

**ACCIONES PARCIALES Y EL PROBLEMA DE  
GLOBALIZACIÓN**

**JORGE ELIÉCER GÓMEZ RÍOS**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA**

**2017**

# ACCIONES PARCIALES Y EL PROBLEMA DE GLOBALIZACIÓN

Autor

**JORGE ELIÉCER GÓMEZ RÍOS**

Trabajo de grado para optar al título de

*Magister en matemáticas*

Director

**HÉCTOR EDONIS PINEDO TAPIA**

Doctor en Ciencias

Codirector

**CARLOS ENRIQUE UZCÁTEGUI AYLWIN**

Doctor en Matemáticas

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESCUELA DE MATEMÁTICAS**

**BUCARAMANGA**

**2017**

# Agradecimientos

*En el andar de mi camino para alcanzar este logro, han sido varias las personas que con su sabiduría le han dado firmeza a mis pasos, contribuyendo a mi construcción humana, ya sea desde lo personal o lo profesional. Quiero manifestar mi gratitud especialmente a los profesores que han aportado su granito de arena en mi formación académica durante toda mi carrera; a mis directores, los profesores Héctor y Carlos, por su disposición constante y sus valiosas visiones y orientaciones. A mis familiares y amigos, quienes con su apoyo y motivación cotidiana influyen en mi realización profesional. A la vida, porque estoy aquí y siento que aquí es a donde siempre pertenezco.*

*Finalmente, quiero agradecer y dedicar este trabajo a mis padres, por el apoyo brindado durante todos estos años, sin ellos hubiese sido imposible llegar hasta aquí.*

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>10</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1. Tópicos de topología . . . . .	13
1.1.1. Continuidad . . . . .	13
1.1.2. Topología cociente. . . . .	15
1.1.3. Axiomas de numerabilidad y separación. . . . .	16
1.1.4. Compacidad . . . . .	17
1.2. Tópicos de Teoría descriptiva de conjuntos . . . . .	18
1.2.1. Conjuntos magros. . . . .	18
1.2.2. Espacios Polacos . . . . .	20
1.2.3. Conjuntos Borelianos . . . . .	20
1.2.4. Teorema de Categoría de Baire. . . . .	21
1.2.5. Conjuntos analíticos y la propiedad de Baire. . . . .	22
1.2.6. La operación de Suslin. . . . .	24
1.3. Grupos topológicos . . . . .	26
1.3.1. Propiedades y ejemplos. . . . .	26
1.3.2. Cociente de grupos . . . . .	28
1.3.3. Vecindades de la identidad. . . . .	29
1.3.4. Grupos Polacos . . . . .	29
1.4. Acciones (globales) de grupos. . . . .	30
<b>2. Acciones parciales de grupos</b>	<b>31</b>
<b>3. Acciones parciales topológicas</b>	<b>40</b>
3.1. Propiedades y ejemplos . . . . .	40
3.2. Continuidad vs continuidad separada . . . . .	44

---

<b>4. Globalización de acciones parciales topológicas</b>	<b>52</b>
4.1. Construcción de una globalización de una acción parcial continua . . .	53
4.2. ¿Cuándo $X_G$ es un espacio de Hausdorff? . . . . .	62
4.3. Relación de equivalencia de órbita . . . . .	64
4.4. ¿Cuándo $X_G$ es metrizable o Polaco? . . . . .	67
<b>5. Teoremas de Effros para acciones parciales</b>	<b>75</b>
5.1. Principio de la función abierta para acciones parciales . . . . .	76
5.2. Teorema de Effros I . . . . .	84
5.3. Teorema de Effros II . . . . .	87
<b>A. La acción parcial del Grupo Universal de Hausdorff</b>	<b>95</b>

## RESUMEN

**TÍTULO:** ACCIONES PARCIALES Y EL PROBLEMA DE GLOBALIZACIÓN <sup>1</sup>

**AUTOR:** Jorge Eliécer Gómez Ríos<sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVE:** acción parcial, acción parcial topológica, globalización, continuidad de acciones parciales, principio de la función abierta, teoremas de Effros.

## DESCRIPCIÓN

*En 1998, R. Exel [12] introdujo la noción de acción parcial de un grupo sobre un conjunto como una generalización de las acciones globales. La importancia de este concepto se fundamenta en su aplicabilidad a varias áreas de las matemáticas. En particular, esta noción ha sido usada para extender resultados clásicos en topología, sistemas dinámicos, espacios métricos, anillos, entre otros.*

*En este trabajo estudiamos acciones parciales topológicas, esto es, acciones parciales de grupos topológicos, sobre espacios topológicos. Específicamente extendemos algunos resultados conocidos para acciones globales al contexto de acciones parciales, tales como la equivalencia de la continuidad conjunta y la continuidad separada en espacios Polacos, el clásico principio de la función abierta y los teoremas de Effros.*

*También estudiamos uno de los problemas centrales en acciones parciales conocido como el problema de globalización, el cual consiste en que dada una acción parcial  $m$  de un grupo  $G$  en un objeto  $X$  de una categoría, determinar si existe una acción global  $\beta$  de  $G$  en un objeto  $Y$  de la misma categoría (llamado espacio envolvente de  $X$ ), tal que la restricción de  $\beta$  a  $X$  sea  $m$ . En particular, mostramos algunos aspectos teóricos relacionados con este problema, tales como los detalles de la construcción de una globalización para acciones parciales topológicas continuas con dominio abierto y estudiamos algunos resultados referentes a los axiomas de separación del espacio envolvente.*

*Finalmente, dada una acción parcial topológica  $m : G * X \rightarrow X$ , en el Apéndice A, mostramos la construcción de una acción parcial topológica del grupo universal de Hausdorff  $G/\mathcal{E}$ , en  $X$ , donde  $\mathcal{E} = \overline{\{1\}}$ , es la clausura topológica de elemento neutro de  $G$ .*

---

<sup>1</sup>Tesis.

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas.

DIRECTOR: Dr. Héctor Edonis Pinedo Tapia.

CODIRECTOR: Dr. Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

---

## ABSTRACT

**TITLE:** PARTIAL ACTIONS AND THE GLOBALIZATION PROBLEM <sup>3</sup>

**AUTHOR:** Jorge Eliécer Gómez Ríos<sup>4</sup>

**KEYWORDS:** partial action, topological partial action, globalization, continuity of partial actions, open mapping principle, Effros' theorems.

## DESCRIPTION

*In 1998, R. Exel [12] introduced the notion of partial action of a group on a set as a generalization of global actions. The importance of this concept is based on its applicability to several areas of mathematics. In particular, this notion has been used to extend classical results in topology, dynamical systems, metric spaces, rings, among others.*

*In this paper, we study topological partial actions, by this we mean, partial actions of topological groups on topological spaces. Specifically we extend some known results for Polish group actions, to the context of partial actions; such as the equivalence of the joint continuity and the separately continuity, the classical open mapping principle and Effros' theorem.*

*We also study one of the central problems in partial actions known as the problem of globalization. Which we describe below, given a partial action  $m$  of a group  $G$  on an object  $X$  of a category, we want to determine if there is a global action  $\beta$  of  $G$  in an object  $Y$  of the same category (called the enveloping space of  $X$ ), such that the restriction of  $\beta$  to  $X$  is  $m$ . In particular, we show some theoretical aspects related to this problem, for example the details of the construction of a globalization for continuous topological partial actions with open domain and we study some results referring to the separation axioms of the enveloping space.*

*Finally, given a topological partial action  $m : G * X \rightarrow X$ , in Appendix A, we show the construction of a topological partial action of the universal Hausdorff group  $G/\mathcal{E}$ , in  $X$ , where  $\mathcal{E} = \overline{\{1\}}$ , is the topological closure of the neutral element of  $G$ .*

---

<sup>3</sup> Thesis.

<sup>4</sup>Faculty of Science, School of Mathematics.

DIRECTED BY: Dr. Héctor Edonis Pinedo Tapia.

CODIRECTED BY: Dr. Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

# Introducción

Uno de los conceptos principales en la Teoría de Grupos es el de acción de grupo, el cual aparece con los trabajos de Lagrange y de Galois y ha sido objeto de estudio de muchos autores durante todo el siglo XX hasta la actualidad. De hecho, el estudio de las acciones de grupos Polacos ha favorecido el desarrollo y conexión de varias ramas de las matemáticas (ver [5], [15], y sus referencias).

La noción de acción parcial de un grupo es una generalización del concepto clásico de acción grupal, introducida en [12] y [23], y luego desarrollada en [1] y [21], donde los autores proporcionaron varios ejemplos de diferentes áreas. La importancia de este nuevo concepto se fundamenta precisamente en su aplicabilidad a varias áreas de las matemáticas. En particular, las acciones parciales han sido una herramienta importante en el estudio de  $C^*$ -álgebras y sistemas dinámicos, y en el desarrollo de nuevas teorías cohomológicas [8], [10] y [26]. Las acciones parciales de grupos Polacos han sido recientemente consideradas en los trabajos [16, 17, 27, 28].

En esta monografía estudiamos acciones parciales topológicas, esto es, acciones parciales de grupos topológicos, sobre espacios topológicos. Nuestro objetivo principal es extender, algunos teoremas conocidos para acciones globales al contexto de acciones parciales, tales como la equivalencia de la continuidad conjunta y la continuidad separada en espacios Polacos [15, Teorema 3.14], El Principio de la función abierta [24], los Teoremas de Effros [15, Teoremas 3.24 y 3.44] y la existencia de una

acción parcial topológica del grupo universal de Hausdorff [3]. Para esto, en el Capítulo 1, establecemos algunos conceptos y resultados clásicos de topología, grupos topológicos y de Teoría descriptiva de conjuntos. Posteriormente en el Capítulo 2, introducimos el concepto de acción parcial, así como algunos ejemplos y propiedades. En el Capítulo 3, definimos acción parcial topológica y abordamos aspectos teóricos relacionados con este concepto. En particular, mostraremos una generalización de un conocido Teorema para acciones globales sobre espacios Polacos, el cual establece que la continuidad de la acción parcial es equivalente a la continuidad separada de la misma, bajo ciertas hipótesis.

En el Capítulo 4, abordaremos uno de los problemas centrales en acciones parciales conocido como el problema de globalización, el cual fue considerado por primera vez por Abadie en su tesis doctoral [2], e independientemente por Kellendonk y Lawson en [21]. Este problema consiste en lo siguiente: dada una acción parcial  $m$  de un grupo  $G$  en un objeto  $X$  de una categoría, determinar si existe una acción global  $\beta$  de  $G$  en un objeto  $Y$  de la misma categoría (llamado espacio envolvente de  $X$ ), tal que la restricción de  $\beta$  a  $X$  sea  $m$ . Sobre este problema se conoce que siempre tiene solución única, salvo equivalencias, en la categoría de los conjuntos [7, Teorema 2.2]; pero no siempre es resoluble en la categoría de las álgebras sobre un anillo [9, Proposición 4.3 y Ejemplo 3.5]. En [1, Teorema 1.1], Abadie muestra que en la categoría de los espacios topológicos, este problema también tiene solución única, al considerar acciones parciales continuas con dominio abierto. Sin embargo, el espacio envolvente  $Y$ , no necesariamente hereda las propiedades topológicas de  $X$ , por ejemplo  $X$  puede ser Hausdorff y  $Y$  no (ver [1, Ejemplo 1.4 y Proposición 1.2]). Mostraremos algunos aspectos teóricos relacionados con este problema, tales como los detalles de la construcción de una globalización para acciones parciales topológicas continuas presentada en [1] y [21]. En particular, veremos que el espacio envolvente obtenido es el espacio cociente de una relación de equivalencia de órbita y estudiaremos algunos resultados referentes a los axiomas de separación de este espacio, presentados en [28].

En el Capítulo 5, probamos una versión del Principio de la función abierta en el contexto de acciones parciales, el cual nos será útil para mostrar una generalización de los Teoremas de Effros para acciones parciales, los cuales constituyen una poderosa herramienta para estudiar las relaciones de equivalencia de órbita.

Finalmente, dada una acción parcial topológica  $m : G * X \rightarrow X$ , en el Apéndice A, mostramos la construcción de una acción parcial topológica del grupo universal de Hausdorff  $G/\mathcal{E}$ , en  $X$ , donde  $\mathcal{E} = \overline{\{1\}}$ , es la clausura topológica de elemento neutro del grupo  $G$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

Asumimos que el lector está familiarizado con el lenguaje y los conceptos básicos de la topología general, la teoría descriptiva de conjuntos y de la teoría de acciones de grupos topológicos sobre espacios topológicos; sin embargo, el lector podrá encontrar una introducción a estos temas en:

[25], [15] y [19], [20] respectivamente. El propósito de este capítulo es establecer algunos conceptos y resultados clásicos de la literatura que son fundamentales en el desarrollo y comprensión de este trabajo, de modo que podamos referirnos a ellos, explícita o implícitamente, en capítulos posteriores. Por tal razón, en la mayoría de los casos omitiremos las pruebas, pero incluiremos una referencia donde pueda consultarse.

### 1.1. Tópicos de topología

#### 1.1.1. Continuidad

Recordemos que una función entre espacios topológicos  $f : X \rightarrow Y$ , es continua si  $f^{-1}(A)$  es abierto en  $X$ , para todo  $A$  abierto en  $Y$ .

**Lema 1.1.1.** Sean  $X, Y, Z$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  funciones, con  $f$  sobreyectiva.

(i) Si  $f$  es abierta y  $g \circ f$  es continua, entonces  $g$  es continua.

(ii) Si  $f$  es continua y  $g \circ f$  es abierta, entonces  $g$  es abierta.

*Demostración.*

(i) Sea  $A$  un abierto de  $Z$ . Como  $g \circ f$  es continua, entonces  $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$  es un abierto de  $X$ . Además como que  $f$  es abierta y sobreyectiva, tenemos que  $f(f^{-1}(g^{-1}(A))) = g^{-1}(A)$  es abierto en  $Y$  y por lo tanto  $g$  es continua.

(ii) Sea  $O$  un abierto de  $Y$ . Como  $f$  es continua,  $f^{-1}(O)$  es un abierto de  $X$ . Además, como  $g \circ f$  es abierta y  $f$  es sobreyectiva, tenemos que  $g(f(f^{-1}(O))) = g(O)$  es abierto. Por lo tanto  $g$  es abierta. □

**Notación 1.1.2.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . Usaremos la notación  $\overline{A}^X$  e  $\text{int}_X(A)$  para distinguir la clausura e interior de  $A$  respecto al espacio  $X$ . Cuando no haya lugar a confusión, escribiremos simplemente  $\overline{A}$  e  $\text{int}(A)$  respectivamente.

**Lema 1.1.3.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función y  $A \subseteq X$  tal que  $f|_A$  es continua. Entonces  $f(\overline{C \cap A}) \subseteq \overline{f(C \cap A)}$ , para todo  $C \subseteq X$ .

*Demostración.* Note que  $f(\overline{C \cap A}) = f(\overline{C \cap A}^A) \subseteq \overline{f(C \cap A)}^{f(A)} = f(A) \cap \overline{f(C \cap A)} \subseteq \overline{f(C \cap A)}$ ; donde la primera contención se sigue del hecho que la función  $f|_A$  es continua. □

### 1.1.2. Topología cociente.

**Definición 1.1.4.** Sean  $X$  espacio topológico,  $Y$  un conjunto y  $f : X \rightarrow Y$  una función sobreyectiva. **La topología cociente** relativa a  $f$ , denotada por  $\tau_f$ , se define como la topología más fina sobre  $Y$  que hace a  $f$  continua, es decir

$$\tau_f = \{U \subseteq Y : f^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}.$$

En particular, si  $\rho$  es una relación de equivalencia sobre un espacio topológico  $X$  y  $p : X \rightarrow X/\rho$  es la proyección canónica, esto es, la función sobreyectiva que lleva a cada elemento de  $X$  en su clase de equivalencia; entonces  $X/\rho$  dotado de la topología cociente relativa a  $p$ , se denomina **el espacio cociente** de  $X$  determinado por  $\rho$ . En tal caso, por la definición de topología cociente, se tiene que  $p$  es continua y además  $U$  es un abierto de  $X/\rho$ , si y solo si,  $p^{-1}(U)$  es un abierto de  $X$ .

**Lema 1.1.5.** *Sea  $X$  un espacio de Hausdorff y  $\rho$  una relación de equivalencia en  $X$  tal que la función proyección  $p : X \rightarrow X/\rho$  es abierta. Entonces  $X/\rho$  es Hausdorff, si y solo si,  $\rho$  es cerrada en  $X \times X$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $X/\rho$  es Hausdorff y sean  $u, v \in X$  tales que  $(x, y) \notin \rho$ . Entonces  $p(x) \neq p(y)$ , como  $X/\rho$  es Hausdorff, existen  $\mathcal{O}_x$  y  $\mathcal{O}_y$  abiertos de  $X/\rho$  tales que  $p(x) \in \mathcal{O}_x$ ,  $p(y) \in \mathcal{O}_y$  y  $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset$ . Definamos  $U = p^{-1}(\mathcal{O}_x)$  y  $V = p^{-1}(\mathcal{O}_y)$ . Entonces  $U$  y  $V$  son abiertos de  $X$ , pues  $p$  es continua. Además  $(x, y) \in U \times V$  y  $(U \times V) \cap \rho = \emptyset$ , ya que si  $(u, v) \in (U \times V) \cap \rho$ , entonces  $p(u) = p(v) \in \mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y$ ; lo cual genera una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que  $\rho$  es cerrada en  $X \times X$  y sean  $[x], [y] \in X/\rho$  tales que  $[x] \neq [y]$ , esto es  $(x, y) \notin \rho$ . Como  $\rho$  es cerrada y  $X \times X$  tiene la topología producto, existen abiertos básicos  $U, V$  de  $X$  tales que  $(x, y) \in U \times V$  y  $(U \times V) \cap \rho = \emptyset$ . Definamos  $\mathcal{O}_x = p(U)$  y  $\mathcal{O}_y = p(V)$ . Como  $p$  es abierta, tenemos que  $\mathcal{O}_x$  y  $\mathcal{O}_y$  son

abiertos de  $X/\rho$  con  $p(x) \in \mathcal{O}_x$ ,  $p(y) \in \mathcal{O}_y$  y  $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset$ , pues si  $[z] \in \mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y$ , entonces  $[z] = p(u)$ , para algún  $u \in U$  y  $[z] = p(v)$ , para algún  $v \in V$ ; luego  $(u, v) \in (U \times V) \cap \rho$ ; lo cual es una contradicción.  $\square$

### 1.1.3. Axiomas de numerabilidad y separación.

**Definición 1.1.6.** Sea  $X$  un espacio topológico. Diremos que:

- $X$  satisface el **primer axioma de numerabilidad** o simplemente que es **primero numerable**, si para cada  $x \in X$ , existe una base numerable de vecindades de  $x$ .
- $X$  satisface el **segundo axioma de numerabilidad** o simplemente que es **segundo numerable**, si  $X$  tiene una base numerable para su topología.
- $X$  es **separable** si  $X$  tiene un subconjunto denso numerable.
- $X$  es un **espacio  $T_0$** , si dados  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ ; existe una vecindad de uno de ellos que no contiene al otro.
- $X$  es un **espacio  $T_1$** , si dados  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ ; existen  $O_x$  y  $O_y$  abiertos de  $X$  que contienen a  $x$  y a  $y$  respectivamente, tales que  $y \notin O_x$  y  $x \notin O_y$ .
- $X$  es un **espacio  $T_2$**  o de **Hausdorff**, si dados  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ ; existen abiertos disjuntos de  $X$  que contienen a  $x$  y a  $y$  respectivamente.
- $X$  es un **espacio regular**, si dados  $F$  un cerrado de  $X$  y  $x \in X \setminus F$ , existen abiertos disjuntos  $U$  y  $V$  de  $X$  tales que  $x \in U$  y  $F \subseteq V$ .

De las definiciones anteriores se sigue que si un espacio es regular y  $T_1$  entonces es de Hausdorff, si es de Hausdorff entonces es  $T_1$  y si es  $T_1$  entonces es  $T_0$ . Adicionalmente, todo espacio métrico  $(X, d)$  es de Hausdorff, ya que si  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ ; entonces

$r = d(x, y)/2 > 0$  y los abiertos:  $U = B(x, r)$ ,  $V = B(y, r)$ ; son tales que  $x \in U$ ,  $y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

El siguiente teorema muestra algunas propiedades y relaciones entre los espacios definidos anteriormente.

**Teorema 1.1.7.**

- (i) [25, Ejercicio 12, §30] Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y sobreyectiva. Si  $X$  es segundo numerable y  $f$  es abierta, entonces  $Y$  es segundo numerable.
- (ii) [22, Capítulo II, §21, II, Teorema 2] Sea  $X$  un espacio métrico. Entonces  $X$  es segundo numerable, si y solo si,  $X$  es separable.
- (iii) [25, Teorema 34.1, §34] **Teorema de metrización de Urysohn.**  
Todo espacio regular y segundo numerable es metrizable.

**Ejemplo 1.1.8.** Todo espacio métrico  $(X, d)$  es regular y  $T_1$ . En efecto, sea  $F$  un subconjunto cerrado de  $X$  y  $x \in X \setminus F$ . Entonces existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \cap F = \emptyset$ . Sean  $U = B(x, \frac{r}{2})$  y  $V = \bigcup_{y \in F} B(y, \frac{r}{2})$ . Es claro que  $x \in U$ ,  $F \subseteq V$  y  $U \cap V = \emptyset$ . Por lo tanto  $X$  es regular. Además, como todo espacio métrico es de Hausdorff, entonces  $X$  es un espacio  $T_1$ .

### 1.1.4. Compacidad

**Definición 1.1.9.** Sea  $X$  un espacio topológico. Diremos que:

- $X$  es **compacto**, si toda cubierta abierta de  $X$  admite una subcubierta finita.
- $X$  es **localmente compacto**, si para cada  $x \in X$  y para cada abierto  $V$ , con  $x \in V$ ; existe un abierto  $W$  tal que  $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq V$  y  $\overline{W}$  es compacto.

## 1.2. Tópicos de Teoría descriptiva de conjuntos

### 1.2.1. Conjuntos magros.

**Definición 1.2.1.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . Diremos que:

- $A$  es **nunca denso** en  $X$ , si  $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$ .
- $A$  es **magro** o **de primera categoría** en  $X$  si  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , donde  $A_n$  es nunca denso en  $X$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $A$  no es magro también se dice que es **de segunda categoría**.
- $A$  es **comagro** en  $X$ , si  $X \setminus A$  es magro en  $X$ .
- $A$  es un conjunto  $G_\delta$  en  $X$ , si  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ ; donde  $O_n$  es abierto en  $X$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . En particular, todo abierto de un espacio es un conjunto  $G_\delta$ .

**Proposición 1.2.2.** *Las siguientes proposiciones se siguen directamente de las definiciones anteriores*

- (i) *Subconjuntos de conjuntos magros son magros.*
- (ii) *La unión de una familia numerable de conjuntos magros es magro.*
- (iii) *La intersección de una familia numerable de conjuntos comagros es comagro.*
- (iv) *Uniones e intersecciones numerables conjuntos  $G_\delta$  son  $G_\delta$ .*
- (v) *Las proyecciones preservan conjuntos  $G_\delta$ .*

**Ejemplo 1.2.3.** Todo cerrado  $F$  de un espacio metrizable  $(X, d)$  es  $G_\delta$ . En efecto, sea  $A_n = \bigcup_{x \in F} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ , entonces  $A_n$  es abierto en  $X$  y  $F \subseteq A_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , luego  $F \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Además, si  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , entonces existe  $x_n \in A_n \cap F$ , de modo que  $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , esto es,  $x_n \rightarrow x$  y como  $F$  es cerrado,  $x \in F$ . Por lo tanto  $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  es  $G_\delta$ .

**Proposición 1.2.4.** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $Y$  un subespacio de  $X$ .*

- (i) *Si  $A \subseteq Y$  es nunca denso en  $Y$ , entonces  $A$  es nunca denso en  $X$ . En particular, si  $A$  es magro en  $Y$ , entonces es magro en  $X$ .*
- (ii) *Si  $A \subseteq X$  es nunca denso en  $X$  y  $Y$  es abierto en  $X$ , entonces  $A \cap Y$  es nunca denso en  $Y$ . En particular, si  $A$  es magro en  $X$  y  $Y$  es abierto en  $X$ , entonces  $A \cap Y$  es magro en  $Y$ .*

*Demostración.*

- (i) Supongamos que  $A$  es nunca denso en  $Y$ . Queremos probar que  $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$ . Por definición de interior, basta probar que el único abierto de  $X$  contenido en  $\overline{A}$  es vacío. En efecto, supongamos que  $U$  es un abierto no vacío de  $X$  contenido en  $\overline{A}$ , por definición de clausura, tenemos que  $U \cap A \neq \emptyset$ , luego  $U \cap Y$  es un abierto no vacío de  $Y$  y  $U \cap Y \subseteq \overline{A} \cap Y$ . Por lo tanto  $U \cap Y \subseteq \text{int}_Y(\overline{A} \cap Y) = \text{int}_Y(\overline{A}^Y) \neq \emptyset$ , lo que contradice que  $A$  es nunca denso en  $Y$ . En particular, si  $A$  es magro en  $Y$ , entonces  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$ ; con  $N_n$  nunca denso en  $Y$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Pero por lo anterior,  $N_n$  nunca denso en  $X$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto  $A$  es magro en  $X$ .
- (ii) Supongamos que  $A$  es nunca denso en  $X$  y  $Y$  es abierto en  $X$ . Basta probar el único abierto relativo de  $Y$  contenido en  $\overline{A \cap Y}^Y$  es el vacío. En efecto, sea  $U$  un abierto relativo de  $Y$ , no vacío, tal que  $U \subseteq \overline{A \cap Y}^Y$ . Como  $\overline{A \cap Y}^Y = \overline{A \cap Y} \cap Y \subseteq \overline{A} \cap Y$ , entonces  $U \subseteq \overline{A}$  y como  $Y$  es abierto en  $X$ , entonces  $U$  es abierto en  $X$ . Así, por definición de interior, tenemos que  $\text{int}(\overline{A}) \neq \emptyset$ , lo cual contradice que  $A$  es nunca denso en  $X$ . En particular, si  $A \subseteq X$  es magro en  $X$  y  $Y$  es abierto en  $X$ , entonces  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$ ; con  $N_n$  nunca denso en  $X$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Pero por lo anterior,  $N_n \cap Y$  nunca denso en  $Y$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto  $A \cap Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \cap Y$  es magro en  $Y$ . □

**Ejemplo 1.2.5.**  $\mathbb{Q}$  como subespacio de  $\mathbb{R}$  con la topología usual, es magro en sí mismo y por lo tanto es magro en  $\mathbb{R}$ . De hecho, note que  $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ , donde  $\text{int}_{\mathbb{Q}}(\overline{\{q\}}^{\mathbb{Q}}) = \emptyset$ .

### 1.2.2. Espacios Polacos

**Definición 1.2.6.** Un espacio topológico  $(X, \tau)$  es **Polaco**, si es separable y existe una métrica  $d$  sobre  $X$  compatible con la topología (i.e,  $\tau = \tau_d$ ) tal que  $(X, d)$  es completo.

**Ejemplo 1.2.7.** Los espacios  $\mathbb{R}^n$  y  $[0, 1]$  con la topología usual y  $\mathbb{N}$  con la topología discreta son espacios Polacos.

El siguiente teorema establece algunas propiedades de los espacios Polacos.

#### Teorema 1.2.8.

- (i) [20, Proposición 3.11] Sea  $X$  un espacio Polaco,  $Y$  subespacio de  $X$ . Entonces  $Y$  es Polaco, si y solo si,  $Y$  es  $G_\delta$  en  $X$ .
- (ii) [15, Teorema 2.2.9] (Sierpiński) Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua, sobreyectiva y abierta. Si  $X$  es Polaco y  $Y$  es metrizable, entonces  $Y$  es Polaco.
- (iii) [20, Proposición 3.3] Sea  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una familia numerable de espacios topológicos y  $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ . Si  $X_i$  es metrizable (respectivamente separable), para cada  $i \in \mathbb{N}$ ; entonces  $X$  es metrizable (respectivamente separable). En particular, si  $X_i$  es Polaco, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , entonces  $X$  es Polaco.

### 1.2.3. Conjuntos Borelianos

Recordemos que una  $\sigma$ -álgebra sobre un conjunto  $X$  es una familia de subconjuntos de  $X$ , que contiene a  $\emptyset$  y es cerrada bajo complementos y uniones numerables (y por lo tanto es cerrada bajo intersecciones numerables).

