

NO GAUSSIANIDAD Y CORRECCIONES DE LAZO EN UN  
MODELO INFLACIONARIO DE SLOW-ROLL CON  
POTENCIAL ESCALAR CUADRATICO DE DOS  
COMPONENTES

JULIÁN ANDRÉS JAIMES SANTAMARÍA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2008

NO GAUSSIANIDAD Y CORRECCIONES DE LAZO EN UN  
MODELO INFLACIONARIO DE SLOW-ROLL CON  
POTENCIAL ESCALAR CUADRATICO DE DOS  
COMPONENTES

JULIÁN ANDRÉS JAIMES SANTAMARÍA

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

DIRECTOR

YEINZON RODRÍGUEZ GARCÍA., PH. D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2008



# TABLA DE CONTENIDO

---

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. Modelo cosmológico estándar</b>	<b>7</b>
1.1. Ecuaciones básicas . . . . .	7
1.2. El concepto de horizonte de partícula . . . . .	8
1.3. Problemas de la cosmología estándar . . . . .	9
1.3.1. Problema de Planitud . . . . .	9
1.3.2. Problema de Horizonte . . . . .	10
1.3.3. Solución a los problemas de la cosmología estándar . . . . .	11
<b>2. Paradigma Inflacionario y Perturbaciones Cosmológicas</b>	<b>12</b>
2.1. Inflación y el inflatón . . . . .	12

2.2. Perturbaciones cosmológicas . . . . .	14
2.2.1. Fluctuaciones cuánticas de un campo escalar sin masa durante inflación	15
2.2.2. Fluctuaciones en la métrica . . . . .	16
2.2.3. Perturbación en la curvatura . . . . .	17
2.3. Descripción estadística para una distribución de probabilidad . . . . .	19
<b>3. Formalismo <math>\delta N</math></b>	<b>21</b>
3.1. Introducción . . . . .	21
3.2. Cálculo de cantidades a segundo orden . . . . .	23
3.3. Aproximación Diagramática . . . . .	25
3.3.1. Introducción . . . . .	25
3.3.2. Contribuciones de los diagramas de dos puntos . . . . .	26
3.3.3. Contribuciones de los diagramas de tres puntos . . . . .	29
<b>4. Estudio de un modelo específico de slow-roll</b>	<b>35</b>
4.1. El modelo . . . . .	36
4.1.1. Cálculo de las derivadas de $N$ respecto a los campos . . . . .	38
4.1.2. Cálculo de las contribuciones a $\mathcal{P}_\zeta$ y a $B_\zeta$ . . . . .	39
4.2. Restricciones sobre los parámetros . . . . .	39

4.2.1. Dominación a nivel árbol o a nivel de lazo . . . . .	39
4.2.2. Condición de normalización del espectro $\mathcal{P}_\zeta$ . . . . .	41
4.2.3. Condición sobre el índice espectral . . . . .	42
4.2.4. Monto de Inflación . . . . .	45
4.3. Cálculo del $f_{NL}$ . . . . .	45
4.3.1. Región de valores pequeños para $\phi_\star$ . . . . .	46
4.3.2. Región de valores intermedios para $\phi_\star$ . . . . .	46
4.3.3. Región de valores grandes para $\phi_\star$ . . . . .	49
4.4. Convergencia de la serie . . . . .	50
<b>5. Conclusiones</b>	<b>54</b>
<b>A. Contribuciones al parámetro <math>f_{NL}</math> truncando a segundo orden en la serie de <math>\zeta</math></b>	<b>55</b>
<b>B. Cálculo de las derivadas de <math>N</math> respecto a los campos <math>\phi_\star</math> y <math>\sigma_\star</math></b>	<b>64</b>
B.1. Primeras derivadas . . . . .	64
B.2. Segundas Derivadas . . . . .	66
B.3. Cálculo de las terceras derivadas . . . . .	68
<b>C. Análisis de las contribuciones al espectro y al biespectro a partir de los diagramas de Feynman a nivel de árbol y de lazo</b>	<b>72</b>

---

C.1. Espectro . . . . .	72
C.1.1. Contribuciones a nivel de árbol . . . . .	72
C.1.2. Contribuciones a nivel de lazo . . . . .	73
C.2. Biespectro . . . . .	74
C.2.1. Contribuciones a nivel de árbol . . . . .	74
C.2.2. Contribuciones a nivel de lazo . . . . .	75
<b>D. Cálculo del índice espectral en el formalismo <math>\delta N</math></b>	<b>83</b>
D.1. Definición del índice espectral . . . . .	83
D.2. Índice espectral, cuando el espectro $\mathcal{P}_\zeta$ está dominado a nivel árbol . . . . .	84
D.3. Índice espectral, cuando el espectro $\mathcal{P}_\zeta$ está dominado a nivel de lazo . . . . .	85
<b>REFERENCIAS</b>	<b>88</b>

## LISTA DE FIGURAS

---

3.1. Diagrama a nivel de árbol para el correlador de 2 puntos . . . . .	26
3.2. Diagrama de dos puntos con un lazo . . . . .	27
3.3. Diagrama de dos puntos con un lazo y correlador de tres puntos en los campos	28
3.4. Diagrama de tres puntos a nivel de árbol y dos propagadores . . . . .	29
3.5. Diagrama de tres puntos con correlador de tres puntos en los campos . . . . .	30
3.6. Diagrama de tres puntos con un lazo y tres propagadores . . . . .	30
3.7. Diagrama de tres puntos con un lazo y tres propagadores . . . . .	31
3.8. Diagrama de tres puntos con un lazo, un propagador y un correlador de tres puntos en los campos . . . . .	32
3.9. Diagrama de tres puntos con un lazo, un propagador y un correlador de tres puntos en los campos . . . . .	33
3.10. Diagrama de tres puntos con un lazo, un propagador y un correlador de tres puntos en los campos . . . . .	33
3.11. Diagrama de tres puntos con un lazo, y un correlador de cuatro puntos en los campos . . . . .	34

---

4.1. Potencial. . . . .	36
4.2. $r$ contra $\eta_\phi$ para algunos valores del parámetro $f_{NL}$ . . . . .	48

# Resumen

---

**Título :** NO GAUSSIANIDAD Y CORRECCIONES DE LAZO EN UN MODELO INFLACIONARIO DE SLOW-ROLL CON POTENCIAL ESCALAR CUADRATICO DE DOS COMPONENTES \*.

**Autores :** Jaimes Santamaría, Julian Andrés \*\*.

**Palabras Claves :** Relatividad, Gravitación, Cosmología, Astrofísica, Inflación.

**Descripción :** El modelo cosmológico estándar o teoría del Big-Bang, describe las propiedades mas importantes del Universo observable, tales como homogeneidad e isotropía a gran escala así como la presencia de la radiación cósmica de fondo. Sin embargo, este modelo es incompleto y se hace necesario incluir una etapa de expansión acelerada en el comienzo del Universo. Esta expansión es llevada a cabo por un campo escalar, llamado el inflatón, que no solo soluciona los problemas de la cosmología estándar, también explica brillantemente las anisotropías en la densidad de energía en el Universo y en la misma radiación cósmica de fondo.

A pesar de que el mecanismo mediante el cual el inflatón explica las propiedades mas importantes del Universo, es conocido, no se ha especificado el modelo exacto, inspirado en la actual física de partículas, que lleve a cabo la tarea de predecir con toda exactitud las magnitudes físicas que describen el Universo. Uno de estos observables tiene que ver con las anisotropías en la radiación cósmica de fondo y mide la posible no gaussianidad en la distribución de probabilidad de éstas.

El propósito de este trabajo es mostrar como un modelo específico del tipo slow-roll puede predecir altos niveles de no gaussianidad, acordes con las observaciones actuales, a pesar de que en la literatura actual no se han encontrado, debido a que los autores no han tomado en cuenta ciertos factores que pueden ser relevantes.

---

\*Trabajo de Pregrado

\*\*Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Yeinzon Rodriguez (Director).

# Abstract

---

**Title :** NON-GAUSSIANITY AND LOOP CORRECTIONS IN A QUADRATIC TWO-COMPONENT SLOW-ROLL MODEL OF INFLATION <sup>§§</sup>.

**Author :** Jaimes Santamaría, Julian Andrés <sup>‡‡</sup>.

**KEY WORDS :** Relativity, Gravitation, Cosmology, Astrophysics, inflation

**DESCRIPTION :** The cosmology standard model or Big-Bang theory, describe the most important properties of the observable universe, such as large scale homogeneity and isotropy and cosmic microwave background. However, this model is not complete and it is necessary to include an accelerated expansion stage in the beginning of the Universe. This expansion is carry out by a scalar field called inflaton, that explain not only the standard cosmology problems, it also explain brilliantly the density energy anisotropies of the universe and in the cosmic microwave background.

Despite the way in which inflaton explain the most important properties of the universe is well known, exact model has not been specified yet, inspired in actual particle physics, that works in such a way that predict with a high-precision the physical quantities that describe the universe. One of this observables is about the anisotropies in the cosmic microwave background and it measure the possible non-gaussianity in the probability distribution of them.

The purpose of this work is to show how a specific slow-roll model can predict high levels of non-gaussianity, consistent with the observational data, although these have not been found in the current literature, because the authors have failed to take into account certain factors that may be relevant.

---

<sup>§§</sup>undergraduate thesis project.

<sup>‡‡</sup>Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Yeinzon Rodriguez (Director).

# Introducción

---

Las propiedades observadas del Universo tales como homogeneidad e isotropía a grandes escalas, expansión de Hubble y los casi 14 billones de años de evolución son descritos exitosamente por el modelo cosmológico estándar conocido como Big-Bang. El Big-Bang predice además las abundancias observadas de elementos ligeros [1] y la existencia de radiación cósmica de fondo, confirmada observacionalmente por Penzias y Wilson en 1965 [2], estableciendo así una sólida base para el estudio de la evolución del Universo y llevando la cosmología a estatus de ciencia firmemente establecida en los hechos observacionales. A pesar de su éxito, este modelo a su vez presenta problemas tales como el de horizonte, planitud, y reliquias no deseadas, para los cuales se debe encontrar alguna solución [3, 4, 5].

Una de las ideas básicas de la cosmología moderna es la existencia de una época temprana en la cual la energía de vacío dominó otras formas de energía como materia y radiación. Durante la época dominada por el vacío el factor de escala creció exponencialmente (o casi exponencialmente) en el tiempo. En esta fase conocida como inflación, una pequeña región espacial de tamaño menor que el radio de Hubble en ese tiempo, creció significativamente como para fácilmente abarcar el volumen del Universo observable hoy en día. Si el Universo temprano experimentó tal etapa de expansión puede uno entonces entender por qué el Universo es tan homogéneo e isotrópico a grandes escalas, resolviendo de esta forma los problemas clásicos de la cosmología estándar mencionados en el párrafo anterior.

Todas estas virtudes de inflación fueron propuestas por primera vez por Allan Guth en 1981 [6]. Empezando con un universo que es absolutamente homogéneo e isotrópico al nivel clásico, la expansión inflacionaria, que es dominada por la presencia de un campo escalar llamado inflatón, fija a un valor constante las fluctuaciones cuánticas de dicho campo, haciendo de éstas perturbaciones clásicas [7, 8]. En cada escala comóvil esto ocurre después de la salida de horizonte. Asociadas con estas fluctuaciones de vacío existen perturbaciones primordiales en la densidad de energía, las cuales sobreviven después de inflación y pueden ser el origen de todas las estructuras a gran escala observadas en el Universo. En particular inflación puede ser responsable de las anisotropías observadas en la radiación cósmica de fondo y la distribución a gran escala de galaxias y materia oscura. Inflación también genera ondas gravitacionales como una fluctuación de vacío [9]. Entonces, una predicción de inflación es que todas las estructuras que nosotros vemos en el Universo son el resultado de fluctuaciones mecánico-cuánticas durante la época inflacionaria.

Una de las predicciones de inflación y de la teoría de perturbaciones cosmológicas es que las perturbaciones primordiales son casi gaussianas cuando se consideran modelos inflacionarios del tipo slow-roll [10, 11, 12, 13, 14]. El hecho de que las perturbaciones cosmológicas sean pequeñas conlleva a que se analicen en el marco de teoría de perturbaciones a primer orden. Características no gaussianas son entonces suprimidas debido a que las no-linealidades del potencial del inflatón y de las perturbaciones en la métrica no son tomadas en cuenta. Las características no gaussianas están realmente presentes y se hacen explícitas si se toman correcciones a segundo orden [15].

Las observaciones actuales muestran que la perturbación primordial en la curvatura  $\zeta$  es altamente, mas no

totalmente gaussiana. La no-gaussianidad primordial es parametrizada por las cantidades  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$ , las cuales tras los cinco años de datos del satélite WMAP de la NASA, están en los intervalos  $-9 \lesssim f_{NL} \lesssim 111$  [16, 17] y  $|\tau_{NL}| \lesssim 2 \times 10^4$  [18]. Se espera que en las próximas entregas de datos de WMAP se detecte no gaussianidad o se rebaje la cota sobre  $f_{NL}$  a  $|f_{NL}| \lesssim 20$  [19]. El satélite de ESA llamado PLANCK [20, 21], que será lanzado en el 2008, promete bajar las cotas a  $|f_{NL}| \lesssim 5$  [19] y  $|\tau_{NL}| \lesssim 560$  [18] en caso de que la no gaussianidad no sea detectada. Estudiando la línea espectral de emisión de 21 centímetros que ocurre en el Hidrógeno neutro cósmico, debido a las diferencias de energía entre los estados paralelo y antiparalelo del electrón y del protón, también es posible conocer acerca de los niveles de no gaussianidad  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$ . Las anisotropías de fondo de la línea de 21 cm capturan información sobre no gaussianidad primordial mejor que cualquier mapa de alta resolución de la radiación cósmica de fondo; tanto es así que un experimento de este tipo puede limitar los parámetros de no gaussianidad a  $|f_{NL}| \lesssim 0,1$  [22, 23] y  $|\tau_{NL}| \lesssim 10$  [23]. Debido a esto se hace pertinente estudiar modelos cosmológicos inflacionarios que generen un nivel significativo de no gaussianidad. Una forma interesante de abordar el problema involucra el recientemente desarrollado formalismo  $\delta N$  [24, 25] en donde  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$  están dados en términos de la evolución local del universo bajo consideración, así como de los correladores de  $n$  puntos de las perturbaciones  $\delta\phi_i$  en los campos escalares que determinan la dinámica de tal universo durante inflación.

En el formalismo  $\delta N$ , la perturbación en la curvatura  $\zeta(\mathbf{x}, t)$  puede ser escrita como una expansión en serie de Taylor de las perturbaciones en los campos escalares  $\delta\phi_i(\mathbf{x}, t)$ :

$$\zeta(t, \mathbf{x}) = \sum_i N_i(t) \delta\phi_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} N_{ij}(t) \delta\phi_i \delta\phi_j + \frac{1}{3!} \sum_{ijk} N_{ijk}(t) \delta\phi_i \delta\phi_j \delta\phi_k + \dots, \quad (1)$$

en donde  $N$  es el monto de inflación (o número de e-folds) desde el momento en que las escalas cosmológicas relevantes salen del horizonte y hasta el momento en que se desea calcular  $\zeta$ , y  $N_i \equiv \frac{\partial N}{\partial \phi_i}$ ,  $N_{ij} \equiv \frac{\partial^2 N}{\partial \phi_i \partial \phi_j}$ , etc. Es así como se pueden obtener las funciones de correlación de la perturbación en la curvatura  $\zeta$  (por ejemplo,  $\langle \zeta_{k_1} \zeta_{k_2} \zeta_{k_3} \rangle$ ) en forma de series, como ocurre usualmente en Teoría Cuántica de Campos en donde la amplitud de probabilidad es una serie cuya convergencia es controlada por la constante de acoplamiento de la teoría. Una pregunta de gran relevancia es si en teoría de perturbaciones cosmológicas la serie para  $\delta N$  converge y si además se puede encontrar alguna cantidad análoga a la constante de acoplamiento. En forma general no existe tal y, si existe, dependerá del modelo inflacionario específico. No se puede entonces simplemente truncar la serie a algún orden hasta no estar seguros de que la serie es convergente, y además se debe tener la precaución de no olvidar ningún término que sea dominante en la serie así sea de alto orden en la constante de acoplamiento. En la literatura actual este hecho no ha sido tomado en cuenta, y generalmente la serie se ha truncado a segundo orden despreciando términos que podrían ser dominantes [11, 12, 13, 14, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31].

Los modelos inflacionarios más usados actualmente son los del tipo slow-roll [3], debido a su simplicidad y a que cumplen con las condiciones necesarias para obtener inflación. En toda la literatura que abarca este tipo de modelos, se reporta que los niveles de no gaussianidad  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$  son muy pequeños siendo del orden de los parámetros de slow-roll  $\epsilon$  y  $\eta$  [10, 11, 12, 13, 14]. En estos trabajos no se han tomado en cuenta la convergencia de la serie para  $\zeta$ , o la posibilidad de que términos de lazo dominen sobre los términos a nivel árbol en los correladores de  $n$  puntos. Lo que se pretende en este trabajo es estudiar un modelo inflacionario específico de slow-roll, teniendo en cuenta estos aspectos, de tal manera que se obtengan efectos grandes y observables [32] relacionados con el parámetro  $f_{NL}$ . Se procederá a comparar los resultados obtenidos con los actuales datos observacionales.

---

# CAPÍTULO 1

## Modelo cosmológico estándar

---

### Introducción

El objetivo de este capítulo es resumir brevemente los resultados mas importantes de lo que se conoce como modelo cosmológico estándar, así como presentar algunas definiciones que serán útiles mas adelante. Se presentan también algunos de sus problemas y su solución: un periodo de inflación acelerada.

### 1.1 Ecuaciones básicas

La cosmología estándar está basada en el elemento de línea de Friedmann-Robertson-Walker[3, 4, 5, 33]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (1.1)$$

en donde  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  son análogas las conocidas coordenadas esféricas,  $a(t)$  es el factor de escala y  $K$  es el parámetro que determina la curvatura espacial. El radio de curvatura está definido como  $R_{curv} \equiv a(t)K^{-\frac{1}{2}}$  con  $K = -1, 0, 1$ , dependiendo de si el Universo es abierto, plano o cerrado. El modelo positivamente curvado es finito y se curva sobre si mismo; los otros dos son el plano ( $K = 0$ ) y el curvado negativamente que son infinitos en extensión.

La métrica de Friedmann-Robertson-Walker describe la isotropía y la homogeneidad del Universo. Es interesante notar que esta forma del elemento de línea fue originalmente introducida por cuestiones de simplicidad, pero ahora sabemos que es bien justificada a escalas mayores de 100 Mpc dentro de nuestra región observable.

Las coordenadas  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  son comóviles, es decir, una partícula en reposo en esas coordenadas permanecería en reposo ( $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  constantes). Una partícula moviéndose libremente está en reposo en estas coordenadas y su momento sufre un corrimiento al rojo, de tal manera que éste se relaciona con  $a(t)$  como  $p \propto a^{-1}(t)$ . El movimiento con respecto a las coordenadas comóviles es referido como la velocidad peculiar.

La distancia física entre partículas escala como  $a(t)$ , es decir, la separación física entre dos puntos es simplemente  $a(t)$  multiplicada por la separación coordenada (coordenada comóvil). El corrimiento al rojo

$z$  sufrido por un fotón emitido desde una galaxia distante está dado por  $1 + z = \frac{a(t)}{a_0}$ , en donde  $a_0$  es el factor de escala en el momento de emisión del fotón. La evolución del factor de escala está gobernada por las ecuaciones de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

en donde  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico,  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci y  $R$  se conoce como el escalar de Ricci, todos construidos en base al elemento de línea de Friedmann-Robertson-Walker. El tensor  $T_{\mu\nu}$ , que es el tensor energía-momento, es tomado como:  $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$  para reflejar el hecho de la homogeneidad e isotropía, en donde  $\rho$  es la densidad de energía y  $p$  la presión y ambos dependen del tiempo.

De estas ecuaciones se puede obtener lo que se conoce como la ecuación de Friedmann, que gobierna la evolución del factor de escala, y se escribe como:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}, \quad (1.3)$$

en donde  $H$  es conocido como parámetro de Hubble. A partir de las leyes de conservación se obtiene una ecuación adicional:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (1.4)$$

A partir de estas ecuaciones es posible obtener relaciones entre la densidad  $\rho$  y el factor de escala  $a$  y entre el factor de escala y el tiempo  $t$ , para diferentes ecuaciones de estado que representan diferentes tipos de material del cual el Universo está hecho. Por ejemplo, para  $p = \frac{\rho}{3}$ , que corresponde a materia ultrarrelativista, se obtiene  $\rho \propto a^{-4}$  y  $a \propto t^{\frac{1}{2}}$ ; para  $p = 0$ , que corresponde a materia no relativista se obtiene  $\rho \propto a^{-3}$  y  $a \propto t^{\frac{2}{3}}$ ; y para  $p = -\rho$ , que corresponde a energía de vacío, se obtiene:  $\rho = \text{constante}$  y  $a \propto e^{Ht}$ .

Podemos usar la ecuación de Friedmann para relacionar la curvatura del Universo a la densidad de energía y la tasa de expansión:

$$\Omega - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}, \quad (1.5)$$

con  $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{\text{critico}}}$  y  $\rho_{\text{critico}} = \frac{3H^2}{8\pi G}$ .

Teniendo en cuenta la definición de curvatura dada con anterioridad, se puede escribir  $R_{\text{curv}}$  en términos de  $\Omega$ :

$$R_{\text{curv}} = \frac{H^{-1}}{(\Omega - 1)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.6)$$

El contenido del Universo se clasifica en materia, radiación y energía oscura. Debido a que la temperatura de los fotones es conocida con precisión, la fracción de densidad crítica contribuida por radiación también lo es. Hoy en día a las características del Universo observable son bien conocidas; el Universo es espacialmente plano, su expansión es acelerada, y está compuesto de un tercio de materia oscura y dos tercios de energía oscura [3, 4, 5, 16, 17].

## 1.2 El concepto de horizonte de partícula

A pesar de que el universo fuese muy pequeño al comienzo, la rápida expansión no permitió contacto causal total. Los fotones viajan por trayectorias nulas caracterizadas a través de la ecuación (1.1) por

$dr = dt/a(t)$ . La distancia física que un fotón podría haber viajado desde el big-bang hasta un tiempo  $t$  es:

$$R_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (1.7)$$

donde la cantidad  $R_H$  es conocido como el horizonte de partícula. Si por ejemplo, el factor de escala varía en el tiempo conforme a la condición  $a(t) \propto t^n$  con  $n < 1$ , se puede obtener que:

$$\begin{aligned} R_H(t) &= a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \\ &= t^n \frac{1}{(t^{n-1})(1-n)} = \frac{a(t)}{\dot{a}(t)} \frac{n}{(1-n)} \sim H^{-1}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Es por esto que en cosmología estándar el horizonte de partícula es finito, y multiplicando por factores numéricos, aproximadamente igual a la edad del universo o al radio de Hubble  $H^{-1}$ . Por esta razón, el horizonte y el radio de Hubble se usan para denotar lo mismo.

Una escala de longitud física  $\lambda$  está dentro del horizonte si  $\lambda < R_H \sim H^{-1}$ . Debido a que se puede identificar la longitud de escala  $\lambda$  con su número de onda  $k$ ,  $\lambda = \frac{2\pi a}{k}$ , surge la siguiente regla: “si  $\frac{k}{aH} \ll 1$  entonces la escala  $\lambda$  está afuera del horizonte y se denomina de superhorizonte, y si  $\frac{k}{aH} \gg 1$  entonces la escala  $\lambda$  está dentro del horizonte y se denomina de subhorizonte”.

## 1.3 Problemas de la cosmología estándar

En esta sección se explicarán brevemente dos problemas del modelo cosmológico estándar: problema del horizonte y problema de planitud. Estos problemas no indican inconsistencias lógicas de la cosmología estándar; en vez de eso, parecería que se requiere cierto comportamiento inicial para que la evolución lleve al Universo a ser como actualmente lo observamos. Inflación es una solución a dichos problemas, basada en física microscópica del Universo temprano.

### 1.3.1. Problema de Planitud

De la ecuación (1.5) se puede ver que si el Universo es perfectamente plano, entonces  $\Omega = 1$  para todo  $t$ . Por otra parte, si hay un pequeño término de curvatura, la dependencia temporal de  $(\Omega - 1)$  es bastante diferente.

Durante un periodo dominado por radiación, se tiene que  $H^2 \propto \rho \propto a^{-4}$  y

$$\Omega - 1 \propto \frac{1}{a^2 a^{-4}} \propto a^2. \quad (1.9)$$

Durante un periodo dominado por materia,  $\rho \propto a^{-3}$  y

$$\Omega - 1 \propto \frac{1}{a^2 a^{-3}} \propto a . \quad (1.10)$$

En ambos casos, el factor  $(\Omega - 1)$  decrece conforme decrece el tiempo. Sabemos que hoy en día este término es cero con una incertidumbre de dos cifras significativas, y es posible deducir su valor en  $t_{pl}$ , que es el tiempo en el cual el Universo tenía la temperatura de planck,  $T_{pl} \sim 10^{19}$  GeV:

$$\frac{|\Omega - 1|_{T=T_{pl}}}{|\Omega - 1|_{T=T_0}} \approx \left( \frac{a_{pl}^2}{a_0^2} \right) \approx \left( \frac{T_0^2}{T_{pl}^2} \right) \approx \mathcal{O}(10^{-64}) , \quad (1.11)$$

donde  $a_0$  es el factor de escala hoy en día, y  $T_0 \sim 10^{-13}$  GeV es la temperatura de la radiación cósmica de fondo hoy en día.

Para no ir tan lejos en el tiempo, también se puede considerar la época de nucleosíntesis, cuando se produjeron los elementos ligeros,  $T_N \sim 1$  MeV:

$$\frac{|\Omega - 1|_{T=T_N}}{|\Omega - 1|_{T=T_0}} \approx \left( \frac{a_N^2}{a_0^2} \right) \approx \left( \frac{T_0^2}{T_N^2} \right) \approx \mathcal{O}(10^{-16}) . \quad (1.12)$$

Por lo tanto, para obtener un valor de  $(\Omega - 1) \sim 0,01$ , el valor de  $(\Omega - 1)$  en épocas muy tempranas del Universo, debe tener valores bien “sintonizados” e increíblemente cercanos a cero, pero sin llegar a ser exactamente cero. Es por eso que este problema es también llamado problema de ajuste fino.

### 1.3.2. Problema de Horizonte

El problema de horizonte consiste en que la región que corresponde a nuestro horizonte actual, en una época llamada época de recombinación, era mucho mas grande que el horizonte de partícula en esa época en un orden de  $10^5$ . Debido a esto, regiones que estaban desconectadas causalmente en esa época, ahora están conectadas. La no causalidad entre regiones o puntos del espacio tiene como consecuencia que la radiación emitida en ese tiempo llegaría a nosotros con grandes anisotropías. Sin embargo, la radiación que recibimos es altamente isotropa.

Hay otro aspecto del problema del horizonte que está relacionado con el problema de condiciones iniciales para las perturbaciones cosmológicas. Se tiene certeza de que el Universo temprano fue muy homogéneo; sin embargo, hoy en día la inhomogeneidad se encuentra en todas partes: estrellas ( $\delta\rho/\rho \sim 10^{30}$ ), galaxias ( $\delta\rho/\rho \sim 10^5$ ), clusters de galaxias ( $\delta\rho/\rho \sim 10 - 10^3$ ), superclusters, o clusters de clusters ( $\delta\rho/\rho \sim 1$ ) [33]. La cosmología estándar explica cómo es que esto sucede. Una vez el Universo llega a ser dominado por la materia, las primeras inhomogeneidades en la densidad ( $\delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$ ) son amplificadas por la gravedad y crecen hasta convertirse en las estructuras que observamos hoy en día [33]. La existencia de inhomogeneidades tiene otra importante consecuencia: fluctuaciones en la temperatura de la radiación cósmica de fondo. La diferencia de temperaturas entre dos puntos cualesquiera en el cielo, surge debido a un efecto físico simple: la diferencia en el potencial gravitacional entre dos puntos sobre la superficie de la última dispersión de fotones, la cual está relacionada a las perturbaciones en la densidad  $\delta\rho/\rho$  y en la curvatura  $\zeta$ :

$$\left( \frac{\delta T}{T} \right)_k \approx \left( \frac{\delta\rho}{\rho} \right)_k = -\frac{1}{5} \zeta_k , \quad (1.13)$$

en donde  $k$  hace referencia a los modos de la perturbación. Esta relación describe el efecto conocido como Sachs-Wolfe [34]. La anisotropía en la temperatura es comúnmente expandida en armónicos esféricos:

$$\frac{\Delta T}{T}(x_0, \tau_0, \mathbf{n}) = \sum_{lm} a_{l,m}(x_0) Y_{lm}(\mathbf{n}) , \quad (1.14)$$

en donde  $\tau_0$  y  $x_0$  son el tiempo presente y nuestra posición, y  $\mathbf{n}$  es la dirección de observación.

### 1.3.3. Solución a los problemas de la cosmología estándar

Para poder solucionar los problemas de la cosmología estándar es preciso tener un periodo durante el cual las escalas físicas  $\lambda$  crecen mas rápidamente que la escala de horizonte  $H^{-1}$ . Es posible hacer esto introduciendo una etapa inflacionaria [6] en la cual la expansión del universo es acelerada:  $\ddot{a} > 0$ . Esta es una definición rigurosa de inflación. A partir de la ecuación de Friedmann y la ecuación de continuidad, es posible obtener la ecuación de aceleración para el parámetro de expansión:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (1.15)$$

Para obtener inflación se debe cumplir  $\ddot{a} > 0$ , lo que implica, según la ecuación anterior, que  $\rho + 3p < 0$ . Por lo tanto un período de aceleración es posible si  $p$  es negativa:

$$p < -\frac{\rho}{3}, \quad (1.16)$$

la cual no se cumple para radiación ni para materia, pero sí para un campo escalar que evoluciona en un potencial practicamente plano [3].

