

Análisis comparativo del modelo y resolución de circuitos electrónicos lineales utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales fraccionarias

Jhon Alexander Caballero López

Trabajo de Grado para Optar al Título de Ingeniero Electrónico

Director

Carlos Rodrigo Correa Cely

Director Grupo de Investigación CEMOS

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Fisco mecánicas

Escuela de Ingenierías eléctrica, electrónica y telecomunicaciones

Ingeniería electrónica

Bucaramanga

2024

Tabla de Contenido

	Pág.
1. Introducción	8
2. Objetivos	10
2.1 Objetivo General	10
2.2 Objetivos Específicos.....	10
3. Marco Teorico.....	11
3.1 Definición de las ecuaciones diferenciales fraccionarias.....	11
3.1.1 Derivada de Riemann-Liouville.....	12
3.1.1 Derivada fraccionaria de Caputo	13
4. Desarrollo de la solución	14
4.1 Planteamiento de las ecuaciones y circuitos	14
4.2 Ecuaciones Adimensionales	16
4.3 Solucion en Matlab.	18
4.4 Montaje del circuito.	22
4.4.1 Circuito 1.	23
4.4.2 Circuito 2.	25
4.4.3 Circuito 3.	27
4.5 Comparación de la respuesta EDO y EDF.....	29
5. Conclusiones	36
Referencias Bibliográficas	37
Apéndices.....	39

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1. <i>Diferencias entre el circuito 1 y los métodos de EDF</i>	32
Tabla 2. <i>Diferencias entre el circuito 2 y los métodos de EDF</i>	34
Tabla 3. <i>Diferencias entre el circuito 3 y los métodos de EDF</i>	35

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1. <i>Circuito Resistivo</i>	14
Figura 2. <i>Circuito RL</i>	14
Figura 3. <i>Circuito RC</i>	15
Figura 4. <i>Circuito LC</i>	15
Figura 5. <i>Circuito RLC</i>	16
Figura 6. <i>Funcionamiento del código</i>	21
Figura 7. <i>Circuito RLC en el laboratorio</i>	22
Figura 8. <i>Imagen de la respuesta del circuito pasado 2.1 segundos</i>	23
Figura 9. <i>Valor de voltaje después de 2.1 segundos</i>	24
Figura 10. <i>Valor del voltaje pico</i>	24
Figura 11. <i>Valor pico del circuito 2</i>	25
Figura 12. <i>Tiempo del valor pico circuito 2</i>	26
Figura 13. <i>Valor pico circuito 3</i>	27
Figura 14. <i>Tiempo del valor pico circuito 3</i>	28
Figura 15. <i>Circuito RLC resuelto por EDO y EDF</i>	29
Figura 16. <i>Grafica del circuito 1 con EDF</i>	30
Figura 17. <i>Grafica del circuito 2 con EDF</i>	33
Figura 18. <i>Grafica del circuito 3 con EDF</i>	34

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Contenido del trabajo de grado.....	37

Resumen

Título: Análisis comparativo del modelo y resolución de circuitos electrónicos lineales utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales fraccionarias

Autor: Jhon Alexander Caballero López

Palabras Clave: Fraccionarias, Circuitos, Ecuaciones

Descripción: Este trabajo analiza cómo las ecuaciones diferenciales fraccionarias (EDF) permiten modelar fenómenos físicos y sistemas complejos con mayor precisión. La investigación compara el método tradicional de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) con el enfoque basado en EDF. Los resultados demuestran que las EDF ofrecen una mayor exactitud, generando respuestas más cercanas a la realidad y facilitando un control más eficiente de los circuitos electrónicos.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Físico mecánicas. Escuela de Eléctrica electrónica y telecomunicaciones.
Programa académico. Director: Carlos Rodrigo Correa Cely. Director Grupo de Investigación CEMOS

Abstract

Title: Análisis comparativo del modelo y resolución de circuitos electrónicos lineales utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales fraccionarias

Author: Análisis comparativo del modelo y resolución de circuitos electrónicos lineales utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales fraccionarias

Key Words: Fraccionarias, Circuitos, Ecuaciones

Description: This work analyzes how fractional differential equations (FDE) allow for more accurate modeling of physical phenomena and complex systems. The research compares the traditional method of ordinary differential equations (ODE) with the FDE-based approach. The results show that FDEs provide greater precision, yielding responses closer to reality and enabling more efficient control of electronic circuits.

* Degree Work

** Facultad de Físico mecánicas. Escuela de Eléctrica electrónica y telecomunicaciones. Programa académico. Director: Carlos Rodrigo Correa Cely. Director Grupo de Investigación CEMOS

Introducción

En el vertiginoso mundo de la electrónica, donde la precisión y la fiabilidad son imperativos, las ecuaciones diferenciales fraccionarias (EDF) han surgido como una herramienta matemática revolucionaria capaz de modelar fenómenos físicos y sistemas complejos con una precisión sin precedentes. Según estudios recientes, se estima que el 70% de los problemas en el diseño de circuitos electrónicos podrían evitarse mediante una simulación precisa antes de la fabricación.

Este avance no solo despierta interés, sino que también desafía los paradigmas establecidos en el análisis de circuitos electrónicos. Imagina poder capturar los comportamientos más sutiles y las interacciones más complejas de los componentes electrónicos con una precisión asombrosa. Las EDF ofrecen precisamente eso: una ventana hacia un nuevo nivel de comprensión y control en el diseño y la simulación de circuitos electrónicos.

Existen varias maneras de mejorar la precisión de los circuitos electrónicos. Una de ellas es mejorar la calidad de los componentes, como resistores, capacitores e inductores, lo que optimiza la respuesta final del circuito. Otra técnica utilizada es la redundancia en los circuitos, que asegura una respuesta óptima. Además, se utilizan tolerancias, ya que el error en cualquier circuito electrónico nunca es cero. Estos márgenes garantizan que la respuesta tenga los resultados esperados.

Para abordar los problemas de precisión en los circuitos electrónicos, se propone el uso de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias (EDF). Esta solución mejora la respuesta del circuito, complementando las técnicas previamente descritas, ya que esta herramienta matemática predice el comportamiento del circuito de manera más precisa en comparación con las técnicas actuales.

Como se demuestra en este trabajo, la respuesta obtenida mediante EDF es más cercana a los datos experimentales obtenidos en el laboratorio, lo que garantiza una precisión y un comportamiento ante diferentes estímulos más realistas. Esto permite utilizar rangos de tolerancia menores, que son más fiables y aseguran una respuesta con menos variación.

2. Objetivos

2.1 Objetivo General

Destacar las discrepancias y analogías entre la resolución de circuitos electrónicos empleando ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y ecuaciones diferenciales

2.2 Objetivos Específicos

- Explorar las diferencias entre los enfoques de modelos de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales fraccionarias.
- Desarrollar ejemplos que demuestran el uso de las varias definiciones de derivación fraccionaria.
- Adquirir las señales de un circuito RLC, y compararlas con las predichas mediante su ecuación diferencial ordinaria, y su ecuación diferencial fraccionaria correspondiente.
- Proponer y detallar la metodología de comparación de estos dos tipos de modelado.

