

**DIEZ DEMOSTRACIONES VISUALES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS**

**SILVIA BIBIANA ARDILA RODRÍGUEZ  
SAÚL FERNANDO BLANCO GARCÍA**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2009**

**DIEZ DEMOSTRACIONES VISUALES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS**

**SILVIA BIBIANA ARDILA RODRÍGUEZ  
SAÚL FERNANDO BLANCO GARCÍA**

**Trabajo de Grado para optar al Título de  
Licenciado(a) en Matemáticas**

**Director  
WILSON OLAYA LEÓN  
Magister en Ciencias Matemáticas**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA**

**2009**

## *AGRADECIMIENTOS*

*A los Profesores del Grupo Edumat y a los estudiantes del Semillero Euler; por su colaboración en la ejecución de este proyecto.*

*A Wilson Olaya, nuestro director de proyecto, por sus orientaciones y consejos.*

*A nuestros padres por su apoyo incondicional, el cual nos ayudó para labrar este camino.*

*A todos nuestros profesores de la Escuela de Matemáticas, que nos ofrecieron, todas sus experiencias y enseñanzas.*

*A nuestros amigos y compañeros, con los cuales, vivimos una amena vida universitaria.*

*A Martík y a Chísco, por su paciencia, su compañía y su apoyo, en la realización de la tesis.*

*A Silvia y a Saúl, por todos los momentos vividos y esperando que sean muchos más.*

*A nuestros padres,  
Que con su dedicación y esfuerzo,  
Nos dieron el apoyo para alcanzar,  
Esta valiosa meta.*

## TABLA DE CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
<b>1. PITÁGORAS Y LOS PITÁGORICOS</b> .....	<b>4</b>
<b>1.1 PITÁGORAS DE SAMOS</b> .....	<b>4</b>
<b>1.2 LOS PITAGÓRICOS</b> .....	<b>7</b>
<b>1.2.1 GENERACIONES</b> .....	<b>8</b>
<b>1.2.2 EL ASPECTO MÍSTICO DE LA DOCTRINA</b> .....	<b>8</b>
<b>1.2.3 LA GEOMETRÍA</b> .....	<b>10</b>
<b>1.2.4 LA ARITMÉTICA</b> .....	<b>12</b>
<b>1.2.5 LA MÚSICA</b> .....	<b>16</b>
<b>1.2.6 LA ASTRONOMÍA</b> .....	<b>17</b>
<b>2. EL TEOREMA DE PITÁGORAS</b> .....	<b>19</b>
<b>2.1 ORÍGENES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS</b> .....	<b>19</b>
<b>2.1.1. INDIA</b> .....	<b>19</b>
<b>2.1.2 EGIPTO</b> .....	<b>22</b>
<b>2.1.3. CHINA</b> .....	<b>23</b>
<b>2.1.4 MESOPOTAMIA</b> .....	<b>28</b>
<b>2.2 DEMOSTRACIÓN DE PITÁGORAS</b> .....	<b>31</b>
<b>2.3 DEMOSTRACIÓN DE EUCLIDES</b> .....	<b>32</b>
<b>3. CONSTRUCCIONES DE LAS DIEZ DEMOSTRACIONES VISUALES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS.</b> .....	<b>34</b>
<b>4. ANÁLISIS Y CLASIFICACIÓN</b> .....	<b>49</b>
<b>4.1 SESIÓN PROFESORES</b> .....	<b>49</b>
<b>4.2 SESION ESTUDIANTES</b> .....	<b>54</b>
<b>4.3 COMPARACIÓN ENTRE LAS DOS SESIONES</b> .....	<b>57</b>
<b>CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES</b> .....	<b>59</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	<b>61</b>
<b>ANEXOS</b> .....	<b>63</b>

## RESUMEN

**TÍTULO:** DIEZ DEMOSTRACIONES VISUALES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS.\*

**AUTOR(ES):** SILVIA BIBIANA ARDILA RODRÍGUEZ Y SAÚL FERNANDO BLANCO GARCÍA.\*\*

**PALABRAS CLAVES:** 1. Teorema de Pitágoras. 2. Demostraciones geométricas. 3. Enseñanza de la geometría.

Esta investigación se realizó en la Universidad Industrial de Santander, con profesores pertenecientes al grupo EDUMAT y estudiantes del grupo semillero EULER, adscritos a la escuela de Matemáticas. Con ellos se realizó la presentación en dos sesiones, de las diez demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras, tomadas del libro *Proofs without Words I y II*, las cuales para su construcción se empleó el software CABRI-GEOMETRE-2D.

La pregunta que dio origen a esta investigación es: ¿Cuál de las diez demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras es la adecuada para su enseñanza? Para tratar de dar una respuesta concreta, los autores fijaron el siguiente objetivo: analizar y clasificar las diez demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras para determinar cuál es la demostración más adecuada para su enseñanza y aprendizaje.

Para tal fin, se construyeron las demostraciones usando el software geométrico y se presentaron dichas construcciones a los profesores, preguntándoles cuál es la demostración de su preferencia a la hora de enseñar el concepto e independientemente a los estudiantes preguntándoles cuál es la demostración de su preferencia a la hora de aprender el concepto.

Mediante el análisis de los datos recogidos, el aporte de los autores leídos y la interpretación dada, se realizó un paralelo de las observaciones presentadas en las dos sesiones y se determinó cuál fue la demostración que tuvo mayor y menor preferencia según el objetivo propuesto.

---

\* Trabajo de Grado.

\*\* Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas. Director: Wilson Olaya León, Magister en Ciencias Matemáticas

## ABSTRACT

**TITLE:** TEN VISUAL DEMONSTRATIONS OF THE PYTHAGOREAN THEOREM.\*

**AUTHORS:** SILVIA BIBIANA ARDILA RODRÍGUEZ AND SAÚL FERNANDO BLANCO GARCÍA.\*\*

**KEYWORDS:** PYTHAGOREAN THEOREM. GEOMETRIC PROOFS. TEACHING GEOMETRY.

This research was made at the Universidad Industrial de Santander, with teachers that belong to the group EDUMAT and students of the seedbed EULER, assigned to the school of Mathematics. With them, the presentation was made in two sessions, of the ten visual demonstrations of the Pythagorean Theorem, based in the book Proofs Without Words I y II, for their construction was used CABRI-GEOMETRE-2D software.

The question that gave rise to this research was: which one of the ten visual demonstrations of the Pythagorean Theorem is the appropriate for their teaching? To try to give a concrete answer, the authors set the following goal: analyze and classify the ten visual demonstrations of the Pythagorean Theorem to determine which one is the most appropriate demonstration for their teaching and learning.

For this purpose, the demonstrations were made using the geometric software and subsequent presentation of the constructions to the professors, asking what is the demonstration of his preference when he has to teach the concept and whether to the students asking what is the demonstration of their preference when have to learn the concept.

Analyzing the data collected, the contribution of the read authors and the given interpretation, a parallel of the given observation in the two sessions was perform and found out what was the demonstration that had the most and least preference by the proposed goal.

---

\* Grade Work

\*\* Faculty of Science, Mathematics School. Director: Wilson Olaya León, Magister in Mathematical Sciences.

## **INTRODUCCIÓN**

La demostración en matemáticas, juega un papel fundamental en la validación de resultados, ya que con esta herramienta se construyen razonamientos lógicos que le dan legitimidad a los trabajos realizados. Por lo tanto, estas hacen parte del que hacer matemático y es el argumento para que cualquier persona que la estudia o la enseña convenza a los demás de la veracidad de sus hallazgos. Este hecho se ve reflejado con la demostración del Teorema de Pitágoras.

Desde hace muchos años, Babilonios, Chinos, Indios, Egipcios y diferentes culturas, han trabajado en la resolución de problemas que se presentan en la agricultura y en la construcción, con ellos han realizado grandes aportes a las matemáticas en sus respectivas ramas como la geometría, el álgebra y la trigonometría.

Un hallazgo importante en la geometría antigua ha sido el Teorema de Pitágoras, desde su generalización y probable demostración que se le atribuye a Pitágoras de Samos, ha tenido una gran relevancia e importancia, tanto que hoy en día existen muchos trabajos (demostraciones) alusivos a este gran resultado y utilizan variadas herramientas matemáticas, revalidando aún más su significado.

Algunos de estos trabajos, realizados por grandes matemáticos como, Euclides, Pappus de Alejandría, Bhaskara, Henry Dudeney, entre otros, han brindado una nueva forma de entender el teorema, sin perder su esencia.

En particular, doce pruebas visuales del teorema aparecen en los libros *Proofs Withuot Words I y II*. ([1], [2]), de las cuales se han seleccionado diez, para realizar la investigación.

Se planteó la siguiente pregunta **¿Cuál de las diez demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras es la más adecuada para su enseñanza?** Lo que llevó a

trazar el siguiente objetivo: Analizar y clasificar diez demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras para determinar cuál es la demostración más adecuada en la enseñanza y el aprendizaje del mismo.

Para dar respuesta a esta pregunta teniendo en cuenta el objetivo propuesto, se realizó la construcción de cada una de ellas utilizando el software Cabri Geometre<sup>1</sup> 2D, para su exposición en dos sesiones.

La primera se desarrolló con un grupo de docentes de matemáticas, de básica y media pertenecientes al grupo EDUMAT<sup>2</sup> y la segunda, con un grupo de estudiantes del semillero matemático Euler<sup>3</sup>; adscritos a la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (UIS). En cada sesión ellos podían interactuar con las demostraciones, aportando sus respectivas observaciones acerca de cada construcción y luego respondían una guía, en la cual, podían clasificarlas según el orden de su preferencia a la hora de enseñar el concepto (profesores), y a la hora de adquirirlo (estudiantes).

Con estas observaciones, se analizaron y clasificaron una a una las diez demostraciones según el orden de preferencia de cada grupo, confrontándolas para llegar al objetivo planteado y sacar las conclusiones.

A continuación, se comentará brevemente cómo está estructurado el trabajo escrito.

Comenzando con el primer capítulo donde aparece la vida de Pitágoras, y la historia de la escuela pitagórica con sus grandes avances en las diferentes áreas del conocimiento.

---

<sup>1</sup> Cabri Geometre II Plus. Cuaderno de notas interactivo de geometría. Jean-Marie Laborde y Franck Bellemain. Versión 1.2.5 TI – MS Windows

<sup>2</sup> Grupo de Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander (UIS), reconocido por Colciencias.

<sup>3</sup> Estudiantes de los grados 10 y 11 de diferentes instituciones educativas de Bucaramanga y su área metropolitana.

Luego en el segundo capítulo, se exploran los orígenes del Teorema de Pitágoras, algunos datos y enigmas históricos, su enunciado, la demostración resuelta por Pitágoras de Samos, y algunas demostraciones realizadas por diferentes matemáticos.

Continuando en el tercer capítulo, se encuentran las construcciones de cada una de las demostraciones paso a paso, junto con su explicación, y en algunas de ellas se ha incluido su justificación algebraica para dar mayor claridad sobre el teorema.

En seguida, en el cuarto capítulo se efectuó el análisis y la clasificación de las demostraciones según el orden de preferencia, utilizando las diferentes observaciones de los estudiantes y profesores, lo cual es provechoso para responder la pregunta de investigación.

Por último se presentan las conclusiones y observaciones, donde se encuentran las reflexiones y el cumplimiento de los objetivos, así como también se resaltan las anécdotas sobresalientes en el desarrollo de la investigación.

# 1. PITÁGORAS Y LOS PITÁGORICOS

## 1.1 PITÁGORAS DE SAMOS



Pitágoras ha sido una de las figuras más importantes en la historia de las matemáticas y el forjador principal de la gran escuela de filosofía y matemáticas, que puede considerarse como la madre de la escuela platónica y como la antecesora de toda la llamada filosofía idealista. Sobre Pitágoras es difícil decir con certeza cuales datos de su vida son verídicos, pues diferentes biógrafos como, Jámblico, (S.IV a.C.), Heródoto (S.IV a.C.), Diógenes Laercio (S.III d.C.) y Porfirio (S.III d.C.), muestran varias versiones; lo que se presentará a continuación es un resumen de dichas versiones.

Pitágoras nace en la isla Egea de Samos, aproximadamente entre 582 y 569 a.C. Su padre fue Mnesarchus y su madre Pithais, quien era nativa de Samos (Ver [3]). Mnesarchus fue un mercader proveniente de Tiro. Dice una historia que llevó granos desconocidos a Samos, y como gratitud fue declarado ciudadano de Samos.

De pequeño Pitágoras viajó mucho con su padre. Hay registros de Pitágoras en la ciudad de Tiro (Líbano), donde aprendió con los hombres ilustrados de Siria. También habría visitado Italia en algunas ocasiones.

Tres filósofos se encontraban entre sus maestros. Uno fue Pherekydes de Syros (S.VI a.C.). Los otros dos filósofos fueron Thales (S.V a.C.) y su discípulo Anaximandro (S.V a.C.), ambos vivían en Mileto, quienes lo encaminaron en las ideas matemáticas. Pitágoras conoce a Thales en Mileto entre los 18 y 20 años. En esta época, Thales era un anciano y contribuyó al interés de Pitágoras por la

matemática y la astronomía, luego le aconseja viajar a Egipto para profundizar estos temas. Anaximandro le dio clases de Geometría y Cosmología logrando que muchas de sus ideas influyeran en él.

Alrededor del 535 a.C Pitágoras fue a Egipto. Esto sucedió unos años después de que el tirano Polícrates (S.V a.C.), se hiciera con el control de la ciudad de Samos. Hay algunas pruebas que sugieren que Pitágoras y Polícrates fueron amigos al principio y se dice que Pitágoras fue a Egipto con una carta de presentación escrita por Polícrates. De hecho Polícrates tenía una alianza con Egipto y que por tanto había fuertes lazos entre Samos y Egipto por aquella época. Las historias de la etapa de Pitágoras en Egipto sugieren que visitó muchos templos y tomó parte en muchos debates con los sacerdotes. Según Porfirio, Pitágoras fue rechazado de todos los templos excepto de Diospolis Parva<sup>4</sup>, en el que fue aceptado al sacerdocio tras completar los ritos necesarios para su admisión.

No es difícil relacionar muchas de las creencias de Pitágoras, aquellas que más adelante impondría en la sociedad que estableció en Italia, con las costumbres que encontró en Egipto. Por ejemplo el secreto de los sacerdotes egipcios, su negativa a comer alubias (frijoles), incluso vestir ropas hechas de piel de animal y su afán por la pureza, eran todas costumbres que Pitágoras adoptaría más adelante. Porfirio dice que aprendió geometría de los egipcios pero es probable que ya estuviera familiarizado con la geometría, ciertamente tras las enseñanzas de Tales y Anaximandro.

En el 525 a.C. Cambises II (S.V a.C.) rey de Persia, invadió Egipto. Polícrates abandonó su alianza con Egipto y envió 40 barcos para unirse a la flota persa contra los egipcios. Después de que Cambises ganó la batalla de Pelusio en el Nilo y de conquistar Heliópolis y Menfis, la resistencia egipcia se desplomó. Pitágoras fue hecho prisionero y llevado a Babilonia.

---

<sup>4</sup> Templo de veneración de la diosa Neftis en Egipto.

En el año 520 Pitágoras vuelve a Samos, se desconoce cómo obtuvo su liberación de Babilonia, después de que Polícrates fue asesinado en 522 a.C. y en el verano del mismo año murió Cambises II. La muerte de estos dos tiranos debe haber sido la razón por la cual Pitágoras regresó y Darío de Persia (S.V a.C.) tomó el control de Samos después de la muerte de Polícrates.

Pitágoras se trasladó a la polis (ciudad-estado) Crotona, colonia griega en el sur de Italia, alrededor del 518 a.C. estas colonias gozaban de una prosperidad, sobresaliendo entre ellas Síbari, famosa en el mundo griego por sus riquezas y su vida lujosa. Crotona era su principal rival y vecina. Allí llegó Pitágoras con un sistema de pensamiento más o menos perfilado después de su larga experiencia por Oriente y Egipto. La ciudad le pidió que expusiera sus ideas y, según la tradición, Pitágoras dirigió por separado cuatro grandes discursos a los jóvenes, al Senado, a las mujeres y a los niños. Estos cuatro discursos están llenos de recomendaciones morales de gran perfección, derivadas fundamentalmente de la necesidad de ajustar la conducta humana, a las reglas de la armonía y justicia que se derivan de la naturaleza misma de las cosas e ilustradas con elementos específicos de la mitología de los habitantes de Crotona. Como consecuencia de este primer contacto surgió, al parecer no sólo en Crotona, sino en toda Italia un gran entusiasmo por Pitágoras.

Al volver de sus viajes, Pitágoras buscó un lugar favorable para su escuela, Crotona era un rico puerto marítimo y allí moraban jóvenes que eran de buena estirpe. Él reunió cerca de trescientos, procedentes de nobles y adineradas familias, estableciendo la hermandad pitagórica, que tenía un credo muy estricto y un rígido código de conducta igualitaria e incluía varias mujeres. Una de ellas era Teano (S.V a.C.), con quien Pitágoras se casó. Desde entonces esta sociedad ha servido como modelo para todos los grupos de pensadores y científicos, incluso las llamadas sociedades secretas en Europa y América.