Para poder estudiar las propiedades del periodo de inflación, asumimos la condición  $p = -\rho$ , la cual simplifica el análisis considerablemente. Esta es llamada una etapa de De Sitter. Bajo esta consideración, se pueden resolver fácilmente la ecuación de continuidad y la ecuación de Friedmann, obteniendo:

$$\dot{\rho} = 0 ; H = \text{constante} , \quad (1.17)$$

y

$$a(t) = a_i e^{H_I(t-t_i)}, \quad (1.18)$$

en donde  $H_I$  es el parámetro de Hubble durante inflación. Se observa entonces que el factor de escala crece exponencialmente (o cuasi-exponencialmente en una etapa cuasi De Sitter), durante inflación.

Es útil en este punto introducir una cantidad importante llamada el monto de inflación,  $N$ , que es cuantificado normalmente por la división entre el factor de escala evaluado en un tiempo final  $t_{final}$  y su valor en un tiempo inicial  $t_{ini}$ . Debido a que ésta es una cantidad muy grande, se toma su logaritmo natural:

$$N(t) \equiv \ln \frac{a(t_{final})}{a(t_{ini})}, \quad (1.19)$$

en donde  $N$  también es conocido como el número de e-folds.

La duración de inflación es importante porque debe ser lo suficientemente grande, de tal manera, que resuelva los problema de planitud y horizonte. Para que inflación solucione estos dos problemas de la cosmología estándar es necesario que  $N$  tome un valor mínimo de aproximadamente 60 [3, 4].

---

## CAPÍTULO 2

# Paradigma Inflacionario y Perturbaciones Cosmológicas

---

### Introducción

El capítulo anterior se concluyó exponiendo cómo una época de expansión acelerada durante las fases primordiales de la evolución del Universo, resuelve, por ejemplo, el problema del horizonte. De la ecuación (1.15) se tiene que

$$\ddot{a} > 0 \iff (\rho + 3p) < 0, \quad (2.1)$$

es decir, un periodo de aceleración es posible solo si la presión total en el Universo es negativa:  $p < -\rho/3$ . Ni en un periodo dominado por radiación (en el cual  $p = \rho/3$ ), ni en un periodo dominado por materia ( $p = 0$ ), se satisface esta condición.

Pero un simple campo escalar puede cumplir con esta condición. Este campo escalar será objeto de estudio en la siguiente sección.

### 2.1 Inflación y el inflatón

Una posible solución para los problemas de la cosmología estándar es tener un período de expansión acelerada, que requiere que se cumpla la condición:  $p < -\rho/3$ . Esta condición puede ser cumplida por medio de un simple campo escalar, que podemos llamar campo del inflatón  $\phi$ .

La acción asociada a este campo es [3, 4]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V(\phi) \right], \quad (2.2)$$

en donde  $\sqrt{-g} = a^3$  para la métrica de Friedmann-Robertson-Walker. De las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial^\mu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial^\mu \phi)} - \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial \phi} = 0, \quad (2.3)$$

es posible obtener la ecuación de movimiento del campo, denominada ecuación de Klein-Gordon:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2\phi}{a^2} + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 . \quad (2.4)$$

A partir del tensor energía momento del campo escalar definido por [3, 4]:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\mathcal{L} , \quad (2.5)$$

se pueden obtener las expresiones para la densidad de materia y la presión del campo escalar:

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{(\nabla\phi)^2}{2a^2} , \quad (2.6)$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) - \frac{(\nabla\phi)^2}{6a^2} . \quad (2.7)$$

De esta ecuación puede notarse que si el término de gradiente fuese dominante, se obtendría  $p_\phi = -\frac{\rho_\phi}{3}$  que no cumple los requerimientos de una etapa inflacionaria.

## Condiciones de Slow-roll

El campo del inflatón puede ser escrito en la forma:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_0(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t) , \quad (2.8)$$

en donde  $\phi_0(t)$  es el valor promedio del campo inflatón, mientras que  $\delta\phi(\mathbf{x}, t)$  representa las fluctuaciones cuánticas alrededor de  $\phi_0(t)$ .

Si se trabaja sólo con la evolución de  $\phi_0(t)$  se obtiene:

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}_0^2}{2} + V(\phi_0) , \quad (2.9)$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}_0^2}{2} - V(\phi_0) , \quad (2.10)$$

y si  $V(\phi_0) \gg \dot{\phi}_0^2$  se obtiene que  $p_\phi \simeq -\rho_\phi$  lo cual satisface (1.16). De este cálculo se deduce que para un campo escalar cuya energía es dominante en el Universo, y cuya energía potencial domina sobre la energía cinética se obtiene un periodo inflacionario.

Un período en el cual  $V(\phi_0) \gg \dot{\phi}_0^2$  y además  $|\ddot{\phi}_0| \ll |3H\dot{\phi}_0|$ , se denomina *slow-roll*. En estas condiciones la ecuación de Friedmann se reduce a:

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3}V(\phi_0) , \quad (2.11)$$

en donde se ha asumido que el Universo es plano ( $K = 0$ ), y que la densidad de energía del campo domina la densidad de energía total. La ecuación de movimiento para el campo escalar  $\phi_0$  es, según la Ec. (2.4):

$$\ddot{\phi}_0 + 3H\dot{\phi}_0 + \frac{\partial V}{\partial\phi_0} = 0 , \quad (2.12)$$

la cual, usando las condiciones de *slow-roll*, se reduce a:

$$3H\dot{\phi}_0 \simeq -\frac{\partial V}{\partial\phi_0} . \quad (2.13)$$

Es útil ahora definir dos parámetros conocidos como parámetros de slow-roll  $\epsilon$  y  $\eta$  [3, 4]:

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = 4\pi G \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} = \frac{m_{pl}^2}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial \phi_0} \right)^2, \quad (2.14)$$

$$\eta = m_{pl}^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_0^2} \right) = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 V}{H^2}, \quad (2.15)$$

en donde  $m_{pl} \equiv \sqrt{\frac{1}{8\pi G}}$  se conoce la masa reducida de Planck.

El parámetro  $\epsilon$  cuantifica el cambio con respecto al tiempo del parámetro de Hubble  $H$  durante inflación. Se debe notar también que:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = (1 - \epsilon)H^2, \quad (2.16)$$

por lo tanto inflación requiere que  $\epsilon < 1$ . Inflación termina cuando esta condición deja de ser satisfecha.

La definición de slow-roll también se puede enunciar en términos de los parámetros de slow-roll. Para que la aproximación de *slow-roll* sea posible, es necesario que los parámetros de *slow roll* cumplan con las siguientes dos condiciones:

$$\epsilon \ll 1, \quad (2.17)$$

y

$$|\eta| \ll 1. \quad (2.18)$$

A los modelos que usan la aproximación de slow-roll se les conoce como ‘modelos del tipo slow-roll’. Estos modelos son preferidos, y mayormente usados, debido a que logran obtener fácilmente el número de e-folds necesario. Además hacen que el espectro de la perturbación en la curvatura  $\mathcal{P}_\zeta$  (ver Ec. 2.25), que es parametrizado por el índice espectral  $n_\zeta$  (ver Ec.(2.47)), sea casi invariante de escala, es decir:  $n_\zeta \approx 1$  en total acuerdo con las observaciones [16].

## 2.2 Perturbaciones cosmológicas

La actual comprensión del origen de las estructuras en el Universo es que éstas se originaron de pequeñas perturbaciones cuánticas, las cuales se convirtieron en perturbaciones clásicas a la salida del horizonte durante inflación, y crecieron con el paso del tiempo, gracias al colapso gravitacional, para llegar a ser las estructuras que observamos hoy en día [3, 4, 5]. La existencia de dichas perturbaciones fue confirmada por el satélite COBE, al descubrir las anisotropías en la radiación cósmica de fondo [35, 36].

Se requiere entonces, dar una explicación física acerca del origen de las pequeñas perturbaciones que dan lugar a las anisotropías observadas hoy en día. La mejor opción para el origen de esas perturbaciones son fluctuaciones cuánticas durante una era inflacionaria en el Universo temprano. Aunque inflación provee una solución a los problemas de la cosmología estándar, su propiedad más útil es que genera ondas gravitacionales primordiales y un espectro de perturbaciones en la densidad de energía. Esas perturbaciones se extienden desde escalas extremadamente cortas a escalas más grandes que el tamaño del Universo observable.

Las fluctuaciones cuánticas del campo del inflatón son generadas durante inflación. Debido a que la gravedad conecta la geometría del Universo con su contenido material, las pequeñas fluctuaciones del campo

del inflatón están íntimamente relacionadas a fluctuaciones de la métrica del espacio-tiempo dando lugar a perturbaciones en la curvatura. Las longitudes de onda  $\lambda$  de esas perturbaciones crecen exponencialmente y dejan el horizonte, es decir  $\lambda > R_H$ . En escalas de superhorizonte, las fluctuaciones en la curvatura adquieren un valor constante y pueden ser consideradas como clásicas [7, 8] Finalmente, cuando las longitudes de onda de esas fluctuaciones reentran al horizonte (en épocas dominadas por radiación o materia), las perturbaciones de la curvatura del espacio-tiempo dan paso a las perturbaciones en la densidad de materia  $\delta\rho$ , vía la ecuación de Poisson. Esas fluctuaciones empezarán a crecer dando lugar a las estructuras observadas hoy en día.

En resumen, son dos los ingredientes claves para entender las estructuras observadas en el Universo dentro del escenario inflacionario. Por un lado, fluctuaciones cuánticas del campo del inflatón son excitadas durante inflación y extendidas a escalas cosmológicas. Al mismo tiempo, siendo las fluctuaciones del inflatón conectadas a las perturbaciones en la métrica a través de las ecuaciones de Einstein, ondulaciones sobre la métrica son también excitadas y extendidas a escalas cosmológicas. Por otra parte la gravedad actúa como mensajero, debido a que comunica a bariones y fotones la pequeña “semilla” de perturbaciones, una vez la longitud de onda llega a ser más pequeña que la escala de horizonte después de inflación.

### 2.2.1. Fluctuaciones cuánticas de un campo escalar sin masa durante inflación

En esta subsección se describirá un ejemplo específico que muestra las características fundamentales del comportamiento de la perturbación de un campo escalar genérico sin masa, que no domina la densidad de energía en el Universo.

Para simplificar el análisis se considerará una etapa de De sitter durante la cual el parámetro de Hubble es constante. Sea  $\chi(\mathbf{x}, t)$  un campo escalar sin masa, y que se puede escribir en la forma:

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \chi_0(t) + \delta\chi(\mathbf{x}, t) . \quad (2.19)$$

La expansión en serie de fourier de la perturbación en el campo se puede escribir como:

$$\delta\chi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta\chi(\mathbf{k}, t) . \quad (2.20)$$

De la ecuación de movimiento (2.4), es posible obtener la ecuación para las perturbaciones:

$$\delta\ddot{\chi}(\mathbf{k}) + 3H\delta\dot{\chi}(\mathbf{k}) + \frac{k^2}{a^2}\delta\chi(\mathbf{k}) = 0 . \quad (2.21)$$

La solución exacta de esta ecuación está dada por:

$$\delta\chi(\mathbf{k}) = \frac{\exp(ik/aH)}{a\sqrt{2k}} \left( 1 - i\frac{aH}{k} \right) . \quad (2.22)$$

En escalas de subhorizonte ( $k \gg aH$ ), las perturbaciones se pueden aproximar a:

$$\delta\chi(\mathbf{k}) \approx \frac{\exp(ik/aH)}{a\sqrt{2k}} . \quad (2.23)$$

En escalas de superhorizonte ( $k \ll aH$ ), la aproximación queda:

$$\delta\chi(\mathbf{k}) \approx \frac{iH}{\sqrt{2k^3}}. \quad (2.24)$$

En resumen, las fluctuaciones oscilan hasta que la longitud de onda llega a ser del orden del horizonte; cuando la longitud de onda cruza el horizonte, las fluctuaciones dejan de oscilar y se ‘congelan’.

Una cantidad útil para caracterizar las propiedades de las perturbaciones es el espectro, que puede ser definido para una perturbación genérica  $\delta\chi(\mathbf{x}, t)$ , como:

$$\langle 0 | \delta\chi(\mathbf{k}_1) \delta\chi(\mathbf{k}_2) | 0 \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\delta\chi}(k), \quad (2.25)$$

donde  $|0\rangle$  es el estado cuántico de vacío del sistema y  $P_\zeta \equiv \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\zeta$  se conoce como el espectro. Tomando en cuenta la descomposición en serie de fourier (2.20), la definición anterior conduce a la relación

$$\langle 0 | \delta\chi^2(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle = \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\delta\chi}(k). \quad (2.26)$$

Debido a que las fluctuaciones toman un valor fijo y constante en escalas de superhorizonte, una forma de caracterizar las perturbaciones es calcular el espectro en escalas mas grandes que el horizonte.

## 2.2.2. Fluctuaciones en la métrica

La teoría lineal de las perturbaciones cosmológicas representa una piedra angular de la cosmología moderna y es usada para describir la formación y evolución de estructuras en el Universo, así como las anisotropías en la radiación cósmica de fondo. En la subsección anterior se ha podido ver como las perturbaciones de un genérico campo escalar  $\chi$  son generadas en una etapa de De Sitter. El campo del inflatón es un campo escalar y como tal, se generan fluctuaciones de este campo. Sin embargo, el inflatón es especial desde el punto de vista de las perturbaciones, y la razón es simple. Se asume que el campo del inflatón domina la densidad de energía del Universo, y cualquier perturbación del campo significa una perturbación del tensor energía momento:

$$\delta\phi \implies \delta T_{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Una perturbación en el tensor energía momento implica, a través de las ecuaciones de movimiento de Einstein, una perturbación de la métrica.

$$\delta T_{\mu\nu} \implies \left[ \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta(g_{\mu\nu} R) \right] = 8\pi G \delta T_{\mu\nu} \implies \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.28)$$

Por otra parte, una perturbación en la métrica induce así mismo una perturbación en el campo escalar, vía la ecuación d Klein-Gordon del campo del inflatón:

$$\delta g_{\mu\nu} \implies \delta \left( \partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) = 0 \implies \delta \phi \quad (2.29)$$

La conclusión de esta cadena lógica es que las perturbaciones en el campo del inflatón y las de la métrica están acopladas entre si:

$$\delta\phi \iff \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.30)$$

La herramienta matemática para describir la evolución lineal de las perturbaciones cosmológicas es obtenida perturbando a primer orden la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (1.1):

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t). \quad (2.31)$$

Las perturbaciones en la métrica pueden ser descompuestas de acuerdo a su espín con respecto a una rotación local de las coordenadas espaciales en hipersuperficies de tiempo constante. Esto lleva a ([37])

- Perturbaciones escalares
- Perturbaciones vectoriales
- Perturbaciones tensoriales

Las perturbaciones tensoriales u ondas gravitacionales tienen espín 2 y son los ‘verdaderos’ grados de libertad de los campos gravitacionales en el sentido de que ellos pueden existir aún en el vacío. Las perturbaciones vectoriales son modos de espín 1 que surgen de los campos de velocidad rotacional y son llamados también modos de vorticidad. Finalmente, las perturbaciones escalares tienen espín 0.

A primer orden las perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales evolucionan independientemente, y es posible entonces analizarlos separadamente. Perturbaciones vectoriales no son excitadas durante inflación debido a que no hay campos de velocidad rotacional durante la etapa inflacionaria.

Considerando únicamente grados de libertad escalares de la perturbación en la métrica, la métrica perturbada mas general es [37]:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 - 2A & \partial_i B \\ \partial_i B & (1 - 2\psi)\delta_{ij} + \Pi_{ij} \end{pmatrix},$$

en donde  $\Pi_{ij}$  es un tensor simétrico sin traza y  $A$ ,  $B$  y  $\psi$  son perturbaciones escalares.

### 2.2.3. Perturbación en la curvatura

Cuando se estudian perturbaciones cosmológicas en la densidad el interés se centra en la evolución de un espacio-tiempo que ni es homogéneo ni isotrópico. Esto es hecho siguiendo la evolución de las diferencias entre el espacio-tiempo en estudio y un espacio-tiempo de referencia. En nuestro caso el sistema de referencia es el espacialmente plano espacio-tiempo de Friedmann-Robertson-Walker. La clave es que la relatividad general es una teoría de gauge donde las transformaciones de gauge son las transformaciones de coordenadas de un marco de referencia a otro.

Cuando se calcula la perturbación de una cantidad dada, esta es definida como la diferencia entre el valor que esta cantidad tiene en el espacio tiempo real, y el valor que esta asume en el espacio-tiempo de referencia no perturbado. Sin embargo, para llevar a cabo una comparación entre esos dos valores, es necesario calcularlos en el mismo punto del espacio tiempo. Debido a que los dos valores se encuentran en dos diferentes geometrías, es necesario encontrar una relación la cual indique unívocamente el mismo punto en los dos diferentes espacio-tiempos.

Fijar un gauge en relatividad general implica escoger un sistema coordenado. Una escogencia de coordenadas define un *threading* de espacio-tiempo en líneas (que corresponden a coordenadas espaciales fijas  $\mathbf{x}$ ) y un *slicing* en hipersuperficies (que corresponden a la coordenada fija de tiempo  $t$ )

El problema del gauge radica en el hecho de que un cambio en el sistema coordenado implica la variación de la perturbación de una cantidad dada, la cual puede entonces asumir diferentes valores, de acuerdo a la escogencia del gauge. Para eliminar esta ambigüedad se tienen dos opciones:

- Identificar las combinaciones que representan cantidades invariantes de gauge.
- Escoger un gauge dado y llevar a cabo los cálculos en este gauge.

Escoger un gauge puede ser técnicamente mas simple, pero surgen problemas con cantidades no físicas. Desarrollar un cálculo con cantidades invariantes de gauge puede ser técnicamente mas complicado, pero tiene la ventaja de tratar solamente con cantidades físicas.

A continuación se introducirán algunas cantidades invariantes de gauge, que juegan un importante rol a la hora de calcular las perturbaciones en la densidad de energía. En lo que sigue, las transformaciones de coordenadas serán hechas sobre hipersuperficies de  $t = \text{constante}$ , por lo tanto, ser invariante de gauge será equivalente a ser independiente del slicing.

La cantidad

$$\mathcal{R} = \psi + H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}, \quad (2.32)$$

es la perturbación en la curvatura comóvil. Esta cantidad es invariante de gauge por construcción y está relacionada con la perturbación en la curvatura dependiente de gauge  $\psi$ , en un slicing genérico y a la perturbación del inflatón  $\delta\phi$ , en un slicing comóvil, el cual es definido ser el slicing ortogonal a las líneas mundiales de observadores comóviles. (Estos observadores están en caída libre y la expansión definida por ellos es isotrópica)

Otra cantidad importante es la perturbación en la curvatura en slices de densidad de energía uniforme:

$$\zeta = \psi + H \frac{\delta\rho}{\dot{\rho}} \quad (2.33)$$

Esta cantidad es invariante de gauge por construcción y está relacionada con la perturbación en la curvatura dependiente de gauge  $\psi$ , en un slicing genérico y a la perturbación del inflatón  $\delta\phi$ , en un slicing de densidad de energía uniforme. El slicing de densidad de energía uniforme está definido como aquel en el cual no hay perturbación en la densidad de energía, es decir  $\delta\rho = 0$

Un hecho de relevancia es que en escalas de superhorizonte la perturbación en la curvatura comóvil y la perturbación en la curvatura en slices de densidad de energía uniforme están relacionadas de la siguiente forma [37]:

$$\zeta \approx \psi + H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} = \mathcal{R}. \quad (2.34)$$

## 2.3 Descripción estadística para una distribución de probabilidad

Las propiedades estadísticas de las perturbaciones en la densidad de energía del Universo y en la radiación cósmica de fondo ofrecen completa y detallada información acerca del escenario responsable del origen de las estructuras a gran escala del Universo. Tales propiedades son cuantificadas a través del correlador de  $n$  puntos de la perturbación de la curvatura  $\zeta : \langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\dots\zeta(\mathbf{k}_n) \rangle$ .

La perturbación en la curvatura  $\zeta$  tiene carácter estadístico, y se debe entonces construir una función de distribución de probabilidad  $f(\zeta)$  para esta. Las cantidades que definen la función de distribución de probabilidad son sus momentos  $m_\zeta(n)$  [32, 38]:

$$\text{El valor medio } m_\zeta(1) = \langle \zeta \rangle = \int \zeta f(\zeta) d\zeta, \quad (2.35)$$

$$\text{La varianza } m_\zeta(2) = \int (\zeta - \langle \zeta \rangle)^2 f(\zeta) d\zeta, \quad (2.36)$$

$$\text{El skewness } m_\zeta(3) = \int (\zeta - \langle \zeta \rangle)^3 f(\zeta) d\zeta, \quad (2.37)$$

$$\text{La curtosis } m_\zeta(4) = \int (\zeta - \langle \zeta \rangle)^4 f(\zeta) d\zeta, \quad (2.38)$$

y así sucesivamente para cada valor de  $n$ . Una función de distribución gaussiana depende sólo de los dos primeros momentos:

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_\zeta(2)}} e^{-(\zeta - m_\zeta(1))^2 / 2m_\zeta(2)}. \quad (2.39)$$

Para que la distribución sea gaussiana es necesario que todos los momentos impares con  $n \geq 3$  sean cero. Además es necesario que todos los momentos pares con  $n \geq 4$  sean expresados como productos de la varianza.

Las propiedades estadísticas de las perturbaciones son especificadas a través de los valores esperados, los cuales son tomados con respecto al estado cuántico de vacío del Universo durante inflación. Para esto, se debe considerar la serie de Fourier de  $\zeta(\mathbf{x})$ :

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \zeta(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.40)$$

Los valores esperados están dados en términos de funciones de correlación para los modos  $\zeta(\mathbf{k}, t)$ , definidas por:

$$\text{correlador de dos puntos } \langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P_\zeta(k), \quad (2.41)$$

que ya ha sido definido en (2.25),

$$\text{correlador de tres puntos } \langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3) \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B_\zeta(k_1, k_2, k_3), \quad (2.42)$$

y

$$\text{correlador de cuatro puntos } \langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3)\zeta(\mathbf{k}_4) \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) T_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4), \quad (2.43)$$

y así sucesivamente. Las cantidades  $P_\zeta(k)$ ,  $B_\zeta(k_1, k_2, k_3)$  y  $T_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$  son conocidas como espectro, bispectro y trispectro respectivamente, y están relacionadas con los momentos  $m_\zeta(n)$  de  $\zeta$  por medio de:

$$m_\zeta(2) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_\zeta(k), \quad (2.44)$$

$$m_\zeta(3) = \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^6} B_\zeta(k_1, k_2, k_3), \quad (2.45)$$

$$m_\zeta(4) = \int \frac{d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3}{(2\pi)^9} T_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4). \quad (2.46)$$

El espectro  $P_\zeta(k)$  es parametrizado a través de una amplitud  $A_\zeta$  y un índice espectral  $n_\zeta$ :

$$P_\zeta(k) = \frac{2\pi^2}{k^3} A_\zeta^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{n_\zeta-1}. \quad (2.47)$$

El biespectro  $B_\zeta$  y el triespectro  $T_\zeta$  son parametrizados a través del espectro  $P_\zeta$ :

$$B_\zeta(k_1, k_2, k_3) \equiv \frac{6}{5} f_{NL} [P_\zeta(k_1)P_\zeta(k_2) + \text{permutaciones cíclicas}], \quad (2.48)$$

$$T_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \equiv \frac{1}{2} \tau_{NL} [P_\zeta(k_1)P_\zeta(k_2)P_\zeta(|\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_4|) + \text{permutaciones cíclicas}], \quad (2.49)$$

en donde  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$  son los llamados niveles de no gaussianidad. Se tiene entonces que  $n_\zeta$ ,  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$  son parámetros que discriminan entre los diferentes modelos para el origen de las estructuras a gran escala en el Universo observable. Existen datos observacionales que los modelos inflacionarios deben predecir con exactitud, por ejemplo:  $A_\zeta \simeq 5 \times 10^{-5}$  [39],  $n_\zeta = 0,960 \pm 0,014$  [16],  $-9 \lesssim f_{NL} \lesssim 111$  [16], y  $\tau_{NL} \lesssim 2 \times 10^4$  [18].

---

## CAPÍTULO 3

# Formalismo $\delta N$

---

### 3.1 Introducción

Una forma interesante de abordar el problema del cálculo de las propiedades estadísticas de la perturbación en la curvatura, es el recientemente desarrollado formalismo  $\delta N$  [24, 25, 40], que será expuesto brevemente en esta sección.

Para definir la perturbación en la curvatura se toman hipersuperficies de espacio-tiempo con  $t=\text{constante}$ , de densidad de energía uniforme, y las líneas de mundo de coordenadas espaciales fijas, comóviles. La componente escalar de la métrica espacial es [15, 41]:

$$g_{ij} = a^2(t) e^{2\zeta(t, \mathbf{x})} \gamma_{ij}(t, \mathbf{x}) = \tilde{a}^2(t, \mathbf{x}) \gamma_{ij}(t, \mathbf{x}) . \quad (3.1)$$

En primer lugar hay que verificar que la definición de la perturbación en la curvatura  $\zeta$  en (3.1), reproduce los resultados a primer orden de la sección (2.2.2). La parte espacial del tensor métrico está dada por:

$$g_{ij} = a^2(t) [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + \Pi_{ij}] . \quad (3.2)$$

Definiendo  $\gamma_{ij} = \exp[\Pi_{ij}]$ , y expandiendo (3.1) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \exp[2\zeta(t, \mathbf{x}) + \Pi_{ij}] &= \delta_{ij} + (2 \delta_{ij} \zeta(t, \mathbf{x}) + \Pi_{ij}) + \frac{1}{2!} (2 \delta_{ij} \zeta(t, \mathbf{x}) + \Pi_{ij})^2 \dots \\ &= \delta_{ij} (1 + 2 \delta_{ij} \zeta(t, \mathbf{x})) + \Pi_{ij} + \frac{1}{2!} (2 \delta_{ij} \zeta(t, \mathbf{x}) + \Pi_{ij})^2 \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

se puede notar que, si se toman correcciones a primer orden, la definición (3.1) concuerda con la expresión (3.2), lo que asegura que la perturbación en la curvatura queda bien definida. Por otra parte, se sabe que  $\Pi_{ij}$  es una matriz simétrica y por lo tanto diagonalizable, lo que hace que  $\gamma_{ij}$  también sea diagonalizable

y su determinante pueda ser fácilmente calculado:

$$|\gamma_{ij}| = \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} \quad (3.4)$$

$$= \exp[\Pi_{11}] \exp[\Pi_{22}] \exp[\Pi_{33}]$$

$$= \exp\left[\sum_i \Pi_{ii}\right]$$

$$= \exp[0] = 1. \quad (3.5)$$

( $\sum_i \Pi_{ii} = 0$  debido a que  $\Pi_{ii} = 0 \forall i$ )

Empezando desde un slicing plano en el tiempo  $t_{in}$ , el monto de inflación está definido como  $N(t, \mathbf{x}) \equiv \ln \left[ \frac{\tilde{a}(t, \mathbf{x})}{a(t_{in})} \right]$  para un slicing final de densidad de energía uniforme. Entonces [24, 41]

$$\zeta(t, \mathbf{x}) = \delta N \equiv N(t, \mathbf{x}) - N_0(t), \quad (3.6)$$

en donde  $N_0(t)$  es el monto de inflación no perturbado.

La predicción inflacionaria se basa en suponer que la evolución del Universo observable es determinada por valores de uno o más campos escalares presentes durante inflación, y que tienen la forma:  $\phi_i(\mathbf{x}) = \phi_i + \delta\phi_i(\mathbf{x})$ . Escogiendo las cantidades  $\phi_i$  como las que describen el Universo homogéneo, la ecuación (3.6) queda [25]:

$$\zeta(t, \mathbf{x}) = N(\rho(t), \phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots) - N(\rho(t), \phi_1, \phi_2, \dots). \quad (3.7)$$

En esta expresión, la expansión  $N$  es evaluada en un universo no perturbado, desde una época en donde los campos tenían valores asignados hasta una época en donde la densidad de energía tiene un valor asignado  $\rho$ .

La expresión (3.7) puede ser usada para obtener una serie para  $\zeta$  haciendo uso del teorema de Taylor. Esta expresión se puede reescribir, evaluando los campos en el tiempo  $t_*$  que es cuando las escalas relevantes salen del horizonte, ( $\phi_i(\mathbf{x}, t_*) = \phi_i(t_*) + \delta\phi_i(\mathbf{x}(t_*))$ ), como:

$$\zeta(t, \mathbf{x}) = N(\rho(t), \phi_1 + \delta\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2 + \delta\phi_2(\mathbf{x}), \dots) - N(\rho(t), \phi_1, \phi_2, \dots), \quad (3.8)$$

y haciendo uso del teorema de Taylor:

$$\begin{aligned} \psi(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) - \psi(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dx_i dx_j dx_k + \dots, \end{aligned} \quad (3.9)$$

se obtiene para  $\zeta(t, \mathbf{x})$  la siguiente expresión:

$$\zeta(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(t) \delta\phi_i(t_*, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n N_{ij} \delta\phi_i(t_*, \mathbf{x}) \delta\phi_j(t_*, \mathbf{x}) + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^n N_{ijk} \delta\phi_i(t_*, \mathbf{x}) \delta\phi_j(t_*, \mathbf{x}) \delta\phi_k(t_*, \mathbf{x}) + \dots, \quad (3.10)$$

en donde:  $N_i \equiv \frac{\partial N}{\partial \phi_i}$ ,  $N_{ij} \equiv \frac{\partial^2 N}{\partial \phi_i \partial \phi_j}$  y así sucesivamente.

