

INTRODUCCIÓN A LOS GRUPOS DE LIE

LEIDY MILENA CARRILLO JAIMES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

2004

INTRODUCCIÓN A LOS GRUPOS DE LIE

LEIDY MILENA CARRILLO JAIMES

Monografía para optar al título de
Licenciada en Matemáticas

Director

Marlio Paredes Gutierrez

Ph. D. en Matemática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

2004

TITLE: INTRODUCTION TO LIE GROUPS¹

AUTHOR: LEIDY MILENA CARRILLO JAIMES²

KEY WORDS: Manifold

Diferentiable

Group

Topology

Lie

Algebra

The subject of this monograph is included in the maths area kown as differential geometry as well as in general topology, which is very important for maths.

In this work we try to make an introductory study of the theory of Lie groups, based on the properties of other mathematical structures as the topology groups and diferentiable manifolds, also we find an algebra asociated to the group itself.

This work has five chapters:

in the first, introductory chapter we have the fundamental definitions, examples and prepositions that are going toserve us as a base for understanding this subject, chapters two and three show the properties of topological groups and diferentiable manifolds in general; in chapter four we study some definitions and properties of the vectorial fields about diferentiable manifolds, the last chapter is about basic definitions and properties of Lie grups that together with some examples introduce them to the theory.

This monograph was developed in the research project: geometry of homogeneous manifolds associated to complex semi-simple Lie groups, supported by Colciencias.

¹Monografía

²Faculty of Sciences. Department of Mathematics. Paredes, Marlio

TITULO: INTRODUCCIÓN A LOS GRUPOS DE LIE¹

AUTOR: LEIDY MILENA CARILLO JAIMES²

PALABRAS CLAVES: Variedad

Diferenciable

Grupo

Topología

Lie

Álgebra

El tema de esta monografía está ubicado dentro del área de la matemática moderna conocida como Geometría Diferencial y también en parte se encuentra inmerso dentro del área de la topología general, el cual es muy importante en las matemáticas.

Se pretende con este trabajo realizar un estudio de introducción a la teoría de los grupos de Lie, basados en las propiedades de otras estructuras matemáticas como lo son los grupos topológicos y las variedades diferenciables. También se muestra el álgebra asociada con el grupo mismo.

Este trabajo está conformado por cinco capítulos:

En el primero encontramos los preliminares donde se hace un resumen de las principales definiciones, ejemplos y proposiciones que nos van a servir de base para entender el tema, en los capítulos dos y tres se muestran las propiedades de los grupos topológicos y de las variedades diferenciables en general, en el capítulo cuatro se estudian algunas definiciones y propiedades de los campos vectoriales sobre variedades diferenciables, y por último el capítulo cinco contiene las definiciones básicas y las propiedades de los grupos de Lie que junto con algunos ejemplos introducen a la teoría de los grupos de Lie.

¹Monografía

²Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Paredes, Marlio.

Esta monografía se desarrolló dentro del proyecto de investigación: geometría de variedades homogéneas asociadas a grupos semisimples complejos, financiado por Colciencias.

Tabla de Contenido

Introducción	1
Preliminares	3
Grupos Topológicos	10
Variedades diferenciables	16
Vectores tangentes y campos vectoriales	24
Espacios tangentes	24
Vectores tangentes como derivación	26
Campos vectoriales	29
Grupos de Lie	32
El álgebra de Lie de un grupo de Lie G	35

Introducción

En el curso de álgebra moderna se estudia cómo un conjunto, dotado con una operación que cumple algunas propiedades forma una estructura llamada estructura de grupo.

Por otro lado en el curso de topología se estudia cómo un conjunto X y una familia de subconjuntos de X , que satisfacen ciertas condiciones, determinan una estructura llamada espacio topológico.

De estas dos estructuras se derivan los **grupos topológicos** que corresponden entonces a un conjunto dotado simultáneamente de estructura de grupo y de espacio topológico.

En el área de la matemática moderna conocida como geometría diferencial se estudian las **variedades diferenciables** que son importantes para el estudio del cálculo diferencial e integral en espacios más generales que el espacio euclidiano, por ejemplo cierto tipo de espacios topológicos.

Los **Grupos de Lie** son estructuras que combinan la estructura de grupo topológico y la de variedad diferenciable junto con ciertas condiciones. Diversas propiedades de los grupos de Lie dependen de su topología y de su estructura de variedad diferenciable.

Sophus Lie fue un matemático noruego del siglo XIX quien junto con Félix Klein propusieron la “Teoría de los grupos continuos” como fue llamada originalmente, esta fue una manera de unificar la geometría euclidiana y la geometría no euclidiana. Aunque este tema se comenzó a estudiar en el siglo XIX solo tuvo éxito en el siglo XX, caracterizado por el trabajo de Borel y Hirzebruch en las llamadas “Clases características”, estos son invariantes topológicos que combinan: los grupos de Lie, la geometría diferencial, la topología, y claro, el álgebra asociada con el grupo mismo.

Considerando de interés este tema se hace una revisión bibliográfica para comprender la teoría de los grupos de Lie, en la primera parte encontramos los preliminares donde

se muestra una serie de definiciones básicas para iniciar el estudio, en los capítulos 2 y 3 se muestran las propiedades de los grupos topológicos y de las variedades diferenciables en general, en el capítulo 4 se estudia algunas definiciones y propiedades de los campos vectoriales sobre variedades diferenciables, y por último el capítulo 5 contiene las definiciones básicas y las propiedades de los grupos de Lie que junto con algunos ejemplos introducen a la teoría de los grupos de Lie.

Capítulo 1

Preliminares

Es necesario contextualizar siempre que emprendemos cualquier actividad; es por esto que en este capítulo se muestran las principales definiciones y teoremas, que se usarán en el desarrollo del tema a tratar, los cuales se estudian en la teoría de grupos y en topología. El manejo de estas definiciones facilitará la comprensión de la teoría de grupos de Lie.

Definición 1.1 *Sea $n > 0$ un entero, un arreglo de números reales (x_1, x_2, \dots, x_n) se llama punto n -dimensional o vector con n componentes. El número x_k es la k -ésima coordenada del punto. El conjunto de todos los puntos n -dimensionales se llama espacio euclideo n -dimensional y se designa por \mathbb{R}^n .*

Definición 1.2 *Un grupo G es un conjunto de elementos con una operación binaria, (esta operación es usualmente denominada multiplicación, se nota por ab , donde generalmente ab no es igual a ba), tal que:*

- i) Para todo par ordenado de elementos a, b de G , el producto $ab = c$ existe y es un elemento único de G .*

ii) Existe un elemento 1 tal que $1a = a$, para todo a de G ; 1 es llamado unidad por la izquierda de G .

iii) Para todo a de G , existe un elemento x de G tal que $xa = 1$; x es llamado inverso por la izquierda de a .

iv) La operación es asociativa.