Se cree que la muerte de Pitágoras fue causada por una revuelta popular, debido a que el pueblo de Crotona, pensaba que las tierras conquistadas por una guerra con un pueblo vecino, se iban a entregar a los pitagóricos. Los amotinados, rodearon la escuela, taparon las salidas y le prendieron fuego. Muchos de sus discípulos murieron, pero no se sabe con seguridad si Pitágoras murió allí o si murió de anciano. Los sobrevivientes huyeron y esto sirvió para divulgar sus conocimientos. Las teorías pitagóricas sólo se conocieron a través de sus discípulos.

A Pitágoras se le atribuye la invención de las palabras filosofía (amor por la sabiduría) y matemática (lo que se aprende). Inventó estas palabras para describir sus actividades intelectuales. Se le considera el primer matemático puro, aunque no haya quedado ninguno de sus escritos (Ver [3]). Los aportes más significativos de Pitágoras fueron sus estudios sobre el sonido, los cuales han permanecido inalterables hasta nuestros días. Su pensamiento sobre los números y sus relaciones lo llevó a la investigación sobre sus propiedades, y finalmente a su fabuloso teorema del cuadrado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, del cual hablaremos con detalle más adelante.

## 1.2 LOS PITAGÓRICOS

La secta pitagórica surgió, se desarrolló y se expandió, como modo de vida religioso. Su estructura intelectual consistió en la visión del universo a manera de un cosmos, lo contrario al caos; es decir, un todo ordenado y organizado en una especie de armonía. El enfoque religioso conducía hacia la búsqueda y contemplación de la armonía intelectual como camino y método de elevación espiritual.

Las invasiones persas habían aproximado hacia los griegos las milenarias culturas orientales con su espíritu religioso y su actitud mística y contemplativa. La cultura oriental había realizado grandes conquistas de la razón como los desarrollos

astronómicos y aritméticos. Quizás Pitágoras acertó unificando ambas tendencias para su escuela, que más tarde llegó a ser más que una escuela de pensamiento, una forma de vida.

### 1.2.1 GENERACIONES

En la primitiva comunidad pitagórica existían dos clases de miembros: los matemáticos (*mathematikoi*, conocedores) es decir, los iniciados a quienes Pitágoras comunicaba los conocimientos científicos a su disposición, y los acusmáticos (*akousmatikoi*, oidores) que participaban de los conocimientos y creencias, de los principios morales, ritos y disposiciones específicas de la hermandad.

Se encuentran cinco generaciones de pitagóricos entre los años 530-360 a. C.

1ª (530-500): Pitágoras. 2ª (520-480): Hipaso de Metaponto, Alcmeon.

3ª (480-430): Matemáticos anónimos. 4ª (440-400): Filolao, Teodoro.

5ª (400-360): Arquitas de Tarento.

La comunidad pitagórica, llegó a tener una complicada organización interna y fundamentada en un juramento pitagórico, que vendría a expresar la iluminación basada en las proporciones numéricas de la Tetraktys. (Ver [4])

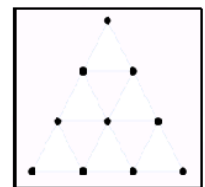
### 1.2.2 EL ASPECTO MÍSTICO DE LA DOCTRINA

- ✓ La transmigración de las almas: Pitágoras admitió la antigua idea del poder del alma y que su fuerza perdura tras la muerte. Lo que permanece fuera del cuerpo no es un resto miserable, sino lo verdaderamente vivo. La vida que sigue a la presente no es un pálido reflejo, sino la verdadera y más intensa vida. La existencia terrenal del hombre es sólo una de sus vidas posibles y una de las más pequeñas. Pitágoras mantenía firme que el alma es lo más alto y que es prisionera del cuerpo. El alma puede tomar los

diferentes cuerpos de todas las cosas que hay en el cosmos. Además, los pitagóricos creen en el parentesco del alma con la sustancia de los astros.

- ✓ Parentesco de todos los seres vivos: El alma tiene en su mano el decidir la clase de cuerpo en el que va a introducirse, y que puede ser el cuerpo de una bestia o de un Dios. Por lo tanto, las almas podían reencarnarse en forma de seres vivos distintos del hombre, lo que a su vez, sugiere el parentesco de todos los seres vivos. (Ver [5])
- ✓ Reglas de abstinencia y otras prohibiciones: Es tarea del hombre comportarse de tal modo que, al abandonar la vida terrena, pueda esperar volver a nacer en una forma más elevada. De este modo el concepto de pureza es una pieza maestra de la vida pitagórica. Al parecer, Pitágoras prohibió comer carne ya que habían almas que transmigraban a los seres vivos como animales. Como también lo estaría la prohibición de ofrecer sacrificios sangrientos a la divinidad. El vegetarianismo en la antigüedad tiene su origen en el pitagorismo.
- ✓ Su idea de Dios: Pitágoras protestó contra la imagen de los dioses trazada por la mitología, en el comienzo de una época nueva en la religión griega. Enseñó la existencia de un único Dios que mantiene el mundo unido en la justicia. Este Dios no piensa de manera humana ni tiene forma humana. Su cuerpo es una esfera y la divinidad se manifiesta en el movimiento circular del fuego de los astros. (Ver [6])

- ✓ La Tetraktys, el número diez: La Tetraktys consiste en una figura triangular construida por diez puntos colocados en cuatro líneas: uno, dos, tres, y cuatro puntos en cada fila. Símbolo místico que representa el número diez



Esta figura demuestra que el 10 resulta de sumar  $1+2+3+4$ , o sea, que es la suma de los cuatro primeros números naturales. La tetraktys es el número perfecto y la clave de la doctrina. Es posible que jugase también un papel

en los distintos grados de la metamorfosis del alma. El diez tiene el sentido de la totalidad, de final, de retorno a la unidad finalizando el ciclo de los nueve primeros números. Para los pitagóricos es la santa tetraktys, el más sagrado de todos los números por simbolizar a la creación universal, fuente y raíz de la eterna naturaleza; y si todo deriva de ella, todo vuelve a ella.

La Santa Tetraktys pitagórica (Ver [6]):

1. La Unidad: Lo Divino, origen de todas las cosas. El ser inmanifestado.
2. La Díada: Desdoblamiento del punto, origen de la pareja masculino-femenino. Dualismo interno de todos los seres.
3. La Tríada: Los tres niveles del mundo: celeste, terrestre, infernal, y todas las trinitades.
4. El Cuaternario: Los cuatro elementos, tierra, aire, agua y fuego, con ellos la multiplicidad del universo material.



A continuación los puntos más importantes de las enseñanzas de los pitagóricos que son las cuatro ciencias matemáticas:

### 1.2.3 LA GEOMETRÍA

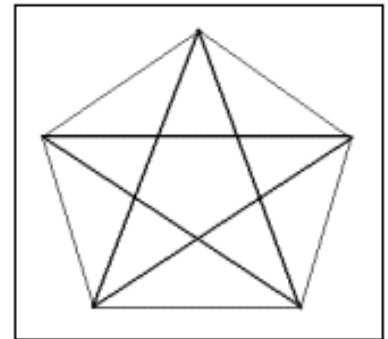
El origen del término geometría es una descripción precisa del trabajo de los primeros geómetras, que se preocupaban de la medida, de los tamaños, de los campos o el trazado de ángulos rectos para edificios. Este tipo de geometría empírica, que floreció en el antiguo Egipto, Sumeria y Babilonia, fue refinado y sistematizado por los griegos.

La principal fuente de considerable importancia es la obra cumbre de Euclides llamada *Los Elementos*, escrita hacia el año 300 a. C. y consta de 13 libros, que

por varios registros y testimonios históricos, los libros I, II, III, IV y XIII, se basan o eran ya conocidos por el propio Pitágoras y la sociedad pitagórica.

Los pitagóricos sabían cómo inscribir en un círculo un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono, un hexágono y un pentadecágono; y casi la totalidad de los libros II y IV fueron atribuidos a los pitagóricos. Además, la construcción más interesante es la que se refiere al pentágono regular, esta construcción se basa de modo decisivo en la observación de que cada diagonal corta a otra en dos segmentos en proporción aurea, o bien lo que Euclides llama "media y extrema razón". El pentágono regular fue objeto de un amplio estudio por parte de los pitagóricos.

La estrella formada por las diagonales, (el pentagrama), era su símbolo de reconocimiento y deseo de salud. Es natural pensar en un vivo interés por construir tal figura y por entenderla racionalmente a fondo. La construcción de la "media y extrema razón" que aparece en el libro II de *Los Elementos*, los pitagóricos antiguos la dominaban totalmente.



Proclo (S.V d.C.) declara que la intención de Euclides, "al introducir el pentadecágono en este contexto, era a causa de las necesidades de los astrónomos".

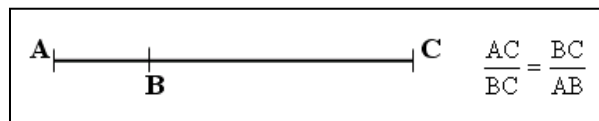
Además los pitagóricos supieron resolver con gran exactitud la inclinación de la elíptica (es decir, la línea del cielo en la que se producían los eclipses, que coincide con la línea del aparente recorrido anual del Sol). Su ángulo es  $360^\circ/15$  y de esta manera coincide con el ángulo correspondiente al lado del pentadecágono desde su centro.

Del libro relativo a cuerdas y tangentes en el círculo y de ángulos en el círculo, una gran parte era conocida de los pitagóricos antiguos. Y algunas proposiciones sobre la igualdad de los ángulos determinados por paralelas, era conocida de los

pitagóricos, que demostraron mediante ella que la suma de los ángulos internos de un triángulo mide dos rectos.

Para acabar con los puntos más sobresalientes de la geometría de los pitagóricos se puede decir que ellos conocían los cuerpos regulares, el cubo, el tetraedro y el dodecaedro. Al parecer el octaedro y el icosaedro parecen haber sido estudiados por vez primera por Teeteto, en la primera mitad del siglo IV a.C.

Otro aporte importante, además del Teorema de Pitágoras que trataremos en el capítulo 2, es la media y extrema razón o proporción áurea, mencionada anteriormente, que nos señala que es la división armónica de una recta en media y extrema razón. Es decir, que el segmento menor es al segmento mayor, como éste es a la totalidad de la recta. De esta manera se establece una relación de tamaños con la misma proporcionalidad entre el todo dividido en mayor y menor.



Esta proporción o forma de seleccionar proporcionalmente una línea se llama proporción áurea.

#### 1.2.4 LA ARITMÉTICA

El aporte de los pitagóricos a la aritmética es bastante grande, ya que pone las bases de nuestros cálculos. Con los números realizan diversas clasificaciones, y los nombraron de acuerdo a las propiedades que varios de ellos poseen.

La aritmética de los griegos, se encuentra resumida en los libros VII, VIII y IX de *Los Elementos*. En particular, el libro VII debe proceder de los matemáticos pitagóricos anónimos anteriores a Arquitas (S.IV a.C.) y el VIII a los de la escuela de Arquitas. Algunas porciones del libro IX, como la doctrina del "par e impar", es anterior incluso a los pitagóricos anónimos y posiblemente procede del tiempo de

Hipaso de Metaponto (S.VI a.C.). Todo esto señala, que gran parte de la aritmética de *Los Elementos* es de procedencia pitagórica.

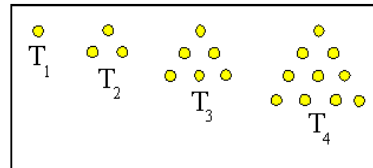
Veamos los nombres y definiciones de algunos números:

- ✓ Los números pares e impares: Se subdividen en cuatro clases.
  - *Parmente par:* Si su mitad es par, y son de la forma  $2^n[2n+1]$  con  $n>1$ .
  - *Imparmente par:* Si su mitad es impar, y son de la forma  $2 [2n+1]$  con  $n>1$ .
  - *Parmente impar:* Si al ser dividido por un número impar da uno par.
  - *Imparmente impar:* Cuando no tiene más que divisores impares.
  
- ✓ Números divisores y múltiplos.
- ✓ Números primos y compuestos.
- ✓ Números lineales, planos y sólidos:
  - *Lineal:* Es el que no tiene divisores.
  - *Plano:* Es el producto de dos números, que son los lados de la figura plana de dos lados diferentes.
  - *Sólidos:* Es el producto de tres números que son los lados del sólido.
  - *Cuadrados:* Es el producto de un número por sí mismo.
  - *Cúbico:* Es el producto de un número por sí mismo dos veces.
  
- ✓ Números perfectos, deficientes, abundantes y números amigos:
  - *Perfecto:* Es un número que es igual a la suma de sus divisores propios.
  - *Deficiente:* Es un número que es menor que la suma de sus divisores propios.
  - *Abundantes:* Es un número que es mayor que la suma de sus divisores propios.
  - *Números amigos:* Son dos números en los cuales cada uno es igual a la suma de los divisores del otro.

✓ Números figurados: Son una serie de números generados contando el número de puntos necesarios para construir los miembros sucesivos de un polígono específico.

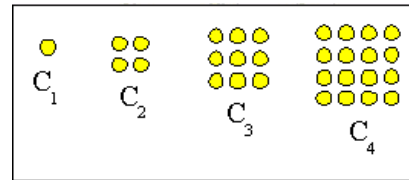
- *Números triangulares*: Pueden representarse geoméricamente como triángulos y son de la siguiente forma,

$$\frac{n(n+1)}{2} \text{ Para } n \text{ natural.}$$



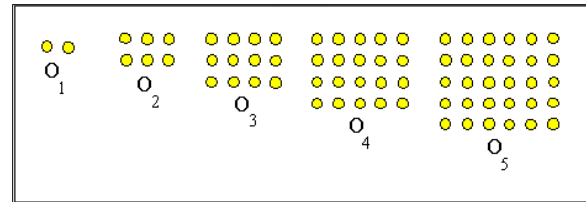
- *Números cuadrados*:

$$\text{De la forma } n^2$$



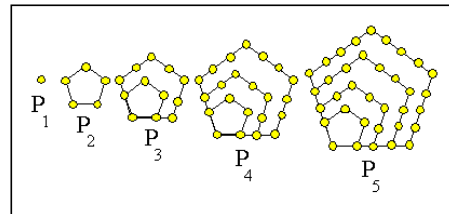
- *Números oblongos*: Es el producto de dos números consecutivos.

$$n(n+1) \text{ Para } n \text{ natural.}$$



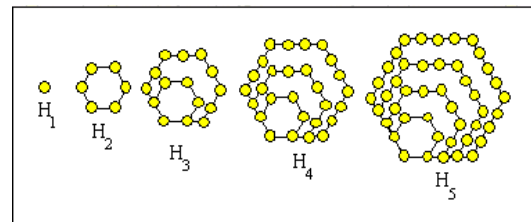
- *Números pentagonales*:

$$\frac{n(3n-1)}{2} \text{ Para } n \text{ natural.}$$



- *Números hexagonales, etc.:*

$$\frac{n(4n-2)}{2} = 2n^2 - n, \text{ Para } n \text{ natural.}$$



En general de  $k$  – lados la fórmula adecuada es  $\frac{(n(2 + (n + 1)(k - 2)))}{2}$

- *Los números irracionales:* El problema de los números irracionales radicó en el hallazgo de magnitudes que no podían ser expresadas en términos de otras, a las que llamaron inconmensurables, es decir, imposibles de medir. Al parecer estos números tuvieron lugar en el triángulo rectángulo isósceles; como un ejemplo, con catetos iguales a 1, el cuadrado de la hipotenusa debe ser igual a 2, ya que  $1^2+1^2=2$ , y el valor de dicha hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de 2, mejor escrito como  $(\sqrt{2})$ , y por más que los griegos buscaron, no existe un número entero, ni fraccionario que multiplicado por sí mismo de cómo resultado el número 2. El número  $\sqrt{2}$  es inconmensurable.

Sin embargo, la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles es la mitad de un cuadrado, el cual es una de las figuras geométricas más simples y que su diagonal no es conmensurable con el lado. Lo mismo sucede entre la diagonal y el lado del pentágono. Algunos autores sugieren que los pitagóricos llegaron a la noción de inconmensurabilidad a través de esto.

La creencia de que los números podían medirlo todo, era una ilusión. Así quedaba eliminada de la geometría la posibilidad de medir siempre con exactitud. El descubrimiento de la inconmensurabilidad marca un hito en la historia de la geometría, porque no es algo empírico, sino puramente teórico.

El propósito de los pitagóricos era dar a entender, a todos, las propiedades de los números. Por esto, en la obra de Nicómaco de Gerasa (S.II. d.C.), *Introducción a la Aritmética*<sup>5</sup>, la cual se extendió por su gran número de manuscritos que de ella se conservan. Aquí aparece la teoría figurativa de los números como son los números triangulares, cuadrados, rectangulares, pentagonales, etc., además de las fabulosas y místicas propiedades de ciertos números en concreto.