Tomando la transformada de fourier de  $\zeta$  (ver(2.40)) es posible calcular las funciones de correlación (2.41,2.42, 2.43), y por lo tanto, conseguir expresiones para el espectro  $P_\zeta$ , el biespectro  $B_\zeta$  y el triespectro  $T_\zeta$  de  $\zeta$ . Pero debido a que  $\zeta$  está dada como una serie, se debe tomar la decisión de cortar a algún orden para poder calcular las propiedades estadísticas mas relevantes. En este punto, la pregunta que surge inmediatamente es: ¿a que orden es suficiente y necesario cortar la serie?, de hecho, una pregunta mas fundamental sería: ¿converge la serie para  $\zeta$ ?. Estas preguntas tratarán de ser respondidas en el siguiente capítulo para un modelo inflacionario específico de slow roll.

## 3.2 Cálculo de cantidades a segundo orden

En esta sección se presentarán algunos resultados relevantes del formalismo  $\delta N$ . Tomemos solo el primer término en la serie de  $\zeta$  (3.10), es decir, cortemos la serie a primer orden y a continuación tomemos su transformada de fourier:

$$\zeta(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(t) \delta\phi_i(t_*, \mathbf{x}) . \quad (3.11)$$

$$\Rightarrow \zeta(t, \mathbf{k}) = \sum_{i=1}^n N_i(t) \delta\phi_i(t_*, \mathbf{k}) , \quad (3.12)$$

en donde  $\phi_i(t_*, \mathbf{k})$  es la transformada de fourier de  $\phi_i(t_*, \mathbf{x})$ . De la definición de correlador de dos puntos (2.41), podemos calcular el espectro de  $\zeta$ ,  $\mathcal{P}_\zeta$ , en función del espectro  $\mathcal{P}_{\delta\phi_i}$  de las perturbaciones en los campos  $\phi_i$ :

$$\begin{aligned} \langle \zeta(t, \mathbf{k}_1) \zeta(t, \mathbf{k}_2) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n N_i(t) \delta\phi_i(t_*, \mathbf{k}_1) \sum_{j=1}^n N_j(t) \delta\phi_j(t_*, \mathbf{k}_2) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i,j=1}^n N_i(t) N_j(t) \delta\phi_i(t_*, \mathbf{k}_1) \delta\phi_j(t_*, \mathbf{k}_2) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n N_i(t) N_j(t) \langle \delta\phi_i(t_*, \mathbf{k}_1) \delta\phi_j(t_*, \mathbf{k}_2) \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n N_i(t) N_j(t) \frac{2\pi^2}{k^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathcal{P}_{\delta\phi_i} \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n N_i^2(t) \frac{2\pi^2}{k^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathcal{P}_{\delta\phi_i} , \end{aligned} \quad (3.13)$$

en donde se ha tomado en cuenta la relación  $P_\zeta = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\zeta$ . De ahora en adelante se usará la palabra espectro para referirse tanto a  $P_\zeta$  como a  $\mathcal{P}_\zeta$ . De esta expresión y (2.41) se puede identificar claramente el espectro de  $\zeta$ :

$$\mathcal{P}_\zeta = \mathcal{P}_{\delta\phi_i} \sum_{i=1}^n N_i^2(t) . \quad (3.15)$$

El espectro de las perturbaciones en los campos  $\mathcal{P}_{\delta\phi_i}$  es casi invariante de escala y es calculado en [42]:

$$\mathcal{P}_{\delta\phi_i} = \left( \frac{H_*}{2\pi} \right)^2 , \quad (3.16)$$

en donde  $H_*$  es el parámetro de Hubble evaluado en el tiempo en el que las escalas relevantes salen del horizonte. Se puede concluir que si se toma corrección a primer orden en la serie de  $\zeta$  (3.10), entonces el espectro queda determinado por:

$$\mathcal{P}_\zeta = \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2 \sum_{i=1}^n N_i^2(t). \quad (3.17)$$

También es posible cortar la serie de  $\zeta$  a segundo orden y obtener las contribuciones al biespectro  $B_\zeta$ . Para lograr esto, se corta la serie (3.10) a segundo orden, obteniendo:

$$\zeta(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(t) \delta\phi_i(t_*, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n N_{ij} \delta\phi_i(t_*, \mathbf{x}) \delta\phi_j(t_*, \mathbf{x}) \quad (3.18)$$

El procedimiento es parecido al caso anterior del espectro a primer orden. Se toma la transformada de fourier de (3.18) y se utiliza la definición (2.42). La diferencia radica en que esta vez se le adicionará un término a la expresión para  $\zeta$  de tal manera que su valor esperado sea cero. La expresión para  $\zeta$ , en este caso, tomaría la forma:

$$\zeta(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(t) \delta\phi_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n N_{ij} \delta\phi_i(\mathbf{x}) \delta\phi_j(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n N_{ij} \langle \delta\phi_i(\mathbf{x}) \delta\phi_j(\mathbf{x}) \rangle \quad (3.19)$$

(se ha omitido la dependencia de  $t_*$  para ahorrar espacio y trabajo, pero se debe tener en cuenta que los campos  $\phi_i$  están evaluados en este tiempo). Ahora se debe obtener la transformada de fourier de esta expresión:

$$\zeta(t, \mathbf{k}) = \sum_{i=1}^n N_i(t) \delta\phi_i(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n N_{ij} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{k}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n N_{ij} (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}) \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}) \delta\phi_j(\mathbf{k}) \rangle, \quad (3.20)$$

en donde se ha utilizado el teorema de convolución de la transformada de fourier debido a que aparecen productos de las perturbaciones en los campos escalares  $\phi_i$ . El siguiente paso es hacer el producto  $\zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3)$  y a continuación tomar el valor esperado. El producto arroja 27 términos ( $3^3$ ), de los cuales solo algunos hacen aportes a  $B_\zeta$ . Un aspecto a tener en cuenta es la gaussianidad en las perturbaciones en los campos escalares, es decir, el valor que se asume del correlador de tres puntos de estas perturbaciones. Por ejemplo, uno de los términos que se obtienen del producto  $\zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3)$  es:

$$\sum_{i,j,k=1}^n N_i N_j N_k \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_2) \delta\phi_k(\mathbf{k}_3) \rangle \quad (3.21)$$

Asumir no gaussianidad en las perturbaciones en los campos es asumir que  $\langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_2) \delta\phi_k(\mathbf{k}_3) \rangle = 0$ . La contribución asociada al término (3.21) ya ha sido calculada en [43] y encontrada ser despreciable, es decir, su contribución al  $f_{NL}$  es casi nula. Entonces, en lo que sigue, se asumirá no gaussianidad en las perturbaciones de los campos escalares  $\phi_i$ .

El aporte tanto al biespectro  $B_\zeta$ , como al parámetro  $f_{NL}$  es calculado en el apéndice (A). La contribución total al parámetro  $f_{NL}$ , cuando la serie para  $\zeta$  (3.10) es tomada solo hasta segundo orden, es:

$$\frac{6}{5} f_{NL} = \frac{\sum N_i N_j N_{kl}}{[\sum N_i^2]^2} + \ln(kL) \mathcal{P}_\zeta \frac{\sum_{ijk} N_{ij} N_{jk} N_{ki}}{[\sum N_i^2]^3}, \quad (3.22)$$

en donde  $L$  es el corte infrarrojo escogido de tal manera que el cálculo se realiza en una caja mínima ([44]). Para llevar a cabo este cálculo se ha asumido implícitamente que la serie (3.10) converge, así como que los

términos a partir del tercer orden son todos despreciables comparados con los dos primeros términos, sin demostración o fundamento alguno.

De la expresión (A.25) se puede notar que el cálculo del  $f_{NL}$  se obtiene simplemente conociendo las derivadas de  $N$  respecto a los campos  $\phi_i$ . Para cada modelo específico se obtiene entonces un valor de  $f_{NL}$ , que se puede comparar directamente con los datos experimentales conocidos. Es por esto que el parámetro  $f_{NL}$  discrimina entre diferentes modelos que pretenden explicar las anisotropías en la densidad de energía. En la siguiente sección se expondrá un algoritmo de cálculo de las contribuciones tanto al espectro como al biespectro, basado en diagramas tipo Feynmann.

## 3.3 Aproximación Diagramática

### 3.3.1. Introducción

En la sección anterior se mostraron los resultados obtenidos cuando la serie para  $\zeta$  es truncada a segundo orden. Se asumió implícitamente que la serie converge, suposición que ha sido común hasta ahora en la literatura actual [10, 11, 12, 13, 14].

En esta sección será descrito un algoritmo simple, basado en la referencia ([45]), para calcular contribuciones a las funciones de correlación de  $n$  puntos de la perturbación en la curvatura  $\zeta$ , a partir de diferentes diagramas tipo Feynmann, en el marco del formalismo  $\delta N$ . Se calcularán contribuciones de algunos diagramas y se compararán con resultados obtenidos en la sección anterior. La utilidad del cálculo por diagramas es que permite comparar si algunas contribuciones de alto orden, como contribuciones a nivel de lazo puedan compararse con contribuciones a nivel de árbol. A diferencia de la sección anterior, ahora se tomará en cuenta la no gaussianidad en las perturbaciones en los campos.

Los diagramas se pueden clasificar según tengan o no lazos, que son trayectorias cerradas. Los diagramas sin lazos se conocen como “nivel árbol”, y dependiendo de cuantos lazos tenga el diagrama se conocen como “a un lazo”, “a dos lazos”, etcétera. Las reglas de construcción de las contribuciones de los diferentes diagramas están dadas por:

1. Dibujar el diagrama de  $n$  puntos con  $n$  líneas externas y continuas dirigidas hacia cada uno de los  $n$  puntos. Dibujar el número apropiado de correladores, los cuales pueden ser propagadores ( que son correladores de dos puntos) o correladores de mas alto orden en los campos  $\delta\phi_i$ . Las líneas de estos se dibujan a trazos (discontinuas) y cada una de estas líneas debe estar conectado a una línea externa al menos en uno de sus extremos. Si es conectada en ambos extremos a una línea externa, entonces es un propagador.
2. Cada línea continua debe ser marcada con un momentum  $\mathbf{k}_i$  y cada una de las líneas a trazos debe ser marcada con un momentum  $\mathbf{q}_i$ . Cada extremo de una línea discontinua que esté conectada a una línea externa debe ser marcado con un índice de campo  $i, j, \dots, k$
3. Asignar un factor  $N_{ij\dots k}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \dots - \mathbf{q}_p)$  a cada término que incluya una línea externa, donde el número de derivadas de  $N$  corresponde a el número de líneas a trazos conectadas a este vértice.
4. Asignar un factor  $\delta^{ij}P_{\delta\phi}(q)$  a cada propagador, donde  $ij$  son los apropiados índices con los que el propagador es marcado en ambos extremos y  $\mathbf{q}$  es el momentum que se le ha asignado.

5. Asignar un factor  $(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) B^{ijk}(q_1, q_2, q_3)$  a cada vértice de tres líneas a trazos que no contienen líneas externas (es decir, correladores de tres puntos en los campos), donde  $i, j$  y  $k$  son los índices de campo que fueron asignados a la línea a trazos en uno de sus extremos. Reglas similares se utilizan para vértices de líneas a trazos de más alto orden.
6. Integrar sobre todos los momentos,  $\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q_i$
7. Dividir por el apropiado factor numérico. Cuando hay  $l$  propagadores atados a los mismos vértices en ambos extremos este factor es  $l!$ .
8. Adicionar todas las permutaciones de los diagramas las cuales son todas las distintas formas de renombrar los  $\mathbf{k}_i$ . El número de permutaciones depende las simetrías del diagrama, un diagrama con simetría completa entre todas sus líneas externas tiene únicamente un término.

### 3.3.2. Contribuciones de los diagramas de dos puntos

Los diagramas de dos puntos representan las contribuciones al correlador de dos puntos de la perturbación en la curvatura  $\zeta$ . En esta sección se calcularán contribuciones de algunos diagramas de dos puntos, mas concretamente los diagramas a nivel de árbol y a nivel de un lazo.

#### Diagrama a nivel de árbol

Es el diagrama mas simple. Utilizando las reglas dadas anteriormente, la figura que representa la contribución al correlador de dos puntos queda de la siguiente forma

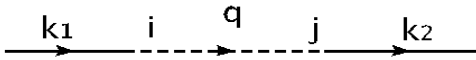


FIGURA 3.1: DIAGRAMA A NIVEL DE ÁRBOL PARA EL CORRELADOR DE 2 PUNTOS

De acuerdo con las reglas, la contribución de este diagrama es:

$$\begin{aligned}
 \langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3\mathbf{q} N_i (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) N_j (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}) \delta^{ij} P_{\delta\phi}(q) \\
 &= N_i N_j \delta^{ij} \int d^3\mathbf{q} \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}) \frac{2\pi^2}{q^3} \mathcal{P}_{\delta\phi} \\
 &= N_i N^i \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\delta\phi} \\
 &= \sum N_i^2 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\delta\phi}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

De la definición (2.41) se puede deducir que

$$\mathcal{P}_\zeta = \mathcal{P}_{\delta\phi} \sum N_i^2, \tag{3.24}$$

expresión que es idéntica a la ecuación (3.15), que fue deducida cortando a primer orden en la serie para  $\zeta$ . Es así como algunas contribuciones calculadas por aproximación diagramática deben concordar con las contribuciones calculadas cortando la serie para  $\zeta$ .

## Diagramas a nivel de un lazo

A nivel de un lazo existen dos posibles diagramas, si se consideran solamente hasta correladores de tres puntos en los campos. Uno de estos diagramas se puede dibujar de la siguiente manera:

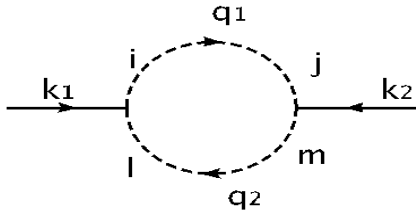


FIGURA 3.2: DIAGRAMA DE DOS PUNTOS CON UN LAZO

y la contribución se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle &= \frac{1}{2!} \frac{1}{(2\pi)^6} \int dq_1 dq_2 N_{il}(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) N_{jm}(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \delta^{ij} P_{\delta\phi}(q_1) \delta^{lm} P_{\delta\phi}(q_2) \\
&= N_{il} N_{jm} \delta^{ij} \delta^{lm} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \int d^3 \mathbf{q}_2 P_{\delta\phi}(|\mathbf{K}_1 + \mathbf{q}_2|) P_{\delta\phi}(q_2) \\
&= N_{il} N^{il} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathcal{P}_{\delta\phi}^2 \frac{4\pi^4}{k^3} \ln(kL). \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Comparando este resultado con (2.41) se puede deducir que la contribución de este diagrama al espectro de  $\zeta$  es:

$$\mathcal{P}_\zeta = \mathcal{P}_{\delta\phi}^2 \ln(kL) \sum N_{il}^2, \tag{3.26}$$

Es bueno notar que esta contribución al espectro no fue encontrada cuando simplemente se cortó la serie de  $\zeta$  a segundo orden. El siguiente diagrama tiene un correlador de tres puntos en los campos. En la sección (3.2) se asumió que este correlador era nulo, es decir, la distribución para las perturbaciones en los campos era gaussiana.

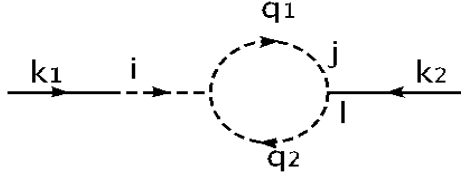


FIGURA 3.3: DIAGRAMA DE DOS PUNTOS CON UN LAZO Y CORRELADOR DE TRES PUNTOS EN LOS CAMPOS

Teniendo en cuenta las reglas de la introducción, el aporte al correlador de dos puntos se puede calcular como:

$$\begin{aligned}
\langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^9} \int d^3 q_1 d^3 q_2 d^3 q_3 N_i(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1) N_{jl}(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \\
&\times \delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) B^{ijl}(q_1, q_2, q_3) \\
&= N_i N_{jl} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \int d^3 \mathbf{q} B^{ijl}(k_1, q, |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|) + \text{permutacion } (\mathbf{k}_2 \longleftrightarrow \mathbf{k}_1) \tag{3.27}
\end{aligned}$$

### 3.3.3. Contribuciones de los diagramas de tres puntos

Estos diagramas hacen contribuciones al correlador de tres puntos de  $\zeta$ . Así como en la sección anterior, solo se tendrán en cuenta diagramas a nivel árbol, y diagramas que contengan solo hasta un correlador de cuatro puntos de las perturbaciones en los campos.

#### Diagramas a nivel árbol

Son dos los diagramas a nivel árbol que se pueden obtener si se consideran correladores de tres puntos en las perturbaciones en los campos.

A continuación se presenta la figura del diagrama con solo propagadores (correladores de dos puntos) :

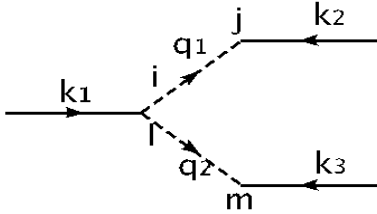


FIGURA 3.4: DIAGRAMA DE TRES PUNTOS A NIVEL DE ÁRBOL Y DOS PROPAGADORES

Su contribución se calcula como:

$$\begin{aligned}
 \langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^9} \int dq_1 dq_2 N_{il}(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) N_j(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}_1) N_m(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}_2) \\
 &\quad \delta^{ij} P_{\delta\phi}(q_1) \delta^{lm} P_{\delta\phi}(q_2) \\
 &= N_{il} N_j N_m \delta^{ij} \delta^{lm} \int d^3 \mathbf{q}_1 d^3 \mathbf{q}_2 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}_1) \delta^3(\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}_2) P_{\delta\phi}(q_1) P_{\delta\phi}(q_2) \\
 &= N_{il} N^i N^l \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{2\pi^2 2\pi^2}{k_2^3 k_3^3} \mathcal{P}_{\delta\phi} \mathcal{P}_{\delta\phi} + \text{permutaciones ciclicas} \\
 &= N_{il} N^i N^l \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \mathcal{P}_{\delta\phi}^2 \left[ \frac{2\pi^2 2\pi^2}{k_2^3 k_3^3} + \text{permutaciones ciclicas} \right]. \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

Se puede notar que esta contribución es idéntica a la contribución expresada en (A.17). La figura del segundo diagrama, la cual incluye un correlador de tres puntos de las perturbaciones en los campos es:

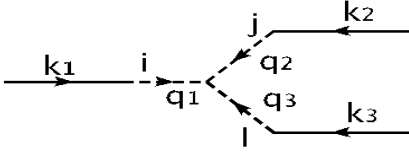


FIGURA 3.5: DIAGRAMA DE TRES PUNTOS CON CORRELADOR DE TRES PUNTOS EN LOS CAMPOS

$$\begin{aligned}
 \langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^9} \int dq_1 dq_2 dq_3 N_i (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1) N_j (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2) N_l (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_3 - \mathbf{q}_3) \\
 &\times (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) B^{ijk}(q_1, q_2, q_3) \\
 &= (2\pi)^3 N_i N_j N_l \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B^{ijk}(k_1, k_2, k_3) .
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Este término es el mismo que se obtiene en (3.21) y surge cuando se asume no gaussianidad en las perturbaciones en los campos.

### Diagramas a nivel de lazo

Existen seis posibles diagramas con un solo lazo, algunos tienen correladores de tres puntos de las perturbaciones en los campos y uno solo de ellos tiene un correlador de cuatro puntos en los campos. A continuación se presentan los diagramas y sus respectivas contribuciones.

1)

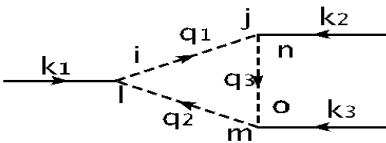


FIGURA 3.6: DIAGRAMA DE TRES PUNTOS CON UN LAZO Y TRES PROPAGADORES

$$\begin{aligned}
\langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^9} \int d^3 q_1 d^3 q_2 d^3 q_3 N_{il}(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) N_{jn}(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) \\
&\quad N_{om}(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2) \delta^{ij} P_{\delta\phi}(q_1) \delta^{no} P_{\delta\phi}(q_3) \delta^{lm} P_{\delta\phi}(q_2) \\
&= \sum N_{il} N_{ln} N_{ni} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \int d^3 q P_{\delta\phi}(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}|) P_{\delta\phi}(q) P_{\delta\phi}(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|) \\
&= \sum N_{il} N_{ln} N_{ni} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 \int d^3 q \frac{2\pi^2 2\pi^2 2\pi^2}{q^3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}|^3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|^3} \\
&= \sum N_{il} N_{ln} N_{ni} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \ln(kL) \left[ \frac{1}{k_1^3 k_2^3} + \frac{1}{k_2^3 k_3^3} + \frac{1}{k_3^3 k_1^3} \right] \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Esta contribución es igual a la obtenida en (A.23). Comparando esta expresión con la definición (2.42) se obtiene la contribución al biespectro de este diagrama:

$$B_\zeta = \sum N_{il} N_{ln} N_{ni} \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 4\pi^4 \ln(kL) \left[ \frac{1}{k_1^3 k_2^3} + \frac{1}{k_2^3 k_3^3} + \frac{1}{k_3^3 k_1^3} \right] \quad (3.31)$$

2)

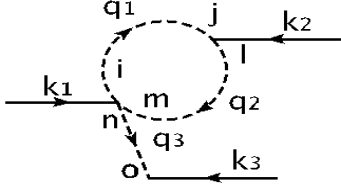


FIGURA 3.7: DIAGRAMA DE TRES PUNTOS CON UN LAZO Y TRES PROPAGADORES

$$\begin{aligned}
\langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3) \rangle &= N_{imn} N^{im} N^n \int d^3 \mathbf{q}_1 d^3 \mathbf{q}_2 d^3 \mathbf{q}_3 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \delta^3(\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}_3) \\
&\times \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 \frac{2\pi^2 2\pi^2 2\pi^2}{q_1^3 q_1^3 q_1^3} + perm.(\mathbf{k}_2 \Leftrightarrow \mathbf{k}_3)(\mathbf{k}_3 \Leftrightarrow \mathbf{k}_1)(\mathbf{k}_1 \Leftrightarrow \mathbf{k}_2) \\
&= N_{imn} N^{im} N^n \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 \int d^3 \mathbf{q} \frac{2\pi^2 2\pi^2 2\pi^2}{k_3^3 q^3 |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|^3} + perm.(\mathbf{k}_2 \Leftrightarrow \mathbf{k}_3)(\mathbf{k}_3 \Leftrightarrow \mathbf{k}_1)(\mathbf{k}_1 \Leftrightarrow \mathbf{k}_2) \\
&= \sum N_{imn} N_{im} N_n \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \ln(kL) \left[ \frac{1}{k_2^3 k_3^3} + \frac{1}{k_2^3 k_3^3} + \frac{1}{k_2^3 k_3^3} \right]. \quad (3.32)
\end{aligned}$$

3)

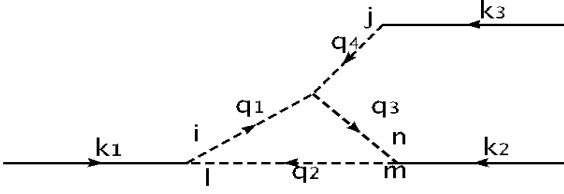


FIGURA 3.8: DIAGRAMA DE TRES PUNTOS CON UN LAZO, UN PROPAGADOR Y UN CORRELADOR DE TRES PUNTOS EN LOS CAMPOS

$$\begin{aligned}
\langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3) \rangle &= N_{il}N_{mn}N_j\delta^{lm} \int d^3\mathbf{q}_1 d^3\mathbf{q}_2 d^3\mathbf{q}_3 d^3\mathbf{q}_4 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) \delta^3(\mathbf{k}_3 - \mathbf{q}_4) \\
&\quad \delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) B^{ijn}(q_1, q_3, q_4) P_{\delta\phi}(q_2) \\
&= N_{il}N_n^l N_j \int d^3\mathbf{q}_1 d^3\mathbf{q}_3 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}_3) \delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3 + \mathbf{k}_3) \\
&\quad \times B^{ijn}(q_1, q_3, k_3) P_{\delta\phi}(|\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}_3|) \\
&= N_{il}N_n^l N_j \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \int d^3\mathbf{q} \frac{2\pi^2}{|\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|^3} B^{ijn}(q_1, |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}, k_3) \mathcal{P}_{\delta\phi} + \\
&\quad + 2 \text{ permt} : (\mathbf{k}_3 \Rightarrow \mathbf{k}_1) \text{ y } (\mathbf{k}_2 \Rightarrow \mathbf{k}_1) \tag{3.33}
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
\langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3) \rangle &= \frac{1}{2!} N_i N_{mjl} N_n \delta^{mn} \int d^3\mathbf{q}_1 d^3\mathbf{q}_2 d^3\mathbf{q}_3 d^3\mathbf{q}_4 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1) \delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4) \delta^3(\mathbf{k}_3 - \mathbf{q}_4) \\
&\quad \delta^3(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) B^{ijl}(q_1, q_2, q_3) P_{\delta\phi}(q_4) \\
&= \frac{1}{2} N_i N_{mjl} N^m \int d^3\mathbf{q}_2 d^3\mathbf{q}_3 \delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) B^{ijl}(k_1, q_2, q_3) \mathcal{P}_{\delta\phi} \frac{2\pi^2}{k_3^3} \\
&= \frac{1}{2} N_i N_{mjl} N^m \mathcal{P}_{\delta\phi} \frac{2\pi^2}{k_3^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \int d^3\mathbf{q} B^{ijl}(k_1, q, |\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}|) + 5 \text{ permt} . \tag{3.34}
\end{aligned}$$

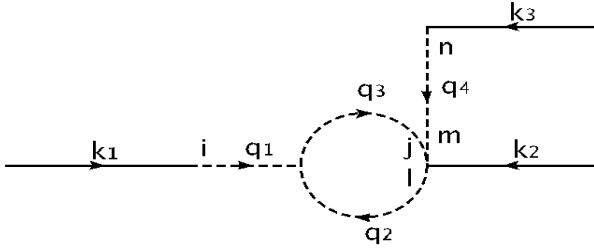


FIGURA 3.9: DIAGRAMA DE TRES PUNTOS CON UN LAZO, UN PROPAGADOR Y UN CORRELADOR DE TRES PUNTOS EN LOS CAMPOS

5)

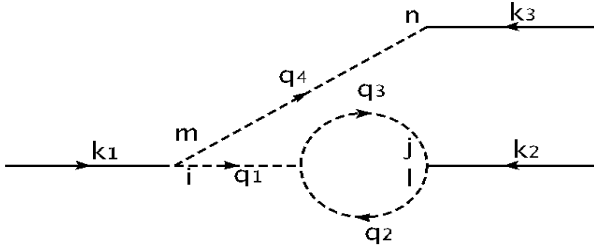


FIGURA 3.10: DIAGRAMA DE TRES PUNTOS CON UN LAZO, UN PROPAGADOR Y UN CORRELADOR DE TRES PUNTOS EN LOS CAMPOS

$$\begin{aligned}
\langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3) \rangle &= \frac{1}{2!} N_{im} N_{jl} N_n \delta^{\delta mn} \int d^3 \mathbf{q}_1 d^3 \mathbf{q}_2 d^3 \mathbf{q}_3 d^3 \mathbf{q}_4 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_4) \delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) \delta^3(\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}_4) \\
&\quad \delta^3(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) B^{ijn}(q_1, q_2, q_3) P_{\delta\phi}(q_4) \\
&= \frac{1}{2} N_{im} N_{jl} N^m \mathcal{P}_{\delta\phi} \frac{2\pi^2}{k_3^3} \int d^3 \mathbf{q}_1 d^3 \mathbf{q}_2 d^3 \mathbf{q}_3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{q}_1) \delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) \\
&\quad \times \delta^3(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) B^{ijn}(k_1, q_2, q_3) \\
&= \frac{1}{2} N_{im} N_{jl} N^m \mathcal{P}_{\delta\phi} \frac{2\pi^2}{k_3^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \int d^3 \mathbf{q} B^{ijn}(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3|, |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|, q) + \\
&\quad + 5 \text{ perm}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

6)

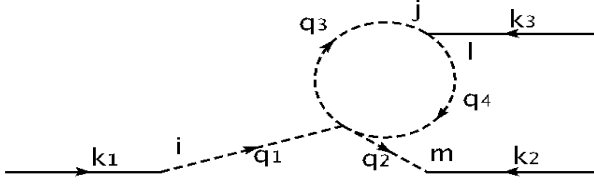


FIGURA 3.11: DIAGRAMA DE TRES PUNTOS CON UN LAZO, Y UN CORRELADOR DE CUATRO PUNTOS EN LOS CAMPOS

$$\begin{aligned}
\langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3) \rangle &= \frac{1}{2!} N_i N_{jl} N_m \int d^3 \mathbf{q}_1 d^3 \mathbf{q}_2 d^3 \mathbf{q}_3 d^3 \mathbf{q}_4 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1) \delta^3(\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}_2) \\
&\quad \delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4) T^{ijlm}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \\
&= \frac{1}{2} N_i N_{jl} N_m \int d^3 \mathbf{q}_3 d^3 \mathbf{q}_4 \delta^3(\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4) T^{ijlm}(\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \\
&= \frac{1}{2} N_i N_{jl} N_m \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \int d^3 \mathbf{q} T^{ijlm}(\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{q}, \mathbf{k}_3 + \mathbf{q}_3) + 2 \text{ perm} \quad (3.36)
\end{aligned}$$

---

## CAPÍTULO 4

# Estudio de un modelo específico de slow-roll

---

### Introducción

Los modelos inflacionarios más utilizados actualmente son los modelos del tipo *slow-roll*, debido a que además de proporcionar el monto suficiente de inflación para solucionar los problemas de la cosmología estándar, también generan un espectro, Ec.(2.47), casi invariante de escala en concordancia con los datos experimentales ( $n_\zeta \approx 1$ ). Aunque el número de modelos disponibles son bastantes [46], es posible clasificarlos en tres grandes grupos [47, 48]: de campo grande, de campo pequeño e híbrido. Un potencial general de un único campo puede ser caracterizado por dos componentes: una “altura”  $\Lambda^4$ , que corresponde a la densidad de energía de vacío durante inflación, y un “ancho”  $\mu$ , que corresponde al cambio en el valor del campo  $\Delta\phi$  durante inflación:

$$V(\phi) = \Lambda^4 f\left(\frac{\phi}{\mu}\right). \quad (4.1)$$

Diferentes modelos vienen representados por diferentes formas de la función  $f$ .

