

COMPACTOS QUE SON ω -LÍMITE DE UN SISTEMA DINÁMICO DISCRETO

JIMMY ALEXÁNDER BALAGUERA FLÓREZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2025

COMPACTOS QUE SON ω -LÍMITE DE UN SISTEMA DINÁMICO DISCRETO

JIMMY ALEXÁNDER BALAGUERA FLÓREZ

Trabajo de grado para optar al título de Matemático

Director

Javier Enrique Camargo García

Doctor en ciencias matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2025

AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente a todas y cada una de las personas que hicieron parte de este proceso; familia, amigos, maestros y, en general, a cada persona con quien tuve la oportunidad de compartir una charla, intercambiar risas y vivir buenos y no tan buenos momentos.

A mi querida madre y a mis hermanos, por su incondicional apoyo y esfuerzo para ayudarme a alcanzar mis objetivos. Al profesor Javier, por su gran dedicación y paciencia en su labor como director de este trabajo.

Su presencia hizo más claro el camino, gracias a todos.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	8
1 Preliminares	10
1.1 Continuos	10
1.2 Sistemas dinámicos discretos	17
1.2.1 La función Tienda.	18
1.2.2 La función logística.	20
1.2.3 Transitividad topológica.	21
1.3 Conjugación topológica	25
2 El conjunto ω -límite	30
2.1 La función shift	34
2.2 Conjuntos que son ω -límite de la tienda	38
3 Conjuntos ω -límite en continuos	47
3.1 Sistemas minimales	47
3.2 Clases de funciones	49
3.3 Cantor como conjunto ω -límite	54
BIBLIOGRAFÍA	57

LISTA DE FIGURAS

	pág.	
Figura 1	Arco y curva cerrada simple.	10
Figura 2	Triodo simple.	11
Figura 3	Abanico armónico.	12
Figura 4	Curva senoidal del topólogo.	12
Figura 5	F_ω	14
Figura 6	D_4 .	15
Figura 7	W_0 .	15
Figura 8	G .	16
Figura 9	Gráfica de T .	18
Figura 10	Puntos fijos de T .	19
Figura 11	Gráfica de T^3 .	20
Figura 12	Gráfica y puntos fijos de L .	21
Figura 13	Gráfica de L^2 .	22
Figura 14	Construcción de A_1 .	40
Figura 15	Construcción de A_2 .	40
Figura 16	Construcción de C_0 .	41
Figura 17	Etiquetado de los intervalos	43
Figura 18	Dinámica de f .	51
Figura 19	Dinámica de g .	52
Figura 20	Dinámica de h .	53
Figura 21	Dinámica sobre el n -ódo.	54
Figura 22	Conjuntos ω -límite en G .	56

RESUMEN

TÍTULO COMPACTOS QUE SON ω -LÍMITE DE UN SISTEMA DINÁMICO DISCRETO. *

AUTOR: JIMMY ALEXÁNDER BALAGUERA FLÓREZ **

PALABRAS CLAVE: CONTINUO, SISTEMA DINÁMICO DISCRETO, ω -LÍMITE.

DESCRIPCIÓN:

Un sistema dinámico discreto es un par (X, f) donde X es un espacio métrico compacto y f una función continua del espacio en sí mismo. En este trabajo estudiamos algunas de las propiedades dinámicas de estos sistemas. El conjunto ω -límite está compuesto por los elementos del sistema que son límite de las órbitas de los elementos del espacio y es el concepto principal en nuestro estudio de estos sistemas. Siendo más específicos, nos enfocamos en estudiar qué clase de compactos resultan ser ω -límite de un sistema dinámico discreto, teniendo un amplia gama de posibilidades, como los conjuntos finitos, numerables, un intervalo, un conjunto de Cantor y combinaciones de estos.

Además, estudiamos algunos resultados sobre la dinámica de sistemas definidos sobre una clase particular de continuos llamados dendritas y cómo sus posibles conjuntos ω -límite se reducen a un conjunto de cantor o un conjunto finito cuando la función del sistema es un homeomorfismo. En particular nos centramos en dotar de restricciones a la dendrita para ver en qué casos sus conjuntos ω -límite son finitos.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Doctor en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: COMPACTS THAT ARE ω -LIMIT SET OF A DYNAMIC DISCRETE SYSTEM *

AUTOR: JIMMY ALEXÁNDER BALAGUERA FLÓREZ **

KEYWORDS: CONTINUA, DISCRETE DYNAMIC SYSTEM, ω -LIMIT SET.

DESCRIPTION:

A discrete dynamical system is a pair (X, f) where X is a compact metric space and f a continuous function of the space itself. In this work we study some of the dynamic properties of these systems. The ω -limit set is composed of the elements of the system that are the limit of the orbits of the elements of space and is the main concept in our study of these systems . Being more specific, we focus on studying what kind of compacts turn out to be ω -limit set of a dynamical system, having a wide range of possibilities, such as finite, countable sets, an interval, a Cantor set and combinations of these .

Furthermore, we study some results on the dynamics of systems defined on a particular class of continua called dendrites and how their possible ω -limit sets are reduced to a cantor set or a finite set when the function of the system is a homeomorphism. In particular we focus on providing constraints to the dendrite to see in which cases its ω -limit sets are finite.

* Bachelor Thesis

** Mathematics School. Sciences Faculty. Director: Ph.D Javier Enrique Camargo García.

INTRODUCCIÓN

Un sistema dinámico discreto es un modelo matemático compuesto por un espacio métrico X y una función continua $f: X \rightarrow X$. Cuando nos refiramos a un sistema dinámico discreto lo notaremos por una pareja (X, f) . Dado un punto $p \in X$, la órbita del punto que denotamos por $\mathcal{O}_f(p)$ es la sucesión: $p, f(p), f(f(p)), f(f(f(p))) \dots$. Podemos decir que “entender” el sistema dinámico es “comprender” el comportamiento de todas las posibles órbitas que se puedan definir. Por ejemplo, un sistema dinámico sencillo que entendemos totalmente es considerar $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$, para cada $x \in [0, 1]$. Fácilmente se concluye que:

$$\mathcal{O}_f(x) = \begin{cases} \text{una sucesión convergente a 1,} & \text{si } x \neq 0; \\ \text{la sucesión constante 0,} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Por otra parte, si consideramos $g(x) = 4x(1-x)$ también definida en $[0, 1]$, con un análisis rápido, encontramos que $g(0) = 0$; esto es, $\mathcal{O}_g(0)$ es la sucesión $0, 0, \dots$, o si tomamos $g(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$, nuevamente encontramos una órbita constante; pero no podemos predecir con exactitud que sucede con la órbita de $x = \frac{\sqrt{2}}{5}$ o $x = \frac{1}{5}$. Así, la función g (conocida como la curva logística) presenta una dinámica más compleja.

En nuestro contexto, suponemos que el espacio que compone el sistema es un continuo (espacio métrico no vacío, compacto y conexo). Como ejemplos particulares de los continuos están las dendritas, concepto que introducimos en el primer capítulo.

Un conjunto de gran relevancia cuando se estudia un sistema dinámico es el conjunto ω -límite. Este conjunto consiste en todos los posibles puntos límite de una órbita, esto es,

dado (X, f) un sistema dinámico discreto y $p \in X$, definimos

$$\omega(p, f) = \{x \in X : \text{existe } (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}, \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(p) = x\},$$

donde $f^0(x) = x$ y para cada $n \geq 1$, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ para cada $x \in X$. Sabemos que si X es un espacio métrico compacto, entonces $\omega(x, f)$ siempre es un subconjunto compacto y diferente del vacío de X . En nuestro ejemplo inicial, cuando tomamos $f(x) = \sqrt{x}$ con $x \in [0, 1]$, no es difícil ver que el conjunto ω -límite siempre es un conjunto con un único punto. Sin embargo, cuando tomamos la función logística g , dado cualquier entero positivo m , podemos encontrar punto $x \in [0, 1]$ tal que su conjunto ω -límite tiene exactamente m puntos, o podemos encontrar $z \in [0, 1]$ donde $\omega(z, g)$ es homeomorfo a una sucesión convergente, o existe $w \in [0, 1]$ donde su conjunto ω -límite es un conjunto de Cantor. En este trabajo exhibimos los tipos de compactos que resultan ser ω -Límite en un sistema dinámico discreto, en particular, en espacios como Cantor, el intervalo y algunos otros de mayor complejidad como lo son las dendritas.

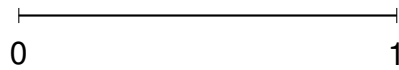
En relación a este problema, existen algunos trabajos. Por ejemplo en “On open maps between dendroids” los autores Gerado Acosta, Peyman Eslami, y Lex G. Oversteegen demostraron que dado un homeomorfismo h definido en una dendrita, entonces su conjunto ω -límite es: o un conjunto finito, o un espacio de Cantor. Parte fundamental de nuestro trabajo es entender este teorema. En particular, exploraremos posibles conjuntos ω -límite cuando la función está definida en un intervalo cerrado $[0, 1]$.

1. Preliminares

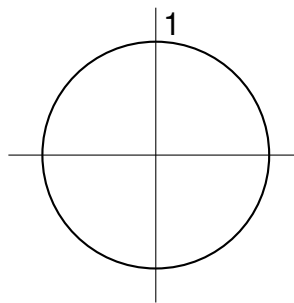
En este capítulo introducimos los continuos, los sistemas dinámicos discretos y algunas propiedades necesarias para desarrollar los objetivos principales de este trabajo.

1.1. Continuos

Un *continuo* es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. El arco o la curva cerrada simple son ejemplos de continuos: El *arco*, es cualquier continuo homeomorfo a $[0, 1]$ y la *curva cerrada simple* es cualquier continuo homeomorfo a $S^1 = \{e^{i\alpha} | \alpha \in [0, 2\pi]\}$. Ver Figura 1.



(a) $[0, 1]$.



(b) S^1 .

Figura 1. Arco y curva cerrada simple.

A continuación presentamos algunos ejemplos clásicos de continuos, Estos ejemplos y

resultados los tomamos de “Topología general”¹ y “Continuum Theory”².

En adelante, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, para algún $n \geq 1$, denotaremos al segmento que une los puntos x y y por $[x, y]$, esto es,

$$[x, y] = \{tx + (1 - t)y : t \in [0, 1]\}.$$

Ejemplo 1.1.1. *El n -odo simple. Sean $a = (0, 0)$ y $p_i \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ tales que $\|a - p_i\| = 1$, con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Definimos el n -odo simple como $X = \bigcup_{i=1}^n [a, p_i]$. En particular, si $n = 3$, entonces es llamado triodo simple y es dado por*

$$T = \bigcup_{i=1}^3 [o, e_i], \text{ donde } o = (0, 0), e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1) \text{ y } e_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

En la Figura 2 se ilustra el ejemplo mencionado.

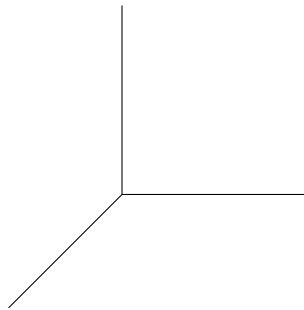


Figura 2. Triodo simple.

El siguiente ejemplo se puede considerar una generalización natural de un n -odo.

Ejemplo 1.1.2. *Abanico armónico. Sean $a = (0, 0)$, $b = (1, 0)$ y $q_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$ para cada*

¹ Camargo J. y Villamizar E., Topología General, Ediciones UIS, Bucaramanga, 2019.

² Nadler Jr., S.B., Continuum Theory: An Introduction, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 158. Marcel Dekker Inc, New York, 1992.

$n \in \mathbb{N}$. Se define el abanico armónico, representado en la Figura 3, como

$$X = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [a, q_n] \right) \cup [a, b].$$

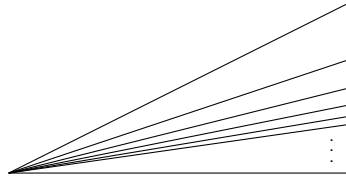


Figura 3. Abanico armónico.

Ejemplo 1.1.3. *Curva senoidal del topólogo.* Se define como subconjunto de \mathbb{R}^2 de la siguiente forma

$$W = \text{Cl}_{\mathbb{R}^2}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \text{sen}(x) \text{ y } x \in (0, 1]\}).$$

Este continuo lo representamos en la Figura 4.

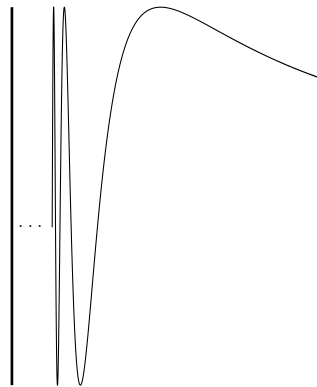


Figura 4. Curva senoidal del topólogo.

