuencia y  $\mathbf{k}$  el vector número de onda<sup>‡</sup> asociado a cada cuanto de energía de radiación electromagnética [14, 15, 16].

En consecuencia de lo anterior, Einstein pudo explicar el efecto fotoeléctrico, el cual era imposible de explicar mediante la física clásica<sup>§</sup>. Esta nueva visión sobre la luz propuesta por Einstein tardó varios años en ser aceptada por la comunidad científica, en parte, porque las relaciones de Einstein para los fotones eran vistas como expresiones matemáticas artificiosas que no contaban con ningún soporte o relación con las teorías de la época, y además por el aparente conflicto con la teoría ondulatoria de la luz, la cual contaba con un gran prestigio al poder explicar fenómenos ópticos tales como interferencia, difracción, entre otros. No fue sino hasta los trabajos experimentales sobre el efecto fotoeléctrico y el efecto Compton llevados a cabo por Millikan y Compton respectivamente, que la concepción del fotón propuesta por Einstein comenzó a ser aceptada [43].

## 2.2 Cuantización del campo electromagnético

En el año 1925 surge el primer resultado formal sobre la cuantización del campo electromagnético en un artículo escrito por Max Born y Pascual Jordan [44]. En dicho trabajo asocian el campo electromagnético dentro de una cavidad con una colección de osciladores armónicos, los cuales son cuantizados haciendo uso de la relación de conmutación  $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\hat{1}$  entre los operadores posición y momentum. De esta forma, el campo electromagnético es representado como un operador, es decir una matriz, haciendo uso de la mecánica matricial de Heisenberg [45]. Este trabajo es extendido en un artículo escrito por los anteriores autores junto con Heisenberg [46], en el cual se evidencian algunas consecuencias de la cuantización del campo electromagnético, como por ejemplo, las fluctuaciones en la energía de la radiación de cuerpo negro.

Casi de manera simultánea, en un artículo que define el nacimiento de la electrodinámica cuántica en el año 1927, Paul Dirac introdujo la interacción del campo electromagnético cuantizado con un átomo [47], y así pudo explicar a partir de principios fundamentales el proceso de emisión espontánea predicho por Einstein [16]. Además, introdujo el for-

---

<sup>‡</sup> $|\mathbf{k}| = k = \nu/c = 1/\lambda$ , en donde  $\lambda$  corresponde a la longitud de onda y  $c$  a la velocidad de la luz.

<sup>§</sup>Posteriormente dicho efecto fue explicado sin la necesidad de recurrir a la noción de fotón [41], en lo que se conoce como una visión semiclásica, en la cual la materia está cuantizada pero la radiación no. Existen experimentos que son imposibles de explicar sin recurrir a la noción de fotón, dichos experimentos ponen en evidencia el carácter cuántico de la luz [42].

malismo asociado con los operadores aniquilación y creación para el campo electromagnético, en lo que se conoce como la segunda cuantización. Mediante dicha formulación, los fotones representan cuantos de energía asociados a las excitaciones de los modos individuales del campo electromagnético.

### 2.2.1 Cavity de paredes perfectamente reflectoras: cuantización monomodo

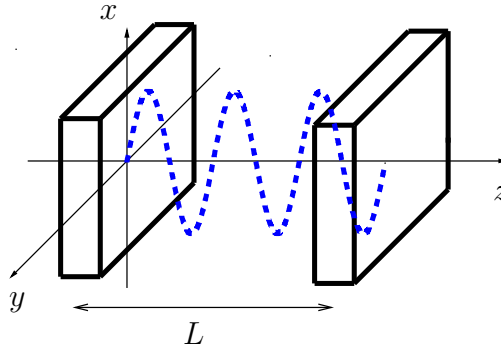


Figura 2.1: Cavidad de paredes perfectamente reflectoras en  $z = 0$  y  $z = L$ .

Considerando que el campo electromagnético se encuentra confinado en una cavidad unidimensional de paredes perfectamente conductoras en  $z = 0$  y  $z = L$ . Por simplicidad, se asumirá que el campo eléctrico está polarizado en la dirección  $x$ , de tal forma que  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_x E(z, t)$ . En cumplimiento de las condiciones de frontera, el campo eléctrico debe ser igual a cero en las paredes de la cavidad  $E(z = 0, t) = E(z = L, t) = 0$ .

La dinámica para el campo electromagnético en el vacío viene dada a través de las ecuaciones de Maxwell, las cuales forman un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 , \quad (2.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 , \quad (2.2b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} , \quad (2.2c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} . \quad (2.2d)$$

Un modo del campo eléctrico dentro de la cavidad unidimensional que satisface las

ecuaciones de Maxwell (Ecs. 2.2) tendrá como solución [5, 8]

$$E(z, t) = \left( \frac{8\pi^2\nu}{\epsilon_o \mathcal{V}} \right)^{1/2} q(t) \sin(2\pi kz) , \quad (2.3)$$

en donde,  $\nu$  corresponde a la frecuencia del modo,  $\epsilon_o$  representa la permitividad del vacío,  $\mathcal{V}$  el volumen de la cavidad,  $k = \nu/c$  el número de onda y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. La función  $q(t)$  determina la evolución temporal del campo. Sustituyendo la Ec. (2.3) en la Ec. (2.2d) se obtiene la forma del campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_y B(z, t)$

$$B(z, t) = \frac{1}{2\pi kc^2} \left( \frac{8\pi^2\nu}{\epsilon_o \mathcal{V}} \right)^{1/2} \dot{q}(t) \cos(2\pi kz) . \quad (2.4)$$

Las funciones  $q(t)$  y  $\dot{q}(t) = p(t)$  pueden ser interpretadas como la posición y el momentum canónico de una partícula de masa unitaria, respectivamente [5].

La energía del campo electromagnético clásico, es calculada mediante el hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \left( \epsilon_o \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_o} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right) . \quad (2.5)$$

Reemplazando las Ecs. (2.3) y (2.4) en la Ec. (2.5) se encuentra que

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [(2\pi\nu)^2 q^2 + p^2] , \quad (2.6)$$

este hamiltonio es formalmente equivalente al de un oscilador armónico simple de masa unitaria. De esta forma, la cuantización de un modo del campo electromagnético de frecuencia  $\nu$  dentro de la cavidad, se reduce a la cuantización de un oscilador armónico de frecuencia  $\nu$ . Al cuantizar el hamiltoniano (2.6), la posición  $q$  y el momentum  $p$  canónico adquieren el estatus de operadores, los cuales cumplen con la relación de conmutación

$$[\hat{q}, \hat{p}] = \frac{i\hbar}{2\pi} \hat{\mathbb{I}} , \quad (2.7)$$

en donde  $\hat{q}$  corresponde al operador posición,  $\hat{p}$  al operador momentum,  $\hat{\mathbb{I}}$  al operador identidad y  $\hbar$  a la constante de Planck. De esta forma el operador hamiltoniano queda definido como

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} [(2\pi\nu)^2 \hat{q}^2 + \hat{p}^2] . \quad (2.8)$$

Definiendo los operadores aniquilación  $\hat{a}$  y creación  $\hat{a}^\dagger$  mediante las relaciones<sup>¶</sup>

$$\hat{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\nu}} (2\pi\nu\hat{q}(t) + i\hat{p}(t)) , \quad (2.9)$$

---

<sup>¶</sup>Estos operadores también se denominan como operadores escalera.

$$\hat{a}^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2h\nu}} (2\pi\nu\hat{q}(t) - i\hat{p}(t)) . \quad (2.10)$$

De las definiciones anteriores, es claro que dichos operadores son no-hermíticos. Teniendo en cuenta la relación de conmutación expresada en la Ec. (2.7), y la definición de los operadores creación y aniquilación, se obtiene la relación de conmutación entre ellos

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{\mathbb{I}} . \quad (2.11)$$

Al despejar  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$  de las Ecs. (2.9) y (2.10), y reemplazarlos en las soluciones para los campos eléctrico y magnético, se obtienen los operadores campo eléctrico, campo magnético y hamiltoniano respectivamente

$$\hat{E}(z, t) = \sqrt{\frac{h\nu}{\epsilon_o \mathcal{V}}} [\hat{a}(t) + \hat{a}^\dagger(t)] \sin(2\pi kz) , \quad (2.12)$$

$$\hat{B}(z, t) = -\frac{i}{c} \sqrt{\frac{h\nu}{\epsilon_o \mathcal{V}}} [\hat{a}(t) - \hat{a}^\dagger(t)] \cos(2\pi kz) , \quad (2.13)$$

$$\mathcal{H} = h\nu \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) . \quad (2.14)$$

Al poner de manifiesto la dependencia temporal explícita de  $\hat{a}(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}}{dt} &= \frac{i2\pi}{h} [\hat{\mathcal{H}}, \hat{a}] \\ &= \frac{i2\pi}{h} \left[ h\nu \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \hat{a} \right] \\ &= i2\pi\nu [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{a} \\ &= -i2\pi\nu [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \hat{a} \\ \frac{d\hat{a}}{dt} &= -i2\pi\nu \hat{a} . \end{aligned} \quad (2.15)$$

De esta forma, la solución a la Ec. (2.15) corresponde a

$$\hat{a}(t) = \hat{a} e^{-i2\pi\nu t} . \quad (2.16)$$

Tomando el hermítico conjugado de la ecuación anterior se tiene que

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger e^{i2\pi\nu t} . \quad (2.17)$$

Sea  $|n\rangle$  un estado propio del hamiltoniano, el cual representa el estado número de fotones o estado de Fock. A su vez el operador número de fotones se define como

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a} , \quad (2.18)$$

el cual al aplicarse sobre el estado  $|n\rangle$  da lugar a

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle . \quad (2.19)$$

De esta forma el operador hamiltoniano aplicado sobre el estado  $|n\rangle$  da como resultado el valor propio correspondiente a la energía para dicho estado

$$\hat{\mathcal{H}} |n\rangle = h\nu \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \mathcal{E}_n |n\rangle . \quad (2.20)$$