Proposición 1.1 Si un conjunto de elementos cumple las condiciones de la definición anterior entonces: La unidad por la izquierda es a la vez unidad por la derecha y, un elemento inverso por la izquierda es a la vez inverso por la derecha.

Demostración. Para un a dado, tenemos $xa = 1$ y por la condición iii) existe y tal que, $yx = 1$. Luego $ax = 1$ ($ax = (yx)(ax) = y[x(ax)] = y(xa)x = y(1x) = yx = 1$ es decir, $ax = 1$; así un elemento inverso por la izquierda es a la vez un inverso por la derecha. Además, $a = 1a = (ax)a = a(xa) = a1$ es decir, $a = a1$; así la unidad por la izquierda es a la vez unidad por la derecha. ■

Ejemplo 1.1 El n -espacio euclídeano, es decir (\mathbb{R}^n, \circ) es un grupo; donde la operación \circ está definida así:

Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ entonces $x \circ y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ y $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$, además la unidad es igual a $(0, 0, \dots, 0)$.

Ejemplo 1.2 Los números complejos distintos de cero denotados por, \mathbb{C}^* , junto con la multiplicación de complejos tienen estructura de grupo.

Definición 1.3 Un subconjunto H de un grupo G , puede él mismo formar un grupo con respecto al producto definido en G . Tal conjunto de elementos H se llama un subgrupo de G .

Ejemplo 1.3 Podemos considerar la circunferencia $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ como subgrupo del grupo $(\mathbb{C}^*, \text{multiplicación de complejos})$.

Definición 1.4 Sean $(G, *)$ y (G', \cdot) grupos. Una aplicación f de un grupo G en un grupo G' se llama homomorfismo si conserva la operación es decir, $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$ para dos elementos cualesquiera x, y de G . Si además f es biyectiva se dice que es un isomorfismo de grupos.

Definición 1.5 Dados dos grupos G y G' podemos formar, partiendo de ellos, el conjunto de todos los pares ordenados (g, g') , $g \in G$, $g' \in G'$. Estos pares ordenados serán los elementos de un nuevo grupo, el producto directo $G \times G'$, si definimos nuestro producto por la regla $(g_1, g'_1)(g_2, g'_2) = (g_1g_2, g'_1g'_2)$ esta satisface todos los axiomas de grupo.

Definición 1.6 Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ puntos de \mathbb{R}^n , definimos la distancia euclidiana entre x y y como

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Definición 1.7 Sea $\varepsilon > 0$ y $a \in \mathbb{R}^n$. El conjunto de todos los puntos x de \mathbb{R}^n , tales que $d(x, a) < \varepsilon$ se denomina **bola abierta** con centro en a y radio ε . Designamos este conjunto por $B(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < \varepsilon\}$.

Definición 1.8 Una **topología** sobre un conjunto no vacío E se puede definir si se dá una colección de abiertos τ de subconjuntos de E que satisfacen:

- i) El subconjunto vacío y E mismo pertenecen a τ .
- ii) Si F y G son dos conjuntos que pertenecen a τ , entonces $F \cap G$ pertenece a τ .
- iii) Si $\{F_i\}_{i \in I}$ es una familia arbitraria de conjuntos de τ , entonces $\bigcup_{i \in I} F_i$ es un elemento de τ .

Definición 1.9 Un conjunto E junto con una topología definida sobre él, se llama espacio topológico, y se dice que E está dotado de esta topología.

Ejemplo 1.4 Sea \mathbb{X} un conjunto y $\tau = \{\phi, \mathbb{X}\}$, τ es una topología sobre \mathbb{X} , llamada topología indiscreta o trivial y (\mathbb{X}, τ) es un espacio topológico.

Ejemplo 1.5 Sea \mathbb{X} un conjunto infinito, A es abierto si y solo si $A = \phi$ ó A^c es finito,

$$\tau = \{A : A \text{ es abierto}\}.$$

i) $\mathbb{X}^c = \phi$, ϕ es finito entonces $\mathbb{X} \in \tau$.

ii) sea $\mathfrak{F} = \{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$. Como A_i^c es finito, para cada $i \in I$,

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \text{ es finito, es decir } \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau.$$

iii) Sea $\mathfrak{F} = \{A_i, i = 1, 2, \dots, n\} \subseteq \tau$.

*Si $A_i = \phi$ para algún $i = 1, 2, \dots, n$ entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i = \phi$ y $\phi \in \tau$.

*Si $A_i \neq \phi$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ entonces $\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$ como A_i^c es finito y

la unión de conjuntos finitos es un conjunto finito, entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i^c$ es un conjunto

finito luego $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.

Así τ es una topología sobre \mathbb{X} conocida como la topología cofinita y (\mathbb{X}, τ) es un espacio topológico.

Definición 1.10 Sea (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$, $V \subseteq X$, se dice que V es vecindad de x si existe un abierto O tal que :

$$x \in O \subseteq V$$

Definición 1.11 Sea (E, τ) un espacio topológico. Una familia $\beta \subseteq \tau$ de abiertos de τ se dice que es una base para τ , si todo abierto de τ es unión de elementos de β . Si es así los elementos de β se llaman abiertos básicos.

Definición 1.12 Sean (X, τ) y (Y, σ) espacios topológicos, se define la topología producto $X \times Y$ como la topología que tiene como base la familia

$$\beta = \{U \times V \mid U \in \tau, V \in \sigma\}.$$

Ejemplo 1.6 El conjunto de todos los intervalos abiertos de \mathbb{R} es una base para la topología usual de \mathbb{R} y el conjunto de los rectángulos abiertos es una base para la topología usual de \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.7 Si

$$X = \{a, b, c, d, e\} \text{ y } \tau = \{\phi, X, \{a\}, \{d, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d, e\}\},$$

entonces $\beta = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}\}$ es una base para τ .

Definición 1.13 Sean (A, τ) y (B, μ) espacios topológicos y sea $f : A \longrightarrow B$ una función de A en B , diremos que f es continua si y solo si para todo $G \in \mu$ se cumple que $f^{-1}(G) \in \tau$.