Una prueba del siguiente teorema se puede encontrar en “Continuum Theory”³

³ Nadler Jr., S.B., Continuum Theory: An Introduction, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 158. Marcel Dekker Inc, New York, 1992.

Teorema 1.1.4. Sean $\{X_i \mid i \in I\}$ una colección de continuos. Entonces, $\prod_{i \in I} X_i$ es un continuo si, y solo si, I es a lo más numerable.

Cuando hacemos el producto finito de un arco consigo mismo n - veces obtenemos la n -celda, la cual es homeomorfa a $[0, 1]^n$, $n \in \mathbb{N}$. Además, si este producto tiene índices en un conjunto J numerable, escribimos $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ y lo llamamos *cubo de Hilbert*. Por otro lado, si X es un continuo, al producto $X \times [0, 1]$ lo llamaremos *cilindro de X* . Si X es un continuo y $p \in X$ es tal que $X \setminus \{p\}$ es conexo, llamaremos punto de *no corte* a p . A partir de esto definimos una clase particular de continuo. Diremos que un continuo X es un *árbol*, si X tiene una cantidad finita de puntos de no corte.

Definición 1.1.5. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es localmente conexo si para cada $p \in X$ y cada abierto U tal que $p \in U$, existe un abierto V el cual es conexo y $p \in V \subseteq U$.

Si un continuo X es localmente conexo, decimos que X es un *continuo de Peano*. A partir de este concepto definiremos el concepto de dendrita, además de mostrar algunos ejemplos. Previo a esto enunciamos un resultado que será objeto de estudio a lo largo de este trabajo el cual se encuentra en “On open maps between dendrites”⁴. Ahora introducimos un concepto importante. Si X es un espacio métrico compacto, perfecto y totalmente desconexo, decimos que X es un *Conjunto de Cantor*.

Definición 1.1.6. Una dendrita es un continuo de Peano que no contiene ninguna curva cerrada simple.

El abanico armónico y la curva senoidal del topólogo son ejemplos de continuos que no contienen curvas cerradas simples, que no son localmente conexos y por tanto, no son

⁴ Acosta, G., Eslami P. y Oversteegen G., On open maps between dendrites, Houston J. Math., 33, (2007), 753-770.

dendritas. Cualquier n -celda con $n \geq 2$, o incluso el cubo de Hilbert $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, son continuos localmente conexos, pero contienen curvas cerradas simples, por lo que no son dendritas. El n -odo y el arco son dendritas. A continuación mostramos más ejemplos de dendritas, las cuales cuentan con una gran variedad de propiedades topológicas que enriquecen su estudio a través de los sistemas dinámicos discretos.

Ejemplo 1.1.7. Sea $p_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y consideremos el conjunto de puntos $P = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. Definimos la dendrita

$$F_{\omega} = \{[v, p_n] : n \in \mathbb{N}\},$$

donde $v = (0, 0)$. Vease la Figura 5.

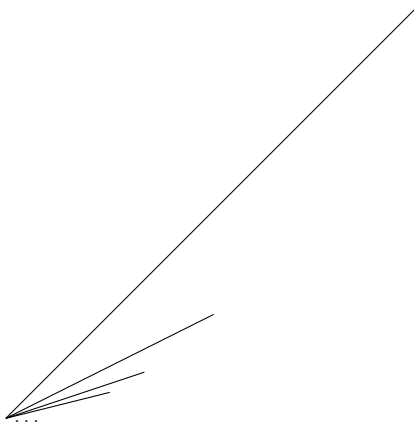


Figura 5. F_{ω}

Ejemplo 1.1.8. Sea $A_1 = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$, consideremos para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ el conjunto B_j como sigue, $B_1 = [0, 1] \times \{0\}$, $B_2 = \{0\} \times [0, \frac{1}{2}]$, $B_3 = \{0\} \times [-\frac{1}{2}, 0]$ y $B_4 = \{-1, 0\} \times \{0\}$ y sean m_1, m_2, m_3, m_4 los puntos medios de B_1, B_2, B_3, B_4 respectivamente. En cada punto medio m_j dibujamos un segmento perpendicular a B_j que llamaremos s_j , de tal manera que la longitud de s_j sea $\frac{1}{2}$ de la longitud de B_j . Así, definimos $A_2 = \bigcup_{j=1}^4 s_j \cup A_1$. Siguiendo la idea del anterior procedimiento y usándolo sobre el conjunto

A_2 obtenemos el conjunto A_3 . se continua haciendo este proceso obteniendo la sucesión A_1, A_2, A_3, \dots y se obtiene que $D_4 = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, conocida como la dendrita universal D_4 . Véase la Figura 6.

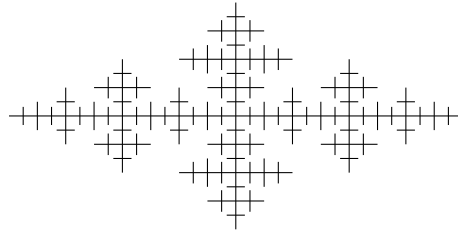


Figura 6. D_4 .

Ejemplo 1.1.9. Sean $A = ([-1, 1] \times \{0\})$, $p_n = (\frac{1}{n}, 0)$ y $q_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Considere ahora segmentos $[p_n, q_n]$. A partir de esto definimos la dendrita $W_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} [p_n, q_n] \cup A$. y es representada en la Figura 7.

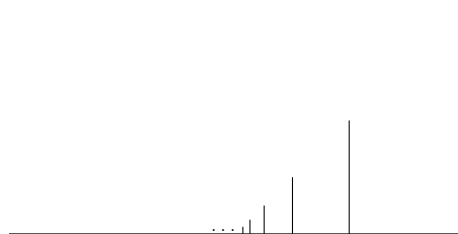


Figura 7. W_0 .

Ejemplo 1.1.10. Sean $a, d \in \mathbb{R}^2$ y considere los segmentos $D_0 = [d, d_0]$, $D_1 = [d, d_1]$, $D_{00} = [d_0, d_{00}]$, $D_{01} = [d_0, d_{01}]$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $D_{t_1 \dots t_n} = [d_{t_1 \dots t_n}, d_{t_1 \dots t_n}]$, donde $t_i \in \{0, 1\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, como lo representamos en la Figura 8. La dendrita de Gehmann la definimos como:

$$G = \text{Cl}_{\mathbb{R}^2} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} D_{t_1 t_2 \dots t_n} \right) \cup [a, d].$$

Es importante resaltar que $G \setminus (\bigcup_{n=0}^{\infty} D_{t_1 t_2 \dots t_n} \cup [a, d]) = \{d_{t_1 t_2 \dots} : t_n \in \{0, 1\} \text{ para todo } n \geq 0\}$ es el conjunto de Cantor.

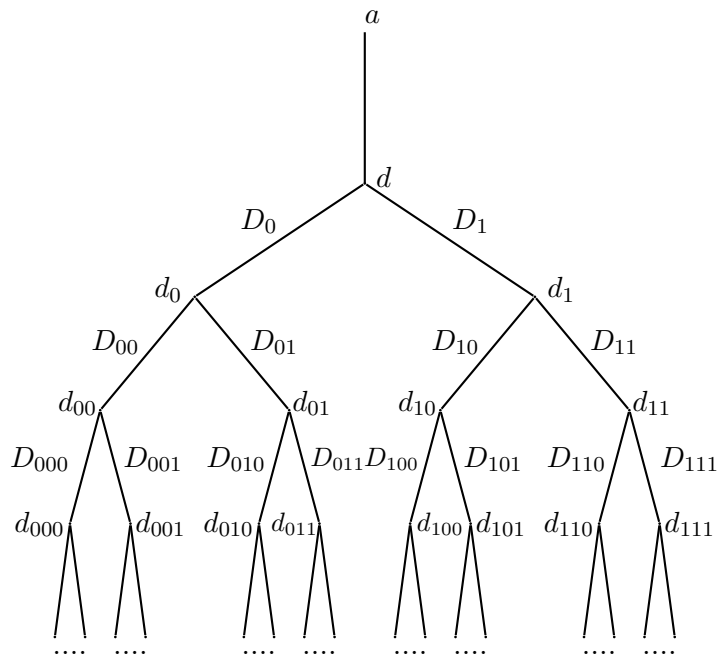
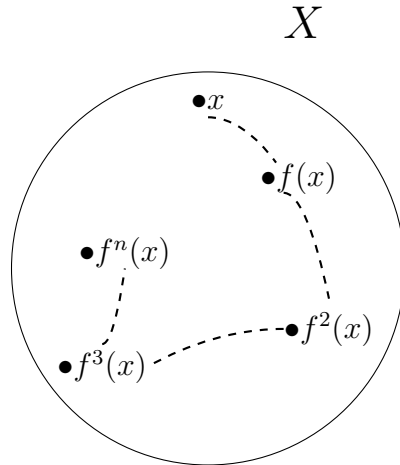


Figura 8. G.

1.2. Sistemas dinámicos discretos

Dados X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua, definimos el sistema dinámico discreto como el par (X, f) .



La figura anterior la podemos interpretar como: x denota el estado inicial de un elemento en X , mientras que $f(x)$ es su estado en el siguiente momento, $f^2(x) = f(f(x))$ el siguiente y así de manera inductiva. La sucesión formada por estas iteraciones de la función en un punto x , la llamaremos la órbita de x en f y la denotaremos por $\mathcal{O}_f(x)$; esto es:

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) : n \geq 0\} = \{x, f^1(x), f^2(x), f^3(x), \dots\},$$

donde $f^0(x) = x$, es decir, f^0 corresponde a la función identidad. A continuación definimos algunos puntos de interés a estudiar.

Definición 1.2.1. Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $x_0 \in X$. Diremos que x_0 es un punto periódico si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x_0) = x_0$. Si $n = 1$, diremos que x_0 es un punto fijo de f y decimos que x_0 tiene periodo k si $k = \min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) = x_0\}$.

Denotamos por $\text{Fix}(f)$ y $\text{Per}(f)$ al conjunto de puntos fijos y periódicos de f , respectivamente.

Observación 1.2.2. Note que $\text{Fix}(f) \subseteq \text{Per}(f)$.

1.2.1. La función Tienda. Sean $X = [0, 1]$ y $T : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2(1-x), & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

En la Figura 9 se representa la gráfica de T , conocida como la *función tienda*.

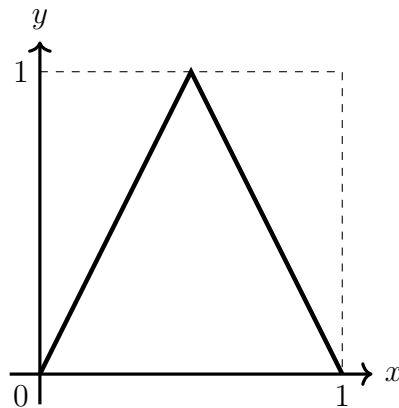


Figura 9. Gráfica de T .

Podemos observar quienes conforman el conjunto $\text{Fix}(T)$ igualando a la función tienda con la función identidad. Gráficamente los puntos fijos son los puntos intersección entre la gráfica de la función y la identidad, como se aprecia en la Figura 10. Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ es un punto fijo, entonces $T(x) = x = 2x$ es decir, $x = 0$. Análogamente, si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ es un punto fijo, entonces $2 - 2x = x$, luego $x = \frac{2}{3}$. Note que estos son los únicos puntos fijos de T . De lo anterior $\text{Fix}(T) = \{0, \frac{2}{3}\}$.

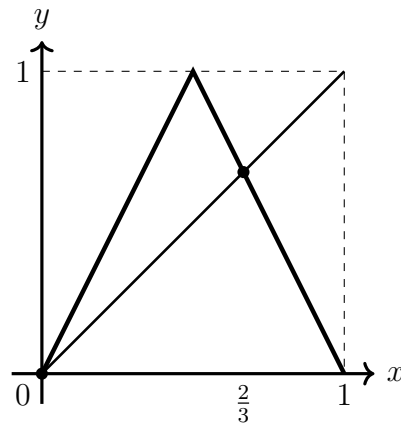


Figura 10. Puntos fijos de T .