Si se multiplica la ecuación anterior por  $\hat{a}^\dagger$ , se obtiene una nueva ecuación de valores propios

$$\begin{aligned} h\nu \left( \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger \right) |n\rangle &= \mathcal{E}_n \hat{a}^\dagger |n\rangle \\ h\nu \left( \hat{a}^\dagger (\hat{a} \hat{a}^\dagger - 1) + \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger \right) |n\rangle &= \mathcal{E}_n \hat{a}^\dagger |n\rangle \\ h\nu \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger + \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger \right) |n\rangle &= \mathcal{E}_n \hat{a}^\dagger |n\rangle \\ h\nu \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \hat{a}^\dagger |n\rangle &= (\mathcal{E}_n + h\nu) \hat{a}^\dagger |n\rangle \\ \hat{\mathcal{H}} (\hat{a}^\dagger |n\rangle) &= (\mathcal{E}_n + h\nu) (\hat{a}^\dagger |n\rangle) . \end{aligned} \quad (2.21)$$

De lo anterior se puede deducir el significado del operador  $\hat{a}^\dagger$ , el cual por evidentes razones corresponde a un operador que crea un cuanto de energía  $h\nu$ . De la misma forma se puede proceder con el operador  $\hat{a}$  y obtener como resultado

$$\hat{\mathcal{H}} (\hat{a} |n\rangle) = (\mathcal{E}_n - h\nu) (\hat{a} |n\rangle) . \quad (2.22)$$

Y de nuevo, la interpretación corresponde a que dicho operador destruye un cuanto de energía  $h\nu$ . Además, de manera recursiva se pueden probar las siguientes relaciones

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle , \quad (2.23)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle . \quad (2.24)$$

Finalmente, los estados número de fotones forman un conjunto completo

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \mathbb{I} . \quad (2.25)$$

## 2.2.2 Cavity ficticia en el espacio libre: cuantización multi-modo

Es conocido que en una cavidad rectangular de paredes ficticias, el campo electromagnético se puede realizar en un número infinito de posibles ondas planas armónicas, las cuales representan los modos normales de la cavidad [48]. El campo electromagnético dentro de la cavidad puede escribirse como una expansión en términos de los modos normales, en donde cada uno de los coeficientes de la expansión, los cuales describen el estado del campo electromagnético en cada instante de tiempo, obedece una ecuación diferencial que es idéntica a la de un oscilador armónico cuya frecuencia  $\nu$  corresponde a la del modo normal asociado. En consecuencia, el campo electromagnético dentro de la cavidad es equivalente a un conjunto de osciladores armónicos independientes. Ahora bien, la cuantización del campo electromagnético dentro de la cavidad es llevada a cabo cuantizando cada uno de los osciladores armónicos asociados a la evolución temporal de los modos normales de la cavidad [2, 5, 7, 8, 9].

De esta forma el campo electromagnético cuantizado queda expresado de la forma

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \sum_{\ell} i e_{\ell} \mathcal{E}_{\ell}^{(1)} (e^{i2\pi\mathbf{k}_{\ell}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_{\ell} - e^{-i2\pi\mathbf{k}_{\ell}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_{\ell}^{\dagger}) = \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})^{(-)}, \quad (2.26)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = \sum_{\ell} i \frac{\mathbf{k}_{\ell} \times \mathbf{e}_{\ell}}{2\pi\nu} \mathcal{E}_{\ell}^{(1)} (e^{i2\pi\mathbf{k}_{\ell}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_{\ell} - e^{-i2\pi\mathbf{k}_{\ell}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_{\ell}^{\dagger}) = \hat{\mathbf{B}}^{(+)}(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})^{(-)}, \quad (2.27)$$

en donde los términos con signo (+) hacen referencia a frecuencias positivas y con signo (-) a frecuencias negativas. Cada uno de los índices  $\ell$  hace referencia a cada uno de los modos en los cuales es descompuesto el campo, estos contienen información acerca de el vector número de onda y de la polarización

$$\ell \equiv (\mathbf{k}, s). \quad (2.28)$$

Análogamente como se definió en la sección anterior, el operador número del modo  $\ell$ -ésimo corresponde a

$$\hat{N}_{\ell} = \hat{a}_{\ell}^{\dagger}(t) \hat{a}_{\ell}(t) = \hat{a}_{\ell}^{\dagger}(0) \hat{a}_{\ell}(0) = \hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell}, \quad (2.29)$$

en donde, el estado número para el modo  $\ell$ -ésimo cumple con la condición

$$\hat{N}_{\ell} |n_{\ell}\rangle = n_{\ell} |n_{\ell}\rangle, \quad (2.30)$$

$$n_{\ell} = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (2.31)$$

$$\langle n_i | n_j \rangle = \delta_{ij}, \quad (2.32)$$

A su vez los operadores creación y aniquilación quedan definidos como

$$\hat{a}_\ell^\dagger |n_\ell\rangle = (n_\ell + 1)^{\frac{1}{2}} |n_\ell + 1\rangle , \quad (2.33)$$

$$\hat{a}_\ell |n_\ell\rangle = n_\ell^{\frac{1}{2}} |n_\ell - 1\rangle , \quad (2.34)$$

$$\hat{a}_\ell |0_\ell\rangle = |\emptyset\rangle . \quad (2.35)$$

El operador hamiltoniano para el modo  $\ell$ -ésimo corresponde a

$$\hat{\mathcal{H}}_\ell = h\nu_\ell \left( \hat{N}_\ell + \frac{1}{2} \right) . \quad (2.36)$$

De forma general el campo puede estar en un estado que es un producto tensorial de estados número de fotones para diferentes modos en la forma

$$|n_1, n_2, \dots, n_\ell, \dots\rangle \equiv |\{n_\ell\}\rangle , \quad (2.37)$$

a su vez puede definirse el hamiltoniano total como la suma de los hamiltonianos para cada uno de los modos

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_\ell \hat{H}_\ell , \quad (2.38)$$

de tal forma que se obtiene la energía para un estado de la forma (Ec. 2.37)

$$\hat{\mathcal{H}} |\{n_\ell\}\rangle = \mathcal{E} |\{n_\ell\}\rangle . \quad (2.39)$$

## 2.3 Fotonos policromáticos

Introducidos por primera vez por Titulaer y Glauber [49, 1, 4, 10], se definen como una combinación de estados número de fotones de un solo fotón

$$|1\rangle_\gamma = \sum_\ell c_\ell |0, \dots, 0, n_\ell = 1, 0, \dots\rangle . \quad (2.40)$$

En vista de que se busca que estos estados sean normalizados se cumple la relación

$$\sum_\ell |c_\ell|^2 = 1 . \quad (2.41)$$

Se  $\hat{N}$ , el operador número total, el cual representa una suma de los operadores número para cada uno de los modos

$$\hat{N} = \sum_\ell \hat{N}_\ell = \sum_\ell \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell . \quad (2.42)$$

Se dice que el estado representado mediante la Ec. (2.40) corresponde a un estado de un solo fotón debido a que se cumple la relación

$$\hat{N} |1\rangle_\gamma = |1\rangle_\gamma . \quad (2.43)$$

Es decir, el estado  $|1\rangle_\gamma$ , representa un estado propio del operador número total, pero no del operador hamiltoniano (Ec. 2.38), lo cual implica que no tiene una energía definida. De forma análoga a lo realizado en las secciones anteriores se puede definir un operador creación para dicho estado

$$\hat{b}_m^\dagger = \sum_\ell c_\ell \hat{a}_\ell^\dagger , \quad (2.44)$$

de tal forma que

$$|1\rangle = \hat{b}_m^\dagger |0\rangle . \quad (2.45)$$

## 2.4 *Discusiones*

- El estado para un solo fotón dentro de una cavidad es deslocalizado, es decir, se tiene una probabilidad diferente de cero de encontrar el fotón en cualquier lugar de la cavidad excepto en los nodos de la onda estacionaria, igualmente que para ondas viajeras en una cavidad de paredes ficticias. Los fotones descritos en estos formalismos poseen una energía definida, la cual corresponde a la del modo asociado.
- En el caso de los fotones policromáticos se tiene cierta localización en virtud de su composición de diferentes frecuencias, pero no se tiene una energía definida, en vista de que dichos estados no representan estados propios del operador hamiltoniano (Ec. 2.38).

## Capítulo 3

# *Noción de estados vibracionales del campo electromagnético*

Al final del capítulo anterior se discutieron los principales modelos asociados a la descripción de estados para un solo fotón, así como de sus respectivas inconsistencias. En el presente capítulo se introducirá un nuevo modelo para el estado de un solo fotón, basado en una noción, la cual se ha denominado estado vibracional del campo electromagnético, mediante la cual se pretende mejorar algunas de las inconsistencias de los modelos analizados anteriormente [12, 20, 35].

### *3.1 Proceso de emisión*

De la física atómica es conocido que un átomo puede emitir o absorber un fotón en las diferentes transiciones permitidas entre sus niveles de energía, en dichos procesos la energía se conserva. En ausencia de radiación, un átomo en el estado excitado  $|b\rangle$  con energía  $\mathcal{E}_b$ , podrá retornar a un estado  $|a\rangle$  de menor energía  $\mathcal{E}_a$ , emitiendo un fotón  $|\gamma\rangle$  cuya energía  $\mathcal{E}_\gamma$  corresponde a la diferencia de energía entre dichos estados en el momento de la emisión (Fig. 3.1). Este proceso es conocido como emisión espontánea, y es consecuencia de las fluctuaciones del campo electromagnético de vacío [10, 50].

Ahora bien, si la fuente de radiación, la cual corresponde a un átomo que emite espontáneamente un fotón, se realiza en las mismas condiciones un número infinito de veces, y los fotones emitidos son detectados por un espectrómetro, este podrá registrar la dis-

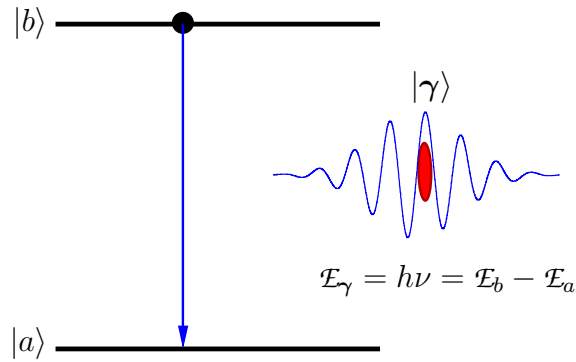


Figura 3.1: Emisión espontánea de un fotón de frecuencia  $\nu$  en la transición atómica del estado excitado  $|b\rangle$  al estado de menor energía  $|a\rangle$ .

tribución de energía electromagnética respecto a un rango de frecuencias, dando lugar a la forma de la línea de emisión la cual es descrita mediante la función de perfil de línea espectral  $\mathcal{G}(\nu)$ . De esta forma, experimentalmente se encuentra que la fuente de radiación emite fotones con diferentes energías, es decir, diferentes frecuencias [50, 51].