#### Modelos de campo grande

Los modelos de campo grande son potenciales típicos del escenario de inflación caótica [49], en los cuales el campo escalar es desplazado del mínimo de potencial por una cantidad usualmente del orden de la masa de Planck  $M_{Pl}$ . Tales modelos son caracterizados por  $V''(\phi) > 0$ , y  $-\epsilon < \delta \leq \epsilon$  ( $\delta = \eta - \epsilon$ ). Los potenciales de campo grande que se usan son los potenciales polinomiales  $V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{\mu}\right)^p$  y potenciales exponenciales  $V(\phi) = \Lambda^4 e^{\left(\frac{\phi}{\mu}\right)}$ . En el escenario de inflación caótica se asume que el Universo surgió de un estado cuántico con una densidad de energía comparable a la densidad de Planck. Esto implica que  $\phi \approx m_{Pl}$  y resulta en un término grande de fricción en la ecuación de Friedmann (1.3). Consecuentemente el campo hace rodamiento lento a través del potencial. La condición de inflación es entonces satisfecha y el factor de escala crece como:

$$a(t) = a_i e^{\left(\int dt' H(t')\right)}. \quad (4.2)$$

#### Modelos de campo pequeño

Los modelos de campo pequeño son el tipo de potenciales que surgen de rompimiento espontáneo de la simetría (tal como “Nueva” inflación [50]) en donde el inflatón podría ser identificado con un pseudobosón de

Nambu-Goldstone (Inflación natural [51]). El campo empieza desde un punto de equilibrio estable y “rueda” través del potencial a un mínimo estable. Los modelos de campo pequeño son caracterizados por:  $V''(\phi) < 0$ , y  $\eta \leq -\epsilon$ . Los potenciales de campo pequeño se pueden escribir en la forma  $V(\phi) = \Lambda^4[1 - (\phi/\mu)^p]$ , los cuales pueden ser vistos como una expansión de Taylor del mas bajo orden de un potencial arbitrario alrededor del origen (por ejemplo referencia [52]).

## Modelos híbridos

El escenario híbrido [53, 54, 55] aparece en modelos que incorporan inflación en supersimetría [56] y supergravedad [57]. En un típico modelo híbrido de inflación el campo escalar responsable por inflación evoluciona hacia un mínimo con energía de vacío diferente de cero. El final de inflación surge como resultado de la inestabilidad en un segundo campo. Tales modelos son caracterizados por  $V(\phi) > 0$  y  $0 < \epsilon < \delta$ .

## 4.1 El modelo

El potencial del que trata este trabajo pertenece al tipo de modelos de campo pequeño, es de dos componentes, cuadrático, de slow-roll y tiene una forma funcional dada por:

$$V(\phi, \sigma) = V_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \eta_\phi \frac{\phi^2}{m_{pl}^2} + \frac{1}{2} \eta_\sigma \frac{\sigma^2}{m_{pl}^2} \right), \quad (4.3)$$

en donde  $m_{pl}$  es la masa de Planck. A continuación se presenta una gráfica del potencial, con  $\eta_\sigma$  y  $\eta_\phi$  menores que cero.

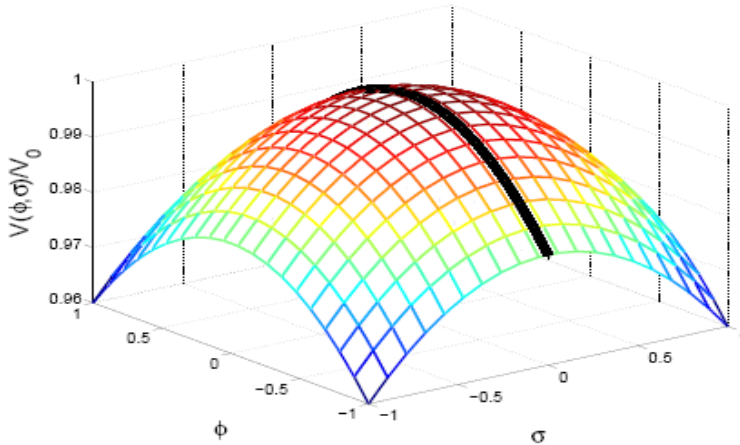


FIGURA 4.1: POTENCIAL.

La línea oscura representa la trayectoria  $\sigma = 0$ . Inflación empieza cerca al máximo y se aleja del origen por esta trayectoria.

El parámetro de slow-roll definido en (2.15) está dado, en el caso del campo  $\phi$ , por:

$$\begin{aligned}\eta'_\phi &= m_{pl}^2 \frac{V_{\phi\phi}}{V} \\ &= m_{pl}^2 \eta_\phi \frac{1}{m_{pl}^2} \\ \Rightarrow \eta'_\phi &= \eta_\phi,\end{aligned}\tag{4.4}$$

en donde se ha usado  $V_\phi = \frac{\partial V}{\partial \phi}$  y  $V_{\phi\phi} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$ , y se ha asumido que el término constante  $V_0$  en el potencial (4.3), domina sobre los otros dos, de tal manera que  $V \approx V_0$ . Análogamente, el parámetro de slow-roll asociado con  $\sigma$ , toma el mismo valor que el parámetro  $\eta_\sigma$  que aparece en (4.3), es decir,  $\eta'_\sigma = \eta_\sigma$ . Entonces, los parámetros  $\eta_\phi$  y  $\eta_\sigma$  que aparecen en el potencial, coinciden con los parámetros de slow-roll de (2.15).

De la condición (2.18), se sigue que  $|\eta_\phi| \ll 1$  y  $|\eta_\sigma| \ll 1$ . Arbitrariamente se escoge, que tanto  $\eta_\phi$  como  $\eta_\sigma$  sean menores que cero, y por simplicidad, se trabaja en la trayectoria  $\sigma = 0$ .

Los niveles de no gaussianidad, que están dados por los valores del parámetro  $f_{NL}$ , se pueden calcular fácilmente usando el formalismo  $\delta N$ . Para poder hacer uso de este formalismo es necesario encontrar el número de e-folds  $N$  en función de los campos  $\phi$  y  $\sigma$ . Partiendo de la ecuación (1.19) es posible encontrar, que el número de e-folds se puede escribir como:

$$\begin{aligned}N &= \int H dt \\ &= \int H \frac{d\phi}{\dot{\phi}},\end{aligned}\tag{4.5}$$

y haciendo uso de la condición de slow-roll (2.13) para el campo  $\phi$ , se obtiene que:

$$N = - \int 3H^2 \frac{d\phi}{V_\phi},\tag{4.6}$$

en donde  $V_\phi = \frac{\partial V}{\partial \phi}$ .

De la ecuación (2.11) y definiendo  $m_{pl}^2 = \frac{1}{8\pi G}$ , se obtiene que:

$$H^2 = \frac{V}{3m_{pl}^2},\tag{4.7}$$

e introduciendo esta ecuación en (4.6), se llega a:

$$N = - \frac{1}{m_{pl}^2} \int \frac{V}{V_\phi} d\phi.\tag{4.8}$$

La derivada de  $V$  respecto a  $\phi$  del potencial (4.3), es:

$$V_\phi = V_0 \frac{\eta_\phi}{m_{pl}^2}.\tag{4.9}$$

Asumiendo que  $V(\phi, \sigma) \approx V_0$ , e introduciendo la derivada (4.9) en la expresión (4.8) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
N &= -\frac{1}{\eta_\phi} \int_{\phi_i}^{\phi} \frac{d\phi}{\phi} \\
N &= -\frac{1}{\eta_\phi} \ln \left[ \frac{\phi}{\phi_i} \right] \\
\Rightarrow -\eta_\phi N &= \ln \left[ \frac{\phi}{\phi_i} \right] \\
\exp[-\eta_\phi N] &= \frac{\phi}{\phi_i} \\
\Rightarrow \phi &= \phi_i \exp[-\eta_\phi N] .
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Análogamente, la expresión para  $\sigma$  queda como:

$$\sigma = \sigma_i \exp[-\eta_\sigma N] . \tag{4.11}$$

El potencial (4.3) se puede ahora escribir en función de  $N$  y  $\phi_i$ :

$$V(\phi_i, \sigma_i, N) = V_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \eta_\phi \frac{\phi_i^2 \exp[-2\eta_\phi N]}{m_{pl}^2} + \frac{1}{2} \eta_\sigma \frac{\sigma_i^2 \exp[-2\eta_\sigma N]}{m_{pl}^2} \right) . \tag{4.12}$$

Para hacer uso del formalismo  $\delta N$ , es necesario tomar el valor inicial del campo en el momento en el que las escalas relevantes salen del horizonte. Al valor del campo en este tiempo se le denotará  $\phi_\star$ .

#### 4.1.1. Cálculo de las derivadas de $N$ respecto a los campos

Para poder calcular las contribuciones a  $\zeta$ , de cada uno de los diagramas tipo Feynmann, es necesario calcular las derivadas de  $N$  respecto a los campos  $\phi_\star$  y  $\sigma_\star$ , en la trayectoria  $\sigma_\star = 0$ . Los resultados, hasta de terceras derivadas, están dados por <sup>††</sup> :

$$N_\phi = \frac{1}{\eta_\phi \phi_\star} , \quad N_\sigma = 0 , \tag{4.13}$$

$$N_{\phi\phi} = -\frac{1}{\eta_\phi \phi_\star^2} , \quad N_{\phi\sigma} = 0 , \quad N_{\sigma\sigma} = \frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi^2 \phi_\star^2} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] , \tag{4.14}$$

$$N_{\phi\phi\phi} = \frac{2}{\eta_\phi \phi_\star^3} , \quad N_{\phi\phi\sigma} = 0 , \quad N_{\sigma\sigma\phi} = -\frac{2\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^3 \phi_\star^3} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] , \quad N_{\sigma\sigma\sigma} = 0 . \tag{4.15}$$

---

<sup>††</sup> Ver cálculo en el apéndice B

### 4.1.2. Cálculo de las contribuciones a $\mathcal{P}_\zeta$ y a $B_\zeta$

Las contribuciones al espectro y al biespectro de los diferentes diagramas tipo Feynman pueden ser analizadas tomando como referencia el potencial específico tratado en este trabajo. En el modelo se asume que  $\eta_\sigma$  y  $\eta_\phi$  son negativos y además  $|\eta_\sigma| > |\eta_\phi|$ . En el apéndice (C) se lleva a cabo este análisis que concluye con que las contribuciones netas están dadas por:

$$\mathcal{P}_\zeta^{tree} = \frac{1}{\eta_\phi^2 \phi_\star^2} \left( \frac{H_*}{2\pi} \right)^2, \quad (4.16)$$

$$\mathcal{P}_\zeta^{1-loop} = \frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^4 \phi_\star^4} \exp[4N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] \left( \frac{H_*}{2\pi} \right)^4 \ln(kL), \quad (4.17)$$

$$B_\zeta^{tree} = -\frac{1}{\eta_\phi^3 \phi_\star^4} \left( \frac{H_*}{2\pi} \right)^4 4\pi^4 \left( \frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3} \right), \quad (4.18)$$

$$B_\zeta^{1-loop} = \frac{\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^6 \phi_\star^6} \exp[6N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] \left( \frac{H_*}{2\pi} \right)^6 \ln(kL) 4\pi^4 \left( \frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3} \right), \quad (4.19)$$

en donde se ha usado la relación  $\frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\zeta = P_\zeta$ .

## 4.2 Restricciones sobre los parámetros

Son cinco las condiciones que el modelo debe cumplir, de tal manera que se logre consistencia teórica y experimental. 1. Se debe asegurar que se trabaja en un régimen perturbativo. 2. Se deben aplicar las condiciones correctas sobre las posibles dominaciones de lazo, tanto sobre el espectro  $\mathcal{P}_\zeta$  como en el biespectro  $B_\zeta$ . 3. Se debe satisfacer la condición de normalización del espectro. 4. Se debe satisfacer el valor experimental del índice espectral  $n_\zeta$ . 5. Se debe tener el suficiente monto de inflación para poder resolver el problema de horizonte.

En la sección final de este capítulo se analizará la convergencia de la serie. Por ahora se estudiarán los demás aspectos y condiciones que el modelo debe cumplir.

### 4.2.1. Dominación a nivel árbol o a nivel de lazo

Existen únicamente tres posibilidades; tanto el espectro  $\mathcal{P}_\zeta$  como el biespectro  $B_\zeta$  dominados a un lazo, el espectro  $\mathcal{P}_\zeta$  dominado a nivel árbol y el biespectro  $B_\zeta$  dominado a un lazo y tanto el espectro  $\mathcal{P}_\zeta$  como el biespectro  $B_\zeta$  dominados a nivel árbol.

## Tanto el espectro $\mathcal{P}_\zeta$ como el biespectro $B_\zeta$ dominados a un lazo

Si tanto en el espectro como en el biespectro domina la contribución al nivel de lazo se sigue, de las ecuaciones (4.16, 4.17, 4.18 y 4.19), que:

$$\frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^4 \phi_\star^4} \exp[4N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^4 \ln(kL) \gg \frac{1}{\eta_\phi^2 \phi_\star^2} \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2, \quad (4.20)$$

$$\frac{\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^6 \phi_\star^6} \exp[6N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^6 \ln(kL) 4\pi^4 \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right) \gg \frac{1}{\eta_\phi^3 \phi_\star^4} \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^4 4\pi^4 \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right). \quad (4.21)$$

Debido a que se escoje  $|\eta_\sigma| > |\eta_\phi|$ , la relación (4.20) contiene a la relación (4.21). De esta forma se obtiene que:

$$\frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^2 \phi_\star^2} \exp[4N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2 \ln(kL) \gg 1, \quad (4.22)$$

(tomando en cuenta que  $\ln(kL) \sim 1$ ).

La razón tensor a escalar  $r$  del espectro de ondas gravitacionales, está relacionada con el espectro  $\mathcal{P}_\zeta$  y el parámetro de Hubble (cuando las escalas relevantes salen del horizonte durante inflación)  $H_*$ , a través de:

$$\left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2 = \frac{m_{pl}^2}{8} r \mathcal{P}_\zeta. \quad (4.23)$$

Reemplazando en la relación (4.22) se obtiene:

$$\frac{\phi_\star^2}{m_{pl}^2} \ll \frac{r \mathcal{P}_\zeta}{8} \frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^2} \exp[4N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)], \quad (4.24)$$

A esta región se le puede denominar región de valores pequeños de  $\phi_\star$ .

## El espectro $\mathcal{P}_\zeta$ dominado a nivel árbol y el biespectro $B_\zeta$ dominado a un lazo

A partir de las relaciones (4.16 y 4.17)

$$\frac{\phi_\star^2}{m_{pl}^2} \gg \frac{r \mathcal{P}_\zeta}{8} \frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^2} \exp[4N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)], \quad (4.25)$$

y a partir de las relaciones (4.18 y 4.19) se obtiene:

$$\frac{\phi_\star^2}{m_{pl}^2} \ll \frac{r \mathcal{P}_\zeta}{8} \frac{\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^3} \exp[6N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)]. \quad (4.26)$$

Uniendo esas dos condiciones en una sola relación se llega a:

$$\frac{r\mathcal{P}_\zeta \eta_\sigma^2}{8 \eta_\phi^2} \exp[4N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] \ll \frac{\phi_\star^2}{m_{pl}^2} \ll \frac{r\mathcal{P}_\zeta \eta_\sigma^3}{8 \eta_\phi^3} \exp[6N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] \quad (4.27)$$

A esta región podría llamársele la región de valores intermedios de  $\phi_\star$ . No es posible el caso contrario, en el que el biespectro es dominado a nivel árbol y el espectro a nivel de lazo debido a que se obtiene un conjunto vacío de soluciones de  $\phi_\star$ .

### Tanto el espectro $\mathcal{P}_\zeta$ como el biespectro $B_\zeta$ dominados a nivel árbol

De las ecuaciones (4.16, 4.17, 4.18 y 4.19) se obtiene:

$$\frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^4 \phi_\star^4} \exp[4N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^4 \ln(kL) \ll \frac{1}{\eta_\phi^2 \phi_\star^2} \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^2 \quad (4.28)$$

$$\frac{\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^6 \phi_\star^6} \exp[6N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^6 \ln(kL) \ll \frac{1}{\eta_\phi^3 \phi_\star^4} \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^4. \quad (4.29)$$

Debido a que  $|\eta_\sigma| > |\eta_\phi|$ , se puede escribir que:

$$\frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^2 \phi_\star^2} \exp[4N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] < \frac{\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^3 \phi_\star^3} \exp[6N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)]. \quad (4.30)$$

Entonces, si la relación (4.29) se satisface, la relación (4.28) también lo hace. Lo que da como resultado que, cuando el espectro y el biespectro son ambos dominados a nivel árbol, se debe cumplir :

$$\frac{\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^6 \phi_\star^6} \exp[6N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^6 \ln(kL) \ll \frac{1}{\eta_\phi^3 \phi_\star^4} \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^4. \quad (4.31)$$

De esta relación se sigue que:

$$\frac{\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^3} \exp[6N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] \left(\frac{r\mathcal{P}_\zeta}{8}\right) \ln(kL) \ll \frac{\phi_\star^2}{m_{pl}^2}, \quad (4.32)$$

donde se utilizó la ecuación (4.23). A esta región podría llamársele región de valores grandes de  $\phi_\star$ .

### 4.2.2. Condición de normalización del espectro $\mathcal{P}_\zeta$

La condición de normalización del espectro consiste en asegurar un valor finito y acorde con el experimento para el espectro  $\mathcal{P}_\zeta$ . Existen dos posibilidades: el espectro domiando a nivel árbol o dominado a nivel de lazo.

### $\mathcal{P}_\zeta$ dominado por correcciones a nivel de un lazo

En este caso  $\mathcal{P}_\zeta \approx \mathcal{P}_\zeta^{1-lazo}$ . De acuerdo a la ecuaciones (4.17 y 4.23) se tiene que:

$$\mathcal{P}_\zeta^{1-lazo} = \frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^4 \phi_\star^4} \exp[4N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^4, \quad (4.33)$$

$$= \frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^4 \phi_\star^4} \exp[4N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] \left(\frac{m_{pl}^4 \mathcal{P}_\zeta^2 r^2}{64}\right) \quad (4.34)$$

$$\implies \left(\frac{\phi_\star}{m_{pl}}\right)^4 = \frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^4} \mathcal{P}_\zeta \left(\frac{r}{8}\right)^2 \exp[4N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)]. \quad (4.35)$$

Es bueno recordar en es este momento que cuando el espectro  $\mathcal{P}_\zeta$  está dominado a nivel de un lazo, se está trabajando en la región baja de  $\phi_\star$ .

### $\mathcal{P}_\zeta$ dominado por correcciones a nivel de árbol

En este caso  $\mathcal{P}_\zeta \approx \mathcal{P}_\zeta^{arbol}$ . De las ecuaciones (4.16 y 4.23) tenemos que

$$\mathcal{P}_\zeta^{arbol} = \frac{1}{\eta_\phi^2 \phi_\star^2} \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^2 \quad (4.36)$$

$$= \frac{1}{\eta_\phi^2 \phi_\star^2} m_{pl}^2 \frac{\mathcal{P}_\zeta r}{8}$$

$$\implies \frac{\phi_\star^2}{m_{pl}^2} = \frac{1}{\eta_\phi^2} \left(\frac{r}{8}\right) \quad (4.37)$$

En esta expresión se puede notar que, una vez fijado el valor del parámetro  $\eta_\phi$ , el valor del campo escalar  $\phi$  cuando las escalas relevantes están saliendo del horizonte, depende solamente de la razón tensor a escalar. Es de notar también, que se está trabajando en las regiones media y alta de  $\phi_\star$  debido a que asumimos que el espectro  $\mathcal{P}_\zeta$  está dominado por correcciones a nivel de árbol. .

### 4.2.3. Condición sobre el índice espectral

El valor actual del índice espectral, según el quinto año de resultados de WMAP [16], es

$$n_\zeta - 1 = -0,040 \pm 0,014. \quad (4.38)$$

Es posible encontrar expresiones para calcular el índice espectral en función del potencial del modelo y de las derivadas de  $N$  con respecto a los campos escalares. Debemos considerar dos casos nuevamente: 1. El espectro dominado a nivel de una lazo. y 2. El espectro dominado a nivel árbol.

## $\mathcal{P}_\zeta$ dominado por correcciones de un lazo

El índice espectral está definido en general por la expresión:

$$n_\zeta - 1 \equiv \frac{d(\ln \mathcal{P}_\zeta)}{d(\ln k)}. \quad (4.39)$$

La contribución al espectro  $\mathcal{P}_\zeta$  por parte del diagrama a un lazo, está dado por:

$$\mathcal{P}_\zeta = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^4 \ln(kL) \sum_{ij} N_{ij}^2. \quad (4.40)$$

A partir de esta expresión, es posible demostrar que el índice espectral, cuando el espectro es dominado a nivel de un lazo, puede ser calculado con la siguiente expresión [32] <sup>¶</sup>:

$$n_\zeta - 1 = -4\epsilon - \frac{2m_{pl}^2}{V} \frac{\left(\sum_{ijk} V_k N_{ij} N_{ijk}\right)}{\sum_{ij} N_{ij}^2} + [\ln(kL)]^{-1}. \quad (4.41)$$

El cálculo de  $\epsilon$  se hace directamente a través de su definición y de nuestro potencial:

$$\epsilon \equiv \sum_i \frac{m_{pl}^2}{2} \left(\frac{V_i}{V}\right)^2, \quad (4.42)$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{m_{pl}^2}{2} \left(\frac{V_\phi^2 + V_\sigma^2}{V_0^2}\right) \quad (4.43)$$

$$= \frac{1}{2} m_{pl}^2 \frac{V_0^2}{V_0^2} \left(\frac{\eta_\phi^2 \phi^2}{m_{pl}^4} + \frac{\eta_\sigma^2 \sigma^2}{m_{pl}^4}\right). \quad (4.44)$$

Haciendo un corte en  $\sigma = 0$  se obtiene que:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \eta_\phi^2 \left(\frac{\phi^2}{m_{pl}^2}\right). \quad (4.45)$$

Debido a que el término constante  $V_0$  en el potencial debe dominar a los otros dos, se debe cumplir que  $\frac{1}{2} \eta_\phi \left(\frac{\phi^2}{m_{pl}^2}\right) \ll 1$ . Tomando esto en cuenta se llega a que

$$\epsilon = |\eta_\phi| \left[\frac{1}{2} |\eta_\phi| \left(\frac{\phi^2}{m_{pl}^2}\right)\right] \ll |\eta_\phi| < |\eta_\sigma|. \quad (4.46)$$

Ahora, tomando en cuenta las derivadas en la ecuaciones (4.14,4.15) se puede calcular el numerador del segundo término del lado derecho de la ecuación (4.41):

$$\sum_{ijk} V_k N_{ij} N_{ijk} = V_\phi N_{\sigma\sigma\phi} N_{\sigma\sigma} + V_\phi N_{\phi\phi\phi} N_{\phi\phi} \quad (4.47)$$

$$= V_\phi \left(-\frac{2\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^3 \phi^3}\right) \left(\frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi^2 \phi^2}\right) \exp[4N(\eta_\phi - \eta_\sigma)]. \quad (4.48)$$

---

<sup>¶</sup>Ver demostración en el apéndice D

La sumatoria del denominador del segundo término del lado derecho de la ecuación (4.41), también se puede calcular para nuestro caso:

$$\sum_{ij} N_{ij}^2 = \frac{1}{\eta_\phi^2 \phi^4} + \frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^4 \phi^4}. \quad (4.49)$$

En este caso el primer término del miembro derecho de la ecuación, es despreciable con respecto al segundo término del mismo miembro.

Sabiendo que  $V_\phi = V_0 \frac{\eta_\phi \phi}{m_{pl}^2}$ , el segundo término del miembro derecho de la ecuación (4.41) queda

$$- \frac{2m_{pl}^2 \left( \sum_{ijk} V_k N_{ij} N_{ijk} \right)}{V \sum_{ij} N_{ij}^2} = 4\eta_\sigma. \quad (4.50)$$

El índice espectral puede ahora ser calculado en el caso en el que el espectro es dominado por correcciones de un lazo. Se sabe de la relación (4.46), que  $\epsilon \ll |\eta_\sigma|$ . Entonces el índice espectral se puede escribir como:

$$n_\zeta - 1 \approx 4\eta_\sigma + [\ln(kL)]^{-1} \sim 1, \quad (4.51)$$

en donde se ha usado el valor central del índice espectral y el hecho de que  $[\ln(kL)]$  es del orden de la unidad. Este resultado para el índice espectral está en desacuerdo con las observaciones, por lo tanto, se descarta la posible dominación a nivel de lazo para  $\mathcal{P}_\zeta$ .

## $\mathcal{P}_\zeta$ dominado por correcciones a nivel árbol

Se puede demostrar que cuando el espectro  $\mathcal{P}_\zeta$  está dominado por correcciones a nivel árbol, la expresión para calcular el índice espectral queda como [32] <sup>||</sup>:

$$n_\zeta - 1 = -2\epsilon - \frac{2m_{pl}^2 \sum_{i,j} [V_j N_i N_{ij}]}{V \sum_i N_i^2}. \quad (4.52)$$

Los cálculos correspondientes quedarían de la forma:

$$\sum_{i,j} (V_j N_i N_{ij}) = -V_\phi \frac{1}{\eta \phi^2 \phi_3}, \quad (4.53)$$

$$\sum_i N_i^2 = \frac{1}{\eta \phi^2 \phi_2}, \quad (4.54)$$

$$V_\phi = V_0 \frac{\eta_\phi \phi}{m_{pl}^2}, \quad (4.55)$$

$$\implies - \frac{2m_{pl}^2 \sum_{i,j} [V_j N_i N_{ij}]}{V \sum_i N_i^2} = 2\eta_\phi, \quad (4.56)$$

y tomando en cuenta la relación (4.46), el índice espectral  $n_\zeta$  queda:

$$n_\zeta - 1 \approx 2\eta_\phi \implies \eta_\phi = -0,020. \quad (4.57)$$

---

<sup>||</sup>Ver demostración en el apéndice D

### 4.2.4. Monto de Inflación

Es sabido que el número de e-folds de inflación necesarios para resolver los problemas de la cosmología estándar son alrededor de 60. En nuestro caso es sencillo obtener  $N$  como una función de los campos escalares (citar ecuación):

$$N = \frac{1}{|\eta_\phi|} \ln \left( \frac{\phi_{end}}{\phi} \right) \quad (4.58)$$

Si esta expresión se evalúa en  $\phi = \phi_{inicial}$ , que es el valor del campo al inicio de inflación, el valor de  $N$  debería tener un valor mayor o aproximadamente igual a 62. Si esta expresión es evaluada en  $\phi = \phi_*$ , es decir, en el momento en las escalas relevantes salen del horizonte, el resultado debe ser menor a 62. Esto es debido a que  $\phi_* > \phi_{inicial}$ . Tenemos entonces que

$$N = \frac{1}{|\eta_\phi|} \ln \left( \frac{\phi_{end}}{\phi_*} \right) \lesssim 62 . \quad (4.59)$$

De la relación (4.44) se deduce que  $\epsilon < 1$ , que es una condición para terminar inflación, no se puede llevar a cabo debido a que esto haría que el término constante del potencial  $V_0$  no domine sobre los otros términos y no se alcancen niveles de no gaussianidad apreciables. (se ha asumido siempre que este término domina). Con esto en mente, se asume que el campo  $\phi$  al final de inflación toma valores tales que  $|\eta_\phi| \phi^2 / 2m_{pl}^2 \sim 10^{-2}$ . No es claro hasta este momento, el mecanismo responsable de finalizar inflación.