**Definición 1.2.9.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos.

- Un subconjunto  $B$  de  $X$  es **Boreliano** o **Borel**, si puede ser obtenido mediante uniones e intersecciones numerables de conjuntos cerrados o abiertos de  $X$ . En otras palabras, si  $B$  pertenece a la  $\sigma$ -álgebra de Borel, que es la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los abiertos de  $X$ .
- Una función  $f : X \rightarrow Y$  es **Boreliana**, si  $f^{-1}(A)$  es Boreliano en  $X$ , para cada subconjunto abierto  $A$  en  $Y$ .

**Ejemplo 1.2.10.** De la definición anterior, es claro que toda función continua es Boreliana.

**Teorema 1.2.11.** [20, Teorema 15.1] (*Luzin - Suslin*) Sean  $X, Y$  espacios Polacos y  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Si  $A \subseteq X$  es Borel y  $f|_A$  es inyectiva, entonces  $f(A)$  es Borel.

#### 1.2.4. Teorema de Categoría de Baire.

**Teorema 1.2.12.** [20, Proposición 8.1] Sea  $X$  un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) La intersección numerable de abiertos densos en  $X$ , es densa.
- (ii) Cada subconjunto abierto no vacío de  $X$  no es magro en  $X$ .
- (iii) Cada subconjunto comagro de  $X$  es denso en  $X$ .

**Definición 1.2.13.** Un espacio topológico es **Baire** si satisface una de (y por lo tanto todas) las condiciones del Teorema 1.2.12.

**Teorema 1.2.14.** [20, Teorema 8.4] **Teorema de Categoría de Baire.** Todo espacio métrico completo es Baire. En particular, todo espacio Polaco es Baire.

**Lema 1.2.15.** *Sea  $X$  un espacio Baire. Si  $A$  y  $B$  son  $G_\delta$  densos en  $X$ , entonces  $A \cap B$  es denso en  $X$ .*

*Demostración.* Como  $A$  y  $B$  son  $G_\delta$  densos en  $X$ , entonces  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  y  $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ ; con  $U_n, V_n$  abiertos densos en  $X$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De manera que, por el Teorema 1.2.12,  $A \cap B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \cap V_n$ , es denso en  $X$ .  $\square$

**Ejemplo 1.2.16.**  $\mathbb{Q}$  no es  $G_\delta$  en  $\mathbb{R}$  y por lo tanto no es Polaco. En efecto, note que  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{q\}$  es  $G_\delta$ . Luego, si  $\mathbb{Q}$  es  $G_\delta$ , entonces  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  son  $G_\delta$  densos en  $\mathbb{R}$  y así, por el Lema 1.2.15,  $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$  es denso en  $\mathbb{R}$ , lo cual es absurdo. Por lo tanto  $\mathbb{Q}$  no es  $G_\delta$  y por (i) del Teorema 1.2.8 no es Polaco.

### 1.2.5. Conjuntos analíticos y la propiedad de Baire.

**Definición 1.2.17.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . Diremos que:

- $A$  es **analítico**, si es la imagen continua de un espacio Polaco.
- $A$  es **nunca magro** en  $X$ , si todo abierto relativo de  $A$ , no vacío, no es magro en  $X$ .
- $A$  tiene la **Propiedad de Baire**, si existe un abierto  $O \subseteq X$  tal que  $A \triangle O = (A \setminus O) \cup (O \setminus A)$  es magro.

**Observación 1.2.18.** Es conocido (ver [20, Proposición 8.22]) que el conjunto de todos los subconjuntos con la propiedad de Baire de un espacio topológico  $X$ , es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los subconjuntos abiertos y todos los subconjuntos magros (y por lo tanto a todos los cerrados y comagros) de  $X$ . En particular, las uniones e intersecciones numerables de conjuntos con la propiedad de Baire, tienen la propiedad de Baire.

**Proposición 1.2.19.** *Sea  $X$  un espacio topológico,  $A \subseteq X$  y  $E$  un abierto de  $X$ .*

- (i) *Si  $A$  es analítico, entonces  $A \cap E$  es analítico.*
- (ii) *Si  $A$  es nunca magro en  $X$ ,  $E$  denso en  $X$  y  $A \cap E \neq \emptyset$ , entonces  $A \cap E$  es nunca magro en  $E$ .*
- (iii) *Si  $A$  es nunca magro en  $X$ , entonces  $\overline{A}$  es cerrado regular, es decir,  $\text{int}(\overline{A})$  es denso en  $\overline{A}$ .*

*Demostración.*

- (i) Como  $A$  es analítico, existe un espacio Polaco  $P$  y  $f : P \rightarrow X$  continua tal que  $f(P) = A$ . Sea  $Z = f^{-1}(E)$ , entonces  $Z$  es abierto del espacio Polaco  $P$  y por lo tanto es Polaco. Observe que  $f^{-1}(A \cap E) = f^{-1}(E) = Z$ . Considere la restricción  $f|_Z : Z \rightarrow X$  entonces  $f|_Z$  es continua y  $f|_Z(Z) = A \cap E$ . Por lo tanto  $A \cap E$  es analítico.
- (ii) Sea  $W$  un abierto relativo (a  $E$ ), no vacío de  $A \cap E$ , entonces  $W = O \cap A \cap E$ , con  $O$  abierto de  $E$ . Queremos ver que  $W$  no es magro en  $E$ . En efecto, como  $E$  es abierto en  $X$ , entonces  $O$  es abierto de  $X$ . Note que  $O \cap A \neq \emptyset$ , luego  $O \cap A$  no es magro en  $X$ , pues  $A$  es nunca magro en  $X$ . Ahora, como  $O \subseteq E$ , entonces  $W = O \cap A \cap E = O \cap U$  no es magro en  $X$  y por lo tanto no es magro en  $E$ , ya que si  $O \cap A$  es magro en  $E$ , por la Proposición 1.2.4, es magro en  $X$ , lo cual es una contradicción.
- (iii) Para ver que  $\text{int}(\overline{A})$  es denso en  $\overline{A}$ , probemos que  $\text{int}(\overline{A})$  interseca a todo abierto relativo, no vacío, de  $\overline{A}$ . En efecto, sea  $V$  abierto de  $X$  tal que  $V \cap \overline{A} \neq \emptyset$ . Como  $A$  es nunca magro,  $V \cap A$  no es magro y por lo tanto no es nunca denso, esto es  $\text{int}(\overline{V \cap A}) \neq \emptyset$ . Luego, existe  $x \in X$  y  $U$  abierto de  $X$  tales que  $x \in U \subseteq \text{int}(\overline{V \cap A}) \subseteq \overline{V \cap A}$ . Así, por definición de clausura  $U \cap (V \cap A) \neq \emptyset$ .

Ahora, note que  $A \cap V \subseteq A$ , luego  $\text{int}(\overline{V \cap A}) \subseteq \text{int}(\overline{A})$  y también  $A \cap V \subseteq V$ . De modo que:  $\emptyset \neq U \cap (V \cap A) \subseteq \text{int}(\overline{V \cap A}) \cap (V \cap A) \subseteq \text{int}(\overline{A}) \cap V = \text{int}(\overline{A}) \cap (V \cap \overline{A})$ , como queríamos probar.  $\square$

### 1.2.6. La operación de Suslin.

**Definición 1.2.20.** Sea  $X$  un conjunto y  $\mathbb{N}^{<\omega} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n$ , el conjunto de todas las sucesiones finitas de números naturales.

- **Un esquema de Suslin** en  $X$ , es una familia  $C = \{C_s \subseteq X : s \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$ , de subconjuntos de  $X$  indexada por  $\mathbb{N}^{<\omega}$ .
- **La operación de Suslin** es la aplicación  $\mathcal{S}$ , que a cada esquema de Suslin,  $C$  en  $X$ , le asigna el conjunto

$$\mathcal{S}(C) = \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^{<\omega}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{\sigma \upharpoonright n} \subseteq X,$$

donde  $\sigma \upharpoonright n = \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n-1)\}$ .

El siguiente resultado establece que la Propiedad de Baire es invariante bajo la operación de Suslin.

**Lema 1.2.21.** [22, §11 - VII] *Sea  $X$  un espacio topológico y  $C = \{C_s \subseteq X : s \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$  un esquema de Suslin en  $X$ , tal que  $C_s$  tiene la Propiedad de Baire, para cada  $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ . Entonces  $\mathcal{S}(C)$  tiene la Propiedad de Baire.*

Un espacio topológico destacado en la Teoría descriptiva de conjuntos es **el espacio de Baire**, que es justamente  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , el espacio de todas las sucesiones de números naturales, donde consideramos a  $\mathbb{N}$  como espacio discreto y tomamos en  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  la topología producto. Por el Teorema 1.2.8, sabemos que  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  es Polaco.

El siguiente lema establece una importante relación entre el espacio de Baire y los demás espacios Polacos.

**Lema 1.2.22.** [20, Teorema 7.9] *Todo espacio Polaco, no vacío, es imagen continua del espacio de Baire  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ .*

El ítem (iii) de la siguiente proposición generaliza [24, Proposición 2.2] a espacios de Hausdorff. Este resultado es clave para probar el Principio de la función abierta para acciones parciales en la sección 5.1.

**Proposición 1.2.23.** [17, Proposición 3.1] *Sea  $X$  un espacio de Hausdorff y  $A \subseteq X$ .*

- (i) *Si  $A$  es analítico, entonces  $A$  es el resultado de aplicar la operación de Suslin a una familia de cerrados de  $X$ .*
- (ii) *Si  $A$  es analítico, entonces  $A$  tiene la propiedad de Baire.*
- (iii) *Si  $A$  es denso, nunca magro y tiene la propiedad de Baire, entonces  $A$  es comagro. En particular, si  $X$  no es magro y  $A, B \subseteq X$  son analíticos, densos y nunca magros, entonces  $A \cap B \neq \emptyset$ .*

*Demostración.*

- (i) Sea  $A \subseteq X$  un conjunto analítico, entonces existe un espacio Polaco  $Y$  y una función continua  $f : Y \rightarrow X$ , tal que  $A = f(Y)$ . Por el Lema 1.2.22, podemos asumir que  $Y = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . Ahora, para cada  $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ , definamos el conjunto  $U_s = \{y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : y \text{ extiende a } s\}$ . Entonces  $U_s$  es un abierto de  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . Sea  $C_s = \overline{f(U_s)}$ , para cada  $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ . Como  $X$  es Hausdorff y  $f$  es continua, se tiene que  $f(y)$  es el único punto en  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{y \upharpoonright n}$ , para cada  $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . Esto implica que  $A = \mathcal{S}(C)$ , con  $C = \{C_s \subseteq X : s \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$ .

- (ii) Sea  $X$  un espacio de Hausdorff y  $A \subseteq X$  un conjunto analítico. Por (i) tenemos que  $A = \mathcal{S}(C)$ , donde  $C = \{C_s \subseteq X : s \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$  es un esquema de Suslin en  $X$ , tal que  $C_s$  es cerrado (y por lo tanto tiene la Propiedad de Baire), para cada  $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ . Así, por el Lema 1.2.21 tenemos que  $A$  tiene la propiedad de Baire.
- (iii) Primero veamos que  $A$  es comagro, esto es, que  $X \setminus A$  es magro. En efecto, como  $A$  tiene la Propiedad de Baire, existe  $O$  abierto no vacío de  $X$  tal que  $A \Delta O = (A \setminus O) \cup (O \setminus A)$  es magro. Note que  $X \setminus A = (O \setminus A) \cup (X \setminus (O \cup A))$ . Por lo tanto, para ver que  $X \setminus A$  es magro, basta probar que  $X \setminus (O \cup A)$  es magro. Probemos esto por reducción al absurdo. Supongamos que  $X \setminus (O \cup A)$  no es magro. Por la Observación 1.2.18, tenemos que  $X \setminus (O \cup A)$  tiene la propiedad de Baire, esto es, existe  $U$  abierto no vacío de  $X$  tal que  $(X \setminus (O \cup A)) \Delta U = ((X \setminus (O \cup A)) \setminus U) \cup (U \setminus (X \setminus (O \cup A)))$  es magro. Luego  $U \setminus (X \setminus (O \cup A)) = (O \cup A) \cap U = (O \cap U) \cup (A \cap U)$  es magro. Entonces  $A \cap U$  es magro, pero como  $A$  es denso, tenemos que  $A \cap U$  es no vacío, esto contradice que  $A$  es nunca magro. Por lo tanto,  $X \setminus (O \cup A)$  es magro.

En particular, si  $A, B \subseteq X$  son analíticos, por el ítem (ii), tenemos que  $A$  y  $B$  tienen la Propiedad de Baire y por lo anterior son comagros. De modo que  $A \cap B$  es comagro y como  $X$  no es magro, entonces  $A \cap B \neq \emptyset$ . □

## 1.3. Grupos topológicos

### 1.3.1. Propiedades y ejemplos.

**Definición 1.3.1.** Un **grupo topológico** es una tripla  $(G, *, \tau)$  tal que  $(G, *)$  es grupo,  $(G, \tau)$  es espacio topológico y son continuas las aplicaciones:

$$* : G \times G \ni (a, b) \mapsto a * b := ab \in G \quad \text{y} \quad G \ni a \mapsto a^{-1} \in G.$$

Diremos que un subconjunto  $H$  de  $G$ , es un **subgrupo topológico** de  $G$ , si  $H$  es subgrupo de  $G$  y tiene la topología de subespacio. Por otra parte, si existe una métrica sobre  $G$  compatible con su topología, diremos que  $G$  es un **grupo metrizable**.

**Ejemplo 1.3.2.**

- (i) Todo grupo  $G$  con la topología discreta es un grupo topológico.
- (ii) Los grupos aditivos  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$  con la topología usual, son grupos topológicos.
- (iii)  $\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ , el grupo de las matrices invertibles de orden  $n \times n$ , con la topología inducida por  $\mathbb{R}^{n^2}$  es un grupo topológico.

A continuación presentamos algunas propiedades sobre los grupos topológicos que nos serán indispensables en los capítulos posteriores.

**Teorema 1.3.3.** [19, Teorema 2, §19] Sea  $G$  un grupo topológico. Las siguientes funciones son homeomorfismos:

- (i)  $G \ni x \mapsto x^{-1} \in G$ .
- (ii)  $G \ni x \mapsto axa^{-1} \in G$ , para cada  $a \in G$ .
- (iii)  $G \ni x \mapsto ax \in G$  y  $G \ni x \mapsto xa \in G$ , para cada  $a \in G$ .

**Notación 1.3.4.** Sean  $G$  un grupo,  $g \in G$  y  $A, B \subseteq G$ . Denotamos:

- $gA = \{ga : a \in A\}$ .
- $Ag = \{ag : a \in A\}$ .
- $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$ .
- $AB = \{ab : a \in A \text{ y } b \in B\}$ .
- $A^1 = A$  y  $A^n = A^{n-1}A$ , para todo entero  $n \geq 2$ .

**Corolario 1.3.5.** [19, Corolario 1, §19] Sean  $G$  un grupo topológico,  $a \in G$  y  $O, F$ ,  $A$  subconjuntos de  $G$  tales que  $O$  es abierto y  $F$  es cerrado. Entonces:

(i)  $aF, Fa$  y  $F^{-1}$  son cerrados.

(ii)  $aO, Oa, O^{-1}, AO$  y  $OA$  son abiertos.

**Lema 1.3.6.** Sean  $H$  y  $G$  grupos topológicos tales que  $H \subseteq G$ . Si  $H$  es abierto en  $G$  entonces  $H$  es cerrado en  $G$ .

*Demostración.* Basta probar que  $G \setminus H$  es abierto. Sea  $g \in G \setminus H$ ; como  $H$  es abierto,  $Hg$  es un abierto que contiene a  $g$  y  $H \cap Hg = \emptyset$ , pues si  $z \in H \cap Hg$  entonces  $z \in H$  y  $z = hg$ , con  $h \in H$ . Luego  $g = h^{-1}z \in H$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

Como consecuencia del lema anterior tenemos que el único subgrupo abierto de un grupo conexo es el mismo grupo.

**Teorema 1.3.7.** [15, Teorema 2.1.1] (Birkhoff- Kakutani) Sea  $G$  un grupo topológico. Entonces  $G$  es metrizable, si y solo si,  $G$  es Hausdorff y primero numerable.

### 1.3.2. Cociente de grupos

Sean  $G$  y  $H$  grupos topológicos tales que  $H \subseteq G$ . Definimos la siguiente relación de equivalencia en  $G$ :

$$a \sim b, \text{ si y solo si, } b^{-1}a \in H.$$

Claramente  $aH$  es la clase de equivalencia del elemento  $a \in G$ . Sea  $G/H$  el conjunto cociente de  $G$ , determinado por  $\sim$ . Como  $G$  es un grupo topológico, podemos dotar al conjunto  $G/H$ , de la topología cociente determinada por la función proyección

$$p : G \ni g \mapsto gH \in G/H. \tag{1.1}$$

En particular, si  $H$  es normal,  $G/H$  es un grupo topológico, con la operación

$$(aH)(bH) = (ab)H.$$

**Proposición 1.3.8.** [19, Teorema 8, Cap III, §24] Sean  $G$  un grupo topológico y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Entonces la función proyección definida en (1.1) es sobreyectiva, continua y abierta.

### 1.3.3. Vecindades de la identidad.

**Definición 1.3.9.** Un subconjunto  $A$  de  $G$  es simétrico si  $A = A^{-1}$ .

**Teorema 1.3.10.** Sea  $G$  un grupo topológico y  $1$  su elemento identidad.

- (i) [19, Proposición 1, §20] Existe una base local de  $1$ , formada por abiertos simétricos.
- (ii) [19, Proposición 2, §20] Para cada  $W$  abierto de  $G$ , con  $1 \in W$ , existen  $U_1$  y  $U_2$  abiertos con  $1 \in U_1 \cap U_2$  tales que  $U_1U_1 \subseteq W$  y  $U_2U_2^{-1} \subseteq W$ .
- (iii) [6, Lema 49] Si  $G$  es metrizable, existe una base numerable  $\{U_n\}_n$  de vecindades abiertas de  $1$  con las siguientes propiedades:

- $U_n$  es simétrico, para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $U_1 = G$ ;
- $U_{n+1} \subseteq U_{n+1}^2 \subseteq U_n$ .

### 1.3.4. Grupos Polacos

**Definición 1.3.11.** Un grupo topológico  $(G, *, \tau)$  es un **grupo Polaco** si  $(G, \tau)$  es Polaco.

**Ejemplo 1.3.12.**

- (i) El grupo  $(\mathbb{R}^n, +)$  con la topología usual es Polaco.
- (ii) Todo grupo numerable con la topología discreta es Polaco. En particular  $(\mathbb{Z}, +)$  es Polaco.

**Proposición 1.3.13.** [15, Teorema 2.2.10] *Sea  $G$  un grupo Polaco y  $H$  un subgrupo cerrado de  $G$ . Entonces  $G/H$  es un espacio Polaco. Además, si  $H$  es un subgrupo normal de  $G$ , entonces  $G/H$  es un grupo Polaco.*

**1.4. Acciones (globales) de grupos.**

Finalizamos este capítulo recordando la definición de acción global de un grupo.

**Definición 1.4.1.** Sea  $G$  un grupo y  $X$  un conjunto. Una **acción (o acción global)** de  $G$  en  $X$  es una función  $a : G \times X \rightarrow X$  que cumple los siguientes axiomas:

**AG1.**  $a(1_G, x) = x$ , para todo  $x \in X$ , siendo 1 el elemento neutro de  $G$ .

**AG2.**  $a(g, a(h, x)) = a(gh, x)$ , para cada  $x \in X$  y  $g, h \in G$ .

Cuando  $G$  es un grupo topológico,  $X$  es un espacio topológico y  $a$  es una acción de  $G$  en  $X$ , diremos que  $a$  es una **acción continua**, si la función  $a : G \times X \rightarrow X$  es continua, donde  $G \times X$  tiene la topología producto.

Para ver ejemplos y aspectos teóricos de este tipo de estructura, el lector puede consultar [5], [15] y sus referencias.

# Capítulo 2

## Acciones parciales de grupos

En este capítulo introducimos la definición de acción parcial de un grupo sobre un conjunto y presentamos algunas propiedades, ejemplos y aspectos teóricos relacionados con este concepto. Empezamos recordando que una función parcial de un conjunto  $A$  en un conjunto  $B$ , usualmente denotada por  $f : A \dashrightarrow B$ , es una función en la que no necesariamente todo elemento del dominio está relacionado con un elemento del codominio.

**Definición 2.0.1.** Una **acción parcial conjuntista** de un grupo  $G$  sobre un conjunto no vacío  $X$  es una función parcial  $m : G \times X \dashrightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto m(g, x) = g \cdot x \in X$  tal que para todo  $g, h \in G$  y  $x \in X$  se cumplen las siguientes condiciones:

**AP1.**  $\exists g \cdot x$  implica que  $\exists g^{-1} \cdot (g \cdot x)$  y  $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x$ ;

**AP2.**  $\exists g \cdot (h \cdot x)$  implica que  $\exists (gh) \cdot x$  y  $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ ;

**AP3.**  $\exists 1 \cdot x$ , para todo  $x \in X$  y  $1 \cdot x = x$ .

Donde  $\exists g \cdot x$  significa que  $(g, x)$  está en el dominio de  $m$ .

**Observación 2.0.2.** Claramente, toda acción global es una acción parcial y además si  $m$  es una acción parcial que cumple que  $\exists (gh) \cdot x$  implica que  $\exists g \cdot (h \cdot x)$  y  $g \cdot (h \cdot x) =$

$(gh) \cdot x$ , para todo  $g, h \in G$  y  $x \in X$ , esto es,  $\exists g \cdot x$ , para todo  $(g, x) \in G \times X$ ; entonces  $m$  es una acción global.

**Notación 2.0.3.** Sea  $m$  una acción parcial de un grupo  $G$  en un conjunto no vacío  $X$ . Denotamos por  $G * X = \{(g, x) \in G \times X : \exists g \cdot x\}$ , al dominio de  $m$  y  $G^x = \{g \in G : \exists g \cdot x\}$ .

Una acción parcial también puede ser definida, de manera equivalente, en términos de una familia de biyecciones en el siguiente sentido:

**Teorema 2.0.4.** [29, Lema 1.2] Sea  $G$  un grupo, con neutro  $1$  y  $X$  un conjunto no vacío. Una acción parcial  $m$  de  $G$  en  $X$  es una familia  $m = \{m_g : X_{g^{-1}} \rightarrow X_g\}_{g \in G}$ , donde, para cada  $g \in G$ ,  $X_g \subseteq X$  y  $m_g$  es una función biyectiva; que satisface los siguientes axiomas, para cada  $g, h \in G$ :

- (i)  $X_1 = X$  y  $m_1 = \text{Id}_X$ ;
- (ii)  $m_g(X_{g^{-1}} \cap X_h) = X_g \cap X_{gh}$ ;
- (iii)  $m_g \circ m_h : X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}} \rightarrow X_g \cap X_{gh}$  y  $(m_g \circ m_h)(x) = m_{gh}(x)$ , si  $x \in X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}$ .

*Demostración.* Sea  $m$  un acción parcial de  $G$  en  $X$ , en el sentido de la Definición 2.0.1. Denotemos  $X_{g^{-1}} = \{x \in X : \exists g \cdot x\}$ , y  $m_g : X_{g^{-1}} \ni x \mapsto g \cdot x \in X_g$ , para cada  $g \in G$  y consideremos la familia  $m = \{m_g : X_{g^{-1}} \rightarrow X_g\}_{g \in G}$ . Claramente, para cada  $g \in G$ ,  $X_g \subseteq X$  y  $m_g$  es biyectiva. En efecto, dados  $x, y \in X_{g^{-1}}$  tales que  $m_g(x) = m_g(y)$ , entonces  $g \cdot x = g \cdot y$ ; pero por AP1, tenemos que  $\exists g^{-1} \cdot (g \cdot x)$  y  $\exists g^{-1} \cdot (g \cdot y)$  y además:  $x = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot (g \cdot y) = y$ , de modo que  $m_g$  es inyectiva. Ahora, dado  $x \in X_g$ , entonces  $\exists g^{-1} \cdot x$  y por AP1  $\exists g \cdot (g^{-1} \cdot x)$  y  $g \cdot (g^{-1} \cdot x) = x$ , esto es  $g^{-1} \cdot x \in X_{g^{-1}}$  y  $m_g(g^{-1} \cdot x) = x$ , luego  $m_g$  es sobreyectiva.

Por otra parte, sean  $g, h \in G$ .

(i) Por AP3, tenemos que  $\exists 1 \cdot x$  y  $1 \cdot x = x$ , para todo  $x \in X$ , de modo que  $X_1 = X$  y  $m_1 : X \ni x \mapsto x \in X$ .

(ii) Supongamos que  $x \in m_g(X_{g^{-1}} \cap X_h)$ , entonces  $x = g \cdot y$ , para algún  $y \in X_{g^{-1}} \cap X_h$ , luego  $x \in X_g$  y  $\exists h^{-1} \cdot y$ . Por AP1,  $\exists h \cdot (h^{-1} \cdot y)$  y  $h \cdot (h^{-1} \cdot y) = y$ . De modo que, por AP2,  $x = g \cdot (h \cdot (h^{-1} \cdot y)) = (gh) \cdot (h^{-1} \cdot y)$ , esto es  $x \in X_{gh}$ . Así,  $x \in X_g \cap X_{gh}$ . Recíprocamente, si  $x \in X_g \cap X_{gh}$ , entonces  $x = g \cdot y = (gh) \cdot z$ , con  $y \in X_{g^{-1}}$  y  $z \in X_{(gh)^{-1}}$ . Por AP1, tenemos que  $y = h \cdot z$ , luego  $y \in X_h$ . Por lo tanto  $y \in X_{g^{-1}} \cap X_h$  y  $x = g \cdot y \in m_g(X_{g^{-1}} \cap X_h)$ .

(iii) Note que, por AP1,  $m_g^{-1} = m_{g^{-1}}$  y por (ii)

$$\begin{aligned} \text{Dom}(m_g \circ m_h) &= m_{g^{-1}}(X_g \cap X_{h^{-1}}) \stackrel{(ii)}{=} X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}} \\ (m_g \circ m_h)(X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}) &= m_g(X_h \cap X_{g^{-1}}) = X_g \cap X_{gh}. \end{aligned}$$

Finalmente, si  $x \in X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}$ , entonces

$$(m_g \circ m_h)(x) = m_g(m_h(x)) = g \cdot (h \cdot x) \stackrel{AP2}{=} (gh) \cdot x = m_{gh}(x).$$

Recíprocamente, supongamos que  $m = \{m_g : X_{g^{-1}} \rightarrow X_g\}_{g \in G}$ , es una familia de biyecciones que satisface las condiciones de este Teorema, veamos que  $m$  es una acción parcial en el sentido de la Definición 2.0.1. Si  $x \in \text{Dom}(m_g) = X_{g^{-1}}$ , denotamos  $g \cdot x = m_g(x)$  y en tal caso escribimos  $\exists g \cdot x$ . Sea  $m : G * X \ni (g, x) \mapsto m_g(x) = g \cdot x \in X$ . Veamos que se satisfacen los axiomas AP1, AP2 y AP3. Sean  $g, h \in G$ .

AP1. Si  $\exists g \cdot x$ , entonces  $m_g(x) \in X_g = \text{Dom}(m_g^{-1})$ , y como  $m_g^{-1} = m_{g^{-1}}$  tenemos que  $x = m_{g^{-1}}(m_g(x))$ , esto es  $\exists g^{-1} \cdot (g \cdot x)$  y  $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x$ .

AP2. Supongamos que  $\exists g \cdot (h \cdot x)$ , entonces  $x \in \text{Dom}(m_g \circ m_h) = X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}$  y por (iii) tenemos que  $g \cdot (h \cdot x) = m_g(m_h(x)) = m_{gh}(x) = (gh) \cdot x$ , esto es,  $\exists(gh) \cdot x$  y  $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ .

AP3. Por (i), tenemos que  $m_1(x) = x$ , para todo  $x \in X$ , esto es  $\exists 1 \cdot x$ , para todo  $x \in X$  y  $1 \cdot x = x$ . □

En adelante fijamos la siguiente notación:

**Notación 2.0.5.** Sea  $m$  una acción parcial de un grupo  $G$  en un conjunto  $X$ . Para cada  $g \in G$ , denotamos:

- $X_{g^{-1}} = \{x \in X : \exists g \cdot x\}$ ;
- $m_g : X_{g^{-1}} \ni x \mapsto g \cdot x \in X_g$  y
- $g \cdot A = m_g(A \cap X_{g^{-1}})$ , para cada  $A \subseteq X$ .

Las acciones parciales aparecen en diversas ramas de la matemáticas como veremos en los ejemplos 2.0.7, 2.0.8, 2.0.9, 2.0.10, 3.1.5 y 3.1.6.