### 3.1.1 Función de perfil de línea espectral $\mathcal{G}(\nu)$

Esta función se define a través de la relación [51, 52]:

$$\mathcal{G}(\nu - \nu_0) = \frac{S(\nu)}{\int_{\mathbb{R}} S(\nu) d\nu}, \quad (3.1)$$

en donde  $S(\nu)$  corresponde a la densidad espectral de potencia [36, 48, 58].

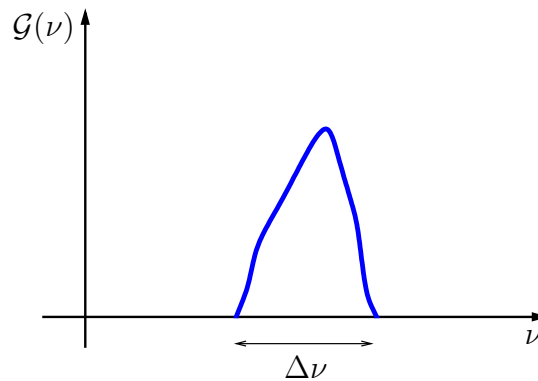


Figura 3.2: Función de perfil de línea espectral.

Una propiedad característica de la función de perfil de línea espectral queda expresada mediante la condición de normalización

$$\int_0^{\infty} \mathcal{G}(\nu) d\nu = 1 . \quad (3.2)$$

Al tratar de interpretar esta propiedad respecto a la emisión de fotones por parte de la fuente de radiación, se concluye que esta función representa una distribución de probabilidad, la cual determina la probabilidad de que la fuente emita un fotón con frecuencia entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$  (Fig. 3.2). En discusiones futuras esto supondrá un papel muy importante, ya que establece la conexión entre el modelo y el experimento.

### 3.2 Energía de un fotón

Del efecto fotoeléctrico es claro que existe una interacción directa entre los fotones incidentes sobre un material y los electrones emitidos por este (Fig. 3.3). La energía que los fotones imparten a los electrones del material es directamente proporcional a su frecuencia, lo cual queda plasmado en la relación de Einstein para la energía de un fotón [14]

$$\mathcal{E}_\gamma = h\nu . \quad (3.3)$$

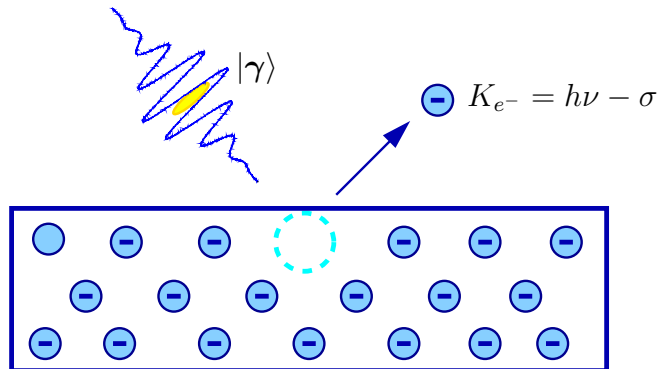


Figura 3.3: Los electrones emitidos poseen una energía cinética  $K_{e^-}$  igual a la diferencia entre la energía del fotón incidente  $\mathcal{E}_\gamma = h\nu$  y la función de trabajo del material  $\sigma$ .

En el proceso de emisión espontánea existe un tiempo de vida radiactivo  $\tau$  de duración finita asociado a la transición electrónica del proceso\*, lo cual implica por causalidad,

---

\*En transiciones electrónicas a frecuencias ópticas  $\tau$  puede variar de un nanosegundo a varios milisegundos.

que la energía electromagnética asociada al fotón emitido está localizada temporalmente en un intervalo  $\Delta t = \tau$  [53].

Experimentalmente se ha mostrado que no hay límite inferior en el tiempo de acumulación de energía electromagnética en el efecto fotoeléctrico [54, 55], de esta forma, los procesos de emisión y absorción de radiación por parte de la materia sugieren una transferencia de energía instantánea [18], la cual evidencia el carácter corpuscular de los fotones. Esto indica necesariamente que la energía electromagnética asociada a un fotón se encuentra localizada espacio-temporalmente.

Al modelar las características mencionadas anteriormente respecto a la localización espacio-temporal de la energía de un fotón, surge la asociación del estado cuántico de dicho fotón con un paquete de ondas. Ahora bien, la energía electromagnética no puede considerarse como si estuviese distribuida a lo largo de todo el paquete de ondas como muestra la parte superior de la Fig. 3.4, esto debido a que entraría en conflicto con la interacción instantánea del fotón con la materia. En vista de lo anterior, la energía asociada al fotón debe estar localizada dentro del paquete de ondas, en consecuencia de los procesos instantáneos de interacción con la materia, como se muestra en la parte inferior de la Fig. 3.4.

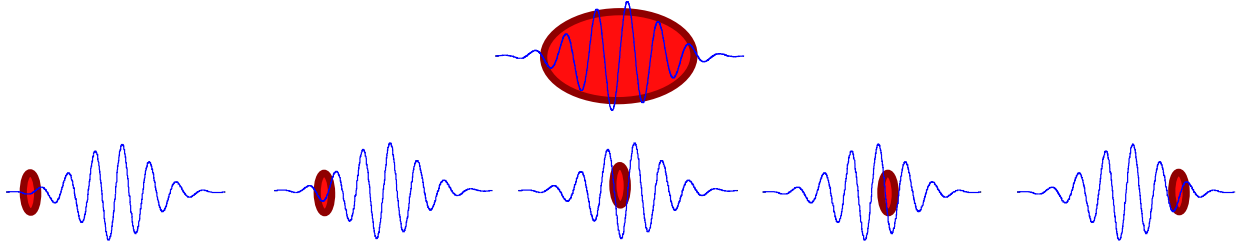


Figura 3.4: Representación cualitativa de la distribución de energía electromagnética asociada a un fotón con respecto a el paquete de ondas. La mancha roja hace referencia a la energía del fotón.

### 3.3 Paquetes de onda: Análisis de Fourier

Sea  $\psi(\mathbf{r}, t)$  la señal analítica<sup>†</sup> del campo eléctrico  $E(\mathbf{r}, t)$ . Si este campo se asocia a una onda policromática, entonces, se puede representar matemáticamente como una

---

<sup>†</sup>Ver apéndice A.

composición de infinitos campos monocromáticos. Haciendo uso del análisis de Fourier

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}} \zeta(\mathbf{r}, \nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu, \quad (3.4)$$

en donde  $\zeta(\mathbf{r}, \nu) = 2E(\mathbf{r}, \nu)$  si  $\nu \geq 0$  y  $\zeta(\mathbf{r}, \nu) = 0$  si  $\nu < 0$ . La señal analítica  $\psi(\mathbf{r}, t)$  corresponde de forma general a una función compleja, la cual puede expresarse de forma polar (modulo, fase) como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) e^{i\Phi(\mathbf{r}, t)}, \quad (3.5)$$

en donde la amplitud  $A(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|$ .

Si el espectro de la señal analítica es estrecho, es decir,  $\Delta\nu/\nu' \ll 1$ , en donde  $\nu'$  corresponde a cualquier frecuencia del ancho de banda  $\Delta\nu$ , entonces, la fase puede escribirse de la forma

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t; \nu') - 2\pi\nu' t + \phi_0. \quad (3.6)$$

La escogencia de la frecuencia  $\nu'$  es totalmente arbitraria, pero luego de definirse, tanto la envolvente compleja

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \nu') = A(\mathbf{r}, t) e^{i\phi(\mathbf{r}, t; \nu')}, \quad (3.7)$$

como su fase  $\phi(\mathbf{r}, t; \nu')$  quedan definidas. Debido a la suposición de espectro estrecho para la señal analítica, entonces, la envolvente compleja  $\varphi(\mathbf{r}, t; \nu')$  tiene variaciones lentas durante un período de tiempo asociado con la frecuencia  $\nu'$ .

Por lo tanto la señal analítica  $\psi(\mathbf{r}, t)$  puede escribirse de la forma

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t; \nu') e^{-i2\pi\nu' t} e^{i\phi_0}, \quad (3.8)$$

en donde  $e^{-i2\pi\nu' t}$  se denomina la portadora y el término  $e^{i\phi_0}$  corresponde a una fase inicial de la portadora respecto a la envolvente compleja (Fig. 3.5).

### 3.3.1 Paquetes de onda: óptica clásica

En la presente sección, se mostró que una onda electromagnética policromática de espectro estrecho se puede escribir matemáticamente como el producto de una portadora por una envolvente (Ec. 3.8). La frecuencia asociada a la portadora puede corresponder a cualquier frecuencia del ancho de banda asociado a su espectro electromagnético. Esto indica que una escogencia especial para la portadora no tiene ningún interés en particular, debido a que en el momento de la detección, esta no tiene privilegio alguna sobre las demás frecuencias que aportan al espectro de la fuente, aunque se considere

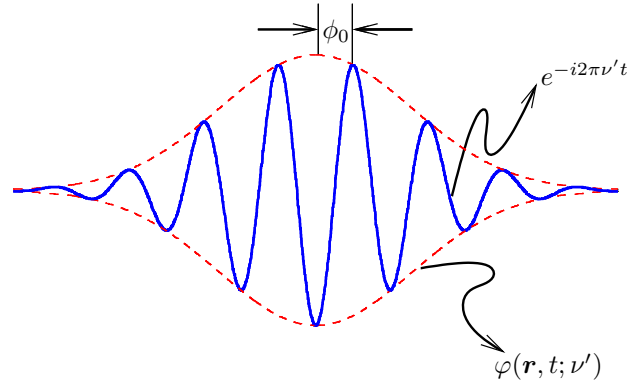


Figura 3.5: Paquete de ondas

esta como la frecuencia promedio. Es así, que el paso de escribir el campo como una composición de armónicos haciendo uso del análisis de Fourier (Ec. 3.4) a la forma de un paquete de ondas, con su respectiva portadora y envoltura para campos de espectro estrecho (Ec. 3.8) resulta en una forma de escribir este de manera análoga a la de un campo monocromático, lo cual trae ciertas ventajas tanto de carácter interpretativo como operacional.