Ejemplo 1.8 Sean los espacios topológicos $A = \{a, b, c, d\}$ dotado de la topología $\tau = \{\phi, A, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dotado de la topología $\mu = \{\phi, B, \{2, 5\}, \{1, 2, 5\}\}$.

La función

$$\begin{array}{rcl}
 f : & A & B \\
 & a & 1 \\
 & b & 2 \\
 & c & 3 \\
 & & 4 \\
 & d & 5
 \end{array}$$

es continua en el punto c ya que $f(c) = 1$, y el conjunto de vecindades de 1 es $\mathcal{V}(1) = \{\{1, 2, 5\}, B\}$ para cualquier vecindad v' de $f(c) = 1$ que se tome, tenemos que $f^{-1}(v') \in \tau$.

Definición 1.14 Sean (A, τ) y (B, μ) espacios topológicos, un homeomorfismo entre A y B es una función $g : A \rightarrow B$ que es biyectiva y bicontinua, es decir, g y g^{-1} son continuas.

Ejemplo 1.9 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$ es un homeomorfismo de \mathbb{R} consigo mismo.

Ejemplo 1.10 Sean los espacios topológicos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dotado de la topología $\tau = \{\phi, A, \{1, 2\}, \{2\}\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$ dotado de la topología $\mu = \{\phi, B, \{c, d\}, \{c\}\}$. Los espacios (A, τ) y (B, μ) son homeomorfos; un homeomorfismo es la función $f : A \rightarrow B$ definida así: $f(1) = d$, $f(2) = c$, $f(3) = a$, $f(4) = b$.

Definición 1.15 Una álgebra de Lie consiste de un espacio vectorial \mathfrak{g} dotado de un producto ó corchete

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

con las siguientes propiedades:

1. Es bilineal.
2. Antisimétrico, esto es, $[X, X] = 0$, para todo $X \in \mathfrak{g}$.
3. Satisface la identidad de Jacobi, es decir, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

Ejemplo 1.11 \mathbb{R}^3 es una álgebra de Lie con el producto de Lie

$$[x, y] = x \times y.$$

Ejemplo 1.12 $gl(n, \mathbb{K})$ el espacio de todas las transformaciones lineales de un espacio vectorial de dimensión n sobre \mathbb{K} ; es decir el espacio de las matrices $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{K} es una álgebra de Lie. En este caso el corchete está dado por

$$[X, Y] = XY - YX,$$

donde X y Y son matrices con coeficientes en \mathbb{K} .

Finalmente, presentamos un teorema del análisis clásico, conocido como el teorema de la función implícita, el cual necesitaremos para la demostración de un teorema en el capítulo 5.

Teorema 1.1 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ abierto y sea $(a, b) \in \Omega$. Suponga que $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ pertenece a la clase $C^1(\Omega)$, que $F(a, b) = 0$, y que la aplicación lineal definida por

$$L_2(v) = DF(a, b)(0, v), \quad v \in \mathbb{R}^q,$$

es una biyección de \mathbb{R}^q sobre \mathbb{R}^q .

a) Entonces existe una vecindad abierta W de $a \in \mathbb{R}^p$ y una función única $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^q$ perteneciente a la clase $C^1(W)$ tal que $b = \varphi(a)$ y

$$F(x, \varphi(x)) = 0, \quad \text{para toda } x \in W.$$

b) Existe una vecindad abierta U de (a, b) en $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ tal que el par $(x, y) \in U$ satisface $F(x, y) = 0$ si y solo si $y = \varphi(x)$, para $x \in W$.

Capítulo 2

Grupos topológicos

Diversas propiedades de los grupos de Lie dependen de su topología y de su estructura de variedad diferenciable, estudiaremos esas propiedades para grupos topológicos y variedades diferenciables generales.

Definición 2.1 *Un grupo topológico es un grupo dotado de una topología que cumple:*

- 1) *La función $p : G \times G \rightarrow G$, $p(g_1, g_2) = g_1 g_2$ es continua, cuando se considera $G \times G$ con la topología producto y*
- 2) *la función $i : G \rightarrow G$, $i(g) = g^{-1}$ es continua.*

De forma alternativa, G es un grupo topológico, si la aplicación $\hat{p} : G \times G \rightarrow G$ definida por $\hat{p}(g, h) = gh^{-1}$ es continua.

De aquí, \hat{p} es continua si p e i son continuas y si \hat{p} es continua entonces $g \rightarrow (1, g) \rightarrow g^{-1}$ es continua, por lo tanto $p(g, h) = \hat{p}(g, h^{-1})$ es continua para cada $g \in G$. Definimos las siguientes aplicaciones:

- Traslación a izquierda $l_g : G \rightarrow G$, $l_g(h) = gh$,
- Traslación a derecha $r_g : G \rightarrow G$, $r_g(h) = hg$

· Conjugación (*automorfismo interno*) $C_g : G \rightarrow G$, $C_g(h) = ghg^{-1}$

Estas aplicaciones son continuas pues $l_g = p \circ S_{g,1}$ y $r_g = p \circ S_{g,2}$, donde $S_{g,1}(h) = (g, h)$ y $S_{g,2}(h) = (h, g)$ son aplicaciones continuas de $G \rightarrow G \times G$. De estas definiciones se sigue que $l_g \circ l_{g^{-1}} = r_g \circ r_{g^{-1}} = \text{Identidad}$ y estas igualdades muestran que las translaciones l_g y r_g son homeomorfismos con $(l_g)^{-1} = l_{g^{-1}}$ y $(r_g)^{-1} = r_{g^{-1}}$.

Ejemplo 2.1 S^1 visto como $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ o como \mathbb{R}/\mathbb{Z} , pues esta partición se reduce a un segmento de recta cuyos puntos extremos son en realidad el mismo punto lo que representa la circunferencia S^1 , es un grupo topológico con el producto de números complejos.

Ejemplo 2.2 Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos. Un producto cartesiano $G = \prod_{i \in I} G_i$ es un conjunto formado por las aplicaciones $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i$ tales que $f(i) \in G_i$ para todo $i \in I$. Un producto cartesiano admite una estructura de grupo en el que el producto es dado componente a componente: $(fg)(i) = f(i)g(i)$.