Por otro lado podemos buscar algunos puntos periódicos. Para nuestro ejemplo, ilustraremos algunos puntos de periodo 3. Notemos primero que $\frac{1}{2}$ y 1 no son puntos periódicos ya que sus orbitas son $\mathcal{O}_T(\frac{1}{2}) = \{\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, \dots\}$ y $\mathcal{O}_T(1) = \{1, 0, 0, 0, 0, \dots\}$, respectivamente. Por otro lado los puntos $0, \frac{2}{3}$ son fijos, es decir de periodo 1, por lo que los puntos que buscamos no están en el conjunto $\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$. Los puntos de periodo 3 serán aquellos que al iterarlos 3 veces bajo la función tienda intersectan a la identidad, esto es, $x \in [0, 1]$ es tal que $T^3(x) = x$. No es difícil ver que la pendiente de en el primer punto de intersección diferente de cero corresponde a -8 , además la recta asociada a esta pendiente pasa por los puntos $(\frac{1}{8}, 1)$ y $(\frac{1}{4}, 0)$. Luego la ecuación que determina dicha recta es $y = -8x + 2$; para encontrar nuestro punto de periodo 3 basta hacer $-8x + 2 = x$, de donde $9x = 2$ y por lo tanto $x = \frac{2}{9}$. Si evaluamos este valor en la la tienda tenemos $T(\frac{2}{9}) = \frac{4}{9}$, e iterando se sigue que $T^2(\frac{2}{9}) = T(T(\frac{2}{9})) = \frac{8}{9}$ y $T^3(\frac{2}{9}) = T(T(T(\frac{2}{9}))) = \frac{2}{9}$. Así, $\mathcal{O}_T(\frac{2}{9}) = \{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \dots\}$. Note además que $\frac{4}{9}$ y $\frac{8}{9}$ también son puntos de periodo 3. Por otro lado, tomamos la recta que pasa por los puntos $(\frac{1}{4}, 0)$, $(\frac{3}{8}, 1)$; la cual tiene pendiente 8 y tiene como ecuación $y = 8x - 2$. Ahora, haciendo $8x - 2 = x$ obtenemos que $x = \frac{2}{7}$ y usando la tienda se sigue que $\mathcal{O}_T(\frac{2}{7}) = \{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \dots\}$. $\frac{4}{7}, \frac{6}{7}$ son también puntos de periodo 3. Estos puntos periódicos y sus orbitas son ilustradas mediante puntos y estrellas respectivamente en la Figura 11, sobre la gráfica de la tercera iteración de la tienda.

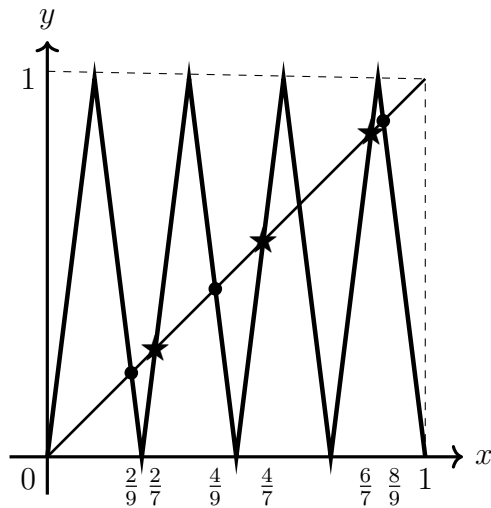


Figura 11. Gráfica de T^3 .

1.2.2. La función logística. Sean $X = [0, 1]$ y $L : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ dada por $L(x) = 4x(1 - x)$. En la Figura 12 se representa la gráfica de L , conocida como la *función logística*.

Podemos ver quienes conforman el conjunto $\text{Fix}(L)$ igualando la función logística con la función identidad Gráficamente los puntos fijos son los puntos intersección entre la gráfica de la función y la identidad, como se aprecia en la Figura 12. Si $x \in [0, 1]$ es un punto fijo, entonces $L(x) = 4x(1 - x) = x$ es decir, los puntos que satisfacen que $4x^2 + 3x = x(4x - 3) = 0$, de esta manera, $\text{Fix}(L) = \{0, \frac{3}{4}\}$.

Por otro lado podemos buscar algunos puntos periódicos. Para este ejemplo en particular, puntos de periodo 2. Notemos primero que $\frac{1}{2}$ y 1 no son puntos periódicos ya que sus orbitas son $\mathcal{O}_T(\frac{1}{2}) = \{\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, \dots\}$ y $\mathcal{O}_T(1) = \{1, 0, 0, 0, 0, \dots\}$, respectivamente. Por otra parte los puntos $0, \frac{3}{4}$ son fijos, es decir de periodo 1, por lo que los puntos que buscamos no están en el conjunto $\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$. Los puntos de periodo 2 serán aquellos que cumplen la siguiente igualdad $L^2(x) = -64x^4 + 128x^3 - 80x^2 + 16x = x$. Por tanto $x \in \{\frac{5-\sqrt{5}}{8}, \frac{5+\sqrt{5}}{8}\}$ y tenemos que $\mathcal{O}_L(\frac{5+\sqrt{5}}{8}) = \{\frac{5+\sqrt{5}}{8}, \frac{5-\sqrt{5}}{8}, \frac{5+\sqrt{5}}{8}, \dots\}$, es decir, $\frac{5+\sqrt{5}}{8}, \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ son puntos de periodo 2 y son ilustrados en la Figura 13.

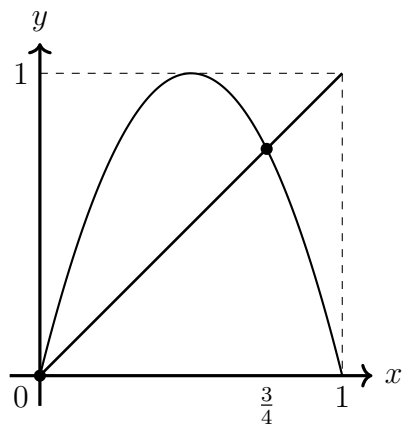


Figura 12. Gráfica y puntos fijos de L .

Repitiendo este razonamiento se pueden conseguir puntos de periodo $n \in \mathbb{N}$. En este ejemplo se reduce a hallar las raíces de un polinomio de grado 2^3 . En secciones posteriores mostraremos algunos ejemplos de sistemas que no tienen puntos periódicos.

1.2.3. Transitividad topológica. El concepto de transitividad será fundamental para el estudio del comportamiento de ciertas funciones que son objeto de estudio en este trabajo.

Definición 1.2.3. Sean X un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Decimos que f es transitiva en X si para cada par de conjuntos abiertos no vacíos U y V de X , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Ejemplo 1.2.4. $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $f(x) = x$ no es transitiva, ya que la imagen de cualquier abierto siempre va a dar el mismo. En particular, tome abiertos $U, V \subset [0, 1]$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Se sigue que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^n(U) = U$ y por lo tanto $f^n(U) \cap V = \emptyset$, concluimos que la función identidad $f(x) = x$ no es transitiva en $[0, 1]$.

En la siguiente proposición mostramos que la función tienda es transitiva.

Proposición 1.2.5. Sea $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función tienda. Entonces, T es transitiva.

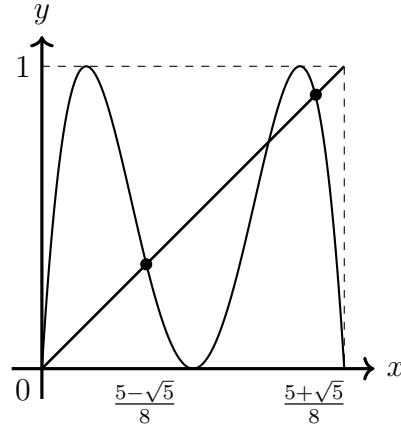


Figura 13. Gráfica de L^2 .

Demostración. Probemos antes la siguiente afirmación: Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $l \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$,

$$T^n \left(\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n} \right] \right) = [0, 1].$$

Si $n = 1$, $l \in \{0, 1\}$. De lo cual, si $l = 0$, $T \left(\left[\frac{l}{2}, \frac{l+1}{2} \right] \right) = T \left(\left[0, \frac{1}{2} \right] \right) = [0, 1]$, mientras que si $l = 1$, $T \left(\left[\frac{l}{2}, \frac{l+1}{2} \right] \right) = T \left(\left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right) = [0, 1]$. Luego la afirmación es cierta para $n = 1$.

Supongamos que es cierta para $k \in \mathbb{N}$, esto es,

$$T^k \left(\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k} \right] \right) = [0, 1] \quad \text{para cada } l \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}.$$

Probemos que $T^{k+1} \left(\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}} \right] \right) = [0, 1]$ para cada $l \in \{0, 1, \dots, 2^{k+1} - 1\}$. Para esto consideremos los siguiente casos:

i.) Si $l \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$, obtenemos $0 \leq l < l+1 \leq 2^k$, por lo que

$$0 \leq \frac{l}{2^{k+1}} < \frac{l+1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2}.$$

Luego $\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \subseteq \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Como $T(x) = 2x$ para cada $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, haciendo uso de la hipótesis de inducción obtenemos que

$$T^{k+1} \left(\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}} \right] \right) = T^k \left(T \left(\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}} \right] \right) \right) = T^k \left(\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k} \right] \right) = [0, 1].$$

ii.) Si $l \in \{2^k, 2^k + 1, \dots, 2^{k+1} - 1\}$, se sigue que $2^k \leq l < l + 1 \leq 2^{k+1}$, por lo que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{l}{2^{k+1}} < \frac{l+1}{2^{k+1}} \leq 1.$$

Recordemos que $T(x) = 2(1-x)$ para cada $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Así

$$T^{k+1} \left(\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}} \right] \right) = T^k \left(T \left(\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}} \right] \right) \right) = T^k \left(\left[\frac{2^{k+1} - l - 1}{2^k}, \frac{2^{k+1} - l}{2^k} \right] \right).$$

Como $l \in \{2^k, 2^k + 1, \dots, 2^{k+1} - 1\}$, tenemos que $2^k \leq l \leq 2^{k+1} - 1$, por lo que $2^k + 1 \leq l + 1 \leq 2^{k+1}$, de donde $-2^k + 1 \leq -l - 1 \leq -2^k - 1$, de modo que $0 \leq 2^{k+1} - l - 1 \leq 2^k - 1$, pues $2^{k+1} - 2^k - 1 = 2^k - 1$. Así, $2^{k+1} - l - 1 \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$, y nuevamente por la hipótesis de inducción,

$$T^k \left(\left[\frac{2^{k+1} - l - 1}{2^k}, \frac{2^{k+1} - l}{2^k} \right] \right) = [0, 1].$$

Luego, $T^{k+1} \left(\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}} \right] \right) = [0, 1]$ para cada $l \in \{0, 1, \dots, 2^{k+1} - 1\}$ y la afirmación es cierta para $k + 1$. Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $l \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$,

$$T^n \left(\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n} \right] \right) = [0, 1].$$

Finalmente, sean U y V abiertos no vacíos de $[0, 1]$ y tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right] \subset U$, para algún $l \in \{0, 1, \dots, 2^N - 1\}$. Por la afirmación anterior,

$$T^N \left(\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N} \right] \right) = [0, 1], \quad \text{de modo que } T^N(U) = [0, 1].$$

Así, $T^N(U) \cap V \neq \emptyset$ y T es transitiva. □

En secciones posteriores veremos algunos ejemplos de funciones que también resultan ser transitivas. El siguiente resultado relaciona la transitividad topológica con la existencia de puntos cuya órbita resulta ser un conjunto denso en un sistema dinámico discreto.

Teorema 1.2.6. *Sea X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua y transitiva en X . Entonces existe $x_0 \in X$ tal que $\mathcal{O}_f(x_0)$ forma un conjunto denso en X .*

Demostración. Sea $\beta = \{U_j : j \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de X . Consideremos ahora el conjunto

$$A_j = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(U_j)$$

Cada $f^{-i}(U_j)$ es un abierto no vacío de X . Luego A_j es también un abierto no vacío de X .

Probemos que A_j es denso en X . Sea V un abierto no vacío de X . Dado que f es transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(V) \cap U_j \neq \emptyset$. Escojamos $x \in V$ tal que $f^n(x) \in U_j$. Entonces, $x \in f^{-n}(U_j) \subseteq A_j$. Por tanto, $A_j \cap V \neq \emptyset$. Esto prueba que A_j abierto y denso en X , para todo $j \in \mathbb{N}$. Así, cada $X \setminus A_j$ es cerrado y su interior es vacío. En otras palabras, cada $X \setminus A_j$ es denso en ninguna parte. Por el Teorema de categorías de Baire, enunciado como Proposición 9.7 en “Topología general”⁵, la unión de los $X \setminus A_j$ no puede

⁵ Camargo J. y Villamizar E., Topología General, Ediciones UIS, Bucaramanga, 2019.

ser todo el espacio X , es decir, existe un punto

$$x_0 \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} (X \setminus A_j).$$

Luego, $x_0 \notin X \setminus A_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, por lo que

$$x_0 \in A_j = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(U_j) \text{ para cada } j \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto $x_0 \in f^{-N}(U_j)$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Así, $f^n(x_0) \in U_j$. Luego, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O}_f(x_0) \cap U_j \neq \emptyset$. Así, $\mathcal{O}_f(x_0)$ es un conjunto denso en X .

□

Este resultado será de gran utilidad en próximos capítulos para exhibir puntos de sistemas dinámicos y sistema que poseen algunas particularidades.

1.3. Conjugación topológica

En matemáticas es común tratar de generalizar propiedades y agrupar objetos que las reúnan con el fin de facilitar su estudio. Los sistemas dinámicos discretos no son la excepción. Podemos estudiar las propiedades dinámicas de un conjunto y cómo se preservan vía homeomorfismo.