### 3.4 El fotón como un paquete de ondas

Es conocido de la óptica clásica que una onda electromagnética monocromática (i.e. única frecuencia), está asociada a una función armónica en el tiempo cuya duración temporal es infinita. Por esta razón se considera que los campos electromagnéticos monocromáticos son irrealizables en la naturaleza, y por tanto representan una idealización cuya implementación en los modelos teóricos es justificada matemáticamente en el uso del análisis de Fourier [48, 36].

Ahora bien, si un fotón generado mediante el proceso de emisión espontánea es dispersado espectralmente a través de un prisma, detrás del cual existe un conjunto de detectores de fotones, únicamente uno de los detectores se sensibilizará (Fig. 3.6). Por lo tanto, el fotón no experimenta dispersión espectral, contrario al caso clásico de un haz de luz policromático. Lo anterior es muestra de que dicho fotón posee un vector número de onda  $\mathbf{k}$  definido, lo que a su vez corresponde a una frecuencia  $\nu$  definida [37]. Esto muestra, que cada fotón es primordialmente monocromático, es decir que los campos electromagnéticos monocromáticos si se realizan en la naturaleza de manera fundamental al nivel de un fotón, lo cual implican que los campos electromagnéticos

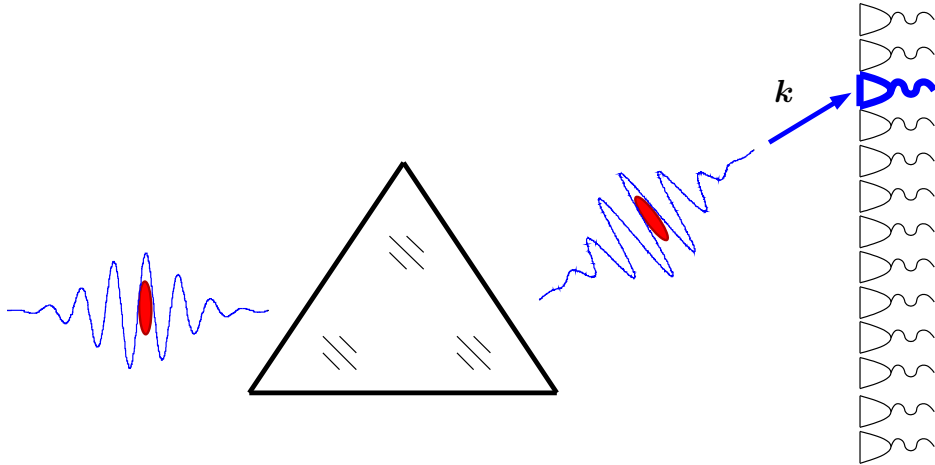


Figura 3.6: Dispersión espectral de un fotón a través de un prisma.

monocromáticos son un fenómeno exclusivamente cuántico.

**Definición de frecuencia para un fotón.** La frecuencia de un fotón se define como aquella que satisface la relación de Einstein  $\mathcal{E} = h\nu$  en virtud de su energía, es decir

$$\nu = \frac{\mathcal{E}}{h} . \quad (3.9)$$

**Definición del vector número de onda de un fotón.** El vector número de onda de un fotón se define como aquel que satisface la relación de Einstein  $\mathbf{p} = h\mathbf{k}$  en virtud de su momentum, es decir

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{h} . \quad (3.10)$$

A partir de la definición anterior, es claro que la frecuencia de un fotón no se ajusta a la noción de componente espectral del análisis de Fourier, es decir, no se puede entender la frecuencia de un fotón asociando el estado cuántico de este con una función armónica en el tiempo de duración infinita, ya que esto implicaría una probabilidad diferente de cero de encontrar un fotón en todo el universo para todo tiempo, es decir una total deslocalización [4, 20, 12]. Además, tampoco se puede asociar con un paquete de ondas representado a través de una portadora y una envolvente de la forma convencional analizada en la sección 3.3, ya que aunque se puede introducir cierto grado de localización, este no posee una frecuencia definida. De esta forma, se puede concluir a partir de las discusiones presentadas hasta este punto que el análisis de Fourier es insuficiente para describir el estado cuántico de un fotón libre (Fig. 3.7). En resumen, el problema de investigación se reduce a la siguiente pregunta: **¿Cómo construir un estado cuántico localizado para un fotón libre con una frecuencia definida?**

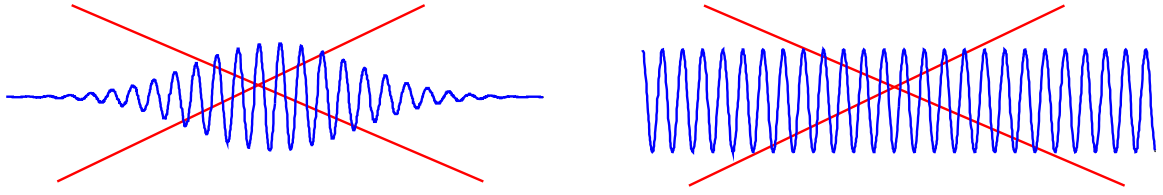


Figura 3.7: Paquete de ondas - Función armónica.

### 3.5 *Formulación del modelo*

En secciones anteriores, se discutió algunos de los hechos experimentales que muestran que los fotones libres corresponden a partículas que viajan de forma localizada y que poseen un vector número de onda y una frecuencia definida. El hecho de que la energía de estos viaje de manera localizada, hace pensar que la mejor forma de describir un fotón es mediante un paquete de ondas [1, 58, 4, 20, 12], con el inconveniente de que un paquete de ondas no posee una frecuencia definida.

El modelo asociado a la noción de estado vibracional se fundamenta en asociar la frecuencia de un fotón libre con la frecuencia de la portadora de un paquete de ondas, físicamente la frecuencia de la portadora, corresponde con la energía de un campo electromagnético real y monocromático. De esta forma, como se mostró en la Fig. 3.6, la frecuencia de la portadora asociada al paquete de onda corresponde a la detectada después de pasar por el prisma. La diferencia en cuanto a los paquetes de onda clásicos resulta en el hecho de que la envolvente que modula la portadora del paquete de ondas, surge de la composición de diferentes componentes espectrales, que no se realizan de manera real, es decir, que no se relacionan con campos electromagnéticos reales, en el momento de la detección. Esas componentes espectrales, en nuestro modelo reciben el nombre de componentes espectrales virtuales. Dicho nombre obedece al hecho de que estas componentes aportan al paquete de ondas mecano-cuántico que describe un fotón libre, explícitamente la envolvente del paquete de ondas mecano-cuántico, pero no se relacionan con campos electromagnéticos reales. Este conjunto de frecuencias corresponde a las frecuencias que puede emitir la fuente de fotones. En el caso de una transición atómica entre los niveles de energía, corresponden al conjunto de frecuencias que definen la banda de la línea espectral de emisión, la cual posee un ancho espectral  $\Delta\nu = \Delta E/h$ . Este conjunto de frecuencias aportan a la forma espacio-temporal del estado vibracional de un fotón de frecuencia  $\nu$ . Además, a través de la función de perfil de línea espectral determinan la probabilidad de que un fotón de frecuencia  $\nu$  se emitido por la fuente.

### 3.5.1 Estado cuántico de un fotón libre

Sea  $|\gamma\rangle$  el estado cuántico para un solo fotón que viaja de forma libre en el espacio. Este se define a través de la composición de las diferentes componentes espectrales en las cuales se puede realizar la fuente de luz mediante un paquete de ondas mecano-cuántico de la forma

$$|\gamma\rangle = \left[ \int_{\mathbb{R}} d\nu \zeta(\nu) \hat{a}^\dagger(\nu) \right] |0\rangle , \quad (3.11)$$

Este puede entenderse como la creación de diferentes componentes espectrales no cuantizadas, esto debido a que dichas componentes espectrales no corresponde a campos electromagnéticos reales, a través de la relación

$$|\gamma\rangle = \int_{\mathbb{R}} d\nu \hat{b}^\dagger(\nu) |0\rangle , \quad (3.12)$$

en donde  $\hat{b}^\dagger(\nu) = \zeta(\nu) \hat{a}^\dagger(\nu)$ , corresponde al operador creación de componentes espectrales no cuantizadas. El estado  $|\gamma\rangle$  puede escribirse como la aplicación de un operador creación al estado de vacío  $|\gamma\rangle$  en la forma

$$|\gamma\rangle = \hat{\mathcal{B}}^\dagger |0\rangle , \quad (3.13)$$

en donde el operador creación  $\hat{\mathcal{B}}^\dagger$  del estado cuántico  $|\gamma\rangle$  se define como

$$\hat{\mathcal{B}}^\dagger = \int_{\mathbb{R}} d\nu \zeta(\nu) \hat{a}^\dagger(\nu) . \quad (3.14)$$

A partir de lo enunciado anteriormente para paquetes de onda se puede definir el estado vibracional del fotón libre  $|\gamma\rangle$  como

$$|\gamma\rangle = |\varphi(t; \nu'), \nu', \phi_o\rangle , \quad (3.15)$$

en donde  $\nu'$  corresponde a la portadora del paquete de ondas, la cual corresponde a la frecuencia del fotón asociada con la relación de Einstein  $\mathcal{E}_\gamma = h\nu'$ . La función  $\varphi(t; \nu')$  representa la envolvente del paquete de ondas, el cual determina la probabilidad del fotón en el espacio-tiempo, el cual queda definido mediante la composición de las componentes espectrales virtuales y una fase  $\phi_o$  de la portadora respecto a la envolvente. Estos estados cuánticos son normalizados de tal forma

$$\langle \gamma | \gamma \rangle = 1. \quad (3.16)$$

Como consecuencia de lo anterior se satisface

$$\int_{\mathbb{R}} d\nu |\zeta(\nu)|^2 = 1 . \quad (3.17)$$

El operador creación del estado vibracional  $|\gamma\rangle = |\varphi(t; \nu'), \nu', \phi_o\rangle$

$$\hat{\mathcal{B}}^\dagger = \hat{\mathcal{B}}^\dagger(\varphi(t; \nu'), \nu', \phi_o) , \quad (3.18)$$

se ilustra conceptualmente mediante la Fig. 3.8. En esta figura, las líneas punteadas azules están asociadas a la creación de las diferentes componentes espectrales virtuales, que en últimas determinan la forma de la envolvente compleja del paquete de ondas  $\varphi(t; \nu')$  y la línea roja a la creación de la frecuencia  $\nu'$  de la portadora del paquete de ondas, la cual corresponde al campo electromagnético real detectado.