Una topología producto en $\prod_{i \in I} G_i$ es generada por abiertos de la forma $\prod_{i \in I} A_i$ con $A_i \subset G_i$ abiertos, $i \in I$ y $A_i = G_i$ salvo en un número finito de índices. Como es un producto componente a componente y cada G_i es un grupo topológico, G es un grupo topológico con la topología producto. En particular, si I es un conjunto finito, $\prod_{i \in I} G_i = G_1 \times \dots \times G_n$, sus elementos son n -uplas, $g = (g_1, \dots, g_n)$, $g_i \in G_i$. Su multiplicación es dada por $gh = (g_1h_1, \dots, g_nh_n)$ y una topología es generada por subconjuntos de la forma $A_1 \times \dots \times A_n$ con $A_i \subset G_i$ abierto.

Proposición 2.1 Sean $A \subset G$ un conjunto abierto no vacío y $g \in A$. Entonces $g^{-1}A$ y Ag^{-1} son vecindades del elemento neutro de G .

Demostración. Sea $g \in A$, como $g^{-1}g = 1$ entonces $1 \in g^{-1}A$. Además $g^{-1}A = \{g^{-1}x : x \in A\}$ es una traslación a izquierda $L_{g^{-1}}$, como las traslaciones son homeomorfismos $g^{-1}A$ es abierto si A es abierto.

Así $g^{-1}A$ es vecindad de cada uno de sus puntos en especial $g^{-1}A$ es vecindad de 1.

Análogamente Ag^{-1} es vecindad de 1. ■

De aquí se puede notar que toda la información sobre una topología de G está concentrada en el conjunto de las vecindades abiertas del elemento neutro. El conjunto de estas vecindades es denotado por $\mathcal{V}(1)$ o simplemente \mathcal{V} . La siguiente proposición enumera algunas propiedades de \mathcal{V} .

Proposición 2.2 *Sea G un grupo topológico, entonces \mathcal{V} el conjunto de vecindades abiertas del elemento neutro 1 tiene las siguientes propiedades:*

- 1) *El elemento neutro 1 pertenece a todos los elementos de \mathcal{V} .*
- 2) *Dados dos conjuntos U, V en \mathcal{V} , $U \cap V$ está en \mathcal{V} .*
- 3) *Para todo $U \in \mathcal{V}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V^2 \subset U$.*
- 4) *Dado $U \in \mathcal{V}$, $U^{-1} \in \mathcal{V}$.*
- 5) *Para todo $g \in G$ y $U \in \mathcal{V}$, $gUg^{-1} \in \mathcal{V}$.*

Demostración. La propiedad 1) se tiene por definición y la propiedad 2) se tiene para las vecindades de un punto en un espacio topológico cualquiera.

La propiedad 3), es equivalente a la continuidad del producto en 1, luego $p^{-1}(U) \subset G \times G$ es un abierto que contiene a $(1, 1)$; por tanto, existe un abierto V de G , con $(1, 1) \in V \times V \subset p^{-1}(U)$, esto significa que $V^2 = p(V \times V) \subset U$.

La propiedad 4) se tiene inmediatamente de la continuidad de la función i de la definición de grupo topológico.

Por último la propiedad 5) se sigue de que $g1g^{-1} = 1$ y $C_g(x) = gxg^{-1}$ es continua. ■

Las propiedades enunciadas en esta proposición caracterizan completamente el conjunto de las vecindades de la identidad.

Definición 2.2 *Un sistema de vecindades de la identidad en un grupo topológico G es una familia de conjuntos \mathcal{V} que satisface las propiedades de la proposición anterior.*

Definición 2.3 *Sea G un grupo, una topología τ en G es invariante a izquierda si gA es abierto en τ para todo $g \in G$ y $A \in \tau$. De forma similar se define la topología invariante a derecha.*

Lema 2.1 *Sea G dotado de una topología τ invariante a izquierda y a derecha, entonces, G es un grupo topológico si y solo si:*

1. p es continua en $(1, 1)$ y
2. $i : G \rightarrow G$ es continua en 1 .

Demostración. Es claro que las condiciones son necesarias.

La suficiencia se sigue de las igualdades, cuyas demostraciones son inmediatas.

1) Dado $(g, h) \in G \times G$ sean $L_{(g,h)}$ y $R_{(g,h)}$ las traslaciones a izquierda y a derecha en $G \times G$ respectivamente. Entonces $p \circ L_{(g,1)} = L_g \circ p$ y $p \circ R_{(1,g)} = R_g \circ p$.

2) Dado $g \in G$, $i \circ L_g = R_{g^{-1}} \circ i$.

Ahora tomamos $(g, h) \in G \times G$. Entonces $p \circ L_{(g,1)} \circ R_{(1,h)} = L_g \circ R_h \circ p$, el segundo miembro de esta igualdad es una aplicación continua en $(1, 1)$ pues $L_g \circ R_h$ es homeomorfismo.

Por lo tanto, $p \circ L_{(g,1)} \circ R_{(1,h)}$ es continua en $(1, 1)$.

Ademas $L_{(g,1)} \circ R_{(1,h)}$ es un homeomorfismo, luego p es continua en 1 y de ahí i es continua en $g = L_g(1)$. ■

Definición 2.4 *Un sistema fundamental de vecindades de un punto x en un espacio topológico X es una familia \mathfrak{F} , de abiertos de X , tal que cada elemento de \mathfrak{F} contiene a x y si $A \subset X$ es un abierto con $x \in A$ entonces existe $B \in \mathfrak{F}$ tal que $B \subset A$.*

Proposición 2.3 *Sea G un grupo, y suponga que \mathcal{V} es un sistema de vecindades de la identidad en G , entonces existe una única topología τ que torna G en un grupo topológico de tal forma que \mathcal{V} es un sistema de vecindades del elemento neutro en relación a τ .*

Demostración. Definimos τ como una familia de subconjuntos $A \subset G$ tales que para todo $g \in A$, existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $gU \subset A$.

Es claro que los conjuntos \emptyset y G son elementos de τ .

Para ver que τ es una topología tomamos $A, B \in \tau$ y $x \in A \cap B$. Entonces, existen $U, V \in \mathcal{V}$ tales que $xU \subset B$. Por la propiedad 2 de la proposición 2.2 se tiene que, $U \cap V \in \mathcal{V}$. Además $x(U \cap V) = xU \cap xV \subset A \cap B$, por lo tanto $A \cap B \in \tau$.

La definición de τ muestra que una unión cualquiera de conjuntos de τ es un elemento de τ .