Con esto en mente, podemos escribir:

$$\phi_{end} = \sqrt{\frac{2 \times 10^{-2} m_{pl}^2}{|\eta_\phi|}} = m_{pl} . \quad (4.60)$$

Introduciendo este resultado en la ecuación (4.59), se obtiene que:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{|\eta_\phi|} \ln \left( \frac{m_{pl}}{\phi_*} \right) \lesssim 62 , \\ \Rightarrow \frac{\phi_*}{m_{pl}} &\gtrsim \exp[-62|\eta_\phi|] . \end{aligned} \quad (4.61)$$

## 4.3 Cálculo del $f_{NL}$

Son tres los casos que deben ser considerados para el cálculo del parámetro  $f_{NL}$ : las regiones de valores pequeños, intermedios y grandes de  $\phi_*$ .

El bispectro  $B_\zeta$  está parametrizado por el espectro  $\mathcal{P}_\zeta$  y el parámetro  $f_{NL}$  a través de:

$$B_\zeta = \frac{6}{5} f_{NL} 4\pi^4 \left[ \frac{\mathcal{P}_\zeta(k_1)\mathcal{P}_\zeta(k_2)}{k_1^3 k_2^3} + \text{permutaciones cíclicas} \right] . \quad (4.62)$$

Debido a que en nuestro caso las contribuciones, tanto al espectro como al bispectro, son casi independientes de los números de onda  $k$  (solo dependen de  $\ln(kL)$ ), podemos construir una versión más compacta de (4.62):

$$B_\zeta = \frac{6}{5} f_{NL} 4\pi^4 \left[ \frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3} (\mathcal{P}_\zeta^2) \right] \quad (4.63)$$

### 4.3.1. Región de valores pequeños para $\phi_*$

En esta región tanto el espectro como el biespectro están dominados por correcciones a nivel de un lazo, por lo tanto  $\mathcal{P}_\zeta \approx \mathcal{P}_\zeta^{1-lazo}$  y  $B_\zeta \approx B_\zeta^{1-lazo}$ .

De la ecuaciones (4.17, 4.19 y 4.63) se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{6}{5} f_{NL} &= \frac{B_\zeta^{1-lazo}}{4\pi^4 \left[ \frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3} \left( \mathcal{P}_\zeta^{1-lazo} \right)^2 \right]} \\
&= \frac{\frac{\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^6 \phi_*^6} \exp [6N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] \left( \frac{H_*}{2\pi} \right)^6 4\pi^4 \left( \frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3} \right)}{4\pi^4 \frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3} \frac{\eta_\sigma^4}{\eta_\phi^8 \phi_*^8} \exp [8N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] \left( \frac{H_*}{2\pi} \right)^8} \\
&= \frac{1}{\frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi^2 \phi_*^2} \left( \frac{H_*}{2\pi} \right)^2 \exp [2N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)]} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}_\zeta}} \sim -2 \times 10^4 , \tag{4.64}
\end{aligned}$$

en donde se ha usado el valor observado del espectro  $\mathcal{P}_\zeta = (5 \times 10^{-5})^2$ . Este valor para el parámetro  $f_{NL}$  se encuentra por fuera del rango observacional  $-9 \lesssim f_{NL} \lesssim 111$  [16].

### 4.3.2. Región de valores intermedios para $\phi_*$

Cuando el espectro  $\mathcal{P}_\zeta$  es dominado por correcciones a nivel de árbol, la condición de normalización condujo a (ver ecuación (4.37)):

$$\frac{\phi_*^2}{m_{pl}^2} = \frac{1}{|\eta_\phi|^2} \left( \frac{r}{8} \right) , \tag{4.65}$$

y además se encontró (ver ecuación (4.57)) que  $\eta_\phi = -0,020$ .

A partir de estas relaciones y de la ecuación (4.61), se puede llegar a que:

$$\frac{1}{|\eta_\phi|} \sqrt{\frac{r}{8}} \gtrsim \exp [-62|\eta_\phi|] , \tag{4.66}$$

$$\frac{r}{8} \gtrsim \eta_\phi^2 \exp [-124|\eta_\phi|] , \tag{4.67}$$

$$r \gtrsim 2,67 \times 10^{-4} . \tag{4.68}$$

Se concluye que en este caso se encuentra una cota inferior para la razón tensor a escalar.

En esta región se cumple que  $\mathcal{P}_\zeta \approx \mathcal{P}_\zeta^{arbol}$  y  $B_\zeta \approx B_\zeta^{1-lazo}$ . Entonces, teniendo en cuenta las ecuaciones

(4.63, 4.16 y 4.19), el parámetro  $f_{NL}$  se calcula como:

$$\frac{6}{5}f_{NL} = \frac{B_{\zeta}^{1-lazo}}{4\pi^4 \left[ \frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3} (\mathcal{P}_{\zeta}^{arbol})^2 \right]} \quad (4.69)$$

$$= \frac{\frac{\eta_{\sigma}^3}{\eta_{\phi}^6 \phi_{\star}^6} \exp[6N(|\eta_{\sigma}| - |\eta_{\phi}|)] \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^6 4\pi^4 \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right)}{4\pi^4 \frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3} \left[ \frac{1}{\eta_{\phi}^2 \phi_{\star}^2} \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^2 \right]} \quad (4.70)$$

$$= \frac{\eta_{\sigma}^3}{\eta_{\phi}^2 \phi_{\star}^2} \exp[6N(|\eta_{\sigma}| - |\eta_{\phi}|)] \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^2, \quad (4.71)$$

y usando las ecuaciones (4.23 y 4.37), se obtiene que:

$$\frac{6}{5}f_{NL} = \frac{\eta_{\sigma}^3}{\eta_{\phi}^2} \frac{8\eta_{\phi}^2}{r} \frac{r\mathcal{P}_{\zeta}}{8} \exp[6N(|\eta_{\sigma}| - |\eta_{\phi}|)] \quad (4.72)$$

$$= \eta_{\sigma}^3 \mathcal{P}_{\zeta} \exp[6N(|\eta_{\sigma}| - |\eta_{\phi}|)]. \quad (4.73)$$

Sabiendo que  $\mathcal{P}_{\zeta} = (5 \times 10^{-5})^2$  y  $|\eta_{\phi}| = 0,020$ , y teniendo en cuenta las ecuaciones (4.59 y 4.60), se llega a que:

$$\frac{6}{5}f_{NL} = -2,5 \times 10^{-9} |\eta_{\sigma}|^3 \exp \left[ 300 \ln(5,657 \times 10^{-2} r^{-\frac{1}{2}}) (|\eta_{\sigma}| - 0,020) \right]. \quad (4.74)$$

En este punto del análisis, se debe tomar en cuenta la relación para  $\phi_{\star}$  que se obtuvo anteriormente (relación (4.27)):

$$\frac{r\mathcal{P}_{\zeta}}{8} \frac{\eta_{\sigma}^2}{\eta_{\phi}^2} \exp[4N(|\eta_{\sigma}| - |\eta_{\phi}|)] \ll \frac{\phi_{\star}^2}{m_{pl}^2} \ll \frac{r\mathcal{P}_{\zeta}}{8} \frac{\eta_{\sigma}^3}{\eta_{\phi}^3} \exp[6N(|\eta_{\sigma}| - |\eta_{\phi}|)], \quad (4.75)$$

si introducimos la ecuación (4.37):

$$\frac{\phi_{\star}^2}{m_{pl}^2} = \frac{1}{\eta_{\phi}^2} \left(\frac{r}{8}\right),$$

obtenemos:

$$\frac{r\mathcal{P}_{\zeta}}{8} \frac{\eta_{\sigma}^2}{\eta_{\phi}^2} \exp[4N(|\eta_{\sigma}| - |\eta_{\phi}|)] \ll \frac{1}{\eta_{\phi}^2} \left(\frac{r}{8}\right) \ll \frac{r\mathcal{P}_{\zeta}}{8} \frac{\eta_{\sigma}^3}{\eta_{\phi}^3} \exp[6N(|\eta_{\sigma}| - |\eta_{\phi}|)].$$

Trabajando sobre la desigualdad de la izquierda:

$$\frac{r\mathcal{P}_{\zeta}}{8} \frac{\eta_{\sigma}^2}{\eta_{\phi}^2} \exp[4N(|\eta_{\sigma}| - |\eta_{\phi}|)] \ll \frac{1}{\eta_{\phi}^2} \left(\frac{r}{8}\right), \quad (4.76)$$

$$\mathcal{P}_{\zeta} |\eta_{\sigma}|^2 \exp[4N(|\eta_{\sigma}| - |\eta_{\phi}|)] \ll 1, \quad (4.77)$$

$$\Rightarrow |\eta_{\sigma}|^3 \exp[6N(|\eta_{\sigma}| - |\eta_{\phi}|)] \ll 8,210 \times 10^{12}, \quad (4.78)$$

y ahora sobre la de la derecha:

$$\frac{1}{\eta_\phi^2} \left( \frac{r}{8} \right) \ll \frac{r \mathcal{P}_\zeta \eta_\sigma^3}{8 \eta_\phi^3} \exp [6N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] , \quad (4.79)$$

$$\frac{|\eta_\phi|}{\mathcal{P}_\zeta} \ll |\eta_\sigma|^3 \exp [6N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] , \quad (4.80)$$

$$\Rightarrow 8,139 \times 10^6 \ll |\eta_\sigma|^3 \exp [6N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] . \quad (4.81)$$

Uniendo esas dos desigualdades y sustituyendo por valores numéricos, se obtiene que

$$8,139 \times 10^6 \ll |\eta_\sigma|^3 \exp \left[ 300 \ln(5,657 \times 10^{-2} r^{-\frac{1}{2}})(|\eta_\sigma| - 0,020) \right] \ll 8,210 \times 10^{12} .$$

Multiplicando en los extremos izquierdo y derecho por  $10^2$  y  $10^{-2}$  respectivamente, obtenemos una nueva y útil condición:

$$8,139 \times 10^8 < |\eta_\sigma|^3 \exp \left[ 300 \ln(5,657 \times 10^{-2} r^{-\frac{1}{2}})(|\eta_\sigma| - 0,020) \right] < 8,210 \times 10^{10} . \quad (4.82)$$

La relación (4.74) nos permite calcular valores de  $f_{NL}$ , asignando valores a los parámetros libres  $\eta_\sigma$  y  $r$  ( $r$  no es completamente libre porque existe una cota inferior). Se pueden entonces obtener contornos de  $f_{NL} = \text{constante}$ , en una gráfica  $r$  contra  $\eta_\sigma$ .

La siguiente gráfica muestra estos contornos.

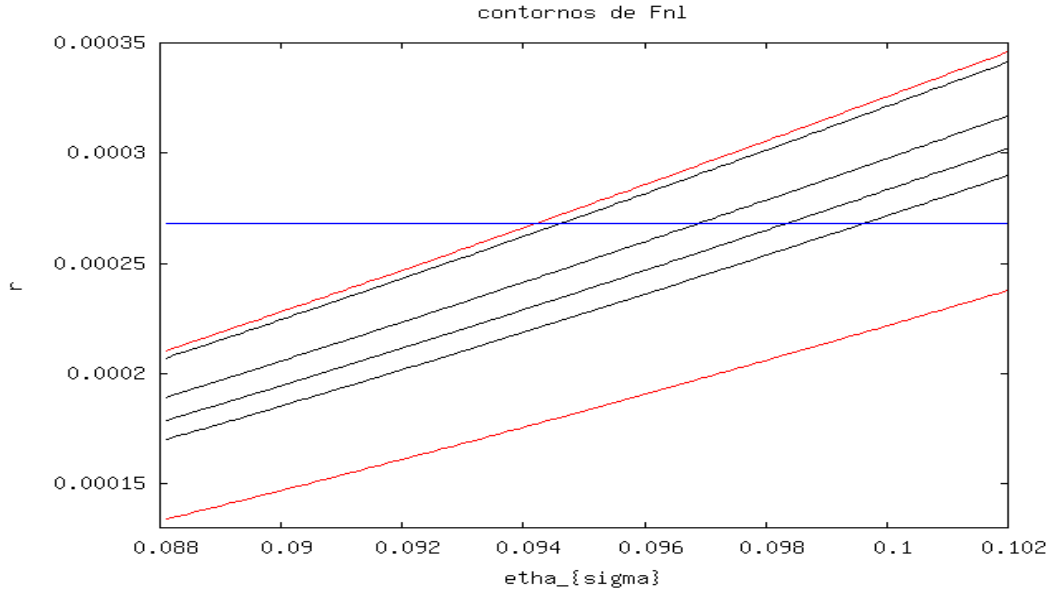


FIGURA 4.2:  $r$  CONTRA  $\eta_\phi$  PARA ALGUNOS VALORES DEL PARÁMETRO  $f_{NL}$

Las líneas de color rojo son los límites superior e inferior que encierran la superficie restringida por la desigualdad (4.82). La línea azul corresponde a la cota inferior de la razón tensor escalar  $r$  que el modelo

de este trabajo predice, y que corresponde al valor calculado en (4.68). Las líneas negras pertenecen, en orden descendente, a valores del parámetro  $f_{NL}$ , que van de  $-2$  a  $-15$  ( $f_{NL} = -2, -5, -9, -15$ ).

Por encima de la línea azul y a la derecha de la línea roja superior se encuentran los valores permitidos del parámetro  $f_{NL}$ . Se concluye entonces en esta región de valores intermedios de  $\phi_*$ , se pueden encontrar valores de  $f_{NL}$  apreciables (que no son del orden de los parámetros de slow-roll) y en total acuerdo con los datos observacionales  $-9 < f_{NL}$  [16].

### 4.3.3. Región de valores grandes para $\phi_*$

De la ecuaciones (4.16, 4.18 y 4.63) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \frac{6}{5}f_{NL} &= \frac{B_{\zeta}^{arbol}}{4\pi^4 \left[ \frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3} (\mathcal{P}_{\zeta}^{arbol})^2 \right]} \\
 &= \frac{-\frac{1}{\eta_{\phi}^3 \phi_*^4} \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^4 4\pi^4 \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right)}{4\pi^4 \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right) \left[\frac{1}{\eta_{\phi}^2 \phi_*^2} \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2\right]^2} \\
 &= \frac{-\frac{1}{\eta_{\phi}^3 \phi_*^4} \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^4}{\frac{1}{\eta_{\phi}^4 \phi_*^4} \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^4} \\
 &= -\eta_{\phi}. \tag{4.83}
 \end{aligned}$$

Del resultado obtenido en (4.57) se concluye que en este caso la no gaussianidad es despreciable y del orden de los parámetros de slow-roll.

## 4.4 Convergencia de la serie

Es indispensable saber si la serie para  $\zeta$  converge, de tal manera que se asegure que se está trabajando en régimen perturbativo y sea válido el truncamiento de la serie a algún orden.

Es claro de (3.10) que un conocimiento de las derivadas de  $N$  respecto a los campos  $\phi_*$  y  $\sigma_*$  podría mostrar de alguna forma la convergencia de la serie para  $\zeta$ . Sin embargo, el cálculo de las derivadas se hace mas y mas complicado conforme aumenta el orden de la derivada, así como se muestra en el apéndice (B). En la sección anterior se mostraron hasta terceras derivadas y no es claro algún posible patrón de comportamiento, es decir, no se puede argumentar que exista una constante de acoplamiento (como ocurre en QED) menor que uno, de tal manera que permita demostrar la convergencia de la serie, por lo menos, para el modelo específico tratado en este trabajo.

A pesar de esto, existe una forma para rederivar la serie para  $\zeta$  en términos de  $\delta\phi_*$  y  $\delta\sigma_*$ , igualando el potencial escalar no perturbado a uno perturbado en un tiempo final  $t$ , en el cual, el slice sea de densidad de energía uniforme. Se tendría entonces que,  $\delta\rho = 0$ , y por lo tanto, basándose en la condición de slow-roll  $\rho_\phi \approx V_\phi$ , se llegaría a  $\Delta V = 0$ . Partiendo del potencial puesto en la forma (4.12) es posible escribir

$$\begin{aligned}
\Delta V &= 0 = V(\phi_* + \delta\phi_*, \sigma_* + \delta\sigma_*, N + \delta N) - V(\phi_*, \sigma_*, N) \\
&= V_0 \left( 1 + \frac{1}{2}\eta_\phi \frac{(\phi_* + \delta\phi_*)^2 \exp[-2\eta_\phi(N + \delta N)]}{m_{pl}^2} + \frac{1}{2}\eta_\sigma \frac{(\sigma_* + \delta\sigma_*)^2 \exp[-2\eta_\sigma(N + \delta N)]}{m_{pl}^2} \right) \\
&\quad - V_0 \left( 1 + \frac{1}{2}\eta_\phi \frac{\phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N]}{m_{pl}^2} + \frac{1}{2}\eta_\sigma \frac{\sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N]}{m_{pl}^2} \right) \\
\Rightarrow &\quad \eta_\phi \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \\
&= \eta_\phi (\phi_* + \delta\phi_*)^2 \exp[-2\eta_\phi(N + \delta N)] + \eta_\sigma (\sigma_* + \delta\sigma_*)^2 \exp[-2\eta_\sigma(N + \delta N)] . \tag{4.84}
\end{aligned}$$

Es útil en este punto introducir las siguientes definiciones:

$$x \equiv \frac{\delta\phi_*}{\phi_*}, \tag{4.85}$$

$$y \equiv \left[ \frac{\eta_\sigma^3 \sigma_*^2}{\eta_\phi^3 \phi_*^2} \left( 1 + \frac{\delta\sigma_*}{\sigma_*} \right)^2 \exp[-2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \right]^{1/2}. \tag{4.86}$$

Utilizando estas definiciones, la ecuación (4.84) queda

$$1 + \frac{\eta_\phi^2}{\eta_\sigma^2} \frac{1}{\left( 1 + \frac{\delta\sigma_*}{\sigma_*} \right)^2} y^2 = (1 + x)^2 \exp[-2\eta_\phi \delta N] + \frac{\eta_\phi^2}{\eta_\sigma^2} y^2 \exp[-2\eta_\sigma \delta N]. \tag{4.87}$$

La idea ahora es despejar  $\delta N$  de esta ecuación, de tal manera que quede en función de  $x$  e  $y$  (después de hacer el corte en  $\sigma_* = 0$ ), para luego tomar una serie de Taylor en  $\delta\phi_*$  y  $\delta\sigma_*$  y cortar al orden deseado. Aprovechando el hecho de que  $y$  contiene la función exponencial de  $N$  (que sería el posible factor de la no convergencia de (3.10)), la convergencia podría ser justificada simplemente haciendo  $|x| \ll 1$  y  $|y| \ll 1$ .

Lamentablemente no es posible despejar  $\delta N$  de la ecuación (4.87), pero una buena alternativa es tomar una aproximación en serie de Taylor a algún orden de  $\delta N$ , de tal manera que su despeje sea posible y se pueda seguir el procedimiento mencionado en el párrafo anterior.  $\delta N$  aparece en las funciones exponenciales de (4.87) y por esto su expansión en serie de Taylor siempre converge, es mas, si la serie de cualquier función  $f(x)$  converge, ésta converge precisamente a  $f(x)$  [58]. Se asegura así que  $\delta N$  puede ser expandido alrededor de  $\delta N = 0$  sin problema.

Haciendo la expansión de  $\delta N$  se llega a que la ecuación (4.87) se puede escribir en potencias de  $N$  como:

$$0 = \left\{ [(1+x)^2 - 1] + \frac{\eta_\phi^2}{\eta_\sigma^2} y^2 \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta\sigma_\star}{\sigma_\star}\right)^2} \right] \right\} + \delta N \left[ -2\eta_\phi(1+x)^2 - 2\frac{\eta_\phi^2}{\eta_\sigma y^2} \right] \\ + \delta N^2 [2\eta_\phi^2(1+x)^2 + 2\eta_\phi^2 y^2] + \dots \quad (4.88)$$

El siguiente paso es truncar a algún orden en  $\delta N$ . Debido a que  $\delta N = \zeta$  y que  $\zeta \sim 10^{-5}$ , truncar a segundo orden sería una buena aproximación para  $\zeta$ . La solución de la ecuación cuadrática que surge al truncar a segundo orden en la ecuación (4.88) es:

$$\delta N \approx \left[ \frac{1}{2}(1+x)^2 + \frac{1}{2}\frac{\eta_\phi}{\eta_\sigma} y^2 \pm \left[ \left( \frac{1}{2}(1+x)^2 + \frac{1}{2}\frac{\eta_\phi}{\eta_\sigma} y^2 \right)^2 - \frac{1}{2} \left\{ [(1+x)^2 - 1] + \frac{\eta_\phi^2}{\eta_\sigma^2} y^2 \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta\sigma_\star}{\sigma_\star}\right)^2} \right] \right\} [(1+x)^2 + y^2]^{1/2} \right]^{1/2} \right] \times \\ \times \{ \eta_\phi [(1+x)^2 + y^2] \}^{-1} . \quad (4.89)$$

El término dentro de la raíz cuadrada puede ser expandido, al igual que el denominador de la ecuación anterior:

$$\left[ \left( \frac{1}{2}(1+x)^2 + \frac{1}{2}\frac{\eta_\phi}{\eta_\sigma} y^2 \right)^2 - \frac{1}{2} \left\{ [(1+x)^2 - 1] + \frac{\eta_\phi^2}{\eta_\sigma^2} y^2 \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta\sigma_\star}{\sigma_\star}\right)^2} \right] \right\} [(1+x)^2 + y^2] \right]^{1/2} \\ = \frac{1}{2} - x^2 + \frac{\eta_\phi}{2\eta_\sigma} \left\{ 1 - \frac{\eta_\phi}{\eta_\sigma} \left[ 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta\sigma_\star}{\sigma_\star}\right)^2} \right] \right\} y^2 + \dots , \quad (4.90)$$

$$\{ \eta_\phi [(1+x)^2 + y^2] \}^{-1} = \frac{1}{\eta_\phi} [1 - 2x + 3x^2 - y^2 + \dots] . \quad (4.91)$$

Introduciendo estas aproximaciones en (4.89) se obtiene:

$$\delta N \approx \frac{1}{\eta_\phi} \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{\eta_\phi^2}{2\eta_\sigma^2} y^2 + \dots \right) , \quad (4.92)$$

en donde ya se ha evaluado en  $\sigma_\star$ .

Con la ayuda de las derivadas de  $N$  (4.13) y (4.14) es posible calcular la serie para  $\zeta$  (que es igual a  $\delta N$ ) (3.10) a segundo orden en las perturbaciones en los campos  $\delta\sigma_*$  y  $\delta\phi_*$ :

$$\delta N \approx \frac{1}{\eta_\phi} \frac{\delta\phi_*}{\eta_\phi \phi_*} - \frac{1}{2\eta_\phi} \left( \frac{\delta\phi_*}{\phi_*} \right)^2 + \frac{\eta_\sigma}{2\eta_\phi^2} \left( \frac{\delta\sigma_*}{\sigma_*} \right) \exp [2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] + \dots, \quad (4.93)$$

que corresponde exactamente a la ecuación (4.92). A pesar de que la ecuación (4.92) solo reproduce  $\zeta$  a segundo orden, sugiere que la serie se puede expresar en las variables  $x$  e  $y$ , y por lo tanto, no contendría términos exponenciales aparte, que pongan en duda la convergencia de la serie.

Con ayuda de las derivadas hasta tercer orden (4.13,4.14 y 4.15), se encuentra que la serie para  $\delta N$  (3.10), en función de  $x$ ,  $y$ ,  $\eta_\phi$  y  $\eta_\sigma$ , se puede escribir como:

$$\delta N = \frac{1}{\eta_\phi} \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{\eta_\phi^2}{2\eta_\sigma^2} y^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{\eta_\phi}{3\eta_\sigma} xy^2 + \dots \right). \quad (4.94)$$

Entonces, al parecer, las cantidades  $x$  e  $y$  son las “constantes de acoplamiento” para el modelo tratado en este trabajo, haciendo la analogía con teoría cuántica de campos. Haciendo  $|x| \ll 1$  y  $|y| \ll 1$  se puede ver de la ecuación anterior que todos los términos de orden mayor a dos son menores comparados con los de segundo orden, pero haciendo una comparación, se encuentra que los términos a primer orden no dominan necesariamente a los de segundo orden. Esto es debido a la no aparición del término a primer orden en  $y$  y a que  $|y/x| \lesssim 1600$  (relación que se obtiene de las definiciones(4.85,4.86) y de los valores encontrados de  $\eta_\phi$ ,  $\eta_\sigma$  y  $N$  en las secciones anteriores)

Las perturbaciones en los campos  $\delta\phi_*$  y  $\delta\sigma_*$  están directamente relacionadas con el espectro mediante  $\langle \delta\phi^2 \rangle \sim \mathcal{P}_{\delta\sigma} = (H_*/2\pi)^2$ , por lo tanto es posible tener las condiciones  $|x| \ll 1$  y  $|y| \ll 1$  escritas en la forma:

$$|x| \equiv \left| \frac{\delta\phi_*}{\phi_*} \right| \approx \left( \frac{H_*}{2\pi} \right) \frac{1}{\phi_*} \ll 1, \quad (4.95)$$

$$|y| \equiv \left[ \frac{\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^3} \frac{\delta\sigma_*^2}{\phi_*^2} \exp [2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \right]^{1/2} \approx \left[ \frac{\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^3} \left( \frac{H_*}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\phi_*^2} \exp [2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \right]^{1/2} \ll 1. \quad (4.96)$$

Estas relaciones se satisfacen en el caso en que el espectro es dominado a nivel de árbol (ver ecuaciones (4.28) y (4.36)):

$$\left( \frac{H_*}{2\pi} \right) \frac{1}{\phi_*} = |\eta_\phi| \mathcal{P}_\zeta^{1/2} \approx 10^{-6}, \quad (4.97)$$

$$\left[ \frac{\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^3} \left( \frac{H_*}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\phi_*^2} \exp [2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \right]^{1/2} \ll \left[ \frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi} \exp [-2N(|\eta_\sigma| - |\eta_\phi|)] \right]^{1/2} \lesssim 2, \quad (4.98)$$

lo que asegura consistencia en las aproximaciones, por lo menos en el caso en que la contribución que domina es la de nivel árbol en el espectro  $\mathcal{P}_\zeta$ .

La convergencia de la serie se puede estudiar basándose en las ecuaciones (4.89), (4.90) y (4.91). La serie para el término (4.90) converge debido a que es una raíz cuadrada de los argumentos  $x$  e  $y$ . El término en (4.91) se puede escribir como:

$$\frac{1}{(1+x)^2 + y^2} \approx \frac{1}{(1+x)^2 + B^2 x^2} , \quad (4.99)$$

en donde

$$B = \left( \frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi} \right)^{3/2} \exp [N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] , \quad (4.100)$$

Una condición necesaria para que alguna función  $f(x)$  sea convergente alrededor de  $x = 0$  es que su extensión  $f(z)$  al plano complejo sea continua en una vecindad de  $z = 0$ . Si esto se cumple, y la serie de Taylor de  $f(z)$  es convergente, el círculo de convergencia debe estar dentro de la vecindad antes mencionada ([58])

La extensión de la expresión (4.99) revela que esta función tiene polos en el plano complejo para  $(1+z)^2 = -B^2 z^2$ , es decir :

$$z = \frac{\pm iB - 1}{B^2 + 1} , \quad (4.101)$$

por lo tanto la extensión al plano complejo es continua para

$$|z| < \frac{B^2 + 1}{B^2 + 1} = 1 . \quad (4.102)$$

De esta forma queda claro que la función (4.91) cumple con una condición necesaria (mas no suficiente) para que sea convergente si se asume  $|x| \ll 1$ , que fué lo que se asumió con anterioridad.

---

## CAPÍTULO 5

# Conclusiones

---

Cuando se obtienen expresiones para el cálculo del parámetro  $f_{NL}$ , como en (3.22), se ha asumido que la serie para  $\zeta$  (3.10), no solo converge, también se ha asumido que a partir del segundo orden los términos son despreciables. Estas suposiciones, que plantean la absoluta dominación de los términos a nivel de árbol, son las que se han usado hasta ahora en la literatura actual en el estudio de modelos con términos cinéticos canónicos, y del tipo de slow-roll [[10, 11, 12, 13, 14, 59, 60]. Los niveles de no gaussianidad encontrados hasta ahora en este tipo de modelos son despreciables y del orden de los parámetros de slow-roll.

En este trabajo se han tratado de considerar estos aspectos y se ha hecho el estudio, tanto de la convergencia de la serie, como de la posible dominación de los términos a nivel de lazo sobre los términos a nivel de árbol, en un modelo específico de slow-roll. Se han encontrado niveles de no gaussianidad apreciables, acordes con las cotas observacionales actuales del parámetro  $f_{NL}$  [16]. Con esto se concluye que es importante tomar en cuenta la posible dominación de términos de alto orden sobre términos a nivel árbol. Lamentablemente, hasta que no se encuentre una formulación general que permita conocer la posible convergencia de la serie así como las posibles dominaciones de los términos a nivel de lazo, los cálculos deben ser hechos para cada modelo específico.

Niveles de no gaussianidad apreciables fueron encontrados, en el modelo específico de slow-roll estudiado en este trabajo, en lo que se llamó en este ‘región de valores intermedios para  $\phi_*$ ’ (ver sección 4.3.2), en la cual el espectro  $P_\zeta$  estaba dominado a nivel árbol, y el bispectro  $B_\zeta$  estaba dominado a un lazo, poniendo en evidencia la importancia de tomar en cuenta los términos a nivel de lazo. En la región de valores pequeños  $\phi_*$  (sección 4.3.1) se encontraron niveles de no gaussianidad excesivamente altos que no concuerdan con los datos observacionales (16). En la región de valores grandes para  $\phi_*$  se encontraron niveles de no gaussianidad del orden de los parámetros de slow-roll del modelo, como se predice en [10, 11, 12] para cualquier modelo del tipo slow-roll, y que está de acuerdo con las cotas observacionales.