Definición 1.3.1. Sean X, Y espacios métricos y $f: X \rightarrow X$, $g: Y \rightarrow Y$ dos funciones continuas. Decimos que f y g son topológicamente conjugadas si existe un homeomorfismo $h: X \rightarrow Y$ tal que para todo punto $x \in X$ se tiene que

$$h(f(x)) = g(h(x)).$$

Esta condición de conjugación puede ser expresada diciendo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Ejemplo 1.3.2. Las funciones T y L definidas en esta sección son conjugadas bajo el homeomorfismo $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dado por $h(x) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Sea $x \in [0, 1]$. Calculemos $h(T(x))$. Para esto, consideremos los siguientes casos; si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces

$$h(T(x)) = h(2x) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi(2x)}{2}\right) = \text{sen}^2(\pi x).$$

Por otro lado, si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, entonces

$$h(T(x)) = h(2 - 2x) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi(2 - 2x)}{2}\right) = \text{sen}^2(\pi - \pi x) = \text{sen}^2(\pi x).$$

Ahora veamos a qué es igual $L(h(x))$. Sea $x \in [0, 1]$.

$$L(h(x)) = 4\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left(1 - \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = 4\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \left(2\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2.$$

Así, $L(h(x)) = \text{sen}^2(\pi x)$. Por lo tanto, para todo $x \in [0, 1]$ tenemos que $h(T(x)) = L(h(x))$.

Si dos funciones son conjugadas las propiedades dinámicas que hemos mencionado que posean estas funciones son esencialmente las mismas, mostramos a continuación dichas propiedades y cómo se conservan.

Proposición 1.3.3. Sean X, Y espacios métricos compactos, $f: X \rightarrow X$ y $g: Y \rightarrow Y$ funciones continuas y conjugadas bajo el homeomorfismo $h: X \rightarrow Y$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in X$ se tiene que $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$.

Demostración. Se tiene para $n = 1$ ya que f y g son conjugadas bajo h . Supongamos ahora que para $k - 1 \in \mathbb{N}$, $h(f^{k-1}(x)) = g^{k-1}(h(x))$ para cada $x \in X$. Se sigue que $h(f^k(x)) = h(f^{k-1}(f(x))) = g^{k-1}(h(f(x))) = g^{k-1}(g(h(x))) = g^k(h(x))$. \square

Notemos que $h^{-1}: Y \rightarrow X$ también es un homeomorfismo y que si $y \in Y$, $g(h(h^{-1}(y))) = h(f(h^{-1}(y)))$ por lo que $h^{-1}(g(y)) = f(h^{-1}(y))$. A partir de esto hacemos la siguiente observación.

Observación 1.3.4. Si $h: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo que conjuga a $f: X \rightarrow X$ y $g: Y \rightarrow Y$, entonces f y g son conjugadas bajo el homeomorfismo h^{-1} .

La siguiente proposición muestra que el homeomorfismo que conjuga a las funciones preserva las propiedades de los elementos en su sistema.

Proposición 1.3.5. Sean X e Y espacios métricos compactos, $f: X \rightarrow X$ y $g: Y \rightarrow Y$ funciones continuas y conjugadas bajo el homeomorfismo h . Entonces:

1. $h(\text{Fix}(f)) = \text{Fix}(g)$

2. $h(\text{Per}(f)) = \text{Per}(g)$

Demostración. Veamos el ítem 1, es decir, $h(\text{Fix}(f)) = \text{Fix}(g)$. Sea $x \in \text{Fix}(f)$. como f y g son conjugadas bajo h , entonces $h(x) = h(f(x)) = g(h(x))$ y $h(x) \in \text{Fix}(g)$. De la observación 1.3.4 se sigue que si $y \in \text{Fix}(g)$, entonces $h^{-1}(y) = h^{-1}(g(y)) = f(h^{-1}(y)) = f(x)$ y $h^{-1}(y) \in \text{Fix}(f)$.

Ahora, probemos la afirmación 2, esto es $h(\text{Per}(f)) = \text{Per}(g)$. Sea $x \in \text{Per}(f)$ un punto de periodo $n > 1$. Por definición $f^n(x) = x$ y para todo $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $f^i(x) \neq x$. Así, $h(x) = h(f^n(x)) = g^n(h(x))$. Además, como h es en particular inyectiva, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $h(x) \neq h(f^i(x)) = g^i(h(x))$ y $h(x) \in \text{Per}(g)$. Usando un razonamiento análogo y haciendo uso de la Observación 1.3.4, si $y \in \text{Per}(g)$, $x = h^{-1}(y)$. □

Además de estas propiedades que preservan la dinámica de los elementos bajo homeomorfismo, la conjugación topológica preserva la transitividad como se ve en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.6. Sean X e Y espacios métricos compactos, $f: X \rightarrow X$ y $g: Y \rightarrow Y$ funciones continuas y conjugadas bajo el homeomorfismo h . Entonces f es transitiva si, y solo si, g es transitiva.

Demostración. Veamos que si f es transitiva en X , entonces g es transitiva en Y . Sean U y V abiertos y no vacíos en Y . Los conjuntos $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son conjuntos no vacíos y abiertos en X . Como f es transitiva en X , existen $x_0 \in h^{-1}(U)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$f^n(x_0) \in h^{-1}(V)$. Entonces $h(x_0) \in U$ y $g^n(h(x_0)) = h(f^n(x_0)) \in V$. Así $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Razonando de forma análoga obtenemos la otra implicación.

□

Una vez estudiada esta fuerte herramienta para entender mejor los sistemas dinámicos, pasamos al siguiente capítulo donde cobrará sentido el estudio de este concepto.

2. El conjunto ω -límite

En este capítulo desarrollamos el objetivo principal de este trabajo. Definiremos el conjunto ω -límite, mostraremos algunas propiedades y presentaremos diversos ejemplos de compactos que son conjuntos ω -límite de algún sistema dinámico discreto.

Definición 2.0.1. Sea (X, f) un sistema dinámico discreto, donde X es un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Para cada $x_0 \in X$, definimos el conjunto ω -límite de x_0 de x_0 , por:

$$\omega(x_0, f) = \{x \in X : \text{existe una sucesión creciente } (n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}, \text{ tal que } \lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = x\}.$$

A continuación enunciamos algunas de las propiedades con las que cuentan los omega conjuntos límite. Algunas pruebas de esta sección las tomamos de “Sistemas dinámicos discretos”⁶.

Proposición 2.0.2. Sean X un espacio métrico compacto, $x \in X$ y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Entonces:

1. $\omega(x, f) \neq \emptyset$.
2. $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado de X , por tanto compacto.
3. $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$, es decir, es un conjunto fuertemente invariante.

Demostración. Dado $x \in X$, consideremos su órbita dada por la sucesión $\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty} \subset X$. Como X es compacto, $\mathcal{O}_f(x)$ admite una subsucesión $\{f^{n_i}(x)\}_{i=0}^{\infty}$ que

⁶ Davalos K. y Mendez H., Sistemas Dinámicos Discretos, primera edición, serie: Temas de matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, 2014.

converge a algún punto $y \in X$; así, $y \in \omega(x, f)$ y $\omega(x, f) \neq \emptyset$. Veamos ahora que $\omega(x, f)$ es cerrado. Sean $x \in X$ y $\omega(x, f)$ su omega conjunto límite. Tomemos una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \omega(x, f)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ y veamos que $y \in \omega(x, f)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\epsilon_n = \frac{1}{n}$. Como $y_n \rightarrow y$, para algún $n_1 \in \mathbb{N}$, $y_{n_1} \in B(y, \epsilon_1)$. De igual forma, dado que $y_{n_1} \in \omega(x, f)$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_1}(x) \in B(y_{n_1}, \frac{\epsilon_1}{2}) \subseteq B(y, \epsilon_1)$. Ahora, sea $n_2 > n_1$ tal que $y_{n_2} \in B(y, \epsilon_2)$ y $k_2 > k_1$ de manera que $f^{k_2}(x) \in B(y_{n_2}, \frac{\epsilon_2}{2}) \subseteq B(y, \epsilon_2)$. Haciendo este proceso de forma inductiva, obtenemos una sucesión creciente $\{k_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, $f^{k_i}(x) \in B(y, \epsilon_i) = B(y, \frac{1}{i})$. Así, $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{k_i}(x) = y$. Por lo tanto, $y \in \omega(x, f)$ y $\omega(x, f)$ es cerrado.

Por último, veamos que $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$. Sea $x \in X$ y $\omega(x, f)$ su omega conjunto límite. Probemos primero la contención $f(\omega(x, f)) \subseteq \omega(x, f)$. Sean $z \in f(\omega(x, f))$. Entonces, existe $y \in \omega(x, f)$ tal que $f(y) = z$. Por otro lado, existe una sucesión creciente $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y$. Luego, $f(\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x)) = f(y) = z$ y como f es continua, se sigue que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k+1}(x) = f(y) = z$. De lo anterior, $z \in \omega(x, f)$.

Mostremos ahora que $\omega(x, f) \subseteq f(\omega(x, f))$. Sea $y \in \omega(x, f)$. Tomando $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ creciente tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $n_k > 1$. Además, consideremos la sucesión $\{f^{n_k-1}(x)\}_{k=1}^{\infty}$; la cuál, por la compacidad de X admite una subsucesión $\{f^{n_{k_j}-1}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ convergente a algún $z \in X$. Esto es, $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{k_j}-1}(x) = z$; es decir, $z \in \omega(x, f)$. Además, por la continuidad de f , $y = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = f(\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{k_j}-1}(x)) = f(z)$. Luego $y \in f(\omega(x, f))$ y $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$. \square

Proposición 2.0.3. Sean X un espacio métrico compacto, $f: X \rightarrow X$ una función continua y $k \in \mathbb{N}$. Entonces para todo $x \in X$ se tiene lo siguiente:

1. $f(\omega(x, f^k)) = \omega(f(x), f^k)$.
2. $\omega(x, f) = \omega(x, f^k) \cup \omega(f(x), f^k) \cup \omega(f^2(x), f^k) \cup \dots \cup \omega(f^{k-1}(x), f^k)$.

Demostración. Veamos la afirmación 1, esto es, $f(\omega(x, f^k)) = \omega(f(x), f^k)$. Sean $k \in \mathbb{N}$, $x \in X$ y $\omega(x, f^k)$ su omega conjunto límite bajo la iteración k de f . Mostremos que $f(\omega(x, f^k)) \subseteq \omega(f(x), f^k)$. Sea $z \in f(\omega(x, f^k))$. Luego, existe $y \in \omega(x, f^k)$ tal que $f(y) = z$. Por otro lado, existe una sucesión creciente $\{n_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} (f^k)^{n_j}(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{kn_j}(x) = y$. De esta manera, $f(\lim_{j \rightarrow \infty} (f^k)^{n_j}(x)) = f(\lim_{j \rightarrow \infty} f^{kn_j}(x)) = f(y) = z$ y como f es continua, $\lim_{j \rightarrow \infty} (f^k)^{n_j+1}(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{kn_j+1}(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{kn_j}(f(x)) = f(y) = z$. Por tanto, $z \in \omega(f(x), f^k)$. Probemos ahora que $\omega(x, f^k) \subseteq f(\omega(x, f^k))$. Sea $y \in \omega(x, f)$. Tomando $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ creciente tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y$. Consideremos la sucesión $\{f^{n_k-1}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, la cual, por la compacidad de X admite una subsucesión $\{f^{n_{k_j}-1}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ convergente a algún $z \in X$, esto es $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{k_j}-1}(x) = z$, es decir, $z \in \omega(x, f)$. Además, por la continuidad de f , $y = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = f(\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{k_j}-1}(x)) = f(z)$. Luego $y \in f(\omega(x, f))$ y $f(\omega(x, f^k)) = \omega(x, f^k)$.

Mostremos ahora el ítem 2, esto es, dado un entero positivo k , probaremos que $\omega(x, f) = \omega(x, f^k) \cup \omega(f(x), f^k) \cup \omega(f^2(x), f^k) \cup \dots \cup \omega(f^{k-1}(x), f^k)$. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. De la definición se sigue que $f^m(\omega(x, f^n)) \subseteq \omega(x, f)$. De esto obtenemos que $\omega(x, f^n) \cup f(\omega(x, f^n)) \cup \dots \cup f^{n-1}(\omega(x, f^n)) \subseteq \omega(x, f)$. Ahora, dado $y \in \omega(x, f)$, existe una sucesión creciente $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y$. Por el algoritmo de la división, $n_k = r_k n + s_k$, donde $s_k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como $\{0, 1, \dots, n-1\}$ es un conjunto finito, existen una subsucesión $\{n_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tales que $n_{k_j} = r_{k_j} n + s$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Tenemos así que $f^{n_{k_j}}(x) = f^s((f^n)^{r_{k_j}}(x))$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Por la compacidad de X , existe una subsucesión $\{r_{k_{j_i}}\}$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} (f^n)^{r_{k_{j_i}}}(x) = z$, para

algún $z \in X$. Luego, concluimos que $y = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{k_j}}(x) = f^s(\lim_{j \rightarrow \infty} (f^n)^{r_{k_j}}(x)) = f^s(z)$. Así, $y \in f^s(\omega(x, f^n))$, y por tanto $\omega(x, f) \subseteq \omega(x, f^n) \cup f(\omega(x, f^n)) \cup \dots \cup f^{n-1}(\omega(x, f^n))$.