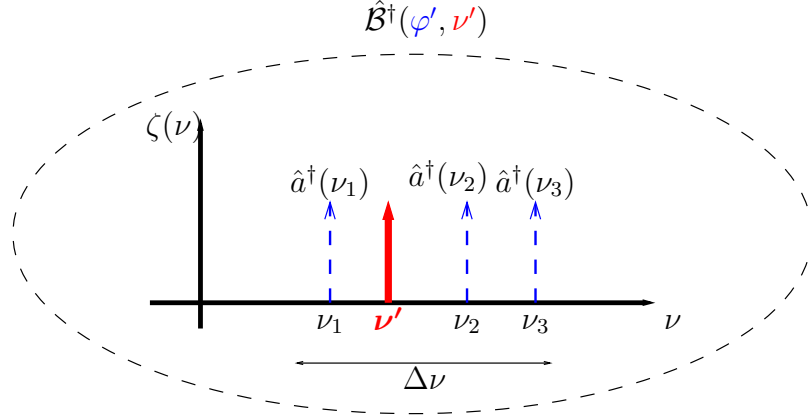


Figura 3.8: Representación gráfica del operador creación  $\hat{\mathcal{B}}(\varphi(t; \nu'), \nu', \phi_o)$ .

Tomando el hermítico conjugado del operador creación  $\hat{\mathcal{B}}^\dagger$  se obtiene el operador creación definido como

$$\hat{\mathcal{B}} = \int_{\mathbb{R}} d\nu \overline{\zeta(\nu)} \hat{a}(\nu) . \quad (3.19)$$

Los operadores creación  $\hat{\mathcal{B}}^\dagger$  y aniquilación  $\hat{\mathcal{B}}$  cumplen con la relación de conmutación

$$[\hat{\mathcal{B}}, \hat{\mathcal{B}}^\dagger] = \hat{\mathbb{I}} . \quad (3.20)$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{B}}, \hat{\mathcal{B}}^\dagger] &= \left[ \int_{\mathbb{R}} d\tilde{\nu} \overline{\zeta(\tilde{\nu})} \hat{a}(\tilde{\nu}), \int_{\mathbb{R}} d\nu \zeta(\nu) \hat{a}^\dagger(\nu) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\tilde{\nu} \overline{\zeta(\tilde{\nu})} \int_{\mathbb{R}} d\nu \zeta(\nu) [\hat{a}(\tilde{\nu}), \hat{a}^\dagger(\nu)] \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\tilde{\nu} \overline{\zeta(\tilde{\nu})} \int_{\mathbb{R}} d\nu \zeta(\nu) \delta(\tilde{\nu} - \nu) \hat{\mathbb{I}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\tilde{\nu} |\zeta(\tilde{\nu})|^2 \hat{\mathbb{I}} \\ &= \hat{\mathbb{I}} . \end{aligned} \quad (3.21)$$

La anterior expresión es totalmente análoga a la relación de conmutación (Ec. 2.11). Dado el carácter bosónico de los operadores creación  $\hat{\mathcal{B}}^\dagger$  y aniquilación  $\hat{\mathcal{B}}$ , se define el operador número de estados vibracionales

$$\hat{\mathcal{N}} = \hat{\mathcal{B}}^\dagger \hat{\mathcal{B}} , \quad (3.22)$$

de tal forma que se cumple que

$$\hat{\mathcal{N}} |\gamma\rangle = 1 |\gamma\rangle . \quad (3.23)$$

Así mismo se define el operador hamiltoniano para el estado vibracional  $|\gamma\rangle$

$$\hat{\mathcal{H}} = h\nu' \left( \hat{\mathcal{N}} + \frac{1}{2} \right) . \quad (3.24)$$

De tal forma que este hamiltoniano corresponde nuevamente al de un oscilador armónico. Al aplicarse sobre  $|\gamma\rangle$

$$\hat{\mathcal{H}} |\gamma\rangle = h\nu' \left( \hat{\mathcal{N}} + \frac{1}{2} \right) |\gamma\rangle = h\nu' \left( 1 + \frac{1}{2} \right) |\gamma\rangle . \quad (3.25)$$

Es así que para el estado  $|\gamma\rangle$  se tiene una frecuencia definida  $\nu'$  y a su vez una energía definida a través de un hamiltoniano de un oscilador armónico. De esta forma se puede considerar que el fotón se encuentra localizado en alguna región dentro del paquete de ondas mecano-cuántico asociado al estado vibracional  $|\gamma\rangle = |\varphi(t; \nu'), \nu', \phi_o\rangle$  y vibra de manera armónica con la frecuencia  $\nu'$  asociada a la portadora del paquete de ondas.

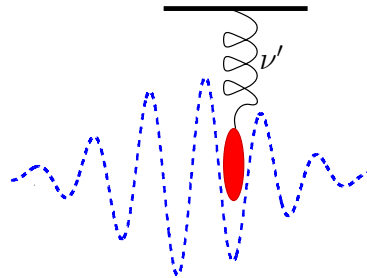


Figura 3.9: La energía electromagnética de un fotón vibra de manera armónica a la frecuencia  $\nu'$  y viaja de manera localizada.

### 3.6 Función de onda para el fotón

En la fenomenología de varios experimentos relacionados con fotones libres es importante contar con una formulación para la función de onda de un fotón libre. Aunque

dicho concepto ha sido ampliamente discutido, en el presente trabajo se adopta una definición que es útil en el momento de analizar experimentos relacionados con la coherencia de estados de un solo fotón, como se mostrará en el siguiente capítulo.

Sea  $\gamma(t)$  la función de onda para el estado de un solo fotón  $|\gamma\rangle$  la cual queda definida como

$$\gamma(t) = \int_{\mathbb{R}} d\tilde{\nu} \langle 1_{\tilde{\nu}} | \gamma \rangle = \varphi(t; \nu') e^{-i2\pi\nu' t} e^{i\phi_0} . \quad (3.26)$$

***Demostración.***

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \int_{\mathbb{R}} d\tilde{\nu} \langle 1_{\tilde{\nu}} | \gamma \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\tilde{\nu} \left\langle 1_{\tilde{\nu}} \left| \int_{\mathbb{R}} d\nu \zeta(\nu) \hat{a}^\dagger(\nu) \right| 0 \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\tilde{\nu} \left\langle 1_{\tilde{\nu}} \left| \int_{\mathbb{R}} d\nu \zeta(\nu) \hat{a}_o^\dagger(\nu) e^{i2\pi\nu t} \right| 0 \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\tilde{\nu} \left\langle 1_{\tilde{\nu}} \left| \int_{\mathbb{R}} d\nu \zeta(\nu) e^{i2\pi\nu t} \right| 1_\nu \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\tilde{\nu} \int_{\mathbb{R}} d\nu \zeta(\nu) e^{i2\pi\nu t} \langle 1_{\tilde{\nu}} | 1_\nu \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\tilde{\nu} \zeta(\tilde{\nu}) e^{i2\pi\tilde{\nu} t} \\ \gamma(t) &= \varphi(t; \nu') e^{-i2\pi\nu' t} e^{i\phi_0} . \end{aligned} \quad (3.27)$$

La función de onda asociada al fotón libre descrito mediante el estado vibracional  $|\gamma\rangle = |\varphi(t; \nu'), \nu', \phi_o\rangle$  resulta de la proyección de cada una de las componentes espectrales virtuales asociadas al estado vibracional sobre el conjunto de estados número de fotones  $|1\rangle_{\tilde{\nu}}$ . Esta definición permite interpretar la función de onda como la probabilidad de localización del fotón en el tiempo, la cual corresponde a la de un paquete de ondas. Mediante esta definición para la función de onda, se puede deducir que el fotón tiene una mayor probabilidad de ubicarse en la región central del paquete de ondas y una probabilidad menor de hacerlo en los extremos.

Además la envolvente compleja  $\varphi(t; \nu')$  determina el tiempo de coherencia  $\tau$  asociado al paquete de ondas el cual está relacionado directamente con el tiempo de vida radiactivo asociado al proceso de emisión espontánea, es decir con el conjunto de posibles frecuencias en las que se puede realizar la fuente junto con la probabilidad de emisión de las mismas. Una representación gráfica que ayuda a entender los conceptos discutidos se muestra en la Fig. 3.10. En esta gráfica se ejemplifica un paquete de ondas, cuya frecuencia para la portadora es  $\nu'$ , el hecho de que la modulación a través de la envolvente compleja se denote mediante líneas punteadas hace referencia al hecho de que esta se

define mediante las componentes espectrales virtuales, las cuales no representan campos electromagnéticos reales, adicionalmente el óvalo en color rojo denota la localización de la energía asociada al fotón la cual se puede encontrar localizada en algún lugar dentro del paquete de ondas, teniendo una mayor probabilidad de hacerlo en la región central, esto representa un complemento a lo ilustrado en la Fig. 3.8.

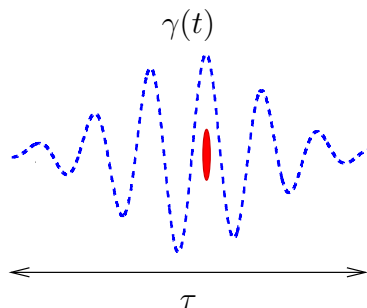


Figura 3.10: Función de onda mecano-cuántica  $\gamma(t)$  asociada al estado vibracional  $|\gamma\rangle = |\varphi(t; \nu'), \nu', \phi_o\rangle$ .