**Ejemplo 2.0.6. Restricción de una acción global.** Sea  $a$  una acción global de un grupo  $G$  en un conjunto  $X$  y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Definimos

$$X_g = \begin{cases} X & \text{si } g \in H; \\ \emptyset & \text{si } g \notin H. \end{cases} \quad \text{y} \quad m_g = \begin{cases} a_g & \text{si } g \in H; \\ \emptyset & \text{si } g \notin H. \end{cases}$$

Entonces la familia  $m = \{m_g : X_{g^{-1}} \rightarrow X_g\}_{g \in G}$ , es una acción parcial de  $G$  en  $X$ .

**Ejemplo 2.0.7. Odómetro** [13]. Sea  $X = \{0, 1, \dots, 9\}^{\mathbb{N}}$ . Definimos

$$\theta_1 : X \setminus \{(9, 9, \dots)\} \rightarrow X \setminus \{(0, 0, \dots)\},$$

como la función que suma 1 (módulo 10) a la primera (y de ser necesario a la siguiente) coordenada, es decir

$$\theta_1((x_k)_{k \in \mathbb{N}}) = (y_k)_{k \in \mathbb{N}},$$

para cada  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X \setminus \{(9, 9, \dots)\}$ , donde

$$y_k = \begin{cases} [x_k + 1]_{10}, & \text{si } k = 1 \vee (k > 1 \wedge x_{k-1} + 1 \geq 10); \\ x_k, & \text{si } k > 1 \wedge x_{k-1} + 1 < 10. \end{cases}$$

Entonces  $\theta_1$  induce una acción parcial  $\{\theta_n : X_{-n} \rightarrow X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  del grupo aditivo  $\mathbb{Z}$  en  $X$ , donde

$$\theta_n = (\theta_1)^n = \underbrace{\theta_1 \circ \theta_1 \circ \dots \circ \theta_1}_{n\text{-veces}},$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$  y

$$\begin{array}{ll} X_0 = X, & X_{21} = X_{20} \setminus \{(9, 7, 9, \dots)\}, \\ X_1 = X_0 \setminus \{(9, 9, \dots)\}, & X_{22} = X_{21} \setminus \{(8, 7, 9, \dots)\}, \\ X_2 = X_1 \setminus \{(8, 9, \dots)\}, & \vdots \\ X_3 = X_2 \setminus \{(7, 9, \dots)\}, & X_{31} = X_{30} \setminus \{(9, 6, 9, \dots)\}, \\ X_4 = X_2 \setminus \{(6, 9, \dots)\}, & \vdots \\ \vdots & X_{101} = X_{100} \setminus \{(9, 9, 8, 9, \dots)\}, \\ X_{11} = X_{10} \setminus \{(9, 8, 9, \dots)\}, & X_{111} = X_{110} \setminus \{(9, 8, 8, 9, \dots)\}, \\ X_{12} = X_{11} \setminus \{(8, 8, 9, \dots)\}, & \vdots \\ X_{13} = X_{11} \setminus \{(7, 8, 9, \dots)\}, & X_{201} = X_{200} \setminus \{(9, 9, 7, 9, \dots)\}, \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

**Ejemplo 2.0.8. Acciones parciales de grupos libres** [13]. Sean  $X$  un conjunto,  $n \in \mathbb{N}$  y para cada  $j = 1, \dots, n$  sean  $A_j, B_j \subseteq X$  tales que  $\theta_j : A_j \rightarrow B_j$  es una biyección. Sea  $G = \mathbb{F}_n = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ . Dado  $g \in G$ , definimos  $m_g : X_{g^{-1}} \rightarrow X_g$  por:

$$X_{g^{-1}} = \begin{cases} X, & \text{si } g = 1; \\ A_j, & \text{si } g = g_j; \\ B_j, & \text{si } g = g_j^{-1}; \\ \text{Dom} \left( m_{g_{k_1}}^{\pm 1} \circ \dots \circ m_{g_{k_m}}^{\pm 1} \right), & \text{si } g = g_{k_1}^{\pm 1} \dots g_{k_m}^{\pm 1} \text{ está en su forma irreducible.} \end{cases}$$

$$m_g = \begin{cases} \text{Id}_X, & \text{si } g = 1; \\ \theta_j, & \text{si } g = g_j; \\ \theta_j^{-1}, & \text{si } g = g_j^{-1}; \\ m_{g_{k_1}}^{\pm 1} \circ \dots \circ m_{g_{k_m}}^{\pm 1}, & \text{si } g = g_{k_1}^{\pm 1} \dots g_{k_m}^{\pm 1} \text{ está en su forma irreducible;} \end{cases}$$

Entonces la familia  $m = \{m_g : X_{g^{-1}} \rightarrow X_g\}_{g \in G}$  es una acción parcial de  $G$  en  $X$ .

**Ejemplo 2.0.9. Matrices Cuntz-Krieger** [13]. Sean  $A = (A_{i,j}) \in M_n(\{0, 1\})$  y  $M_A$  el espacio de Markov de infinitos caminos asociado a  $A$ , esto es

$$M_A = \left\{ x \in \prod_{k \in \mathbb{N}} \{1, \dots, n\} : A_{x_j, x_{j+1}} = 1, \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ , definimos la biyección  $\theta_j : D_j \rightarrow \theta_j(D_j)$ , por

$$\theta_j(x_1, x_2, \dots) = (j, x_1, x_2, \dots),$$

donde  $D_j = \{x \in M_A : A_{j, x_1} = 1\}$ . Entonces la colección  $\{\theta_j : j \in \{1, \dots, n\}\}$ , induce una acción parcial del grupo libre  $\mathbb{F}_n$  en  $M_A$ .

A continuación ilustramos los Ejemplos 2.0.8 y 2.0.9 con dos casos particulares.

Sean  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\mathbb{F}_2 = \langle g_1, g_2 \rangle$ , el grupo libre de orden 2. Entonces tenemos que  $M_A = \{(1, 1, \dots), (2, 2, \dots)\}$ . Además,

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(1, 1, \dots)\}, & \theta_1 &= \text{Id}_{D_1}, \\ D_2 &= \{(2, 2, \dots)\}, & \theta_2 &= \text{Id}_{D_2}. \end{aligned}$$

De modo que, por el Ejemplo 2.0.8 tenemos una acción parcial de  $\mathbb{F}_2$  en  $M_A$  definida de la siguiente manera: suponga que  $g = g_{k_1}^{\alpha_1} \cdots g_{k_m}^{\alpha_m} \in \mathbb{F}_2$ , está en su forma irreducible, esto es  $k_i \in \{1, 2\}$ ,  $g_{k_i}^{-1} \neq g_{k_{i+1}}$  y  $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ , para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

$$X_{g^{-1}} = \begin{cases} M_A, & \text{si } g = 1, \\ \{(1, 1, \dots)\}, & \text{si } k_i = 1 \text{ y } \alpha_i = \pm 1, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m\}, \\ \{(2, 2, \dots)\}, & \text{si } k_i = 2 \text{ y } \alpha_i = \pm 1, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m\}, \\ \emptyset & \text{si } k_i \neq k_j, \text{ para algún } i \neq j. \end{cases}$$

$$m_g = \begin{cases} \text{Id}_{M_A}, & \text{si } g = 1; \\ \text{Id}_{X_{g^{-1}}}, & \text{si } k_i = k_j, \text{ para todo } i, j \in \{1, \dots, m\}, \\ \emptyset & \text{si } k_i \neq k_j, \text{ para algún } i \neq j. \end{cases}$$

Claramente vemos que la familia  $m = \{m_g : X_{g^{-1}} \rightarrow X_g\}_{g \in G}$  satisface las condiciones (i) a (iii) del Teorema 2.0.4 y por lo tanto es una acción parcial.

Tomando  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\mathbb{F}_2 = \langle g_1, g_2 \rangle$ , el grupo libre de orden 2. Entonces tenemos que

$$M_A = \left\{ (x_1, x_2, \dots) \in \prod_{k \in \mathbb{N}} \{1, 2\} : x_j = \begin{cases} 1, & \text{si } j < t \\ 2, & \text{si } j \geq t \end{cases} ; j, t \in \mathbb{N} \right\}.$$

Además,

$$D_1 = M_A,$$

$$D_2 = \{(2, 2, \dots)\},$$

$$\theta_1 : D_1 \ni (x_1, x_2, \dots) \mapsto (1, x_1, x_2, \dots) \in \theta_1(D_1),$$

$$\theta_2 = \text{Id}_{D_2}.$$

$$\text{Note que } \theta_1(D_1) = \left\{ (x_1, x_2, \dots) : x_j = \begin{cases} 1, & \text{si } j < t \\ 2, & \text{si } j \geq t \end{cases} ; j, t \in \mathbb{N} \text{ y } t \geq 2 \right\}.$$

De modo que, por el Ejemplo 2.0.8 tenemos una acción parcial de  $\mathbb{F}_2$  en  $M_A$  definida de la siguiente manera: suponga que  $g = g_{k_1}^{\alpha_1} \cdots g_{k_m}^{\alpha_m} \in \mathbb{F}_2$ , está en su forma irreducible, esto es  $k_i \in \{1, 2\}$ ,  $g_{k_i}^{-1} \neq g_{k_{i+1}}$  y  $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ , para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Entonces algunos de los dominios  $X_g$  están dados por:

$$X_{g^{-1}} = \begin{cases} M_A, & \text{si } g = 1 \text{ o } k_i = 1 \text{ y } \alpha_i = 1, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m\}, \\ \{(2, 2, \dots)\}, & \text{si } k_i = 2 \text{ y } \alpha_i = \pm 1, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m\}, \\ \theta_1(D_1), & \text{si } g = g_1^{-1}, \\ X_{g_1} \setminus \{(1, 2, 2, \dots)\}, & \text{si } g = g_1^{-1}g_1^{-1}, \\ X_{g_1g_1} \setminus \{(1, 1, 2, \dots)\}, & \text{si } g = g_1^{-1}g_1^{-1}g_1^{-1}, \\ \vdots & \vdots \\ \emptyset & \text{si } k_m = 1, \alpha_m = 1 \text{ y } k_i = 2, \text{ para algún } i < m. \\ X_{g_2^{\mp}} \cup \{(1, 2, 2, \dots)\}, & \text{si } g = g_2^{\pm}g_1^{-1}, \\ X_{g_1g_2^{\mp 1}} \cup \{(1, 1, 2, \dots)\}, & \text{si } g = g_2^{\pm}g_1^{-1}g_1^{-1}, \\ \vdots & \vdots \\ \emptyset & \text{si } k_m = 2, k_i = 1 \text{ y } \alpha_i = -1, \text{ para algún } i < m. \\ \{(2, 2, \dots)\}, & \text{si } k_m = 2, k_i = 1 \text{ y } \alpha_i = 1, \text{ para cada } i < m. \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

y además,

$$m_g = \begin{cases} \text{Id}_{M_A}, & \text{si } g = 1; \\ \theta_j, & \text{si } g = g_j; \\ \theta_j^{-1}, & \text{si } g = g_j^{-1}; \\ m_{g_{k_1}^{\pm 1}} \circ \dots \circ m_{g_{k_m}^{\pm 1}}, & \text{si } g = g_{k_1}^{\pm 1} \dots g_{k_m}^{\pm 1} \text{ está en su forma irreducible;} \end{cases}$$

donde  $\theta_2^{-1} = \theta_2$  y  $\theta_1^{-1} : \theta_1(D_1) \ni (1, x_2, x_3 \dots) \mapsto (x_2, x_3 \dots) \in D_1$ .

También podemos definir una acción parcial de un grupo en su conjunto potencia, de la siguiente manera.

**Ejemplo 2.0.10. Acción Parcial de Bernoulli [13].** Sea  $G$  un grupo y  $X = \mathcal{P}(G)$  el conjunto potencia de  $G$ , la acción de Bernoulli de  $G$  en  $X$  se define por:

$$\begin{aligned} \beta : G &\longrightarrow B(X) \\ g &\longmapsto \beta_g : X \longrightarrow X \\ &E \longmapsto gE, \end{aligned}$$

Defina  $\Omega = \{E \in \mathcal{P}(G) : 1 \in E\}$  y sea  $X_g = \{E \in \mathcal{P}(G) : 1, g \in E\}$ . Entonces  $\beta_g(X_{g^{-1}}) = X_g$ , para cada  $g \in G$ . Por lo tanto  $\beta$  induce una acción parcial  $\left\{ \beta_g \upharpoonright_{X_{g^{-1}}} : X_{g^{-1}} \rightarrow X_g \right\}_{g \in G}$  de  $G$  en  $\Omega$ .

# Capítulo 3

## Acciones parciales topológicas

En este capítulo introducimos la noción de acción parcial en el contexto topológico. En adelante, a menos que se indique otra cosa,  $G$  denotará un grupo topológico,  $X$  un espacio topológico y la topología del conjunto  $G * X$  es la topología relativa a la topología producto del espacio  $G \times X$ .

### 3.1. Propiedades y ejemplos

**Definición 3.1.1.** Una **acción parcial topológica** de un grupo topológico  $G$  en un espacio topológico  $X$  es una acción parcial conjuntista  $m = \{m_g : X_{g^{-1}} \rightarrow X_g\}_{g \in G}$  del grupo  $G$  en el conjunto  $X$  tal que, para cada  $g \in G$ , el conjunto  $X_g$  es abierto en  $X$  y  $m_g : X_{g^{-1}} \rightarrow X_g$  es un homeomorfismo.

**Observación 3.1.2.** En este trabajo las acciones parciales topológicas no necesariamente son funciones continuas y sus dominios no necesariamente son abiertos.

**Ejemplo 3.1.3.** Toda acción parcial conjuntista de un grupo  $G$  en un conjunto  $X$ , se puede ver como una acción parcial topológica, dotando a  $G$  y a  $X$  de las topologías discretas respectivas.

**Ejemplo 3.1.4. Acción parcial inducida.** Sean  $G$  un grupo topológico,  $Y$  un espacio topológico,  $a : G \times Y \ni (g, x) \mapsto g \cdot x \in Y$  una acción continua de  $G$  en  $Y$  y  $X \subseteq Y$  un conjunto abierto, no vacío. Para cada  $g \in G$ , definimos:

$$X_g = X \cap a_g(X) \quad \text{y} \quad m_g = a_g \upharpoonright_{X_{g^{-1}}}.$$

Entonces  $m : G * X \ni (g, x) \mapsto m_g(x) \in X$  es una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ ; denominada la *acción parcial topológica inducida por  $a$  en  $X$* .

**Ejemplo 3.1.5. Transformaciones de Möbius** [7, pág. 175]. Sea  $G = \text{GL}(2, \mathbb{R})$  y  $X = \mathbb{R}$ . Para cada  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ , definimos:

$$X_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} : cx + d \neq 0\} \quad \text{y} \quad m_g : X_{g^{-1}} \ni x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d} \in X_g.$$

entonces la familia  $m = \{m_g : X_{g^{-1}} \rightarrow X_g\}_{g \in G}$  define una acción parcial topológica de  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$  en  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 3.1.6. Flujos en Variedades** [1, Ejemplo 1.2]. Sea  $X$  una variedad diferenciable,  $TX$  su fibrado tangente y  $V : X \rightarrow TX$  un campo vectorial diferenciable sobre  $X$  tal que  $V(x) \in T_x X$ , para cada  $x \in X$ . Entonces, para cada  $x \in X$ , existe una única curva integral maximal de  $V$  con punto inicial  $x$ , esto es, una curva  $\gamma_x : I_x \subseteq \mathbb{R} \rightarrow X$  cuyo dominio  $I_x$ , es un intervalo abierto maximal alrededor de 0;  $\gamma'_x(t) = V(\gamma_x(t))$ , para todo  $t \in I_x$  y  $\gamma_x(0) = x$  (ver [30, Apéndice D]). Este resultado permite definir una acción parcial topológica del grupo aditivo de los números reales  $\mathbb{R}$ , en  $X$ , denominada el *flujo* de  $X$  asociado a  $V$ , tal que para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$X_t = \{x \in X : -t \in I_x\} \quad \text{y} \quad \Phi_t : X_{-t} \ni x \mapsto \gamma_x(t) \in X_t.$$

(Ver [30, Teorema 9.12]).

El siguiente ejemplo ilustra el resultado anterior, para una variedad de dimensión 2.

**Ejemplo 3.1.7.** Sea  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  y  $V(x_1, x_2) = (1, 0)$ . Para cada  $x = (a, b) \in X$ , obtenemos la curva integral maximal de  $V$  con punto inicial  $x$ ,  $\gamma_x : I_x \ni t \mapsto (\gamma_{x1}(t), \gamma_{x2}(t)) \in X$ , solucionando el siguiente sistema de *EDOs* con valor inicial:

$$\begin{cases} \gamma'_{x1}(t) = 1, \\ \gamma'_{x2}(t) = 0, \\ \gamma_{x1}(0) = a, \\ \gamma_{x2}(0) = b, \end{cases}$$

De este modo obtenemos  $\gamma_x : I_x \ni t \mapsto (t + a, b) \in X$ , donde

$$I_x = \begin{cases} (-a, \infty), & \text{si } b = 0 \text{ y } a > 0; \\ (-\infty, -a), & \text{si } b = 0 \text{ y } a < 0; \\ \mathbb{R}, & \text{si } b \neq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$X_t = \begin{cases} X, & \text{si } t = 0; \\ \mathbb{R}^2 \setminus ([0, t] \times \{0\}), & \text{si } t > 0; \\ \mathbb{R}^2 \setminus ([t, 0] \times \{0\}), & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

y  $\Phi_t : X_{-t} \ni (a, b) \mapsto (t + a, b) \in X_t$ . Claramente vemos que los  $X_t$  son abiertos y las  $\Phi_t$  son homeomorfismos.

A continuación presentamos algunas propiedades de las acciones parciales topológicas.

**Teorema 3.1.8.** [1, Proposición 1.1] *Sea  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en un espacio compacto  $X$ . Si  $G * X$  es abierto, entonces existe un subgrupo abierto  $H$  de  $G$  tal que  $m$  restringida a  $H$  es una acción global. En particular, si  $G$  es conexo,  $m$  es una acción global.*

*Demostración.* Sea  $A = \bigcap_{x \in X} G^x$ . Claramente  $A$  contiene al neutro 1 y es cerrado bajo la operación del grupo. De hecho, si  $g, h \in A$ ,  $\exists g \cdot x$  y  $\exists h \cdot x$ , para todo  $x \in X$ , en particular  $h \cdot x \in X$  luego  $\exists g \cdot (h \cdot x)$  y por AP2,  $\exists (gh) \cdot x$  es decir  $gh \in A$ . Además, para cada  $x \in X$ ,  $(1, x) \in G * X$  y como  $G * X$  es abierto, entonces existen  $U_x$  abierto de  $X$  y  $V_x$  abierto simétrico de  $G$  tales que  $(1, x) \in (V_x \times U_x) \subseteq (G * X)$ . Ahora, por la compacidad de  $X$ , existen  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  tales que  $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ . Sea  $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ . Entonces  $V$  es un abierto simétrico de  $G$  y  $V \subseteq A$ , pues si  $g \in V$ , entonces  $g \in V_{x_i}$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , y como  $(V_{x_i} \times U_{x_i}) \subseteq (G * X)$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , se tiene que  $\exists g \cdot x$  para cada  $x \in \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = X$ , es decir  $g \in G^x$ , para cada  $x \in X$ , luego  $g \in A$ . Sea  $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ . entonces  $H$  es un subgrupo de  $G$  contenido en  $A$ . Por lo tanto, para cada  $h \in H \subseteq A$  se tiene que  $\exists h \cdot x$ , para todo  $x \in X$ , es decir  $m$  restricta a  $H$  es global. Por último, si  $G$  es conexo, por el Lema 1.3.6 se tiene que  $H = G$ , de lo que se concluye que  $m$  es una acción global.  $\square$

El siguiente ejemplo ilustra el Teorema 3.1.8.

**Ejemplo 3.1.9.** En el Ejemplo 3.1.6, si la variedad  $X$  es compacta, por el Teorema 3.1.8 el flujo  $\Phi$  del campo vectorial  $V$  es una acción global de  $(\mathbb{R}, +)$  en  $X$ . Por ejemplo si  $X = S^1$  y  $V(x, y) = (-y, x)$ , para cada  $p = (a, b) \in S^1$  tenemos que  $\gamma_p : I_p \ni t \mapsto (\gamma_{p1}(t), \gamma_{p2}(t)) \in S^1$ , es la solución al sistema de EDOs con valores iniciales

$$\begin{cases} \gamma'_{p1}(t) = -\gamma_{p2}(t), \\ \gamma'_{p2}(t) = \gamma_{p1}(t), \\ \gamma_{p1}(0) = a, \\ \gamma_{p2}(0) = b, \\ \gamma_{p1}^2(t) + \gamma_{p2}^2(t) = 1. \end{cases}$$

Es decir,  $I_p = \mathbb{R}$  y  $\gamma_p(t) = (-b \sin t + a \cos t, b \cos t + a \sin t)$ . De modo que  $X_t = S^1$ ,

para todo  $t \in \mathbb{R}$  y por lo tanto el flujo  $\Phi$  del campo vectorial  $V$  es una acción global de  $(\mathbb{R}, +)$  en  $S^1$ .

**Observación 3.1.10.** Sea  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ . Entonces para cada  $g \in G$  y  $A$  abierto de  $X$ , tenemos que  $A \cap X_{g^{-1}}$  es un abierto de  $X_{g^{-1}}$  y como  $m_g : X_{g^{-1}} \rightarrow X_g$  es un homeomorfismo, tenemos que  $g \cdot A = m_g(A \cap X_{g^{-1}})$  es abierto de  $X$ , por ser  $X_g$  abierto de  $X$ .

**Lema 3.1.11.** [28, Lema 4.3] Sea  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ . Entonces  $m$  es abierta.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{U}$  un abierto de  $G * X$ , por definición de la topología producto y la topología del subespacio tenemos que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} (G * X) \cap (A_i \times V_i),$$

donde  $A_i$  es abierto de  $G$  y  $V_i$  es abierto de  $X$  para cada  $i \in I$ . Note que, para cada  $i \in I$

$$m((G * X) \cap (A_i \times V_i)) = \bigcup_{g \in A_i} m_g(V_i \cap X_{g^{-1}}) = \bigcup_{g \in A_i} g \cdot V_i.$$

Así, por la Observación 3.1.10 tenemos que  $m((G * X) \cap (A_i \times V_i))$  es un abierto de  $X$  y por lo tanto  $m$  es abierta.  $\square$

## 3.2. Continuidad vs continuidad separada

Es conocido que, bajo ciertas hipótesis, la continuidad de las acciones de grupos topológicos en espacios topológicos se puede caracterizar en términos de la continuidad de sus funciones coordenadas. Más precisamente, en [15, Teorema 3.14] se establece que una acción de un grupo Polaco en un espacio métrico es continua, si y solo si, es

separadamente continua. En [16, Teorema 3.1], extendemos este resultado a acciones parciales topológicas de grupos de Hausdorff - Baire en espacios métricos, adaptando la demostración presentada en [15, Teorema 3.14], como veremos en esta sección.

**Definición 3.2.1.** Sea  $m$  una acción parcial topológica de un grupo  $G$  en un espacio  $X$ . Diremos que:

- $m$  es **continua** si la función  $m : G * X \ni (g, x) \mapsto g \cdot x \in X$  es continua, donde  $G * X$  tiene la topología relativa. Si  $m$  es una acción parcial topológica continua, diremos simplemente que  $m$  es una acción parcial continua.
- $m$  es **separadamente continua** si la función  $m^x : G^x \ni g \mapsto g \cdot x \in X$  es continua, para cada  $x \in X$ .<sup>1</sup>

**Teorema 3.2.2.** Sea  $G$  un grupo de Hausdorff,  $(X, d)$  un espacio métrico y  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ . Suponga que  $G$  es Baire y  $G^x$  es abierto en  $G$ , para cada  $x \in X$ . Entonces  $m$  es continua, si y solo si, es separadamente continua.

*Demostración.* Es claro que si  $m$  es continua, es separadamente continua.

Recíprocamente, sea  $(g_0, x_0) \in G * X$ , queremos probar que  $m$  es continua en  $(g_0, x_0)$ . Primero veamos que existe  $g_1 \in G^{x_0}$  tal que  $m$  es continua en  $(g_1, x_0)$ . En efecto, para cada  $n, l \in \mathbb{N}$  consideremos el conjunto:

$$F_{n,l} = \left\{ g \in G^{x_0} : \forall x \in X_{g^{-1}} \left( d(x, x_0) < \frac{1}{2^n} \Rightarrow d(m(g, x), m(g, x_0)) \leq \frac{1}{2^l} \right) \right\}.$$

Notemos que:

- (i)  $F_{n,l}$  es cerrado en  $G^{x_0}$ , para cada  $n, l \in \mathbb{N}$ . De hecho, sean  $g \in G^{x_0}$  y  $\{g_i\}_{i \in I}$  una red tal que  $g_i \in F_{n,l}$ , para cada  $i \in I$  y  $g_i \rightarrow g$ . Veamos que  $g \in F_{n,l}$ . Por

---

<sup>1</sup>Note que para cada  $g \in G$ , la función  $m_g : X_{g^{-1}} \ni x \mapsto g \cdot x \in X_g$  es continua, por la definición de acción parcial topológica.

definición de  $F_{n,l}$  tenemos que:

$$(\forall i \in I)(\forall x \in X_{g_i^{-1}}) \left( d(x, x_0) < \frac{1}{2^n} \Rightarrow d(m(g_i, x), m(g_i, x_0)) \leq \frac{1}{2^l} \right).$$

Sea  $x \in X_{g^{-1}}$ , esto es  $g \in G^x$ . Como  $G^x$  es abierto, podemos asumir que  $\{g_i\}_{i \in I} \subseteq G^x$ , de modo que  $x \in X_{g^{-1}} \cap X_{g_i^{-1}}$ , para todo  $i \in I$ . Así, por la continuidad de  $m$  en la primera coordenada, se sigue que

$$m(g_i, x) \rightarrow m(g, x) \quad \text{y} \quad m(g_i, x_0) \rightarrow m(g, x_0).$$

Y por la continuidad de la métrica  $d$  tenemos que

$$(\forall x \in X_{g^{-1}}) \left( d(x, x_0) < \frac{1}{2^n} \Rightarrow d(m(g, x), m(g, x_0)) \leq \frac{1}{2^l} \right),$$

de donde concluimos que  $g \in F_{n,l}$ .

(ii)  $G^{x_0} = \bigcap_l \bigcup_n F_{n,l}$ . De la definición de  $F_{n,l}$  es claro que  $G^{x_0} \supseteq \bigcap_l \bigcup_n F_{n,l}$ . Recíprocamente, sea  $g \in G^{x_0}$  y  $x \in X_{g^{-1}}$ . Queremos probar que para todo  $l \in \mathbb{N}$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $g \in F_{n,l}$ . En efecto, dado  $l \in \mathbb{N}$ , como  $m$  es continua en la primera coordenada, para  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2^l}$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$(\forall x \in X_{g^{-1}}) \left( d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(m(g, x), m(g, x_0)) \leq \frac{1}{2^l} \right).$$

Sea  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \delta$ , entonces

$$(\forall l \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}) \left( d(x, x_0) < \frac{1}{2^n} \Rightarrow d(m(g, x), m(g, x_0)) \leq \frac{1}{2^l} \right),$$

esto es,  $g \in \bigcap_l \bigcup_n F_{n,l}$ . Por lo tanto  $G^{x_0} \subseteq \bigcap_l \bigcup_n F_{n,l}$ .

(iii) Sea  $D = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F_{n,l} \setminus \text{int}(F_{n,l}))$ . Entonces existe  $g_1 \in G^{x_0} \setminus D$ . En efecto, notemos que  $F_{n,l} \setminus \text{int}(F_{n,l}) = \partial(F_{n,l})$ , pero por (i),  $F_{n,l}$  es cerrado luego  $\partial(F_{n,l})$  es nunca denso. De modo que  $D$  es unión numerable de nunca densos y por lo tanto es magro. Además,  $1 \in G^{x_0}$ , entonces  $G^{x_0}$  es un abierto no vacío y como  $G$  es Baire, existe  $g_1 \in G^{x_0} \setminus D$ .