---

<sup>5</sup> Primer texto en el que la Aritmética se separa de la Geometría.

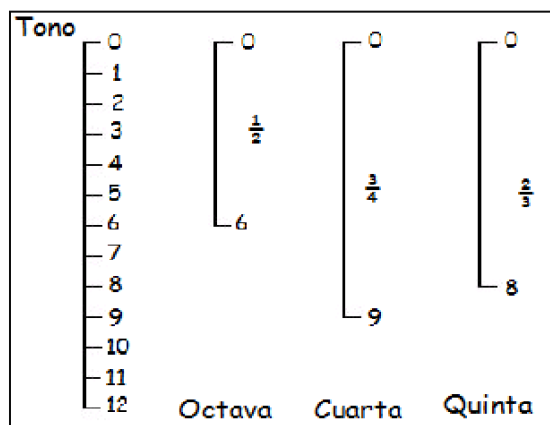
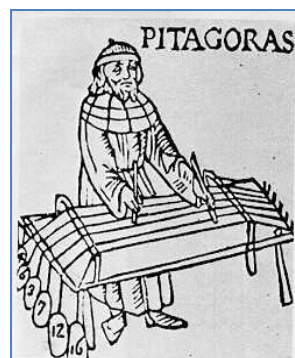
## 1.2.5 LA MÚSICA

El temple de los pitagóricos radica en la armonía. La música era todo un procedimiento de elevación y purificación del alma, y a su vez, objeto de contemplación intelectual que revelaba sus congruencias expresables mediante relaciones numéricas; la gran armonía del cosmos. Uno de los rasgos más importantes de los pitagóricos es el análisis científico de los sonidos armónicos remontándose al mismo Pitágoras.

Diferentes versiones especulan sobre el modo concreto de cómo Pitágoras descubrió las relaciones numéricas entre los sonidos consonantes, los cuales su producción simultánea crea una sensación agradable en nuestro oído:

El tono. La octava. La quinta. La cuarta

Unas fuentes, hablan sobre la observación de Pitágoras de los distintos sonidos producidos en el yunque del herrero, causados por martillos de diferentes pesos. Un martillo cuyo peso<sup>6</sup> era el total de 12 producía el tono, con peso 6 producía la octava, con peso 8 la quinta y otro de peso 9 la cuarta. Se dice que Pitágoras volvió a casa, colgó tales pesos de cuatro cuerdas iguales y observó que se producían los sonidos correspondientes.



Otros como Diógenes Laercio (S.III d.C.) que propone a Pitágoras mismo como inventor del monocorde, no un instrumento musical, sino más bien un aparato científico para verificar la teoría musical utilizada por los pitagóricos. El experimento más verosímil con el que Pitágoras comprobó y cuantificó su

<sup>6</sup> Se desconoce la unidad de medida para pesos.

intuición genial de la conexión de la armonía musical con los números. Así Pitágoras tensó una cuerda musical que producía un sonido que tomó como fundamental, “el tono”, haciendo señales en la cuerda, que la dividían en doce partes iguales.

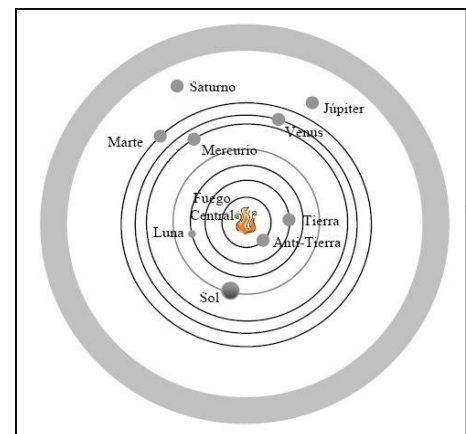
Las fracciones  $1/2$ ,  $3/4$ ,  $2/3$  corresponden a la octava, la cuarta y la quinta. Los sonidos producidos al pisar en otros puntos resultaban discordes o al menos no tan acordes como los anteriores. Los números 1, 2, 3, 4, de la Tetraktys, determinaban con sus proporciones relativas los sonidos más consonantes.

La frecuencia del sonido producido por una cuerda vibrante, no está en proporción con la tensión, sino con la raíz cuadrada de la tensión. Los números 12, 9, 8 y 6, constituyeron así mismo en el pitagorismo posterior, otra cuaterna muy interesante por sus propiedades aritméticas.

### 1.2.6 LA ASTRONOMÍA

La implicación cosmológica que tiene el número diez es realmente relevante en su sistema acerca de la configuración del universo, al ser la vena del primer sistema astronómico no geocéntrico. No es exactamente una anticipación de la teoría heliocéntrica, pero algunos estudiosos de la historia de la cosmología, lo consideran de rango superior en importancia a la identificación del fuego central con el Sol.

Los pitagóricos declararon que los cuerpos que se mueven en torno de los cielos son diez, pero al ser visibles solamente nueve, crean uno más al que llaman la anti-tierra, situada en la órbita mas interior para su equilibrio con la Tierra. Dicen que en el centro se encuentra el fuego, núcleo incandescente y que la Tierra es uno de los astros que, al moverse circularmente en



torno al centro, da lugar al día y a la noche.

Ocho cuerpos celestes: la Tierra, la Luna, el Sol y los cinco planetas conocidos (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno), giran en órbitas circulares concéntricas en torno al fuego central. El Sol no era el centro del Universo, ni era el creador de su propio calor, sino que era una especie de cristal reflector que recogía la luz y el calor del fuego central, en torno al cual giraba con un período de un año. Las estrellas fijas permanecían estacionarias, mientras que la Tierra mantenía, durante su movimiento, el mismo hemisferio deshabitado hacia el fuego central de modo que sus habitantes no podían ver jamás ni el fuego central ni la anti-tierra.

La teoría de los pitagóricos es de una gran originalidad. Para Tales y otros filósofos presocráticos como Anaxímenes (S.VI. a.C), Heráclito (S.VI. a.C), Parménides (S.VI. a.C), y Empédocles (S.V. a.C), la Tierra estaba ciertamente en reposo en el centro del Universo esférico y más tarde Eudoxo (S. IV. a.C), y por supuesto Aristóteles (S. IV. a.C) volvieron a situar con firmeza la tierra en el centro, del que no se movería hasta los primeros balbuceos heliocéntricos de Aristarco (S. IV.a.C). Para pensadores como G. Bruno (S. XVI. d.C) el giro de Copérnico (S. V. d.C) no sería una novedad, sino la restauración de la antigua cosmología pitagórica. Así pues, como en otros muchos aspectos del pensamiento pitagórico, el carácter místico y religioso, no le resta valor científico.

## 2. EL TEOREMA DE PITÁGORAS

Para hacer una referencia histórica del Teorema de Pitágoras, se remite más de dos mil años atrás, ya que se tienen registros de su existencia, en India Egipto, China, Mesopotamia y otras culturas. No es de extrañar que mucho antes existieran, otros pueblos que también lo conocieran. Por lo tanto, el Teorema de Pitágoras en la historia de las matemáticas juega un papel muy importante, por ser uno de los resultados que mayor trascendencia ha tenido, por tal razón no debemos olvidar sus orígenes.

### 2.1 ORÍGENES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

#### 2.1.1. INDIA.

Los conocimientos de las matemáticas en la antigua India, radican en *los vedas*, cuatro textos escritos en Sanscrito, el idioma más antiguo de las familias indoeuropeas; estos textos contienen el fundamento de su tradición religiosa.

Los apéndices de *los Vedas*, son *Los Sulva-Sutras*, en los cuales radican las únicas fuentes de conocimiento sobre las matemáticas. La palabra *Vedá* proviene de un término indoeuropeo que también es el origen de la palabra española “verdad”, además, en sanscrito significa “verdad” o “conocimiento”. Los Vedas siendo textos sagrados, también fueron usados en la construcción de altares para llevar a cabo los ritos y sacrificios, con el fin de alabar a los dioses, estos altares tenían que ser de medidas muy precisas, pues así los sacrificios y los ritos tendrían valor.

Al parecer no existe ninguna prueba de las reglas escritas en *Los Sulva-Sutras*, algunas, tales como el método de construir un cuadrado de área igual a la de un rectángulo dado, son exactas. Otras, como la construcción de un cuadrado de

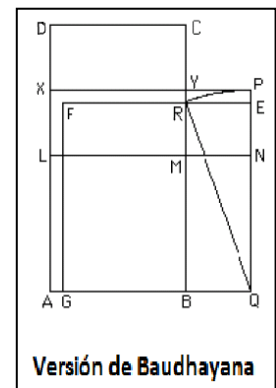
área igual a la de un círculo dado, son aproximaciones. Parece ser que *Los Sulva-Sutras* no hacen distinciones entre los métodos exactos y los aproximados.

Los textos más importantes son *Los Sulva-Sutras de Baudhayana* (800 a.C.) y de *Apastamba* (600 a.C.). Otros de menor importancia son *Los Sulva-Sutras de Manava* (750 a.C.) y de *Katyayana* (200 a.C.).

El autor del libro más antiguo de *Los Sulva-Sutras* fue *Baudhayana*, aunque era un sacerdote interesado en construir altares, y no un matemático, su libro contiene construcciones geométricas para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas, además de una aproximación de  $\pi$ . También incluye un caso especial del Teorema de Pitágoras para la diagonal de un cuadrado.

Ahora veremos la siguiente construcción, que sirve para encontrar un cuadrado igual en área a la de un rectángulo.

- El diagrama de Baudhayana, comienza con el rectángulo ABCD, marcamos L en AD, de tal forma que AL=AB. Completamos el cuadrado ABML y bisecamos LD en X y dividimos el rectángulo LMCD en dos rectángulos iguales con la línea XY. Aquí movemos el rectángulo XYCD a la posición MBQN y completamos el cuadrado AQPX.



El cuadrado justamente construido todavía no es el que queremos. Giramos PQ sobre Q hasta que toque BY en R. Entonces  $QP=QR$ . Dibujamos RE paralela a YP y completamos el cuadrado QEFG. Este sí es el cuadrado igual en área al rectángulo dado ABCD.

No existe una prueba de este resultado dado por Baudhayana, pero si usamos el Teorema de Pitágoras, el resultado es cierto.

$$\begin{aligned} (EQ)^2 &= (QR)^2 - (RE)^2 \\ &= (QP)^2 - (YP)^2 \end{aligned}$$

$$= ABYX + BQNM$$

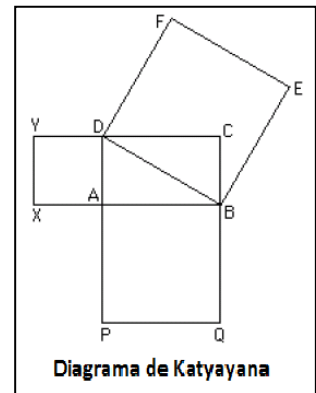
$$= ABCD$$

- Katyayana que también fue un sacerdote y matemático indio, siguiendo las ideas de Baudhayana en el año 200 a.C. presenta el caso general del Teorema de Pitágoras, para la diagonal de cualquier rectángulo.

Él describe su diagrama, como la cuerda que se estira a lo largo de la longitud, de la diagonal de un rectángulo, la cual produce un área igual a la que producen los lados vertical y horizontal.

No solo se describe el uso de cuerdas para medir, sino también para el trazado de líneas perpendiculares, por medio de ternas de cuerdas cuyas longitudes constituyen ternas pitagóricas. Por ejemplo: (5,12,13) y su múltiplo (5/2,6,13/2) múltiplos de (3,4,5) como (12,16,20) o (15,20,25) o (15/2,10,25/2) y otras ternas como (8,15,17), (12,35,37).

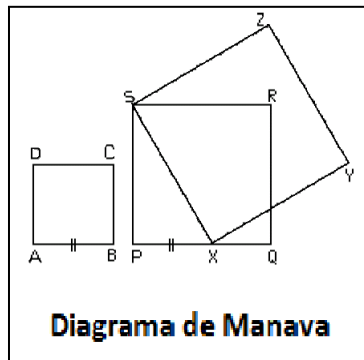
Aunque para este fin se utilizaba sobre todo el triángulo de lados 15, 36, 39 (derivado de 5, 12, 13), llamado el Triángulo indio.



- Manava no fue considerado de los escribanos más importantes en la India, al parecer él no tenía interés en las matemáticas por motivo propio, sino simplemente para usarlas para propósitos religiosos, fue considerado más bien como sacerdote Védico.

Los escritos de Manava contienen construcciones aproximadas de círculos a partir de rectángulos, y de cuadrados a partir de círculos, que permiten obtener también aproximaciones de  $\pi$ .

Manava utiliza el Teorema de Pitágoras, para la realización de un cuadrado de área igual a la suma de dos áreas de dos cuadrados distintos dados.



ABCD y PQRS son dos cuadrados dados. Marcamos un punto X en PQ, tal que PX sea igual a AB. Entonces se construye un cuadrado de lado SX, que tiene igual área que la suma de las áreas de los cuadrados ABCD y PQRS. Esto sigue del Teorema de Pitágoras puesto que  $(SX)^2 = (PX)^2 + (PS)^2$  (Ver [7]).

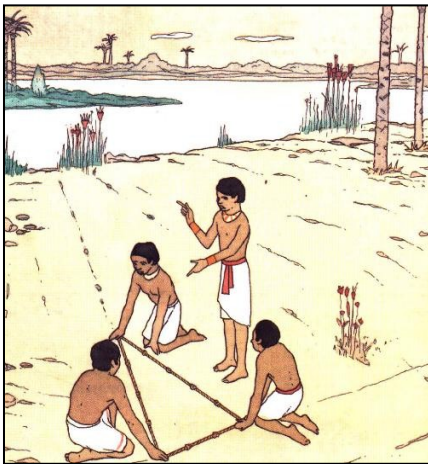
### 2.1.2 EGIPTO

Los registros de las matemáticas egipcias aparecen en los tres textos matemáticos, que datan a partir del año 2000 a.C., con el *Papiro de Moscú* de autor desconocido, que contiene problemas de aritmética, como el cálculo del volumen de una pirámide truncada y del tronco de una pirámide de base cuadrangular.

El principal y más importante, es el *Papiro de Rhind* escrito hacia el año 1650 a.C. que es muy completo en aritmética y geometría. Este proporciona fórmulas para calcular áreas y métodos para la multiplicación y división, en él se trabajaron las fracciones unitarias. También contiene pruebas de otros conocimientos matemáticos incluyendo números compuestos y primos; media aritmética, geométrica y armónica; y la teoría de números perfectos. Además muestra cómo resolver ecuaciones lineales de primer orden, así como series aritméticas y geométricas.

Y finalmente el *Papiro de Berlín* procede del 1300 a.C., muestra que los antiguos egipcios resolvían ecuaciones cuadráticas.

Los conocimientos de los egipcios y babilónicos sobre la geometría, eran una base vital y la precursora para la poderosa geometría griega.



Cada año, tras la inundación del Nilo, los agrimensores debían delimitar nuevamente los campos siendo necesario trazar direcciones perpendiculares y se hacía mediante triángulos rectángulos. De esta manera los egipcios dominaban perfectamente los triángulos, también gracias a los anudadores, que elaboraban nudos igualmente espaciados que servían para medir. Fueron los primeros en observar que uniendo con

forma de triángulo, cuerdas de ciertas longitudes se obtiene un ángulo recto, además de conseguir mediante estos nudos, triángulos rectángulos. Pitágoras recogió toda esta experiencia geométrica para su teorema. Así, los egipcios ya conocían la relación entre la hipotenusa y los catetos en un triángulo rectángulo, pero de forma práctica y no sabían demostrarlo (Ver [8]).

### 2.1.3. CHINA

Los registros sobre las matemáticas encontrados de la civilización China, datan de la *Dinastía Shang* alrededor del año 1200 a.C., fueron marcas en caparazones de tortugas y huesos de ganado, conocidos como *huesos de oráculo*. Luego, hicieron cálculos usando varas pequeñas de bambú para contar, que les permitían usar un sistema posicional para escribir números. Además, utilizaron fracciones decimales y corrientes, y se volvieron expertos en hallar el mínimo común denominador para sumar fracciones heterogéneas. También los chinos utilizaron los números negativos, valiéndose de un conjunto de varas rojas para los positivos y uno de varas negras para los negativos.

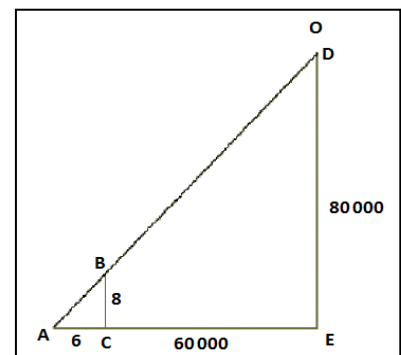
Los libros de matemáticas de la antigua China, eran colecciones de problemas prácticos, primero el problema, luego la respuesta y a veces la regla para encontrar la solución. En la *Dinastía Han*, fueron escritos los primeros libros, es

difícil poner fecha a estos libros ya que el emperador Shih Huang-Ti (*Dinastía Chin*) mandó quemar los libros en el año 213 a.C. Más tarde en la siguiente *Dinastía Han*, tuvieron los matemáticos que volver a escribir todos los libros antiguos.