En cuanto a la convergencia de la serie, solo se encontró que el modelo cumple con una condición necesaria para hacerlo (ver sección (4.4). De nuevo, se hace evidente que la convergencia depende, por el momento, exclusivamente del modelo específico que se use.

Es esencial entonces que en el momento en el que se calculen propiedades estadísticas de la perturbación en la curvatura  $\zeta$ , en el marco del formalismo  $\delta N$ , se tengan en cuenta tanto las posibles dominaciones a nivel de lazo, como la convergencia de la serie. Debido al excelente refinamiento de los datos observacionales [16, 17] y de los mejoramientos futuros [20, 21], es esencial el estudio teórico de las propiedades estadísticas de los diferentes modelos. Es por eso que actualmente el campo se encuentra tan activo. Los resultados mas relevantes de este trabajo se encuentran condensados en la referencia [32].

---

## Apéndice A

# Contribuciones al parámetro $f_{NL}$ truncando a segundo orden en la serie de $\zeta$

---

En este apéndice se obtendrán las contribuciones al biespectro y al parámetro  $f_{NL}$  para un modelo inflacionario en general. El cálculo es realizado truncando la serie para  $\zeta$  (3.10) a segundo orden.

La serie para  $\zeta$ , de la ecuación (3.20), es:

$$\zeta(t, \mathbf{k}) = \sum_{i=1}^n N_i(t) \delta\phi_i(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n N_{ij} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}+\mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{k}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n N_{ij} (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}) \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}) \delta\phi_j(\mathbf{k}) \rangle . \quad (\text{A.1})$$

La contribución al biespectro se obtiene haciendo el triple producto de  $\zeta$ , y tomando el valor esperado:  $\langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \zeta(\mathbf{k}_3) \rangle$ . El triple producto genera 27 términos que son:

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \zeta(\mathbf{k}_3) = & \quad (\text{A.2}) \\ & \sum N_i N_j N_k \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_2) \delta\phi_k(\mathbf{k}_3) \\ & + \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\ & - \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\ & + \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\ & + \frac{1}{4} \sum N_i N_j N_{lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_3) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_j(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_k(\mathbf{p}) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_l(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_m(\mathbf{p}) \\ & - \frac{1}{4} \sum N_i N_j N_{lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_3) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_j(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_k(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_l(\mathbf{x}) \delta\phi_m(\mathbf{x}) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{4} \sum N_i N_j N_{lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_3) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_j(\mathbf{x}) \delta\phi_k(\mathbf{x}) \rangle \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_l(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_m(\mathbf{p}) \\
& + \frac{1}{4} \sum N_i N_j N_{lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_3) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_j(\mathbf{x}) \delta\phi_k(\mathbf{x}) \rangle (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_l(\mathbf{x}) \delta\phi_m(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_2) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& + \frac{1}{4} \sum N_i N_j N_{lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_j(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_k(\mathbf{p}) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_l(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_m(\mathbf{p}) \\
& - \frac{1}{4} \sum N_i N_j N_{lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_j(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_k(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_l(\mathbf{x}) \delta\phi_m(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{4} \sum N_i N_j N_{lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_j(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_k(\mathbf{p}) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_l(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_m(\mathbf{p}) \\
& + \frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& \times \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}) \\
& - \frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \\
& \times \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{4} \sum N_i N_j N_{lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_j(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_k(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_l(\mathbf{x}) \delta\phi_m(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_2) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{4} \sum N_i N_j N_{lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_j(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_k(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_l(\mathbf{x}) \delta\phi_m(\mathbf{x}) \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \sum N_i N_{jk} N_{lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_j(\mathbf{x}) \delta\phi_k(\mathbf{x}) \rangle (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_l(\mathbf{x}) \delta\phi_m(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{4} \sum N_i N_{jk} N_{lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_j(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_k(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_l(\mathbf{x}) \delta\phi_m(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{4} \sum N_i N_{jk} N_{lm} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_j(\mathbf{x}) \delta\phi_k(\mathbf{x}) \rangle (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_l(\mathbf{x}) \delta\phi_m(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_i(\mathbf{x}) \delta\phi_j(\mathbf{x}) \rangle (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle .
\end{aligned}$$

Tomando el valor esperado del primer término de (A.2) se obtiene

$$\sum_{i,j,k=1}^n N_i N_j N_k \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_2) \delta\phi_k(\mathbf{k}_3) \rangle . \quad (\text{A.3})$$

La contribución asociada a este término ya ha sido calculada en [43] y encontrada ser despreciable, es decir, su contribución al  $f_{NL}$  es casi nula. En lo que sigue, se asumirá no gaussianidad en las perturbaciones de los campos escalares  $\phi_i$ , es decir,  $\langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_2) \delta\phi_k(\mathbf{k}_3) \rangle = 0$ . Debido esto, los 12 términos de (A.2) que contienen 5 términos de perturbación en los campos ( $\delta\phi_i$ ) se asumen despreciables.

Seis de los 27 términos contienen cuatro términos de perturbación en los campos ( $\delta\phi$ ). Explícitamente:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& - \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& - \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_2) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& - \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_2) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle .
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Tomando el valor esperado del primer término se obtiene que:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kl} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \right\rangle = \\
& \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kl} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \rangle .
\end{aligned} \tag{A.5}$$

El término que está entre corchetes puede descomponerse en correladores de mas bajo orden, vía teorema de Wick [61], de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \rangle &= \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \rangle \langle \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \rangle \\
&+ \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \rangle \langle \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \rangle \\
&+ \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \rangle \langle \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \rangle .
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Usando la definición de correlador de dos puntos (2.41) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \rangle &= \frac{2\pi^2}{k_1^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \delta_{ij} \frac{2\pi^2}{p^3} \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p} - \mathbf{p}) \mathcal{P}_{\delta\phi}(p) \delta_{kl} \\
&+ \frac{2\pi^2}{k_1^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \delta_{ik} \frac{2\pi^2}{k_3^3} \delta^3(\mathbf{k}_3 - \mathbf{p}) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3) \delta_{jl} \\
&+ \frac{2\pi^2}{k_1^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \delta_{il} \frac{2\pi^2}{k_3^3} \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3) \delta_{jk} .
\end{aligned}$$

Introduciendo este resultado en (A.5), este primer término del grupo de cuatro perturbaciones se puede escribir como

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum N_i N_i N_{kk} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{2\pi^2}{k_1^3} \frac{2\pi^2}{p^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{k}_2) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(p) \\
& + \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{ij} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{2\pi^2}{k_1^3} \frac{2\pi^2}{k_3^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^3(\mathbf{k}_3 - \mathbf{p}) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3) \\
& + \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{ji} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{2\pi^2}{k_1^3} \frac{2\pi^2}{k_3^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}) \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3) .
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Haciendo estas las integrales, se obtiene respectivamente

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum N_i N_i N_{kk} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{k}_2) \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1)}{k_1^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^3} \mathcal{P}_{\delta\phi}(p) \\
& + \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{ij} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_1^3 k_3^3} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \\
& + \frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{ij} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_1^3 k_3^3} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \\
& = \frac{1}{2} \sum N_i N_i N_{kk} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{k}_2) \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1)}{k_1^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^3} \mathcal{P}_{\delta\phi}(p) \\
& + \frac{2}{2} \sum N_i N_j N_{ij} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_1^3 k_3^3} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) . \tag{A.8}
\end{aligned}$$

El primer término de esta expresión se puede expresar en otra forma, aprovechando, que a partir de la definición de correlador de dos puntos (2.41), se puede deducir la siguiente relación:

$$\langle \delta_{\phi_i}(\mathbf{x}) \delta_{\phi_j}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d^3\mathbf{k}}{k^3} \mathcal{P}_{\delta\phi_i}(k) . \tag{A.9}$$

Esta expresión evidencia el hecho de que el espectro está directamente relacionado con la varianza de la distribución  $\delta_{\phi_i}(\mathbf{x})$ .

Tomando esto en cuenta, se obtiene que el primer término del miembro derecho en (A.8) toma la forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum N_i N_i N_{kk} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{k}_2) \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1)}{k_1^3} \frac{(2\pi)^3}{2\pi^2} \langle \delta_{\phi_i}(\mathbf{x}) \delta_{\phi_j}(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{2}{2} \sum N_i N_j N_{ij} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_1^3 k_3^3} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) . \tag{A.10}
\end{aligned}$$

Los términos de (A.4) que tienen integrales son idénticos entre sí, excepto por el orden de los vectores de onda ( $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  y  $\mathbf{k}_3$ ). Por lo tanto, las contribuciones de estos términos se pueden construir fácilmente haciendo la analogía con el término que se acabó de mostrar. Los dos restantes términos con integrales quedan:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum N_i N_i N_{kk} \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{k}_1) \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_3^3} \frac{(2\pi)^3}{2\pi^2} \langle \delta_{\phi_i}(\mathbf{x}) \delta_{\phi_j}(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{2}{2} \sum N_i N_j N_{ij} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_2) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_2^3 k_3^3} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) , \tag{A.11}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum N_i N_i N_{kk} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta^3(\mathbf{k}_3) \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_2)}{k_2^3} \frac{(2\pi)^3}{2\pi^2} \langle \delta_{\phi_i}(\mathbf{x}) \delta_{\phi_j}(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{2}{2} \sum N_i N_j N_{ij} \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_2)}{k_1^3 k_2^3} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) . \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Es necesario ahora calcular las contribuciones de los términos que no tienen integrales del grupo (A.4). Tomando el valor esperado del segundo término de este grupo se obtiene:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kl} \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1) \delta\phi_j(\mathbf{k}_3) \rangle (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
&= -\frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kk} \frac{2\pi^2}{k_1^3} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
&= -\frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kk} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{k}_2) \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1)}{k_1^3} 2\pi^2 (2\pi)^{3/2} \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle . \tag{A.13}
\end{aligned}$$

Análogamente, los otros dos términos del grupo (A.4) que no contienen integral se pueden escribir como:

$$-\frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kk} \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{k}_1) \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_3^3} 2\pi^2 (2\pi)^{3/2} \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle , \tag{A.14}$$

y

$$-\frac{1}{2} \sum N_i N_j N_{kk} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta^3(\mathbf{k}_3) \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_2)}{k_2^3} 2\pi^2 (2\pi)^{3/2} \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle . \tag{A.15}$$

Los términos (A.13, A.14 y A.15) se cancelan con los primeros términos de las expresiones (A.10, A.11 y A.12), entonces, la contribución total al biespectro de  $\zeta$  del grupo de términos (A.4) se reduce a a la suma de los segundos término de las expresiones (A.10, A.11 y A.12):

$$\sum N_i N_j N_{ij} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \left[ \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_1^3 k_3^3} + \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_2) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3)}{k_2^3 k_3^3} + \frac{\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_2)}{k_1^3 k_2^3} \right] . \tag{A.16}$$

Asumiendo que el espectro  $\mathcal{P}_\zeta$ , calculado en (3.15), es una buena aproximación (a pesar de solo haber tomado corrección a primer orden de la serie de  $\zeta$ ), esta contribución se puede escribir como:

$$\sum N_i N_j N_{ij} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{1}{[\sum N_i^2]^2} \left[ \frac{\mathcal{P}_\zeta(k_1) \mathcal{P}_\zeta(k_3)}{k_1^3 k_3^3} + \frac{\mathcal{P}_\zeta(k_2) \mathcal{P}_\zeta(k_3)}{k_2^3 k_3^3} + \frac{\mathcal{P}_\zeta(k_1) \mathcal{P}_\zeta(k_2)}{k_1^3 k_2^3} \right] . \tag{A.17}$$

De las definiciones de correlador de tres puntos (2.42) y biespectro (2.48) se obtiene que:

$$\langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \zeta(\mathbf{k}_3) \rangle = \frac{6}{5} f_{NL} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \left[ \frac{\mathcal{P}_\zeta(k_1) \mathcal{P}_\zeta(k_2)}{k_2^3 k_1^3} + \frac{\mathcal{P}_\zeta(k_1) \mathcal{P}_\zeta(k_3)}{k_1^3 k_3^3} + \frac{\mathcal{P}_\zeta(k_2) \mathcal{P}_\zeta(k_3)}{k_2^3 k_3^3} \right] . \tag{A.18}$$

Comparando esta ecuación con (A.17) se obtiene la contribución al parámetro  $f_{NL}$ :

$$\frac{6}{5} f_{NL} = \frac{\sum N_i N_j N_{ij}}{[\sum N_i^2]^2} . \tag{A.19}$$

Restan entonces 8 términos, que son los que contienen 6 términos de perturbación en los campos:

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& \times \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}) \\
& - \frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}) \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& + \frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi_i(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}) (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle \\
& - \frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_i(\mathbf{x}) \delta\phi_j(\mathbf{x}) \rangle (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi_k(\mathbf{x}) \delta\phi_l(\mathbf{x}) \rangle \\
& \times (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi_m(\mathbf{x}) \delta\phi_n(\mathbf{x}) \rangle .
\end{aligned}$$

Tomando el valor esperado, el primer término de este grupo, que contiene tres integrales, se puede poner

en la forma

$$\frac{1}{8} \sum N_{ij} N_{kl} N_{mn} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1 d^3 \mathbf{p}_2 d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^{9/2}} \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle .$$

El término entre brakets se puede descomponer en 15 términos:

$$\begin{aligned} & \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &= \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle \\ &+ \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \rangle \langle \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \rangle \langle \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \rangle \langle \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \\ &+ \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle \\ &+ \langle \delta\phi_i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1) \delta^* \phi_n(\mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta^* \phi_j(\mathbf{p}_1) \delta\phi_m(\mathbf{k}_3 + \mathbf{p}_3) \rangle \langle \delta\phi_k(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2) \delta^* \phi_l(\mathbf{p}_2) \rangle , \end{aligned}$$

de los cuales solo los primeros 8 aportan al biespectro, y los 7 restantes se cancelan con los demás términos del grupo que tiene seis perturbaciones en los campos. Este aporte al correlador de tres puntos es:

$$\frac{1}{2} \sum_{ijk} N_{ij} N_{jk} N_{ki} \left[ \frac{2\pi^2}{(2\pi)^{3/2}} \right]^3 \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \int_L d^3 \mathbf{p} \left[ \frac{1}{p^3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}|^3 |\mathbf{k}_3 - \mathbf{p}|^3} + \frac{1}{p^3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}|^3 |\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}|^3} \right] . \quad (\text{A.20})$$

Es posible evaluar la integral que aparece en esta expresión:

$$\int_L d^3 \mathbf{p} \left[ \frac{1}{p^3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}|^3 |\mathbf{k}_3 - \mathbf{p}|^3} + \frac{1}{p^3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}|^3 |\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}|^3} \right] = 8\pi \ln(kL) \left[ \frac{1}{k_1^3 k_2^3} + \frac{1}{k_1^3 k_3^3} + \frac{1}{k_2^3 k_3^3} \right] , \quad (\text{A.21})$$

en donde  $L$  es el corte infrarrojo escogido de tal manera que el cálculo se realiza en una caja mínima ([44]).

Introduciendo este resultado en la expresión anterior se obtiene que

$$\frac{1}{2} \sum_{ijk} N_{ij} N_{jk} N_{ki} \left[ \frac{2\pi^2}{(2\pi)^{3/2}} \right]^3 \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) 8\pi \ln(kL) \left[ \frac{1}{k_1^3 k_2^3} + \frac{1}{k_1^3 k_3^3} + \frac{1}{k_2^3 k_3^3} \right] , \quad (\text{A.22})$$

que se puede escribir como:

$$\sum_{ijk} N_{ij} N_{jk} N_{ki} \frac{4\pi^4}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{\mathcal{P}_\zeta}{[\sum N_i^2]^3} \left[ \frac{\mathcal{P}_\zeta(k_1) \mathcal{P}_\zeta(k_3)}{k_1^3 k_3^3} + \frac{\mathcal{P}_\zeta(k_2) \mathcal{P}_\zeta(k_3)}{k_2^3 k_3^3} + \frac{\mathcal{P}_\zeta(k_1) \mathcal{P}_\zeta(k_2)}{k_1^3 k_2^3} \right] \ln(kL) . \quad (\text{A.23})$$

Comparando esta expresión con la ecuación (A.18) se obtiene el aporte al parámetro  $f_{NL}$ :

$$\frac{6}{5}f_{NL} = \ln(kL) \mathcal{P}_\zeta \frac{\sum_{ijk} N_{ij}N_{jk}N_{ki}}{[\sum N_i^2]^3} \quad (\text{A.24})$$

Entonces, la contribución total al parámetro  $f_{NL}$ , cuando la serie para  $\zeta$  (3.10) es tomada solo hasta segundo orden es:

$$\frac{6}{5}f_{NL} = \frac{\sum N_i N_j N_{kl}}{[\sum N_i^2]^2} + \ln(kL) \mathcal{P}_\zeta \frac{\sum_{ijk} N_{ij}N_{jk}N_{ki}}{[\sum N_i^2]^3} \quad (\text{A.25})$$

Para llevar a cabo este cálculo se ha asumido que los términos a partir del tercer orden son todos despreciables comparados con los dos primeros términos en la serie de  $\zeta$ (3.10), sin demostración o fundamento alguno.

---

## Apéndice B

# Cálculo de las derivadas de $N$ respecto a los campos $\phi_\star$ y $\sigma_\star$

---

La ecuación (4.12) muestra la dependencia que el potencial  $V$  tiene de  $\phi_i$ , de  $\sigma_i$  y  $N$ . El tiempo de referencia inicial que se usará es  $t_\star$ , que es el tiempo en el cual las escalas relevantes dejan el horizonte. La ecuación para el potencial se puede escribir como:

$$V(\phi_\star, \sigma_\star, N) = V_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \eta_\phi \frac{\phi_\star^2 \exp[-2\eta_\phi N]}{m_{pl}^2} + \frac{1}{2} \eta_\sigma \frac{\sigma_\star^2 \exp[-2\eta_\sigma N]}{m_{pl}^2} \right), \quad (\text{B.1})$$

en donde  $\phi_\star$  y  $\sigma_\star$  es el valor de los campos cuando las escalas relevantes salen del horizonte. Despejar  $N$  en función de  $\phi_\star$  y  $\sigma_\star$  no es posible. Pero es posible obtener las derivadas aprovechando que el final corresponde a un slice de densidad de energía uniforme y se tiene que  $dV = 0$ , debido a que, según las condiciones de slow-roll,  $V \approx \rho$ .

### B.1 Primeras derivadas

Con esto en mente, el diferencial de  $V$  se puede hacer igual a cero:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial N} dN + \frac{\partial V}{\partial \phi_\star} d\phi_\star + \frac{\partial V}{\partial \sigma_\star} d\sigma_\star = 0. \quad (\text{B.2})$$

Si lo que se quiere obtener es, por ejemplo, la derivada de  $N$  respecto a  $\phi_\star$ , se hace  $d\sigma_\star = 0$ , y se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial N} dN &= -\frac{\partial V}{\partial \phi_\star} d\phi_\star, \\ \left( \frac{\partial N}{\partial \phi_\star} \right)_{\sigma_\star} &= -\frac{\partial V}{\partial \phi_\star} \frac{1}{\partial V / \partial N}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

De (B.1) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \phi_*} &= V_0 \frac{\eta_\phi \phi_*}{m_{pl}^2} \exp[-2\eta_\phi N] \\ &= V_0 \frac{\eta_\phi \phi_*}{m_{pl}^2} \exp[-2\eta_\phi N] ,\end{aligned}\tag{B.4}$$

y además que

$$\frac{\partial V}{\partial N} = -V_0 \frac{\eta_\phi^2 \phi_*^2}{m_{pl}^2} \exp[-2\eta_\phi N] - V_0 \frac{\eta_\sigma^2 \sigma_*^2}{m_{pl}^2} \exp[-2\eta_\sigma N] .\tag{B.5}$$

Incluyendo (B.4) y (B.5) en (B.3), se obtiene que

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \phi_*}\right) = \frac{\eta_\phi \phi_* \exp[-2\eta_\phi N]}{\eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N]} ,\tag{B.6}$$

y haciendo un corte en  $\sigma_* = 0$ ,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial N}{\partial \phi_*}\right)_{\sigma_*=0} &= \frac{\eta_\phi \phi_* \exp[-2\eta_\phi N]}{\eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N]} \\ &= \frac{1}{\eta_\phi \phi_*} .\end{aligned}\tag{B.7}$$

La derivada de  $N$  respecto a  $\sigma$  se obtiene haciendo analogía con la ecuación (B.6). Se obtiene entonces que

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \sigma_*}\right) = \frac{\eta_\sigma \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N]}{\eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N]} ,\tag{B.8}$$

y haciendo el corte en  $\sigma_* = 0$  se obtiene que

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \sigma_*}\right)_{\sigma_*=0} = 0 .\tag{B.9}$$

## B.2 Segundas Derivadas

De las primeras derivadas se pueden obtener las segundas derivadas. De (B.6) se obtiene que

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial \phi_*^2} \right) &= \frac{\eta_\phi \exp[-2\eta_\phi N] - 2\eta_\phi^2 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*}}{\eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N]} \\ &- \frac{\eta_\phi \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \left[ 2\eta_\phi^2 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \left( 1 - \eta_\phi \phi_* \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right) - 2\eta_\sigma^3 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right]}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Haciendo el corte en  $\sigma_* = 0$ , y sabiendo de (B.7) que  $\left( \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right)_{\sigma_* = 0} = \frac{1}{\eta_\phi \phi_*}$ , se obtiene, de la ecuación anterior que

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial \phi_*^2} \right)_{\sigma_* = 0} &= \frac{\eta_\phi \exp[-2\eta_\phi N] - 2\eta_\phi^2 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \frac{1}{\eta_\phi \phi_*}}{\eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N]} \\ &- \frac{\eta_\phi \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \left[ 2\eta_\phi^2 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \left( 1 - \eta_\phi \phi_* \frac{1}{\eta_\phi \phi_*} \right) \right]}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] \right]^2} \\ &= \frac{\eta_\phi \exp[-2\eta_\phi N] - 2\eta_\phi \exp[-2\eta_\phi N]}{\eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N]} \\ &= -\frac{1}{\eta_\phi \phi_*^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Calculemos ahora  $\frac{\partial^2 N}{\partial \phi_* \partial \sigma_*}$ . Derivando la ecuación (B.6) en ambos miembros con respecto a  $\sigma_*$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial \phi_* \partial \sigma_*} \right) &= \frac{-2\eta_\phi^2 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*}}{\eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N]} \\ &- \frac{\eta_\phi \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \left[ -2\eta_\phi^3 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} + 2\eta_\sigma^2 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \left( 1 - \eta_\sigma \sigma_* \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right) \right]}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Haciendo el corte en  $\sigma_* = 0$  se obtiene que:

$$\left( \frac{\partial^2 N}{\partial \phi_* \partial \sigma_*} \right)_{\sigma_* = 0} = 0, \quad (\text{B.13})$$

debido a que, de B.9,  $\left( \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right)_{\sigma_* = 0} = 0$ .

Derivando la ecuación (B.8) en ambos miembros respecto a  $\sigma_*$ , podemos obtener que:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial \sigma_*^2} \right) &= \frac{\eta_\sigma \exp[-2\eta_\sigma N] - 2\eta_\sigma^2 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*}}{\eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N]} \\ &- \frac{\eta_\sigma \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \left[ 2\eta_\sigma^2 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \left( 1 - \eta_\sigma \sigma_* \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right) - 2\eta_\phi^3 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right]}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Haciendo el corte en  $\sigma_* = 0$ , y tomando en cuenta la relación (B.9), se obtiene que:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial \sigma_*^2} \right)_{\sigma_*=0} &= \frac{\eta_\sigma \exp[-2\eta_\sigma N]}{\eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N]} \\ &= \frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi^2 \phi_*^2} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)]. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

### B.3 Cálculo de las terceras derivadas

Derivando la ecuación B.10 respecto a  $\phi_*$  en ambos miembros, obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial^3 N}{\partial \phi_*^3} \right) = \\
& \frac{-4\eta_\phi^2 \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*} + 4\eta_\phi^3 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \left( \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right)^2 - 2\eta_\phi^2 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial^2 N}{\partial \phi_*^2}}{\eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N]} \\
& - 2 \frac{\left( \eta_\phi \exp[-2\eta_\phi N] - 2\eta_\phi^2 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right) \left[ 2\eta_\phi^2 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \left( 1 - \eta_\phi \phi_* \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right) - 2\eta_\sigma^3 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right]}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2} \\
& - \frac{\eta_\phi \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \left[ \left( 2\eta_\phi^2 \exp[-2\eta_\phi N] - 4\eta_\phi^3 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right) \left( 1 - \eta_\phi \phi_* \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right) \right]}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2} \\
& - \frac{\left[ -2\eta_\phi^3 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \left( \frac{\partial N}{\partial \phi_*} + \phi_* \frac{\partial^2 N}{\partial \phi_*^2} \right) + 4\eta_\sigma^4 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \left( \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right)^2 - 2\eta_\sigma^3 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial^2 N}{\partial \phi_*^2} \right]}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2} \\
& \times \eta_\phi \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \\
& + 2 \frac{\eta_\phi \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \left[ 2\eta_\phi^2 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \left( 1 - \eta_\phi \phi_* \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right) - 2\eta_\sigma^3 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right]^2}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^3}. \tag{B.16}
\end{aligned}$$

Si se hace  $\sigma_* = 0$ , y se usan los resultados (B.7) y (B.11), el único término de la ecuación anterior que es diferente de cero es el primero del segundo miembro. Este término aporta:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial^3 N}{\partial \phi_*^3} \right)_{\sigma_* = 0} &= \frac{-\frac{4\eta_\phi^2}{\eta_\phi \phi_*} + \frac{4\eta_\phi^3 \phi_*}{\eta_\phi^2 \phi_*^2} + \frac{2\eta_\phi^2 \phi_*}{\eta_\phi \phi_*^2}}{\eta_\phi^2 \phi_*^2} \\
&= \frac{-\frac{4\eta_\phi}{\phi_*} + \frac{4\eta_\phi}{\phi_*} + \frac{2\eta_\phi}{\phi_*}}{\eta_\phi^2 \phi_*^2} \\
&= \frac{2\eta_\phi}{\eta_\phi^2 \phi_*^3} \\
&= \frac{2}{\eta_\phi \phi_*^3}. \tag{B.17}
\end{aligned}$$

La siguiente derivada a calcular es  $\left( \frac{\partial^3 N}{\partial \phi_*^2 \partial \phi_\sigma} \right)$ . Para hacerlo se toma la derivada de ambos miembros de la ecuación (B.10):

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial^3 N}{\partial \phi_*^2 \partial \sigma_*} \right) = \\
& \frac{-2\eta_\phi^2 \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} + 4\eta_\phi^3 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} - 2\eta_\phi^2 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial^2 N}{\partial \phi_* \partial \sigma_*}}{\eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N]} \\
& - \frac{\left( \eta_\phi \exp[-2\eta_\phi N] - 2\eta_\phi^2 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right) \left[ 2\eta_\sigma^2 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \left( 1 - \eta_\sigma \sigma_* \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right) - 2\eta_\phi^3 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right]}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2} \\
& - \frac{-2\eta_\phi^2 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \left[ 2\eta_\phi^2 \phi_* \exp[-2\eta_\sigma N] \left( 1 - \eta_\phi \phi_* \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right) - 2\eta_\sigma^3 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right]}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2} \\
& - \frac{\eta_\phi \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \left[ -4\eta_\phi^3 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \left( 1 - \eta_\phi \phi_* \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right) + 2\eta_\phi^2 \phi_* \exp[-2\eta_\sigma N] \left( -\eta_\phi \phi_* \frac{\partial^2 N}{\partial \phi_* \partial \sigma_*} \right) \right]}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2} \\
& - \frac{\eta_\phi \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \left[ -4\eta_\phi^3 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} + 4\eta_\sigma^4 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} - 2\eta_\sigma^3 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial^2 N}{\partial \phi_* \partial \sigma_*} \right]}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2} \\
& + 2 \frac{\eta_\phi \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \left[ 2\eta_\sigma^2 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \left( 1 - \eta_\sigma \sigma_* \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right) - 2\eta_\phi^3 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right]}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2} \\
& \times \left[ 2\eta_\phi^2 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \left( 1 - \eta_\phi \phi_* \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right) - 2\eta_\sigma^3 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right]. \tag{B.18}
\end{aligned}$$

Haciendo el corte en  $\sigma_* = 0$  se obtiene:

$$\left( \frac{\partial^3 N}{\partial \phi_*^2 \partial \sigma_*} \right)_{\sigma_*=0} = 0. \tag{B.19}$$

Derivando la ecuación (B.14) con respecto a  $\phi_*$  se puede obtener  $\left( \frac{\partial^3 N}{\partial \sigma_*^2 \partial \phi_*} \right)$ :