Veamos que  $m$  es continua en  $(g_1, x_0)$ . Para esto, sea  $\{(h_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq G * X$  una red que converge a  $(g_1, x_0)$ . Queremos probar que  $m(h_\alpha, y_\alpha) \rightarrow m(g_1, x_0)$ . Sea  $\varepsilon > 0$  y  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2^{l-1}} < \varepsilon$ . Por (ii), existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $g_1 \in F_{n,l}$ . Note que  $g_1 \in \text{int}(F_{n,l})$  pues  $g_1 \notin D$  y como  $h_\alpha \rightarrow g_1$ , existe  $\alpha_1 \in \Lambda$  tal que  $h_\alpha \in \text{int}(F_{n,l}) \subseteq F_{n,l}$ , para todo  $\alpha \geq \alpha_1$  y como  $y_\alpha \rightarrow x_0$ , existe  $\alpha_2 \in \Lambda$  tal que  $d(y_\alpha, x_0) < \frac{1}{2^n}$ , para todo  $\alpha \geq \alpha_2$ . Además, por la continuidad de  $m^{x_0}$ , tenemos que  $m(h_\alpha, x_0) \rightarrow m(g_1, x_0)$ . Así, existe  $\alpha_3 \in \Lambda$  tal que, para todo  $\alpha \geq \alpha_3$

$$d(m(h_\alpha, x_0), m(g_1, x_0)) < \frac{1}{2^l}.$$

Sea  $\alpha \geq \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ . Entonces  $h_\alpha \in F_{n,l}$  y  $d(y_\alpha, x_0) < \frac{1}{2^n}$ , esto es

$$d(m(h_\alpha, y_\alpha), m(h_\alpha, x_0)) \leq \frac{1}{2^l},$$

luego,

$$d(m(h_\alpha, y_\alpha), m(g_1, x_0)) \leq d(m(h_\alpha, y_\alpha), m(h_\alpha, x_0)) + d(m(h_\alpha, x_0), m(g_1, x_0)) < \frac{1}{2^{l-1}} < \varepsilon.$$

Por lo tanto,  $m$  es continua en  $(g_1, x_0)$ .

Ahora, como  $x_0 \in X_{g_1^{-1}} \cap X_{g_0^{-1}}$ , por (ii) del Teorema 2.0.4 tenemos que  $g_1 \cdot x_0 \in X_{g_1} \cap X_{g_1 g_0^{-1}}$ . Entonces  $\exists (g_0 g_1^{-1}) \cdot (g_1 \cdot x_0)$  y por AP2,  $(g_0 g_1^{-1}) \cdot (g_1 \cdot x_0) = g_0 \cdot x_0$ , esto es

$$m(g_0, x_0) = m(g_0 g_1^{-1}, m(g_1, x_0)). \quad (3.1)$$

Finalmente, veamos que  $m$  es continua en  $(g_0, x_0)$ . Sea  $\{(h_j, y_j)\}_{j \in J} \subseteq G * X$  una red que converge a  $(g_0, x_0)$ . Entonces

$$g_1 g_0^{-1} h_j \rightarrow g_1 \in G^{x_0},$$

y como  $G^{x_0}$  es abierto, podemos suponer que  $\{g_1 g_0^{-1} h_j\}_{j \in J} \subseteq G^{x_0}$ , esto es  $x_0 \in X_{(g_1 g_0^{-1} h_j)^{-1}}$ , para todo  $j \in J$ . Pero  $y_j \rightarrow x_0$ , entonces existe  $j_0 \in J$  tal que  $y_j \in X_{(g_1 g_0^{-1} h_j)^{-1}}$ , para todo  $j \geq j_0$ . De modo que  $y_j \in X_{(g_1 g_0^{-1} h_j)^{-1}} \cap X_{h_j^{-1}}$ . Por (ii) del Teorema 2.0.4,  $h_j \cdot y_j \in X_{(g_1 g_0^{-1})^{-1}}$ , es decir,  $\exists (g_1 g_0^{-1}) \cdot (h_j \cdot y_j)$  y por AP2,

$$(g_1 g_0^{-1}) \cdot (h_j \cdot y_j) = (g_1 g_0^{-1} h_j) \cdot y_j.$$

Por la continuidad de  $m_{g_0 g_1^{-1}}$  y la continuidad de  $m$  en  $(g_1, x_0)$  tenemos que

$$m(h_j, y_j) \stackrel{AP1}{=} (g_0 g_1^{-1}) \cdot [(g_1 g_0^{-1} h_j) \cdot y_j] \rightarrow (g_0 g_1^{-1}) \cdot (g_1 \cdot x_0) = m(g_0 g_1^{-1}, m(g_1, x_0)),$$

y por (3.1),  $m(h_j, y_j) \rightarrow m(g_0, x_0)$ ; lo cual muestra que  $m$  es continua en  $(g_0, x_0)$  y por lo tanto  $m$  es continua. □

**Corolario 3.2.3.** *Sean  $G$  un grupo topológico de Hausdorff y  $a : G \times X \rightarrow X$  una acción de  $G$  en un espacio métrico  $X$ . Si  $G$  es Baire, entonces  $a$  es continua, si y solo si, es separadamente continua.*

*Demostración.* En este caso  $G^x = G$  es abierto, para todo  $x \in X$ . □

**Corolario 3.2.4.** *Toda acción parcial topológica de un grupo discreto y enumerable en un espacio métrico es continua, si y solo si, es separadamente continua.*

*Demostración.* Sea  $m$  una acción parcial topológica de un grupo discreto y enumerable  $G$  en un espacio métrico  $X$ . Entonces, por el Ejemplo 1.3.12,  $G$  es un grupo Polaco, en particular es Hausdorff y Baire; además  $G^x$  es abierto, para cada  $x \in X$ . De modo que la conclusión del corolario se sigue del Teorema 3.2.2. □

**Ejemplo 3.2.5.** Consideremos la acción parcial del grupo discreto  $\mathbb{Z}$  en el espacio  $X = [0, 1]$  definida por

$$X_n = \begin{cases} X & \text{si } n = 0; \\ (0, 1] & \text{si } n \neq 0. \end{cases} \quad \text{y} \quad m_n = \text{Id}_{X_n}.$$

Observe que, para cada  $x \in X$ , la función constante  $m^x : G^x \ni g \mapsto g \cdot x = x \in X$  es continua, así por el Corolario 3.2.4,  $m$  es continua.

**Ejemplo 3.2.6.** Sea  $V : X \rightarrow TX$  un campo vectorial diferenciable sobre una variedad diferenciable y metrizable  $X$ , y  $\Phi$  la acción parcial topológica de  $G = \mathbb{R}$  en  $X$  definida en el Ejemplo 3.1.6. Entonces, para cada  $x \in X$  tenemos que el conjunto  $G^x = I_x$  es abierto y además la función  $m^x : I_x \ni t \mapsto \gamma_x(t) \in X$  es continua, entonces  $\Phi$  es separadamente continua y por lo tanto continua.

**Lema 3.2.7.** *Sea  $m$  una acción parcial topológica de un grupo  $G$  en un espacio  $X$  y  $x \in X$ . Si  $g \in G^x$ , entonces  $G^{g \cdot x} = G^x g^{-1}$ .*

*Demostración.* Sea  $g \in G^x$ . Por el Teorema 1.3.3, sabemos que la función  $r_{g^{-1}} : G \ni h \mapsto hg^{-1} \in G$  es un homeomorfismo. Veamos que  $r_{g^{-1}}(G^x) = G^{g \cdot x}$ . En efecto, si  $p \in r_{g^{-1}}(G^x)$  entonces  $p = hg^{-1}$ , donde  $\exists h \cdot x$ ; luego  $\exists (pg) \cdot x$ , esto es  $x \in X_{g^{-1}} \cap X_{(pg)^{-1}}$  y por (iii) del Teorema 2.0.4,  $\exists p \cdot (g \cdot x)$ , por lo tanto  $p \in G^{g \cdot x}$ . Recíprocamente si  $p \in G^{g \cdot x}$ , entonces  $\exists p \cdot (g \cdot x)$  y por AP2  $\exists (pg) \cdot x$ , luego  $p = (pg)g^{-1} \in r_{g^{-1}}(G^x)$ ; de modo que  $G^x g^{-1} = r_{g^{-1}}(G^x) = G^{g \cdot x}$ .  $\square$

**Ejemplo 3.2.8. Transformaciones de Möbius.** Sea  $m$  la acción parcial topológica del grupo Polaco  $G = \text{GL}(2, \mathbb{R})$  en  $X = \mathbb{R}$  definida en el Ejemplo 3.1.5. Observe que el conjunto

$$G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G : d \neq 0 \right\},$$

es abierto y para cada  $x \in \mathbb{R}$  tenemos que  $x = t_x \cdot 0$ , donde  $t_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . De modo que, por el Lema 3.2.7

$$G^x = G^{t_x \cdot 0} = G^0 t_x^{-1} = G^0 \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es abierto, para cada  $x \in X$ . Además, la función

$$m^x : G^x \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{ax + b}{cx + d} \in \mathbb{R},$$

es continua, por lo tanto  $m$  es continua gracias al Teorema 3.2.2.

Los siguientes son ejemplos de acciones parciales continuas en las que el conjunto  $G^x$  no es abierto, para todo  $x \in X$ .

**Ejemplo 3.2.9.** Sea  $X = \mathbb{R}$  con la topología usual y  $G = \mathbb{R}$ , el grupo aditivo de los números reales con la topología usual. Consideremos la acción parcial topológica de  $G$  en  $X$  definida por:  $X_0 = X$ ;  $X_t = \emptyset$ , para todo  $t \neq 0$ ;  $m_0 = \text{Id}_X$  y  $m_t = \emptyset$ , para todo  $t \neq 0$ . Note que  $G * X = \{0\} \times X$  y  $m : G * X \ni (0, x) \mapsto x \in X$  es continua, pero para todo  $x \in X$ ,  $G^x = \{0\}$  no es abierto.

**Ejemplo 3.2.10.** Sea  $X = \mathbb{R}$  con la topología usual,  $G = \mathbb{R}$ , el grupo aditivo de los números reales con la topología usual y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un homeomorfismo. Consideremos la acción parcial topológica de  $G$  en  $X$  definida por:

$$X_t = \begin{cases} X & \text{si } t \in \mathbb{Z}; \\ \emptyset & \text{si } t \notin \mathbb{Z}. \end{cases} \quad \text{y} \quad m_t = \begin{cases} f^t & \text{si } t \in \mathbb{Z}; \\ \emptyset & \text{si } t \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

donde

$$f^t = \begin{cases} \text{Id}_X, & \text{si } t = 0; \\ \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{t\text{-veces}}, & \text{si } t > 0; \\ \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{t\text{-veces}}, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Note que  $G * X = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ , luego  $m : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \ni (t, x) \mapsto f^t(x) \in \mathbb{R}$  es una acción global cuando  $G$  se restringe a  $\mathbb{Z}$  (con la topología del subespacio). Además, para cada  $x \in X$  la función  $m^x : \mathbb{Z} \ni t \mapsto f^t(x) \in X$  es continua, ya que  $\mathbb{Z}$  como subespacio de  $\mathbb{R}$  tiene la topología discreta. Así, por el Corolario 3.2.4  $m : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \ni (t, x) \mapsto f^t(x) \in \mathbb{R}$  es continua. Sin embargo, para cada  $x \in X$ ,  $G^x = \mathbb{Z}$  no es abierto en  $G$ .

**Observación 3.2.11.** El ejemplo anterior aparece en [1, Observación 1.1], donde el autor considera las acciones parciales continuas y con dominio abierto, por tal razón allí se dota al grupo  $G = \mathbb{R}$  con la topología discreta. Esta acción es llamada la *suspensión de  $f$*  y es una construcción bastante conocida en la Teoría de sistemas dinámicos.

**Ejemplo 3.2.12.** [17, Ejemplo 4.7] Consideremos la acción parcial del grupo aditivo  $\mathbb{R}$  (con la topología usual) en si mismo definida por:

$$\mathbb{R}_t = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \mathbb{R}, & \text{si } t \in \mathbb{Q}; \end{cases}$$

y  $m_t : \mathbb{R}_{-t} \ni x \mapsto x+t \in \mathbb{R}_t$ , para cada  $t \in \mathbb{Q}$ . Note que  $m : \mathbb{R} * \mathbb{R} \ni (t, x) \mapsto t+x \in \mathbb{R}$  es la restricción de la operación del grupo  $\mathbb{R}$ , al subespacio  $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$  y por lo tanto es continua. Sin embargo,  $\mathbb{R}^x = \mathbb{Q}$  no es abierto, para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

## Capítulo 4

# Globalización de acciones parciales topológicas

Como vimos en el Ejemplo 3.1.4, dada una acción global de un grupo  $G$  en un espacio  $Y$  y un subconjunto abierto no vacío  $X$  de  $Y$ , es posible inducir una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ . En este sentido, es natural preguntarse el problema inverso, es decir, si dada una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ , ¿es ésta una acción parcial inducida por una acción global de  $G$  en otro espacio  $X'$ ? Este problema se conoce como el problema de globalización.

En [21, Proposición 3.3] J. Kellendonk y M. V. Lawson y separadamente F. Abadie en [1, Teorema 1.1] prueban que cada acción parcial es inducida por una única acción global (salvo equivalencias). A continuación mostraremos algunos detalles sobre este resultado, en el contexto de acciones parciales topológicas.

**Definición 4.0.1.** Sean  $m = \{m_g : X_{g^{-1}} \rightarrow X_g\}_{g \in G}$  y  $\theta = \{\theta_g : Y_{g^{-1}} \rightarrow Y_g\}_{g \in G}$  acciones parciales topológicas de un grupo  $G$  en los espacios topológicos  $X$  y  $Y$  respectivamente. Una aplicación  $\phi : m \rightarrow \theta$  es un **morfismo de acciones parciales topológicas** si existe una función continua (también denotada  $\phi$ )  $\phi : X \rightarrow Y$ , tal

que  $\phi(X_g) \subseteq Y_g$  y el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_{g^{-1}} & \xrightarrow{m_g} & X_g \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ Y_{g^{-1}} & \xrightarrow{\theta_g} & Y_g. \end{array}$$

es conmutativo, para todo  $g \in G$ . Si además,  $\phi : X \rightarrow Y$  es inyectiva, diremos que  $\phi : m \rightarrow \theta$  es un **monomorfismo de acciones parciales topológicas** y si  $\phi : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo, con  $\phi(X_g) = Y_g$ , para cada  $g \in G$ ; diremos que  $\phi : m \rightarrow \theta$  es un **isomorfismo de acciones parciales topológicas** o que  $m$  y  $\theta$  son **acciones parciales topológicas equivalentes**.

**Definición 4.0.2.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Una **globalización** de una acción parcial topológica  $m : G * X \rightarrow X$  es un par  $\{(\beta, Y), \iota\}$ , donde  $\beta : G \times Y \rightarrow Y$  es una acción continua de  $G$  en  $Y$  y  $\iota : X \rightarrow Y$  es una función continua e inyectiva, tal que  $m$  y la acción parcial topológica inducida por  $\beta$  de  $G$  en  $\iota(X)$  son equivalentes vía  $\iota$ .

**Definición 4.0.3.** Una globalización  $\{(\beta, Y), \iota\}$  de una acción parcial  $m$  es **minimal** si para cualquier globalización  $\{(\beta', Y'), \iota'\}$  de  $m$ , existe un monomorfismo  $\lambda : \beta \rightarrow \beta'$  es decir, si existe una función  $\lambda : Y \rightarrow Y'$  continua e inyectiva, tal que  $\lambda(\beta(g, x)) = \beta'(g, \lambda(x))$ , para todo  $g \in G$  y  $x \in Y$ .

## 4.1. Construcción de una globalización de una acción parcial continua

Sea  $m$  una acción parcial topológica de un grupo  $G$  en un espacio  $X$ . Definimos la relación  $R$  de equivalencia en el espacio  $G \times X$  por:

$$(g, x)R(h, y), \text{ si y solo si, } x \in X_{g^{-1}h} \text{ y } (h^{-1}g) \cdot x = y. \quad (4.1)$$

Sea  $[g, x]$  la  $R$ -clase de equivalencia del elemento  $(g, x)$  y  $X_G = (G \times X)/R$  el espacio cociente de  $G \times X$  determinado por  $R$ , es decir  $X_G$  tiene la topología cociente determinada por la función proyección:

$$q : G \times X \ni (g, x) \mapsto [g, x] \in X_G. \quad (4.2)$$

Consideremos las siguientes funciones:

$$\mu : G \times X_G \ni (h, [g, x]) \mapsto h \cdot [g, x] = [hg, x] \in X_G; \quad (4.3)$$

$$\iota : X \ni x \mapsto \iota(x) = [1, x] \in X_G. \quad (4.4)$$

Veamos que  $\{(\mu, X_G), \iota\}$  es una globalización de  $m$ . De hecho, es la única globalización minimal de  $m$  salvo equivalencias.

**Lema 4.1.1.** *Sea  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ . Entonces*

- (i)  $q$  es continua, abierta y sobreyectiva.
- (ii)  $\mu$  está bien definida y es continua.
- (iii)  $\mu$  es una acción global de  $G$  en  $X_G$
- (iv)  $\iota$  es continua e inyectiva.

*Demostración.*

- (i) Claramente  $q$  es sobreyectiva y continua por definición de topología cociente.

Veamos que es abierta. Para cada abierto  $\mathcal{O}$  de  $G \times X$ , sea  $[\mathcal{O}]$  el conjunto de todos los elementos de  $G \times X$  que están  $R$ -relacionados con algún elemento de  $\mathcal{O}$ , esto es,

$$[\mathcal{O}] = \bigcup_{(g,x) \in \mathcal{O}} [g, x].$$

Por definición de la topología cociente, tenemos que la función  $q$  es abierta si el conjunto  $[\mathcal{O}]$  es un abierto de  $G \times X$ , para cada  $\mathcal{O}$  abierto de  $G \times X$ . Además, por definición de la topología producto, cada abierto de  $G \times X$  es la unión de conjuntos de la forma  $U \times V$ , con  $U$  abierto de  $G$  y  $V$  abierto de  $X$ . Luego para probar que  $q$  es abierta, es suficiente ver que  $[U \times V]$  es abierto en  $G \times X$ , para cada  $U$  y  $V$  abiertos de  $G$  y  $X$  respectivamente.

En efecto, notemos que

$$\begin{aligned}
 [U \times V] &= \{(h, x) \in G \times X : (h, x)R(u, y), \text{ para algún } (u, y) \in U \times V\} \\
 &= \bigcup_{u \in U} \{(h, x) \in G \times X : x \in X_{h^{-1}u} \text{ y } x \in (h^{-1}u) \cdot V\} \\
 &\stackrel{g=h^{-1}u}{=} \bigcup_{u \in U} \left( \bigcup_{g \in G} \{ug^{-1}\} \times g \cdot V \right) \\
 &= \bigcup_{g \in G} Ug^{-1} \times g \cdot V.
 \end{aligned}$$

Pero  $Ug^{-1}$  es un abierto de  $G$ , pues  $U$  lo es, y por la Observación 3.1.10,  $g \cdot V$  es un abierto de  $X$ . Entonces  $[U \times V]$  es abierto de  $G \times X$  y por lo anterior  $q$  es abierta.

- (ii) Primero veamos que  $\mu$  está bien definida. En efecto, supongamos que  $(h_1, [g_1, x_1])$ ,  $(h_2, [g_2, x_2]) \in G \times X_G$  son tales que  $(h_1, [g_1, x_1]) = (h_2, [g_2, x_2])$ , esto es,  $h_1 = h_2$  y  $[g_1, x_1] = [g_2, x_2]$ , luego  $x_1 \in X_{g_1^{-1}g_2}$  y  $(g_2^{-1}g_1) \cdot x_1 = x_2$ . Note que  $g_2^{-1}g_1 = g_2^{-1}h_2^{-1}h_1g_1 = (h_2g_2)^{-1}(h_1g_1)$ . Entonces  $x_1 \in X_{(h_1g_1)^{-1}(h_2g_2)}$  y  $[(h_2g_2)^{-1}(h_1g_1)] \cdot x_1 = x_2$ . Por lo tanto,  $[h_1g_1, x_1] = [h_2g_2, x_2]$ .

Ahora veamos que  $\mu$  es continua. Para esto, sea  $\text{Id}_G$  la identidad en  $G$ ,  $\text{Id}_X$  la identidad en  $X$  y  $p : G \times G \ni (g, h) \mapsto gh \in G$  la operación del grupo. Observe

que el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{\text{Id}_G \times q} & G \times X_G \\ p \times \text{Id}_X \downarrow & & \downarrow \mu \\ G \times X & \xrightarrow{q} & X_G \end{array}$$

es decir  $q \circ (p \times \text{Id}_X) = \mu \circ (\text{Id}_G \times q)$ . Por el ítem (i) tenemos que  $q$  es una función abierta y sobreyectiva, luego  $\text{Id}_G \times q$  es abierta y sobreyectiva; además  $q \circ (p \times \text{Id}_X)$  es continua, pues  $p \times \text{Id}_X$  y  $q$  lo son. Así,  $\mu \circ (\text{Id}_G \times q)$  es continua y por lo tanto  $\mu$  es continua.

(iii) Sean  $[f, x] \in X_G$  y  $g, h \in G$ , entonces por definición de  $\mu$  tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(1, [f, x]) &= [f, x] \\ \mu(g, \mu(h, [f, x])) &= \mu(g, [hf, x]) = [g(hf), x] = [(gh)f, x] = \mu(gh, [f, x]) \end{aligned}$$

Luego  $\mu$  es una acción global de  $G$  en  $X_G$ .

(iv) Note  $\iota = q \circ \iota'$ , donde que  $\iota' : X \ni x \mapsto (1, x) \in G \times X$  es continua, pues sus funciones coordenadas son continuas y la función proyección  $q$  también lo es. Luego  $\iota$  es continua, por ser la composición de dos funciones continuas.

Por otra parte, si  $\iota(x) = \iota(y)$  entonces  $[1, x] = [1, y]$ ; esto es  $x = 1 \cdot x = y$ . Por lo tanto  $\iota$  es inyectiva. □

**Lema 4.1.2.** *Sea  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$  y  $q : G \times X \rightarrow X_G$ , la función proyección definida en (4.2). Entonces*

(i)  $q^{-1}(\iota(X)) = G * X$ .

(ii)  $q^{-1}(\iota(U)) = m^{-1}(U)$ , para cada  $U \subseteq X$ .

*Demostración.*

(i) Suponga que  $(g, x) \in q^{-1}(\iota(X))$ , entonces  $[g, x] \in \iota(X)$ . Así,  $[g, x] = [1, y]$  para algún  $y \in X$ . En particular,  $x \in X_{g^{-1}}$  esto es,  $(g, x) \in G * X$ . Recíprocamente, si  $(g, x) \in G * X$ , entonces  $\exists g \cdot x$ . Note que  $[g, x] = [1, g \cdot x] \in \iota(X)$ , luego  $(g, x) \in q^{-1}(\iota(X))$ .

(ii) Sea  $U$  un subconjunto de  $X$ , entonces  $m^{-1}(U) = \{(g, x) \in G * X : g \cdot x \in U\}$ . Por (i) tenemos que  $[g, x] \in \iota(X)$ , si y solo si,  $\exists g \cdot x$ , esto es

$$(g, x) \in m^{-1}(U) \Leftrightarrow (g, x) \in q^{-1}(\iota(U)).$$

Por lo tanto  $q^{-1}(\iota(U)) = m^{-1}(U)$ .

□

**Proposición 4.1.3.** *Sea  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ . Entonces*

- (i)  $\iota(X)$  es un abierto de  $X_G$ , si y solo si,  $G * X$  es abierto de  $G \times X$ .
- (ii)  $\iota : X \rightarrow \iota(X)$  es abierta, donde  $\iota(X)$  tiene la topología relativa, si y solo si,  $m$  es continua.
- (iii) Si  $m$  es continua y  $G * X$  es un abierto de  $G \times X$ , entonces  $\iota : X \rightarrow X_G$  es abierta. En tal caso,  $X$  es homeomorfo a  $\iota(X)$ .

*Demostración.*

(i) Suponga que  $\iota(X)$  es un abierto de  $X_G$ , como  $q$  es continua,  $q^{-1}(\iota(X))$  es un abierto de  $G \times X$  y por el Lema 4.1.2 (i),  $G * X$  es abierto de  $G \times X$ . Recíprocamente, si  $G * X$  es abierto de  $G \times X$ , como  $q$  es abierta,  $q(G * X)$  es un abierto de  $X_G$ . Por el Lema 4.1.2 (i) y la sobreyectividad de  $q$ ,  $\iota(X) = q(q^{-1}(\iota(X)))$  es un abierto de  $X_G$ .

- (ii) Suponga que  $\iota : X \rightarrow \iota(X)$  es abierta y sea  $U$  un abierto de  $X$ . Entonces  $\iota(U)$  es un abierto de  $\iota(X)$ , es decir  $\iota(U) = \iota(X) \cap V'$ , donde  $V'$  es un abierto de  $X_G$ . Sea  $V = q^{-1}(V')$ , entonces  $V$  es abierto de  $G \times X$  pues  $q$  es continua. De modo que

$$m^{-1}(U) = q^{-1}(\iota(U)) = (G * X) \cap V.$$

Donde la primera igualdad se sigue por el Lema 4.1.2 (ii) y la segunda, por la sobreyectividad de  $q$ . Luego  $m^{-1}(U)$  es un abierto de  $G * X$  y por lo tanto  $m$  es continua.

Recíprocamente, suponga que  $m$  es continua y sea  $U$  un abierto de  $X$ . Entonces  $m^{-1}(U)$  es un abierto de  $G * X$ , esto es, existe un abierto  $V$  de  $G \times X$  tal que  $m^{-1}(U) = (G * X) \cap V$ . Por el Lema 4.1.2 (ii),  $q^{-1}(\iota(U)) = (G * X) \cap V$ , luego  $\iota(U) = q((G * X) \cap V)$ . Note que  $q((G * X) \cap V) \subseteq q(G * X) \cap q(V)$ . Por otra parte, si  $[g, x] \in q(G * X) \cap q(V)$  entonces  $\exists g \cdot x$  y  $[g, x] = [h, y]$  para algún  $(h, y) \in V$ . Luego  $\exists h \cdot y$  y  $(h, y) \in (G * X) \cap V$ , es decir  $[g, x] \in q((G * X) \cap V)$ . Por lo tanto  $q((G * X) \cap V) = q(G * X) \cap q(V)$ .

Así,  $\iota(U) = \iota(X) \cap q(V)$  por el Lema 4.1.2 (ii). Pero  $V$  es un abierto de  $G \times X$  y como  $q$  es abierta, entonces  $q(V)$  es un abierto de  $X_G$ . Por lo tanto  $\iota(U)$  es un abierto de  $\iota(X)$  y en consecuencia  $\iota : X \rightarrow \iota(X)$  abierta.

- (iii) Sea  $U$  un abierto de  $X$ . Por el ítem (ii), tenemos que  $\iota(U)$  es un abierto de  $\iota(X)$ , ya que  $m$  es continua. Luego  $\iota(U) = \iota(X) \cap V$ , con  $V$  abierto de  $X_G$ . Pero como  $G * X$  es abierto, por (i),  $\iota(X)$  es un abierto de  $X_G$ . Así,  $\iota(U)$  es un abierto de  $X_G$  e  $\iota$  es abierta. En particular, por el Lema 4.1.1  $\iota : X \rightarrow \iota(X)$  es continua y por el ítem (ii) es abierta, por lo tanto  $X$  es homeomorfo a  $\iota(X)$ .

□

**Lema 4.1.4.** *Sea  $m$  una acción parcial continua de  $G$  en  $X$ , tal que  $G * X$  es abierto. Entonces  $\{(\mu, X_G), \iota\}$  es una globalización de  $m$ .*

*Demostración.* Sea  $\alpha = \{\alpha_g : Y_{g^{-1}} \rightarrow Y_g\}_{g \in G}$  la acción parcial topológica inducida por  $\mu$  de  $G$  en  $\iota(X)$  (ver Ejemplo 3.1.4). Por el Lema 4.1.1 y el ítem (iii) de la Proposición 4.1.3, basta probar que  $m$  y  $\alpha$  son equivalentes via  $\iota$ . En efecto, notemos que  $\iota : X \ni x \mapsto \iota(x) \in \iota(X)$  es biyectiva y continua. Además, dado  $g \in G$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \bar{z} \in Y_g = \iota(X) \cap \mu_g(\iota(X)) &\Leftrightarrow \exists x, y \in X \text{ tales que } \bar{z} = [1, x] = [g, y]; \\ &\Leftrightarrow \exists x, y \in X \text{ tales que } \bar{z} = [1, x], \exists g \cdot y \text{ y } g \cdot y = x; \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X \text{ tal que } \bar{z} = [1, x] \text{ y } x \in X_g; \\ &\Leftrightarrow \bar{z} \in \iota(X_g). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\iota(X_g) = Y_g$ , para todo  $g \in G$ . Finalmente, notemos que dado  $x \in X_{g^{-1}}$ ,

$$\iota(m_g(x)) = \iota(g \cdot x) = [1, g \cdot x] = [g, x] = \alpha_g([1, x]) = \alpha_g(\iota(x)).$$

De lo anterior concluimos que  $\{(\mu, X_G), \iota\}$  es una globalización de  $m$ .  $\square$

**Observación 4.1.5.** Las hipótesis de que  $G * X$  es abierto y la continuidad de la acción parcial  $m$ , son usadas únicamente para garantizar que la función  $\iota : X \rightarrow \iota(X)$  es abierta.