□

La noción de funciones topológicamente conjugadas y funciones transitivas que usaremos en los siguiente resultados, se puede recordar en la Definición 1.3.1.

Teorema 2.0.4. *Sea X un espacio métrico compacto sin puntos aislados y $f: X \rightarrow X$ una función continua en X . Si x_0 es tal que $\mathcal{O}_f(x_0)$ es un conjunto denso en X , entonces $\omega(x_0, f) = X$.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $U_n = B(x, \frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{O}_f(x_0)$ es densa en X , existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_1}(x_0) \in U_1$. Por otro lado, como $U_2 \setminus \{x_0, f(x_0), \dots, f^{n_1}(x_0)\}$ es abierto en X y $\mathcal{O}_f(x_0)$ es densa, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_2}(x_0) \in U_2 \setminus \{x_0, f(x_0), \dots, f^{n_1}(x_0)\}$. Suponga ahora $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, donde para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $f^{n_i}(x_0) \in U_i$. Como $U_{k+1} \setminus \{x_0, f(x_0), \dots, f^{n_k}(x_0)\}$ es abierto y $\mathcal{O}_f(x_0)$ es densa, existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_{k+1}}(x_0) \in U_{k+1} \setminus \{x_0, f(x_0), \dots, f^{n_k}(x_0)\}$. Así, de manera inductiva para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_j}(x_0) \in U_j$ y además si $i < j$, entonces $n_i < n_j$ y por lo tanto $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_j}(x_0) = x$ y $x \in \omega(x_0, f)$. □

Lema 2.0.5. *Sean X e Y dos espacios métricos compactos y $f: X \rightarrow X$ y $g: Y \rightarrow Y$ funciones continuas. Si f y g son topológicamente conjugadas bajo el homeomorfismo h , entonces $\omega(x_0, f) \cong \omega(h(x_0), g)$.*

Demostración. Sea $x \in \omega(x_0, f)$. Por definición, existe una sucesión creciente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x_0) = x$. Luego

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(f^{n_k}(x_0)) = h(x).$$

Como f y g son conjugadas bajo h , entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(f^{n_k}(x_0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} g^{n_k}(h(x_0)) = h(x).$$

Así, $h(x) \in \omega(h(x_0), g)$.

Lo anterior muestra que $h|_{\omega(x_0, f)}: \omega(x_0, f) \rightarrow \omega(h(x_0), g)$ está bien definida. Como h es un homeomorfismo, de la misma manera podemos verificar que $h|_{\omega(x_0, f)}$ es sobreyectiva. De lo anterior, $h|_{\omega(x_0, f)}$ es una biyección continua entre compactos (ver Proposición 2.0.2). Así, $h|_{\omega(x_0, f)}: \omega(x_0, f) \rightarrow \omega(h(x_0), g)$ es un homeomorfismo. \square

2.1. La función shift

Esta sección la dedicamos a estudiar conjuntos ω -límite de una función muy estudiada en la teoría de los sistemas dinámicos discretos definida sobre el conjunto de Cantor y conocida como la *función shift*.

Sean $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de Cantor y $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ definida para cada $t = (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por:

$$\sigma(t) = \sigma((t_1, t_2, t_3, \dots)) = (t_2, t_3, t_4, \dots). \quad (1)$$

Sabemos que el conjunto de Cantor $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico dotado con la función $d: \Sigma_2 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$d(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t_n - s_n|}{2^n}, \text{ si } t, s \in \Sigma_2.$$

Equivalentemente, podemos considerar Σ_2 como espacio topológico inducido por la base

$$\mathcal{B} = \{[a_1 \dots a_n] : a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}, n \in \mathbb{N}\}, \quad (2)$$

donde $[a_1 \dots a_n] = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : x_i = a_i \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}\}$.

Una prueba que la topología generada por la métrica d y la topología generada por la base \mathcal{B} son iguales, es consecuencia de la Proposición 9,7 dada en “Topology and geometry”⁷.

En el siguiente resultado mostramos que dado cualquier entero positivo n , existe un omega conjunto límite con exactamente n puntos. Esto es, cualquier compacto finito es homeomorfo a un omega conjunto límite de la función shift.

Proposición 2.1.1. *Sea $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la función shift definida en (1). Si $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $s \in \Sigma_2$ tal que $\omega(s, \sigma)$ tiene n puntos.*

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $s = (s_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i \in \{1, \dots, n-1\}; \\ 1, & \text{si } i = n; \\ s_j, & \text{si } i = j + kn, \text{ donde } j \in \{1, \dots, n\} \text{ y } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Observemos que $\sigma^n(s) = s$ y $\sigma^l(s) \neq \sigma^r(s)$ para cualesquiera $l, r \in \{1, \dots, n\}$ con $l \neq r$. Por tanto, $\omega(s, \sigma) = \mathcal{O}_\sigma(s) = \{s, \sigma(s), \sigma^2(s), \dots, \sigma^{n-1}(s)\}$ tiene n puntos. \square

A continuación mostraremos la transitividad de la función shift.

⁷ Bredon, Glen E. Topology and Geometry. New York; Springer, 1993.

Proposición 2.1.2. Sean Σ_2 el espacio de Cantor y σ la función shift definida en (1). Entonces, la función σ es transitiva.

Demostración. Notemos que basta verificar la transitividad con los elementos de la base \mathcal{B} definida en (2). Sean $U = [t_1, \dots, t_n]$ y $V = [s_1, \dots, s_m]$ abiertos de Σ_2 y consideremos el punto, $r = (t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_m, 0, 0, \dots)$. Notemos que $r \in U$. Además, $\sigma^n(r) \in V$; pues $\sigma^n(r) = (s_1, \dots, s_m, 0, 0, \dots)$. Así, $\sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset$ y por tanto, σ es transitiva. \square

Dada la proposición anterior y haciendo uso de los Teoremas 1.2.6 y 2.0.4, garantizamos el siguiente resultado.

Proposición 2.1.3. Sean Σ_2 el espacio de Cantor y σ la función shift definida en (1). Entonces, existe $t \in \Sigma_2$ tal que $\omega(t, \sigma) = \Sigma_2$.

Hasta este momento tenemos que usando la función shift, podemos encontrar cualquier compacto finito (Proposición 2.1.1) o el conjunto de Cantor (Proposición 2.1.3), conjuntos ω -límite de un punto de Σ_2 . Con el siguiente resultado mostramos que el conjunto ω -límite puede ser una sucesión convergente.

Proposición 2.1.4. Sean $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la función shift, donde Σ_2 el espacio de Cantor como lo denotamos anteriormente. Sea $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, $s_3 = s_2 + 3$; en general, para cada $n \in \mathbb{N}$, $s_n = s_{n-1} + n$. Si consideramos el punto $t = (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, en Σ_2 , definido por:

$$t_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = s_i \text{ para algún } i \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Esto es:

$$t = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots).$$

Entonces $\omega(t, \sigma)$ es un conjunto numerable con un único punto de acumulación.

Demostración. Sea $\pi_i: \Sigma_2 \rightarrow \{0, 1\}$ la proyección a la i -ésima coordenada. Mostraremos que los puntos en el conjunto ω -límite de t son: $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 0, \dots)\}$, donde para cada entero positivo k , $e_k \in \Sigma_2$ se define tal que

$$\pi_i(e_k) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq k; \\ 1, & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Veamos primero que $e_k \in \omega(t, \sigma)$. Sean e_k para $k \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

Veamos que $B_d(e_k; \epsilon) \cap \mathcal{O}_\sigma(t) \neq \emptyset$. Notemos que como e_k tiene un 1 en una única coordenada, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_i(\sigma^j(t)) = \pi_i(e_k)$ para cada $i \in \{1, \dots, N\}$. Así,

$$d(\sigma^j(t), e_k) = \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{|\pi_i(\sigma^j(t)) - \pi_i(e_k)|}{2^i} \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

De lo anterior, $\sigma^j(t) \in B_d(e_k, \epsilon)$. Luego, e_k es un punto límite de $\mathcal{O}_\sigma(t)$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \omega(t, \sigma)$. Además, como $\omega(t, \sigma)$ es compacto (ver Proposición 2.0.2) y $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = (0, 0, \dots)$, tenemos que $(0, 0, \dots) \in \omega(t, \sigma)$.

Por otro lado, demostremos que no hay más puntos límite. Consideremos k y l enteros positivos, con $k < l$, y $w \in \Sigma_2$ tal que $\pi_k(w) = \pi_l(w) = 1$. Veamos que existe $\epsilon > 0$ tal que $|B_d(w; \epsilon) \cap \mathcal{O}_\sigma(t)| < \infty$. Notemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_i(\sigma^m(t)) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, l - k\}$. Así, si $s > m$ se sigue que $\pi_k(\sigma^s(t)) \neq 1$ ó $\pi_l(\sigma^s(t)) \neq 1$, y por lo tanto

$$d(\sigma^s(t), w) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\pi_i(\sigma^s(t)) - \pi_i(w)|}{2^i} \geq \frac{1}{2^l}.$$

Tomando $\epsilon = \frac{1}{2^l}$, concluimos que w no es punto límite de $\mathcal{O}_\sigma(t)$. De lo anterior, $\omega(t, \sigma) =$

$\{e_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 0, \dots)\}$ el cual es homeomorfo a una sucesión convergente. \square

Terminamos esta sección con la siguiente pregunta:

Pregunta 2.1.5. *¿Para cualquier compacto $K \subseteq \Sigma_2$, existe $z \in \Sigma_2$ tal que $\omega(z, \sigma)$ es homeomorfo a K ? En particular, dado un compacto numerable con k puntos límite, $k \in \mathbb{N}$, ¿existe $s \in \Sigma_2$ tal que $\omega(s, \sigma)$ es homeomorfo al compacto?*

2.2. Conjuntos que son ω -límite de la tienda

Regresando a la función tienda, mostraremos algunos ejemplos de conjuntos ω -límite que se obtienen a partir de este ejemplo. Sean $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{9}$ y $\frac{2}{5}$; sus conjuntos ω -límite son $\omega(\frac{1}{2}, T) = \{0\}$, $\omega(\frac{2}{7}, T) = \{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\}$, $\omega(\frac{2}{9}, T) = \{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\}$ y $\omega(\frac{2}{5}, T) = \{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$ respectivamente.

Hasta el momento, tenemos ejemplos de puntos cuyos conjuntos ω -límite resultan ser finitos. Más aún, con lo presentado en la Sección 1.2.1, podemos concluir que, dado cualquier entero positivo n , podemos encontrar $s \in [0, 1]$ tal que $\omega(s, T)$ tiene exactamente n puntos. Por otro lado, la Proposición 1.2.5 muestra que la tienda $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función transitiva, A partir de esto y usando los Teoremas 1.2.6 y 2.0.4, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. *Sea $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función tienda. Entonces existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $\omega(x_0, T) = [0, 1]$.*

Este resultado garantiza la existencia de puntos no periódicos. Hemos visto cómo a partir de la función tienda, definida sobre el intervalo cerrado $[0, 1]$, logramos obtener omega conjuntos límite finitos e infinitos. Los siguientes ejemplos muestran que podemos encontrar puntos cuyo conjuntos ω -límite son de mayor complejidad; como por ejemplo: un conjunto de Cantor o un conjunto infinito numerable. Antes de mostrar estos ejemplos definimos algunos conceptos que serán de utilidad al momento de ilustrarlos.

Definición 2.2.2. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Denotamos como $J(f)$ al conjunto de los puntos atrapados de f y lo definimos como

$$J(f) = \{x \in \mathbb{R} : \mathcal{O}_f(x) \text{ es acotada}\}.$$

Para mostrar un ejemplo de la definición anterior, consideremos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $x \in \mathbb{R}$ por $f(x) = x^2$. No es difícil ver que $J(f) = [-1, 1]$.

Proposición 2.2.3. Sea $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función tienda. Entonces existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $\omega(x_0, T)$ es un conjunto de Cantor.