Los textos de mayor importancia son el *Zhou bi suan jing* mejor conocido como *Chou Pei Suan Ching* y el *Jiu zhang suan shu* escrito como *Chiu chang suan shi*. Mucho después los dos libros, fueron comentados por matemáticos, como Zhao Shang y Liu Hui, este añadió nueve problemas al final de *Chiu chang suan shi*, publicados como *Haidao Suanjing* (220-280 d.C) (The Sea Island Mathematical Manual), en el cual muestra la aplicación de triángulos rectángulos y la demostración del Teorema de Pitágoras, por parte de los chinos.

- El *Zhou bi suan jing* (*Chou Pei Suan Ching*) es un texto sobre astronomía y matemáticas. Pese a que fue escrito en la *Dinastía Han*, sin embargo se piensa que es de la dinastía anterior, la *Zhou*, entre el año 500 y 300 a.C. Este libro está escrito no como un ejemplo de problemas y respuestas, sino como un dialogo entre un maestro que asigna cálculos complejos a un estudiante, sin ninguna indicación de cómo resolver los problemas. El *Zhou bi* utiliza los triángulos rectángulos para explicar astronomía, incluyendo una prueba del Teorema de Pitágoras. Tal y como entendían la astronomía, la altura del sol y de otros cuerpos podía ser encontrada utilizando un *gnomon* o *bi* (poste usado para las observaciones astronómicas y su sombra). Cuando el sol está directamente encima, ese poste no produce sombra, pero si se mueve, la sombra cambia de longitud.

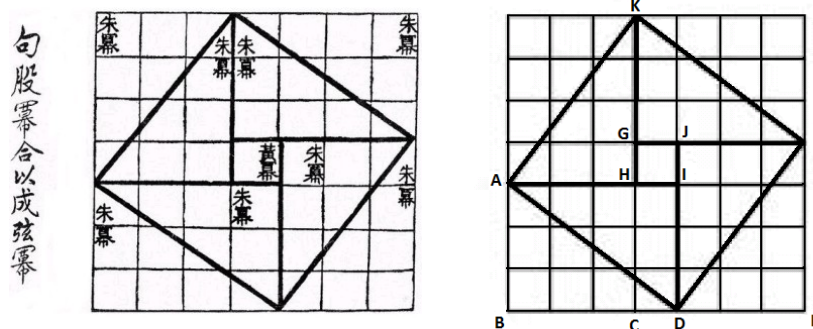
Esto ilustra la idea de dos triángulos rectángulos semejantes. El primer triangulo ACB es el que tiene el poste como altura y a la sombra como base. El segundo triangulo AED, tiene por altura,



la del sol, y como base, la distancia AE. El texto también muestra un conocimiento del Teorema de Pitágoras, para encontrar la hipotenusa (AD).

En el *Zhou bi* hay otros problemas para encontrar el lado desconocido de un triángulo rectángulo. Trataban de encontrar la semicuerda de un círculo, dados el radio y la distancia desde el centro de la cuerda. En el texto original aparecen respuestas aproximadas a estos problemas, sin ninguna explicación o cálculo.

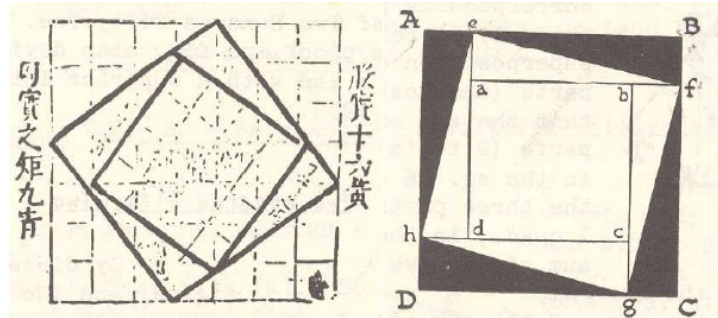
Cuando Zhao Shang, el primer comentarista, escribió sus explicaciones, uso el Teorema de Pitágoras, aunque él dudaba de que todas las longitudes tuvieran una raíz cuadrada. Estos tres problemas demuestran que los chinos reconocieron el Teorema de Pitágoras y fueron capaces de usarlo en aplicaciones prácticas. El *Zhou bi* incluye, al principio, un diagrama muy interesante conocido como *hsuan-thu*, Diagrama de la Hipotenusa.



El hexágono AHGFEB, se compone de dos cuadrados AHCB y CEFG que tienen por lados, los catetos del triángulo rectángulo. Esta área es equivalente al cuadrado ADFK sobre la hipotenusa del triángulo, de donde resulta el Teorema. Esta elegante prueba del Teorema de Pitágoras es dada implícitamente por Zhao.

En el texto original con un lenguaje muy retórico se describe la figura, en términos estrictamente numéricos, diciendo:

"En cada semirectángulo de anchura 3 y longitud 4, la diagonal debe valer 5, y si se resta del cuadrado total de área 49 los cuatro semirectángulos exteriores, que suman área 24, el resto es un cuadrado de área 25".



Este diagrama también aparece en el libro *Zhou bi* y dice lo siguiente:

$$\Delta efB = \frac{1}{2} \text{ rectangulo eafB} = Bf \cdot eB$$

$$\text{Cuadrado ABCD} = \text{Cuadrado efgh} + 4 \text{ veces } \Delta efB = (ef)^2 + 2Bf \cdot eB$$

$$\text{Cuadrado ABCD} = (Bf)^2 + (eB)^2 + 2Bf \cdot eB$$

$$\text{Asi que, } (ef)^2 + 2Bf \cdot eB = (Bf)^2 + (eB)^2 + 2Bf \cdot eB$$

$$\text{De aqui, } (ef)^2 = (Bf)^2 + (eB)^2 .$$

- El *Jiu zhang suan shu* (*Chiu chang suan shi*) del cual se desconoce la fecha y el autor, se compone de nueve secciones destinadas a gran variedad de aplicaciones de las matemáticas. Aquí se hallan áreas de figuras, raíces cuadradas y cúbicas; se suman, restan, multiplican y dividen fracciones, se usa el mínimo común denominador y el máximo común divisor. Además se introducen las progresiones aritméticas y geométricas, así como los sistemas de ecuaciones lineales. El texto contiene 246 problemas de los cuales los 24 que están en la última sección, se refieren a triángulos rectángulos. Todas las soluciones a los problemas se basan de una u otra forma en el Teorema de Pitágoras. El más famoso es el problema del bambú roto, que dice:

"Hay un bambú de diez pies de altura, que se ha roto de tal manera que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base. Se pide calcular a qué altura se ha producido la rotura".

Este problema combina el Teorema de Pitágoras con la resolución de ecuaciones cuadráticas, ya que la solución exige resolver la ecuación:

$$x^2 + 3^2 = (10-x)^2$$

Estas secciones hablan de la base, altura e hipotenusa de los triángulos rectángulos, pero se interesan por la altura y la base en especial, aquí aparecen figuras donde el triángulo está dado en una situación determinada y se debe hallar uno de los lados del triángulo, dadas diferentes longitudes o razones.

Otro problema es la base (*Kou*) y la diferencia entre la hipotenusa (*hsien*) y la altura (*ku*) se dan en el contexto de un junco que está en la mitad de una charca cuadrada. El método dado para encontrar la altura y la hipotenusa, es el de encontrar el cuadrado de la base y desde ahí, restar el cuadrado de la hipotenusa menos la altura. La altura será igual a la diferencia dividida por dos veces la hipotenusa menos la altura. Para encontrar la hipotenusa añadimos (la hipotenusa menos la altura) a la altura.

Usando la notación de  $a$ ,  $b$  y  $c$ , esto dice que  $\frac{(a^2-(c-b)^2)}{2(c-b)} = b$

Entonces: 
$$\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)} = \frac{-c^2+2bc-b^2+a^2}{2c-2b} = \frac{2bc-2b^2}{2c-2b} = b$$

Puesto que  $a^2 + b^2 = c^2$ , y sustituyendo se tiene  $a^2 - c^2 = -b^2$ ,

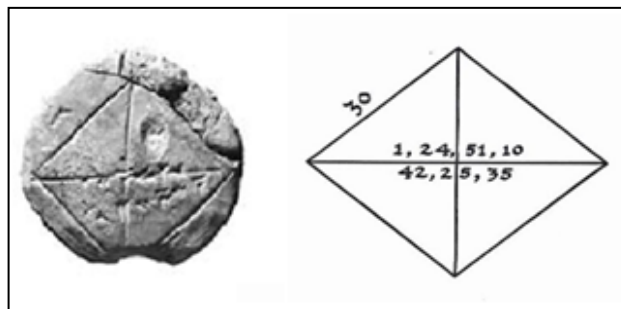
Los chinos entendieron la razón entre los triángulos, y más tarde en los problemas apareció la ecuación cuadrática de la forma  $x^2 + ax = b$ . (Ver [9])

#### 2.1.4 MESOPOTAMIA

Los registros encontrados, sobre las relaciones establecidas entre los lados de un triángulo rectángulo y algunas de sus aplicaciones y cálculos, efectuados en problemas se hallaron escritos en diversas tablillas.

Se han recuperado cerca de medio millón de tablillas de arcilla con textos cuneiformes de las cuales casi trescientas tienen contenido matemático. Entre ellas sobresalen la tablilla *Yale*, la *Plimpton* y finalmente la tablilla *Susa*. Estas tablillas tienen relación con el Teorema de Pitágoras, todas ellas de arcilla provienen del Antiguo Imperio Babilónico, que floreció en Mesopotamia, entre los ríos Tigris y Éufrates, entre 1900 a.C. y 1600 a.C.

- La tablilla de *Yale*: Muestra un cuadrado de lado 30, con sus diagonales y en el centro presenta los números 1, 24, 51, 10 y 42, 25, 35 escritos en el sistema de numeración babilónico de base 60. Ahora esto en el sistema decimal, si la parte entera es 1, convirtiendo 1; 24, 51, 10 en el número decimal da lo siguiente  $1; 24, 51, 10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,41421296 \dots$  que es la  $\sqrt{2}$  y al calcular  $30 \times [1; 24, 51, 10]$  el cual su resultado es el segundo número que aparece en la tablilla: 42;25,35.



La tablilla de *Yale*

- La tablilla *Plimpton*: Es el documento matemático más importante de Babilonia y parece un simple registro de cuentas de operaciones comerciales, pero los intérpretes han querido ver una descripción empírica de números pitagóricos e

incluso de primitivas tablas trigonométricas, y se cree que es solamente un pedazo de una tablilla más grande, el resto de la cual ha sido destruida.

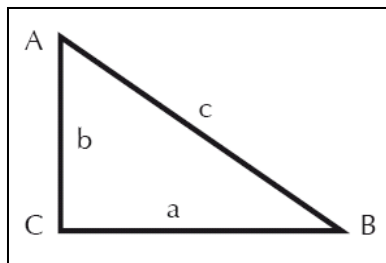


La tablilla *Plimpton*

Esta tablilla consta de columnas de números distribuidos en 15 filas horizontales, en la que plasmaron ternas pitagóricas. La columna del extremo derecho contiene los números del 1 al 15 y representa el número de orden de cada línea de números. Una vez descubierta la ley de formación de la tabla, ha sido posible reconstruir los números que faltaban.

De las diversas investigaciones parece deducirse que los escribas que construyeron la tablilla, comenzaron por tomar dos enteros sexagesimales regulares (enteros cuyos únicos divisores primos son 2, 3 y 5, es decir, los divisores primos de 60)  $u, v$ , con  $u > v$ , y formar con ellos la terna de números:  $a = 2uv$ ,  $b = u^2 - v^2$ ,  $c = u^2 + v^2$ ,

Como se comprueba fácilmente forman una terna pitagórica:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

u	v	a	b	c
12	5	120	119	169
64	27	3456	3367	4825
75	32	4800	4601	6649
125	54	13500	12709	18541
9	4	72	65	97
20	9	360	319	481
54	25	2700	2291	3541
32	15	960	799	1249
25	12	600	481	769
81	40	6480	4961	8161
2	1	60	45	75
48	25	2400	1679	2929
15	8	240	161	289
50	27	2700	1771	3229
9	5	90	56	106

Así se obtiene esta tabla que contiene  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , que corresponden a valores de triángulos rectángulos con catetos  $a$ ,  $b$ , con  $b < a$ .

Por ejemplo, los números que aparecen en la primera fila de la tabla se obtienen a partir de  $u = 12$ ,  $v = 5$ , a los que corresponden los valores  $a = 120$ ,  $b = 119$ ,  $c = 169$ , siendo los valores de  $b$  y  $c$  los que aparecen en segundo y en tercer lugar, respectivamente, en la primera fila de la tablilla *Plimpton*.

(Ver [9])

- *La tablilla de Susa*: Muestra como calcular el radio de un círculo trazado por los vértices de un triángulo isósceles con lados 50, 50 y 60. El problema consiste en encontrar el radio del círculo que pasa por los tres vértices.

Considerando el triángulo  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Sea  $O$  el centro de la circunferencia. Trazamos la perpendicular  $AD$  desde el punto  $A$  hasta el lado  $BC$ . El triángulo así formado  $ABD$  es rectángulo, luego  $(AD)^2 = (AB)^2 - (BD)^2$

Por lo tanto,  $AD=40$ .

Sea  $x$  el radio de la circunferencia,

$AO = OB = x$ , y será,  $OD = 40 - x$ .

Usando el Teorema de Pitágoras en el triángulo  $OBD$ , se tiene que:  $x^2 = (OD)^2 + (DB)^2$

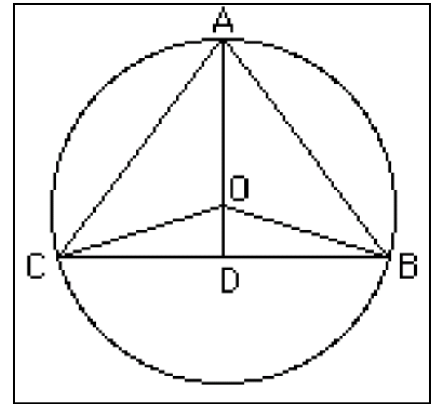
Así  $x^2 = (40 - x)^2 + 30^2$ , luego

$$x^2 = 40^2 - 80x + x^2 + 30^2$$

Por lo tanto  $80x = 2500$ , es decir  $x = 31.25$ ,

que en el sistema sexagesimal,  $x = 31; 15$ .

(Ver [8])



## 2.2 DEMOSTRACIÓN DE PITÁGORAS

Pitágoras de Samos seguramente retomó todos estos trabajos para enunciar su resultado. Algunos pensarán que él pudo plagiarlos para su conveniencia, sin embargo, él se preocupó por dar una perspectiva general que para la época era un avance grandioso y además provechoso, que hasta hoy ha tenido un gran significado tanto científico como social.

Formulando el siguiente enunciado

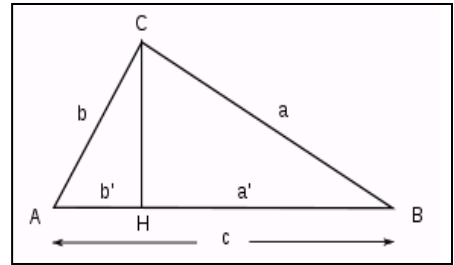
*“El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos”*

Hoy en día se enuncia así:

*“En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”* (Ver [10]):

Pitágoras demostró el teorema mediante semejanza de triángulos, así sus lados homólogos son proporcionales.

Sea el triángulo ABC. El segmento CH es la altura relativa a la hipotenusa, determinando los segmentos  $a'$  y  $b'$ , que son proyecciones de los catetos  $a$  y  $b$ , respectivamente.



Los triángulos rectángulos ABC, AHC y BHC:

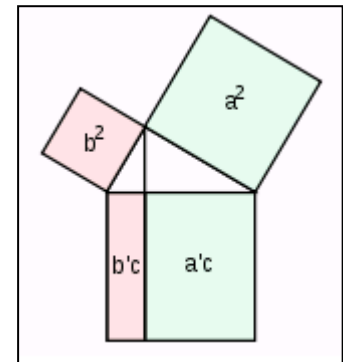
tienen dos bases en común, y los ángulos agudos son iguales, por ser comunes y por tener sus lados perpendiculares. En consecuencia dichos triángulos son semejantes.

- La semejanza entre ABC y AHC tenemos,

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{b} \rightarrow b^2 = b'c$$

- La semejanza entre ABC y BHC tenemos

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{a} \rightarrow a^2 = a'c$$



Los resultados obtenidos  $a^2 + b^2 = a'c + b'c = c(a' + b')$ .