Ahora las vecindades abiertas de 1 en relación a τ son elementos de \mathcal{V} . La propia definición de τ muestra que los elementos de \mathcal{V} son vecindades de 1. Por otro lado, sea U una vecindad de 1 en relación a τ . Entonces existe $v \in \mathcal{V}$ tal que $1v \subset U$, luego \mathcal{V} es un sistema fundamental de vecindades de 1 en relación a τ .

La definición de τ y la propiedad 5 de la proposición 2.2 garantizan que τ es invariante a derecha y a izquierda, luego una traslación a izquierda gU , $u \in \mathcal{V}$, es también una traslación a derecha de la forma $gU = (gUg^{-1})g$, por la propiedad 5 de la proposición 2.2 si $U \in \mathcal{V}$ entonces $gUg^{-1} \in \mathcal{V}$. Luego por el lema 2.1 se garantiza que G unido de la topología τ es un grupo topológico, se verifica que p e i son continuas en $(1, 1)$ y 1 respectivamente.

Estas continuidades son equivalentes a las propiedades 3 y 4 de la proposición 2.2 respectivamente, concluyendo así la demostración de que G es un grupo topológico con la topología τ .

Para finalizar, supondremos que τ' es otra topología que satisface las mismas condiciones. Entonces \mathcal{V} es un sistema fundamental de vecindades de 1 en relación a τ' . Realizando

traslaciones a izquierda, se ve que gV , con V variando en \mathcal{V} , es un sistema fundamental de vecindades de $g \in G$.

Luego, para todo $A \in \tau'$ y $g \in A$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $gV \subset A$, de ahí que todo abierto de τ' es abierto en τ , esto es, $\tau' \subset \tau$.

Análogamente se prueba que $\tau \subset \tau'$ y así $\tau = \tau'$. ■

Definición 2.5 *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G . La topología de G induce una topología en H , cuyos abiertos son de la forma $A \cap H$ con A abierto en G . Con esa topología decimos que H es un subgrupo topológico.*

Se define $p_H : H \times H \rightarrow H$ el producto en H , que es una restricción a H del producto p de G . Para todo subconjunto $A \subset G$ se tiene $p_H^{-1}(A \cap H) = p^{-1}(A) \cap (H \times H)$.

En particular, si A es abierto, $p_H^{-1}(A \cap H)$ es un abierto de la topología inducida en $H \times H$ por la topología producto en $G \times G$. Esta topología inducida coincide con la topología producto de H . De ahí que p_H es continua y de la misma forma $i_H(h) = h^{-1}$ es continua en H .

Capítulo 3

Variedades diferenciables

Definición 3.1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es una aplicación n -veces **continuamente diferenciable** ó que f es de clase C^n , ($n \in \mathbb{N}$), si existen las derivadas parciales $\frac{\delta^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m} f}{(\delta x^1)^{\alpha_1} (\delta x^2)^{\alpha_2} \dots (\delta x^m)^{\alpha_m}}$ para $\alpha_i > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \leq n$ y además son funciones continuas en A .

La función es de clase C^∞ cuando es infinitamente diferenciable, es decir todas sus derivadas existen y todas son funciones continuas.

Definición 3.2 Sea (A, τ) un espacio topológico. Una **carta local** de dimensión n en A , es una pareja (U, φ) tal que:

1. $U \in \tau$,
2. $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo de U sobre un abierto $\varphi(U)$ de \mathbb{R}^n .

φ es llamada la función coordenada de la carta. La función inversa $\varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow U$ se llama un sistema local de coordenadas.

Definición 3.3 Dada una carta local (U, φ) de dimensión n en A y un punto $p \in U$ entonces $\varphi(p) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ las componentes de $\varphi(p)$ se llamarán **coordenadas locales de p respecto a la carta (U, φ)** .

Definición 3.4 Se dice que dos cartas locales de dimensión n sobre A , (U, φ) y (V, ψ) están C^∞ relacionadas si se cumple una de las siguientes afirmaciones:

1. $U \cap V = \emptyset$
2. Si $U \cap V \neq \emptyset$, entonces las funciones de transición

$$\varphi \circ \psi^{-1} = \varphi(U \cap V) \longrightarrow \varphi(U \cap V)$$

$$\psi \circ \varphi^{-1} = \psi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

son infinitamente diferenciables, es decir, de clase C^∞ .

Definición 3.5 Un atlas de dimensión n para A es una familia μ de cartas locales de dimensión n sobre A

$$\mu = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Delta \text{ y } \Delta \text{ es un conjunto}\} \text{ tales que } \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha = A.$$

Definición 3.6 Una estructura diferenciable de clase C^∞ sobre A es una colección $\mu = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Delta\}$ de cartas locales de dimensión n para la cual se verifican las siguientes condiciones:

1. $\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha = A$ (μ es un atlas para A).
2. Las cartas locales sobre A están dos a dos C^∞ relacionadas (μ es un atlas diferenciable).

Definición 3.7 Una variedad diferenciable de clase C^∞ es un par (A, μ) , donde A es un espacio topológico y μ es una estructura diferenciable de clase C^∞ sobre A . Si las cartas en μ son todas de dimensión n decimos que A tiene dimensión n .

Ejemplo 3.1 \mathbb{R}^n es una variedad diferenciable de dimensión n . Basta tomar $\mu_0 = \{(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})\}$ el cual es un atlas diferenciable con una sola carta que está formada por un abierto $U = \mathbb{R}^n$ y el homeomorfismo coordinado $\varphi = id_{\mathbb{R}^n}$ el cual es la identidad de \mathbb{R}^n .

Ejemplo 3.2 La circunferencia S^1

Sea la circunferencia

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

y consideramos la proyección estereográfica de S^1 sobre la recta real. Sea $N = (0, 1)$ y $S = (0, -1)$ polo norte y sur de S^1 respectivamente, probemos que S^1 es una variedad diferenciable, cuyo atlas tiene dos cartas el cual llamaremos atlas estereográfico.