3. Marco teórico

El estudio de las **ecuaciones diferenciales fraccionarias (EDF)** es una extensión del cálculo diferencial e integral tradicional, que permite considerar órdenes no enteros de derivación e integración. Estas ecuaciones han cobrado importancia en áreas donde los modelos clásicos no son suficientes para describir fenómenos complejos. (Vázquez y Velasco, 2024)

El cálculo fraccionario, que se refiere al estudio de derivadas e integrales de orden no entero, tiene su origen en el siglo XVII, con los trabajos de **Gottfried Wilhelm Leibniz** en 1675, cuando introdujo la noción de derivada de orden n . En 1695, **L'Hôpital** le preguntó a Leibniz sobre el significado de la derivada de orden $1/2$, a lo cual Leibniz respondió con lo que parecía una paradoja: “esto permitirá en el futuro extraer consecuencias muy útiles”. Este comentario marcó el inicio de lo que sería el desarrollo de una rama significativa dentro del cálculo. (Vázquez y Velasco, 2024)

A lo largo de los siglos, matemáticos como Euler, Lagrange, Fourier, Riemann, Liouville, Grünwald, y Letnikov han contribuido al desarrollo formal del cálculo fraccionario. Entre las formulaciones más utilizadas hoy en día, encontramos las derivadas de Riemann-Liouville, Caputo y Grünwald-Letnikov, las cuales han encontrado aplicaciones en una amplia gama de campos científicos y técnicos. (Vázquez y Velasco, 2024)

3.1 Definición de las ecuaciones diferenciales fraccionarias

Una ecuación diferencial fraccionaria es aquella que involucra derivadas de orden fraccionario. A diferencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias, que sólo permiten derivadas de órdenes enteros (por ejemplo, primera o segunda derivada), las ecuaciones fraccionarias

permiten órdenes no enteros como $D^{(1/2)}$, lo que proporciona mayor flexibilidad en la modelización de sistemas dinámicos complejos.

Cada definición de derivada fraccionaria se construye a partir de una interpretación distinta de cómo extender el concepto de derivada, entre las más utilizadas tenemos las siguientes:

Derivada de Riemann-Liouville: Es una de las definiciones más antiguas y está basada en una extensión de la integral definida. Se usa comúnmente en problemas de memoria histórica, pero puede tener dificultades con ciertas condiciones iniciales. Ejemplo: transportes de partículas que requieren un comportamiento con memoria.

Derivada de Caputo: Es una de las definiciones más utilizadas, especialmente en aplicaciones físicas, porque permite manejar condiciones iniciales de una manera más similar a las ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto facilita la aplicación en sistemas físicos donde las condiciones iniciales tienen un significado directo. Ejemplo: sistemas físicos como circuitos.

Derivada de Grünwald-Letnikov: Se deriva directamente del enfoque de diferencias finitas y es útil para el cálculo numérico. Su aproximación es más sencilla de implementar computacionalmente. Ejemplo: Métodos numéricos computacionales.

Tomando en cuenta los tres tipos de derivadas fraccionarias más comunes, destacamos la derivada de Caputo y la derivada de Riemann-Liouville.

3.1.1 Derivada de Riemann-Liouville:

La derivada fraccionaria se puede definir de varias formas, siendo la más común la derivada en el sentido de **Riemann-Liouville**: (Lombardero, 2014)

Ecuación 1. *Ecuación de Riemann-Liouville*

$$\begin{aligned} (D_a^\alpha f)(x) &:= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\alpha} f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \quad (x > a) \end{aligned}$$

3.1.2 Derivada fraccionaria de Caputo

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville jugó un papel determinante en el desarrollo del cuerpo teórico del Cálculo Fraccionario, y se utilizó con éxito en aplicaciones estrictamente matemáticas. Pero al tratar de realizar modelizaciones matemáticas de fenómenos físicos reales por medio de ecuaciones diferenciales fraccionarias, surgió el problema de las condiciones iniciales también de orden fraccional. Este tipo de condiciones no son físicamente interpretables y presentan un obstáculo considerable a la hora de hacer uso práctico del Cálculo Fraccionario. El operador diferencial de Caputo, en contraste con el de Riemann-Liouville, emplea como condiciones iniciales derivadas de orden entero, es decir, valores iniciales que son físicamente interpretables a la manera tradicional. La definición que sigue representó pues un notable avance práctico en el estudio de fenómenos físicos como los de tipo viscoelástico y otros. (Lombardero, 2014)

Ecuación 2. *Ecuación de Caputo*

$$\begin{aligned} ({}^C D_a^\alpha f)(x) &:= \left(I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dx} \right)^n f \right)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \quad (x > a) \end{aligned}$$

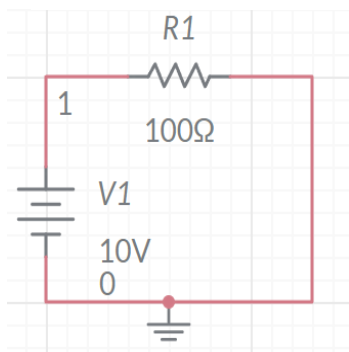
4. Desarrollo de la solución

Para llevar a cabo esta investigación, se comenzó con la formulación de los circuitos, y tras realizar su análisis, se derivaron manualmente las ecuaciones correspondientes a cada uno.

4.1 Planteamiento de las ecuaciones y circuitos:

- Circuito con una resistencia (R):

Figura 1. *Circuito Resistivo*



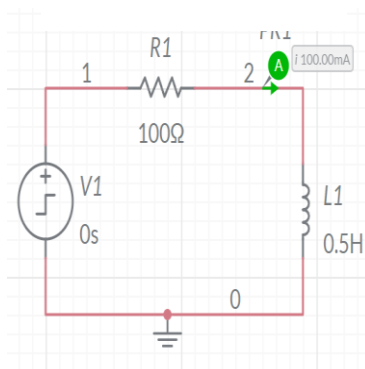
Usando la ley de ohm tenemos que la corriente es:

$$i = \frac{v}{R}$$

$$i = \frac{10[v]}{100[\Omega]} = 0.1 [A] \text{ Tenemos un valor constante durante el tiempo}$$

- Circuito con una resistencia y un inductor (RL):

Figura 2. *Circuito RL*



Usando la Ley de tensiones de Kirchoff es:

$$V = R * i + L * i'$$

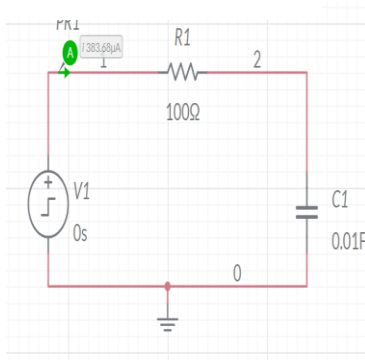
$$i' = \frac{V - R * i}{L}$$

Obtenemos una ecuación que describe la corriente de un circuito

RL

- Circuito con una resistencia y un capacitor (RC):

Figura 3. Circuito RC



Usando la Ley de tensiones de Kirchhoff es:

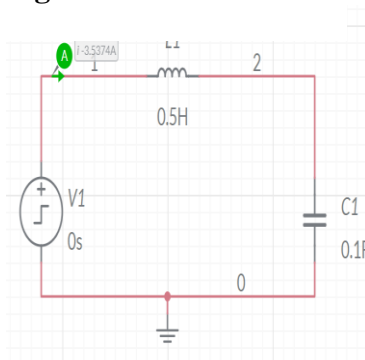
$$V = R * i + \frac{1}{C} * \int i$$

Teniendo en cuenta que: $i = q'$ siendo "q" la carga Nos queda la siguiente ecuación:

$$V = R * q' + \frac{1}{C} * q$$

- Circuito con un inductor y un capacitor (LC):

Figura 4. Circuito LC



Usando la Ley de tensiones de Kirchhoff es:

$$V = L * i' + \frac{1}{C} * \int i$$

Teniendo en cuenta que:

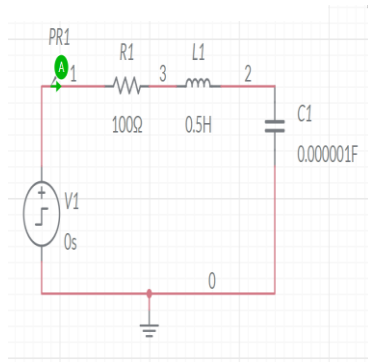
$$i = q' \text{ siendo "q" la carga}$$

Nos queda la siguiente ecuación:

$$V = L * q'' + \frac{1}{C} * q$$

- Circuito con una resistencia, un inductor y un capacitor (RLC):

Figura 5. Circuito RLC



Usando la Ley de tensiones de Kirchoff es:

$$V = R * i + L * i' + \frac{1}{C} * \int i$$

Teniendo en cuenta que:

$$i = q' \text{ siendo "q" la carga}$$

Nos queda la siguiente ecuación:

$$V = R * q' + L * q'' + \frac{1}{C} * q$$

Una vez obtenida la ecuación resultante de cualquier sistema RLC en serie podemos continuar con las comparaciones.