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial^3 N}{\partial \sigma_*^2 \partial \phi_*} \right) = \\
& \frac{-2\eta_\sigma^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*} + 4\eta_\sigma^3 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \frac{\partial N}{\partial \phi_*} - 2\eta_\sigma^2 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial^2 N}{\partial \sigma_* \partial \phi_*}}{\eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N]} \\
& - \frac{\left( \eta_\sigma \exp[-2\eta_\sigma N] - 2\eta_\sigma^2 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right) \left[ 2\eta_\phi^2 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \left( 1 - \eta_\phi \phi_* \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right) - 2\eta_\sigma^3 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right]}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\eta_\sigma^2 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \left[ 2\eta_\sigma^2 \sigma_* \exp[-2\eta_\phi N] \left( 1 - \eta_\sigma \sigma_* \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right) - 2\eta_\phi^3 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right] \\
& - \frac{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2}{\eta_\sigma \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \left[ -4\eta_\sigma^3 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \left( 1 - \eta_\sigma \sigma_* \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right) + 2\eta_\sigma^2 \sigma_* \exp[-2\eta_\phi N] \left( -\eta_\sigma \sigma_* \frac{\partial^2 N}{\partial \sigma_* \partial \phi_*} \right) \right]} \\
& - \frac{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2}{\eta_\sigma \sigma_* \exp[-2\eta_\phi N] \left[ -4\eta_\sigma^3 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*} + 4\eta_\sigma^4 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \frac{\partial N}{\partial \phi_*} - 2\eta_\sigma^3 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial^2 N}{\partial \sigma_* \partial \phi_*} \right]} \\
& - \frac{\left[ \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] + \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] \right]^2}{+ 2 \frac{\eta_\sigma \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \left[ 2\eta_\phi^2 \phi_* \exp[-2\eta_\phi N] \left( 1 - \eta_\phi \phi_* \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right) - 2\eta_\sigma^3 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right]}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2}} \\
& \times \left[ 2\eta_\sigma^2 \sigma_* \exp[-2\eta_\phi N] \left( 1 - \eta_\sigma \sigma_* \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right) - 2\eta_\phi^3 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right]. \tag{B.20}
\end{aligned}$$

Del corte en  $\sigma_* = 0$ , y de los resultados obtenidos en (B.7, B.9, B.11, B.13), y (B.15), se deduce que solo el primer término del lado derecho de la última ecuación es diferente de cero, y se reduce a

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial^3 N}{\partial \sigma_*^2 \partial \phi_*} \right)_{\sigma_*=0} &= \frac{-2\eta_\sigma^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{1}{\eta_\phi \phi_*}}{\eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N]} \\
&= -\frac{2\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^3 \phi_*^3} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)]. \tag{B.21}
\end{aligned}$$

Derivando la ecuación (B.14) en ambos miembros, se puede obtener  $\left( \frac{\partial^3 N}{\partial \sigma_*^3} \right)$ :

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial^3 N}{\partial \sigma_*^3} \right) &= \\
& \frac{-4\eta_\sigma^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} + 4\eta_\sigma^3 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \left( \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right)^2 - 2\eta_\sigma^2 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial^2 N}{\partial \sigma_*^2}}{\eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N]} \\
& - 2 \frac{\left[ 2\eta_\sigma^2 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \left( 1 - \eta_\sigma \sigma_* \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right) - 2\eta_\phi^3 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right]}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2} \\
& \times \left( \eta_\sigma \exp[-2\eta_\sigma N] - 2\eta_\sigma^2 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\eta_\sigma \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \left[ \left( 2\eta_\sigma^2 \exp[-2\eta_\sigma N] - 4\eta_\sigma^3 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right) \left( 1 - \eta_\sigma \sigma_* \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right) \right]}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2} \\
& - \frac{\left[ -2\eta_\sigma^3 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \left( \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} + \sigma_* \frac{\partial^2 N}{\partial \sigma_*^2} \right) + 4\eta_\phi^4 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] \left( \frac{\partial N}{\partial \phi_*} \right)^2 - 2\eta_\phi^3 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial^2 N}{\partial \sigma_*^2} \right]}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^2} \\
& \times \eta_\sigma \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \\
& + 2 \frac{\eta_\sigma \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \left[ 2\eta_\sigma^2 \sigma_* \exp[-2\eta_\sigma N] \left( 1 - \eta_\sigma \sigma_* \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right) - 2\eta_\phi^3 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] \frac{\partial N}{\partial \sigma_*} \right]^2}{\left[ \eta_\phi^2 \phi_*^2 \exp[-2\eta_\phi N] + \eta_\sigma^2 \sigma_*^2 \exp[-2\eta_\sigma N] \right]^3} . \tag{B.22}
\end{aligned}$$

Haciendo  $\sigma_* = 0$ , y de la ecuación (B.9) se deduce que

$$\left( \frac{\partial^3 N}{\partial \sigma_*^3} \right) = 0 . \tag{B.23}$$

Usando la notación  $\left( \frac{\partial^2 N}{\partial \sigma_* \partial \phi_*} \right) = N_{\sigma\phi}$ , a continuación se presenta un resumen con los resultados mas relevantes. De las ecuaciones (B.7,B.9,B.11, B.13,B.15,B.17 B.19,B.21,B.23), se puede escribir que

$$N_\phi = \frac{1}{\eta_\phi \phi_*} , \quad N_\sigma = 0 , \tag{B.24}$$

$$N_{\phi\phi} = -\frac{1}{\eta_\phi \phi_*^2} , \quad N_{\phi\sigma} = 0 , \quad N_{\sigma\sigma} = \frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi^2 \phi_*^2} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] , \tag{B.25}$$

$$N_{\phi\phi\phi} = \frac{2}{\eta_\phi \phi_*^3} , \quad N_{\phi\phi\sigma} = 0 , \quad N_{\sigma\sigma\phi} = -\frac{2\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^3 \phi_*^3} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] , \quad N_{\sigma\sigma\sigma} = 0 . \tag{B.26}$$

---

# ApéndiceC

## Análisis de las contribuciones al espectro y al biespectro a partir de los diagramas de Feynman a nivel de árbol y de lazo

---

En la sección (3.3) se calcularon las contribuciones a nivel de árbol y a nivel de lazo al espectro  $P_\zeta$  y biespectro  $B_\zeta$ , de los diferentes diagramas tipo Feynman, a la perturbación en la curvatura  $\zeta$ , en el marco del formalismo  $\delta N$

En este apéndice se analizará la posibilidad de que algunas de estas contribuciones dominen sobre otras para el modelo específico del que trata este trabajo. Por lo tanto, las derivadas calculadas en el apéndice (B) serán útiles en este análisis.

### C.1 Espectro

#### C.1.1. Contribuciones a nivel de árbol

De la definición (2.41), del resultado (3.16), de la contribución calculada en (3.23), y de las derivadas de  $N$  (B.24), es posible calcular la contribución al espectro debida al diagrama al nivel de árbol:

$$\begin{aligned} P_\zeta^{arbol} &= P_{\delta\phi} \sum N_i^2, \\ &= \frac{2\pi^2}{k^3} \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^2 [N_\phi^2 + N_\sigma^2] \\ &= \frac{2\pi^2}{k^3} \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^2 \left[ \left( \frac{1}{\eta_\phi \phi_\star} \right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{C.1}$$

### C.1.2. Contribuciones a nivel de lazo

Para calcular las contribuciones a nivel de lazo al espectro se deben tomar en cuenta las ecuaciones (3.25 y 3.27), así como las derivadas obtenidas en (B.25). Una de las contribuciones se puede calcular como:

$$\begin{aligned}
 P_{\zeta}^{lazo1} &= \frac{2\pi^2}{k^3} \left( \frac{H_{\star}}{2\pi} \right)^4 \ln(kL) \sum N_{il}^2 \\
 &= \frac{2\pi^2}{k^3} \left( \frac{H_{\star}}{2\pi} \right)^4 \ln(kL) [N_{\phi\phi}^2 + N_{\sigma\sigma}^2 + 2N_{\phi\sigma}^2] \\
 &= \frac{2\pi^2}{k^3} \left( \frac{H_{\star}}{2\pi} \right)^4 \ln(kL) \left[ \left( \frac{1}{\eta_{\phi}\phi_{\star}^2} \right)^2 + \left( \frac{\eta_{\sigma}}{\eta_{\phi}^2\phi_{\star}^2} \exp[2N(\eta_{\phi} - \eta_{\sigma})] \right)^2 \right] \\
 &= \frac{2\pi^2}{k^3} \left( \frac{H_{\star}}{2\pi} \right)^4 \left[ \frac{1}{\eta_{\phi}^2\phi_{\star}^4} + \frac{\eta_{\sigma}^2}{\eta_{\phi}^4\phi_{\star}^4} \exp[4N(\eta_{\phi} - \eta_{\sigma})] \right]. \tag{C.2}
 \end{aligned}$$

La otra contribución a nivel de lazo queda de la forma:

$$\begin{aligned}
 P_{\zeta}^{lazo2} &= \sum N_i N_{jl} \left[ \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} B_{ijkl}(k_1, q, |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|) + perm. (\mathbf{k}_2 \longleftrightarrow \mathbf{k}_1) \right] \\
 &= N_{\phi} N_{\phi\phi} \left[ \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} B_{\delta\phi\delta\phi\delta\phi}(k_1, q, |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|) + perm. (\mathbf{k}_2 \longleftrightarrow \mathbf{k}_1) \right] \\
 &+ N_{\phi} N_{\sigma\sigma} \left[ \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} B_{\delta\phi\delta\sigma\delta\sigma}(k_1, q, |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|) + perm. (\mathbf{k}_2 \longleftrightarrow \mathbf{k}_1) \right] \\
 &= -\frac{1}{\eta_{\phi}^2\phi_{\star}^3} \left[ \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} B_{\delta\phi\delta\sigma\delta\sigma}(k_1, q, |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|) + perm. (\mathbf{k}_2 \longleftrightarrow \mathbf{k}_1) \right] \\
 &+ \frac{\eta_{\sigma}}{\eta_{\phi}^3\phi_{\star}^3} \exp[2N(\eta_{\phi} - \eta_{\sigma})] \left[ \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} B_{\delta\phi\delta\sigma\delta\sigma}(k_1, q, |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|) + perm. (\mathbf{k}_2 \longleftrightarrow \mathbf{k}_1) \right].
 \end{aligned}$$

Este resultado se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned}
 P_{\zeta}^{lazo2} &= -\frac{1}{\eta_{\phi}^2\phi_{\star}^3} \left[ \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} 4\pi^4 \sum_{perm} \left( \frac{H_{\star}}{2\pi} \right)^4 \frac{\sqrt{\epsilon_{\phi}}}{2\sqrt{2}m_{pl}} \frac{\mathcal{M}_3(k, q, |\mathbf{k} + \mathbf{q}|)}{k^3 q^3 |\mathbf{k} + \mathbf{q}|^3} \right] \\
 &+ \frac{\eta_{\sigma}}{\eta_{\phi}^3\phi_{\star}^3} \exp[2N(\eta_{\phi} - \eta_{\sigma})] \left[ \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} 4\pi^4 \sum_{U2a} \left( \frac{H_{\star}}{2\pi} \right)^4 \frac{\sqrt{\epsilon_{\phi}}}{2\sqrt{2}m_{pl}} \frac{\mathcal{M}_3(k, q, |\mathbf{k} + \mathbf{q}|)}{k^3 q^3 |\mathbf{k} + \mathbf{q}|^3} \right], \tag{C.3}
 \end{aligned}$$

en donde la función  $\mathcal{M}(k_1, k_2 k_3)$  está definida por [59]

$$\mathcal{M}(k_1, k_2 k_3) = -k_1 k_2^2 - 4 \frac{k_2^3 k_3^3}{k_t} + \frac{1}{2} k_1^3 + \frac{k_2^2 k_3^2}{k_t^2} (k_2 - k_3) \tag{C.4}$$

y  $U2a$  significa permutación en los dos últimos argumentos de  $\mathcal{M}_3$ .

Comparando los dos términos en la ecuación (C.2) se obtiene que

$$\frac{\frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^4 \phi_\star^4} \exp [2N (\eta_\phi - \eta_\sigma)]}{\frac{1}{\eta_\phi^2 \phi_\star^4}} = \frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^2} \exp [2N (\eta_\phi - \eta_\sigma)] , \quad (\text{C.5})$$

y debido a que  $|\eta_\phi| < |\eta_\sigma|$  y la exponencial es mucho mayor que uno, se deduce que el término de la exponencial domina en este caso. El mismo argumento se puede utilizar para la ecuación (C.3), llegándose a concluir que el término con la exponencial domina sobre el otro.

Ahora solo queda comparar las dos contribuciones entre sí; en orden de magnitud, se puede obtener:

$$\begin{aligned} \frac{P_\zeta^{lazo1}}{P_\zeta^{lazo2}} &\sim \frac{\frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^4 \phi_\star^4} \exp [4N (\eta_\phi - \eta_\sigma)] \frac{2\pi^2}{k^3} \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^4}{\frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi^3 \phi_\star^3} \exp [2N (\eta_\phi - \eta_\sigma)] \frac{2\pi^2}{k^3} \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^4 \frac{\sqrt{\epsilon_\phi}}{m_{pl}}} \\ &= \frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi} \frac{m_{pl}}{\phi_\star} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_\phi}} \exp [2N (\eta_\phi - \eta_\sigma)] . \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Debido a que  $m_{pl} \gg \phi_{star}$  y  $\epsilon_\phi \ll 1$ , la contribución calculada en (C.2) es mucho mayor que la contribución calculada en (C.3).

Se puede concluir entonces que la contribución total, de los diagramas de dos puntos con un lazo, al espectro, para el modelo específico tratado en este trabajo, está dada por:

$$P_\zeta^{lazo} = \frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^4 \phi_\star^4} \exp [4N (\eta_\phi - \eta_\sigma)] \frac{2\pi^2}{k^3} \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^4 . \quad (\text{C.7})$$

## C.2 Biespectro

### C.2.1. Contribuciones a nivel de árbol

De la definición (2.42) y de la ecuación (3.28), se concluye que la contribución al biespectro de este término es:

$$\begin{aligned}
 B_{\zeta}^{arbol\ 1} &= \sum N_{il}N_iN_l \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^4 \left[ \frac{2\pi^2 2\pi^2}{k_2^3 k_3^3} + \text{permut ciclicas} \right] \\
 &= (N_{\phi\phi}N_{\phi}N_{\phi} + 2 N_{\phi\sigma}N_{\phi}N_{\sigma} + N_{\sigma\sigma}N_{\sigma}N_{\sigma}) \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^4 \left[ \frac{2\pi^2 2\pi^2}{k_2^3 k_3^3} + \text{permut ciclicas} \right] \\
 &= \left( -\frac{1}{\eta_{\phi}\phi_{\star}^2} \frac{1}{\eta_{\phi}\phi_{\star}} \frac{1}{\eta_{\phi}\phi_{\star}} + \right) \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^4 \left[ \frac{2\pi^2 2\pi^2}{k_2^3 k_3^3} + \text{permut ciclicas} \right] \\
 &= \left( -\frac{1}{\eta_{\phi}^3 \phi_{\star}^4} \right) \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^4 \left[ \frac{2\pi^2 2\pi^2}{k_2^3 k_3^3} + \text{permut ciclicas} \right] \\
 &= \left( -\frac{1}{\eta_{\phi}^3 \phi_{\star}^4} \right) \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^4 4\pi^4 \left( \frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3} \right) \tag{C.8}
 \end{aligned}$$

La otra contribución a nivel de árbol en el biespectro se puede calcular a partir de la ecuación (3.29)

$$\begin{aligned}
 B_{\zeta}^{arbol\ 2} &= \sum N_i N_j N_l B^{ijk}(k_1, k_2, k_3) \\
 &= N_{\phi}N_{\phi}N_{\phi}B_{\delta\phi\delta\phi\delta\phi}(k_1, k_2, k_3) + 3N_{\phi}N_{\phi}N_{\sigma}B_{\delta\phi\delta\phi\delta\sigma}(k_1, k_2, k_3) \\
 &+ 3N_{\phi}N_{\sigma}N_{\sigma}B_{\delta\phi\delta\sigma\delta\sigma}(k_1, k_2, k_3) + N_{\sigma}N_{\sigma}N_{\sigma}B_{\delta\sigma\delta\sigma\delta\sigma}(k_1, k_2, k_3) \\
 &= N_{\phi}N_{\phi}N_{\phi}B_{\delta\phi\delta\phi\delta\phi}(k_1, k_2, k_3) \\
 &= \left( \frac{1}{\eta_{\phi}\phi_{\star}} \right)^3 4\pi^4 \sum_{perm} \left( \frac{H_{\star}}{2\pi} \right)^4 \frac{\sqrt{\epsilon_{\phi}}}{2\sqrt{2}m_{pl}} \frac{\mathcal{M}_3(k_1, k_2, k_3)}{\prod_i k_i^3}. \tag{C.9}
 \end{aligned}$$

Haciendo una comparación, en orden de magnitud, de las ecuaciones (C.8) y (C.9) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{B_{\zeta}^{arbol\ 1}}{B_{\zeta}^{arbol\ 1}} &\sim \frac{\left(-\frac{1}{\eta_{\phi}^3 \phi_{\star}^4}\right) \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^4 4\pi^4 \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right)}{\left(\frac{1}{\eta_{\phi} \phi_{\star}}\right)^3 4\pi^4 \sum_{perm} \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^4 \frac{\sqrt{\epsilon_{\phi}}}{2\sqrt{2}m_{pl}} \frac{\mathcal{M}_3(k_1, k_2, k_3)}{\prod_i k_i^3}} \\
 &\approx \frac{\left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right)}{\phi_{\star} \frac{\sqrt{\epsilon_{\phi}}}{m_{pl}} \sum_{perm} \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right)} \\
 &= \frac{m_{pl}}{\phi_{\star} \sqrt{\epsilon_{\phi}}}, \tag{C.10}
 \end{aligned}$$

y debido a que  $m_{pl} \gg \phi_{\star}$  y  $\sqrt{\epsilon_{\phi}} \ll 1$ , se deduce que el resultado de la ecuación la (C.9) es despreciable comparado con C.8. Se concluye entonces que a nivel árbol la contribución total al biespectro para el modelo específico tratado en este trabajo está dado por

$$B_{\zeta}^{arbol} = \left(-\frac{1}{\eta_{\phi}^3 \phi_{\star}^4}\right) \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^4 4\pi^4 \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right). \tag{C.11}$$

## C.2.2. Contribuciones a nivel de lazo

De la definición del biespectro (2.42) y de la ecuación (3.30) se obtiene

$$\begin{aligned}
 B_{\zeta}^{lazo\ 1} &= \sum N_{il} N_{ln} N_{ni} \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^6 4\pi^4 \ln(kL) \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right) \\
 &= \left[ \left(-\frac{1}{\eta_{\phi} \phi_{\star}^2}\right)^3 + \left(\frac{\eta_{\sigma}}{\eta_{\phi}^2 \phi_{\star}^2} \exp[2N(\eta_{\phi} - \eta_{\sigma})]\right)^3 \right] \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^6 4\pi^4 \ln(kL) \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right) \\
 &= \left[ -\frac{1}{\eta_{\phi}^3 \phi_{\star}^6} + \frac{\eta_{\sigma}^3}{\eta_{\phi}^6 \phi_{\star}^6} \exp[6N(\eta_{\phi} - \eta_{\sigma})] \right] \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^6 4\pi^4 \ln(kL) \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right). \tag{C.12}
 \end{aligned}$$

Estos dos términos pueden ser comparados tomando la razón entre ellos

$$\frac{\frac{\eta_{\sigma}^3}{\eta_{\phi}^6 \phi_{\star}^6} \exp[6N(\eta_{\phi} - \eta_{\sigma})]}{\frac{1}{\eta_{\phi}^3 \phi_{\star}^6}} = \frac{\eta_{\sigma}^3}{\eta_{\phi}^3} \exp[6N(\eta_{\phi} - \eta_{\sigma})] \gg 1, \tag{C.13}$$

debido a que  $|\eta_{\sigma}| > |\eta_{\phi}|$ . Se concluye entonces, en este caso, que el término que tiene la exponencial domina.

De la ecuación (3.32) se sigue que

$$\begin{aligned}
 B_\zeta^{lazo 2} &= \sum N_{imn} N_{im} N_n \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 4\pi^4 \ln(kL) \left( \frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3} \right) \\
 &= [N_{\phi\phi\phi} N_{\phi\phi} N_\phi + N_{\sigma\sigma\phi} N_{\sigma\sigma} N_\phi] \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 4\pi^4 \ln(kL) \left( \frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3} \right) \\
 &= \left[ \left( \frac{2}{\eta_\phi \phi_\star^3} \right) \left( -\frac{1}{\eta_\phi \phi_\star^2} \right) \left( \frac{1}{\eta_\phi \phi_\star} \right) \right] \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 4\pi^4 \ln(kL) \left( \frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3} \right) \\
 &+ \left[ \left( \frac{-2\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^3 \phi_\star^3} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \right) \left( \frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi^2 \phi_\star^2} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \right) \left( \frac{1}{\eta_\phi \phi_\star} \right) \right] \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 4\pi^4 \ln(kL) \left( \frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3} \right) \\
 &= \left( -\frac{2}{\eta_\phi^3 \phi_\star^6} - \frac{2\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^6 \phi_\star^6} \exp[4N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \right) 4\pi^4 \ln(kL) \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 \left( \frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3} \right). \tag{C.14}
 \end{aligned}$$

Si se toma la razón entre los dos términos de la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{\frac{2\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^6 \phi_\star^6} \exp[4N(\eta_\phi - \eta_\sigma)]}{\frac{2}{\eta_\phi^3 \phi_\star^6}} = \frac{\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^3} \exp[4N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \gg 1, \tag{C.15}$$

en donde se tuvo en cuenta que  $|\eta_\sigma| > |\eta_\phi|$ . Se concluye entonces que el término que contiene la exponencial domina en esta expresión.

De la ecuación (3.33) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 B_\zeta^{lazo 3} &= \sum N_{il} N_{ln} N_j \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^2 \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{2\pi^2}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}|^3} B^{ijn}(q_1, |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|, k_3) + 2 \text{ permt} \right] \\
 &= N_{\phi\phi} N_{\phi\phi} N_\phi \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^2 \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{2\pi^2}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}|^3} B^{\delta\phi\delta\phi\delta\phi}(q_1, |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|, k_3) + 2 \text{ permt} \right] \\
 &+ N_{\sigma\sigma} N_{\sigma\sigma} N_\phi \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^2 \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{2\pi^2}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}|^3} B^{\delta\sigma\delta\phi\delta\sigma}(q_1, |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|, k_3) + 2 \text{ permt} \right] \\
 &= \left( -\frac{1}{\eta_\phi \phi_\star^2} \right)^2 \left( \frac{1}{\eta_\phi \phi_\star} \right) \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{8\pi^6}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}|^3} \sum_{\text{perm}} \frac{\sqrt{\epsilon_\phi}}{2\sqrt{2}m_{pl}} \frac{\mathcal{M}_3(q, |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|, k_3)}{k_3^3 |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|^3 q^3} + 2 \text{ permt} \right] \\
 &+ \left( \frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi^2 \phi_\star^2} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \right)^2 \left( \frac{1}{\eta_\phi \phi_\star} \right) \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{8\pi^6}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}|^3} \sum_{U_{2a}} \frac{\sqrt{\epsilon_\phi}}{2\sqrt{2}m_{pl}} \frac{\mathcal{M}_3(q, |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|, k_3)}{k_3^3 |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|^3 q^3} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \text{ permt} \right] \\
 &= \frac{1}{\eta_\phi^3 \phi_\star^5} \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{8\pi^6}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}|^3} \sum_{\text{perm}} \frac{\sqrt{\epsilon_\phi}}{2\sqrt{2}m_{pl}} \frac{\mathcal{M}_3(q, |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|, k_3)}{k_3^3 |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|^3 q^3} + 2 \text{ permt} \right] \\
 &+ \frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^5 \phi_\star^5} \exp[4N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{8\pi^6}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}|^3} \sum_{U_{2a}} \frac{\sqrt{\epsilon_\phi}}{2\sqrt{2}m_{pl}} \frac{\mathcal{M}_3(q, |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|, k_3)}{k_3^3 |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|^3 q^3} + 2 \text{ permt} \right].
 \end{aligned}$$

La razón entre estos dos términos es del orden de

$$\frac{\frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^5 \phi_\star^5} \exp [4N (\eta_\phi - \eta_\sigma)]}{\frac{1}{\eta_\phi^3 \phi_\star^5}} \sim \frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^2} \exp [4N (\eta_\phi - \eta_\sigma)] \gg 1, \quad (\text{C.16})$$

debido a que  $|\eta_\sigma| > |\eta_\phi|$ . Se concluye que el término exponencial domina sobre el otro.

De la ecuación (3.34)

$$\begin{aligned} B_\zeta^{\text{lazo } 4} &= \frac{1}{2} \sum N_i N_{mjl} N_m \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^2 \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} B^{ijl}(k_1, q, |\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}|) \frac{2\pi^2}{k_3^3} + 5 \text{ perm} \right] \\ &= \frac{1}{2} N_\phi N_{\phi\phi\phi} N_\phi \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^2 \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} B^{\delta\phi\delta\phi\delta\phi}(k_1, q, |\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}|) \frac{2\pi^2}{k_3^3} + 5 \text{ perm} \right] \\ &+ \frac{1}{2} N_\phi N_{\sigma\sigma\phi} N_\phi \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^2 \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} B^{\delta\phi\delta\sigma\delta\sigma}(k_1, q, |\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}|) \frac{2\pi^2}{k_3^3} + 5 \text{ perm} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\eta_\phi \phi_\star} \right)^2 \left( \frac{2}{\eta_\phi \phi_\star^3} \right) \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \sum_{\text{perm}} \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 \frac{\sqrt{\epsilon_\phi}}{2\sqrt{2}m_{pl}} \frac{\mathcal{M}_3(k_1, q, |\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}|)}{k_1^3 q^3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}|^3} \frac{8\pi^6}{k_3^3} + 5 \text{ perm} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\eta_\phi \phi_\star} \right)^2 \left( -\frac{2\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^3 \phi_\star^3} \exp [2N (\eta_\phi - \eta_\sigma)] \right) \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \sum_{\text{perm}} \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 \sum_{U_{2a}} \frac{\sqrt{\epsilon_\phi}}{2\sqrt{2}m_{pl}} \frac{\mathcal{M}_3(k_1, q, |\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}|)}{k_1^3 q^3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}|^3} \frac{8\pi^6}{k_3^3} \right. \\ &\quad \left. + 5 \text{ perm} \right] \\ &= \frac{1}{\eta_\phi^3 \phi_\star^5} \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \sum_{\text{perm}} \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 \frac{\sqrt{\epsilon_\phi}}{2\sqrt{2}m_{pl}} \frac{\mathcal{M}_3(k_1, q, |\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}|)}{k_1^3 q^3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}|^3} \frac{8\pi^4}{k_3^3} + 5 \text{ perm} \right] \\ &- \frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^5 \phi_\star^5} \exp [2N (\eta_\phi - \eta_\sigma)] \frac{2\pi^2}{k_3^3} \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 \sum_{U_{2a}} \frac{\sqrt{\epsilon_\phi}}{2\sqrt{2}m_{pl}} \frac{\mathcal{M}_3(k_1, q, |\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}|)}{k_1^3 q^3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}|^3} \frac{4\pi^8}{k_3^3} + 5 \text{ perm} \right]. \end{aligned}$$

Tomando la razón entre estos dos términos, se encuentra, en orden de magnitud, que

$$\frac{\frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^5 \phi_\star^5} \exp [2N (\eta_\phi - \eta_\sigma)]}{\frac{1}{\eta_\phi^3 \phi_\star^5}} \sim \frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^2} \exp [2N (\eta_\phi - \eta_\sigma)] \gg 1. \quad (\text{C.17})$$

Por lo tanto el término exponencial domina.