Demostración. Consideremos la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}; \\ 4(1-x), & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Observe que f coincide con la segunda iteración de la función tienda T^2 en los intervalos $[0, \frac{1}{4}]$ y $[\frac{3}{4}, 1]$. Note que si $x < 0$, entonces $x > f(x) > f^2(x) > \dots > f^n(x) = 4^n x$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = -\infty$. Por otro lado, si $x > 1$, entonces $1 - x < 0$ y por lo tanto $4(1-x) = f(x) < 0$. De esta manera nos encontramos en el caso anterior y tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = -\infty$. Además, si consideramos $x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, tenemos que $f(x) > 1$. Por los casos anteriores tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = -\infty$. De esta manera sabemos que:

$$J(f) \subseteq \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

Sea $A_1 = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$. Veamos que la función f envía cada uno de estos intervalos, $[0, \frac{1}{4}]$ y $[\frac{3}{4}, 1]$, en $[0, 1]$, y por tanto, los intervalos $(\frac{1}{16}, \frac{3}{16})$ y $(\frac{13}{16}, \frac{15}{16})$ son transformados en

$(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, que son puntos que no están en $J(f)$, como se ve en la Figura 14.

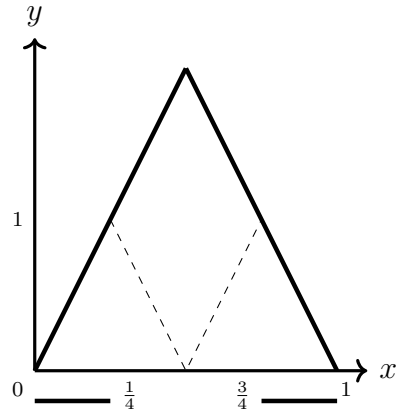


Figura 14. Construcción de A_1 .

Sea $A_2 = [0, \frac{1}{16}] \cup [\frac{3}{16}, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, \frac{13}{16}] \cup [\frac{15}{16}, 1]$. De esta manera, $J(f) \subseteq A_2$. Usando el razonamiento anterior, obtenemos 8 intervalos cerrados de longitud $(\frac{1}{4})^3$ de los cuales sus dos cuartos centrales no están en $J(f)$, véase la Figura 15.

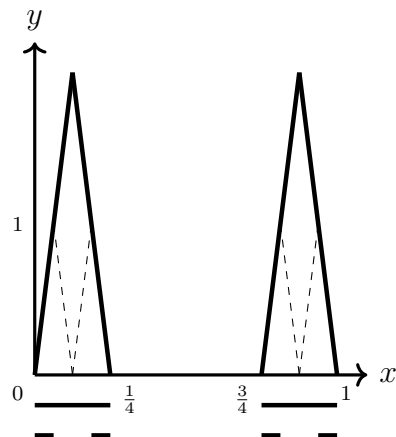


Figura 15. Construcción de A_2 .

Siguiendo este proceso de manera iterativa, definimos A_n para cada $n \geq 3$, y construimos el conjunto:

$$C_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

En la Figura 16 se visualiza los intervalos encajados resultantes.

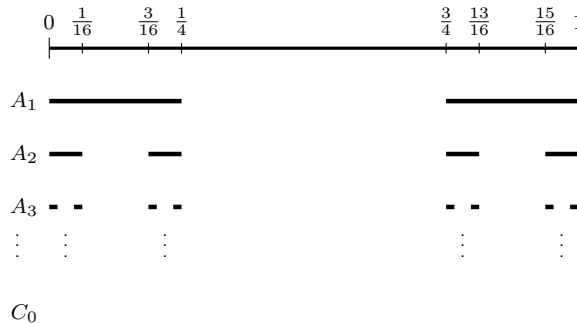


Figura 16. Construcción de C_0 .

Note que C_0 es una intersección de compactos encajados; esto implica que C_0 es compacto y diferente del vacío. Además, es claro que como la longitud de A_n , la cual denotaremos por $|A_n|$, es igual a $\frac{1}{2^n}$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n| = 0$. Esto implica que para cualquier abierto $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ alrededor de $x \in C_0$, con $\epsilon > 0$, podemos encontrar un n_0 suficientemente grande tal que alguno de los intervalos, digamos I_{n_0} de A_{n_0} satisfaga que $I_{n_0} \subseteq (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Como los extremos de I_{n_0} están en C_0 , x no es un punto aislado y C_0 es un conjunto perfecto. Esto muestra además que C_0 no contiene intervalos. Por lo tanto, C_0 es totalmente desconexo. Verificadas estas propiedades, concluimos que C_0 es un conjunto de Cantor (ver Corolario 6,6 de “Sistemas dinámicos discretos”⁸).

Con esta construcción tenemos que $J(f) \subseteq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por tanto $J(f) \subset C_0$. Veamos ahora que $C_0 \subset J(f)$. Sea $x \in C_0$. Se sigue que $x \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $f^n(x) \in [0, 1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $x \in J(f)$ y $J(f) = C_0$.

Definamos $I_0 = [0, \frac{1}{4}]$ e $I_1 = [\frac{3}{4}, 1]$. Por lo que hicimos, el conjunto $J(f)$ está contenido en $[0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1] = I_0 \cup I_1$. A partir de esto, consideremos la función $h: J(f) \rightarrow \Sigma_2$, dada por:

⁸ Davalos K. y Mendez H., Sistemas Dinámicos Discretos, primera edición, serie: Temas de matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, 2014.

$$h(x) = t = (t_1, t_2, t_3, \dots),$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n = \begin{cases} 0, & \text{si } f^n(x) \in I_0; \\ 1, & \text{si } f^n(x) \in I_1. \end{cases}$$

Veamos que h es un homeomorfismo.

Probemos primero que h es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in J(f)$ tales que $x_1 \neq x_2$. Tomemos $k = \text{mín}\{l \in \mathbb{N} \mid x_1, x_2 \text{ están en diferentes componentes de } A_l\}$. Se sigue que la proyección $\pi_k(h(x_1)) \neq \pi_k(h(x_2))$ y así $h(x_1) \neq h(x_2)$, es decir, h es inyectiva.

Veamos ahora que h es sobreyectiva. Denotemos a los intervalos $[0, \frac{1}{16}]$, $[\frac{3}{16}, 1]$ por I_{00} e I_{01} respectivamente y notemos que $f(I_{00}) = I_0$ e $f(I_{01}) = I_1$, por otro lado llamemos a $[\frac{3}{4}, \frac{13}{16}]$, $[\frac{15}{16}, 1]$ por I_{10} e I_{11} respectivamente, los cuales son tales que $f(I_{10}) = I_0$ y $f(I_{11}) = I_1$. La longitud de cada uno de estos cuatro intervalos cerrados es $(\frac{1}{4})^2$, son disjuntos dos a dos y su unión da el conjunto A_2 . En el siguiente paso se definen cuatro intervalos en I_0 , llamados $I_{000}, I_{001}, I_{010}, I_{011}$, tales que la función f los transforma de la siguiente manera:

$$I_{000} \rightarrow I_{00} \rightarrow I_0 \rightarrow [0, 1],$$

$$I_{001} \rightarrow I_{01} \rightarrow I_1 \rightarrow [0, 1],$$

$$I_{010} \rightarrow I_{10} \rightarrow I_0 \rightarrow [0, 1],$$

$$I_{011} \rightarrow I_{11} \rightarrow I_1 \rightarrow [0, 1].$$

De manera similar denotan otros cuatro intervalos en I_1 que se comportan de manera análoga. En la Figura 17 se ilustra cada uno de estos intervalos. En este punto tenemos $2^3 = 8$ intervalos de la forma $I_{t_1 t_2 t_3}$, $t_i \in \{0, 1\}$.

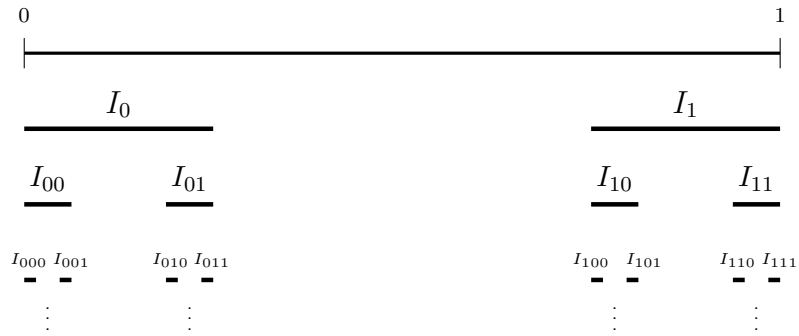


Figura 17. Etiquetado de los intervalos

En términos generales la dinámica de la función f mueve los intervalos de la siguiente manera

$$I_{t_1 t_2 t_3} \rightarrow I_{t_2 t_3} \rightarrow I_{t_3} \rightarrow [0, 1].$$

La unión de todos los intervalos $I_{t_1 t_2 t_3}$ es A_3 . Obsérvese que si $x \in I_{t_1 t_2 t_3}$, entonces

$$x \in I_{t_1}, \quad f(x) \in I_{t_2}, \quad \text{y} \quad f^2(x) \in I_{t_3}.$$

En el paso n de esta construcción obtenemos 2^n intervalos cerrados de la forma

$$I_{t_1 t_2 t_3 \dots t_{n-1}}, \quad t_i \in \{0, 1\}.$$

Sean $t = (t_1, t_2, t_3 \dots) \in \Sigma_2$, $n \in \mathbb{N}$ y consideremos el intervalo $I_{t_1 t_2 \dots t_n}$. Nótese que si $x \in I_{t_1 t_2 \dots t_n} \subset J(f)$, entonces $\pi_k(h(x)) = \pi_k(t)$ para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ el intervalo $I_{t_1 t_2 \dots t_n}$ está contenido en $I_{t_1 t_2 \dots t_{n-1}}$. Por lo tanto la colección $\{I_{t_1 t_2 \dots t_n}\}_{n=1}^{\infty}$ forma una sucesión de intervalos cerrados encajados donde cada uno de ellos es no

vacío. También, cuando n tiende a infinito la longitud de cada intervalo tiende a cero. Entonces,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{t_1 t_2 \dots t_n} = \{x_0\}.$$

Luego para cada $n \in \mathbb{N}$, el punto $f^n(x_0) \in I_{t_n}$ y por lo tanto $x_0 \in J(f)$ y además $h(x_0) = t$. Así, h es sobreyectiva.

Por otro lado, note que $\pi_k \circ h: J(f) \rightarrow \{0, 1\}$ es continua para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego, por Teorema 8,8 presentado en “General topology”⁹, h es continua. Sean $t = (t_1, t_2, \dots) \in \Sigma_2$ y $\epsilon > 0$. Recordemos que cuando n tiende a infinito, la longitud de cada intervalo $I_{t_1 t_2 \dots t_n}$ tiende a cero. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que la longitud de $I_{t_1 t_2 \dots t_N} < \epsilon$. Tome $\delta = \frac{1}{2^N}$. Si $s \in \Sigma_2$ es tal que $d(t, s) < \delta$, entonces para cada $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ se tiene $t_k = s_k$, lo cual implica que $h^{-1}(s)$ también está en el intervalo $I_{t_1 t_2 \dots t_N}$. Así, la distancia entre $h^{-1}(t)$ y $h^{-1}(s)$ es menor que ϵ y de esta forma h^{-1} es continua. Hemos probado que h es biyectiva y bicontinua, es decir, h es un homeomorfismo entre $J(f)$ y Σ_2 .

Finalmente, note que si $x \in J(f)$, $h(x) = t = (t_1, t_2, t_3, \dots)$ y consideramos la función shift $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ definida en (1), se tiene que

$$h(f(x)) = (t_2, t_3, t_4, \dots) = \sigma(h(x)).$$

Es decir, $f_{J(f)}$ y σ son funciones conjugadas.

Por la Proposición 2.1.3 existe $t \in \Sigma_2$ tal $\omega(t, \sigma) = \Sigma_2$. Ahora, usando el hecho de que f

⁹ Willard, S., General Topology, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004.

y σ son conjugadas bajo h , por el Lema 2.0.5 se sigue que $\omega(t, \sigma) \cong \omega(h^{-1}(t), f)$. Así, el punto $x_0 = h^{-1}(t) \in J(f) \subset [0, 1]$ tiene como omega conjunto límite, el conjunto de cantor $J(f)$. Recordemos que $f = T^2$ para todo $x \in I_0 \cup I_1$, y además x_0 está en dicha unión y por ende

$$\omega(x_0, f) = \omega(x_0, T^2) = J(f).$$

Luego por la Proposición 2.0.3, y el hecho de que el omega conjunto límite sea fuertemente invariante, se garantiza que para el punto x_0 ,

$$\omega(x_0, T) = \omega(x_0, T^2) \cup \omega(T(x_0), T^2) = \omega(x_0, T^2) \cup T(\omega(x_0, T^2)).$$

Por último, como $\omega(x_0, T^2) \cap I_0 = J(f) \cap I_0$ y T en I_0 está dada por $T(x) = 2x$, entonces $T(\omega(x_0, T^2) \cap I_0)$ es un conjunto de Cantor, haciendo un razonamiento análogo concluimos que $T(\omega(x_0, T^2) \cap I_1)$ también es un conjunto de Cantor. Dicho esto, podemos escribir a $\omega(x_0, T)$ como la unión de tres conjuntos de cantor, como sigue:

$$\omega(x_0, T) = \omega(x_0, T^2) \cup T(\omega(x_0, T^2) \cap I_0) \cup T(\omega(x_0, T^2) \cap I_1).$$

Concluimos entonces que $\omega(x_0, T)$ es un conjunto de Cantor. □

La siguiente proposición garantiza la existencia de un punto $x_0 \in [0, 1]$ tal que $\omega(x_0, f)$ es un conjunto numerable.