**Lema 4.1.6.** *Sea  $m$  una acción parcial de  $G$  en  $X$  y  $\{(\beta, Y), j\}$  una globalización de  $m$ . Si  $\alpha$  es la acción parcial inducida por  $\beta$  de  $G$  en  $j(X)$  y  $g \in G$  entonces*

(i)  $m(g, x)$  está definida, si y solo si,  $\alpha(g, j(x))$  está definida.

(ii)  $j(m(g, x)) = \beta(g, j(x))$ , para todo  $x \in X_{g^{-1}}$ .

*Demostración.* Como  $\{(\beta, Y), j\}$  es una globalización de  $m$ , entonces  $j : X \rightarrow j(X) \subseteq Y$  es biyectiva y continua. Además, para cada  $g \in G$ ,  $j(X_g) = Y_g$  y  $j(m(g, x)) = \alpha(g, j(x))$ , para cada  $x \in X_{g^{-1}}$ . De manera que si  $m(g, x)$  está definida, entonces  $x \in X_{g^{-1}}$  y por lo tanto,  $\alpha(g, j(x)) = j(m(g, x)) \in Y_g$  está definida. Por otra parte, de la definición de acción parcial inducida, tenemos que si  $\alpha(g, j(x))$  está definida, entonces  $\alpha(g, j(x)) = \beta(g, j(x))$ . Luego, si  $x \in X_{g^{-1}}$ , por (i) se tiene que  $j(m(g, x)) = \beta(g, j(x))$ .  $\square$

**Lema 4.1.7.** *Sea  $m$  una acción parcial continua de  $G$  en  $X$ , tal que  $G * X$  es abierto. Entonces  $\{(\mu, X_G), \iota\}$  es una globalización minimal de  $m$ .*

*Demostración.* Sea  $\{(\beta, Y), j\}$  una globalización de  $m$  y  $\theta = \{\theta_g : Y_{g^{-1}} \rightarrow Y_g\}_{g \in G}$  la acción parcial inducida por  $\beta$ . Definimos

$$\lambda : X_G \ni [g, x] \mapsto \beta(g, j(x)) \in Y.$$

Notemos que  $\lambda$  está bien definida, pues si  $[g, x] = [h, y]$  entonces  $\exists (h^{-1}g) \cdot x$  y  $(h^{-1}g) \cdot x = y$ , luego por (ii) del Lema 4.1.6 tenemos que  $j(y) = j((h^{-1}g) \cdot x) = \beta((h^{-1}g), j(x))$ , de modo que  $\beta(h, j(y)) = \beta(g, j(x))$ . Veamos que  $\lambda$  es inyectiva. Observemos que

$$\lambda([g, x]) = \lambda([h, y]) \Leftrightarrow \beta(h, j(y)) = \beta(g, j(x)) \Leftrightarrow \beta(h^{-1}g, j(x)) = j(y).$$

Pero  $\beta(h^{-1}g, j(x)) = j(y) \in j(X)$ , luego  $\theta(h^{-1}g, j(x))$  está definida y por (i) del Lema 4.1.6,  $\exists (h^{-1}g) \cdot x$ . Así, por (ii) del Lema 4.1.6  $j((h^{-1}g) \cdot x) = \beta(h^{-1}g, j(x)) = j(y)$ , de donde concluimos que  $(h^{-1}g) \cdot x = y$  ya que  $j$  es inyectiva y por lo tanto  $[g, x] = [h, y]$ . Para ver que  $\lambda$  es continua note que el siguiente diagrama es conmu-

tativo:

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{q} & X_G \\ \text{Id}_G \times j \downarrow & & \downarrow \lambda \\ G \times Y & \xrightarrow{\beta} & Y. \end{array}$$

Esto es,  $\lambda \circ q = \beta \circ (\text{Id}_G \times j)$ . Luego  $\lambda \circ q$  es continua ya que  $\beta$  y  $\text{Id}_G \times j$  lo son. Además, por (i) del Lema 4.1.1,  $q$  es abierta y sobreyectiva, así por el Lema 1.1.1 tenemos que  $\lambda$  es continua.

Finalmente, observe que

$$\lambda(\mu(g, [h, x])) = \lambda([gh, x]) = \beta(gh, j(x)) = \beta(g, \beta(h, j(x))) = \beta(g, \lambda([h, x])).$$

Por lo tanto,  $\{(\mu, X_G), \iota\}$  es una globalización minimal de  $m$ .  $\square$

**Teorema 4.1.8.** [Kellendonk and Lawson - Abadie] *Sea  $m$  una acción parcial continua de  $G$  en  $X$ , tal que  $G * X$  es abierto. Entonces  $\{(\mu, X_G), \iota\}$  es la única globalización minimal de  $m$  salvo equivalencias.*

*Demostración.* Sea  $\{(\beta, Y), j\}$  una globalización minimal de  $m$ . Veamos que  $\beta$  y  $\mu$  son equivalentes. En efecto, como  $\{(\beta, Y), j\}$  y  $\{(\mu, X_G), \iota\}$  son globalizaciones minimales, existen  $\lambda : X_G \rightarrow Y$  y  $\gamma : Y \rightarrow X_G$  funciones continuas e inyectivas tales que  $\lambda(\mu(g, x)) = \beta(g, \lambda(x))$  y  $\gamma(\beta(h, y)) = \mu(h, \gamma(y))$ , para todos  $x \in X_G$ ,  $y \in Y$  y  $g, h \in G$ . Note que:

$$\begin{aligned} \gamma \circ \lambda([g, x]) &= \gamma(\lambda(\mu(g, [1, x]))) = \gamma(\beta(g, \lambda(\iota(x)))) \\ &= \mu(g, \gamma(\lambda(\iota(x)))) = \mu(g, \gamma(j(x))) = \mu(g, \iota(x)) = [g, x]. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\gamma \circ \lambda = \text{Id}_{X_G}$ . Como  $\lambda$  y  $\gamma$  son inyectivas, concluimos que las acciones  $\mu$  y  $\beta$  son equivalentes.  $\square$

**Observación 4.1.9.** En virtud del Teorema 4.1.8, en adelante diremos que  $\{(\mu, X_G), \iota\}$  es la globalización de la acción parcial topológica  $m : G * X \rightarrow X$ . También diremos que  $\mu$  es la **acción envolvente** de  $m$  y que  $X_G$  es el **espacio envolvente** de  $X$ .

## 4.2. ¿Cuándo $X_G$ es un espacio de Hausdorff?

Es conocido que en general  $X_G$  no es un espacio de Hausdorff. A continuación presentamos algunos resultados sobre este problema.

**Teorema 4.2.1.** [1, Proposición 1.2] Sean  $m$  una acción parcial continua de  $G$  en un espacio de Hausdorff  $X$ , tal que  $G * X$  es abierto y  $\text{Gr}(m)$  el gráfico de  $m$ , esto es,

$$\text{Gr}(m) = \{(g, x, y) \in G \times X \times X : x \in X_{g^{-1}}, m_g(x) = y\}.$$

Entonces  $X_G$  es un espacio de Hausdorff, si y solo si,  $\text{Gr}(m)$  es un subconjunto cerrado de  $G \times X \times X$ .

*Demostración.* Suponga que  $X_G$  es Hausdorff y sea  $(g_i, x_i, m(g_i, x_i))$  una red en  $\text{Gr}(m)$  que converge a  $(g, x, y) \in G \times X \times X$ . En particular,  $m(g_i, x_i) \rightarrow y \in X$  y  $\mu(g_i, \iota(x_i)) \rightarrow \mu(g, \iota(x)) = [g, x]$  pues  $\iota$  y  $\mu$  son continuas. Observe que el siguiente diagrama es conmutativo, es decir  $\iota \circ m = \mu \circ (I_G \times \iota)$ .

$$\begin{array}{ccc} G \times X_G & \xrightarrow{\mu} & X_G \\ I_G \times \iota \uparrow & & \uparrow \iota \\ G * X & \xrightarrow{m} & X \end{array}$$

Luego,  $\mu(g_i, \iota(x_i)) = \iota(m(g_i, x_i))$ . Como  $m(g_i, x_i) \rightarrow y \in X$  e  $\iota$  es continua, entonces  $\iota(m(g_i, x_i)) \rightarrow \iota(y) = [1, y]$  y por la unicidad del límite en espacios de Hausdorff  $[g, x] = [1, y]$ , esto es,  $x \in X_{g^{-1}}$  y  $m_g(x) = y$ . Luego  $(g, x, y) \in \text{Gr}(m)$ . Por lo tanto  $\text{Gr}(m)$  es un subconjunto cerrado de  $G \times X \times X$ .

Recíprocamente, suponga que  $\text{Gr}(m)$  es cerrado en  $G \times X \times X$  y sean  $\bar{x}, \bar{y} \in X_G$ . Para ver que  $X_G$  es Hausdorff, probemos que si no existen abiertos disjuntos  $O_x$  y  $O_y$  en  $X_G$  de  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  respectivamente, entonces  $\bar{x} = \bar{y}$ . En efecto, suponga que  $\bar{x} = [h, x]$  y  $\bar{y} = [h', y]$ , con  $h, h' \in G$  y  $x, y \in X$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\bar{x} = [1, x]$  y  $\bar{y} = [g, y]$ , con  $g = h^{-1}h' \in G$ ; ya que  $\mu_{h^{-1}} : X_G \rightarrow X_G$  es un homeomorfismo.

Sean  $\mathcal{B}_x$  y  $\mathcal{B}_y$  bases de vecindades de  $x$  y  $y$  respectivamente y  $U \in \mathcal{B}_x$  y  $V \in \mathcal{B}_y$ . Por la Proposición 4.1.3,  $\iota(U)$  y  $\mu_g(\iota(V))$  son abiertos de  $X_G$ , con  $\bar{x} \in \iota(U)$  y  $\bar{y} \in \mu_g(\iota(V))$ . Si cada abierto de  $\bar{x}$  intersecta a cada abierto de  $\bar{y}$ , existe  $\bar{z}_{U,V} \in \iota(U) \cap \mu_g(\iota(V))$ , es decir, existen  $x_{U,V} \in U$  y  $y_{U,V} \in V$  tales que  $\bar{z}_{U,V} = [1, x_{U,V}] = [g, y_{U,V}]$ , luego  $m_g(y_{U,V}) = x_{U,V}$ . Sea  $I = \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_y$  el conjunto dirigido con el orden parcial de contenencia inversa en cada componente. Entonces la red  $(g, y_{U,V}, x_{U,V})_{(U,V) \in I}$  está contenida en  $\text{Gr}(m)$  y converge a  $(g, y, x)$ . Como  $\text{Gr}(m)$  es cerrado, tenemos que  $(g, y, x) \in \text{Gr}(m)$ , esto es  $y \in X_{g^{-1}}$  y  $m_g(y) = x$ . Por lo tanto,  $\bar{x} = \bar{y}$  como queríamos probar.  $\square$

**Ejemplo 4.2.2.** Consideremos la acción parcial del grupo discreto  $\mathbb{Z}$  en el espacio  $X = [0, 1]$  definida por

$$X_n = \begin{cases} X & \text{si } n = 0; \\ (0, 1] & \text{si } n \neq 0. \end{cases} \quad \text{y} \quad m_n = \text{Id}_{X_n}.$$

En el Ejemplo 3.2.5, vimos que  $m$  es continua y además, el conjunto

$$\mathbb{Z} * X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{n\} * X = \{0\} * X \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \{n\} * X = \{0\} \times X \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \{n\} \times (0, 1],$$

es abierto en  $\mathbb{Z} \times X$ . Además, para cada  $k \in \mathbb{N}$  se tiene que  $\frac{1}{k} \in (0, 1] = X_{-1}$  y  $m_1\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}$ . De modo que la sucesión  $\left\{\left(1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\}_{k \in \mathbb{N}}$  está contenida en el gráfico de

$m$ . Claramente, esta sucesión converge a  $(1, 0, 0) \in G \times X \times X$ , pero  $(1, 0, 0) \notin \text{Gr}(m)$  pues  $0 \notin X_{-1}$ ; luego,  $\text{Gr}(m)$  no es cerrado. Así, por el Teorema 4.2.1,  $X_{\mathbb{Z}}$  no es un espacio de Hausdorff.

### 4.3. Relación de equivalencia de órbita

En esta sección estudiamos la relación de equivalencia de órbita para acciones parciales. Los resultados presentamos a continuación, en su mayoría aparecen en [28].

Sea  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ . Considere la siguiente relación en  $X$ ,

$$xE_G^p y \iff \exists g \cdot x \text{ y } g \cdot x = y, \text{ para algún } g \in G. \quad (4.5)$$

**Proposición 4.3.1.**  $E_G^p$  es una relación de equivalencia en  $X$ .

*Demostración.* Por AP3,  $\exists 1 \cdot x$  y  $1 \cdot x = x$ , para todo  $x \in X$ ; luego  $E_G^p$  es reflexiva. Ahora, si  $xE_G^p y$ , existe  $g \in G$  tal que  $\exists g \cdot x$  y  $g \cdot x = y$ ; de modo que, por AP1,  $\exists g^{-1} \cdot (g \cdot x)$  y  $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x$ , luego  $\exists g^{-1} \cdot y$  y  $g^{-1} \cdot y = x$ , esto es  $yE_G^p x$ , por lo tanto  $E_G^p$  es simétrica. Por último si  $xE_G^p y$  y  $yE_G^p z$ , existen  $g, h \in G$  tales que  $\exists g \cdot x$ ,  $\exists h \cdot y$ ,  $g \cdot x = y$  y  $h \cdot y = z$ , luego  $\exists h \cdot (g \cdot x)$  y  $h \cdot (g \cdot x) = z$  y por AP3,  $\exists (hg) \cdot x$  y  $(hg) \cdot x = z$ ; por lo tanto  $E_G^p$  es transitiva.  $\square$

La relación de equivalencia  $E_G^p$ , es llamada **la relación de equivalencia de órbita** (inducida por  $m$ ) en  $X$  y para cada  $x \in X$ , su  $E_G^p$ -clase de equivalencia, la cual denotaremos por  $G^x \cdot x$ , es llamada la **órbita órbita** de  $x$  y es precisamente el conjunto

$$G^x \cdot x = \{g \cdot x : g \in G^x\}.$$

Además, denotamos por  $X/E_G^p$  al espacio cociente de  $X$  determinado  $E_G^p$ , el cual se denomina **el espacio órbita** de  $X$  (inducido por  $m$ ), es decir,  $X/E_G^p$  es el espacio de

todas las  $E_G^p$ -clases de equivalencia de los elementos de  $X$ , dotado con la topología cociente determinada por la función proyección

$$\pi_X : X \ni x \mapsto G^x \cdot x \in X/E_G^p. \quad (4.6)$$

**Lema 4.3.2.** *Sea  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ , entonces la función proyección  $\pi_X$  es sobreyectiva, continua y abierta*

*Demostración.* Claramente  $\pi_X$  es sobreyectiva y por definición de la topología cociente es continua. Veamos que  $\pi_X$  es abierta. En efecto, sea  $U$  un abierto de  $X$ . Entonces,  $\pi_X(U)$  es un abierto de  $X/E_G^p$ , si y solo si,  $\pi_X^{-1}(\pi_X(U))$  es un abierto de  $X$ . Note que

$$\begin{aligned} \pi_X^{-1}(\pi_X(U)) &= \{x \in X : G^x \cdot x = G^y \cdot y, \text{ para algún } y \in U\} \\ &= \{x \in X : x = g \cdot y, \text{ para algún } y \in U \text{ y } g \in G^y\} \\ &= \{g \cdot y : y \in U \text{ y } g \in G^y\} \\ &= \bigcup_{g \in G} m_g(U \cap X_{g^{-1}}) \\ &= \bigcup_{g \in G} g \cdot U. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Y por la Observación 3.1.10,  $g \cdot U$  es un abierto de  $X$ , para cada  $g \in G$ ; entonces  $\pi_X^{-1}(\pi_X(U))$  es abierto de  $X$  y por lo tanto  $\pi_X$  es abierta.  $\square$

**Ejemplo 4.3.3.** Sea  $m = \{m_g : X_{g^{-1}} \rightarrow X_g\}_{g \in G}$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ . Entonces la familia  $\hat{m} = \{\hat{m}_g : (G \times X)_{g^{-1}} \rightarrow (G \times X)_g\}_{g \in G}$  es una acción parcial topológica de  $G$  en  $G \times X$ , donde  $(G \times X)_g = G \times X_g$  y  $\hat{m}_g(h, x) = (hg^{-1}, g \cdot x)$ , para todo  $g \in G$  y  $(h, x) \in (G \times X)_{g^{-1}}$ .

En adelante denotaremos por  $\widehat{E}_G^p$  a la relación de equivalencia de órbita inducida por  $\widehat{m}$ . El siguiente resultado muestra que  $X_G$  es el espacio órbita de  $G \times X$ , inducido por  $\widehat{E}_G^p$ .

**Teorema 4.3.4.** *Sea  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ . Entonces  $X_G$  es el espacio cociente de  $G \times X$  determinado por  $\widehat{E}_G^p$ .*

*Demostración.* Sea  $R$  la relación de equivalencia sobre  $G \times X$  definida en (4.1), entonces

$$\begin{aligned} (g, x)R(h, y) &\iff x \in X_{g^{-1}h} \text{ y } (h^{-1}g) \cdot x = y \\ &\iff \exists f \in G \text{ tal que } x \in X_{f^{-1}}, f \cdot x = y \text{ y } gf^{-1} = h. \\ &\iff \exists f \in G \text{ tal que } (g, x) \in (G \times X)_{f^{-1}} \text{ y } \widehat{m}_f(g, x) = (h, y). \\ &\iff (g, x)\widehat{E}_G^p(h, y). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $X_G = (G \times X)/R = (G \times X)/\widehat{E}_G^p$ . □

El siguiente lema da otra (además de la del Teorema 4.2.1) condición suficiente para determinar si el espacio  $X_G$  es de Hausdorff.

**Lema 4.3.5.** *Sea  $m$  una acción parcial topológica de un grupo métrico  $G$  en un espacio métrico  $X$ . Si  $G * X$  es cerrado, entonces  $\widehat{E}_G^p$  es cerrado y por lo tanto  $X_G$  es Hausdorff.*

*Demostración.* Sea  $(g_n, x_n)\widehat{E}_G^p(h_n, y_n)$  tal que  $g_n \rightarrow g$ ,  $h_n \rightarrow h$ ,  $x_n \rightarrow x$  y  $y_n \rightarrow y$ . Basta probar que  $(g, x)\widehat{E}_G^p(h, y)$ . En efecto, por la definición de  $\widehat{E}_G^p$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $u_n \in G$  tal que  $u_n g_n = h_n$ ,  $x_n \in X_{u_n^{-1}}$  y  $u_n \cdot x_n = y_n$ . Sea  $u = hg^{-1}$  entonces  $u_n \rightarrow u$ . Como  $G * X$  es cerrado y  $(u_n, x_n) \in G * X$ , entonces  $(u, x) \in G * X$ , esto es,  $x \in X_{u^{-1}}$ ,  $ug = h$  y  $u \cdot x = y$ . Por lo tanto  $(g, x)\widehat{E}_G^p(h, y)$  y por el Lema 4.3.4 y el Lema 1.1.5,  $X_G$  es Hausdorff. □

**Observación 4.3.6.** En [14, Proposición 2.1] se prueba que si  $G$  es un grupo discreto numerable y  $X$  es un espacio segundo numerable y compacto, entonces el espacio  $X_G$  es Hausdorff, si y solo si,  $X_g$  es abierto y cerrado para cada  $g \in G$ .

## 4.4. ¿Cuándo $X_G$ es metrizable o Polaco?

En esta sección desarrollamos los detalles de las pruebas de los resultados presentados en [28], sobre el problema de establecer bajo qué condiciones el espacio envolvente es metrizable o Polaco.

**Teorema 4.4.1.** *Sea  $m$  una acción parcial topológica de un grupo separable y metrizable  $G$  en un espacio separable y metrizable  $X$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i)  $X_G$  es metrizable.

(ii)  $X_G$  es regular y  $T_1$ .

Además, si  $X$  y  $G$  son Polacos, las anteriores afirmaciones son equivalentes a

(iii)  $X_G$  es Polaco.

*Demostración.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Se sigue directamente del Ejemplo 1.1.8.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Por el Teorema 1.2.8, sabemos que el producto numerable de espacios metrizable es metrizable, y el producto numerable de espacios separables es separable, así como  $G$  y  $X$  son espacios metrizable y separables, tenemos que  $G \times X$  es metrizable y separable. Luego por el ítem (ii) del Teorema 1.1.7,  $G \times X$  es segundo numerable. Además, por el Teorema 4.1.1, la función proyección  $q : G \times X \rightarrow X_G$  es abierta, así por el ítem (i) del Teorema 1.1.7,  $X_G$  es segundo numerable.

Ahora, por el Teorema de metrización de Uryshon 1.1.7, sabemos que todo espacio regular y segundo numerable es metrizable, por lo tanto  $X_G$  es metrizable.

Suponga  $X$  y  $G$  son Polacos. Claramente, si  $X_G$  es Polaco,  $X_G$  es metrizable. Recíprocamente, por el Teorema 1.2.8,  $G \times X$  es Polaco y si  $X_G$  es metrizable, como  $X_G$  es la imagen continua y abierta de  $G \times X$  por  $q$ , entonces  $X_G$  es Polaco, por el Teorema de Sierpiński 1.2.8.  $\square$

**Notación 4.4.2.** Sean  $m$  una acción parcial de  $G$  en  $X$  y  $M \subseteq G$ . Denotamos

$$X^M = \bigcap_{g \in M} X_{g^{-1}}.$$

**Lema 4.4.3.** *Sea  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$  tal que  $G * X$  es abierto. Entonces para cada abierto  $N$  de  $1$  en  $G$  y para cada  $x \in X$ , existe un abierto  $M$  de  $1$  tal que  $M \subseteq N$  y  $x \in \text{int}(X^M)$ .*

*Demostración.* Sea  $N$  un abierto de  $G$  tal que  $1 \in N$  y  $x \in X$ . Como  $G * X$  es abierto en  $G \times X$ , existe un abierto  $V$  de  $X$ , con  $x \in V$ , y un abierto  $M$  de  $1$ , tal que  $M \subseteq N$  y  $M \times V \subseteq G * X$ . Entonces  $(g, y) \in G * X$ , para cada  $g \in M$  y  $y \in V$ , esto es,  $y \in X_{g^{-1}}$ , para cada  $g \in M$  y  $y \in V$ . Por lo tanto  $x \in V \subseteq \bigcap_{g \in M} X_{g^{-1}} = X^M$  y como  $V$  es abierto,  $x \in \text{int}(X^M)$ .  $\square$

**Ejemplo 4.4.4.** Sean  $H$  y  $G$  grupos topológicos tales que  $G \subseteq H$  y  $m = \{m_g : X_{g^{-1}} \rightarrow X_g\}_{g \in G}$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ . Entonces la familia

$$\widehat{m}^H = \{\widehat{m}_g^H : (H \times X)_{g^{-1}} \rightarrow (H \times X)_g\}_{g \in G},$$

es una acción parcial topológica de  $G$  en  $H \times X$ , donde  $(H \times X)_g = H \times X_g$  y  $\widehat{m}_g^H(h, x) = (hg^{-1}, g \cdot x)$ , para cada  $g \in G$  y  $(h, x) \in (H \times X)_{g^{-1}}$ . En particular, si  $H = G$ , entonces  $\widehat{m}^H$  coincide con la acción parcial  $\widehat{m}$  definida en el Ejemplo 4.3.3.

**Notación 4.4.5.** En adelante, denotamos por  $\widehat{E}_H^p$ , a la relación de equivalencia de órbita inducida por  $\widehat{m}^H$  en  $H \times X$  y por  $(H \times X)/\widehat{E}_H^p$ , al espacio órbita determinado por  $\widehat{E}_H^p$ .

**Definición 4.4.6.** Sea  $m$  es una acción parcial de  $G$  en  $X$ . Un subconjunto  $V$  de  $X$  se dice que es  $m$ -**invariante** si  $G \cdot V \subseteq V$ , es decir, si  $g \cdot V \subseteq V$ , para todo  $g \in G$ .

**Lema 4.4.7.** Sean  $H$  y  $G$  grupos topológicos tales que  $G \subseteq H$  y  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ . Entonces el espacio  $(H \times X)/\widehat{E}_H^p$  es regular, si dados  $F \subseteq H \times X$  cerrado,  $\widehat{m}^H$ -invariante y  $(h, x) \in (H \times X) \setminus F$ ; existen  $O_1$  y  $O_2$  abiertos disjuntos de  $H \times X$  tales que  $O_1$  u  $O_2$  es  $\widehat{m}^H$ -invariante,  $F \subseteq O_1$  y  $(h, x) \in O_2$ .

*Demostración.* Sea  $F$  un cerrado de  $(H \times X)/\widehat{E}_H^p$ , y  $[h, x] \notin F$ . Queremos probar que existen abiertos disjuntos  $A_1$  y  $A_2$  de  $(H \times X)/\widehat{E}_H^p$  tales que  $F \subseteq A_1$  y  $[h, x] \in A_2$ . En efecto, sea  $q : H \times X \rightarrow (H \times X)/\widehat{E}_H^p$  la función proyección, entonces  $q^{-1}(F)$  es un cerrado  $\widehat{m}^H$ -invariante de  $H \times X$ , pues si  $(f, z) \in q^{-1}(F) \cap (H \times X)_{g^{-1}}$ , entonces  $\widehat{m}_g^H(f, z) = (fg^{-1}, g \cdot z) \in q^{-1}(F)$ , para todo  $g \in G$ , ya que  $(f, z) \widehat{E}_H^p (fg^{-1}, g \cdot z)$ . Claramente  $(h, x) \notin q^{-1}(F)$ . Entonces por hipótesis, existen  $O_1$  y  $O_2$  abiertos disjuntos de  $H \times X$  tales que  $O_1$  u  $O_2$  son  $\widehat{m}^H$ -invariantes,  $q^{-1}(F) \subseteq O_1$  y  $(h, x) \in O_2$ . Definamos  $A_1 = q(O_1)$  y  $A_2 = q(O_2)$ . Entonces  $F \subseteq A_1$ ,  $[h, x] \in A_2$  y veamos que  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ . De hecho, si  $[u, w] \in A_1 \cap A_2$ , entonces  $(h_1, x_1) \widehat{E}_H^p (u, w) \widehat{E}_H^p (h_2, x_2)$ , para algunos  $(h_1, x_1) \in O_1$  y  $(h_2, x_2) \in O_2$ . Suponiendo que  $O_1$  es  $\widehat{m}^H$ -invariante, por lo anterior, tenemos que existe  $g_0 \in G$  tal que  $\widehat{m}_{g_0}^H(h_1, x_1) = (h_2, x_2) \in O_1$ , lo que contradice que  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ . Análogamente si  $O_2$  es  $\widehat{m}^H$ -invariante se contradice que  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ . Por lo tanto  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  y en consecuencia  $(H \times X)/\widehat{E}_H^p$  es regular.  $\square$

**Lema 4.4.8.** Sea  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ . Si  $X$  es un espacio compacto de Hausdorff y  $\widehat{E}_G^p$  es cerrada en  $(G \times X)^2$ , entonces  $X_g$  es cerrado, para todo  $g \in G$ .

*Demostración.* Sea  $g \in G$ . Veamos que  $X_g^c$  es abierto. En efecto, si  $x \in X_g^c$ , entonces para cada  $y \in X$  tenemos que  $((1, x), (g^{-1}, y)) \notin \widehat{E}_G^p$ . Como  $\widehat{E}_G^p$  es cerrada, entonces  $(\widehat{E}_G^p)^c$  es abierto; así, para cada  $y \in X$  existen  $N_y, M_y$  abiertos de  $G$  y  $V_y, W_y$  abiertos de  $X$  tales que  $(1, x) \in N_y \times V_y, (g^{-1}, y) \in M_y \times W_y$  y  $[(N_y \times V_y) \times (M_y \times W_y)] \cap \widehat{E}_G^p = \emptyset$ .

Por la compacidad de  $X$ , existen  $y_1, \dots, y_n \in X$  tales que  $X = \bigcup_{i=1}^n W_{y_i}$ . Sea  $V = \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$ . Entonces  $V$  es abierto y  $x \in V$ . Además, note que si existe  $z \in V \cap X_g$ , entonces

$$((1, z), (g^{-1}, g \cdot z)) \in (N_{y_k} \times V_{y_k}) \times (M_{y_k} \times W_{y_k}) \cap \widehat{E}_G^p.$$

para algún  $k \in \{1, \dots, n\}$ ; pero esto no es posible, luego  $V \subseteq X_g^c$ . Hemos encontrado un abierto  $V$  tal que  $x \in V \subseteq X_g^c$ , esto es,  $X_g^c$  es abierto y por lo tanto  $X_g$  es cerrado para todo  $g \in G$ .  $\square$

**Lema 4.4.9.** *Sea  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ . Entonces*

(i) *Si  $G * X$  es abierto;  $G^x$  es abierto, para cada  $x \in X$ .*

(ii) *Si  $G * X$  es cerrado;  $X_g$  es cerrado, para cada  $g \in G$ .*

*Demostración.*

(i) Sea  $x \in X$  y  $g \in G^x$ , entonces  $(g, x) \in G * X$ . Como  $G * X$  es abierto, existen  $U$  y  $V$  abiertos de  $G$  y  $X$  respectivamente, tales que  $(g, x) \in (U \times V) \subseteq (G * X)$ . Luego, para cada  $h \in U$ , se tiene que  $(h, x) \in G * X$ , esto es,  $h \in G^x$ . De modo que  $g \in U \subseteq G^x$ . Por lo tanto  $G^x$  es abierto.