Pero  $(a' + b') = c$

Teniendo como resultado  $a^2 + b^2 = c^2$  (Ver [11])

### 2.3 DEMOSTRACIÓN DE EUCLIDES

Euclides (300 a.C.) fue el primero en demostrar geoméricamente el Teorema de Pitágoras, usando un diagrama que algunos llaman el "molino de viento". Esta demostración se encuentra consignada en *Los Elementos I. 47*, que comienza con la definición de "punto" y termina con el Teorema de Pitágoras enunciado a la inversa:

*“Si la suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo, es igual al cuadrado del tercer lado, se trata de un triángulo recto”* (Ver [10])

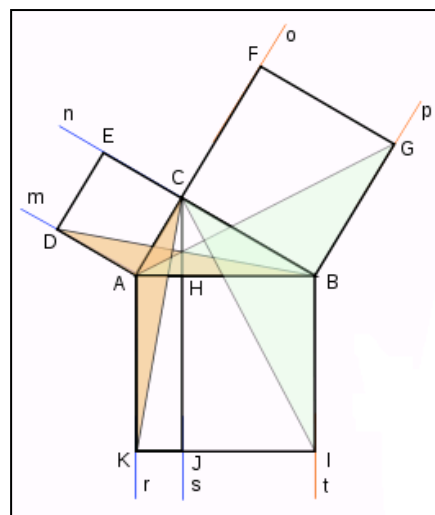
El eje de su demostración es la proposición *I.47 de Los Elementos* (Ver [11]):

*“Si un paralelogramo y un triángulo tienen la misma base, y están comprendidos entre las mismas paralelas, entonces el área del paralelogramo es doble de la del triángulo”*

Se tiene el triángulo ABC, rectángulo en C, y construimos los cuadrados correspondientes a catetos e hipotenusa. La altura CH se prolonga hasta J. Seguidamente se trazan cuatro triángulos, iguales dos a dos:

- Los triángulos ACK y ABD: son iguales, puesto que  $AD=AC$ , y  $AK=AB$ , luego  $BD=CK$ . Por lo tanto sus tres lados son iguales.
- Los triángulos ABG y CBI: análogamente,  $AB=BI$ , y  $BG=BC$ , así que  $AG=CI$ . Sus tres lados son iguales.

Nótese que si se da un giro con centro en A, y sentido positivo, transforma ACK en ABD. Y un giro con centro en B, y sentido también positivo, transforma ABG en CBI.



Entonces se tiene que:

1. Las paralelas r y s comprenden al triángulo ACK y el rectángulo AHJK, los cuales tienen la misma base, AK. Por tanto de acuerdo con la proposición I.47 AHJK tiene doble área que ACK.
2. Las paralelas m y n contienen a ABD y ADEC, cuya base común es AD. Así que el área de ADEC es doble de la de ABD.

Pero siendo  $ACK=ABD$ , resulta que el rectángulo AHJK y el cuadrado ADEC tienen áreas equivalentes. Haciendo razonamientos similares con los triángulos ABG y CBI, respecto al cuadrado BCFG y al rectángulo HBIJ respectivamente, se concluye que éstos últimos tienen áreas asimismo iguales. A partir de aquí, es inmediato que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

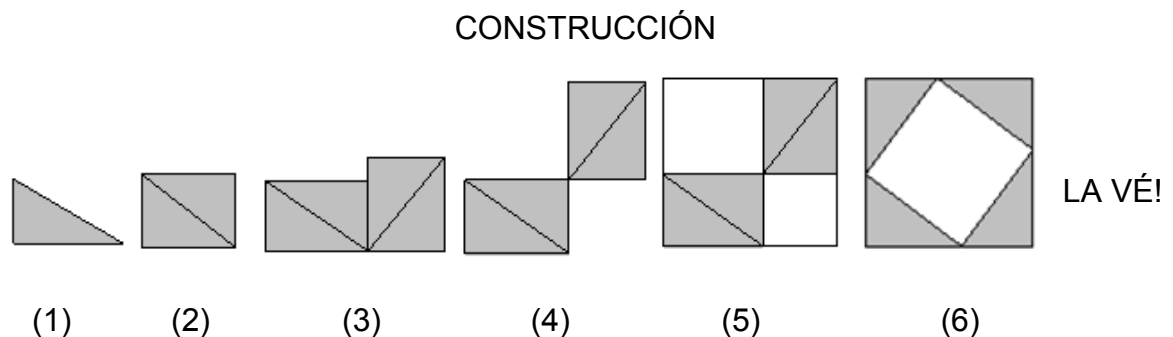
### 3. CONSTRUCCIONES DE LAS DIEZ DEMOSTRACIONES VISUALES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS.

Las siguientes son las construcciones (paso a paso), de las diez demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras, tomadas de los libros *Proofs without Words I y II*. (Ver [4] y [5]). Para su construcción se utilizó el software Cabri Geometre 2D. A continuación se encontraran los pasos realizados para la construcción de la demostración, seguido de la explicación, y la respectiva justificación algebraica, para algunas de ellas.

Al final de cada demostración se encuentra la imagen donde se recrea la presentación expuesta con Cabri Geometre 2D.

#### DEMOSTRACIÓN 1.

Esta demostración fue tomada del libro Chou Pei Suan Ching que data del año 200 a.C. Esta obra consta de temas geométricos que realizaron los chinos acerca de problemas de la agrimensura.



- (1) Para la construcción comienza con un triángulo rectángulo.
- (2) Luego refléjalo con respecto a su hipotenusa.
- (3) Ahora, rota este rectángulo 90 grados a la derecha.
- (4) Traslada este rectángulo hacía arriba.
- (5) Construye los cuadrados que se forman.
- (6) Finalmente traslada los triángulos rectángulos.

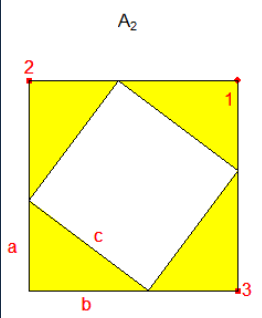
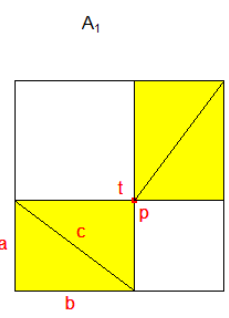
**Explicación:** En el paso (5) nótese que después de reflejar, rotar y trasladar los triángulos rectángulos, se construyen dos cuadrados (blancos) de lados igual a los catetos del triángulo rectángulo inicial. Ahora, después de trasladar los triángulos rectángulos del paso (5), se forma en el paso (6) un cuadrado (blanco) de lado igual a la hipotenusa del triángulo inicial. Por lo tanto, el área de este cuadrado blanco en el paso (6), va ser la suma de los cuadrados blancos del paso (5). Es decir, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

**Justificación Algebraica:** Sean  $a$  y  $b$  las dimensiones de los catetos del triángulo rectángulo inicial (menor y mayor respectivamente) y  $c$  su hipotenusa. Comparando las áreas  $A_1$  y  $A_2$  que conforman el cuadrado total de lado  $a+b$  en los pasos (5) y (6) respectivamente, se tiene que:

$$A_2 = 4 \left( \frac{ab}{2} \right) + c^2 = 4 \left( \frac{ab}{2} \right) + a^2 + b^2 = A_1.$$

Obteniendo el resultado del Teorema de Pitágoras  $c^2 = a^2 + b^2$

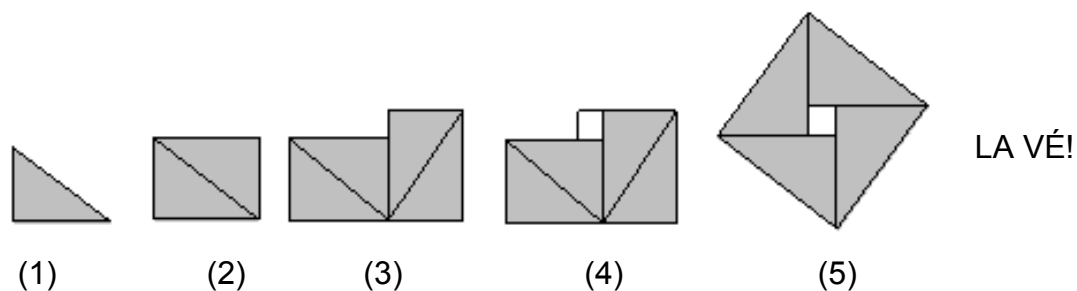
Presentación en CABRI

 <p><math>A_2</math></p>	 <p><math>A_1</math></p>	<p><b>INSTRUCCIONES FIGURA 1. Chou Pei (200 a.C.).</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Construya un triángulo rectángulo (pulsar el botón). <input type="checkbox"/></li> <li>2. Refleja el triángulo respecto a su hipotenusa (pulsar el botón). <input type="checkbox"/></li> <li>3. Rotamos 90 grados el rectángulo formado por los dos triángulos con respecto al punto <math>p</math>. (pulsar el botón) <input type="checkbox"/></li> <li>4. Trasladamos el rectángulo hasta el punto <math>t</math> arrastrando el punto <math>p</math>. <input type="checkbox"/></li> <li>5. Construya el polígono (pulsar el botón) y construya la figura completa en la parte izquierda (pulsar el botón). <input type="checkbox"/></li> <li>6. Trasladamos los triángulos <math>1, 2</math> y <math>3</math> de la nueva figura arrastrando los puntos <math>1, 2</math> y <math>3</math>. <input type="checkbox"/></li> </ol> <p><b>NOTA:</b> Para volver a empezar la construcción traslade el punto <math>p</math> y los triángulos <math>1, 2</math> y <math>3</math> a su posición original y luego haga click sobre todos los botones en negros.</p> <p>Ver demostración. <input type="checkbox"/></p>
<p><b>DEMOSTRACIÓN</b></p> $A_1 = 4 \left( \frac{ab}{2} \right) + a^2 + b^2$ $A_2 = c^2 + 4 \left( \frac{ab}{2} \right)$ $A_1 = A_2$ $4 \left( \frac{ab}{2} \right) + a^2 + b^2 = c^2 + 4 \left( \frac{ab}{2} \right)$ $a^2 + b^2 = c^2$		

## DEMOSTRACIÓN 2.

Esta demostración es atribuida *Bhaskara* (1114-1185) también conocido como Bhaskara II y Bhaskara Achārya ("Bhaskara el profesor"), fue matemático y astrónomo Indio. El representa el pico más alto del conocimiento matemático y astronómico en el siglo XII en India.

### CONSTRUCCIÓN



- (1) Para la construcción comienza con un triángulo rectángulo.
- (2) Luego refléjalo con respecto a su hipotenusa.
- (3) Ahora, rota este rectángulo 90 grados a la derecha.
- (4) Luego construye el cuadrado que se forma.
- (5) Finalmente traslada dos de los triángulos rectángulos, hasta formar un cuadrado.

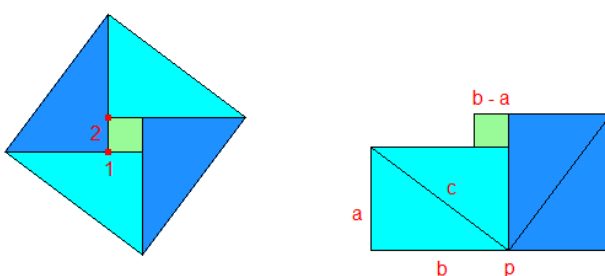
**Explicación:** Cuando se realizó la traslación de los dos triángulos rectángulos en el paso (4) para formar el paso (5), se construye un cuadrado de lado igual a la longitud de la hipotenusa del triángulo inicial. Por lo tanto, el área del cuadrado del paso (5), es igual al área de los polígonos que forman la figura del paso (4).

**Justificación Algebraica:** Sean  $a$  y  $b$  las dimensiones de los catetos del triángulo rectángulo inicial (menor y mayor respectivamente) y  $c$  su hipotenusa. Se observa que los polígonos que conforman la figura del paso (4), también forman parte de la figura del paso (5), luego si se comparan estas dos áreas, se tiene lo siguiente:

$$A_1 = c^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + (b-a)^2 = A_2$$

Obteniendo el resultado del Teorema de Pitágoras  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Presentación en CABRI



**DEMOSTRACIÓN**

$$A = 4 \left( \frac{ab}{2} \right) + (b - a)^2$$

$$A = b^2 + a^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

**INSTRUCCIONES FIGURA 2. Bhaskara, Siglo XII.**

1. Construya un triángulo rectángulo (pulsar el botón)
2. Refleja el triángulo respecto a su hipotenusa (pulsar el botón)
3. Rotamos 90 grados el rectángulo formado por los dos triángulos con respecto al punto p. (pulsar el botón)
4. Construya el cuadrado de lado b - a (pulsar el botón)
5. Construya esta figura en la parte izquierda (pulsar el botón)
6. Traslade los triángulos 1 y 2 en la nueva figura.

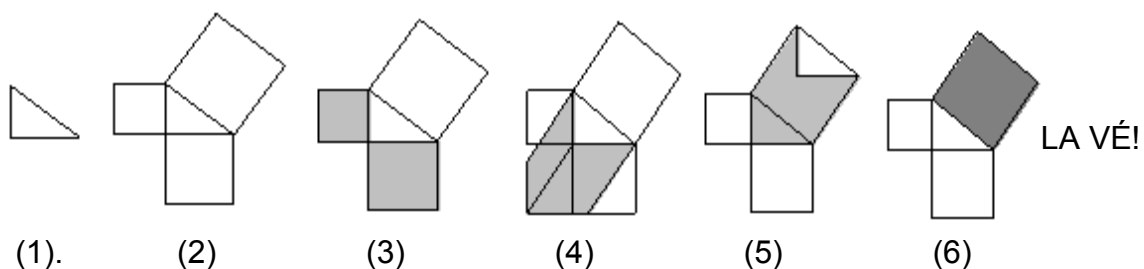
**NOTA:** Para volver a empezar la construcción traslade los triángulos 1 y 2 a su posición original y luego haga click sobre todos los botones.

Ver demostración.

DEMOSTRACIÓN 3.

Esta demostración es atribuida a *Pappus de Alejandría* Siglo IV d.C. matemático de la escuela alejandrina, escribió comentarios a *los Elementos* de Euclides y al *Almagesto* de Ptolomeo.

CONSTRUCCIÓN



- (1) Para la construcción comienza con un triángulo rectángulo.
- (2) Luego construye cuadrados sobre cada uno de sus lados.
- (3) Rellena el área de los cuadrados de cada uno de los catetos.
- (4) Ahora, traslada estas dos áreas. Esta acción se puede realizar por la proposición 36 del libro I los Elementos de Euclides que dice:

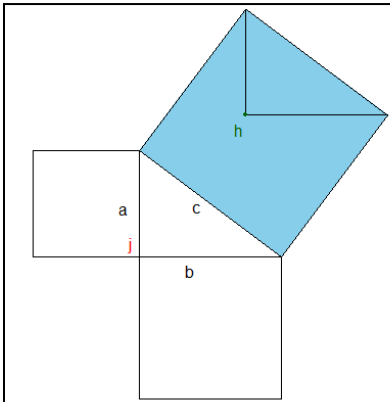
“Sí dos polígonos que están comprendidos entre dos paralelas y tienen las mismas bases conservan la mismas áreas”.

(5) Continuando con la construcción ahora se traslada el polígono que se forma de la construcción anterior, hasta cubrir el área del cuadrado mayor.

(6) Por último, se traslada el área que falta para completar el área del cuadrado de lado igual a la longitud a la hipotenusa del triángulo inicial.

Como la demostración se observa fácilmente no se incluyó justificación algebraica.

Presentación en CABRI



**INSTRUCCIONES FIGURA 3. Pappus Siglo IV.**

1. Construya un triángulo rectángulo (pulsar el botón). ■
2. Construya cuadrados sobre cada uno de sus lados (pulsar el botón), sombree los dos cuadrados pequeños (pulsar el botón). ■ ■
3. Traslade estos dos cuadrados, arrastrando los puntos 1 y 2. ■ ■
4. Construya el polígono (pulsar el botón) que se forma después de trasladar los cuadrados 1 y 2 (pulsar el botón, dos veces). ■ □
5. Traslade este polígono arrastrando el punto g hasta el punto j. ■ □
6. Duplique el triángulo (pulsar el botón) que se forma en el polígono anterior (pulsar el botón, dos veces) y luego trasládolo arrastrando el punto h hasta cubrir el área del cuadrado grande. ■ □

**NOTA:** Para empezar de nuevo la construcción traslade los polígonos 1, 2 y los puntos g, h hasta su posición original, presione todos los botones.

Resultado. ■

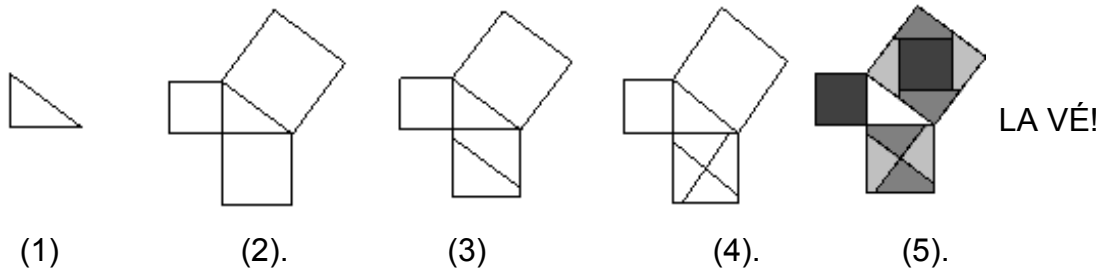
$c^2 = a^2 + b^2$

### DEMOSTRACIÓN 4

Esta demostración es atribuida a *Henry E. Dudeney* (1857-1930) en 1917.