### 3.6.1 Sobre la fuente de emisión y la realización de diferentes estados vibracionales

Como consecuencia de la normalización del estado  $|\gamma\rangle$ , la función  $\zeta(\nu)$  cumple con la condición

$$\int_{\mathbb{R}} d\nu |\zeta(\nu)|^2 = 1 . \quad (3.28)$$

Si se compara con lo analizado en el apartado (3.1.1), se puede hacer la asociación

$$|\zeta(\nu)|^2 = \mathcal{G}(\nu) . \quad (3.29)$$

De esta forma la función  $\zeta(\nu)$  está relacionada con la probabilidad de emisión de los diferentes fotones que puede emitir la fuente.

Por lo tanto las propiedades (envolvente compleja  $\varphi(t; \nu')$  y fase  $\phi_o$ ) del estado vibracional asociado a un fotón de frecuencia  $\nu'$  emitido por la fuente están directamente relacionadas con las demás componentes espectrales en las que la fuente se puede realizar. Es así que en cumplimiento de la relación 3.28 existe un compromiso entre las diferentes componentes espectrales en las cuales puede realizarse o emitir fotones la

fuente. Como resultado de esto, el estado vibracional que describe el estado cuántico para un fotón libre es determinado por las propiedades espectrales de la fuente de emisión y de la probabilidad de emisión de las distintas componentes espectrales.

La fuente puede emitir cualquier fotón dentro del ancho de banda  $\Delta\nu$ , con una probabilidad determinada por la función  $\zeta(\nu)$ , a través de la Ec. 3.29, de tal forma que en general la fuente puede emitir un ensamble de posibles estados vibratoriales (Fig. 3.11), los cuales tienen como portadora cualquiera de las frecuencias en las cuales se puede realizar la fuente y cuyas envolventes complejas están sujetas al cumplimiento de la relación 3.28 para la función  $\zeta(\nu)$  (Fig. 3.11). Es así que el estado cuántico  $|\gamma\rangle$  representa el ensamble de posibles realizaciones en las cuales puede emitir la fuente de radiación

$$|\gamma\rangle = \{^\omega |\gamma\rangle\} \quad (3.30)$$

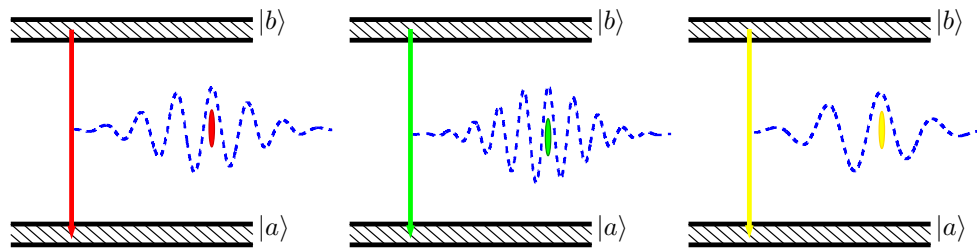


Figura 3.11: Emisión de fotones con diferentes frecuencias.

Adicionalmente, en vista de que la función  $\zeta(\nu)$  está relacionada directamente con el espectro de emisión de la fuente, y este puede tener fluctuaciones en el tiempo de manera fundamental, se puede dar lugar a que se emitan fotones con la misma frecuencia en diferentes estados vibratoriales, lo cual es ilustrado en la Fig. 3.12.

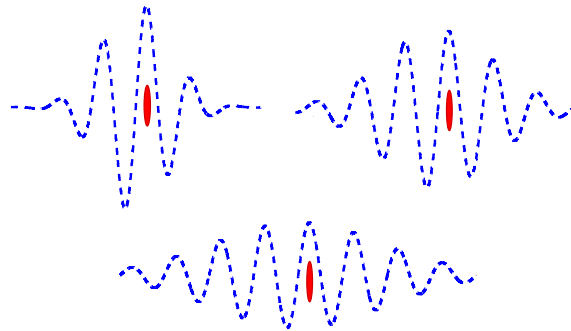


Figura 3.12: Fotones de la misma frecuencia en diferentes estados vibratoriales.

## *Capítulo 4*

# *Noción de estados vibracionales en la fenomenología de experimentos con fotones libres*

En el presente capítulo se mostrará como la noción de estados vibracionales del campo electromagnético como un modelo para fotones libres permite describir experimentos convencionales de la óptica cuántica y en algunos casos proporcionando una nueva visión respecto a los modelos existentes sobre fotones.

### *4.1 Divisor de haz: relaciones de entrada y salida*

El divisor de haz representa uno de los elementos más utilizados en los experimentos llevados a cabo en óptica, especialmente en aquellos que tiene que ver con interferencia de la luz (Fig. 4.2). De hecho, históricamente se considera que el primer experimento que muestra de manera concluyente la existencia de los fotones, fue aquel en el cual se enviaban estados de un solo fotón directamente hacia un divisor de haz y colocando detectores en las salidas del divisor se media si estos registraban alguna detección de manera simultánea. Como era de esperarse, al enviar un solo fotón en alguno de los brazos del divisor de haz, dado que este representa un estado primordial indivisible, este debería reflejarse o transmitirse como una entidad completa dando lugar a que las coincidencias en los detectores fuesen cero [42, 18].

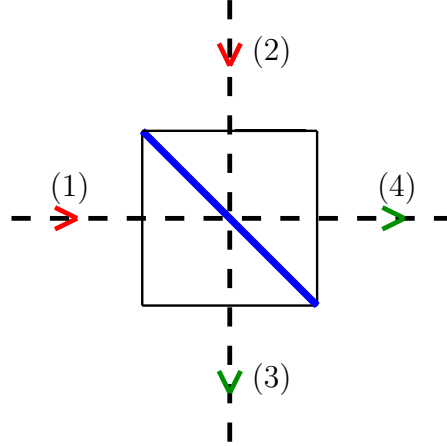


Figura 4.1: Divisor de haz. Brazos de entrada (1) y (2). Brazos de salida (3) y (4).

La Fig. (4.2) ejemplifica un divisor de haz simétrico caracterizado por los coeficientes de reflexión  $\mathcal{R}$  y transmisión  $\mathcal{T}$ , los cuales de forma general son cantidades complejas. Los brazos de entrada corresponden a (1) y (2) y los de salida a (3) y (4). Las relaciones entre los operadores aniquilación para los diferentes entradas y salidas corresponden a [4, 5]

$$\hat{\mathcal{B}}_3 = \mathcal{R}\hat{\mathcal{B}}_1 + \mathcal{T}\hat{\mathcal{B}}_2, \quad (4.1)$$

$$\hat{\mathcal{B}}_4 = \mathcal{T}\hat{\mathcal{B}}_1 + \mathcal{R}\hat{\mathcal{B}}_2. \quad (4.2)$$

Invirtiendo estas relaciones se obtiene

$$\hat{\mathcal{B}}_1 = \overline{\mathcal{R}}\hat{\mathcal{B}}_3 + \overline{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{B}}_4, \quad (4.3)$$

$$\hat{\mathcal{B}}_2 = \overline{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{B}}_3 + \overline{\mathcal{R}}\hat{\mathcal{B}}_4. \quad (4.4)$$

Los operadores creación para las diferentes entradas y salidas se calculan a partir del hermítico conjugado de las Ecs. (4.1 – 4.4). Al asumir que los campos entrantes en los brazos (1) y (2) son independientes, se satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{\mathcal{B}}_1, \hat{\mathcal{B}}_1^\dagger] = [\hat{\mathcal{B}}_2, \hat{\mathcal{B}}_2^\dagger] = \mathbb{I}, \quad (4.5)$$

$$[\hat{\mathcal{B}}_1, \hat{\mathcal{B}}_2^\dagger] = [\hat{\mathcal{B}}_2, \hat{\mathcal{B}}_1^\dagger] = 0. \quad (4.6)$$

Haciendo uso de las Ecs. (4.1 – 4.4) se pueden calcular los conmutadores

$$[\hat{\mathcal{B}}_3, \hat{\mathcal{B}}_3^\dagger] = [\mathcal{R}\hat{\mathcal{B}}_1 + \mathcal{T}\hat{\mathcal{B}}_2, \overline{\mathcal{R}}\hat{\mathcal{B}}_1^\dagger + \overline{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{B}}_2^\dagger] = (|\mathcal{R}|^2 + |\mathcal{T}|^2) \mathbb{I}, \quad (4.7)$$

$$[\hat{\mathcal{B}}_4, \hat{\mathcal{B}}_4^\dagger] = [\mathcal{T}\hat{\mathcal{B}}_1 + \mathcal{R}\hat{\mathcal{B}}_2, \overline{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{B}}_1^\dagger + \overline{\mathcal{R}}\hat{\mathcal{B}}_2^\dagger] = (|\mathcal{T}|^2 + |\mathcal{R}|^2) \mathbb{I}, \quad (4.8)$$

$$\left[ \hat{\mathcal{B}}_3, \hat{\mathcal{B}}_4^\dagger \right] = \left[ \mathcal{R}\hat{\mathcal{B}}_1 + \mathcal{T}\hat{\mathcal{B}}_2, \bar{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{B}}_1^\dagger + \bar{\mathcal{R}}\hat{\mathcal{B}}_2^\dagger \right] = (\mathcal{R}\bar{\mathcal{T}} + \mathcal{T}\bar{\mathcal{R}}) = 0 . \quad (4.9)$$

De lo anterior se puede concluir que

$$|\mathcal{R}|^2 + |\mathcal{T}|^2 = 1 , \quad \mathcal{R}\bar{\mathcal{T}} + \mathcal{T}\bar{\mathcal{R}} = 0 . \quad (4.10)$$

Con el fin de ilustrar el carácter cuántico de las relaciones de entrada y de salida para el divisor de haz, se puede considerar que en el brazo de entrada (1) incide un foton en el estado  $|\gamma\rangle$ , y el brazo de entrada (2) está en su estado de vacío, es decir, el estado a la entrada del divisor de haz corresponde a

$$|\gamma\rangle_1 |0\rangle_2 = \hat{\mathcal{B}}_1 |0\rangle \quad (4.11)$$

Este estado es transformado al estado de salida a través del hermítico conjugado de la Ec. (4.3)

$$|\gamma\rangle_1 |0\rangle_2 = \left( \mathcal{R}\hat{\mathcal{B}}_3^\dagger + \mathcal{T}\hat{\mathcal{B}}_4^\dagger \right) |0\rangle = \mathcal{R} |\gamma\rangle_3 |0\rangle_4 + \mathcal{T} |0\rangle_3 |\gamma\rangle_4 . \quad (4.12)$$

Como resultado para el estado de salida se obtiene una superposición de estados de salida, el cual corresponde a un estado entrelazado, es decir, no puede ser expresado como el producto de estados asociados a las salidas (3) y (4).