4.2 Ecuaciones adimensionales

Es fundamental considerar que, para llevar a cabo comparaciones con el circuito en el laboratorio, las ecuaciones que se deseen comparar deben ser adimensionales. Esto se debe a que, al utilizar EDF, se alteran las unidades del sistema, lo que impediría realizar una comparación efectiva de las magnitudes. Para ello existen dos alternativas: se puede adimensionalizar las ecuaciones o los datos derivados de ellas.

Para adimensionar las ecuaciones se realiza el siguiente procedimiento:

Definiciones:

$$t_0 = \sqrt{LC} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \sigma = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\tilde{V} = \frac{V}{V_0} \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_0} \quad \tilde{q} = \frac{q}{q_0} = \frac{q}{V_0 * C}$$

Derivada:

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_0} \quad \tilde{q} = \frac{q}{q_0}$$

$$d\tilde{t} = \frac{dt}{t_0} \quad d\tilde{q} = \frac{dq}{q_0}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{t_0} * \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}} \text{ (Primera derivada)}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{q_0}{t_0^2} * \frac{d}{dt} \left(\frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}} \right)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{q_0}{t_0^2} * \frac{d^2\tilde{q}}{d\tilde{t}^2} \text{ (Segunda derivada)}$$

Reemplazando las derivadas y definiciones en la ecuación del circuito RLC obtenemos lo siguiente.

$$\tilde{V} = \frac{d^2\tilde{q}}{d\tilde{t}^2} + 2\sigma \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}} + \tilde{q}$$

Obteniendo así la ecuación resultante para compararla

4.3 Solución en Matlab

Para la solución en Matlab, se tuvo en cuenta que a derivada de Riemann-Liouville necesita condiciones iniciales fraccionarias lo cual no es consistente con condiciones iniciales de orden entero. Por ello la solución mediante la derivada de Caputo es más adecuada para la solución de circuitos, adicionalmente se tuvo en cuenta los aportes realizados por Roberto Garrapa los cuales son las funciones que se utilizaron en el desarrollo del software.

Las funciones de MATLAB propuestas por Roberto Garrapa incluyen: `**FDE_PI1_Ex.m**`, `**FDE_PI1_Im.m**`, `**FDE_PI2_Im.m**`, y `**FDE_PI12_PC.m**`. Sin embargo, estas no se ajustan a mi problema, ya que están diseñadas para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales fraccionarias con una única derivada. Por esta razón, las funciones `**MT_FDE_PI1_Ex.m**`, `**MT_FDE_PI1_Im.m**`, `**MT_FDE_PI2_Im.m**`, y `**MT_FDE_PI12_PC.m**` son más adecuadas para el problema del circuito RLC, dado que implementan la solución "Multi-term FDE", que permite trabajar con más de un orden de derivada en la misma función. Entre ellas, se eligieron `**MT_FDE_PI1_Im.m**` y `**MT_FDE_PI2_Im.m**`, ya que resuelven el problema de manera implícita, lo que facilita su implementación.

Los parámetros utilizados en las funciones de Matlab son los siguientes:

```
[t, y] = mt_fde_pi1_im(al, lam, f_fun, J_fun, t0, T, y0, h)
```

```
[t, y] = mt_fde_pi2_im(al, lam, f_fun, J_fun, t0, T, y0, h)
```

al: vector of the fractional orders alpha of each term of the multiterm FDE. The orders in $al = (al_1, \dots, al_Q)$ must not be necessarily sorted in descending or ascending order.

lam: vector of the coefficients lam of each term of the multiterm FDE which correspondis to the respective al-order drivatives $lam = (lam_1, \dots, lam_Q)$. It is requested that the element of lam corresponding to $\max(al_1, \dots, al_Q)$ is not zero.

f_fun: function defining the source or nonlinear term $f(t,y(t))$. f_fun must be a function handle corresponding to the vector field of the multiterm FDE for the scalar variable t and the (possibly vector) state variable Y as independent variable. If necessary, $f_fun(t,y,param)$ can use a vector of parameters (see later on). Note that $f_fun(t,y)$ or $f_fun(t,y,param)$ must return a scalar when the f_fun is a scalar function or a column vector when f_fun is a vector function.

J_fun: Jacobian of the the source or nonlinear term $f(t,y(t))$. J_fun must be a function handle corresponding to the Jacobian of the vector field f_fun. Note that $J_fun(t,y)$ must return a matrix. If necessary, $J_fun(t,y,param)$ can use a vector of parameters (see later on).

t0, T: starting and final time of the integration interval.

y0: initial conditions to be assigned to uniquely define the solution. The set of initial conditions y0 must be a matrix with a number of rows equal to the size of the problem (hence equal to the number of rows of the output of f_fun) and a number of columns equal to the smallest integer greater than $\max(al_1, \dots, al_Q)$.

h: step-size for integration and must be real and positive (Garrapa, 2018).

MT_FDE_PI1_Im:

Ecuación 3. Método 1 EDF

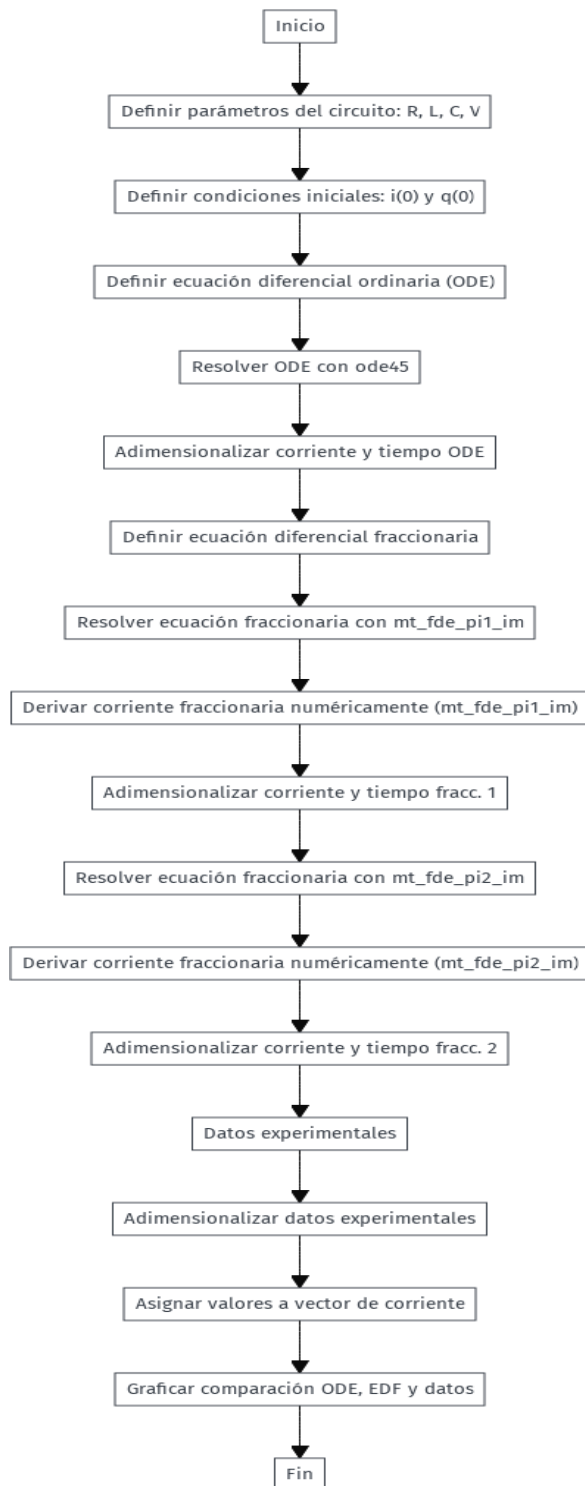
$$y_n = \tilde{T}(t) - \sum_{i=1}^{Q-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_Q} h^{\alpha_Q - \alpha_i} \sum_{j=1}^n b_{n-j}^{(\alpha_Q - \alpha_i)} y_j + \frac{1}{\lambda_Q} h^{\alpha_Q} \sum_{j=1}^n b_{n-j}^{(\alpha_Q)} f(t_j, y_j).$$