Escritor inglés y fabricante de rompecabezas, fue uno de los exponentes más grandes de las matemáticas recreacionales de su tiempo.

### CONSTRUCCIÓN.



- (1) Para la construcción comienza con un triángulo rectángulo.
- (2) Luego construye cuadrados sobre cada uno de sus lados.
- (3). Ahora, construye un segmento paralelo a la hipotenusa del triángulo inicial que pase por el punto medio del cuadrado del cateto mayor.
- (4) Traza un segmento perpendicular al segmento anterior y que pase por el mismo punto medio.
- (5) Por último traslada los polígonos que se forman en los cuadrados, hasta cubrir el área del cuadrado mayor.

Como la demostración se observa rápidamente (estilo rompecabezas), no hay necesidad de justificación algebraica.

#### Presentación en CABRI

**DEMOSTRACIÓN**

$A_1 = a^2 \quad A_2 = b^2$

$a^2 + b^2 = c^2$

**INSTRUCCIONES FIGURA 4. Henry Dudeney (1917).**

1. Construya un triángulo rectángulo (pulsar el botón), con lados  $a$ ,  $b$  y  $c$  respectivamente.
2. Construya cuadrados sobre cada uno de sus lados. (pulsar el botón).
3. Construya un segmento paralelo al lado  $c$ , que pase por el punto  $r$  (pulsar el botón), el cual es la intersección de las diagonales del cuadrado de lado  $b$ .
4. luego construya otro segmento perpendicular al anterior y que pase por el punto  $r$  (pulsar el botón).

Este texto

- 5. Construya los polígonos que se forman y traslade los polígonos  $1, 2, 3, 4$  y  $5$  (pulsar el botón) hasta cubrir el área del cuadrado de lado  $c$ , arrastrando los puntos  $1, 2, 3, 4$  y  $5$ . Vover (pulsar el botón dos veces).

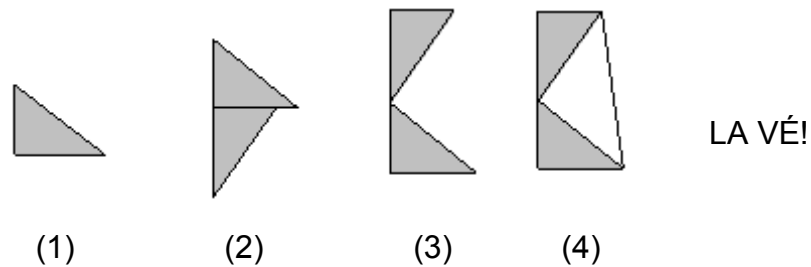
**NOTA:** Para volver a empezar la construcción traslade los polígonos  $1, 2, 3, 4$  y  $5$ , a su posición original y luego haga click sobre todos los botones.

Resultado.

## DEMOSTRACIÓN 5

Esta demostración es atribuida *James a. Garfield (1876)* fue el vigésimo Presidente de los Estados Unidos. Fue matemático aficionado y llegó a publicar una original demostración del Teorema de Pitágoras en el Diario de Educación de Nueva Inglaterra (New England Journal of Education).

### CONSTRUCCIÓN



- (1) Para la construcción comienza con un triángulo rectángulo.
- (2) Rota este triángulo, 90 grados en sentido horario.
- (3) Traslada este triángulo hacia arriba.
- (4) Por último, construye el triángulo rectángulo que se forma.

**Explicación:** Cuando se realizó la traslación y rotación del triángulo rectángulo inicial; luego de la construcción el triángulo final (blanco), se formó un trapecio. El área de este, va ser igual a la suma de las áreas de los tres triángulos rectángulos que lo conforman. Luego, realizando esta comparación de áreas, se llega a la relación pitagórica.

**Justificación Algebraica:** Sean  $a$  y  $b$  las dimensiones de los catetos del triángulo rectángulo inicial (menor y mayor respectivamente) y  $c$  su hipotenusa.

La suma de las áreas de los triángulos rectángulos que conforman el trapecio es

$$A = 2 \left( \frac{ab}{2} \right) + \frac{c^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2} \text{ y el área del trapecio es: } A_t = \frac{(b+a)(b+a)}{2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{2}$$

Luego el área del trapecio será igual a la suma de las áreas de los triángulos rectángulos que lo conforman.

Por lo tanto, se tiene:  $\frac{a^2+2ab+b^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2}$

Realizando las operaciones se obtiene la relación Pitagórica:  $c^2 = a^2 + b^2$

Presentación en CABRI

**DEMOSTRACIÓN**

$A_1 = 2((ab) / 2)$        $A_2 = (c^2) / 2$   
 $A_{12} = ab + (c^2) / 2$   
 $A_t = ((a + b)(a+b)) / 2$   
 $A_t = (a^2 + 2ab + b^2) / 2$   
 $A_{12} = A_t$   
 $ab + (c^2) / 2 = (a^2 + 2ab + b^2) / 2$   
 $c^2 = a^2 + b^2$

**INSTRUCCIONES FIGURA 5. James Garfield (1876).**

1. Construya un triángulo rectángulo (pulsar el botón).
2. Rotamos 90 grados el triángulo respecto al punto p (pulsar el botón) y lo trasladamos hasta el punto r, arrastrando el punto t.
3. Construya el triángulo rectángulo que se forma, para completar el polígono (pulsar el botón).

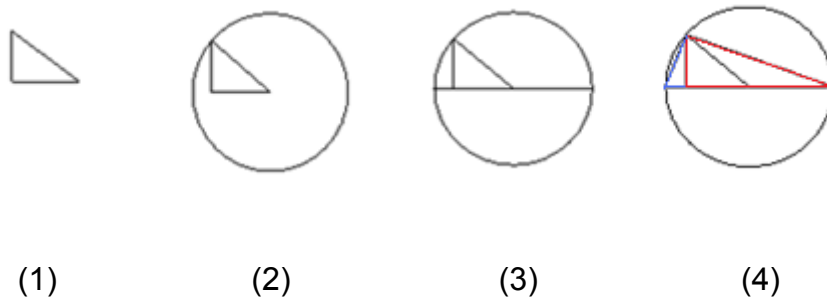
**NOTA:** Para empezar de nuevo la construcción, traslade el punto t, a su posición original y luego de click sobre cada botón negro.

Ver demostración.

### DEMOSTRACIÓN 6

Esta demostración es atribuida a *Michael Hardy*, actualmente profesor del departamento de Matemáticas de la Universidad de Cambridge en Estados Unidos.

### CONSTRUCCIÓN



LA VÉ!

(1) Para la construcción comienza con un triángulo rectángulo..

(2) Construye una circunferencia de radio igual a la longitud de la hipotenusa del triángulo con centro en uno de sus vértices.

(3) Traza un segmento para completar el diámetro de la circunferencia.

(4) Luego construye dos nuevos triángulos rectángulos.

**Explicación:** Los dos últimos triángulos rectángulos del paso (4) comparten un lado y tienen un ángulo de igual medida. Por lo tanto, se puede realizar la semejanza de triángulos. Realizando las operaciones se obtiene a la relación Pitagórica.

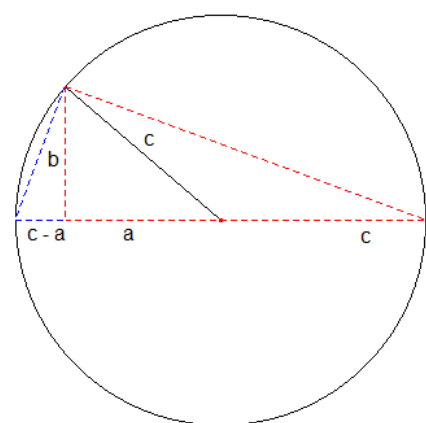
**Justificación Algebraica:** Sean  $a$  y  $b$  las dimensiones de los catetos del triángulo rectángulo inicial (menor y mayor respectivamente) y  $c$  su hipotenusa. Luego, los dos nuevos triángulos, tendrán lados  $b$  y  $c-a$  para el triángulo azul y lados  $b$  y  $c+a$  para el triángulo rojo y un ángulo de 90 grados respectivamente. Entonces:

$$\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$$

Realizando las operaciones se obtiene la relación Pitagórica:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Presentación en CABRI



**INSTRUCCIONES FIGURA 6. Michael Hardy.**

1. Construya un triángulo rectángulo de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$    
(pulsar el botón).
2. Construya una circunferencia de radio  $c$    
(pulsar el botón).
3. Construya los segmentos que se forman  $c-a$  y  $c$  (pulsar el botón).

**NOTA:** Para volver a empezar la construcción de click sobre todos los botones.

Ver demostración.

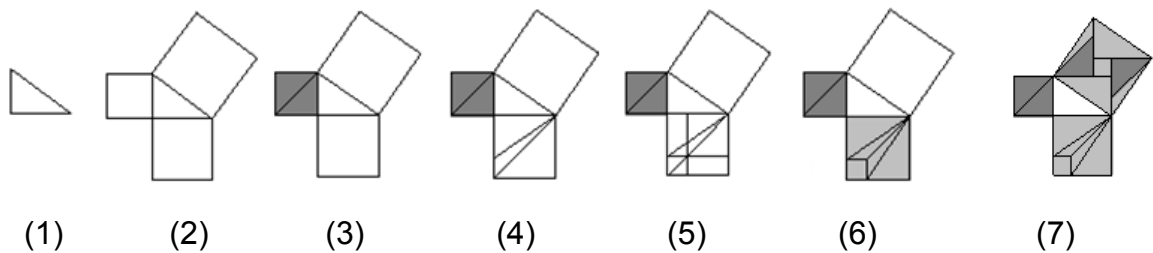
**DEMOSTRACIÓN**

$$(c+a)/b = b/(c-a)$$
$$(c+a)(c-a) = b^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

## DEMOSTRACIÓN 7

Esta demostración es atribuida a *Liu Hui Siglo III d.C.* matemático chino. En el año 263 publicó un libro con soluciones a problemas matemáticos de la época, se trata de uno de los libros chinos más famosos en el dominio de las matemáticas y se conoce como *Jiu zhang Suan shu* o *Los nueve capítulos del arte matemático*.

### CONSTRUCCIÓN



LA VÉ!

- (1) Para la construcción se comienza con un triángulo rectángulo.
- (2) Luego construye cuadrados sobre cada uno de sus lados.
- (3) Traza la diagonal del cuadrado más pequeño.
- (4) Refleja el triángulo inicial con respecto a su cateto mayor y luego traza la diagonal del cuadrado.
- (5) Ahora, dibuja un segmento paralelo al cateto mayor del triángulo inicial que pase por la intersección del triángulo reflejado con el cuadrado, y luego traza un segmento perpendicular al anterior que pase por la intersección de la diagonal del cuadrado con el segmento paralelo al cateto mayor del triángulo inicial.
- (6) Refleja el triángulo que anteriormente se reflejó con respecto a la diagonal del cuadrado y construye los polígonos que resultan.
- (7) Ahora traslada todos los polígonos formados anteriormente hasta cubrir el área del cuadrado mayor.

Como la demostración se observa sin ningún problema, no hay necesidad de justificación algebraica.

Presentación en CABRI

**DEMOSTRACIÓN**

$A_1 = a^2$

$A_2 = b^2$

$a^2 + b^2 = c^2$

**INSTRUCCIONES FIGURA 7. Liu Hui (Siglo III d.C.).**

1. Construya un triángulo rectángulo de lados **a**, **b** y **c** (pulse el botón).
2. Construya cuadrados sobre los lados del triángulo (pulse el botón).
3. Trace la diagonal del cuadrado de lado **a** y construya los dos triángulos (4, 5) que se forman (pulse el botón).
4. Refleje el triángulo inicial (1) con respecto al lado **b**, luego trace la diagonal del cuadrado de lado **b** (pulse el botón).
5. Construya un segmento **l** en la intersección del cuadrado de lado **b** y el triángulo inicial **x** (pulse el botón). luego trace un segmento **v** perpendicular a **l** en el punto **q** (pulse el botón). Construya los polígonos que se forman (2) (pulse el botón dos veces).
6. Traslade los polígonos 1 y 2 (pulse el botón). luego traslade los polígonos 3, 4, 5, 6 y 7 (pulse el botón) para esto, arrastre los puntos 3, 4, 5, 6 y 7 respectivamente (pulse el botón dos veces).

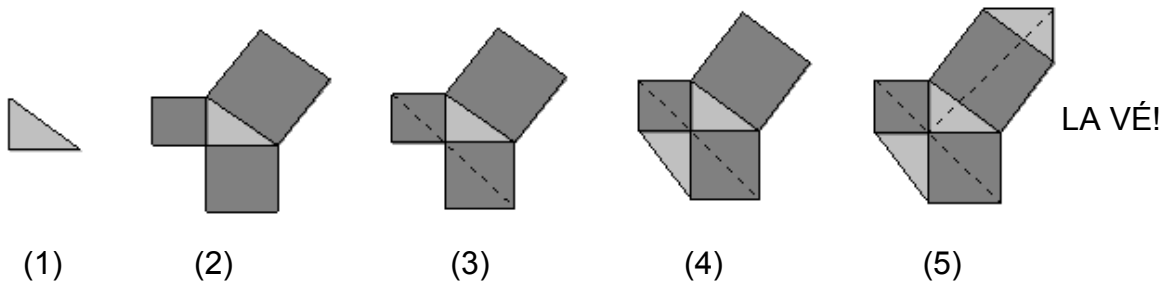
NOTA: Para volver a empezar la construcción, traslade los puntos 3, 4, 5 y 6 a sus posiciones originales y luego de click en todos los botones.

Ver demostración.

**DEMOSTRACIÓN 8**

Esta demostración es atribuida a *Leonardo da Vinci (1452-1519)*, fue un arquitecto, escultor, pintor, inventor, músico, ingeniero y el hombre del Renacimiento por excelencia. Humanista de primera línea, está ampliamente considerado como uno de los más grandes pintores de todos los tiempos y quizá la persona con más variados talentos de la historia.

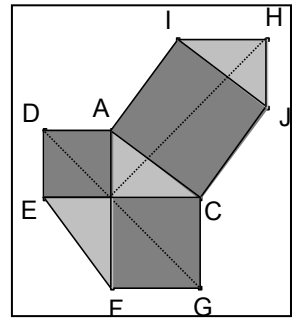
**CONSTRUCCIÓN**



(1) Para la construcción comienza con un triángulo rectángulo..

- (2) Luego construye cuadrados sobre cada uno de sus lados.
- (3) Ahora, traza una recta que pase por las diagonales de los dos cuadrados de lados iguales a los catetos del triángulo.
- (4) Refleja el triángulo inicial con respecto a esta recta.
- (5) Rota 180 grados el triángulo inicial con respecto al punto central del cuadrado más grande y traza una recta que divide al polígono que forma.

**Explicación:** Siguiendo la construcción se observa que los polígonos CADG y DGEF son congruentes, por el eje de simetría que es la recta DG. Análogamente con los polígonos BHIA y JCBH, por tener el mismo eje de simetría la recta BH y la congruencia entre los triángulos rectángulos ABC e IHJ. Ahora, si se rota 90 grados a la derecha el polígono CADG, respecto a A, y es congruente con el polígono BHIA. Por lo tanto, los hexágonos ABCJHI y ACGFED son congruentes. Si se eliminan de cada uno de ellos, los triángulos EBF y HIJ, se obtiene el resultado del Teorema de Pitágoras.



Esta demostración es geométrica. Pero, la justificación algebraica existe y es muy fácil probarla.

Presentación en CABRI

**INSTRUCCIONES FIGURA 8. Leonardo da Vinci SigloXVI.**

1. Construya un triángulo rectángulo
2. Construya cuadrados sobre cada uno de sus lados (pulse el botón).
3. Construya una recta r (pulse el botón) y refleje el triángulo inicial con respecto a esta recta r (pulse el botón).
4. Rote 180 grados el triángulo inicial respecto al punto t (pulse el botón), el cual es el punto donde se intersectan las diagonales del cuadrado.

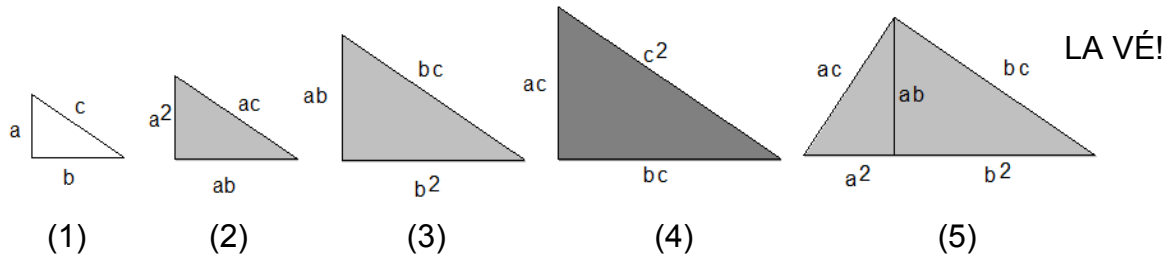
**NOTA:** Para volver a empezar la construcción haga click sobre todos los botones.