De la ecuación (3.35) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 B_\zeta^{lazo\ 5} &= \frac{1}{2} \sum N_{im} N_{jl} N_m \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^2 \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} B^{ijkl}(k_2, |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|, q) \frac{2\pi^2}{k_3^3} + 5 \text{ perm} \right] \\
 &= \frac{1}{2} N_{\phi\phi} N_{\phi\phi} N_\phi \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^2 \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} B^{\delta\phi\delta\phi\delta\phi}(k_2, |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|, q) \frac{2\pi^2}{k_3^3} + 5 \text{ perm} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} N_{\phi\phi} N_{\sigma\sigma} N_\phi \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^2 \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} B^{\delta\phi\delta\sigma\delta\sigma}(k_2, |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|, q) \frac{2\pi^2}{k_3^3} + 5 \text{ perm} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\eta_\phi \phi_\star^2} \right)^2 \left( \frac{1}{\eta_\phi \phi_\star} \right) \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^2 \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} B^{\delta\phi\delta\phi\delta\phi}(k_2, |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|, q) \frac{2\pi^2}{k_3^3} + 5 \text{ perm} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\eta_\phi \phi_\star^2} \right) \left( \frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi^2 \phi_\star^2} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \right) \left( \frac{1}{\eta_\phi \phi_\star} \right) \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^2 \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} B^{\delta\phi\delta\sigma\delta\sigma}(k_2, |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|, q) \right. \\
 &\quad \left. \frac{8\pi^6}{k_3^3} + 5 \text{ perm} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\eta_\phi^3 \phi_\star^5} \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \sum_{perm} \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 \frac{\sqrt{\epsilon_\phi}}{2\sqrt{2}m_{pl}} \frac{\mathcal{M}_3(k_2, q, |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|)}{k_2^3 q^3 |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|^3} \frac{8\pi^6}{k_3^3} + 5 \text{ perm} \right] \\
 &- \frac{1}{2} \frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi^4 \phi_\star^5} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \sum_{U_{2a}} \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 \frac{\sqrt{\epsilon_\phi}}{2\sqrt{2}m_{pl}} \frac{\mathcal{M}_3(k_2, |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|, q)}{k_2^3 q^3 |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|^3} \frac{8\pi^6}{k_3^3} + 5 \text{ perm} \right]
 \end{aligned}$$

En este caso la razón entre los dos últimos términos queda

$$\frac{\frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi^4 \phi_\star^5} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)]}{\frac{1}{\eta_\phi^3 \phi_\star^5}} \sim \frac{\eta_\sigma \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)]}{\eta_\phi} \gg 1, \quad (\text{C.18})$$

por lo tanto, domina la exponencial. De la ecuación (3.36) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 B_\zeta^{lazo\ 6} &= \frac{1}{2} \sum N_i N_{jl} N_m \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} T^{ijlm}(\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{q}, \mathbf{k}_3 + \mathbf{q}) + 2 \text{ perm} \right] \\
 &= \frac{1}{2} N_\phi N_{\phi\phi} N_\phi \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} 8\pi^6 \sum_{perm} \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 \frac{\mathcal{M}_4(\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{q}, \mathbf{k}_3 + \mathbf{q})}{k_1^3 k_2^3 q^3 |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|^3} \frac{1}{m_{pl}^2} + 2 \text{ perm} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \sum N_\phi N_{\sigma\sigma} N_\phi \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} 8\pi^6 \sum_{p_{2a}, u_{2a}} \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 \frac{\mathcal{M}_4(\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{q}, \mathbf{k}_3 + \mathbf{q})}{k_1^3 k_2^3 q^3 |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|^3} \frac{1}{m_{pl}^2} + 2 \text{ perm} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\eta_\phi \phi_\star} \right)^2 \left( -\frac{1}{\eta_\phi \phi_\star^2} \right) \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} 8\pi^6 \sum_{perm} \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 \frac{\mathcal{M}_4(\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{q}, \mathbf{k}_3 + \mathbf{q})}{k_1^3 k_2^3 q^3 |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|^3} \frac{1}{m_{pl}^2} + 2 \text{ perm} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\eta_\phi \phi_\star} \right)^2 \frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi^2 \phi_\star^2} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} 8\pi^6 \sum_{p2a, u2a} \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 \frac{\mathcal{M}_4(\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{q}, \mathbf{k}_3 + \mathbf{q})}{k_1^3 k_2^3 q^3 |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|^3} \frac{1}{m_{pl}^2} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \text{ perm} \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\eta_\phi^3 \phi_\star^4} \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} 8\pi^6 \sum_{perm} \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 \frac{\mathcal{M}_4(\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{q}, \mathbf{k}_3 + \mathbf{q})}{k_1^3 k_2^3 q^3 |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|^3} \frac{1}{m_{pl}^2} + 2 \text{ perm} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi^4 \phi_\star^4} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} 8\pi^6 \sum_{p2a, u2a} \left( \frac{H_\star}{2\pi} \right)^6 \frac{\mathcal{M}_4(\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{q}, \mathbf{k}_3 + \mathbf{q})}{k_1^3 k_2^3 q^3 |\mathbf{k}_3 + \mathbf{q}|^3} \frac{1}{m_{pl}^2} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \text{ perm} \right], \tag{C.19}
 \end{aligned}$$

en donde p2a y u2a significan permutaciones en los dos primeros y los dos últimos términos respectivamente, de forma simultanea; y  $\mathcal{M}_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$  está definido por [?]

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) &= -2 \frac{k_1^3 k_3^3}{K_{12}^2 k_{34}^2} \frac{W_{24}}{k_t} \left[ \frac{\mathbf{Z}_{12} \cdot \mathbf{Z}_{34}}{k_{34}^2} + 2\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{Z}_{34} + \frac{3}{4} \sigma_{12} \sigma_{34} \right] \\
 &- \frac{1}{2} \frac{k_2^2}{k_{34}^2} \sigma_{34} \left[ \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_t} W_{124} + \frac{k_1^2 k_2^2}{k_t^3} \left( 2 + 6 \frac{k_4}{k_t} \right) \right], \tag{C.20}
 \end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_{ij} &= \mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j, \\
 k_t &= k_1 + k_2 + k_3 + k_4, \\
 \sigma_{ij} &= \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j + k_j^2, \\
 \mathbf{Z}_{ij} &= \sigma_{ij} \mathbf{k}_i - \sigma_{ji} \mathbf{k}_j, \\
 W_{ij} &= 1 + \frac{k_i + k_j}{k_t} + \frac{2k_i k_j}{k_t^2}, \\
 W_{lmn} &= 1 + \frac{k_l + k_l + k_m}{k_t} \frac{2(k_l k_m + k_l k_n + k_m k_n)}{k_t^2} + \frac{6k_l k_m k_n}{k_t^3}. \tag{C.21}
 \end{aligned}$$

Una comparación en orden de magnitud de la ecuación (C.19) da como resultado

$$\frac{\frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi^4 \phi_\star^4} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)]}{\frac{1}{\eta_\phi^3 \phi_\star^4}} = \frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \gg 1, \tag{C.22}$$

debido a que  $|\eta_\sigma| > |\eta_\phi|$ . Entonces domina la exponencial.

Es posible demostrar que, en orden de magnitud, la contribución  $B_\zeta^{lazo 1}$  domina sobre todas las demás. De las ecuaciones (C.12) y (C.14), y de las relaciones (C.13) y (C.15), se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{B_\zeta^{lazo 1}}{B_\zeta^{lazo 2}} &\sim \frac{\frac{\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^6 \phi_\star^6} \exp[6N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^6 4\pi^4 \ln(kL) \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right)}{\frac{2\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^6 \phi_\star^6} \exp[4N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] 4\pi^4 \ln(kL) \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^6 \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right)} \\ &= \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \gg 1. \end{aligned} \quad (C.23)$$

De las ecuaciones (C.12) y (C.16), y de las relaciones (C.13) y (C.16), se obtiene que (recordando que  $m_{pl} \gg \phi_\star$  y  $\sqrt{\epsilon_\phi} \ll 1$ )

$$\begin{aligned} \frac{B_\zeta^{lazo 1}}{B_\zeta^{lazo 3}} &\sim \frac{\frac{\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^6 \phi_\star^6} \exp[6N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^6 4\pi^4 \ln(kL) \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right)}{\frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^5 \phi_\star^5} \exp[4N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^6 4\pi^4 \frac{\sqrt{\epsilon_\phi}}{m_{pl}} \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right)} \\ &= \frac{\eta_\sigma m_{pl}}{\eta_\phi \phi_\star \sqrt{\epsilon_\phi}} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \gg 1. \end{aligned} \quad (C.24)$$

De las ecuaciones (C.12) y (C.17), y de las relaciones (C.13), (C.17) se obtiene que (recordando que  $m_{pl} \gg \phi_\star$  y  $\sqrt{\epsilon_\phi} \ll 1$ )

$$\begin{aligned} \frac{B_\zeta^{lazo 1}}{B_\zeta^{lazo 4}} &\sim \frac{\frac{\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^6 \phi_\star^6} \exp[6N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^6 4\pi^4 \ln(kL) \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right)}{\frac{\eta_\sigma^2}{\eta_\phi^5 \phi_\star^5} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^6 4\pi^4 \frac{\sqrt{\epsilon_\phi}}{m_{pl}} \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right)} \\ &= \frac{\eta_\sigma m_{pl}}{\eta_\phi \phi_\star \sqrt{\epsilon_\phi}} \exp[4N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \gg 1. \end{aligned} \quad (C.25)$$

De las ecuaciones (C.12) y (C.18), y de las relaciones (C.13) y (C.18) se obtiene que (recordando que  $m_{pl} \gg \phi_\star$ ,  $|\eta_\sigma| > |\eta_\phi|$  y  $\sqrt{\epsilon_\phi} \ll 1$ )

$$\begin{aligned} \frac{B_\zeta^{lazo 1}}{B_\zeta^{lazo 5}} &\sim \frac{\frac{\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^6 \phi_\star^6} \exp[6N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^6 4\pi^4 \ln(kL) \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right)}{\frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi^4 \phi_\star^4} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^6 4\pi^4 \frac{\sqrt{\epsilon_\phi}}{m_{pl}} \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right)} \\ &= \frac{\eta_\sigma^2 m_{pl}}{\eta_\phi^2 \phi_\star \sqrt{\epsilon_\phi}} \exp[4N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \gg 1. \end{aligned} \quad (C.26)$$

De las ecuaciones (C.12) y (C.19), y de las relaciones (C.13) y (C.22) se obtiene que (recordando que  $m_{pl} \gg \phi_\star$  y  $|\eta_\sigma| > |\eta_\phi|$ )

$$\begin{aligned} \frac{B_\zeta^{lazo 1}}{B_\zeta^{lazo 6}} &\sim \frac{\frac{\eta_\sigma^3}{\eta_\phi^6 \phi_\star^6} \exp[6N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^6 4\pi^4 \ln(kL) \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right)}{\frac{\eta_\sigma}{\eta_\phi^4 \phi_\star^4} \exp[2N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^6 4\pi^4 \frac{1}{m_{pl}} \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right)} \\ &= \frac{\eta_\sigma^2 m_{pl}}{\eta_\phi^2 \phi_\star} \exp[4N(\eta_\phi - \eta_\sigma)] \gg 1. \end{aligned} \quad (C.27)$$

Se concluye entonces que la contribución total de los seis diagramas de tres puntos que continen un lazo contribuyen, para el modelo tratado en este trabajo, con:

$$B_{\zeta}^{lazo} = \frac{\eta_{\sigma}^3}{\eta_{\phi}^6 \phi_{\star}^6} \exp[6N(\eta_{\phi} - \eta_{\sigma})] \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^6 4\pi^4 \ln(kL) \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right). \quad (\text{C.28})$$

De las ecuaciones (C.1,C.7,C.11 y C.28) se puede concluir que, para el modelo tratado en este trabajo, las contribuciones totales, tanto al espectro como al biespectro y tanto a nivel de árbol como a nivel de lazo están dados por:

$$P_{\zeta}^{arbol} = \left(\frac{1}{\eta_{\phi}^2 \phi_{\star}^2}\right) \frac{2\pi^2}{k^3} \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^2, \quad (\text{C.29})$$

$$P_{\zeta}^{lazo} = \frac{\eta_{\sigma}^2}{\eta_{\phi}^4 \phi_{\star}^4} \exp[4N(\eta_{\phi} - \eta_{\sigma})] \frac{2\pi^2}{k^3} \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^4 \ln(kL), \quad (\text{C.30})$$

$$B_{\zeta}^{arbol} = -\frac{1}{\eta_{\phi}^3 \phi_{\star}^4} \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^4 4\pi^4 \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right), \quad (\text{C.31})$$

$$B_{\zeta}^{lazo} = \frac{\eta_{\sigma}^3}{\eta_{\phi}^6 \phi_{\star}^6} \exp[6N(\eta_{\phi} - \eta_{\sigma})] \left(\frac{H_{\star}}{2\pi}\right)^6 4\pi^4 \ln(kL) \left(\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}\right). \quad (\text{C.32})$$

---

# ApéndiceD

## Cálculo del índice espectral en el formalismo $\delta N$

---

Se usa la definición estándar del índice espectral  $n_\zeta$ , para obtener una expresión general, que depende del potencial y de las derivadas de  $N$  con respecto a los campos escalares. Esto se hace en dos casos específicos: uno, cuando el espectro es dominado a nivel árbol, y otro, cuando éste es dominado a nivel de lazo.

### D.1 Definición del índice espectral

Definición del índice espectral:

$$n_\zeta - 1 \equiv \frac{d(\ln \mathcal{P}_\zeta)}{d(\ln k)}, \quad (\text{D.1})$$

en donde  $k = aH$ . Tomando el logaritmo de obtiene:

$$\ln k = \ln a + \ln H, \quad (\text{D.2})$$

$$d(\ln k) = d(\ln a) + d(\ln H). \quad (\text{D.3})$$

De la definición de  $N$  se obtiene que  $dN = d(\ln a)$ . Introduciendo esto en (D.3), se obtiene:

$$d(\ln k) = dN + d(\ln H). \quad (\text{D.4})$$

De la definición del parámetro de slow-roll  $\epsilon$ :

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (\text{D.5})$$

de la cual se deduce que:

$$-\frac{dH}{H} = H\epsilon dt, \quad (\text{D.6})$$

$$d(\ln H) = -H\epsilon dt. \quad (\text{D.7})$$

Ahora, introduciendo (D.7) en (D.4), se obtiene:

$$d(\ln k) = dN - H\epsilon dt = Hdt(1 - \epsilon), \quad (\text{D.8})$$

debido a que  $dN = Hdt$ . Introduciendo esta ecuación en la definición, se obtiene que:

$$n_\zeta - 1 = \frac{1}{H(1 - \epsilon)} \frac{d(\ln \mathcal{P}_\zeta)}{dt}. \quad (\text{D.9})$$

## D.2 Índice espectral, cuando el espectro $\mathcal{P}_\zeta$ está dominado a nivel árbol

Del diagrama correspondiente a nivel árbol, se puede deducir que la contribución al espectro es:

$$\mathcal{P}_\zeta = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \sum_i N_i^2. \quad (\text{D.10})$$

Tomando el logaritmo natural y derivando respecto al tiempo se obtiene:

$$\frac{d}{dt}(\ln \mathcal{P}_\zeta) = \frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2 \right] + \frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \sum_i N_i^2 \right) \right]. \quad (\text{D.11})$$

El primer término del segundo miembro se puede desarrollar fácilmente:

$$\frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2 \right] = \frac{1}{\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2} 2 \left( \frac{H}{2\pi} \right) \frac{\dot{H}}{2\pi} \quad (\text{D.12})$$

$$= \frac{2\dot{H}}{2\pi \left(\frac{H}{2\pi}\right)} \quad (\text{D.13})$$

$$= 2 \frac{\dot{H}}{H}. \quad (\text{D.14})$$

Tomando en cuenta la definición de  $\epsilon$  (D.5), se puede escribir que:

$$\frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2 \right] = -2 \epsilon H. \quad (\text{D.15})$$

El segundo término de la ecuación (D.11) es un poco más complicado. El operador  $\frac{d}{dt}$  se puede escribir en la forma:

$$\frac{d}{dt} = \sum_j \dot{\phi}_j \frac{\partial}{\partial \phi_j}. \quad (\text{D.16})$$

Tomando en cuenta esta condición, es posible obtener una expresión para el segundo término de la ecuación

(D.11):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \sum_i N_i^2 \right) \right] &= \sum_j \dot{\phi}_j \frac{\partial}{\partial \phi_j} \left[ \ln \left( \sum_i N_i^2 \right) \right] \\
&= \sum_j \dot{\phi}_j \frac{1}{\sum_i N_i^2} \left( \sum_{ij} 2N_i N_{ij} \right) \\
&= \frac{2 \left( \sum_{i,j} \dot{\phi}_j N_i N_{ij} \right)}{\sum_i N_i^2} .
\end{aligned} \tag{D.17}$$

De las condiciones de slow-roll se puede encontrar una forma de escribir los  $\dot{\phi}_j$  en función de  $H$  y de las derivadas del potencial respecto a los campos. La condición de slow-roll que deben cumplir los campos es:

$$3 H \dot{\phi}_i + \frac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0 . \tag{D.18}$$

Reemplazando en la ecuación (D.21) se obtiene que :

$$\frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \sum_i N_i^2 \right) \right] = \frac{2 \left( \sum_{i,j} \left( -\frac{V_j}{3H} \right) N_i N_{ij} \right)}{\sum_i N_i^2} . \tag{D.19}$$

Es posible ahora reescribir la ecuación (D.11) en una forma diferente:

$$\frac{d}{dt} (\ln \mathcal{P}_\zeta) = -2 \epsilon H - \frac{2 \left[ \sum_{i,j} \left( \frac{V_j}{3H} \right) N_i N_{ij} \right]}{\sum_i N_i^2} . \tag{D.20}$$

Tomando en cuenta la ecuación (D.9) y haciendo la aproximación  $\epsilon \ll 1$ , el índice espectral queda:

$$n_\zeta - 1 = \frac{1}{H} \left\{ -2 \epsilon H - \frac{2 \left[ \sum_{i,j} \left( \frac{V_j}{3H} \right) N_i N_{ij} \right]}{\sum_i N_i^2} \right\} . \tag{D.21}$$

De la ecuación de Friedmann es sabido que  $H^2 = \frac{V}{3m_{pl}^2}$ . Tomando en cuenta esto, se deduce que:

$$n_\zeta - 1 = -2 \epsilon - \frac{2m_{pl}^2}{V} \frac{\sum_{i,j} [V_j N_i N_{ij}]}{\sum_i N_i^2} . \tag{D.22}$$

### D.3 Índice espectral, cuando el espectro $\mathcal{P}_\zeta$ está dominado a nivel de lazo

En este caso se debe tomar la contribución al espectro que hace el diagrama a un lazo:

$$\mathcal{P}_\zeta = \left( \frac{H}{2\pi} \right)^4 \ln(kL) \sum_{ij} N_{ij}^2 . \tag{D.23}$$

Así como en la sección anterior, se toma el logaritmo natural y se deriva respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}(\ln \mathcal{P}_\zeta) = 4 \frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \frac{H}{2\pi} \right) \right] + \frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \sum_{ij} N_{ij}^2 \right) \right] + \frac{d}{dt} [\ln(\ln(kL))] . \quad (\text{D.24})$$

El primer término del segundo miembro se puede simplificar:

$$4 \frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \frac{H}{2\pi} \right) \right] = 4 \frac{1}{\left(\frac{H}{2\pi}\right)} \frac{\dot{H}}{2\pi} = 4 \frac{\dot{H}}{H} \quad (\text{D.25})$$

y sabiendo que  $\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H}$ , el primer término del segundo miembro de (D.24) queda:

$$4 \frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \frac{H}{2\pi} \right) \right] = -4 \epsilon H . \quad (\text{D.26})$$

De nuevo, el segundo término es mas complicado. Asumiendo la derivada respecto al tiempo como el término a la derecha de la ecuación (D.16), es posible escribir el segundo término del lado derecho de la ecuación (D.24) en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \sum_{ij} N_{ij}^2 \right) \right] &= \sum_k \dot{\phi}_k \frac{\partial}{\partial \phi_k} \left[ \ln \left( \sum_{ij} N_{ij}^2 \right) \right] \\ &= \sum_k \dot{\phi}_k \frac{1}{\sum_{ij} N_{ij}^2} \left( \sum_{ij} 2N_{ij} N_{ijk} \right) \\ &= \frac{2 \left( \sum_{ijk} \dot{\phi}_k N_{ij} N_{ijk} \right)}{\sum_{ij} N_{ij}^2} . \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Recordando, de la ecuación (D.18), que  $\dot{\phi}_k = -\frac{V_k}{3H}$ ; es posible escribir la ecuación (D.27) de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \sum_{ij} N_{ij}^2 \right) \right] = \frac{2 \left( \sum_{ijk} \left(-\frac{V_k}{3H}\right) N_{ij} N_{ijk} \right)}{\sum_{ij} N_{ij}^2} . \quad (\text{D.28})$$

El tercer término del lado derecho de la ecuación (D.24) también se puede simplificar:

$$\frac{d}{dt} [\ln(\ln(kL))] = [\ln(kL)]^{-1} \frac{\dot{k}}{k} . \quad (\text{D.29})$$

A partir de la relación:  $\lambda = \frac{2\pi a(t)}{k}$  se deduce que  $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{a}}{a} = H$ . Por lo tanto el tercer término del lado derecho de la ecuación (D.24), se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt} [\ln(\ln(kL))] = H [\ln(kL)]^{-1} . \quad (\text{D.30})$$

Teniendo en cuenta los resultados (D.26, D.28 y D.30), la ecuación (D.24) se puede escribir así:

$$\frac{d}{dt}(\ln \mathcal{P}_\zeta) = -4 \epsilon H - \frac{2 \left( \sum_{ijk} \left(\frac{V_k}{3H}\right) N_{ij} N_{ijk} \right)}{\sum_{ij} N_{ij}^2} + H [\ln(kL)]^{-1} . \quad (\text{D.31})$$

De la ecuación (D.9), el índice espectral se puede escribir como:

$$n_\zeta - 1 = \frac{1}{H} \left\{ -4 \epsilon H - \frac{2 \left( \sum_{ijk} \left( \frac{V_k}{3H} \right) N_{ij} N_{ijk} \right)}{\sum_{ij} N_{ij}^2} + H [\ln(kL)]^{-1} \right\}, \quad (\text{D.32})$$

y sabiendo que  $\frac{1}{3H^2} = \frac{m_{pl}^2}{V}$  ( de la ecaución de Friedmann), se obtiene:

$$n_\zeta - 1 = -4 \epsilon - \frac{2m_{pl}^2}{V} \frac{\left( \sum_{ijk} V_k N_{ij} N_{ijk} \right)}{\sum_{ij} N_{ij}^2} + [\ln(kL)]^{-1}. \quad (\text{D.33})$$

## REFERENCIAS

---

- [1] K. A. Olive, G. Steigman, and T.P Walker, *Primordial nucleosynthesis: theory and observations*, Phys. Rep. **333-334**, 389 (2000).
- [2] A. A. Penzias and R. W. Wilson, *A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s*, Astrophys. J. **142**, 419 (1965).
- [3] A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological inflation and large-scale structure*, Cambridge University Press, 2000.
- [4] V. F. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology*, Cambridge University Press, 2005.
- [5] S. Dodelson, *Modern cosmology*, Academic Press, 2003.
- [6] A. H. Guth, *The inflationary Universe: a possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
- [7] D. H. Lyth, *Large-scale energy-density perturbations and inflation*, Phys. Rev. D **31**, 1792 (1985).
- [8] D. H. Lyth and D. Seery, *Classicality of the primordial perturbations*, Phys. Lett. B **662**, 309 (2008).
- [9] A. A. Starobinsky, *Spectrum of the relic gravitational radiation and the early state of the universe*, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **30**, 719 (1979) [JETP Lett. **30**, 682 (1979)].
- [10] J. Maldacena, *Non-gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models*, JHEP **0305**, 013 (2003).
- [11] F. Vernizzi and D. Wands, *Non-gaussianities in two-field inflation*, JCAP **0605**, 019 (2006).
- [12] T. Battefeld and R. Easther, *Non-gaussianities in multi-field inflation* JCAP **0703**, 020 (2007).
- [13] S. Yokoyama, T. Suyama, and T. Tanaka, *Primordial non-gaussianity in multi-scalar slow-roll inflation*, JCAP **0707**, 013 (2007).
- [14] D. Seery and J. E. Lidsey, *Non-gaussianity from the inflationary trispectrum*, JCAP **0701**, 008 (2007).
- [15] D. H. Lyth and Y. Rodríguez, *Non-gaussianity from the second-order cosmological perturbation*, Phys. Rev. D **71**, 123508 (2005).
- [16] E. Komatsu et. al, *Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation*, arXiv:0803.0547 [astro-ph].
- [17] D. N. Spergel et. al, *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Data Processing, Sky Maps, and Basic Results*, arXiv:0803.0732v1 [astro-ph].
- [18] N. Kogo and E. Komatsu, *Angular trispectrum of CMB temperature anisotropy from primordial non-gaussianity with the full radiation transfer function*, Phys. Rev. D **73**, 083007 (2006).
- [19] E. Komatsu and D. N. Spergel, *Acoustic signatures in the primary microwave background bispectrum*, Phys. Rev. D **63**, 063002 (2001).

- [20] ESA's PLANCK mission homepage: <http://planck.esa.int>.
- [21] The Planck Collaboration, *The scientific programme of Planck*, [arXiv:astro-ph/0604069](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0604069).
- [22] A. Cooray, *21-cm background anisotropies can discern primordial non-gaussianity*, Phys. Rev. Lett. **97**, 261301 (2006).
- [23] A. Cooray, C. Li, and A. Melchiorri, *The trispectrum of 21-cm background anisotropies as a probe of primordial non-gaussianity*, [arXiv:0801.3463](https://arxiv.org/abs/0801.3463) [astro-ph].
- [24] M. Sasaki and E.D Stewart, *A general analytic formula for the spectral index of the density perturbations produced during inflation*, Prog. Theor. Phys. **95**, 71 (1996).
- [25] D. H. Lyth and Y. Rodríguez, *Inflationary prediction for primordial non-gaussianity*, Phys. Rev. Lett. **95**, 121302 (2005).
- [26] L. Boubekur and D. H. Lyth, *Detecting a small perturbation through its non-gaussianity*, Phys. Rev. D **73**, 021301(R) (2006).
- [27] L. Alabidi and D. H. Lyth, *Inflation models and observations*, JCAP **0605**, 016 (2006).
- [28] I. Zaballa, Y. Rodríguez, and D. H. Lyth, *Higher order contributions to the primordial non-gaussianity*, JCAP **0606**, 013 (2006).
- [29] L. Alabidi, *Non-gaussianity for a two component hybrid model of inflation*, JCAP **0610**, 015 (2006).
- [30] C. T. Byrnes, M. Sasaki, and D. Wands, *The primordial trispectrum from inflation*, Phys. Rev. D **74**, 123519 (2006).
- [31] S. Yokoyama, T. Suyama, and T. Tanaka, *Primordial non-gaussianity in multi-scalar inflation*, Phys. Rev. D **77**, 083511 (2008).
- [32] H. R. S. Cogollo, Y Rodríguez, and C. A. Valenzuela-Toledo, *On the Issue of the  $\zeta$  Series Convergence and Loop Corrections in the Generation of Observable Primordial Non-Gaussianity in Slow-Roll Inflation. Part I: the Bispectrum*, [arXiv:0806.1546](https://arxiv.org/abs/0806.1546) [astro-ph].
- [33] P. J. Peebles, *The large-scale structure of the Universe*, Princeton University Press, 1980.
- [34] R. K. Sachs and A. M. Wolfe, *Perturbations of a cosmological model and angular variations of the cosmic microwave background*, Astrophys. J. **147**, 73 (1967).
- [35] G. F. Smoot, *CMB Anisotropies: their discovery and utilization*, [arXiv:0801.2563](https://arxiv.org/abs/0801.2563) [astro-ph].
- [36] G. F. Smoot, et al., *Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps*, Astrophys. J. **396**, L1 (1992).
- [37] A. Riotto, *Inflation and the theory of cosmological Perturbations*, [arXiv:hep-ph/0210162v1](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0210162v1).
- [38] M. Sasaki, J. Valiviita, and D. Wands, *Non-Gaussianity of the primordial perturbation in the curvaton model*, Phys. Rev. D **74**, 103003 (2006).
- [39] E. F. Bunn and M. J. White, *The four-year COBE normalization and large scale-structure*, Astrophys. J. **480**, 6 (1997).
- [40] Y. Rodríguez, *The origin of the large structure in the Universe: theoretical and statistical aspects*, PhD thesis, Lancaster University, Lancaster UK, 2005. [arXiv:astro-ph/0507701](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0507701).
- [41] D. H. Lyth, K. A. Malik, and M. Sasaki, *A general proof of the conservation of the curvature perturbation*, JCAP **0505**, 004 (2005).
- [42] T. S Bunch and P. C. W. Davies, *Quantum Field Theory in De Sitter Space: Renormalisation by Point Splitting*, Proc. R. Soc. Lond. A **360**, 117 (1978).
- [43] D. H. Lyth, I. Zaballa, *A Bound Concerning Primordial Non-Gaussianity*, JCAP **0510**, 005 (2005).

- [44] D. H. Lyth, *The curvature perturbation in a box*, JCAP **0712**, 016 (2007).
- [45] C. T. Byrnes, K. Koyama, M. Sasaki and D. Wands, *Diagrammatic approach to non-gaussianity from inflation*, JCAP **0711**, 027 (2007).
- [46] D. H. Lyth and A. Riotto, *Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation*, Phys. Rep. **314**, 1 (1999).
- [47] S. Dodelson, W. H. Kinney, and E. Kolb, *Cosmic microwave background measurements can discriminate among inflation models*, Phys. Rev. D **56**, 3207 (1997).
- [48] D. H. Lyth, *Particle physics models of inflation*, Lect. Notes Phys. **738**, 81 (2008).
- [49] A. D. Linde, *Chaotic inflation*, Phys. Lett. B **129** 177 (1983).
- [50] A. D. Linde, *A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*, Phys. Lett. B **108**, 389 (1982).
- [51] K. Freese, J. Frieman, and A. Olinto, *Natural inflation with pseudo Nambu-Goldstone bosons*, Phys. Rev. Lett. **65**, 3233 (1990).
- [52] M. Dine and A. Riotto, *An inflaton candidate in gauge mediated supersymmetry breaking*, Phys. Rev. Lett. **79**, 2632 (1997).
- [53] E. J. Copeland, A. R. Liddle, D. H. Lyth, E.D Stewart and D. Wands, *False vacuum inflation with Einstein gravity*, Phys. Rev. D **49**, 6410 (1994).
- [54] A. D. Linde, *Axions in inflationary cosmology*, Phys. Lett. B **259**, 38 (1991).
- [55] A. D. Linde, *Hybrid inflation*, Phys. Rev. D **49**, 748 (1994).
- [56] A. Riotto, *Inflation and the nature of supersymmetry breaking*, Nucl. Phys. B **515**, 413 (1998).
- [57] A. D. Linde and A. Riotto, *Hybrid inflation in supergravity*, Phys. Rev. D **56**, 1841 (1997).
- [58] M. Spivak, *Calculus*, Cambridge University Press, 1994.
- [59] D. Seery and J. E. Lidsey, *Primordial non-gaussianities from multiple-field inflation*, JCAP **0509**, 011 (2005).
- [60] D. Seery, K. A. Malik and D. H. Lyth, *Non-Gaussianity of Inflationary Field Perturbations from the Field Equation*, JCAP **0803**, 014 (2008)..
- [61] M. E. Peskin and D V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*, Westview Press, 1995.

This document was written in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.