Tomemos los abiertos U_N y U_S de S^1 definidos como:

$$U_N = S^1 - \{N\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge y \neq 1\},$$

$$U_S = S^1 - \{S\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge y \neq -1\}.$$

Ahora tomemos un punto $P = (x, y) \in S^1$ con $P \neq N$ y $P \neq S$ y consideremos las funciones dadas por $\phi_N(P) = \tilde{x}$ y $\phi_S(P) = \bar{x}$, en donde las coordenadas \tilde{x} y \bar{x} se pueden hallar utilizando semejanza de triángulos, cuyos vértices son los puntos $(0, 1)$, $(0, 0)$ y $(\tilde{x}, 0)$ para ϕ_N y $(0, 0)$, $(0, -1)$ y $(\bar{x}, 0)$ para ϕ_S respectivamente, entonces tenemos que,

$$\frac{\tilde{x}}{1} = \frac{\tilde{x} - x}{y} \implies \tilde{x}y = \tilde{x} - x \implies \tilde{x} = \frac{x}{1 - y},$$
$$\frac{\bar{x}}{1} = \frac{\bar{x} - x}{-y} \implies -\bar{x}y = \bar{x} - x \implies \bar{x} = \frac{x}{1 + y}.$$

Luego ϕ_N y ϕ_S están definidas como sigue:

$$\begin{array}{ll} \phi_N : U_N \longrightarrow \mathbb{R} & \phi_S : U_S \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto \phi_N(P) = \frac{x}{1-y} & P \longmapsto \phi_S(P) = \frac{x}{1+y}. \end{array}$$

De esta manera tenemos que las parejas (U_N, ϕ_N) y (U_S, ϕ_S) son cartas locales para S^1 . Sea $\mathfrak{A} = \{(U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S)\}$, veamos que \mathfrak{A} es un atlas diferenciable para S^1 :

1. $U_N \cup U_S = S^1$

2. Puesto que $U_N \cap U_S \neq \emptyset$ tenemos que verificar que las funciones

$$\phi_N \circ \phi_S^{-1} : \phi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \phi_N(U_N \cap U_S) = \mathbb{R} - \{0\},$$

$$\phi_S \circ \phi_N^{-1} : \phi_N(U_N \cap U_S) = \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \phi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{R} - \{0\},$$

son de clase C^∞ . Calculando el valor de ϕ_N^{-1} se tiene que

$$\begin{aligned} \phi_N^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow U_N \\ s &\longmapsto (x, y), \end{aligned}$$

sabemos que $s = \frac{x}{1-y}$ entonces $x = s(1-y)$ y $x^2 = s^2(1-y)^2$. Reemplazando en la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} s^2(1-y)^2 + y^2 &= 1 \implies s^2(1-2y+y^2) + y^2 = 1, \\ \implies (s^2+1)y^2 - 2s^2y + (s^2-1) &= 0. \end{aligned}$$

De donde $y = \frac{2s^2 \pm \sqrt{4s^4 - 4(s^2+1)(s^2-1)}}{2(s^2+1)} = \frac{2s^2 \pm 2}{2(s^2+1)} = \frac{s^2 \pm 1}{s^2+1}$ y puesto que $y \neq 1$, se concluye que $y = \frac{s^2-1}{s^2+1}$. De manera similar se calcula x y se obtiene que $x = \frac{2s}{s^2+1}$, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_N^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow U_N \\ s &\longmapsto \left(\frac{2s}{s^2+1}, \frac{s^2-1}{s^2+1} \right). \end{aligned}$$

Por otra parte calculando ϕ_S^{-1} obtenemos

$$\begin{aligned} \phi_S^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow U_S \\ s &\longmapsto \left(\frac{2s}{s^2+1}, \frac{1-s^2}{s^2+1} \right). \end{aligned}$$

Realizando la composición de funciones tenemos que

$$\phi_N \circ \phi_S^{-1}(s) = \phi_N \left(\frac{2s}{s^2+1}, \frac{1-s^2}{s^2+1} \right) = \frac{\frac{2s}{s^2+1}}{1 - \frac{1-s^2}{s^2+1}} = \frac{1}{s},$$

$$\phi_S \circ \phi_N^{-1}(s) = \phi_S \left(\frac{2s}{s^2+1}, \frac{s^2-1}{s^2+1} \right) = \frac{\frac{2s}{s^2+1}}{1 + \frac{s^2-1}{s^2+1}} = \frac{1}{s}.$$

Las cuales son funciones infinitamente diferenciables, es decir de clase C^∞ .

Luego el conjunto $\mathfrak{A} = \{(U_N, \phi_N); (U_S, \phi_S)\}$ constituye un atlas diferenciable para S^1 el cual llamaremos atlas estereográfico. Por lo tanto S^1 es una variedad diferenciable de dimensión 1.

Ejemplo 3.3 Ahora probaremos que S^1 admite otro atlas diferenciable llamado atlas hemisférico, para el cual vamos a considerar los siguientes abiertos de S^1 definidos por

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, \wedge, y > 0\} \text{ "Hemisferio superior"},$$

$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, \wedge, y < 0\} \text{ "Hemisferio inferior"},$$

$$U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, \wedge, x > 0\} \text{ "Hemisferio derecho"},$$

$$U_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, \wedge, x < 0\} \text{ "Hemisferio izquierdo"}.$$

Ahora consideremos los homeomorfismos coordenados

$$\phi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ de finido por } \phi_1(x, y) = x,$$

$$\phi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ de finido por } \phi_2(x, y) = x,$$

$$\phi_3 : U_3 \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ de finido por } \phi_3(x, y) = y,$$

$$\phi_4 : U_4 \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ de finido por } \phi_4(x, y) = y.$$

Obsérvese, que tanto la imagen de U_1 por ϕ_1 como la imagen U_2 por ϕ_2 es el intervalo abierto en \mathbb{R}

$$D_1 = \phi_1(U_1) = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\} = \phi_2(U_2),$$

de igual manera se tiene que

$$D_2 = \phi_3(U_3) = \{y \in \mathbb{R} : -1 < y < 1\} = \phi_4(U_4).$$

Así, las inversas de los homeomorfismos coordenados están dadas por

$$\begin{aligned}\phi_1^{-1} : D_1 &\longrightarrow U_1, & \phi_1^{-1}(x) &= (x, \sqrt{1-x^2}), \\ \phi_2^{-1} : D_1 &\longrightarrow U_2, & \phi_2^{-1}(x) &= (x, -\sqrt{1-x^2}), \\ \phi_3^{-1} : D_2 &\longrightarrow U_3, & \phi_3^{-1}(y) &= (\sqrt{1-y^2}, y), \\ \phi_4^{-1} : D_2 &\longrightarrow U_4, & \phi_4^{-1}(y) &= (-\sqrt{1-y^2}, y).\end{aligned}$$

Tenemos entonces que las parejas (U_i, ϕ_i) , $i = 1, 2, \dots, 4$, son cartas locales para S^1 .