(ii) Sea  $g \in G$ . Veamos que  $X_g^c$  es abierto. En efecto, sea  $x \in X_g^c$ , entonces  $(g, x) \notin G * X$ . Como  $G * X$  es cerrado, existen  $U$  y  $V$  abiertos de  $G$  y  $X$  respectivamente, tales que  $(g, x) \in U \times V$  y  $(U \times V) \cap (G * X) = \emptyset$ . Note que, para cada  $y \in V$ ,

$(g, y) \notin G * X$ , esto es,  $y \in X_g^c$ . Así,  $x \in V \subseteq X_g^c$ ; luego  $X_g^c$  es abierto y por lo tanto  $X_g$  es cerrado.  $\square$

El siguiente teorema establece condiciones suficientes para que  $X_G$  sea regular.

**Teorema 4.4.10.** *Sean  $H, G$  grupos topológicos, con  $G \subseteq H$  y  $X$  un espacio topológico regular. Suponga que  $m$  es una acción parcial continua de  $G$  en  $X$  tal que  $G * X$  es abierto. Sea  $\hat{m}^H$  la acción parcial de  $H$  en  $H \times X$ , definida en el Ejemplo 4.4.4. Entonces  $(H \times X)/\hat{E}_H^p$  es regular si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- (i)  $X_g$  es cerrado, para todo  $g \in G$ .
- (ii)  $X$  es un espacio métrico, localmente compacto y  $\hat{E}_G^p$  es cerrada en  $(G \times X)^2$ .
- (iii)  $X$  es un espacio compacto de Hausdorff y  $\hat{E}_G^p$  es cerrada en  $(G \times X)^2$ .

En particular,  $X_G$  es regular si se cumple alguna de las condiciones (i), (ii) o (iii).

*Demostración.* Por el Lema 4.4.8 sabemos que (iii)  $\Rightarrow$  (i), luego para probar el teorema basta considerar los casos (i) y (ii). Sean  $F$  un cerrado  $\hat{m}^H$ -invariante de  $H \times X$  y  $(h, x) \notin F$ . Por el Lema 4.4.7, para ver que  $(H \times X)/\hat{E}_H^p$  es regular, es suficiente probar que existen  $O_1$  y  $O_2$  abiertos disjuntos de  $H \times X$  tales que  $O_1$  es  $\hat{m}^H$ -invariante,  $(h, x) \in O_1$  y  $F \subseteq O_2$ . En efecto, como  $F$  es cerrado, existen  $U$  y  $N$  abiertos de  $X$  y  $H$  respectivamente, tales que  $1 \in N$ ,  $(h, x) \in hN \times U$  y  $(hN \times U) \cap F = \emptyset$ . Además, note que si  $w \in G \cdot (hN \times U) \cap F$ , entonces  $w \in F$  y  $w = \hat{m}^H(u, p)$ , para algún  $u \in G^p$  y  $p \in hN \times U$ , pero como  $F$  es  $\hat{m}^H$ -invariante, tenemos que  $p = (\hat{m}^H)^{-1}(u, w) \in F$ , lo cual es imposible. Por lo tanto

$$G \cdot (hN \times U) \cap F = \emptyset. \quad (4.8)$$

Por el Lema 4.4.3, existe  $L$  abierto de  $H$ , con  $1 \in L$  tal que  $L \cap G \subseteq N \cap G$  y  $x \in \text{int}(X^{L \cap G})$ . Note que  $M = L \cap N$  es un abierto de  $H$ , con  $1 \in M \subseteq N$  y

$M \cap G \subseteq L \cap G$ , luego  $X^{L \cap G} \subseteq X^{M \cap G}$ , de modo que  $x \in \text{int}(X^{L \cap G}) \subseteq \text{int}(X^{M \cap G})$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $M = N$ . Por otra parte, como  $G * X$  es abierto entonces  $G^x$  es abierto en  $G$  y como  $1 \in G^x$  y  $m$  es continua en  $(1, x)$ , existe  $N_1$  abierto simétrico de  $G$  y  $U_1$  abierto de  $X$  tales que  $(1, x) \in N_1 \times U_1$ ,  $N_1^2 \cap G \subseteq N \cap G$  y

$$\overline{m(N_1 \times U_1 \cap G * X)} \subseteq U. \quad (4.9)$$

Note además que  $X^{N \cap G} \subseteq X^{N_1^2 \cap G}$ , por lo tanto  $x \in \text{int}(X^{N_1^2 \cap G})$ . Sea  $N_2 \subseteq H$  un abierto simétrico tal que  $1 \in N_2$  y  $h^{-1}N_2^2h \subseteq N_1$ , en particular  $h^{-1}N_2h \subseteq N_1$ .

Definamos  $O_1 = G \cdot \left( N_2h \times \left( U_1 \cap \text{int}(X^{N_1^2 \cap G}) \right) \right)$ , entonces  $(h, x) \in O_1$  y  $O_1$  es un abierto  $\hat{m}^H$ -invariante, pues  $\hat{m}^H$  es abierta por el Lema 3.1.11.

Basta probar que para cada  $f \in F$  existe un abierto  $O_f$  tal que  $f \in O_f$  y  $O_1 \cap O_f = \emptyset$ , pues en tal caso el abierto  $O_2 = \bigcup_{f \in F} O_f$  cumple lo deseado. En efecto, sea  $f = (l, y) \in F$ . Consideremos los siguientes casos:

**Caso 1**  $lG \cap hN_1 = \emptyset$ . Notemos que  $N_2h \cap N_2lG = \emptyset$ , pues de lo contrario, existen  $b \in G$  y  $p, q \in N_2$  tales que  $qh = plb$ ; luego  $lb = p^{-1}qh \in N_2^2h \subseteq hN_1$ , lo cual contradice nuestra suposición. Definamos  $O_f = N_2l \times X$ . Entonces  $(l, y) \in O_f$  y si  $O_1 \cap O_f \neq \emptyset$ ; existen  $u \in U_1 \cap \text{int}(X^{N_1^2 \cap G})$ ,  $a \in G^u$  y  $p, q \in N_2$  tales que  $pha^{-1} = ql$ , lo cual contradice que  $N_2h \cap N_2lG = \emptyset$ . Por lo tanto,  $O_1 \cap O_f = \emptyset$ , como queríamos.

**Caso 2**  $lG \cap hN_1 \neq \emptyset$ . Sean  $g \in G$  y  $r \in N_1$  tales que  $lg^{-1} = hr$ .

**Subcaso 2a**  $g \in G^y$ . Entonces  $\hat{m}_g^H(l, y) \in F$  y por (4.8)  $\hat{m}_g^H(l, y) = (lg^{-1}, g \cdot y) \notin hN \times U$ . Como  $lg^{-1} = hr \in hN$ , tenemos que  $g \cdot y \notin U$ . Entonces por (4.9), existe un abierto  $V$  de  $g \cdot y$  tal que  $V \cap m(N_1^2 \times U_1 \cap G * X) = \emptyset$ . Note que el abierto  $O_f = hN_1g \times m_{g^{-1}}(V \cap X_g)$  contiene a  $(l, y)$  y es disjunto de  $O_1$ . Si  $O_1 \cap O_f \neq \emptyset$  existen  $u \in U_1 \cap \text{int}(X^{N_1^2 \cap G})$ ,  $a \in G^u$ ,  $v \in V \cap X_g$

y  $p \in N_2$  tales que  $pha^{-1} \in hN_1g$  y  $a \cdot u = g^{-1} \cdot v$ . En particular,

$$v \stackrel{AP1}{=} g \cdot (a \cdot u) \stackrel{AP2}{=} (ga) \cdot u = m(ga, u).$$

Como  $N_1$  es simétrico, tenemos que  $ga \in N_1h^{-1}N_2h \subseteq N_1^2$ , luego  $v \in V \cap m(N_1^2 \times U_1 \cap G * X) = \emptyset$ , lo cual es una contradicción.

**Subcaso 2b**  $g \in G \setminus G^y$ . Entonces  $y \in X_{g^{-1}}^c$ . Veamos los casos (i) y (ii) por separado.

(i) Supongamos que  $X_{g^{-1}}$  es abierto y cerrado, es suficiente probar que el abierto  $O_f = hN_1g \times X_{g^{-1}}^c$  es disjunto de  $O_1$ . Si  $O_1 \cap O_f \neq \emptyset$ , como en el caso anterior, existen  $u \in U_1 \cap \text{int}(X^{N_1^2 \cap G})$ ,  $a \in G^u$  y  $p \in N_2$  tales que  $pha^{-1} \in hN_1g$  y  $a \cdot u \notin X_{g^{-1}}$ . Como vimos en el caso anterior, tenemos que  $ga \in N_1^2$ . Entonces  $a \in g^{-1}N_1^2$ . Sea  $n_1 \in N_1^2$  tal que  $a = g^{-1}n_1$ . Notemos que  $n_1 \in G$  ya que  $a, g \in G$  y  $G$  es un grupo. Como  $u \in X^{N_1^2 \cap G} \cap X_{a^{-1}} \subseteq X_{n_1^{-1}} \cap X_{n_1^{-1}g}$ , por (ii) del Teorema 2.0.4 tenemos que  $n_1 \cdot u \in X_{n_1} \cap X_g$ . Por lo tanto  $a \cdot u \in X_{g^{-1}}$ , lo cual es una contradicción.

(ii) Supongamos que  $X$  es un espacio métrico, localmente compacto y  $\widehat{E}_G^p$  es cerrado. Primero veamos que existe un abierto  $W$  de  $X$  tal que  $y \in W$  y  $g \cdot (W \cap X_{g^{-1}}) \cap \overline{U} = \emptyset$ . Supongamos que no, y sea  $\{W_i\}_{i \in I}$  una base local de abiertos de  $y$ . Entonces para cada  $i \in I$ , existe  $y_i \in W \cap X_{g^{-1}}$  tal que  $g \cdot y_i \in \overline{U}$ . Como  $\overline{U}$  es compacto, supongamos, sin pérdida de generalidad que  $g \cdot y_i$  converge a  $z \in \overline{U}$  Entonces  $(1, y_i) \widehat{E}_G^p(g^{-1}, g \cdot y_i)$ , para cada  $i \in I$ . Como  $\widehat{E}_G^p$  es cerrada, tenemos que  $(1, y) \widehat{E}_G^p(g^{-1}, z)$  por lo tanto  $g \in G^y$ , lo cual es una contradicción.

Ahora, sea  $W$  un conjunto con las propiedades mencionadas anteriormente y consideremos el abierto  $O_f = hN_1g \times W$ . Veamos que  $O_1$  y  $O_f$  son disjuntos. En efecto, si no lo fueran, como en el caso (i), existen  $u \in$

$U_1 \cap \text{int} \left( X^{N_1^2 \cap G} \right)$ ,  $a \in G^u$  y  $p \in N_2$  tales que  $pha^{-1} \in hN_1g$  y  $a \cdot u \in W$ . Como vimos anteriormente  $ga \in N_1^2$ . Sea  $n_1 \in N_1^2$  tal que  $a = g^{-1}n_1$ , entonces  $n_1 \in G$  y como  $u \in X^{N_1^2 \cap G} \cap X_{a^{-1}} \subseteq X_{n_1^{-1}} \cap X_{n_1^{-1}g}$ , tenemos que  $n_1 \cdot u \in X_{n_1} \cap X_g$ . Por lo tanto  $a \cdot u \in X_{g^{-1}}$  y por (4.9),  $g \cdot (a \cdot u) = n_1 \cdot u \in U$ , lo cual contradice la escogencia de  $W$ .

En particular, si  $H = G$ , por el Teorema 4.3.4, tenemos que  $X_G$  es regular si se cumple alguna de las condiciones (i), (ii), o (iii).  $\square$

El siguiente teorema establece condiciones suficientes para que  $X_G$  sea Polaco.

**Teorema 4.4.11.** *Sea  $m$  una acción parcial continua de un grupo separable y metrizable  $G$  en un espacio separable y metrizable  $X$  tal que  $G * X$  es abierto. Entonces  $X_G$  es metrizable si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- (i)  $G * X$  es cerrado.
- (ii)  $X$  es localmente compacto y  $\widehat{E}_G^p$  es cerrada en  $(G \times X)^2$ .

Además, si  $G$  y  $X$  son Polacos, entonces  $X_G$  es Polaco.

*Demostración.*

- (i) Supongamos que  $G * X$  es cerrado. Por el Lema 4.3.5  $X_G$  es de Hausdorff y por lo tanto  $T_1$ . Además, por el Lema 4.4.9, tenemos que  $X_g$  es cerrado, para cada  $g \in G$ . De modo que, haciendo  $H = G$  en el Teorema 4.4.10, tenemos que  $(G \times X)/\widehat{E}_G^p$  es regular, pero por el Teorema 4.3.4  $(G \times X)/\widehat{E}_G^p = X_G$ . Luego por el Teorema 4.4.1 tenemos que  $X_G$  es metrizable.
- (ii) Supongamos que  $X$  localmente compacto y  $\widehat{E}_G^p$  es cerrada en  $(G \times X)^2$ . Análogamente al ítem anterior, por Teorema 4.4.10, tenemos que  $X_G$  es regular y como  $\widehat{E}_G^p$  es cerrada por los Lemas 4.3.4 y 1.1.5,  $X_G$  es Hausdorff y por lo tanto  $T_1$ . De modo que, por el Teorema 4.4.1,  $X_G$  es metrizable.

Si además  $G$  y  $X$  son Polacos, por el Teorema 4.4.1,  $X_G$  es Polaco.  $\square$

# Capítulo 5

## Teoremas de Effros para acciones parciales

Sea  $a : G \times X \rightarrow X$  una acción continua de un grupo Polaco  $G$  en un espacio Polaco  $X$ . El Teorema de Effros [11, Teorema 2.1] establece que la órbita de un punto  $x \in X$  es Polaca, si y solo si, es homeomorfa al espacio cociente de las clases laterales  $G/G_x$  (donde  $G_x$  es el estabilizador de  $x$ ). La primera prueba de este resultado se debe a Effros [11]; sin embargo en [4, 15, 18, 24], se han presentado otras pruebas de este resultado que es fundamental para la clasificación de las relaciones de equivalencia de órbita [15].

Nuestro objetivo en este capítulo es presentar una versión del Teorema de Effros [11, Teorema 2.1] en el contexto de acciones parciales.

**Definición 5.0.1.** Sea  $m$  una acción parcial de un grupo  $G$  en un conjunto  $X$ . Para cada  $x \in X$ , el **estabilizador** de  $x$ , denotado por  $G_x$  es el conjunto  $\{g \in G^x : g \cdot x = x\}$ .

**Notación 5.0.2.** Para el caso de acciones globales,  $G \cdot x$  denota la órbita de  $x \in X$ ;  $E_G$ , la relación de equivalencia de órbita definida en (4.5) y  $X/E$ , el respectivo espacio órbita inducido por  $E_G$ .

Recordemos el enunciado del Teorema de Effros para acciones globales, el cual dividimos en dos Teoremas como se presenta en [15].

**Teorema 5.0.3.** [15, Teorema 3.4.4] *Sea  $a$  una acción de un grupo Polaco  $G$  en un espacio Polaco  $X$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i)  $E_G$  es  $G_\delta$ .
- (ii) Cada órbita  $G \cdot x$  es  $G_\delta$ .
- (iii)  $X/G$  es  $T_0$ , esto es, para cualesquiera  $p, q \in X/G$  con  $p \neq q$ ,  $\overline{\{p\}} \neq \overline{\{q\}}$ .

**Teorema 5.0.4.** [15, Teorema 3.2.4] *Sea  $a$  una acción de un grupo Polaco  $G$  en un espacio Polaco  $X$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes para cada  $x \in X$ :*

- (i) La función canónica  $G/G_x \ni gG_x \mapsto g \cdot x \in G \cdot x$  es un homeomorfismo;
- (ii)  $G \cdot x$  es no-magro en su topología relativa;
- (iii)  $G \cdot x$  es  $G_\delta$  en  $X$ .

## 5.1. Principio de la función abierta para acciones parciales

En [24], Van Mill desarrolla el Principio de la función abierta para acciones globales. En [17], adaptando los resultados presentados en [24], generalizamos el Principio de la función abierta para acciones parciales, el cual es pieza clave para conseguir una demostración práctica y sencilla de los Teoremas de Effros en este contexto. En esta sección veremos los detalles de los resultados presentados en [17], sobre esta generalización.

**Definición 5.1.1.** Una acción parcial  $m$  de un grupo  $G$  en un espacio  $X$  es **transitiva**, si dados  $x, y \in X$ , existe  $g \in G$  tal que  $x \in X_{g^{-1}}$  y  $g \cdot x = y$  o equivalentemente si  $G^x \cdot x = X$ , para cada  $x \in X$ .

El Principio de la función abierta para acciones parciales enuncia lo siguiente:

**Teorema 5.1.2.** Sean  $G$  un grupo Polaco y  $m$  una acción parcial continua y transitiva de  $G$  en un espacio de Hausdorff y no magro  $X$ . Suponga que  $G^y$  es abierto en  $G$ , para algún  $y \in X$ . Entonces la función  $m^x : G^x \ni g \mapsto g \cdot x \in G^x \cdot x = X$  es abierta, para todo  $x \in X$ .

Para demostrar el Teorema 5.1.2 debemos desarrollar primero algunos lemas axiliares.

**Notación 5.1.3.** Para cada  $U \subseteq G$  y  $x \in X$ , denotamos  $U^x = U \cap G^x = \{h \in U : \exists h \cdot x\}$ .

**Lema 5.1.4.** Sean  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$  y  $U, F \subseteq G$ . Entonces  $\left(\bigcup_{g \in F} gU^x\right) \cdot x = \bigcup_{g \in F} g \cdot (U^x \cdot x)$ , para cada  $x \in X$ .

*Demostración.* Sea  $x \in X$  y  $U, F \subseteq G$ . Primero veamos que para cada  $g \in G$ , se cumple que:

$$g \cdot (U^x \cdot x) = (gU^x)^x \cdot x. \quad (5.1)$$

En efecto, si  $z \in g \cdot (U^x \cdot x)$ , entonces existe  $h \in U^x$  tal que  $z = g \cdot (h \cdot x)$  y por AP2,  $z = (gh) \cdot x \in (gU^x)^x \cdot x$ ; luego  $g \cdot (U^x \cdot x) \subseteq (gU^x)^x \cdot x$ . Recíprocamente, si  $z \in (gU^x)^x \cdot x$ , existe  $h \in (gU^x)^x$  tal que  $z = h \cdot x$ . Pero  $h = gu$ , para algún  $u \in U^x$  tal que  $\exists(gu) \cdot x$ , esto es  $x \in X_{u^{-1}} \cap X_{(gu)^{-1}}$ ; por (ii) del Teorema 2.0.4,  $u \cdot x \in X_u \cap X_{g^{-1}}$ ; esto es  $\exists g \cdot (u \cdot x)$ . Luego  $z = h \cdot x = (gu) \cdot x = g \cdot (u \cdot x) \in g \cdot (U^x \cdot x)$ , y por lo tanto  $g \cdot (U^x \cdot x) \supseteq (gU^x)^x \cdot x$ .

Ahora, observe que

$$\left( \bigcup_{g \in F} gU^x \right)^x = \left( \bigcup_{g \in F} gU^x \right) \cap G^x = \bigcup_{g \in F} ((gU^x) \cap G^x) = \bigcup_{g \in F} (gU^x)^x \quad (5.2)$$

y además,

$$\left( \bigcup_{g \in F} (gU^x)^x \right) \cdot x = m^x \left( \bigcup_{g \in F} (gU^x)^x \right) = \bigcup_{g \in F} m^x ((gU^x)^x) = \bigcup_{g \in F} ((gU^x)^x) \cdot x. \quad (5.3)$$

Así, por (5.1), (5.2) y (5.3) se tiene que

$$\left( \bigcup_{g \in F} gU^x \right)^x \cdot x = \bigcup_{g \in F} g \cdot (U^x \cdot x).$$

□

**Notación 5.1.5.** En virtud del Teorema 1.3.10, en adelante  $\{U_n\}_n$  denotará una base numerable de vecindades abiertas del elemento neutro  $1 \in G$ , que satisface las siguientes propiedades:

- $U_n$  es simétrico ( $U_n = U_n^{-1}$ ), para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $U_1 = G$ ;
- $U_{n+1} \subseteq U_{n+1}^2 \subseteq U_n$ .

**Observación 5.1.6.** Si  $m$  es una acción parcial topológica transitiva de un grupo  $G$  en un espacio  $X$  tal que  $G^{x_0}$  es abierto, para algún  $x_0 \in X$ , entonces para cada  $x \in X$ , existe  $g \in G^{x_0}$  tal que  $x = g \cdot x_0$ . Así, por el Lema 3.2.7,  $G^x = G^{x_0}g^{-1}$ . Por lo tanto  $G^x$  es abierto, para todo  $x \in X$ .

**Lema 5.1.7.** *Sea  $m$  una acción parcial continua de  $G$  en  $X$ . Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in X$  tal que  $G^x$  es abierto, se cumple que dados  $V$  un abierto de  $X$  y  $z \in V \cap U_n^x \cdot x$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $U_m^z \cdot z \subseteq V \cap U_n^x \cdot x$ .*

*Demostración.* Como  $G^x$  es abierto en  $G$ ,  $U_n^x = U_n \cap G^x$  es un abierto de  $G$ , con  $1 \in U_n^x$ . Además, como  $z \in V \cap U_n^x \cdot x$ , entonces  $z = h \cdot x$ , para algún  $h \in U_n^x$ ; esto es,  $z = m^x(h)$ . Sea  $E = (m^x)^{-1}(V)$ , como  $m$  es continua, por el Teorema 3.2.2 y la Observación 5.1.6,  $m^x$  es continua, luego  $E$  es un abierto de  $G^x$  y por lo tanto de  $G$ , tal que  $h \in E$ . Note que  $Uh^{-1} \cap U_n^x h^{-1}$  es un abierto de  $G$  que contiene a 1 y como  $\{U_n\}_n$  es una base de vecindades de 1, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $U_m \subseteq Uh^{-1} \cap U_n^x h^{-1}$ . Veamos que  $U_m^z \cdot z \subseteq V \cap U_n^x \cdot x$ . En efecto, sea  $p \in U_m^z \cdot z$ , entonces existe  $g \in U_m^z$  tal que  $p = g \cdot z$ . Observe que, como  $g \in U_m^z \subseteq Uh^{-1} \cap U_n^x h^{-1}$ , entonces  $gh \in E \cap U_n^x$  y además

$$p = g \cdot z = g \cdot (h \cdot x) \stackrel{AP2}{=} (gh) \cdot x = m_x(gh).$$

Por lo tanto  $p \in V \cap U_n^x \cdot x$ . □

**Lema 5.1.8.** *Sean  $G$  un grupo metrizable y separable y  $m$  una acción parcial topológica transitiva de  $G$  en un espacio no magro  $X$ . Sea  $x \in X$  tal que  $G^x$  es abierto en  $G$ . Entonces  $U_n^x \cdot x$  no es magro en  $X$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Supongamos (por contradicción) que  $U_n^x \cdot x$  es magro en  $X$ . Sabemos que  $\{gU_n^x\}_{g \in G}$  es un recubrimiento abierto de  $G$ . Además, como  $G$  es metrizable y separable, entonces es Lindelöf. Por lo tanto  $G$  admite un subrecubrimiento numerable; esto es, existe  $F$  subconjunto numerable de  $G$  tal que  $G = \bigcup_{g \in F} gU_n^x$ . Por el Lema 5.1.4 y la transitividad de  $m$ , tenemos que

$$X = G^x \cdot x = \bigcup_{g \in F} g \cdot (U_n^x \cdot x).$$

Ahora, para cada  $g \in F$ , como  $X_{g^{-1}}$  es abierto, por (ii) de la Proposición 1.2.4 tenemos que el conjunto  $(U_n^x \cdot x) \cap X_{g^{-1}}$  es magro en  $X_{g^{-1}}$ , pero  $m_g : X_{g^{-1}} \rightarrow X_g$  es un homeomorfismo, luego  $m_g((U_n^x \cdot x) \cap X_{g^{-1}}) = g \cdot (U_n^x \cdot x)$  es magro en  $X_g$  y por

(i) de la Proposición 1.2.4 es magro en  $X$ . De modo que  $X$  es magro, por ser unión numerable de conjuntos magros, lo cual es una contradicción.  $\square$

**Proposición 5.1.9.** *Suponga que  $m$  es una acción parcial continua y transitiva de un grupo metrizable y separable  $G$  en un espacio no magro  $X$ . Sea  $x \in X$  tal que  $G^x$  es abierto en  $G$ . Entonces  $U_n^x \cdot x$  es nunca magro en  $X$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . En particular  $X$  es Baire.*

*Demostración.* Sea  $n \in \mathbb{N}$ , debemos ver que todo abierto relativo de  $U_n^x \cdot x$ , no vacío, no es magro en  $X$ ; esto es, que para cada abierto  $V$  de  $X$  tal que  $V \cap U_n^x \cdot x \neq \emptyset$ , el conjunto  $V \cap U_n^x \cdot x$  no es magro en  $X$ . En efecto, sea  $z \in V \cap U_n^x \cdot x$ , por el Lema 5.1.7, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $U_m^z \cdot z \subseteq V \cap U_n^x \cdot x$ . Además, por la Observación 5.1.6 tenemos que  $G^z$  es abierto en  $G$ , luego por el Lema 5.1.8,  $U_m^z \cdot z$  no es magro en  $X$ . Por lo tanto  $V \cap U_n^x \cdot x$  no es magro en  $X$  (si lo fuera todo subconjunto de  $V \cap U_n^x \cdot x$  sería magro en  $X$ ). En consecuencia,  $U_n^x \cdot x$  es nunca magro en  $X$ . Finalmente, como  $U_1 = G$  y  $X = G^x \cdot x$ , entonces  $X$  es nunca magro, es decir, es Baire.  $\square$

**Proposición 5.1.10.** *Suponga que  $m$  es una acción parcial continua y transitiva de un grupo metrizable y separable  $G$  en un espacio no magro  $X$ . Sea  $x \in X$  tal que  $G^x$  es abierto en  $G$ . Entonces  $\text{int}(\overline{U_n^x \cdot x})$  es denso en  $\overline{U_n^x \cdot x}$  y  $x \in \text{int}(\overline{U_n^x \cdot x})$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Por la Proposición 5.1.9,  $U_n^x \cdot x$  es nunca magro; luego, por (iii) de la Proposición 1.2.19 se tiene que  $\text{int}(\overline{U_n^x \cdot x})$  es denso en  $\overline{U_n^x \cdot x}$ .

Por otra parte, sea  $V$  un abierto no vacío de  $X$  tal que  $V \subseteq \overline{U_{n+1}^x \cdot x}$ , luego  $V \cap U_{n+1}^x \cdot x \neq \emptyset$ , entonces existe  $h \in U_{n+1}^x$  tal que  $h \cdot x \in V$ . Observe que  $V \cap X_h \subseteq \overline{U_{n+1}^x \cdot x} \cap X_h$ . Entonces,

$$\begin{aligned} x \in m_{h^{-1}}(V \cap X_h) &\subseteq m_{h^{-1}}(\overline{U_{n+1}^x \cdot x} \cap X_h) \\ &\subseteq \overline{m_{h^{-1}}((U_{n+1}^x \cdot x) \cap X_h)} \\ &= \overline{\{(h^{-1}g) \cdot x : g \in U_{n+1}^x\}} \\ &\subseteq \overline{U_n^x \cdot x}, \end{aligned}$$

donde la segunda contención se tiene por la Proposición 1.1.3 y la última por el hecho de que  $U_{n+1}^2 \subseteq U_n$ . Finalmente, como la función  $m_{h^{-1}} : X_h \ni x \mapsto h^{-1} \cdot x \in X_{h^{-1}}$  es homeomorfismo y los conjuntos  $X_h$  y  $X_{g^{-1}}$  son abiertos entonces  $m_{h^{-1}}(V \cap X_h)$  es un abierto de  $X$  que contiene a  $x$ ; por lo tanto  $x \in \text{int}(\overline{U_n^x \cdot x})$ .  $\square$

**Observación 5.1.11.** Sea  $m$  una acción parcial continua de un grupo Polaco  $G$  en un espacio  $X$  y  $x \in X$ . Si  $G^x$  es abierto en  $G$ , entonces  $U_n^x$  es un abierto de  $G$  y por lo tanto es Polaco. Además la función  $m^x$  es continua, entonces  $m^x(U_n^x) = U_n^x \cdot x$  es analítico.