Ver demostración.

## DEMOSTRACIÓN 9

Esta demostración es atribuida a Frank Burk, es de las más recientes, pues al parecer la hizo en Noviembre de 1996.

### CONSTRUCCIÓN



- (1) Construye un triángulo rectángulo con lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
- (2) Multiplica los lados del triángulo inicial por  $a$  y construye un nuevo triángulo rectángulo.
- (3) Construye otro triángulo rectángulo multiplicando los lados del triángulo inicial por  $b$ .
- (4) Igualmente construye otro triángulo rectángulo multiplicando los lados del triángulo inicial por  $c$ .
- (5) Une los triángulos, que fueron multiplicados por  $a$  y  $b$  respectivamente, puesto que comparten el lado  $ab$ .

**Explicación:** Se observa que el triángulo resultante de la unión y el triángulo que fue multiplicado por el lado  $c$ , tienen lados iguales,  $bc$  y  $ac$ . Luego, sus hipotenusas también van a ser iguales, por lo tanto se obtiene el resultado del Teorema de Pitágoras.

**Justificación Algebraica:** Comparando las áreas de los dos triángulos que resultan en los pasos (4) y (5) se tiene:

$$\frac{(ab)(c^2)}{2} = \frac{(ab)(a^2)}{2} + \frac{(ab)(b^2)}{2}$$

Realizando las operaciones se llega al resultado del Teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Presentación en CABRI

**DEMOSTRACIÓN**

$$A_1 = ((ab)(a^2)) / 2 \quad A_2 = ((ab)(b^2)) / 2$$

$$A_4 = ((ab)(b^2)) / 2 + ((ab)(a^2)) / 2$$

$$A_4 = ((ab)(a^2 + b^2)) / 2$$

$$A_3 = ((ab)(c^2)) / 2$$

$$((ab)(c^2)) / 2 = ((ab)(a^2 + b^2)) / 2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

**INSTRUCCIONES FIGURA 9. Frank Burk.**

1. Construya un triángulo rectángulo con lados **a, b y c** respectivamente (pulse el botón)
2. Construya un triángulo rectángulo multiplicando el triángulo inicial por el lado **a** (pulse el botón). Luego construya otro triángulo rectángulo multiplicando el triángulo inicial por el lado **b**. (pulse el botón)
3. Construya un triángulo rectángulo multiplicando el triángulo inicial por el lado **c** (pulse el botón).
4. Construya el triángulo rectángulo que se forma de la unión de los triángulos que fueron multiplicados por los lados **a y b**. (pulse el botón)

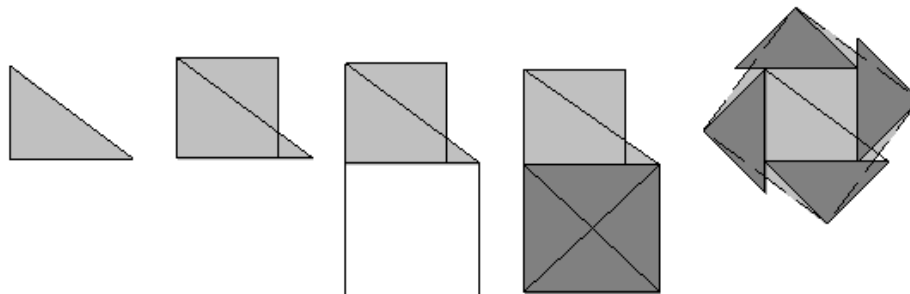
**NOTA:** Para empezar de nuevo la construcción presione nuevamente todos los botones negros.

Ver demostración.

### DEMOSTRACIÓN 10

Esta demostración es atribuida al matemático Poo-Sung-Park, es considerada la más reciente ya que la hizo en Diciembre en 1999.

### CONSTRUCCIÓN



LA VÉ!

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

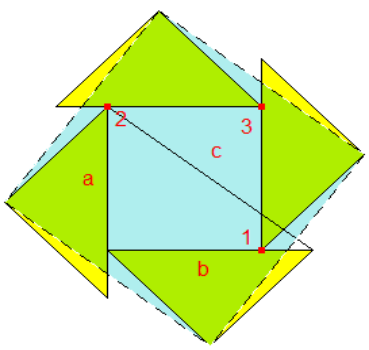
(1) Para la construcción comienza con un triángulo rectángulo.

- (2) Construye un cuadrado de lado igual a la longitud del lado menor del triángulo rectángulo y que lo traslape.
- (3) Luego construye otro cuadrado de lado igual a la longitud del otro cateto del triángulo.
- (4) Traza las diagonales del cuadrado anterior, formando cuatro triángulos isósceles rectángulos.
- (5) Ahora traslada estos cuatro triángulos isósceles rectángulos, sobre cada uno de los lados del cuadrado del paso (2) y construye un cuadrado uniendo las cimas de los cuatro triángulos isósceles.

**Explicación:** Cuando se trasladan los triángulos isósceles rectángulos sobre cada uno de los lados del primer cuadrado, se construye un cuadrado de lado igual a la longitud de la hipotenusa del triángulo inicial. Por lo tanto, el área de este cuadrado será igual a la suma de las áreas del primer cuadrado y los cuatro triángulos isósceles rectángulos y los triángulos sobrantes, de cada uno de los triángulos isósceles rectángulos, que van a cubrir esa misma área dentro del cuadrado grande.

Así se obtiene el resultado del Teorema de Pitágoras:  $a^2 + b^2 = c^2$

Presentación en CABRI



**DEMOSTRACIÓN**

$A_1 = a^2 \quad A_2 = 4(b^2 / 4)$

$A_3 = c^2 = a^2 + 4(b^2 / 4)$

$a^2 + b^2 = c^2$

**INSTRUCCIONES FIGURA 10. Poo-Sung Park 1999.**

1. Construya un triángulo rectángulo de lados **a, b y c** (pulse el botón).
2. Construya un cuadrado sobre el lado **a** del triángulo rectángulo (pulse el botón).
3. Construya un cuadrado sobre el lado **b** del triángulo y trace sus diagonales (pulse el botón).
4. Pinte los triángulos que se forman en el cuadrado de lado **b** (pulse el botón). (pulse el botón dos veces)
5. Traslade los triángulos formados anteriormente arrastrando los puntos **1, 2 y 3**.

**NOTA:** Para empezar la construcción de nuevo, traslade lo triángulos **1, 2 y 3** hasta su posición inicial y luego de click sobre cada uno de los botones negros.

Ver demostración.

## 4. ANALISIS Y CLASIFICACIÓN

Para el análisis y la clasificación de las diez demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras, se utilizó el método de estudio de casos, realizándose un paralelo con las observaciones tomadas en las dos sesiones con los profesores del grupo EDUMAT y los estudiantes del semillero EULER.

A continuación se relatará el desarrollo de cada sesión, las cuales se realizaron en forma independiente.

### 4.1 SESIÓN PROFESORES

Esta sesión se realizó el día 14 de Agosto de 2009, en el auditorio Alberto Elías Hernández Durán del CENTIC<sup>7</sup> a las 6 de la tarde, con la participación de 17 profesores del área de matemáticas en niveles de básica y media, que pertenecen al grupo EDUMAT.

Se comenzó por comentarles el objetivo del trabajo de grado y el papel que ellos desempeñaban dentro del mismo. Iniciando con una breve reseña histórica del Teorema de Pitágoras, luego se les entregó una guía (Ver anexo1) en la cual se encuentran las figuras que recuerdan las diez demostraciones y la tabla donde podían clasificarlas según el orden de su preferencia a la hora de enseñar el concepto, como se ve a continuación.

Mayor preferencia	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	Menor preferencia

Con estas observaciones se dio inicio a la exposición de las construcciones realizadas en CABRI-GEOMETRE 2D.

Las presentaciones de cada una de las demostraciones fueron diseñadas de tal forma, que en su parte derecha encontrarán las instrucciones, las cuales podían

---

<sup>7</sup> Centro de tecnologías de información y comunicación. Universidad Industrial de Santander.

seguir dando click sobre cada uno de los botones que sirven para la animación de la construcción, la cual va apareciendo en la parte izquierda de la pantalla, igualmente su justificación algebraica.

La idea de las presentaciones era que ellos vieran las demostraciones sin necesidad de explicación (sin palabras), desafortunadamente algunas de ellas utilizaban argumentos matemáticos fuertes exigiendo un análisis y explicación más detallado.

Por ejemplo, las demostraciones número 5 y 6, no son tan obvias, debido a que la construcción no indicaba inmediatamente el resultado del teorema, por lo tanto se acudió a su justificación algebraica para aclarar su explicación.

Presentación en CABRI: demostración 5.

**DEMOSTRACIÓN**

$$A_1 = 2((ab)/2) \quad A_2 = (c^2)/2$$

$$A_{12} = ab + (c^2)/2$$

$$A_1 = ((a+b)(a+b))/2$$

$$A_1 = (a^2 + 2ab + b^2)/2$$

$$A_{12} = A_1$$

$$ab + (c^2)/2 = (a^2 + 2ab + b^2)/2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

**INSTRUCCIONES FIGURA 5. James Garfield (1876).**

1. Construya un triángulo rectángulo (pulsar el botón)
2. Rotamos 90 grados el triángulo respecto al punto **p** (pulsar el botón) y lo trasladamos hasta el punto **r**, arrastrando el punto **t**.
3. Construya el triángulo rectángulo que se forma, para completar el polígono (pulsar el botón).

**NOTA:** Para empezar de nuevo la construcción, traslade el punto **t**, a su posición original y luego de click sobre cada botón negro.

Ver demostración.

Presentación en CABRI: demostración 6.

**INSTRUCCIONES FIGURA 6. Michael Hardy.**

1. Construya un triángulo rectángulo de lados **a**, **b** y **c** (pulsar el botón).
2. Construya una circunferencia de radio **c** (pulsar el botón).
3. Construya los segmentos que se forman **c - a** y **c** (pulsar el botón).

**NOTA:** Para volver a empezar la construcción de click sobre todos los botones.

Ver demostración.

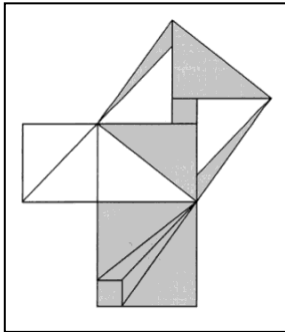
**DEMOSTRACIÓN**

$$(c + a) / b = b / (c - a)$$

$$(c + a)(c - a) = b^2$$

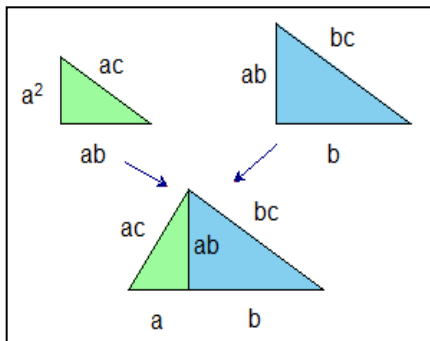
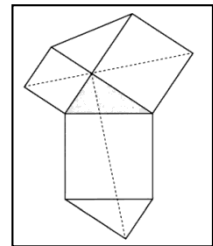
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Durante el transcurso de cada presentación ellos dieron algunas observaciones que podrían mejorar la presentación hecha en CABRI-GEOMETRE 2D, se relatarán las más interesantes para la investigación:

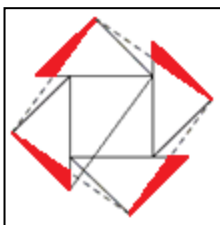


En la demostración número 7 plantearon que al trasladar los polígonos que se encuentran en los cuadrados construidos sobre cada uno de los catetos del triángulo rectángulo, se debería aplicar la respectiva animación para trasladar dichos polígonos, evitando complicaciones a la hora de la explicación.

También en la demostración número 8, expresaron la necesidad de colocar la animación de los polígonos que están divididos por las rectas punteadas, para ver más fácilmente la comparación de áreas, la cual es clave para la demostración.



En la demostración número 9, con la construcción del triángulo rectángulo que resulta de la unión de los dos triángulos rectángulos anteriores, debería hacerse animada, puesto que para los estudiantes de grados inferiores, la falta de esta, no dejaría muy clara la demostración.



Y por último, en la demostración número 10, faltó la animación para la traslación de los cuatro triángulos rojos, los cuales van a completar el área del cuadrado punteado.

Después de la explicación de las construcciones, se dio un tiempo prudente para dar respuesta a la guía y para que realizaran sus aportes sobre cada demostración, los cuales podían escribir al respaldo de esta.

Las observaciones hechas despejaron muchas incógnitas sobre cómo se da la enseñanza del Teorema de Pitágoras en las aulas de clase, también permitió, dar explicación de cuál fue la demostración de mayor y menor preferencia.

La siguiente tabla, muestra los resultados obtenidos del desarrollo de la sesión, al frente de cada demostración se encuentra el número de preferencias en cada uno de los órdenes predispuestos.

Pref Dem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#1	4	2	4	1	1	1	0	1	1	2
#2	2	3	1	4	1	2	0	0	4	0
#3	3	2	0	3	3	1	1	3	1	0
#4	4	1	3	2	2	1	4	0	0	0
#5	0	1	1	5	0	3	1	0	3	3
#6	2	2	2	1	0	0	1	4	4	1
#7	0	3	0	0	0	4	1	1	2	6
#8	1	1	1	0	3	2	3	3	2	1
#9	1	0	4	1	3	0	3	2	0	3
#10	0	2	1	0	4	3	3	3	0	1

Tabla 1. Resultados sesión profesores.

Con estos resultados se asignaron valores al orden de preferencia de cada demostración teniendo en cuenta la posición. Al primer lugar 10 puntos, segundo lugar 9 puntos, así sucesivamente, hasta llegar al décimo lugar con una puntuación de 1. Valorando las posiciones intermedias las cuales van a inferir en el porcentaje total de preferencia de cada demostración según el orden seleccionado por los profesores, los cuales representamos en la siguiente tabla.

DEM	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10
PREF	12,3%	11,4%	11,4%	12,8%	8,6%	9,2%	6,8%	8,7%	9,4%	9,3%

Tabla 2. Porcentajes sesión profesores.

Claramente se observa que no existe una diferencia contundente en la elección de la demostración de mayor preferencia entre los profesores a la hora de enseñar el concepto. Sin embargo la demostración número 4 obtuvo el mayor porcentaje de preferencia, mientras que la demostración número 7 fue la de menor preferencia.

Por los comentarios realizados se puede establecer que la demostración número 4 fue la más preferida, ya que trata de un rompecabezas y su explicación consiste en el desplazamiento de áreas, haciendo visual la demostración y la cual se presta para emplearla como un juego didáctico que permite que los estudiantes asimilen mejor el concepto.

El gusto por este tipo de demostración es muy característico en todos los profesores, porque buscan la manera más didáctica de enseñar el concepto. Por esta razón, pensamos que es de gran utilidad para el profesor a la hora de enseñar el Teorema de Pitágoras y no solo se limite a establecer el resultado, sino que pueda recrear su demostración para hacerlo más comprensible y por ende lograr un buen aprendizaje significativo en los estudiantes.

Otra demostración que tuvo gran aceptación fue la número 1, debido a que esta es muy creativa y tiene una facilidad especial para la enseñanza. Además, están familiarizados con ella, pues también aparece con frecuencia en la mayoría de los textos educativos (ver [12]).

La demostración de menor preferencia fue la número 7, esto se debe a que la construcción es un poco complicada, pues incluye la traslación de muchos polígonos. No imaginamos que esto fuera a suceder, porque la construcción es estilo rompecabezas y creíamos que sería una buena herramienta didáctica que ocuparía los primeros lugares de preferencia, pero desafortunadamente hay que trasladar muchos polígonos, haciendo que la demostración se torne un poco confusa.

## 4.2 SESION ESTUDIANTES

Esta sesión se realizó el día 15 de Agosto de 2009 a las 2:30 de la tarde en el auditorio Alberto Elías Hernández Durán del CENTIC, con la participación de 35 estudiantes pertenecientes a diferentes instituciones educativas del área metropolitana de Bucaramanga. Al igual que en la sesión anterior, se comenzó por comentarles el objetivo del trabajo de grado y el papel que ellos desempeñaban dentro del mismo. Iniciando con una breve reseña histórica del Teorema de Pitágoras, luego se les entregó una guía (Ver anexo 2) en la cual se encuentran las figuras que recordaban las diez demostraciones y podían clasificar según el orden de su preferencia a la hora de adquirir el concepto. Con estas observaciones se dio inicio a la exposición de las construcciones realizadas en CABRI-GEOMETRE 2D.