Ahora probemos que la familia $\mathfrak{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i=1,2,\dots,4}$ de cartas locales es un atlas diferenciable para S^1 :

1. Claramente, $\bigcup_{i=1}^4 U_i = S^1$.

2. Verifiquemos que las cartas están dos a dos C^∞ relacionadas, es decir, comprobemos que las funciones de transición

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

son infinitamente diferenciables o equivalentemente que son de clase C^∞ .

Puesto que los intervalos D_1 y D_2 son intervalos abiertos, entonces se tiene que las raíces, admiten derivadas de todos los órdenes y por lo tanto cada ϕ_i también las posee.

Calculemos los $U_i \cap U_j$, esto es

$$\begin{aligned}U_1 \cap U_2 &= \emptyset, \\ U_1 \cap U_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge y > 0 \wedge x > 0\}, \\ U_1 \cap U_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge y > 0 \wedge x < 0\}, \\ U_2 \cap U_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge y < 0 \wedge x > 0\}, \\ U_2 \cap U_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge y < 0 \wedge x < 0\}, \\ U_3 \cap U_4 &= \emptyset.\end{aligned}$$

Llamando $A_{ij} = \phi_1(U_i \cap U_j)$ y usando los cálculos anteriores obtenemos

$$A_{13} = \phi_1(U_1 \cap U_3) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\} \subset D_1,$$

$$A_{31} = \phi_3(U_1 \cap U_3) = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y < 1\} \subset D_2,$$

$$A_{41} = \phi_4(U_1 \cap U_4) = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y < 1\} \subset D_2,$$

$$A_{23} = \phi_2(U_2 \cap U_3) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\} \subset D_1,$$

$$A_{14} = \phi_1(U_1 \cap U_4) = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 0\} \subset D_1,$$

$$A_{32} = \phi_3(U_2 \cap U_3) = \{y \in \mathbb{R} : -1 < y < 0\} \subset D_2,$$

$$A_{24} = \phi_2(U_2 \cap U_4) = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 0\} \subset D_1,$$

$$A_{42} = \phi_4(U_2 \cap U_4) = \{y \in \mathbb{R} : -1 < y < 0\} \subset D_2.$$

Realizando el cálculo de las funciones de transición $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ en las cuales la intersección $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ tenemos

$$\begin{aligned} \phi_1 \circ \phi_3^{-1} : A_{31} &\rightarrow A_{13}, & \phi_1 \circ \phi_3^{-1}(x) &= \left(\sqrt{1-y^2}\right), \\ \phi_4 \circ \phi_1^{-1} : A_{14} &\rightarrow A_{41}, & \phi_4 \circ \phi_1^{-1}(x) &= \left(\sqrt{1-x^2}\right), \\ \phi_3 \circ \phi_2^{-1} : A_{23} &\rightarrow A_{32}, & \phi_3 \circ \phi_2^{-1}(x) &= \left(-\sqrt{1-x^2}\right), \\ \phi_2 \circ \phi_3^{-1} : A_{32} &\rightarrow A_{23}, & \phi_2 \circ \phi_3^{-1}(y) &= \left(\sqrt{1-y^2}\right), \\ \phi_4 \circ \phi_2^{-1} : A_{24} &\rightarrow A_{42}, & \phi_4 \circ \phi_2^{-1}(x) &= \left(-\sqrt{1-x^2}\right), \\ \phi_2 \circ \phi_4^{-1} : A_{42} &\rightarrow A_{24}, & \phi_2 \circ \phi_4^{-1}(y) &= \left(-\sqrt{1-y^2}\right), \\ \phi_3 \circ \phi_1^{-1} : A_{13} &\rightarrow A_{31}, & \phi_3 \circ \phi_1^{-1}(x) &= \left(\sqrt{1-x^2}\right), \\ \phi_1 \circ \phi_4^{-1} : A_{41} &\rightarrow A_{14}, & \phi_1 \circ \phi_4^{-1}(y) &= \left(-\sqrt{1-y^2}\right). \end{aligned}$$

Puesto que el discriminante de la raíz es siempre mayor que cero en cada A_{ij} y como las raíces cuadradas admiten derivadas de todos los ordenes entonces tenemos que las funciones de transición $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ son de clase C^∞ .

Luego tenemos que la familia de cartas

$$\mathfrak{A} = \{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2), (U_3, \phi_3), (U_4, \phi_4)\}$$

es un atlas diferenciable para S^1 , denominado atlas hemisférico. Por lo tanto, tenemos que S^1 es una variedad diferenciable de dimensión 1.

Ejemplo 3.4 La esfera 2-dimensional $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es una variedad diferenciable de dimensión 2.

Ejemplo 3.5 La esfera $S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}$ es una variedad diferenciable de dimensión n , basta utilizar la proyección estereográfica de S^n en \mathbb{R}^n para demostrarlo.

Definición 3.8 Sean M y N variedades diferenciables de clase C^∞ . Una aplicación $\varphi : M \rightarrow N$ se dice que es diferenciable de clase C^∞ , o simplemente diferenciable, si para todo $p \in M$ existe una carta (U_1, φ_1) de p en M y una carta (U_2, φ_2) para $\varphi(p)$ en N , con $\varphi(U_1) \subset U_2$ tales que

$$\varphi_2 \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es C^∞ .

Definición 3.9 Sean M y N variedades diferenciables. Una aplicación $\varphi : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo si es una aplicación biyectiva diferenciable y su inversa φ^{-1} es una aplicación diferenciable.

Capítulo 4

Vectores tangentes y campos vectoriales

4.1. Espacio tangente

Una de las ideas más importantes en geometría diferencial es la de espacio tangente a una variedad diferenciable. Esto está basado en parte en la idea geométrica intuitiva de un plano tangente a una superficie, pero además el espacio tangente está profundamente relacionado con las propiedades diferenciables locales de las funciones definidas sobre la variedad. Existen varias definiciones de espacio tangente, algunas de las cuales enfatizan la parte geométrica y otras la parte algebraica. Para variedades de dimensión finita se puede ver que estas definiciones son en realidad equivalentes.

Definición 4.1 *Una curva sobre una variedad diferenciable M es una aplicación σ de clase C^∞ , de algún intervalo abierto $(-\varepsilon, \varepsilon)$ de la recta real en M .*

Definición 4.2 *Dos curvas σ_1 y σ_2 son tangentes en un punto $p \in M$ si*

i) $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p$

ii) *En algún sistema local de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^m) alrededor del punto p , se cumple*

$$\frac{dx^i}{dt}(\sigma_1(t)) \Big|_{t=0} = \frac{dx^i}{dt}(\sigma_2(t)) \Big|_{t=0}$$

para $i = 1, 2, \dots, m$.