## **4.2 Interferómetro de Michelson: Coherencia temporal**

Uno de los hechos más interesantes y relevantes que se evidencian en los experimentos realizados con fotones individuales, son aquellos relacionados con la interferencia. Es decir, la posibilidad de poder formar un patrón de interferencia al enviar fotón por fotón tal como ocurre en óptica clásica con un haz de luz [18]. Una aplicación de gran importancia para la noción de estados vibracionales definida en el capítulo anterior, corresponde a la medida de coherencia temporal de fotones libres mediante un interferómetro de Michelson. Cada fotón libre descrito a través de su estado vibracional

$$|\gamma\rangle = |\varphi(t; \nu'), \nu', \phi_o\rangle , \quad (4.13)$$

es descrito a través de una portadora de frecuencia  $\nu$  en virtud de la relación  $\mathcal{E} = h\nu$ , una fase  $\phi_o$ , y una envolvente  $\varphi(t; \nu')$  la cual determina la probabilidad de localización de dicho fotón dentro del paquete de ondas y a su vez determina su longitud de coherencia como se mostrará a continuación.

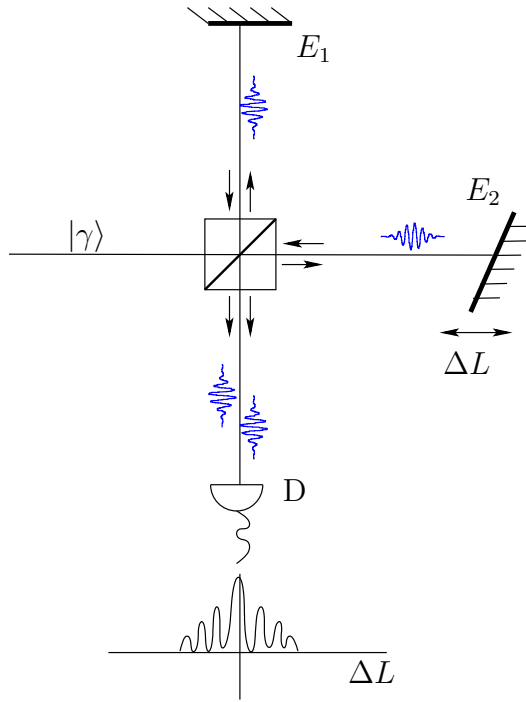


Figura 4.2: Interferómetro de Michelson.

Una fuente de luz produce fotones individuales en el estado vibracional  $|\gamma\rangle$ . Cada uno de los fotones incide sobre el montaje experimental mostrado en la Fig. (4.2), el cual consta de un divisor de haz, dos espejos  $E1$  y  $E2$ , en donde el espejo  $E2$  es móvil, y un detector de fotones  $D$ . Al enviar un determinado número de fotones y al hacer variar la longitud de uno de los brazos del interferómetro mediante el movimiento del espejo  $E2$ , se observa que la cantidad de fotones registrados por el detector varía en función de dicha longitud. Evidenciando un patrón de interferencia como es mostrado en la parte inferior de la Fig. (4.2).

La forma de este patrón de interferencia puede explicarse de manera muy sencilla recurriendo a la noción de función de onda\*  $\gamma(t)$  asociado al estado vibracional de los fotones incidentes  $|\gamma\rangle$ . La función de onda para cada fotón corresponde con el paquete de ondas

$$\gamma(t) = \varphi(t; \nu') e^{-i2\pi\nu't} e^{i\phi_0} . \quad (4.14)$$

En el momento de incidir sobre el divisor de haz esta función de onda se divide en dos y recorre cada uno de los brazos del interferómetro como se muestra en la Fig. (4.2), se refleja en cada uno de los espejos y nuevamente inciden sobre el divisor de haz para recombinarse y así poder interferir. Al modificar la longitud de uno de los

---

\*Ver sección 3.6.

brazos del interferómetro a través del movimiento lateral de uno de los espejos se logra desfasar cada una de las componentes en las cuales se dividió la función de onda del fotón  $|\gamma\rangle$ , de esta forma se tiene que una interferencia entre dichas componentes lo cual da lugar al patrón de interferencia evidenciado experimentalmente. Finalmente, se observa que después de una determinada variación en la longitud de uno de los brazos del interferómetro no se observa ninguna interferencia del conteo de fotones, lo cual evidencia que cada uno de los fotones posee una longitud de coherencia dentro de la cual puede interferir las componentes de su función de onda para dar lugar al patrón de interferencia.

### 4.3 Límite clásico

Mediante el modelo presentado en este trabajo de grado se puede ilustrar cualitativamente de manera muy simple como al detectar un paquete de ondas en un experimento convencional de óptica clásica mediante un detector se obtienen una señal continua en el tiempo. Esto debido al hecho de que un fotón puede localizarse dentro del paquete de ondas mecano-cuántico en cualquier lugar con una probabilidad determinada como ya se discutió en el capítulo anterior, de tal forma que un conjunto muy grande de estos puede llenar espacio-temporalmente el paquete de ondas mecano-cuántico dando lugar a un paquete de ondas clásico como ilustra la Fig. 4.3.

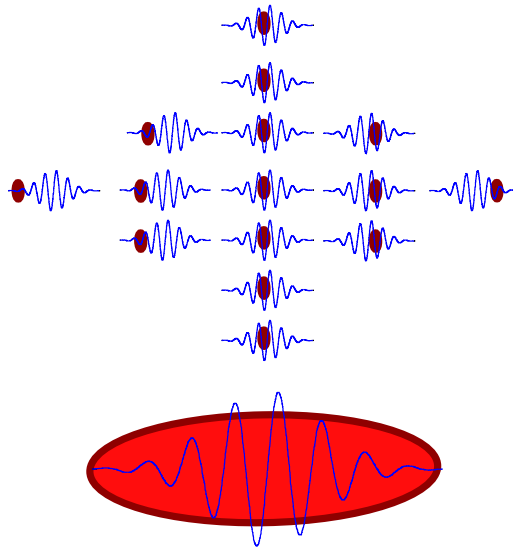


Figura 4.3: Paquete de ondas clásico formado a partir de un conjunto muy grande de fotones.

A su vez con nuestro modelo de estados vibracionales se puede entender de manera intuitiva el espectro asociado a la fuente como el ensamble de todos los posibles fotones que pueden ser emitidos por la fuente, esto es ilustrado en la Fig. 4.4, en donde se hace claro a través de la función  $\mathcal{G}(\nu)$  que ciertos estados vibracionales tienen una probabilidad mayor de ser emitidos respecto a otros.

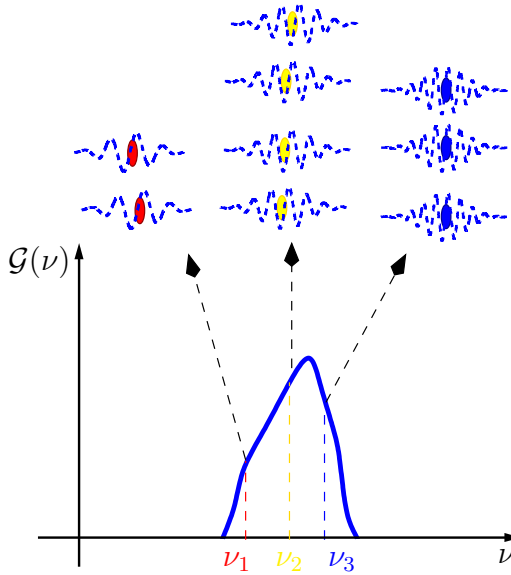


Figura 4.4: Espectro de la fuente a partir del ensamble de posibles estados vibracionales en los que se puede realizar la fuente.

## Capítulo 5

### *Conclusiones y perspectivas*

- De la emisión espontánea y el efecto fotoeléctrico se concluye que la energía electromagnética asociada a un fotón libre está espacio-temporalmente localizada.
- Teniendo en cuenta la localización de la energía para un fotón y la relación de Einstein  $\mathcal{E} = h\nu$ , se mostró que el análisis de Fourier clásico es insuficiente a la hora de formular el estado cuántico para un fotón libre.
- Un fotón es fundamentalmente monocromático debido a que no se dispersa espectralmente al pasar por un prisma.
- La monocromaticidad es un fenómeno real de carácter netamente cuántico, es decir, propio al nivel de un fotón.
- Mediante la noción de estados vibracionales se pueden formular estados de un solo fotón con cierto grado de localización y con una frecuencia definida en concordancia con la relación de Einstein  $E = h\nu$ .
- Se pudo mostrar que las propiedades para un fotón emitido por una fuente están directamente relacionadas con las propiedades de la fuente de emisión, lo cual conlleva a una correlación entre las diferentes componentes espectrales emitidas por la fuente.
- En la naturaleza se pueden realizar dos fotones con igual frecuencia en distintos estados vibracionales, lo cual se va a ver reflejado en experimentos de interferencia, coherencia, interacción luz-materia, etc.

- Al mantener el formalismo de la segunda cuantización en la noción de estados vibracionales expresando el campo en términos de operadores aniquilación y creación, se sigue en la corriente del formalismo de la óptica cuántica.
- Aparte de poder reproducir aquellos resultados convencionales del formalismo existente de la óptica cuántica, a través de la noción de estados vibracionales se puede tener un análisis mucho más físico e intuitivo de los problemas.
- Mediante el concepto de función de onda para un fotón se pudo realizar un análisis cualitativo de algunos experimentos relacionados con la interferencia de fotones.
- En trabajos posteriores, valdría la pena hacer cálculos de forma explícita, con el fin de poder comparar de manera directa con el gran número de resultados experimentales obtenidos por la comunidad científica, en especial aquellos relacionados con la interacción luz-materia.