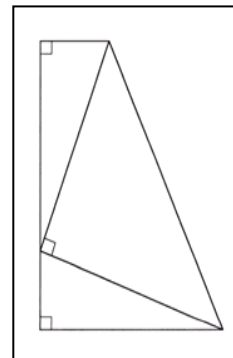
Las construcciones de cada una de las demostraciones, fueron las mismas que se presentaron la noche anterior en la sesión con los profesores, por lo tanto su diseño no cambió para no distorsionar el rumbo de la investigación.

La demostración número 1 no tuvo problema en su explicación, debido a que es una de las demostraciones clásicas que se enseñan en la mayoría de los colegios, lo cual les pareció muy familiar.

En la demostración número 2, se recurrió a la justificación algebraica, luego de una segunda explicación, pues ellos expresaron que la sola figura no les permitía ver el resultado.

En la tercera y cuarta demostración no se presentaron problemas a la hora de la explicación, pues son visuales y se refieren al desplazamiento de áreas para llegar al resultado.

La demostración número 5, resultó bastante enriquecedora, porque luego de la explicación de su construcción, inmediatamente uno de los estudiantes planteó otra explicación diferente. Él afirmaba que: “el triángulo que se forma al completar la figura, es la mitad de un cuadrado de lado igual a la longitud de la hipotenusa del triángulo inicial, por lo tanto si se trasladan los dos triángulos iniciales para completar la otra mitad del cuadrado, volvemos a la demostración número 1”.



Es interesante la forma de relacionar esta demostración con la número 1, notando que la figura era la mitad de la primera demostración, antes de fijarse que la construcción era un trapecio.

En la demostración número 6, fue necesaria la construcción de dos nuevos triángulos rectángulos para poder interpretarla y se utilizó la semejanza de triángulos para establecer el resultado.

Respecto a la demostración número 7, se vieron confusos pues la construcción de la demostración se tornó un poco complicada por la traslación de los polígonos que son claves para llegar al resultado.

La demostración número 8 no tuvo problema debido a que es visual, pues la clave para llegar al resultado son las rectas punteadas trazadas en la figura, las cuales, dividen los polígonos en partes iguales, que al trasladarlos permiten la comparación de sus áreas estableciendo la relación pitagórica.

La demostración número 9 la comprendieron tan bien que no necesitaron de la justificación algebraica para notar el resultado. Observaron que los triángulos rectángulos tienen los mismos lados, por lo tanto, la longitud de sus hipotenusas son iguales.

Finalmente la demostración número 10 les pareció elegante por su construcción. Notaron que la clave para la demostración era el desplazamiento del último triángulo isósceles que formaba el cuadrado punteado.

El gusto por las diferentes demostraciones para los estudiantes está determinado por la forma en la que es adquirido el concepto, también se atribuye al interés por el tema y en especial por los diferentes métodos didácticos que practican para desarrollar las diferentes temáticas. Por esta razón, una buena ayuda para que el estudiante logre captar el concepto, es presentarle diferentes tipos de pruebas, afianzando de una forma más intuitiva el resultado.

Luego de la explicación de las construcciones, dieron respuesta a las guías en las cuales plasmaron sus aportes sobre cada demostración. Estos son importantes porque nos permiten alcanzar los objetivos propuestos, sobre cómo se da la adquisición del concepto en las aulas de clase.

Las siguientes tablas muestran los resultados obtenidos del desarrollo de la guía, el orden de preferencia de cada demostración, así como el valor numérico de la escogencia de cada una de ellos y su porcentaje de preferencia a la hora de aprender el concepto.

Pref Dem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#1	5	10	6	4	2	2	3	0	0	3
#2	1	1	3	6	8	6	2	3	4	2
#3	4	3	4	2	4	6	3	5	2	2
#4	3	7	2	6	3	5	2	5	2	0
#5	1	4	2	3	5	5	6	3	6	0
#6	4	2	2	1	0	2	3	7	2	12
#7	1	2	2	2	3	1	2	3	10	9
#8	1	1	1	3	5	6	6	6	4	2
#9	11	3	7	3	3	1	5	1	0	1
#10	4	2	6	5	1	2	3	2	6	4

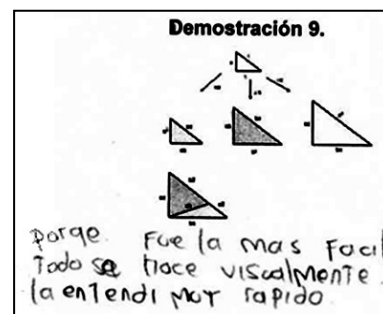
Tabla 3. Resultados sesión estudiantes.

DEM	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10
PREF	13%	9,7%	10,5%	11,5%	9,6%	7,3%	6,7%	8,4%	13,5%	9,8%

Tabla 4. Resultados sesión estudiantes.

Estos porcentajes muestran que la demostración de mayor preferencia fue la número 9, y la de menor preferencia fue la demostración número 7.

La demostración número 9 fue la preferida porque es muy creativa, además su construcción es muy sencilla y solo se utilizan triángulos rectángulos, lo cual les facilitó aún más su entendimiento.



El gusto por este tipo de demostraciones es evidente en la mayoría de los estudiantes, porque alternan diferentes conceptos matemáticos, lo que les permite desarrollar su interés y porque no decirlo, plantear una nueva demostración.

Por esta razón se insiste que la demostración juega un papel muy importante a la hora de enseñar cualquier resultado, porque le da seguridad al estudiante pues es de gran utilidad para desarrollar nuevos conceptos y afianzar los ya establecidos.

En cuanto la demostración de menor preferencia fue la número 7, debido a su construcción, la cual se tornó un poco complicada ya que abarca la traslación de muchos polígonos. En conclusión este problema fue el causante de este desinterés no solo de los profesores sino también de los estudiantes.

#### 4.3 COMPARACIÓN ENTRE LAS DOS SESIONES

Teniendo en cuenta el anterior análisis, se establece lo siguiente:

- Las demostraciones de mayor preferencia en la sesión de los profesores y la sesión de los estudiantes, fueron la número 4 y 9 respectivamente.
- La demostración de menor preferencia, en las dos sesiones fue la número 7.

La elección en las dos sesiones, se debe a varios factores que influyen en esta decisión: la creatividad de la construcción, la didáctica y la facilidad para la comprensión del concepto.

Asumiendo estas características, la diferencia no es muy grande en los resultados, sobre cuál fue la demostración de mayor preferencia en las dos sesiones, debido al contraste de cada construcción.

Primero: La preferencia de los profesores está enfocada en la utilización de herramientas didácticas que desarrollan en el estudiante el impulso por aprehender. Esta construcción demuestra ese interés, porque permite ver el resultado como un rompecabezas.

Segundo: La preferencia de los estudiantes se refleja en la facilidad para comprender el concepto, lo cual se evidencia en su elección, pues no involucra argumentos matemáticos tan fuertes, lo cual les permite desarrollar el interés por este tipo de demostraciones.

Comparando estas dos decisiones que están ligadas al proceso enseñanza-aprendizaje, se puede apreciar que las demostraciones visuales son herramientas necesarias para desarrollar en los profesores diferentes formas de llegar al resultado, sin necesidad de presentar al estudiante el concepto formal y abstracto que puede complicar este proceso; y en los estudiantes desarrolla el interés en descubrir por si mismos el concepto, además les permite avanzar en el análisis de nuevas ideas que son prácticas para el estudio de otros conceptos, logrando potenciar su creatividad.

Con respecto a la demostración de menor preferencia, la decisión fue la misma en las dos sesiones, debido a su complicada construcción y algunas falencias del programa. Si esto no hubiera sucedido no estaría en este lugar debido a su diseño (estilo rompecabezas), no se desmeritan las demás demostraciones pero en contraste con la demostración de mayor preferencia la cual es muy parecida, esta podría ocupar una mejor posición.

## CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES

Buscando mostrar cual de las diez demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras es la más adecuada para su enseñanza-aprendizaje; se presentan los siguientes resultados que surgieron a través de toda esta experiencia. Después de realizar el análisis en el capítulo 4, sobre cuál fue la demostración de mayor y menor preferencia, por parte de los profesores del grupo EDUMAT y los estudiantes del grupo EULER, se concluye:

La inclusión de nuevas herramientas tecnológicas (software educativo, rompecabezas, calculadoras, etc.) en las aulas de clase, permite que los estudiantes desarrollen su capacidad cognitiva. En la demostración del Teorema de Pitágoras, se ve reflejado y estamos seguros que con esta introducción, la interacción entre el maestro y el estudiante será más provechosa hasta el punto de alcanzar nuevas demostraciones.

Aunque algunas veces la geometría no necesita del álgebra para argumentar sus conceptos, en otras ocasiones el lazo que existe entre ellas es de vital importancia para la justificación, esto lo vemos en algunas de las demostraciones visuales en las cuales se necesitó revisar su prueba algebraica para llegar al resultado.

La demostración de mayor preferencia para los profesores fue la número 4 y para los estudiantes fue la número 9. Estas demostraciones son provechosas para la enseñanza, gracias a la creatividad de su construcción y su comprensión básica en cualquier nivel; además, se prestan para la utilización de herramientas geométricas y didácticas que hacen que su enseñanza en las aulas de clase sea más enriquecedora, tanto para el estudiante como para el profesor.

En la selección de las demostraciones de mayor preferencia por parte de los profesores y de los estudiantes, vimos que ambos tuvieron las mismas razones que fueron la creatividad y la facilidad para desarrollar el concepto, a pesar de que escogieron demostraciones diferentes. Lo cual nos permite inferir que ellos buscan la forma más práctica para enseñar (profesores) y adquirir (estudiantes) el concepto.

La demostración número 7 por sus problemas con la traslación de los polígonos que eran claves para la justificación, se convirtió en la menos preferida, asimismo su construcción necesita de varios conceptos geométricos que aunque básicos complican el desarrollo de la demostración. Aquí vemos que las demostraciones que más incluyen contenidos geométricos, algebraicos y en general matemáticos no tuvieron mayor preferencia.

Las demostraciones visuales son de gran ayuda, pues prueban el concepto de una manera fácil y sencilla, que a su vez proporcionan el interés en los estudiantes y aún mejor, tranquilidad a los docentes; pues no tienen que hacer piruetas para llamar la atención de los estudiantes al introducir cualquier tema en sus clases.

De las diez demostraciones, la que creemos la más adecuada para la enseñanza, en base con el anterior análisis, es la número 9 que fue la preferida por los estudiantes. Esta decisión la tomamos, debido a que la demostración es muy creativa y solo involucra triángulos rectángulos para el desarrollo de su construcción, lo cual permite que el estudiante no se confunda a la hora de adquirir el concepto. Con esta conclusión no queremos, desmeritar las otras demostraciones, porque todas son muy valiosas, sino que pensamos que esta es la mejor para el entendimiento del teorema.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] NELSEN, Robert, B. *Proofs Without Words: Exercises in visual thinking*, The Mathematical Association of America Washington. USA, 1993.
- [2] NELSEN, Robert, B. *Proofs Without Words II: More exercises in visual thinking*, The Mathematical Association of America Washington. USA, 2000.
- [3] Tomado de; PITÁGORAS: BIOGRAFÍA DEL GRAN MATEMÁTICO GRIEGO, <http://www.portalplanetasedna.com.ar/matematico2.htm>
- [4] LA COMUNIDAD PITAGÓRICA. GENERACIONES DE MATEMÁTICOS. Tomado: [http://nonio.mat.uc.pt/PENSAS\\_EN02/pitagoricos/lacomun.htm](http://nonio.mat.uc.pt/PENSAS_EN02/pitagoricos/lacomun.htm)
- [5] PITÁGORAS, Tomado: <http://es.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras>
- [6] ESCUELA PITAGÓRICA. Tomado: <http://elycastilla.obolog.com/escuela-pitagorica-163906>
- [7] SULVA-SUTRAS: Tomado [http://ciencia.astroseti.org/matematicas/articulo\\_4585\\_los\\_sulbasutras\\_india.htm](http://ciencia.astroseti.org/matematicas/articulo_4585_los_sulbasutras_india.htm)
- [8] TEOREMA DE PITÁGORAS EN EGIPTO: Tomado <http://www.uam.es/otros/fcmatematicas/Trabajos/Bartolome/Esther1/TeoremaPitagoras1.pdf>
- [9] TEOREMA DE PITÁGORAS EN CHINA. Tomado: [http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43573/es/contenidos/informacion/dia6sigma/es\\_sigma/adjuntos/sigma\\_32/8\\_pitagoras.pdf](http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43573/es/contenidos/informacion/dia6sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_32/8_pitagoras.pdf)

[10] BARRERA A, Olga Lucia. *El mundo de los pitagóricos*. (2001). Inv. 30136. Biblioteca Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander.

[11] TEOREMA DE PITÁGORAS. Tomado:  
[http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_de\\_Pit%C3%A1goras#Demostraciones](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pit%C3%A1goras#Demostraciones)

[12] OLMOS MILLAN, Alfredo. MARTINEZ C, Luis Carlos. Serie Matemática Práctica 8°. Editorial Voluntad S. A. Bogotá, Colombia. 1990

[13] LOOMIS, Elisha, S. *The Pythagorean Proposition*, Cleveland 1940; Segunda edición por el NCTM, USA, 1972.

[14] MOISE, Edwin E. DOWNS, Floyd L. Serie Matemática Moderna, Geometría. Fondo Educativo Interamericano S.A. Editorial Norma. 1972.

## **ANEXOS**

# ANEXO 1.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
 Escuela de Matemáticas  
 Proyecto de Grado II  
 Diez Demostraciones Visuales del Teorema de Pitágoras  
**Sesión Profesores: Grupo EDUMAT-UIS**

Nombre: \_\_\_\_\_

Institución educativa: \_\_\_\_\_

Las siguientes son las diez demostraciones del Teorema de Pitágoras (en el orden en que se presentaron). Clasifíquelas de 1 a 10, según su preferencia a la hora de enseñar el concepto, marcando debajo de cada posición el número de la demostración correspondiente. Al respaldo de esta hoja puede dar sus observaciones con respecto a su clasificación.

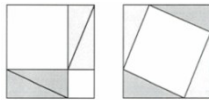
### Clasificación

Mayor preferencia

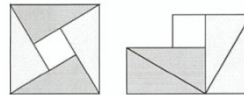
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Menor preferencia

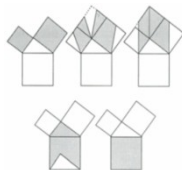
**Demostración 1.**



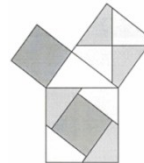
**Demostración 2.**



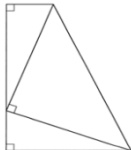
**Demostración 3.**



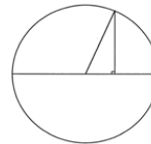
**Demostración 4.**



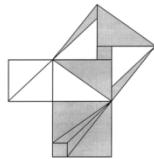
**Demostración 5.**



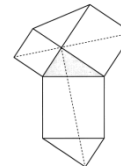
**Demostración 6.**



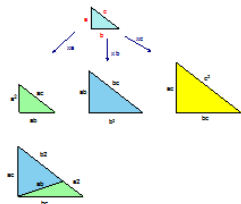
**Demostración 7.**



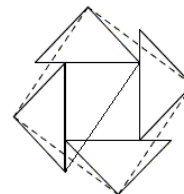
**Demostración 8.**



**Demostración 9.**



**Demostración 10.**



## ANEXO 2.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
 Escuela de Matemáticas  
 Proyecto de Grado II  
 Diez Demostraciones Visuales del Teorema de Pitágoras  
**Sesión Estudiantes: Grupo Semillero Euler-UIS**

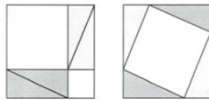
Nombre: \_\_\_\_\_

Institución educativa: \_\_\_\_\_

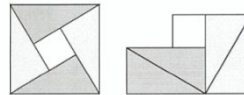
Las siguientes son las diez demostraciones del Teorema de Pitágoras (en el orden en que se presentaron). Clasifíquelas de 1 a 10, según su preferencia a la hora de adquirir el concepto, marcando debajo de cada posición el número de la demostración correspondiente. Al respaldo de esta hoja puede dar sus observaciones con respecto a su clasificación.

	Clasificación										
Mayor preferencia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Menor preferencia

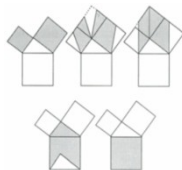
**Demostración 1.**



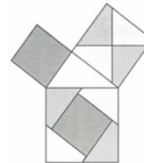
**Demostración 2.**



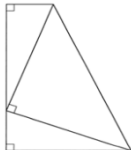
**Demostración 3.**



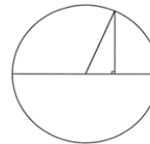
**Demostración 4.**



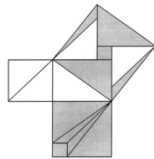
**Demostración 5.**



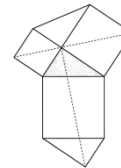
**Demostración 6.**



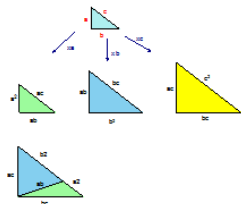
**Demostración 7.**



**Demostración 8.**



**Demostración 9.**



**Demostración 10.**