MT_FDE_PI2_Im:

Ecuación 4. Método 2 EDF

$$y_n = \tilde{T}(t) - \sum_{i=1}^{Q-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_Q} h^{\alpha_Q - \alpha_i} \left(\tilde{a}_n^{(\alpha_Q - \alpha_i)} y_0 + \sum_{j=1}^n a_{n-j}^{(\alpha_Q - \alpha_i)} y_j \right) + \frac{1}{\lambda_Q} h^{\alpha_Q} \left(\tilde{a}_n^{(\alpha_Q)} f(t_0, y_0) + \sum_{j=1}^n a_{n-j}^{(\alpha_Q)} f(t_j, y_j) \right),$$

Ambas funciones utilizan la derivada de Caputo por lo cual permite utilizar valores enteros en las condiciones iniciales.

Figura 6. *Funcionamiento del código*

La metodología que se siguió para poder realizar el

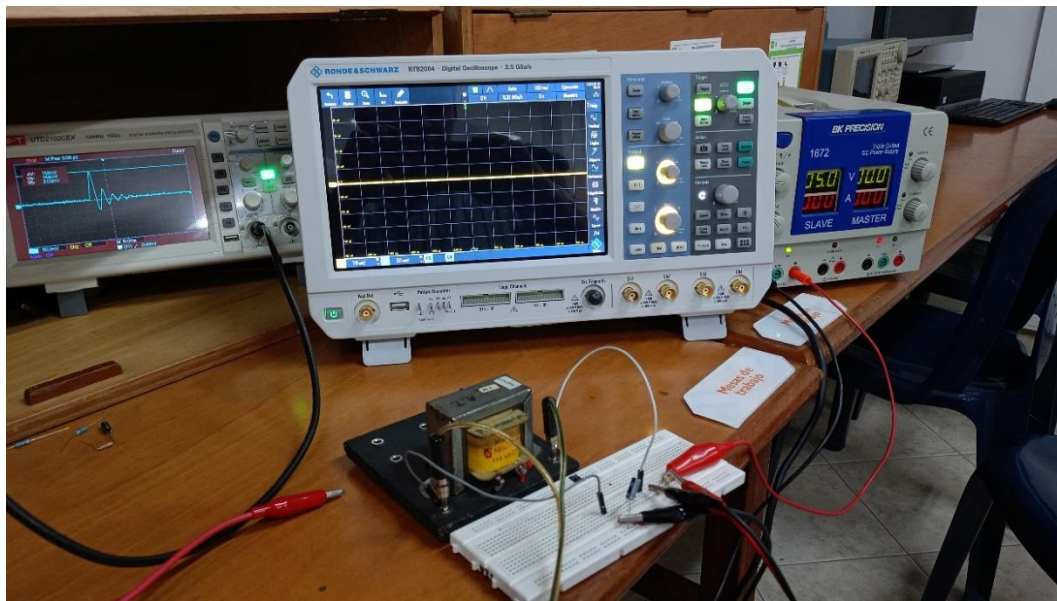
código en Matlab es el siguiente:

- Se definen los valores de voltaje, resistencia, inductancia y capacitancia.
- Se toman en cuenta los valores iniciales de corriente y carga.
- Utilizando la ecuación resultante de la ilustración 6 podemos definir la ecuación diferencial para la solución.
- Se resuelve mediante una herramienta de Matlab llamada ode45.
- Se adimensionan los resultados de la funcion
- Se define la EDF
- Posteriormente se utiliza la función `mt_fde_pi1_im` y `mt_fde_pi2_im` para resolver la EDF
- Posteriormente se deriva la respuesta ya que la entrada a la función es la carga
- Se adimensionan los resultados de las EDF
- Se añaden los datos experimentales
- Se admiencionan los datos experimentales
- Por último, se grafican las respuestas para comprar los diferentes resultados

4.4 Montaje del circuito

El montaje del circuito que se realizó en el experimento es el de la figura 7 el cual es un circuito RLC en serie, Hay que tener en cuenta que el uso del osciloscopio utilizado midió la tensión en la resistencia (R).

Figura 7. Circuito RLC en el laboratorio



En este circuito RLC se utilizó un valor de inductancia grande con el fin de retrasar la respuesta del circuito y de esta manera poder obtener una mejor imagen de dicha respuesta.

Obteniendo las imágenes del osciloscopio se puede observar lo siguiente:

4.4.1 Circuito 1

Se tomaron en cuenta los siguientes parámetros:

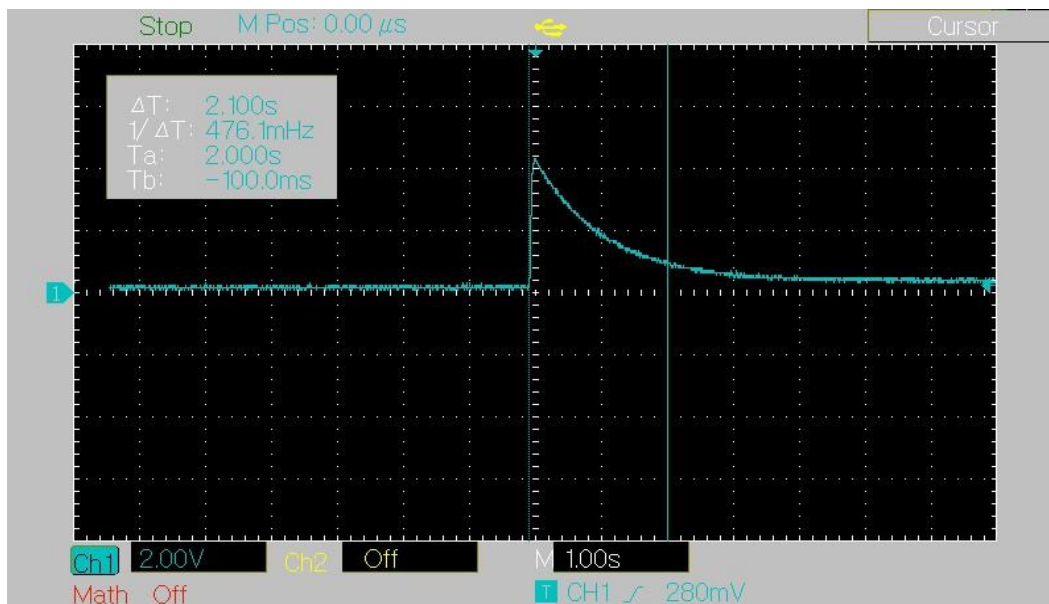
$R = 200$ Resistencia (en ohmios)