Proposición 2.2.4. *Sea $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función tienda. Entonces existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $\omega(x_0, T)$ es un conjunto infinito numerable.*

Demostración. Por la Proposición 2.1.4, existe un punto $t \in \Sigma_2$, tal que $\omega(t, \sigma)$ es un

conjunto numerable. Por otro lado, en la prueba de la proposición anterior mostramos que las funciones σ y T^2 son conjugadas. De esta manera, $\omega(t, \sigma) \cong \omega(x_0, T^2)$, siendo $x_0 = h^{-1}(t)$. Así, por la Proposición 2.0.3, $\omega(x_0, T) = \omega(x_0, T^2) \cup \omega(T(x_0), T^2)$ es un conjunto numerable. □

Observemos que la Proposición 2.1.4 muestra que $\omega(t, \sigma)$ es un compacto numerable con un punto límite; con esto, $\omega(x_0, T^2)$ es también un compacto numerable con un punto límite. Luego, $\omega(x_0, T)$ es un compacto con uno, o dos puntos límite. Notemos también que dar respuesta positiva a la Pregunta 2.1.5, implica la existencia de nuevos conjuntos omega límite para la función tienda.

Terminamos este capítulo resaltando que el intervalo $[0, 1]$ tiene compactos diferentes a los que cuenta el espacio de Cantor Σ_2 ; por ejemplo, no sabemos que si existe un punto $z \in [0, 1]$ donde $\omega(z, T) \cong [0, \frac{1}{2}] \cup \{1\}$.

3. Conjuntos ω -límite en continuos

En este capítulo trataremos de mostrar algunos resultados generales relacionados con conjuntos ω -límite obtenidos de un continuo.

A continuación, en las diferentes secciones con las que dividiremos el capítulo, presentaremos algunos ejemplos de sistemas dinámicos discretos en donde el conjunto ω -límite de cada punto del espacio resulta ser siempre un mismo tipo de compacto. Además, presentaremos un resultado muy interesante que afirma que en un homeomorfismo definido en una dendrita, los conjuntos ω -límite deben ser conjuntos finitos o un conjunto de Cantor. Este resultado corresponde al Teorema 3.8 el cual tomamos de “On open maps between dendrites”¹⁰.

3.1. Sistemas minimales

Empecemos esta sección con la definición formal de sistema dinámico discreto minimal. A continuación presentaremos un par de ejemplos.

Definición 3.1.1. *Un sistema dinámico discreto (X, f) es llamado minimal si $\omega(x, f) = X$ para todo $x \in X$.*

Claramente, si tenemos un sistema dinámico minimal, nuestro problema de encontrar todos los conjuntos ω -límite asociados, está completamente resuelto. Un ejemplo de un sistema minimal es el siguiente: Sean S^1 la circunferencia unitaria y $f: S^1 \rightarrow S^1$ dada para cada $z \in S^1$ por $f(z) = ze^i$. No es difícil ver que $f^n(z) \neq z$ para todo $z \in X$ y cualquier entero positivo n ; más aún, es posible mostrar que todo punto en S^1 tiene órbita

¹⁰ Acosta, G., Eslami P. y Oversteegen G., On open maps between dendrites, Houston J. Math., 33, (2007), 753-770.

densa. Esto es, $\omega(z, f) = S^1$ para todo $z \in S^1$ (ver Teorema 2.0.4). De lo anterior, (S^1, f) es minimal.

Otro ejemplo de sistema dinámico minimal lo presentamos a continuación.

Ejemplo 3.1.2. Sean Σ_2 el espacio de Cantor y $\phi: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la función definida para cada $t = (t_1, t_2, \dots)$ por $\phi(t) = s$, donde $s = (s_1, s_2, \dots)$ y

$$s_i = \begin{cases} 1 - t_i, & \text{si } i \in \{1, \dots, k\}; \\ t_i, & \text{si } i > k, \end{cases}$$

donde $k = \min\{i \in \mathbb{N} : t_i = 0\}$ y $\phi((1, 1, \dots)) = (0, 0, \dots)$. Esta función se conoce como la sumadora, o el odómetro. Mostremos que (Σ_2, ϕ) es minimal.

Dado un entero positivo n y $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$, es posible mostrar que:

$$\{\phi^i([a_1, \dots, a_n]) : i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}\} = \{[x_1, \dots, x_n] : x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}\}. \quad (3)$$

Esto es, $\{\phi^i([a_1, \dots, a_n]) : i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}\}$ recorre todos los abiertos básicos de longitud n (ver (2)).

A partir de lo anterior, veamos que (Σ_2, ϕ) es minimal. Sean $s = (s_1, s_2, \dots) \in \Sigma_2$ y $\epsilon > 0$. Dado $t = (t_1, t_2, \dots) \in \Sigma_2$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{N-1}} < \epsilon$. Por (3), existe $j \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ donde $\phi^j([s_1, \dots, s_n]) = [t_1, \dots, t_n]$; esto es

$$d(\phi^j(s), t) \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{N-1}} < \epsilon.$$

Con esto concluimos que la órbita de t es densa y el sistema dinámico discreto (Σ_2, ϕ) es minimal.

Cabe resaltar que si el sistema dinámico cuenta con algún punto periódico, éste no puede ser minimal. En particular, espacios como $[0, 1]$, un árbol, cualquier n -celda, o una dendrita son continuos que tienen la propiedad del punto fijo, esto quiere decir que para cualquier función continua $f: X \rightarrow X$, existe un punto fijo (existe $x \in X$ donde $f(x) = x$), no es posible definir un sistema dinámico minimal.

3.2. Clases de funciones

Enunciado como Teorema 3.8 en “On open maps between dendrites”¹¹ y demostrado en el mismo, presentamos el siguiente interesante teorema.

Teorema 3.2.1. *Sean X una dendrita y $f: X \rightarrow X$ un homeomorfismo. Si $x \in X$, entonces $\omega(x, f)$ es un conjunto finito o un Conjunto de Cantor.*

En la familia de dendritas se encuentran el arco, el n -odo simple o los árboles. Luego, es natural preguntarse: ¿Si X es un árbol y $f: X \rightarrow X$ es un homeomorfismo, entonces podemos concluir que $\omega(x, f)$ es siempre un conjunto finito para cada $x \in X$? En relación a esta pregunta, enfocamos los resultados que presentamos en esta sección.

Dada una función continua y sobreyectiva definida entre continuos $f: X \rightarrow Y$, diremos que f es *monótona* si $f^{-1}(y)$ es un continuo, para cada $y \in Y$.

Proposición 3.2.2. *Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua y sobreyectiva. Si f es monótona, entonces $|\omega(x, f)| \leq 2$ para todo $x \in [0, 1]$.*

Demostración. Notemos que si f es monótona, al estar definida sobre el intervalo, f es creciente o decreciente, a partir de esto consideremos dos casos generales que analizaremos a continuación respectivamente:

¹¹ Acosta, G., Eslami P. y Oversteegen G., On open maps between dendrites, Houston J. Math., 33, (2007), 753-770.

1. $0 \in f^{-1}(0)$ y $1 \in f^{-1}(1)$,

2. $0 \in f^{-1}(1)$ y $1 \in f^{-1}(0)$.

Veamos el caso 1; Sea $x \in [0, 1] \setminus (f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1))$. Si x es tal que $f(x) \geq x$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $x \leq f(x) \leq \dots \leq f^n(x) < 1$. De este modo, la órbita $\mathcal{O}_f(x)$ converge a algún $p \in [0, 1]$ y para cualquier sucesión $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = p$. Así, $|\omega(x, f)| = 1$. Análogamente, si x es tal que $f(x) \leq x$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $x \geq f(x) \geq \dots \geq f^n(x) > 0$, luego $\mathcal{O}_f(x)$ converge a digamos, $q \in [0, 1]$, por lo que para cualquier sucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ tenemos que $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x) = q$ y $|\omega(x, f)| = 1$.

Ahora probemos el ítem 2; notemos que $f^2(0) \in f^{-2}(0)$ y $f^2(1) \in f^{-2}(1)$, siendo f^2 una función monótona, luego nos encontramos en el caso 1. Es decir, si $x \in [0, 1] \setminus (f^{-2}(0) \cup f^{-2}(1))$, entonces $|\omega(x, f^2)| = 1$. Además por la Proposición 2.0.3, $\omega(x, f) = \omega(x, f^2) \cup f(\omega(x, f^2))$ y por lo tanto $|\omega(x, f)| \leq 2$. \square

Como todo homeomorfismo es una función monótona, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.3. *Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Si f es un homeomorfismo, entonces:*

1. *Si $f(0) = 0$, entonces $\omega(t, f)$ tiene un punto para todo $t \in [0, 1]$.*

2. *Si $f(0) = 1$, entonces $\omega(t, f)$ tiene uno o dos puntos y $\omega(0, f) = \{0, 1\}$.*

En relación al resultado anterior mostramos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.2.4. *La función $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$, es un homeomorfismo tal que $f(0) = 0$, luego $|\omega(x, f)| = 1$ para cada $x \in [0, 1]$, más aún*

$$\omega(x, f) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } x \neq 0; \\ \{0\} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Lo descrito anteriormente se representa en la Figura 18.

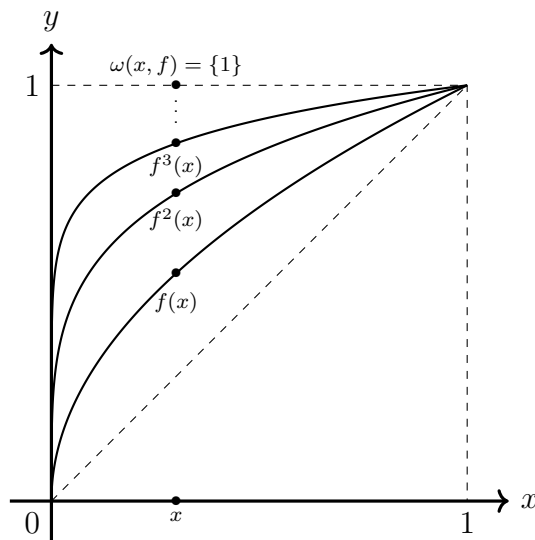


Figura 18. Dinámica de f .

Para abordar el otro caso considerado en el Corolario 3.2.3, presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.5. Considere la función $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $g(x) = 1 - \sqrt{x}$ la cual es un homeomorfismo, sigue que para todo $x \in [0, 1]$, $|\omega(x, g)| \leq 2$ y además

$$\omega(x, g) = \begin{cases} \{p\} & \text{si } x \in (0, 1); \\ \{0, 1\} & \text{si } x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Donde p es un punto fijo distinto de 0 y 1. En la Figura 19 se visualiza de mejor manera la dinámica de g , haciendo uso de la función g^2 .

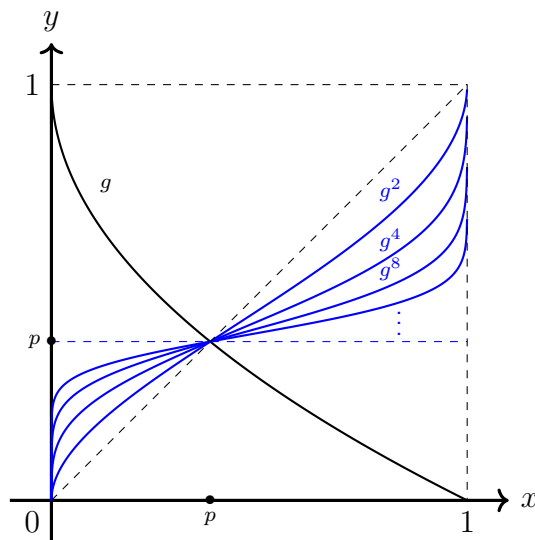


Figura 19. Dinámica de g .

Para futuros ejemplos definiremos algunos conceptos importantes para entender la ilustración de los mismos, recordemos además que la frontera de un conjunto es dada por $Fr(A) = Cl(A) \setminus Int(A)$, siendo $Cl(A)$ e $Int(A)$ la clausura y el interior de A respectivamente bajo la topología correspondiente. Por otro lado, dado X un espacio topológico y $x \in X$. una vecindad de x es un subconjunto V de X para el que existe un abierto U de X tal que $x \in U \subseteq V$. Siguiendo lo anterior, decimos que una colección \mathcal{B}_x de entornos de x es una base local de x si para cada abierto U tal que $x \in U$ existe un básico $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Definición 3.2.6. Sean X , un continuo y $p \in X$, diremos que p es un punto final de X si existe una base local \mathcal{B}_x de x tal que $|Fr(B)| = 1$ para todo $B \in \mathcal{B}_x$.