# Referencias

- [1] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1995.
- [2] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Photons and atoms: introduction to quantum electrodynamics*, Wiley, 1997.
- [3] M. Scully and S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1997.
- [4] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford University Press, third edition, 2000.
- [5] C. Gerry and P. Knight, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge University Press, 2005.
- [6] W. Vogel and D. Welsch, *Quantum Optics*, Wiley-VCH, third edition, 2006.
- [7] P. Lambropoulos and D. Petrosyan, *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*, Springer, 2007.
- [8] P. Meystre and M. Sargent III, *Elements of Quantum Optics*, Springer, fourth edition, 2007.
- [9] J. Garrison and R. Chiao, *Quantum Optics*, Oxford University Press, 2008.
- [10] G. Grynberg, A. Aspect, and C. Fabre, *Introduction to Quantum Optics: From the Semi-classical Approach to Quantized Light*, Cambridge University Press, 2010.
- [11] G. Agarwal, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, 2012.
- [12] O. Keller, *Light: The Physics of the mn*, CRC Press, 2014.
- [13] B. Lounis and M. Orrit, *Single-photon sources*, Reports on Progress in Physics **68**, 1129–1179 (2005).

- [14] A. Einstein, *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*, *Annalen der Physik* **17**, 132–148 (1905).
- [15] A. Einstein, *Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung*, *Physikalische Zeitschrift* **10**, 817–825 (1909).
- [16] A. Einstein, *Zur Quantentheorie der Strahlung*, *Physikalische Zeitschrift* **18**, 121–128 (1917).
- [17] A. Einstein, *Strahlungs-Emission und -Absorption nach der Quantentheorie*, *Deutsche Physikalische Gesellschaft* **18**, 318–323 (1916).
- [18] A. Zeilinger, G. Weihs, T. Jennewein, and M. Aspelmeyer, *Happy centenary, photon*, *Nature* **433**, 230–238 (2005).
- [19] M. D. Eisaman, J. Fan, A. Migdall, and S. V. Polyakov, *Single-photon sources and detectors*, *Review of Scientific Instruments* **82**, 071101 (2011).
- [20] A. Migdall, S. Polyakov, J. Fan, and J. Bienfang, editors, *Single-Photon Generation and Detection: Physics and Applications*, Academic Press, 2013.
- [21] E. Knill, R. Laflamme, and G. J. Milburn, *A scheme for efficient quantum computation with linear optics*, *Nature* **409**, 46–52 (2001).
- [22] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden, *Quantum cryptography*, *Review of Modern Physics* **74**, 145–195 (2002).
- [23] P. P. Rohde and T. C. Ralph, *Frequency and temporal effects in linear optical quantum computing*, *Physical Review A* **71**, 032320 (2005).
- [24] P. P. Rohde, T. C. Ralph, and M. A. Nielsen, *Optimal photons for quantum-information processing*, *Physical Review A* **72**, 052332 (2005).
- [25] P. Kok, W. J. Munro, K. Nemoto, T. C. Ralph, J. P. Dowling, and G. J. Milburn, *Linear optical quantum computing with photonic qubits*, *Review of Modern Physics* **79**, 135–174 (2007).
- [26] J. L. O’Brien, *Optical Quantum Computing*, *Science* **318**, 1567–1570 (2007).
- [27] G. J. Milburn, *Photons as qubits*, *Physica Scripta* **2009**, 014003 (2009).
- [28] T. D. Ladd, F. Jelezko, R. Laflamme, Y. Nakamura, C. Monroe, and J. L. O’Brien, *Quantum computers*, *Nature* **464**, 45–53 (2010).

- [29] Y. Kang, K. Cho, J. Noh, D. L. P. Vitullo, C. Leary, and M. G. Raymer, *Remote preparation of complex spatial states of single photons and verification by two-photon coincidence experiment*, Optics Express **18**, 1217–1233 (2010).
- [30] J. L. Pienaar, C. R. Myers, and T. C. Ralph, *Space-time qubits*, Physical Review A **84**, 022315 (2011).
- [31] A. Hayat, X. Xing, A. Feizpour, and A. M. Steinberg, *Multidimensional quantum information based on single-photon temporal wavepackets*, Optics Express **20**, 29174–29184 (2012).
- [32] P. P. Rohde, *Optical quantum computing with photons of arbitrarily low fidelity and purity*, Physical Review A **86**, 052321 (2012).
- [33] P. P. Rohde, J. F. Fitzsimons, and A. Gilchrist, *Information capacity of a single photon*, Physical Review A **88**, 022310 (2013).
- [34] P. B. R. Nisbet-Jones, J. Dille, A. Holleczek, O. Barter, and A. Kuhn, *Photonic qubits, qutrits and ququads accurately prepared and delivered on demand*, New Journal of Physics **15**, 053007 (2013).
- [35] C. Roychoudhuri, A. Kracklauer, and K. Creath, editors, *The Nature of Light: What is a Photon?*, CRC Press, 2008.
- [36] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, Cambridge University Press, 1999.
- [37] B. J. Smith and M. G. Raymer, *Photon wave functions, wave-packet quantization of light, and coherence theory*, New Journal of Physics **9**, 414 (2007).
- [38] O. Keller, *On the theory of spatial localization of photons*, Physics Reports **411**, 1–232 (2005).
- [39] M. Planck, *Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum*, Annalen der Physik **4**, 553–563 (1901).
- [40] G. N. Lewis, *The conservation of photons*, Nature **118**, 874–875 (1926).
- [41] W. E. Lamb and M. O. Scully, *The Photoelectric Effect Without Photons*, Polarisation, Matière et Rayonnement (Jubilee volume in honor of Alfred Kastler), Presses Universitaires de France, 363–369 (1969).
- [42] P. Grangier, G. Roger, and A. Aspect, *Experimental Evidence for a Photon Anticorrelation Effect on a Beam Splitter: A New Light on Single-Photon Interferences*, Europhysics Letters **1**, 173–179 (1986).

- [43] I. Bialynicki-Birula, *Photon as a quantum particle*, Acta Physica Polonica B **37**, 935–946 (2006).
- [44] M. Born and P. Jordan, *Zur Quantenmechanik*, Zeitschrift für Physik **34**, 858–888 (1925).
- [45] W. Heisenberg, *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*, Zeitschrift für Physik **33**, 879–893 (1925).
- [46] M. Born, W. Heisenberg, and P. Jordan, *Zur Quantenmechanik II*, Zeitschrift für Physik **35**, 557–615 (1926).
- [47] P. A. M. Dirac, *The quantum theory of the emission and absorption of radiation*, Proceedings of the Royal Society A **114**, 243–265 (1927).
- [48] B. Saleh and M. Teich, *Fundamentals of Photonics*, Wiley, 1991.
- [49] U. M. Titulaer and R. J. Glauber, *Density Operators for Coherent Fields*, Physical Review **145**, 1041–1050 (1966).
- [50] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Atom-photon interactions: basic processes and applications*, Wiley, 1998.
- [51] M. A. Linne, *Spectroscopic Measurement: An Introduction to the Fundamentals*, Academic Press, 2002.
- [52] B. W. Shore, *The theory of coherent atomic excitation*, volume 1, Wiley, 1990.
- [53] M. Fox, *Quantum Optics: An Introduction*, Oxford University Press, 2006.
- [54] E. O. Lawrence and J. W. Beams, *The element of time in the photoelectric effect*, Physical Review **32**, 478–485 (1928).
- [55] A. T. Forrester, R. A. Gudmundsen, and P. Johnson, *Photoelectric mixing of incoherent light*, Physical Review **90**, 1691–1700 (1955).
- [56] M. Klein, *Optics*, Wiley, 1970.
- [57] E. Hecht, *Optics*, Addison Wesley, fourth edition, 2002.
- [58] H. Barrett and K. Myers, *Foundations of Image Science*, Wiley, 2003.

# *Apéndices*

# A

## Señal analítica

Sea  $f(x)$  una función real de variable real  $x$  y de cuadrado integrable ( $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty$ ). Dado que  $f(x)$  es real entonces  $\overline{f(x)} = f(x)$ . Si  $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)](\nu)$  representa la transformada de fourier de  $f(x)$ , entonces por el teorema de fourier

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} F(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu, \quad (\text{A.1})$$

$$F(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi\nu x} dx. \quad (\text{A.2})$$

Dado que  $f(x)$  es una función real, se cumple que  $\overline{F(\nu)} = F(-\nu)$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \overline{F(\nu)} &= \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi\nu x} dx} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} e^{i2\pi\nu x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i2\pi\nu x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi(-\nu)x} dx \\ \overline{F(\nu)} &= F(-\nu). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

□

Haciendo uso de la condición (A.3) la función  $f(x)$  puede expresarse de la forma

$$f(x) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} F(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu \right\}. \quad (\text{A.4})$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}} F(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} F(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu + \int_{\mathbb{R}^-} F(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} F(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu + \int_{\mathbb{R}^+} F(-\nu) e^{-i2\pi\nu x} d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} F(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu + \int_{\mathbb{R}^+} \overline{F(\nu)} e^{-i2\pi\nu x} d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} F(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu + \overline{\int_{\mathbb{R}^+} F(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu} \\ f(x) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} F(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu \right\}. \end{aligned}$$

□

Se define la señal analítica de la función  $f(x)$  como

$$f_a(x) = 2 \int_{\mathbb{R}^+} F(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu, \quad (\text{A.5})$$

en donde el espectro de la función  $f_a(x)$  únicamente contiene componentes frecuenciales positivas. En vista de lo anterior

$$f(x) = \operatorname{Re} \{ f_a(x) \}. \quad (\text{A.6})$$

Se define la función compleja  $f^{(+)}(x)$  como

$$f^{(+)}(x) = \int_{\mathbb{R}^+} F(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu, \quad (\text{A.7})$$

de tal forma que

$$f(x) = f^{(+)}(x) + f^{(-)}(x), \quad (\text{A.8})$$

en donde  $f^{(-)}(x) = \overline{f^{(+)}(x)}$  y  $f_a(x) = 2f^{(+)}(x)$ .