$L = 1.4$ Inductancia (en henrios)

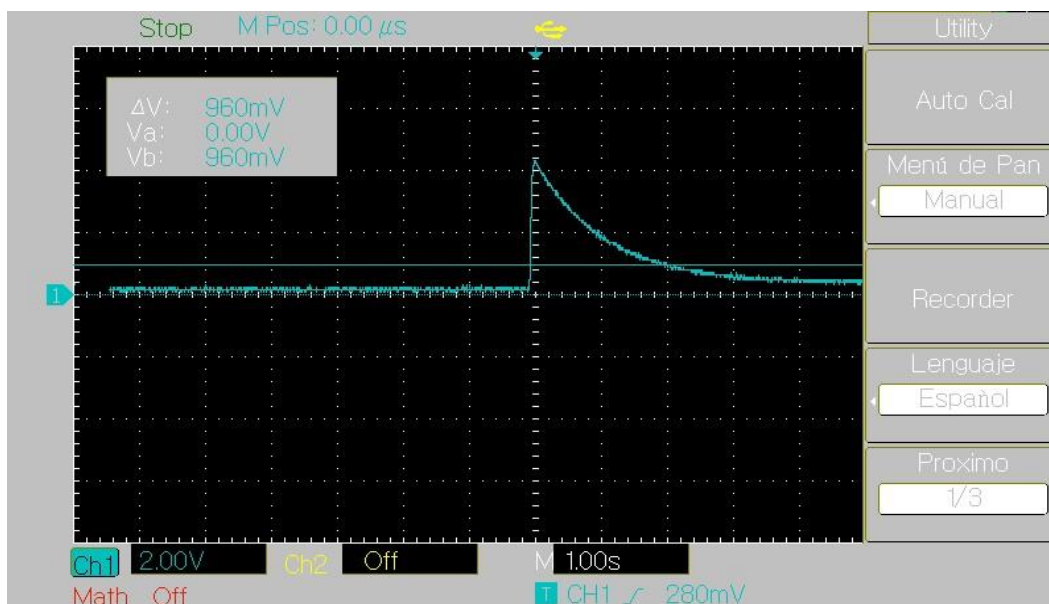
$C = 4700e-6$ Capacitancia (en faradios)

$V = 5$ Voltaje constante de la fuente (en voltios)

Figura 8. Imagen de la respuesta del circuito pasado 2.1 segundos

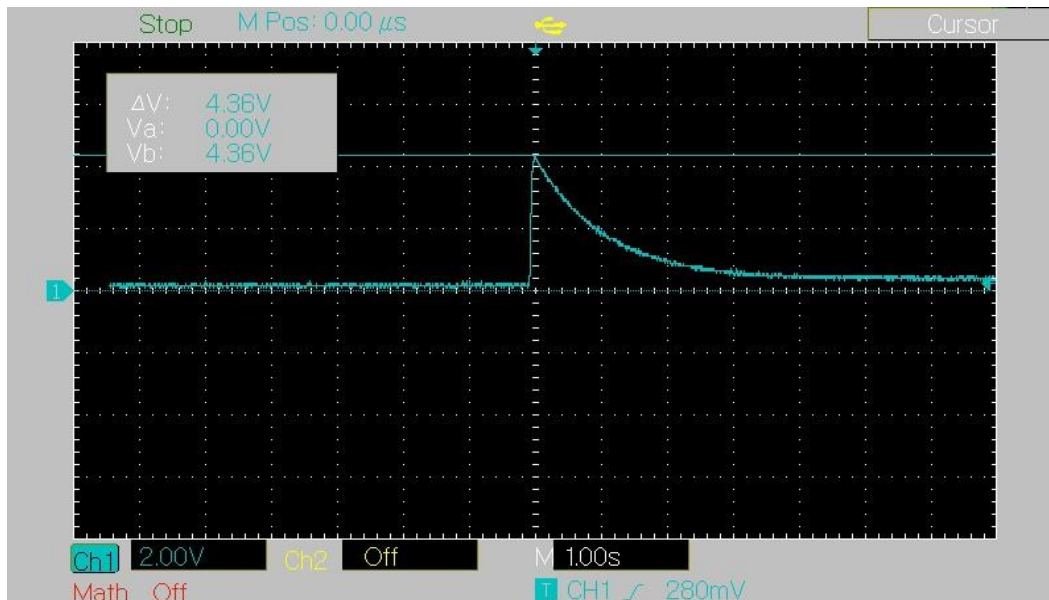


En esta imagen, se tomó como criterio un tiempo de encendido del circuito de 2.1 segundos. Se puede observar cómo el voltaje en la resistencia pasa de 0 a un pico elevado, para luego tender nuevamente hacia 0.

Figura 9. Valor de voltaje después de 2.1 segundos

Después de transcurridos los 2.1 [s] se obtiene que el valor de tensión en la resistencia es de 960 [mV], es decir 0.96 [V]

Figura 10. Valor del voltaje pico



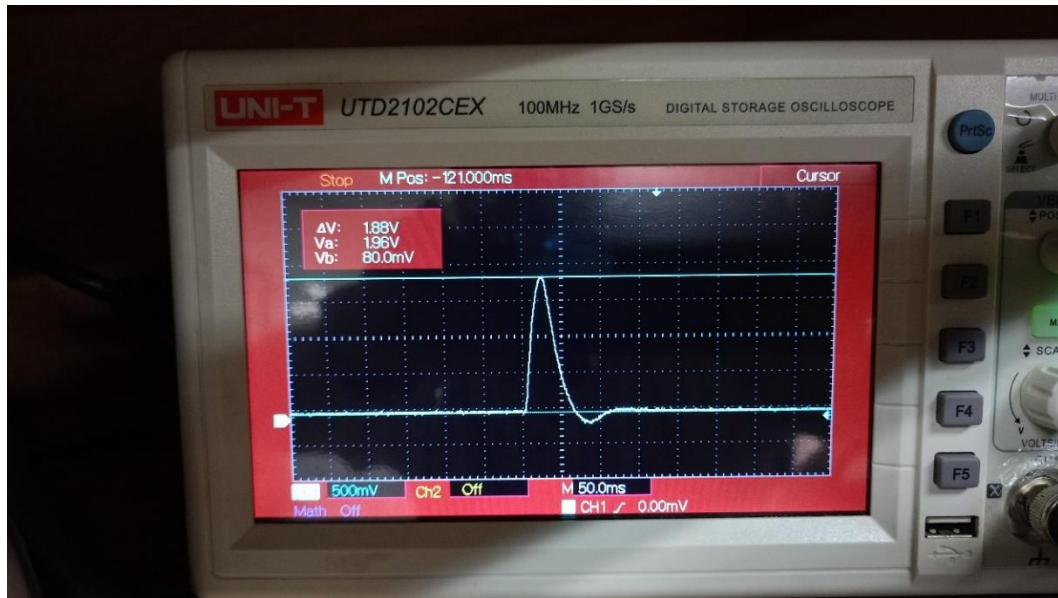
Por último, en este circuito se observa que el valor pico es de 4.36 [V]

4.4.2 Circuito 2

Se tomaron en cuenta los siguientes parámetros:

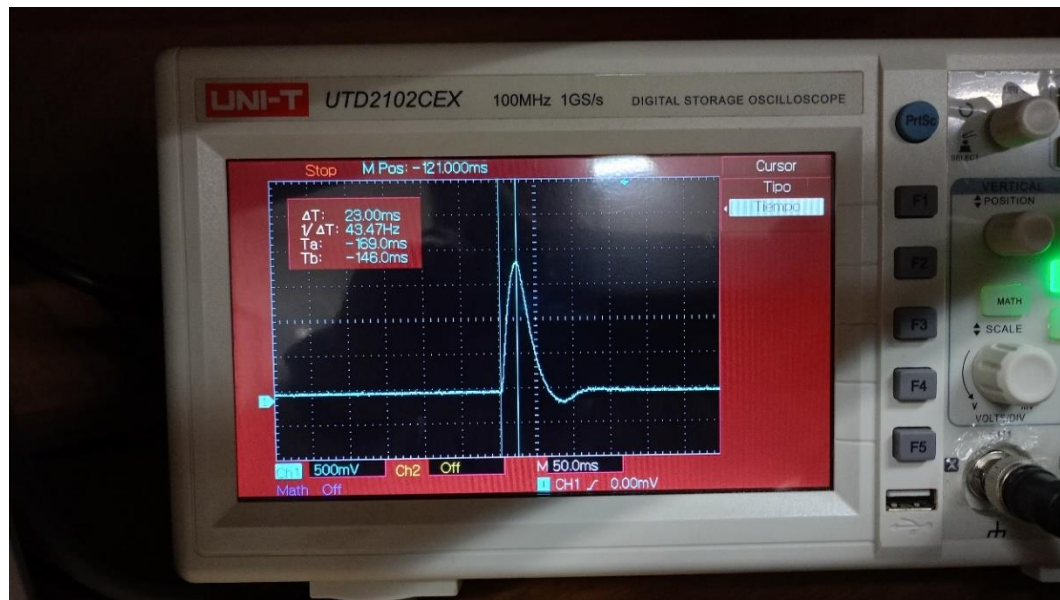
$R = 220$	Resistencia (en ohmios)
$L = 4.5$	Inductancia (en henrios)
$C = 47e-6$	Capacitancia (en faradios)
$V = 5$	Voltaje constante de la fuente (en voltios)

Figura 11. Valor pico del circuito 2



Esta imagen representa el voltaje pico de la resistencia de 220 ohms resultando en un voltaje de 1.88 [V]

Figura 12. *Tiempo del valor pico circuito 2*



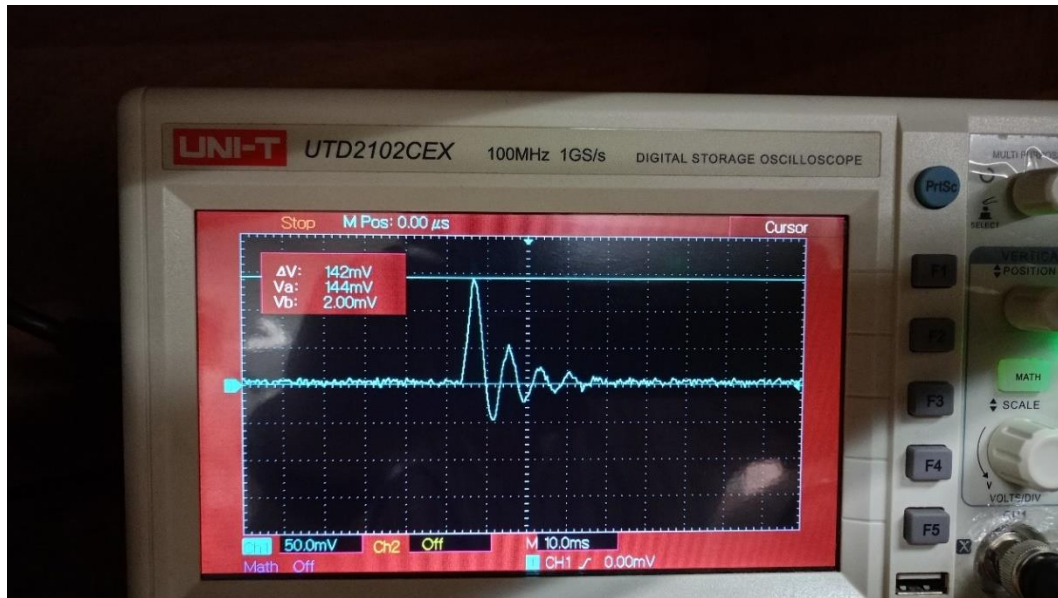
En esta imagen podemos observar el tiempo para alcanzar el voltaje pico resultando en un valor de 23 [ms]

4.4.3 Circuito 3

Se tomaron en cuenta los siguientes parámetros:

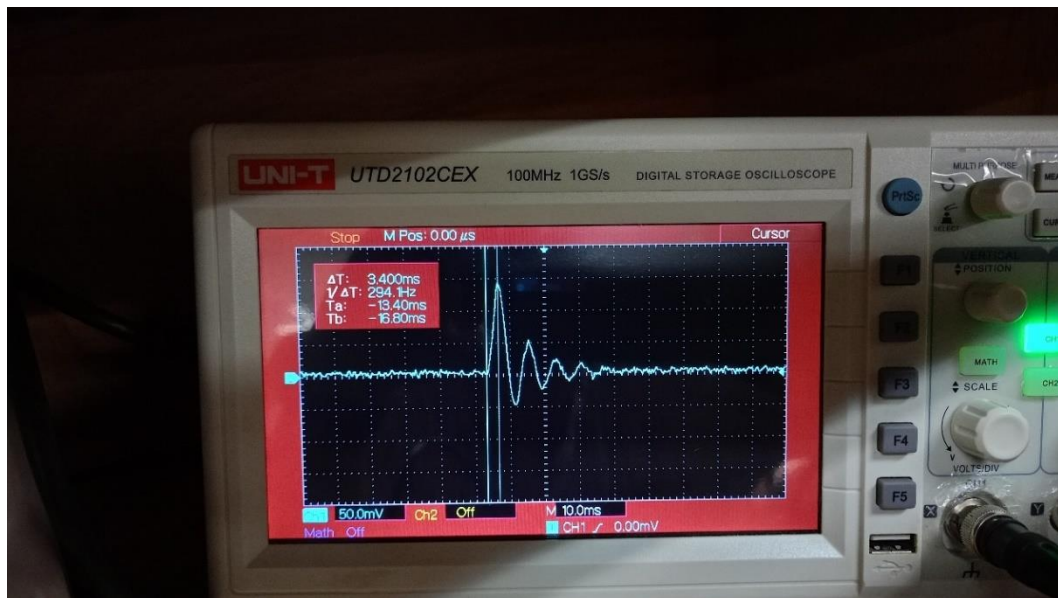
- | | |
|------------|---|
| $R = 100$ | Resistencia (en ohmios) |
| $L = 4.5$ | Inductancia (en henrios) |
| $C = 1e-6$ | Capacitancia (en faradios) |
| $V = 5$ | Voltaje constante de la fuente (en voltios) |

Figura 13. Valor pico circuito 3



Esta imagen representa el voltaje pico en la resistencia de 100 ohm del circuito dando como resultado 142 [mV]

Figura 14. Tiempo del valor pico circuito 3



En esta imagen del osciloscopio observamos el tiempo transcurrido al primer pico con un resultado de 3.4 [ms]

4.5 Comparación de las respuestas EDO y EDF

Antes de comenzar con las comparaciones, se llevaron a cabo diversas pruebas para asegurar que, al utilizar los mismos valores de derivadas, se obtenían los mismos resultados que con las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) tradicionales. Entre las pruebas realizadas se encuentra el siguiente ejemplo con sus respectivos parámetros.