**Proposición 5.1.12.** *Suponga que  $m$  es una acción parcial continua y transitiva de un grupo Polaco  $G$  en un espacio de Hausdorff y no magro  $X$ . Sea  $x \in X$  tal que  $G^x$  es abierto en  $G$ . Entonces  $\text{int}(\overline{U_{n+1}^x \cdot x}) \subseteq U_n^x \cdot x$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Sea  $z \in V = \text{int}(\overline{U_{n+1}^x \cdot x})$ ,  $W = \text{int}(\overline{U_{n+1}^z \cdot z})$  y  $E = V \cap W$ . Entonces  $E$  es una vecindad abierta de  $z$  y como  $X$  es Baire (por la Proposición 5.1.9), entonces  $E$  no es magro en  $X$  (por el Teorema 1.2.12) y por lo tanto no es magro en si mismo (por (i) de la Proposición 1.2.4). Por otra parte,  $E \subseteq \overline{U_{n+1}^x \cdot x}$ , entonces  $U_{n+1}^x \cdot x \cap E$  es denso en  $E$ . Análogamente  $U_{n+1}^z \cdot z \cap E$  es denso en  $E$ . Además, por la Observación 5.1.11 y la Proposición 1.2.19,  $U_{n+1}^x \cdot x \cap E$  y  $U_{n+1}^z \cdot z \cap E$  son analíticos y por las Proposiciones 5.1.9 y 1.2.19  $U_{n+1}^x \cdot x \cap E$  y  $U_{n+1}^z \cdot z \cap E$  son nunca magros en  $E$ . Note que  $E \subseteq X$  es Hausdorff, luego por el ítem (iii) de la Proposición 1.2.23, existe  $y \in (U_{n+1}^x \cdot x \cap E) \cap (U_{n+1}^z \cdot z \cap E)$ , esto es, existen  $g \in U_{n+1}^x$  y  $h \in U_{n+1}^z$  tales que  $g \cdot x = y = h \cdot z$ . Sea  $f = h^{-1}g$ , entonces  $f \cdot x = z$ . Note que  $f \in U_{n+1}U_{n+1} \subseteq U_n$  y  $\exists f \cdot x$ , luego  $f \in U_n^x$ . Por lo tanto  $z \in U_n^x \cdot x$ .  $\square$

**Lema 5.1.13.** *Suponga que  $m$  es una acción parcial continua y transitiva de un grupo Polaco  $G$  en un espacio de Hausdorff no magro  $X$ . Sea  $x \in X$  tal que  $G^x$  es abierto en  $G$ . Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que:*

(i)  $x \in \text{int}(U_n^x \cdot x)$ .

(ii)  $U_n^x \cdot x$  es una vecindad abierta de  $x$ .

*Demostración.*

(i) Por la Proposición 5.1.12,  $\text{int}(\overline{U_{n+1}^x \cdot x}) \subseteq U_n^x \cdot x$ , luego  $\text{int}(\overline{U_{n+1}^x \cdot x}) \subseteq \text{int}(U_n^x \cdot x)$ . Además, por la Proposición 5.1.10,  $x \in \text{int}(\overline{U_{n+1}^x \cdot x})$ . Por lo tanto  $x \in \text{int}(U_n^x \cdot x)$ .

(ii) Veamos que  $U_n^x \cdot x$  es abierto en  $X$ . Sea  $z \in U_n^x \cdot x$ , por el Lema 5.1.7, tomando  $V = X$ , tenemos que existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $U_m^z \cdot z \subseteq X \cap U_n^x \cdot x$ . Además por la Observación 5.1.6  $G^z$  es abierto, luego por el ítem (i),  $z \in \text{int}(U_m^z \cdot z)$ . Entonces

$$z \in \text{int}(U_m^z \cdot z) \subseteq U_m^z \cdot z \subseteq U_n^x \cdot x,$$

por lo tanto  $U_n^x \cdot x$  es abierto en  $X$ . □

Ahora estamos listos para demostrar el Principio de la función abierta para acciones parciales.

*Demostración.* (del Teorema 5.1.2) Sean  $x \in X$  y  $V$  un abierto no vacío de  $G^x$ , entonces  $V = U^x$ , para algún  $U$  abierto no vacío de  $G$ . Veamos que  $m^x(V) = m^x(U^x) = U^x \cdot x$  es un abierto de  $G^x \cdot x$ . En efecto, sea  $z \in U^x \cdot x$ , entonces  $z = g \cdot x$ , para algún  $g \in U^x$ . Como  $U$  es un abierto de  $G$ , existen  $O_1$  y  $O_g$  vecindades abiertas de 1 y  $g$  respectivamente tales que  $O_1 O_g \subseteq U$ , luego  $O_1^z g \subseteq U^x$ . Como  $\{U_n\}_n$  es una base de vecindades de 1, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $U_n^z \subseteq O_1^z$ . Note que  $z \in U_n^z \cdot z$  y

$$z \in U_n^z \cdot z \subseteq O_1^z \cdot z = O_1^z \cdot (g \cdot x) = (O_1^z g) \cdot x \subseteq U^x \cdot x.$$

Por la Observación 5.1.6 tenemos que  $G^x$  es abierto, así por el Lema 5.1.13,  $U_n^z \cdot z$  es abierto, luego  $U^x \cdot x$  es abierto. □

**Ejemplo 5.1.14. Transformaciones de Möbius.** Sea  $m$  la acción parcial topológica del grupo  $G = \text{GL}(2, \mathbb{R})$  en  $X = \mathbb{R}$  definida en el Ejemplo 3.1.5. En el Ejemplo

3.2.8 vimos que  $m$  es continua. Además, note que el conjunto

$$G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G : d \neq 0 \right\},$$

es abierto y para cada par de puntos  $x, y \in \mathbb{R}$  tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & y - x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = y,$$

por lo tanto  $m$  es transitiva. Así, por el Teorema 5.1.2 concluimos que la función

$$m^x : G^x \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{ax + b}{cx + d} \in \mathbb{R},$$

es abierta, para cada  $x \in \mathbb{R}$ .

El Principio de la función abierta para acciones parciales, implica una versión el Teorema de la función abierta del análisis funcional, como se indica en el siguiente resultado basado en [6, Teorema 72].

**Teorema 5.1.15. Teorema de función abierta.** Sean  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{X}$  espacios de Banach, con  $\mathcal{B}$  separable y  $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{X}$  un operador lineal, continuo y sobreyectivo. Entonces  $T$  es una función abierta.

*Demostración.* Como  $\mathcal{B}$  es un espacio de Banach separable, podemos verlo como un grupo topológico, con la operación de grupo dada por la suma del espacio vectorial y la topología inducida por la métrica definida por la norma; en particular  $\mathcal{B}$  es un grupo Polaco. Además por el Teorema de Categoría de Baire,  $\mathcal{X}$  es un espacio de Baire y por lo tanto no es magro. Consideremos la acción de  $\mathcal{B}$  en  $\mathcal{X}$  definida por:

$$a : \mathcal{B} \times \mathcal{X} \ni (b, x) = T(b) + x \in \mathcal{X}.$$

Note que, como  $T$  es sobreyectivo, la órbita de cada  $x \in \mathcal{X}$  está dada por

$$\mathcal{B} \cdot x = \{a(b, x) = T(b) + x : b \in \mathcal{B}\} = T(\mathcal{B}) + x = \mathcal{X}.$$

Luego,  $a$  es transitiva. Finalmente por el Teorema 5.1.2, la función  $a^x : \mathcal{B} \ni b \mapsto a(b, x) = T(b) + x \in \mathcal{X}$ , es abierta, para todo  $x \in \mathcal{X}$ . En particular, tomando  $x = 0$  (el elemento neutro de la suma en  $\mathcal{B}$ ) tenemos que

$$T = a^0 : \mathcal{B} \ni b \mapsto a(b, 0) = T(b) + 0 \in \mathcal{X},$$

es abierta. □

## 5.2. Teorema de Effros I

En esta sección estudiamos una versión del Teorema 5.0.3 para acciones parciales, cuya prueba es una adaptación de la presentada en [15], para el caso global.

**Lema 5.2.1.** *Sea  $m$  una acción parcial de  $G$  en  $X$ ,  $E_G^p$  la relación de equivalencia de órbita definida en (4.5) y  $\pi_X : X \ni x \mapsto G^x \cdot x \in X/E_G^p$  la función proyección. Entonces  $\overline{\pi_X^{-1}(z)} = \pi_X^{-1}(\overline{\{z\}})$ , para cada  $z \in X/E_G^p$ ,*

*Demostración.* Como  $\pi_X$  es continua,  $\pi_X^{-1}(\overline{\{z\}})$  es cerrado, entonces  $\overline{\pi_X^{-1}(z)} \subseteq \pi_X^{-1}(\overline{\{z\}})$ .

Recíprocamente, sea  $F = \overline{\pi_X^{-1}(z)}$ . Como  $\pi_X$  es sobreyectiva,  $z = G^x \cdot x$ , para algún  $x \in X$ . Así,  $F = \overline{\pi_X^{-1}(z)} = \overline{G^x \cdot x}$ . Note que, como  $m_g$  es continua, para cada  $g \in G$ , por el Lema 1.1.3 tenemos que

$$g \cdot F = m_g(\overline{G^x \cdot x} \cap X_{g^{-1}}) \subseteq \overline{m_g(G^x \cdot x \cap X_{g^{-1}})} \subseteq \overline{G^x \cdot x} = F.$$

Luego  $F$  es  $m$ -invariante. De manera que, por lo visto en (4.7),

$$\pi_X^{-1}(\pi_X(F)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot F = F.$$

es cerrado y por definición de la topología cociente  $\pi_X(F)$  es cerrado. Como  $z \in \pi_X(F)$ , entonces  $\overline{\{z\}} \subseteq \pi_X(F)$ . Por lo tanto

$$\pi_X^{-1}(\overline{\{z\}}) \subseteq \pi_X^{-1}(\pi_X(F)) = F.$$

□

**Lema 5.2.2.** *Sea  $G$  un grupo topológico y  $X$  un espacio Polaco. Entonces  $X/E_G^p$  es segundo numerable.*

*Demostración.* En particular,  $X$  es metrizable y separable, entonces por el item (ii) del Teorema 1.1.7 es segundo numerable, esto es, existe una base numerable  $\{A_n\}_n$  para  $X$ . Por el Lema 4.3.2,  $\{\pi_X(A_n)\}_n$  es una familia de abiertos en  $X/E_G^p$ . Sea  $y \in X$  y  $U$  un abierto de  $X/E_G^p$  tal que  $\pi_X(y) \in U$ . Entonces  $\pi_X^{-1}(U)$  es abierto en  $X$  que contiene a  $y$ , luego existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $y \in A_n \subseteq \pi_X^{-1}(U)$ . De modo que,  $\pi_X(y) \in \pi_X(A_n) \subseteq U$ . Por lo tanto,  $\{\pi_X(A_n)\}_n$  es una base numerable de  $X/E_G^p$ , esto es,  $X/E_G^p$  es segundo numerable. □

**Lema 5.2.3.** *Sean  $G$  un grupo topológico actuando parcialmente en un espacio  $X$  y  $x, y \in X$ . Si  $X/E_G^p$  es  $T_0$ , entonces*

$$(x, y) \in E_G^p \iff (\forall A \subseteq X/E_G^p) (x \in \pi_X^{-1}(A) \iff y \in \pi_X^{-1}(A)).$$

*Demostración.* Sea  $A \subseteq X/E_G^p$  y suponga que  $(x, y) \in E_G^p$ , entonces  $\pi_X(x) = \pi_X(y)$ .

Luego,

$$x \in \pi_X^{-1}(A) \iff \pi_X(x) = \pi_X(y) \in A \iff y \in \pi_X^{-1}(A).$$

Recíprocamente, (por contradicción) supongamos que  $(x, y) \notin E_G^p$ , entonces  $\pi_X(x) \neq \pi_X(y)$ . Como  $X/E_G^p$  es  $T_0$ , existe  $U$  abierto de  $X/E_G^p$  tal que  $\pi_X(x) \in U$  y  $\pi_X(y) \notin U$  o  $\pi_X(y) \in U$  y  $\pi_X(x) \notin U$ . Pero si  $\pi_X(x) \in U$ ,  $x \in \pi_X^{-1}(U)$  y por hipótesis  $y \in \pi_X^{-1}(U)$ , esto implica que  $\pi_X(y) \in U$ . Lo cual es una contradicción. Análogamente, si  $\pi_X(y) \in U$  llegamos a una contradicción. Por lo tanto  $(x, y) \in E_G^p$ .  $\square$

**Teorema 5.2.4.** *Sea  $G$  un grupo Polaco y  $m$  una acción parcial continua de  $G$  en un espacio Polaco  $X$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i)  $E_G^p$  es  $G_\delta$ ;
- (ii) La órbita  $G^x \cdot x$  es  $G_\delta$  en  $X$ , para cada  $x \in X$ ;
- (iii)  $X/E_G^p$  es  $T_0$ . Esto es,  $\overline{\{z\}} \neq \overline{\{w\}}$ , para cualesquiera  $z, w \in X/E_G^p$  con  $z \neq w$ .

*Demostración.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Observe que  $y \in G^x \cdot x$ , si y solo si,  $(x, y) \in E_G^p$ . Luego

$$G^x \cdot x = p_2(E_G^p \cap (\{x\} \times X)),$$

donde  $p_2 : X^2 \ni (x, y) \mapsto y \in X$  es la proyección en la segunda coordenada. De modo que por el Ejemplo 1.2.3 y el ítem (v) de la Proposición 1.2.2,  $G^x \cdot x$  es  $G_\delta$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Suponga que  $G^x \cdot x$  es  $G_\delta$  en  $X$ , para cada  $x \in X$ . Sean  $z, w \in X/E_G^p$  tales que  $z \neq w$ . Suponga que  $\overline{\{z\}} = \overline{\{w\}}$ . Entonces por el Lema 5.2.1,

$$\overline{\pi_X^{-1}(z)} = \pi_X^{-1}(\overline{\{z\}}) = \pi_X^{-1}(\overline{\{w\}}) = \overline{\pi_X^{-1}(w)} =: \mathcal{C}$$

Entonces por el Ejemplo 1.2.3 y el ítem (i) del Teorema 1.2.8,  $\mathcal{C}$  es Polaco. Note que  $\pi_X^{-1}(z)$  y  $\pi_X^{-1}(w)$  son órbitas  $G_\delta$  densos en  $\mathcal{C}$  y por el Teorema de Categoría de Baire 1.2.14, son comagros en  $\mathcal{C}$ . Así,  $\pi_X^{-1}(z) \cap \pi_X^{-1}(w) \neq \emptyset$  y esto contradice que  $z \neq w$ . Por lo tanto  $\overline{\{z\}} \neq \overline{\{w\}}$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Por el Lema 5.2.2 existe  $\{U_n\}_n$  una base numerable de  $X/E_G^p$ . Entonces, por el Lema 5.2.3  $\{\pi_X^{-1}(U_n)\}_n$  es una familia numerable de abiertos en  $X$  que separa clases, es decir, tal que

$$(x, y) \in E_G^p \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) (x \in \pi_X^{-1}(U_n) \Leftrightarrow y \in \pi_X^{-1}(U_n)).$$

Observe que

$$\begin{aligned} E_G^p &= \{(x, y) \in X^2 : (\forall n \in \mathbb{N}) (x \in \pi_X^{-1}(U_n) \Leftrightarrow y \in \pi_X^{-1}(U_n))\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) \in X^2 : x \in \pi_X^{-1}(U_n) \Leftrightarrow y \in \pi_X^{-1}(U_n)\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [(\pi_X^{-1}(U_n) \times \pi_X^{-1}(U_n)) \cup ((\pi_X^{-1}(U_n))^c \times \pi_X^{-1}(U_n))^c] \end{aligned}$$

Pero  $\pi_X^{-1}(U_n) \times \pi_X^{-1}(U_n)$  es un abierto de  $X^2$  y  $(\pi_X^{-1}(U_n))^c \times \pi_X^{-1}(U_n)^c$  es un cerrado de  $X^2$ , luego por el Ejemplo 1.2.3 y la Proposición 1.2.2,

$$[(\pi_X^{-1}(U_n) \times \pi_X^{-1}(U_n)) \cup ((\pi_X^{-1}(U_n))^c \times \pi_X^{-1}(U_n))^c]$$

es un  $G_\delta$  y por lo tanto  $E_G^p$  es  $G_\delta$ . □

### 5.3. Teorema de Effros II

Ahora presentamos una versión del Teorema 5.0.4 para acciones parciales que llamaremos Teorema de Effros II. Los resultados que desarrollamos a continuación, aparecen en [17].

**Lema 5.3.1.** *Sea  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ ;  $\{(\mu, X_G), \iota\}$  su globalización;  $x \in X$  y  $h, g \in G$ . Entonces*

- (i)  $G^x G_x = G^x$ .
- (ii)  $G_x$  es un subgrupo de  $G$ .
- (iii)  $G_x = G_{\iota(x)}$ , donde  $G_{\iota(x)}$  es el estabilizador de  $\iota(x)$  respecto a  $\mu$ .
- (iv) Si  $h \in G^x$  y  $h^{-1}g \in G_x$ , se tiene que  $g \in G^x$ .

*Demostración.*

- (i) Claramente  $G^x \subseteq G^x G_x$ , pues  $1 \in G_x$ . Recíprocamente si  $z \in G^x G_x$ , entonces  $z = gh$ , con  $g \in G^x$  y  $h \in G_x$ , esto es  $\exists g \cdot x, \exists h \cdot x$  y  $h \cdot x = x$ . Luego  $g \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \stackrel{AP2}{=} (gh) \cdot x$ , de modo que  $z = gh \in G^x$ ; por lo tanto  $G^x G_x \subseteq G^x$ .
- (ii) Sean  $x \in X$  y  $g, h \in G_x$ , entonces  $g \cdot x = x$  y  $h \cdot x = x$ . Por AP1,  $x = h^{-1} \cdot x$ . Así,  $x = g \cdot (h^{-1} \cdot x) \stackrel{AP2}{=} (gh^{-1}) \cdot x$ . Luego  $gh^{-1} \in G_x$  y por lo tanto  $G_x$  es un subgrupo de  $G$ .
- (iii) Supongamos que  $g \in G_x$ , entonces  $g \cdot x = x$ ; luego  $[g, x] = [1, x]$ , y por la definición de  $\mu$  y  $\iota$ ,  $\mu_g([\iota(x)]) = \iota(x)$ , esto es  $g \in G_{\iota(x)}$ . Recíprocamente, si  $g \in G_{\iota(x)}$ , entonces  $[g, x] = [1, x]$ , lo que significa que  $\exists g \cdot x$  y  $g \cdot x = x$ , esto es  $g \in G_x$ .
- (iv) Como  $h^{-1}g \in G_x$ , entonces  $x = (h^{-1}g) \cdot x$  y como  $h \in G^x$  tenemos que  $h \cdot x = h \cdot ((h^{-1}g) \cdot x) \stackrel{AP2}{=} g \cdot x$ . Por lo tanto  $g \in G^x$ .

□

Sea  $m : G * X \rightarrow X$  una acción parcial topológica y  $x \in X$ . Definimos la siguiente relación de equivalencia en  $G^x$  :

$$g \sim h, \text{ si y solo si, } h^{-1}g \in G_x.$$

Note que, como  $G^x = G^x G_x$  y  $G_x$  es un subgrupo de  $G$ , entonces la clase de equivalencia de cada elemento  $g \in G^x$ , es precisamente  $gG_x$ , de hecho:

$$\bar{g} = \{h \in G^x : h^{-1}g \in G_x\} = \{gf^{-1} : f^{-1} \in G_x\} = gG_x.$$

En particular; si  $g, h \in G^x$ , entonces  $gG_x = hG_x$  ó  $gG_x \cap hG_x = \emptyset$ . Denotamos por  $G^x/G_x$  al espacio cociente de  $G^x$  determinado por esta relación de equivalencia, esto es  $G^x/G_x$  tiene la topología cociente determinada por la función proyección

$$\pi_p : G^x \ni g \mapsto gG_x \in G^x/G_x. \quad (5.4)$$

**Proposición 5.3.2.** *Sea  $G$  un grupo Polaco y  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$ . Entonces para cada  $x \in X$  se cumplen las siguientes afirmaciones*

- (i) *la función  $\pi_p$  definida en (5.4) es continua, sobreyectiva y abierta.*
- (ii) *La función  $\hat{\iota} : G^x/G_x \ni gG_x \mapsto gG_{\iota(x)} \in G/G_{\iota(x)}$  es un encaje.*
- (iii) *Si  $G^x$  es Polaco y  $G_x$  es cerrado en  $G$ , entonces  $G^x/G_x$  es un espacio Polaco.*

*Demostración.*

- (i) Claramente  $\pi_p$  es sobreyectiva y continua por definición de la topología cociente. Para ver que es abierta, sea  $V$  un abierto de  $G^x$ , entonces  $V = W \cap G^x$ , con  $W$  abierto de  $G$ . Note que, para cada  $g \in G_x$ , se tiene que  $Vg = Wg \cap G^xg$  y  $G^xg = G^x$ , luego

$$\pi_p^{-1}(\pi_p(V)) = VG_x = \bigcup_{g \in G_x} Vg = WG_x \cap G^x,$$

es abierto de  $G^x$ . Por lo tanto  $\pi_p$  es abierta.

(ii) Por el ítem (iii) del Lema 5.3.1 tenemos que  $G_x = G_{\iota(x)}$ , luego  $gG_x = hG_x$ , si y solo si,  $gG_{\iota(x)} = hG_{\iota(x)}$ , para cada  $g, h \in G^x$ . Por lo tanto,  $\hat{\iota}$  está bien definida y es inyectiva. Veamos que  $\hat{\iota}$  es continua. Sea  $\rho : G \ni g \mapsto gG_{\iota(x)} \in G/G_{\iota(x)}$  la función proyección definida en (1.1) para el subgrupo  $G_{\iota(x)}$ . Note que el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} G^x/G_x & \xrightarrow{\hat{\iota}} & G/G_x \\ \pi_p \uparrow & \nearrow \rho \upharpoonright_{G_x} & \\ G^x & & \end{array}$$

es decir  $\hat{\iota} \circ \pi_p = \rho \upharpoonright_{G_x}$ . Como  $\rho \upharpoonright_{G_x}$  es continua y  $\pi_p$  es abierta y sobreyectiva, por el Lema 1.1.1 se tiene que  $\hat{\iota}$  es continua.

Sea  $Y = \hat{\iota}(G^x/G_x)$ . Veamos que  $\hat{\iota} : G^x/G_x \rightarrow Y$  es abierta. En efecto, sea  $U$  abierto de  $G^x/G_x$ , entonces  $\pi_p^{-1}(U)$  es un abierto de  $G^x$ , esto es  $\pi_p^{-1}(U) = O \cap G^x$ , con  $O$  abierto de  $G$  y como  $\pi_p$  es sobreyectiva,  $U = \pi_p(O \cap G^x)$ . Queremos probar que  $\hat{\iota}(U) = \rho(O) \cap Y$ . Note que si  $\bar{z} \in \hat{\iota}(U)$ ,  $\bar{z} = gG_{\iota(x)} = \rho(g)$ , para algún  $g \in O \cap G^x$ , luego  $\bar{z} \in \rho(O) \cap Y$ . Recíprocamente, si  $\bar{z} \in \rho(O) \cap Y$  entonces  $\bar{z} = \rho(g) = gG_{\iota(x)}$ , para algún  $g \in O$ , y  $\bar{z} = hG_x \in Y$ , para algún  $h \in G^x$ . Pero  $G_x = G_{\iota(x)}$ , entonces  $h^{-1}g \in G_x$ . Así, por (iv) del Lema 5.3.1,  $g \in G^x$ ; luego  $g \in O \cap G^x$ . De modo que  $\bar{z} = \hat{\iota}(gG_x)$ , con  $gG_x = \rho(g) \in \rho(O \cap G^x)$ , esto es  $\bar{z} \in \hat{\iota}(U)$ . Como  $\rho$  es abierta,  $\rho(O) \cap Y$  es un abierto de  $Y$ . Por lo tanto  $\hat{\iota}$  es abierta y de lo anterior concluimos que  $\hat{\iota}$  es un encaje.

(iii) Por el Lema 1.3.13 y el ítem anterior  $G^x/G_x$  es metrizable. Por otra parte, de (i) se sigue que  $G^x/G_x$  es la imagen continua y abierta del espacio Polaco  $G^x$ , luego por el Teorema de Sierpiński 1.2.8,  $G^x/G_x$  es Polaco.  $\square$

**Lema 5.3.3.** Sean  $m$  una acción parcial continua de  $G$  en  $X$ . Entonces la función

$$\phi : G^x/G_x \ni gG_x \mapsto g \cdot x \in G^x \cdot x$$

es biyectiva y continua, para cada  $x \in X$ .

*Demostración.* Observe que para  $g, h \in G^x$  se tiene que

$$\begin{aligned} g \cdot x = h \cdot x &\Leftrightarrow x = g^{-1} \cdot (h \cdot x) \stackrel{AP2}{=} (g^{-1}h) \cdot x \\ &\Leftrightarrow g^{-1}h \in G_x \\ &\Leftrightarrow h \in gG_x \\ &\Leftrightarrow gG_x = hG_x. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\phi$  está bien definida y es inyectiva. Además, dado  $g \cdot x \in G^x \cdot x$ , existe  $gG_x \in G^x/G_x$  tal que  $\phi(gG_x) = g \cdot x$ , luego  $\phi$  es sobreyectiva. Para ver que  $\phi$  es continua consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G^x & \xrightarrow{\pi_p} & G^x/G_x \\ & \searrow m^x & \downarrow \phi \\ & & G^x \cdot x \end{array}$$

donde  $\pi_p$  es la función definida en (5.4) y  $m^x : G \ni g \mapsto g \cdot x \in G^x \cdot x$ . Note que el diagrama es conmutativo, esto es  $\phi \circ \pi_p = m^x$ ; además, como  $m$  es continua, la función  $m^x$  es continua y por (i) de la Proposición 5.3.2,  $\pi_p$  es abierta y sobreyectiva. Por lo tanto  $\phi$  es continua.  $\square$

La siguiente Proposición es una generalización del conocido teorema para acciones de grupos Polacos de Ryll-Nardzewski, el cual establece que cada órbita es Borel (ver [15, Proposición 3.1.10]).

**Proposición 5.3.4.** *Sea  $G$  un grupo Polaco y  $m$  una acción parcial continua de  $G$  en un espacio Polaco  $X$ , tal que  $G^x$  es  $G_\delta$  y  $G_x$  es cerrado en  $G$ , para cada  $x \in X$ . Entonces cada órbita  $G^x \cdot x$  es Borel.*

*Demostración.* Por el Teorema 1.2.8 y la Proposición 5.3.2,  $G^x/G_x$  es Polaco y por el Lema 5.3.3,  $G^x \cdot x$  es la imagen continua e inyectiva del espacio Polaco  $G^x/G_x$ . Luego por el Teorema de Luzin - Suslin 1.2.11,  $G^x \cdot x$  es Borel.  $\square$

La siguiente es la versión parcial del Teorema de Effros 5.0.4.

**Teorema 5.3.5.** *Sea  $m$  una acción parcial continua de un grupo Polaco  $G$  en un espacio Polaco  $X$ . Sea  $x \in X$ , tal que  $G^x$  es abierto en  $G$  y  $G_x$  es cerrado en  $G$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i)  $G^x \cdot x$  es  $G_\delta$ ;
- (ii)  $G^x \cdot x$  no es magro en su topología relativa;
- (iii) La función  $\phi : G^x/G_x \ni gG_x \mapsto g \cdot x \in G^x \cdot x$  es un homeomorfismo.