Definición 3.2.7. Sean X , un continuo y $p \in X$, diremos que p es un punto de corte de X si $X \setminus \{p\}$ es desconexo. En caso contrario, diremos que p es un punto de no corte de X .

Además de esto, denotamos al conjunto de puntos finales y puntos de corte por $End(X)$ y $Cut(X)$ respectivamente, estos conceptos nos permiten caracterizar dendritas, X es una dendrita si y solo si X es continuo tal que $X = Cut(X) \cup End(X)$.

Consideremos el triodo simple T Definido en el Ejemplo 1.1.1, y un homeomorfismo $h: T \rightarrow T$, es claro el origen es un punto fijo de h , ya que es el único punto de corte que separa a T en tres componentes conexas, además, $h(\text{End}(x)) = \text{End}(X)$, a partir de esto consideremos los siguientes casos.

i). Supongamos que para algún $k \in \{1, 2, 3\}$, $h(e_k) = e_k$. de esta manera, $h|_{[o, e_k]} \cong f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, donde f es un homeomorfismo. Sin perdida de generalidad supongamos que $h(e_3) = e_3$ y que $h(e_1) = e_2, h(e_2) = e_1$, se sigue que $h^2|_{[o, e_j]}: [o, e_j] \rightarrow [o, e_j]$ es un homeomorfismo para cada $j \in \{1, 2, 3\}$; luego por el Corolario 3.2.3, $|\omega(x, h^2)| = 1$ para todo $x \in [o, e_j]$. Así, por la Proposición 2.0.3, $\omega(x, h) = \omega(x, h^2) \cup h(\omega(x, h^2))$ y $|\omega(x, h)| \leq 2$.

ii). Supongamos que $h(e_k) \neq e_k$ para todo $k \in \{1, 2, 3\}$, sin perdida de generalidad esto es $h(e_1) = e_2, h(e_2) = h(e_3), h(e_3) = e_1$. Por otro lado notemos que $h^3|_{[o, e_j]}: [o, e_j] \rightarrow [o, e_j]$ es un homeomorfismo, por lo que el 3.2.3 nos garantiza que para todo $x \in [o, e_j]$, $|\omega(x, h^3)| \leq 1$. Así, por la Proposición 2.0.3, $\omega(x, h) = \omega(x, h^3) \cup h(\omega(x, h^3)) \cup h^2(\omega(x, h^3))$ y $|\omega(x, h)| \leq 3$.

En la la Figura 20 se ilustra la dinámica de los arcos cuando el homeomorfismo actúa como el dado en el caso *ii*).

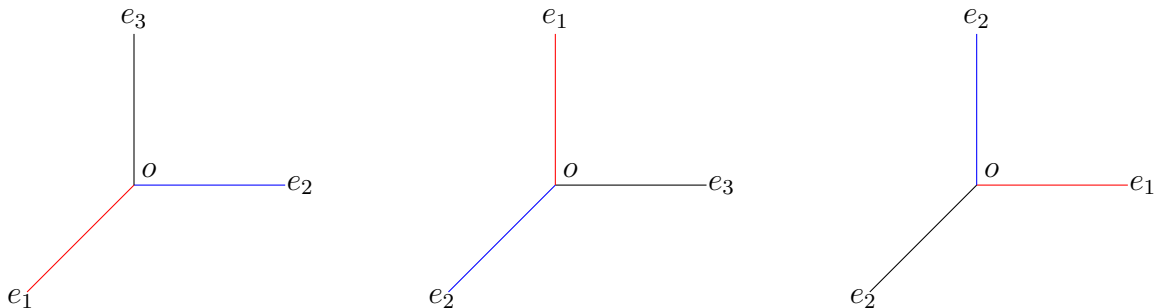


Figura 20. Dinámica de h .

Generalizando, si consideramos un homeomorfismo apropiado de un n -ódo en si mismo

podemos conseguir conjuntos ω -límite de hasta n puntos, para esto basta asociar al sistema el homeomorfismo que desplaza cada arco del n -ódo en sentido horario, como se ve en la Figura 21.

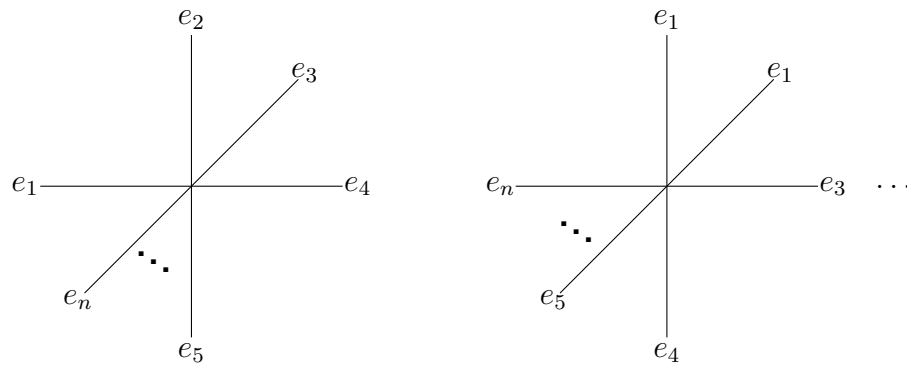


Figura 21. Dinámica sobre el n -ódo.

En base a lo anterior, nos hacemos la siguiente pregunta, ¿la cantidad de puntos finales de una dendrita condiciona la cantidad de elementos de sus conjuntos ω -límite?

3.3. Cantor como conjunto ω -límite

El Teorema 3.2.1 dice que todo conjunto ω -límite en una dendrita cuando la función es un homeomorfismo es un conjunto finito o un espacio de Cantor. Sin embargo, no hemos mostrado un homeomorfismo donde en efecto, el omega conjunto límite sea un espacio de Cantor. En esta sección mostramos un homeomorfismo sobre la dendrita de Gehmann que tiene a Cantor como uno de sus conjuntos ω -límite.

Sea G la dendrita de Gehmann presentada en el Ejemplo 1.1.10 y consideremos el homeomorfismo $\Phi: G \rightarrow G$ el cual es tal que: Si $D_{t_1 t_2 t_3 \dots t_n}$ es tal que $t_k = 1$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces $\Phi(D_{t_1 t_2 t_3 \dots t_n}) = D_{s_1 s_2 s_3 \dots s_n}$ donde $s_k = 0$ para todo $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. En caso contrario, llamando $m = \min\{k \in \mathbb{N} : t_k = 0\}$, $\Phi(D_{t_1 t_2 \dots t_n}) = D_{s_1 s_2 \dots s_n}$, donde para cada $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$s_k = \begin{cases} 0, & \text{si } k < m; \\ 1, & \text{si } k = m; \\ t_k, & \text{si } k > m. \end{cases}$$

Por otro lado, si $x \in G \setminus (\bigcup_{n=0}^{\infty} D_{t_1 \dots t_n} \cup [a, d])$, la función Φ actuará de manera similar: Si $d_{t_1 t_2 t_3 \dots t_n \dots}$ es tal que $t_k = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\Phi(d_{t_1 t_2 t_3 \dots t_n \dots}) = d_{s_1 s_2 s_3 \dots s_n \dots}$ donde $s_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En caso contrario, llamando $m = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : t_k = 0\}$, $\Phi(d_{t_1 t_2 \dots t_n \dots}) = d_{s_1 s_2 \dots s_n \dots}$, donde para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$s_k = \begin{cases} 0, & \text{si } k < m; \\ 1, & \text{si } k = m; \\ t_k, & \text{si } k > m. \end{cases}$$

Además $\Phi([a, d]) = [a, d]$.

Consideremos un punto $x \in D_0$, nótese que $\Phi(D_0) = D_1$, volviendo a aplicar la función obtenemos $\Phi^2(D_0) = D_0$, Así $\Phi^2(x) = x$. Para D_{00} , podemos ilustrar la dinámica de Φ de la siguiente manera

$$D_{00} \rightarrow D_{10} \rightarrow D_{11} \rightarrow D_{00}.$$

Esto es, $\Phi^{2^2}(D_{00}) = \Phi^4(D_{00}) = D_{00}$. De forma análoga, para D_{000}

$$D_{000} \rightarrow D_{100} \rightarrow D_{010} \rightarrow D_{110} \rightarrow D_{001} \rightarrow D_{101} \rightarrow D_{011} \rightarrow D_{111} \rightarrow D_{000}.$$

Es decir $\Phi^{2^3}(D_{000}) = \Phi^8(D_{000}) = D_{000}$. En general, considerando $D_{t_1 t_2 \dots t_n}$, no es difícil ver

que $\Phi^{(2^n)}(D_{t_1 t_2 \dots t_n}) = D_{t_1 t_2 \dots t_n}$, luego si $x \in D_{t_1 t_2 \dots t_n}$, entonces obtenemos que $\Phi^{(2^n)}(x) = x$, es decir, x es de periodo 2^n y por lo tanto $\omega(x, \Phi)$ es finito. Por otro lado, $Fix(\Phi) = [a, d]$, por lo que para cada $x \in [a, d]$, $\omega(x, \Phi)$ es un conjunto con un solo punto. En la Figura 22 se visualiza como se desplazan estos puntos, siendo que cada arco solo se puede desplazar en otro que tenga el mismo color.

Por otra parte, sean $K = (G \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} D_{t_1 t_2 \dots t_n} \cup [a, d])$, $x_0 = d_{t_1 t_2 t_3 \dots} \in K$ y consideremos la función $h: K \rightarrow \Sigma_2$ dada por $h(x_0) = h(d_{t_1 t_2 t_3 \dots}) = t = (t_1, t_2, t_3, \dots)$ la cuál es un homeomorfismo. Notemos que $h(\Phi(d_{t_1 t_2 t_3 \dots})) = \phi(h(d_{t_1 t_2 t_3 \dots}))$ es decir, Φ y ϕ son conjugadas bajo h , luego por el Lema 2.0.5 y la Proposición 3.1.2, concluimos que $\omega(x_0, \Phi) \cong \omega(t, \phi)$ (donde $x_0 = h^{-1}(t)$), es un conjunto de Cantor.

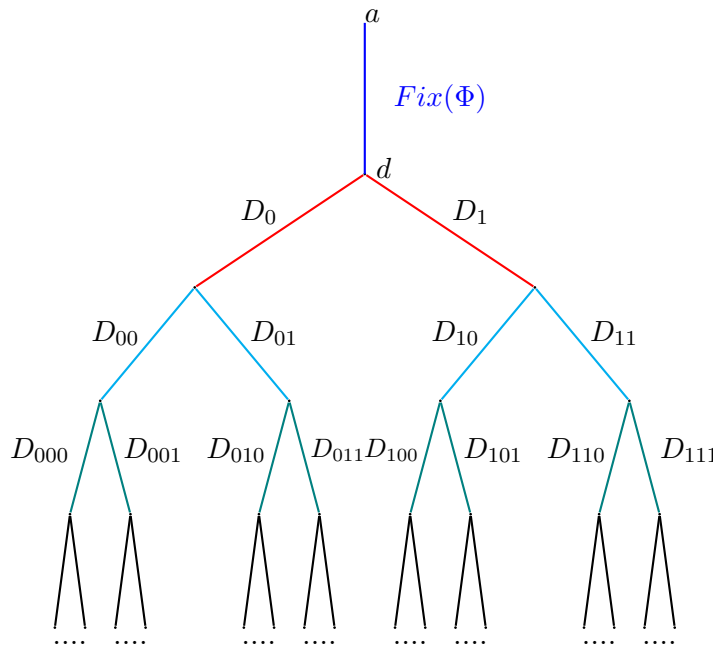


Figura 22. Conjuntos ω -límite en G .

Considerando el ejemplo anterior cerramos el capítulo con la siguiente pregunta.

Pregunta 3.3.1. *¿Si X es una dendrita tal que $|End(X)| \leq |\mathbb{N}|$ y $h: X \rightarrow X$ es un homeomorfismo, entonces $\omega(x, h)$ es finito para todo $x \in X$?*

BIBLIOGRAFÍA

Acosta G., Eslami P. y Oversteegen G.: *On open maps between dendrites*. En: *Houston J. Math.* 33.3 (2007), págs. 753-770.

Bredon y Glen E.: *Topology and Geometry*. Springer, 1993.

Camargo, J. y E. Villamizar: *Topología General*. Ediciones UIS, 2019.

Dávalos, K. y H. Méndez: *Sistemas Dinámicos Discretos*. Editorial UNAM, 2014.

Nadler, S.B.: *Continuum Theory, An Introduction, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Vol. 158. Marcel Dekker, Inc, 1992.

Willard, S.: *General Topology, Dover Publications*. Inc., Mineola, 2004.