$R = 100$ Resistencia (en ohmios)

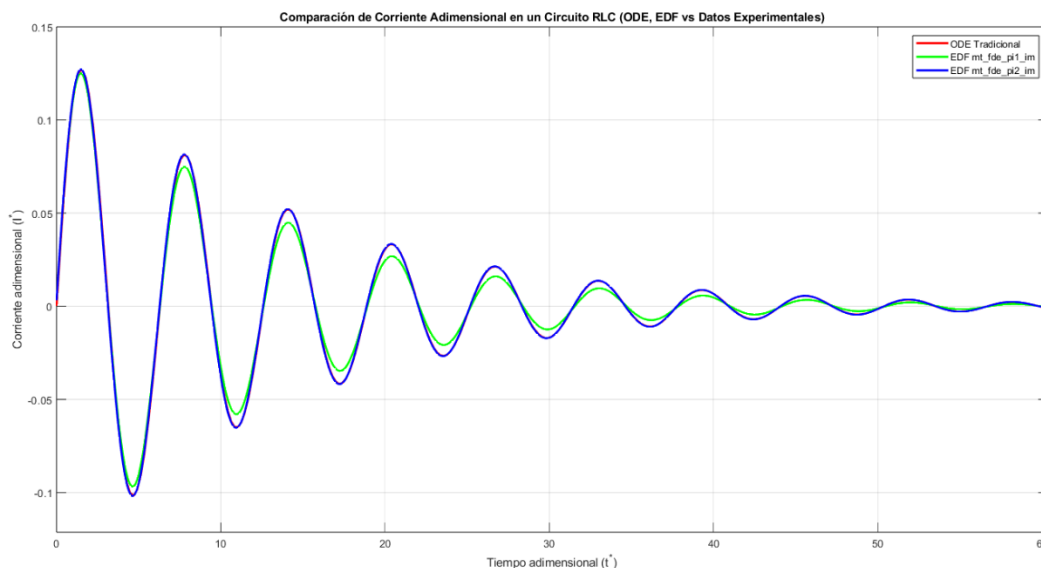
$L = 0.5$ Inductancia (en henrios)

$C = 1e-6$ Capacitancia (en faradios)

$V = 10$ Voltaje de la fuente (en voltios)

Graficas de EDO, EDF1 y EDF2:

Figura 15. Circuito RLC resuelto por EDO y EDF



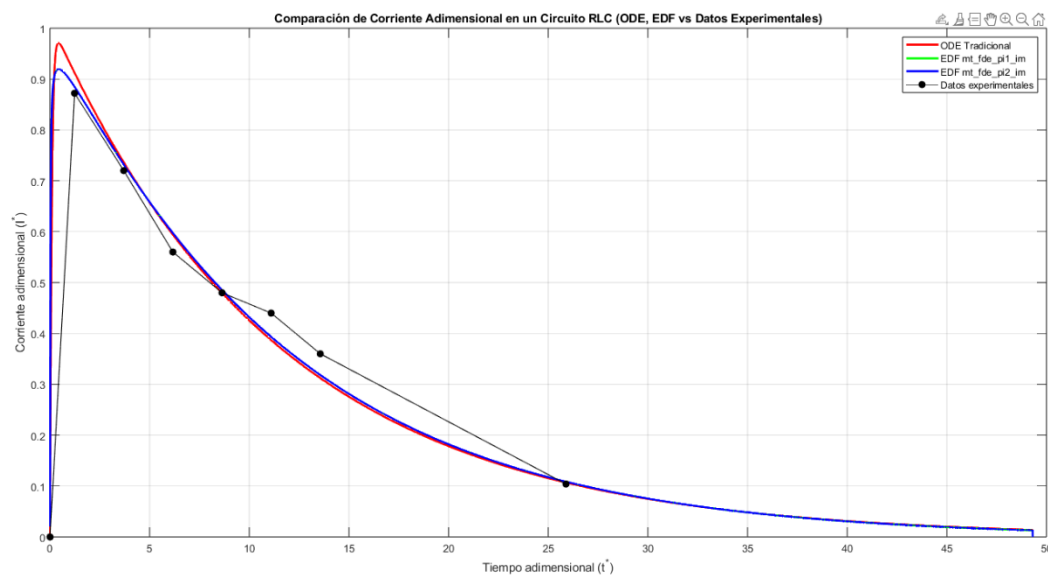
Una vez finalizado el análisis con condiciones iniciales de derivada iguales, se concluyó que los métodos EDO y EDF2 presentan respuestas similares, mientras que el método EDF1,

aunque sigue la misma tendencia, arroja valores ligeramente más bajos. A partir de esto, es posible comparar los distintos métodos con los resultados obtenidos en el laboratorio.

Circuito 1

Comparación con el código realizado en Matlab:

Figura 16. *Grafica del circuito 1 con EDF*



Para esta ilustración se utilizó el valor de Alpha (1.01 y 1.8) con el fin de obtener una respuesta fraccionaria más cercana a la gráfica obtenida en el laboratorio logrando así más afinidad con la respuesta real.

Además, se puede notar que el comportamiento de la gráfica es similar al del circuito 1 (ver figuras 8, 9 y 10); sin embargo, los valores no coinciden porque en estas gráficas se presentan respuestas adimensionales. Es importante señalar que las soluciones obtenidas mediante EDF se ajustan más a la gráfica de los datos experimentales.

Análisis estadístico de errores:

- **Error Absoluto Medio (MAE):**

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|$$

donde y_i son los valores experimentales, \hat{y}_i son los valores predichos, y “n” es el número total de observaciones.

- **Error Cuadrático Medio (MSE):**

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

- **Desviación estándar (RMSE):**

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$$

- **Coefficiente de Determinación (R^2):**

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}}$$

Donde:

$$SS_{res} = MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$SS_{tot} = MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

Con \bar{y} como la media de los valores observados.

Una vez teniendo en cuenta los porcentajes de error podemos empezar a calcular el análisis estadístico planteado

Tabla comparativa:

A partir de las pruebas realizadas, se obtuvo la siguiente tabla. Es importante destacar que *Alpha* representa el orden de la derivada y se expresa como Alpha (1, 2, 0). Dado que la derivada se toma con respecto a la carga, el primer valor indica el orden de la derivada asociado a la resistencia, el segundo valor corresponde al orden de la derivada en el inductor, y el tercer valor al del capacitor.

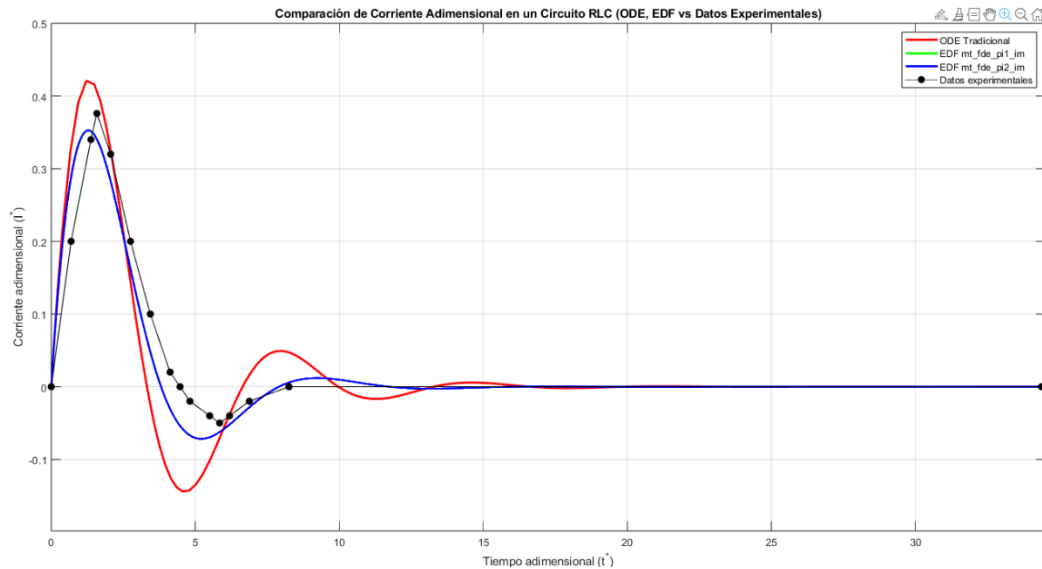
Tabla 1. Diferencias entre el circuito 1 y los métodos de EDF