*Demostración.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Como  $G^x \cdot x$  es  $G_\delta$  en  $X$  y  $X$  es Polaco, entonces  $G^x \cdot x$  es Polaco y por el Teorema 1.2.14, es Baire. En particular,  $G^x \cdot x$  no es magro en si mismo.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Note que  $G^x \cdot x \subseteq X$  es metrizable. Además, como  $G^x$  es abierto, entonces es  $G_\delta$  y por lo tanto Polaco. Así, por la Proposición 5.3.2,  $G^x/G_x$  es Polaco y por hipótesis,  $G^x \cdot x$  es la imagen continua y abierta de un espacio Polaco. De modo que, por el Teorema 1.2.8,  $G^x \cdot x$  es Polaco y por lo tanto es  $G_\delta$  en  $X$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Por el Lema 5.3.3, basta probar que  $\phi$  es abierta. Sea  $\bar{m} = m|_{(G^*G^x \cdot x)}$  entonces  $\bar{m}$  es una acción parcial topológica transitiva, luego por el Teorema 5.1.2,

$\bar{m}^x = m^x : G^x \ni g \mapsto g \cdot x \in G^x \cdot x$  es abierta. Ahora, observe que el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} G^x & \xrightarrow{m^x} & G^x \cdot x \\ \pi_p \downarrow & \nearrow \phi & \\ G^x/G_x & & \end{array}$$

es decir,  $\phi \circ \pi_p = m^x$ . Como  $m^x$  es abierta y por el ítem (i) de la Proposición 5.3.2,  $\pi_p$  es continua y sobreyectiva, concluimos que  $\phi$  es abierta.  $\square$

**Corolario 5.3.6.** *Si es  $m$  una acción parcial topológica de un grupo discreto  $G$  en un espacio Polaco  $X$ . Entonces para cada  $x \in X$ , las afirmaciones del Teorema 5.3.5 son equivalentes.*

*Demostración.* Como el grupo  $G$  tiene la topología discreta, entonces  $G$  es Polaco y además, para cada  $x \in X$ , se tiene que  $G^x$  es abierto y  $G_x$  es cerrado en  $G$ .  $\square$

**Ejemplo 5.3.7.** Sea  $V : X \rightarrow TX$  un campo vectorial diferenciable sobre una variedad diferenciable y Polaca  $X$ , y  $\Phi$  la acción parcial topológica de  $G = \mathbb{R}$  en  $X$  definida en el Ejemplo 3.1.6. Entonces, por el Ejemplo 3.2.6,  $\Phi$  es continua y para cada  $x \in X$ , tenemos que el conjunto  $G^x = I_x$  es abierto y la curva integral maximal  $\gamma_x : I_x \subseteq \mathbb{R} \rightarrow X$  es constante ó inyectiva ó periodica (ver [30, Ejercicio 9-1 (a)]), luego

$$G_x = \{t \in I_x : \gamma_x(t) = x\},$$

es un conjunto cerrado. Adicionalmente la imagen de  $\gamma_x$  es difeomorfa a  $\mathbb{R}$ ,  $S^1$  o  $\mathbb{R}^0$ , por lo tanto  $G^x \cdot x = \gamma_x(I_x)$  es Polaco. (ver [30, Ejercicio 9-1 (c)]). De modo que, las afirmaciones de los Teoremas 5.2.4 y 5.3.5 se verifican. En particular, si  $\phi$  es la acción parcial continua  $G = \mathbb{R}$  en  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , definida en el Ejemplo 3.1.7.

Entonces, para cada  $x = (a, b) \in X$  tenemos que

$$G^x = I_x = \begin{cases} (-a, \infty), & \text{si } b = 0 \text{ y } a > 0; \\ (-\infty, -a), & \text{si } b = 0 \text{ y } a < 0; \\ \mathbb{R}, & \text{si } b \neq 0. \end{cases}$$

y su estabilizador es  $G_x = \{0\}$ . Además la órbita de  $x$  está dada por

$$G^x \cdot x = \begin{cases} (0, \infty) \times \{0\}, & \text{si } b = 0 \text{ y } a > 0; \\ (-\infty, 0) \times \{0\}, & \text{si } b = 0 \text{ y } a < 0; \\ \mathbb{R} \times \{b\}, & \text{si } b \neq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, para cada  $x \in X$ ,  $G^x$  es abierto,  $G_x$  es cerrado y la órbita  $G^x \cdot x$  es  $G_\delta$ .

El siguiente ejemplo muestra que la condición de que  $G^x$  sea abierto en el Teorema 5.3.5 es necesaria.

**Ejemplo 5.3.8.** Consideremos la acción parcial continua del grupo aditivo  $\mathbb{R}$  (con la topología usual) en si mismo definida por:

$$\mathbb{R}_t = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \mathbb{R}, & \text{si } t \in \mathbb{Q}; \end{cases}$$

y  $m_t : \mathbb{R}_{-t} \ni x \mapsto x + t \in \mathbb{R}_t$ , para cada  $t \in \mathbb{Q}$ . Note que  $\mathbb{R}_x = \{0\}$  es cerrado y  $\mathbb{R}^x = \mathbb{Q}$  no es abierto, para todo  $x \in \mathbb{R}$ . En particular, si  $q \in \mathbb{Q}$ , la función

$$\mathbb{R}^q / \mathbb{R}_q \ni t\mathbb{R}_q \mapsto t + q \in \mathbb{R}^q \cdot q$$

es un homeomorfismo, pero  $\mathbb{R}^q \cdot q = \mathbb{Q}$  no es  $G_\delta$  y es magro en si mismo.

# Apéndice A

## La acción parcial del Grupo Universal de Hausdorff

Dada una acción parcial continua  $m$  de  $G$  en  $X$ , es posible construir una acción parcial continua  $m^*$  del grupo cociente  $G/\overline{\{1\}}$ , llamado el grupo universal de Hausdorff, en el espacio  $X$ . En esta sección mostramos la construcción  $m^*$ , la relación que hay entre sus globalizaciones y algunas propiedades que se preservan de la acción parcial original  $m$ , tales como ser propia. Los resultados que mostramos a continuación se basan en los presentados en [3].

El siguiente teorema recopila algunos resultados clásicos de la literatura de grupos topológicos que nos serán útiles en esta sección.

**Teorema A.0.1.** *Sean  $G$  un grupo topológico y  $H$  un subgrupo normal de  $G$ . Entonces*

- (i) *[19, Proposición 6, Cap III, §23]  $\overline{H}$  es un subgrupo normal de  $G$ . En particular,  $\overline{\{1\}}$  es un subgrupo normal de  $G$ .*
- (ii) *[19, Proposición 15 y Teorema 10, Cap III, §24] y [19, Teorema 4, Cap III, §21] El grupo cociente  $G/H$  es Hausdorff, si y solo si,  $H$  es cerrado.*

El Teorema A.0.1 motiva la siguiente definición.

**Definición A.0.2.** Sea  $G$  un grupo topológico y  $\mathcal{E} = \overline{\{1\}}$ , entonces el grupo cociente  $G/\mathcal{E}$  se denomina **el grupo universal de Hausdorff**.

**Notación A.0.3.** En adelante denotamos  $\mathcal{E} = \overline{\{1\}}$ .

Recordemos que  $\{(\mu, X_G), \iota\}$  denota la globalización de la acción parcial continua  $m$  definida en la Sección 4.1. La siguiente proposición establece condiciones suficientes para que el estabilizador  $G_x$  sea cerrado.

**Proposición A.0.4.** *Sea  $m$  una acción parcial topológica de  $G$  en  $X$  y  $x \in X$ .*

- (i) *Si  $X_G$  es un espacio  $T_1$ ,  $G_x$  es cerrado en  $G$ .*
- (ii) *Si  $m$  es continua y  $X$  es un espacio  $T_1$ , entonces  $G_x$  es cerrado en  $G^x$ . Si además,  $G^x$  es cerrado en  $G$ , entonces  $G_x$  es cerrado en  $G$ .*

*Demostración.*

- (i) Por el Lema 5.3.1  $G_x = G_{\iota(x)}$ . Entonces, si  $X_G$  es  $T_1$ , el conjunto  $\{\iota(x)\}$  es cerrado en  $X_G$ , además por 4.1.1  $\mu$  es continua, de modo que  $\mu_g^{-1}(\{\iota(x)\}) = G_{\iota(x)} = G_x$  es cerrado.
- (ii) Como  $m$  es continua, la función  $m^x : G^x \ni g \mapsto g \cdot x \in X$  es continua y como  $X$  es  $T_1$ , el conjunto  $\{x\}$  es cerrado en  $X$ ; luego  $(m^x)^{-1}(\{x\}) = G_x$  es cerrado en  $G^x$  y si  $G^x$  es cerrado en  $G$  entonces  $G_x$  es cerrado en  $G$ .  $\square$

**Definición A.0.5.** Sea  $m$  una acción parcial de  $G$  en  $X$ . El **Kernel** de  $m$ , denotado por  $\ker m$ , es el conjunto  $\{g \in G^x : m(g, x) = x, \text{ para todo } x \in X\}$ .

**Lema A.0.6.** *Sea  $G$  un grupo topológico,  $X$  un espacio  $T_1$  y  $m$  una acción parcial continua de  $G$  en  $X$  tal que  $G^x$  o  $G_x$  es cerrado, para todo  $x \in X$ . Entonces  $\ker m$  es cerrado en  $G$ .*

*Demostración.* Por el Lema A.0.4,  $G_x$  es cerrado en  $G$ , para todo  $x \in X$ , entonces

$$\begin{aligned} \bigcap_{x \in X} G_x &= \bigcap_{x \in X} \{g \in G^x : g \cdot x = x\} \\ &= \{g \in G^x : g \cdot x = x \text{ para todo } x \in X\}, \end{aligned}$$

es cerrado en  $G$ . □

**Definición A.0.7.** Una acción parcial topológica  $m$  de  $G$  en  $X$  es **propia** si la función

$$f : G * X \ni (g, x) \mapsto (m(g, x), x) \in X \times X,$$

es propia, esto es  $f^{-1}(\mathcal{K})$  es compacto, para todo compacto  $\mathcal{K}$  de  $X \times X$ .

**Lema A.0.8.** Sea  $G$  un grupo topológico y  $F$  un cerrado de  $G$ . Entonces  $\mathcal{E}F = F$

*Demostración.* Si  $a \in F$  entonces  $1a \in \mathcal{E}F$ , luego  $F \subseteq \mathcal{E}F$ . Recíprocamente, supongamos que  $\mathcal{E}F \not\subseteq F$ , entonces existe  $b \in \mathcal{E}$  y  $a \in F$  tal que  $ba \notin F$ , luego  $b \notin Fa^{-1}$ . Pero  $1 \in Fa^{-1}$  y como  $F$  es cerrado,  $Fa^{-1}$  es cerrado, así  $b \in \mathcal{E} \subseteq Fa^{-1}$ , pues  $\mathcal{E}$  es el menor cerrado que contiene a  $\{1\}$ , lo cual es contradictorio. Por lo tanto  $\mathcal{E}F \subseteq F$ . □

**Teorema A.0.9.** Sean  $X$  un espacio  $T_1$  y  $m$  una acción parcial continua de  $G$  en  $X$  tal que para todo  $x \in X$ ,  $G^x$  o  $G_x$  es cerrado. Entonces existe una acción parcial continua  $m^*$  del grupo universal de Hausdorff  $G/\mathcal{E}$ , en  $X$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{m} & X \\ p \times I_X \downarrow & \nearrow m^* & \\ (G/\mathcal{E}) \times X & & \end{array} \quad (\text{A.1})$$

donde  $p : G \ni g \mapsto g\mathcal{E} \in G/\mathcal{E}$  es la función proyección definida en (1.1). Además, si  $m$  es propia, entonces  $m^*$  es propia.

*Demostración.* Note que la función

$$f : G/\mathcal{E} \ni g\mathcal{E} \mapsto g \ker m \in G/\ker m,$$

está bien definida, ya que de los Lemas A.0.6 y A.0.8, se sigue que

$$g\mathcal{E} = h\mathcal{E} \Rightarrow g\mathcal{E} \ker m = h\mathcal{E} \ker m \Rightarrow g \ker m = h \ker m.$$

Ahora, sea  $\mathcal{D} = \{(g \ker m, x) \in G/\ker m \times X : \exists g \cdot x\}$ . Note que  $\mathcal{D}$  es un conjunto bien definido; de hecho, si  $g \ker m = h \ker m$  y  $\exists g \cdot x$ , entonces  $\exists h \cdot x$ . Además, la función

$$m_{\ker m} : \mathcal{D} \ni (g \ker m, x) \mapsto g \cdot x \in X,$$

está bien definida, pues, para cada  $x \in X$  y  $g, h \in G^x$  tales que  $g \ker m = h \ker m$  se verifica que  $g = ha$ , con  $a \in \ker m$ ; luego

$$h \cdot x \stackrel{a \in \ker m}{=} h \cdot (a \cdot x) \stackrel{AP2}{=} (ha) \cdot x = g \cdot x;$$

esto es,  $m_{\ker m}(h \ker m, x) = m_{\ker m}(g \ker m, x)$ . De modo que la función

$$m^* : G/\mathcal{E} * X \ni (g\mathcal{E}, x) \mapsto m_{\ker m}(f(g\mathcal{E}), x) = g \cdot x \in X,$$

está bien definida, donde  $G/\mathcal{E} * X = \{(g\mathcal{E}, x) : (f(g\mathcal{E}), x) \in \mathcal{D}\} = \{(g\mathcal{E}, x) : \exists g \cdot x\}$ , en particular,  $X_{g\mathcal{E}} = X_g$ , para cada  $g \in G$ . Veamos que  $m^*$  es una acción parcial topológica.

- Suponga que  $m^*(g\mathcal{E}, x)$  está definida, entonces

$$\begin{aligned}
m^*(g^{-1}\mathcal{E}, m^*(g\mathcal{E}, x)) &= m_{\ker m}(f(g^{-1}\mathcal{E}), m_{\ker m}(f(g\mathcal{E}), x)) \\
&= m_{\ker m}(g^{-1} \ker m, m_{\ker m}(g \ker m, x)) \\
&= m_{\ker m}(g^{-1} \ker m, g \cdot x) \\
&= g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x.
\end{aligned}$$

Luego  $m^*$  satisface AP1.

- Suponga que  $m^*(g\mathcal{E}, m^*(h\mathcal{E}, x))$  está definida, entonces

$$\begin{aligned}
m^*(g\mathcal{E}, m^*(h\mathcal{E}, x)) &= m_{\ker m}(f(g\mathcal{E}), m_{\ker m}(f(h\mathcal{E}), x)) \\
&= m_{\ker m}(g \ker m, m_{\ker m}(h \ker m, x)) \\
&= m_{\ker m}(g \ker m, h \cdot x) \\
&= g \cdot (h \cdot x) \\
&= (gh) \cdot x = m^*((gh)\mathcal{E}, x).
\end{aligned}$$

Luego  $m^*$  satisface AP2.

- Sea  $x \in X$ , Entonces  $m^*(\mathcal{E}, x) = 1 \cdot x = x$ . Luego  $m^*$  satisface AP3.

Claramente el diagrama (A.1) es conmutativo, esto es  $m^* \circ (p \times I_X) = m$ . Luego,  $m^*$  es continua, ya que  $m$  es continua y por (ii) del Teorema A.0.1,  $(p \times I_X)$  es abierta y sobreyectiva.

Finalmente, si  $m$  es propia, entonces la función  $f_m : G * X \ni (g, x) \mapsto (g \cdot x, x) \in X \times X$  es propia. Sea  $f_{m^*} : G/\mathcal{E} * X \ni (g\mathcal{E}, x) \mapsto (m^*(g\mathcal{E}, x), x) \in X \times X$ , entonces el

siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{f} & X \times X \\ p \times I_X \downarrow & \nearrow f_{m^*} & \\ (G/\mathcal{E}) \times X & & \end{array}$$

Sea  $\mathcal{K}$  un conjunto compacto de  $X \times X$ , como  $f$  es propia entonces  $f^{-1}(\mathcal{K})$  es compacto en  $G * X$ . Pero  $p$  y  $I_X$  son continuas y sobreyectivas, luego  $(p \times I_X)(f^{-1}(V)) = (f_{m^*})^{-1}(V)$  es compacto en  $G/\mathcal{E} * X$ .  $\square$

**Observación A.0.10.** Por la Proposición A.0.4 la hipótesis  $G^x$  o  $G_x$  cerrado, para cada  $x \in X$ ; puede sustituirse por  $X_G$  espacio  $T_1$

**Corolario A.0.11.** Si  $m$  es global entonces  $m^*$  es global.

*Demostración.* Basta probar que si  $m^*(gh\mathcal{E}, x)$  está definida, entonces  $m^*(g\mathcal{E}, m^*(h\mathcal{E}, x))$  está definida y  $m^*(gh\mathcal{E}, x) = m^*(g\mathcal{E}, m^*(h\mathcal{E}, x))$ . En efecto,  $m^*(gh\mathcal{E}, x) = (gh) \cdot x$ , pero como  $m$  es global, si  $\exists (gh) \cdot x$ , entonces  $\exists g \cdot (h \cdot x)$  y además  $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ . Luego

$$\begin{aligned} m^*(gh\mathcal{E}, x) &= g \cdot (h \cdot x) \\ &= m_{\ker m}(g \ker m, h \cdot x) \\ &= m_{\ker m}(g \ker m, m_{\ker m}(h \ker m, x)) \\ &= m_{\ker m}(f(g\mathcal{E}), m_{\ker m}(f(h\mathcal{E}), x)) \\ &= m^*(g\mathcal{E}, m^*(h\mathcal{E}, x)). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $m^*$  es global.  $\square$

Sea  $m$  una acción parcial continua de un grupo  $G$  en un espacio  $X$  tal que  $G * X$  es abierto y  $\{(\mu, X_G), \iota\}$  su globalización. Por el Teorema A.0.9 sabemos que existe una acción parcial  $m^*$  del grupo universal de Hausdorff  $G/\mathcal{E}$  en  $X$  y por el Corolario

A.0.11, existe una acción global  $\mu^*$  de  $G/\mathcal{E}$  en  $X_G$ . El siguiente resultado muestra que  $\{(\mu^*, X_G), \iota\}$  es precisamente la globalización de  $m^*$ .

**Proposición A.0.12.** *Sea  $m$  una acción parcial continua de un grupo  $G$  en un espacio  $X$  tal que  $G * X$  es abierto y  $\{(\mu, X_G), \iota\}$  su globalización. Entonces  $\{(\mu^*, X_G), \iota\}$  es la globalización de  $m^*$ .*

*Demostración.* Sea  $m^* = \{m_{g\mathcal{E}}^* : X_{(g\mathcal{E})^{-1}} \rightarrow X_{g\mathcal{E}}\}_{g\mathcal{E} \in G/\mathcal{E}}$  y  $\alpha = \{\alpha_{g\mathcal{E}} : Y_{(g\mathcal{E})^{-1}} \rightarrow Y_{g\mathcal{E}}\}_{g\mathcal{E} \in G/\mathcal{E}}$  la acción parcial inducida por  $\mu^*$  de  $G/\mathcal{E}$  en  $\iota(X)$ . Veamos que  $\alpha$  y  $m^*$  son equivalentes. En efecto, para cada  $g\mathcal{E} \in G/\mathcal{E}$  consideremos el siguiente diagrama, donde  $\iota : X \ni x \mapsto [1, x] \in \iota(X)$  un homeomorfismo, gracias a la Proposición 4.1.3

$$\begin{array}{ccc} X_{(g\mathcal{E})^{-1}} & \xrightarrow{m_{g\mathcal{E}}^*} & X_{g\mathcal{E}} \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\ Y_{(g\mathcal{E})^{-1}} & \xrightarrow{\alpha_{g\mathcal{E}}} & Y_{g\mathcal{E}}. \end{array}$$

Observe que, dado  $x \in X_{(g\mathcal{E})^{-1}}$ ,

$$\alpha_{g\mathcal{E}}(\iota(x)) = \alpha_{g\mathcal{E}}([1, x]) = \mu^*(g\mathcal{E}, [1, x]) = \mu(g, [1, x]) = [g, x]$$

y también

$$\iota(m_{g\mathcal{E}}^*(x)) = \iota(m(g, x)) = \iota(g \cdot x) = [1, g \cdot x] = [g, x]$$

Luego  $\alpha_{g\mathcal{E}} \circ \iota = \iota \circ m_{g\mathcal{E}}^*$ , esto es, el diagrama es conmutativo y por lo tanto  $\alpha$  y  $m^*$  son equivalentes.

Para probar la minimalidad de  $\{(\mu^*, X_G), \iota\}$ , sea  $\{(\beta, Y), \iota'\}$  otra globalización de  $m^*$  y sea  $\lambda : X_G \ni [h, x] \mapsto \beta_h(\iota'(x)) \in Y$ . Observe que

$$\begin{aligned} [h \cdot x] = [g \cdot y] &\Leftrightarrow (g^{-1}h) \cdot x = y \\ &\Leftrightarrow \iota'((g^{-1}h) \cdot x) = \iota'(y) \\ &\Leftrightarrow \beta_{g^{-1}h}(\iota'(x)) = \iota'(y) \\ &\Leftrightarrow \beta_h(\iota'(x)) = \beta_h(\iota'(y)) \\ &\Leftrightarrow \lambda([h \cdot x]) = \lambda([g \cdot y]). \end{aligned}$$

Luego  $\lambda$  está bien definida y es inyectiva. Por otra parte, para cada  $g \in G$  y  $[h, x] \in X_G$  tenemos que

$$\beta_g(\lambda([h, x])) = \beta_g(\beta_h(\iota'(x))) = \beta_{gh}(\iota'(x)) = \lambda([gh, x]) = \lambda(\mu_g^*[h, x]).$$

Por lo tanto el siguiente diagrama es conmutativo, para cada  $g \in G$ .

$$\begin{array}{ccc} X_G & \xrightarrow{\mu_g^*} & X_G \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda \\ Y & \xrightarrow{\beta_g} & Y \end{array}$$

Finalmente, observe que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G \times X & & \\ q \downarrow & \searrow \gamma & \\ X_G & \xrightarrow{\lambda} & Y \end{array}$$

donde  $q$  es la función proyección definida en (4.2). Además  $\gamma : (g, x) \in G \times X \mapsto \beta(g, \iota'(x)) = \beta_g(\iota'(x)) \in Y$  es continua y por el Teorema 4.1.1,  $q$  abierta y sobreyectiva. Luego  $\lambda$  es continua; de modo que  $\lambda : \mu^* \rightarrow \beta$  es un monomorfismo de acciones topológicas y por lo tanto  $\{(\mu^*, X_G), \iota\}$  es minimal.  $\square$

# Bibliografía

- [1] ABADIE F., Enveloping actions and Takai duality for partial actions, *J. Funct. Anal.* 197 (2003), 14-67.
- [2] ABADIE F., *Sobre ações parciais, fibrados de Fell e grupóides*, Thesis (PhD), Universidade de São Paulo, 1999.
- [3] ABID A. AND HUSSEIN F., Action of the Universal Hausdorff Group, *Am. J. of Math. and Statistics* 4 (2014), No. 4, 191-194.
- [4] ANCEL F., An alternative proof and applications of a theorem of E. G. Effros, *Michigan Math. J.*, 34 (1987), 39-55.
- [5] BECKER H. AND KECHRIS A., *The Descriptive Set Theory of Polish Group Actions*, London Math. Soc. Lect. Notes, 1996.
- [6] CARREÑO J., *Sobre el Teorema de Effros*, Tesis (pregrado), Universidad Industrial de Santander, 2017.
- [7] CHOI K. AND LIM Y., Transitive partial actions of groups, *Period. Math. Hung.* 56 (2008), No. 2, 169-181.
- [8] DOKUCHAEV M., Partial actions: a survey, *Contemp. Math.* 537 (2011), 173-184.

- 
- [9] DOKUCHAEV M. AND EXEL R., Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 357 (2005), No. 5, 1931-1952.
- [10] DOKUCHAEV M. AND KHRYPCHENKO M., Partial cohomology of groups, *J. Algebra*, 427 (2015), 142-182.
- [11] EFFROS E., Transformations groups and  $C^*$ -algebras, *Annals of Mathematics*, (1965) No. 81, 38-55.
- [12] EXEL R., Partial actions of groups and actions of inverse semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 126 (1998), No. 12, 3481-3494.
- [13] EXEL R., *Partial group actions*, Course given by Ruy Exel at the ICMAT, Notes taken by Eusebio Gardella. 2013.
- [14] EXEL R., GIORDANO T. AND GONÇALVES D., Enveloping algebras of partial actions as groupoid  $C^*$ -algebras, *J. Operator Theory* 65 (2011), 197-210.
- [15] GAO S., *Invariant Descriptive Set Theory*, Chapman and Hall, 2009.
- [16] GÓMEZ J., PINEDO H. AND UZCÁTEGUI C., On the continuity of partial actions of Polish groups on metric spaces. *Preprint*.
- [17] GÓMEZ J., PINEDO H. AND UZCÁTEGUI C., The open mapping principle for partial actions of Polish groups. *Preprint*.
- [18] HOHTI A., Another alternative proof of Effros' theorem, *Top. Proc.*, 12 (1987), 295-298.
- [19] HUSAIN T., *Introduction to topological groups*, W.B. Saunders Company, 1966.

- [20] KECHRIS A. S., *Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Texts in Mathematics 156. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [21] KELLENDONK J. AND LAWSON M. V., Partial actions of groups, *Internat. J. Algebra Comput.*, 14 (2004), No. 1, 87-114.
- [22] KURATOWSKI K., *Topology*, Vol I, Academic Press, New York, 1968.
- [23] MC CLANAHAN K., K-theory for partial crossed products by discrete groups, *J. Funct. Anal.*, 130 (1995), 77-117.
- [24] MILL J., A Note on the Effros Theorem, *The Am. Math. Monthly*, 111 (2004), No. 9, 801-806.
- [25] MUNKRES J. R., *Topología*, 2.<sup>a</sup> edición. Pearson Educación, S.A., Madrid, 2002.
- [26] PINEDO H., Partial projective representations and the partial Schur multiplier: a survey, *Bol. Mat.* 2 (2015), No. 2, 167-175.
- [27] PINEDO H. AND UZCÁTEGUI C., Borel globalization of Polish group partial actions, *arxiv:1702.02611v1*.
- [28] PINEDO H. AND UZCÁTEGUI C., Polish globalization of Polish group partial actions, *Math. Log. Quart.* To appear.
- [29] QUIGG J. AND RAEBURN I., Characterisations of crossed products by partial actions, *J. Operator Theory* 37 (1997), 311-340.
- [30] LEE J., *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 2012.

# Índice alfabético

$(H \times X)/\widehat{E}_H^p$ , 69

$E_G^p$ , 64

$G * X$ , 32

$G^x$ , 32, 75

$G^x \cdot x$ , 64

$U^x$ , 77

$X^M$ , 68

$X_G$ , 54

$X_g$ , 32, 34

$\iota$ , 54

$\{(\mu, X_G), \iota\}$ , 62

$\mathcal{E}$ , 96

$\mu$ , 54

$\pi_X$ , 65

$\pi_p$ , 89

$\sigma$ -álgebra, 20

$\widehat{E}_G^p$ , 66

$\widehat{E}_H^p$ , 69

$\widehat{m}$ , 65

$\widehat{m}^H$ , 68

$g \cdot A$ , 34

$m_g$ , 32, 34

$q$ , 54

Acción, 30

Acción(es)

continua, 30

envolvente, 62

global, 30

Acción(es) parcial(es)

conjuntista, 31

continua, 45

inducida, 41

kernel de, 96

propia, 97

separadamente continua, 45

topológica, 40

transitiva, 77

Acción(es) parcial(es) topológica(s)

equivalentes, 53

globalización, 62

isomorfismo de, 53

monomorfismo de, 53

morfismo de, 52

Conjunto

Boreliano, 21

comagro, 18

con la Propiedad de Baire, 22

de primera categoría, 18

- 
- de segunda categoría, 18
  - $G_\delta$ , 18
  - invariante, 69
  - magro, 18
  - nunca denso, 18
  - nunca magro, 22
  - simétrico, 29
- Espacio
- $T_0$ , 16
  - $T_1$ , 16
  - $T_2$ , 16
  - segundo numerable, 16
  - analítico, 22
  - Baire, 21
  - compacto, 17
  - de Baire, 24
  - de Hausdorff, 16
  - envolvente, 62
  - Localmente compacto, 17
  - órbita, 64
  - Polaco, 20
  - primero numerable, 16
  - regular, 16
  - separable, 16
- Espacio cociente, 15
- Esquema de Suslin, 24
- Estabilizador, 75
- Función
- Boreliana, 21
  - propia, 97
- Globalización, 53
    - $\iota$ , 54
    - $\{(\mu, X_G), \iota\}$ , 62
    - $\mu$ , 54
    - minimal, 53
  - Grupo
    - Metrizable, 27
    - Polaco, 29
    - universal de Hausdorff, 96
  - Grupo Polaco, 29
  - Grupo topológico, 26
  - Grupo universal de Hausdorff, 96
  - Operación de Suslin, 24
  - Órbita, 64
    - relación de equivalencia parcial de, 64
  - Propiedad de Baire, 22
  - subgrupo topológico, 27
  - Teorema(s)
    - de Categoría de Baire, 21
    - de Effros A.P., 84
    - de Luzin - Suslin, 21
    - de metrización de Urysohn, 17
    - de Sierpiński, 20
  - Topología cociente, 15
  - Transformaciones de Möbius, 41