Metodo y lamda	MAE	MSE	RMSE	R2
EDO	0.0244	0.0010	0.0341	0.9863
Alpha [1.01, 1.8, 0]:				
EDF1	0.0225	0.0008	0.0294	0.9898
EDF2	0.0226	0.0008	0.0294	0.9898
Alpha [1.12, 1.8, 0]:				
EDF1	0.0211	0.0007	0.0277	0.9909
EDF2	0.0212	0.0007	0.0277	0.9909

Circuito 2:

Comparación con el código realizado en Matlab:

Figura 17. *Grafica del circuito 2 con EDF*



Con los valores de Alpha (1.1, 2, 0) como ordenes de las derivadas podemos observar una mejora en la gráfica (figura 17), esto refleja una mejora en la precisión para realizar las comparaciones se realizó la siguiente tabla con el análisis estadístico

Tabla comparativa:

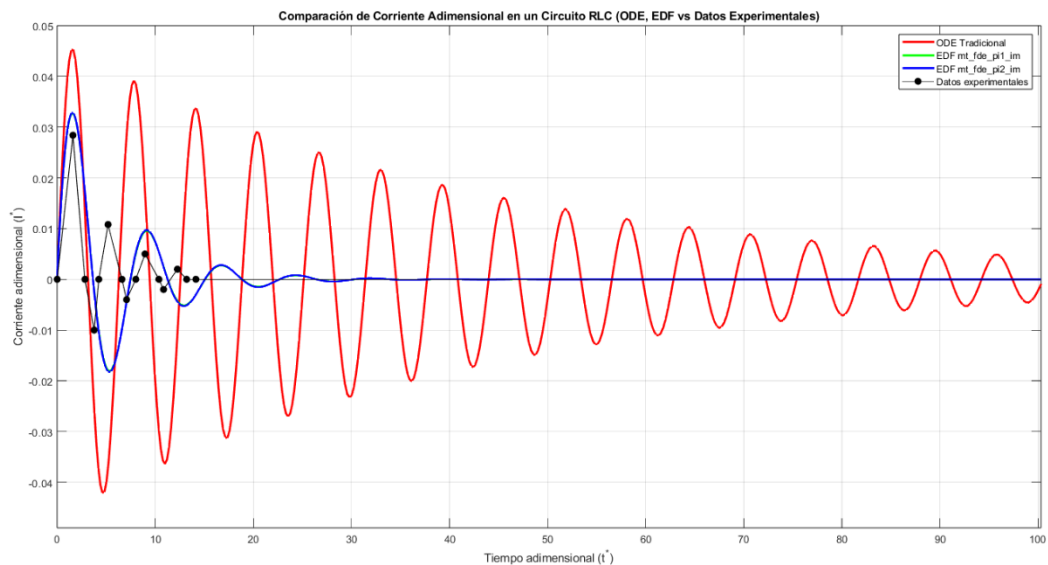
Con las diferentes pruebas se puede observar una mejora en la respuesta acercándose más a el circuito empleado en el laboratorio.

Tabla 2. Diferencias entre el circuito 2 y los métodos de EDF

Metodo y lamda	MAE	MSE	RMSE	R2
EDO	0.0623	0.0066	0.081	0.6856
Alpha [1.1, 2, 0]:				
EDF1	0.0302	0.0015	0.0357	0.9296
EDF2	0.0303	0.0015	0.0358	0.9292
Alpha [1.12, 1.8, 0]:				
EDF1	0.0276	0.0013	0.0327	0.9395
EDF2	0.0277	0.0013	0.0328	0.9392

Circuito 3:

Comparación con el código realizado en Matlab:

Figura 18. Grafica del circuito 3 con EDF

En esta gráfica, al observar los comportamientos, podemos concluir que el tiempo de amortiguación del comportamiento teórico es mayor que el del comportamiento utilizando EDF. Esto nos lleva a la conclusión de que, en este ejercicio, las EDF resultan ser mucho más precisas

que el comportamiento teórico esperado. Teniendo en cuenta que el valor de Alpha es de (1.4, 2, 0)

Tabla comparativa:

Tabla 3. *Diferencias entre el circuito 3 y los métodos de EDF*

Metodo y lamda	MAE	MSE	RMSE	R2
EDO	0.0223	0.0007	0.0271	-9.8217
Alpha [1.4, 2, 0]:				
EDF1	0.0070	0.0001	0.0102	-0.5467
EDF2	0.0071	0.0001	0.0103	-0.5676
Alpha [1.4, 1.8, 0]:				
EDF1	0.0035	0	0.0055	0.5470
EDF2	0.0035	0	0.0055	0.5458

5. Conclusiones

- Las EDF ofrecen flexibilidad adicional al ajustar sus parámetros, lo que facilitó encontrar una ecuación que representa de mejor manera los datos obtenidos en el laboratorio.
- Las EDF en los experimentos planteados tienen menor porcentaje de error frente a las EDO.
- Hay que tener en cuenta que los porcentajes de error también están sujetos a errores en los aparatos de medición, así como en los valores de los componentes empleados.
- La derivada de Caputo es la más adecuada para formular la solución, ya que facilita la interpretación de las condiciones iniciales y se ajusta con mayor precisión a una EDO cuando esta tiene los mismos órdenes de derivadas.

Referencias Bibliográficas

Antón Lombardero, (2014). "Cálculo Fraccionario y dinámica newtoniana". Revista de investigación "pensamiento matemático MAIC". Disponible en: <https://documat.unirioja.es/download/articulo/5994498.pdf>.

Baleanu, D., Sadat Sajjadi, S., Jajarmi, A., & Asad, J. H. (2019). "New features of the fractional Euler-Lagrange equations for a physical system within non-singular derivative operator." *The European Physical Journal Plus*, 134(4), 181. DOI: 10.1140/epjp/i2019-12561-x.

David, F. (s.f.). "Una introducción a las ecuaciones diferenciales fraccionarias". Tesis de pregrado, Depto. Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México, México. Disponible en: <http://ri.uaemex.mx/bitstream/handle/20.500.11799/105622/Tes.is%20David%20Flores.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. [Accedido: 14 junio 2023].

Garrappa, R. (2018). "Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial." *Mathematics*, 6(2), 16. DOI: [10.3390/math6020016](https://doi.org/10.3390/math6020016).

José, G., Roberto, H., Juan, G., & Gabriel, C. (2014). "Fractional RC and LC Electrical Circuits." *Ingeniería Investigación y Tecnología*, 15(2), abril-junio. Disponible en: <https://www.scielo.org.mx/pdf/iit/v15n2/v15n2a13.pdf>. [Accedido: 14 junio 2023].

Mendoza, D. S., Solano, J., & Correa, R. (2020). “Modelo de operador fraccional para describir la dinámica de los supercondensadores.” *Rev. UIS Ing.*, 19(3), 79-86. DOI: <https://doi.org/10.18273/revuin.v19n3-2020008>.

Vázquez, L., & Velasco, M. P. (2011). “El cálculo fraccionario como instrumento de modelización.” *Prepublicaciones del Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid, MA-UCM 2011-5*. Disponible en: <https://www.ucm.es/data/cont/docs/143-2013-10-07-el%20cálculo%20fraccionario.pdf>.

Apéndices

Apéndice A. Contenido del trabajo de grado



Anexos.rar



Carta-Autorizacion-
Uso.pdf



NotaFinal.pdf