NOTA :

Si σ_1 y σ_2 son tangentes en un sistema de coordenadas entonces, son tangentes en algún otro sistema de coordenadas alrededor de $p \in M$, así la definición es independiente del sistema de coordenadas.

Definición 4.3 *Sea M una variedad diferenciable, un vector tangente a M en $p \in M$ es una clase de equivalencia de curvas en M donde la relación de equivalencia es que dos curvas sean tangentes en el punto p . La clase de equivalencia de una curva particular σ se escribe $[\sigma]$.*

Definición 4.4 *Sea M una variedad diferenciable, el espacio tangente, T_pM , a M en el punto $p \in M$ es el conjunto de todos los vectores tangentes en el punto p .*

Definición 4.5 *Sea M una variedad diferenciable, el fibrado tangente TM es definido como $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$. Existe una proyección natural $\pi : TM \rightarrow M$ que asocia cada vector tangente con el punto p en M donde este es tangente. La imagen inversa de algún punto p bajo la aplicación π es justamente el conjunto T_pM de todos los vectores que son tangentes a M .*

Esta definición de vector tangente es consecuente con la geometría intuitiva donde, hay una forma natural de representar los vectores tangentes como elementos contenidos en un espacio vectorial, como es el caso de una esfera contenida en el espacio euclidiano.

Esto también se extiende al fibrado tangente TM el cual, en el caso de la esfera, puede ser representado como

$$TS^n = \{(x, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \cdot x = 1 \text{ y } x \cdot \mathbf{v} = 0\}.$$

Definición 4.6 *Un vector tangente v en T_pM puede ser visto como una derivada direccional de funciones f definidas sobre la variedad M . Esto es,*

$$v(f) = \left. \frac{d}{dt} f(\sigma(t)) \right|_{t=0},$$

donde σ es alguna curva en la clase de equivalencia representada por v , es decir, $v = [\sigma]$.

Veamos que $v(f)$ no depende de la σ escogida. Sean σ_1 y σ_2 dos curvas tangentes en $p \in M$ y tomemos un sistema local de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^m) alrededor del punto p , luego

$$\begin{aligned} v_1(f) &= \left. \frac{d}{dt} f(\sigma_1(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{dx^i}{dt}(\sigma_1(t)) \right|_{t=0}, \\ v_2(f) &= \left. \frac{d}{dt} f(\sigma_2(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{dx^i}{dt}(\sigma_2(t)) \right|_{t=0}, \end{aligned}$$

además $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p$, luego $v_1(f) = v_2(f)$ (por la definición 4,2).

Un espacio tangente puede ser considerado en algún momento como una linealización local de la variedad diferenciable. Una aplicación h entre dos variedades diferenciables M y N puede también ser linealizada con la ayuda de los espacios tangentes y la estructura de espacio vectorial que ellas poseen, para ello la definición de la aplicación h_* .

Definición 4.7 *Si $h : M \rightarrow N$ y $v \in T_pM$ entonces definimos $h_*(v)$ en $T_{h(v)}N$ por*

$$h_*(v) = [h \circ \sigma], \text{ donde } v = [\sigma].$$

La aplicación h_* es lineal, es decir, para todo $v_1, v_2 \in T_p M$ y $r \in \mathbb{R}$,

$$h_*(v_1 + v_2) = h_*(v_1) + h_*(v_2),$$

$$h_*(rv) = rh_*(v).$$

Definición 4.8 Sean M, N variedades diferenciables. Una aplicación diferenciable $\phi : M \rightarrow N$ es una inmersión si la $\phi_* : T_p(M) \rightarrow T_{\phi(p)}(N)$ es inyectiva para todo $p \in M$.

La idea de que un vector tangente pueda ser visto como un tipo de operador diferencial es una forma algebraica de ver los vectores tangentes.

4.2. Vectores tangentes como derivación

Retomamos la ecuación de la definición de un vector tangente como una derivación

$$v(f) = \frac{d}{dt} f(\sigma(t)) \Big|_{t=0}, \text{ donde } [\sigma] = v,$$

la cual facilita la representación de las clases de equivalencia de las curvas $v \in T_p M$ actuando como un operador diferencial en el espacio $C^\infty(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es infinitamente diferenciable}\}$, de funciones diferenciables de valor real sobre M . Esta definición algebraica permite ver a $T_p M$ como un espacio de derivadas direccionales; pensando $C^\infty(M)$ como un anillo sobre \mathbb{R} y un vector tangente como una aplicación de este anillo en \mathbb{R} .

Definición 4.9 a) Una derivación en un punto $p \in M$ es una aplicación $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$i) \ v(f + g) = v(f) + v(g), \text{ para toda } f, g \in C^\infty(M).$$

$$ii) \ v(rf) = rv(f), \text{ para toda } f \in C^\infty(M) \text{ y } r \in \mathbb{R}.$$

$$iii) \ v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f), \text{ para toda } f, g \text{ en } C^\infty(M).$$

b) El conjunto de todas las derivaciones de $p \in M$ es denotado $D_p M$.

Al espacio de derivaciones $D_p M$ se le puede dar fácilmente una estructura de espacio vectorial, definiendo

$$\begin{aligned}(v_1 + v_2)(f) &= v_1(f) + v_2(f) \\ v(rf) &= rv(f)\end{aligned}$$

para todo $v_1, v_2, v \in D_p M$, $f \in C^\infty(M)$ y $r \in \mathbb{R}$.

Lema 4.1 *Sea (U, ϕ) una carta alrededor de $p \in M$ asociada con las funciones coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^m) y tal que $x^\mu(p) = 0$ para todo $\mu = 1, \dots, m = \dim(M)$, entonces para alguna f en $C^\infty(M)$ existe $f_\mu \in C^\infty(M)$ tal que*

- i) $f_\mu(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f$,
- ii) $f(q) = f(p) + \sum_{\mu=1}^m x^\mu(q) f_\mu(q)$, para todo q en una vecindad de p .

Demostración. La condición i) significa que la función f puede ser escrita localmente como

$$f(\cdot) = f(p) + \sum_{\mu=1}^m x^\mu(\cdot) f_\mu(\cdot).$$

Sea $F = f \circ \phi^{-1}$ definida en una bola abierta B alrededor de $0 \in \mathbb{R}^m$. Entonces, para $a \in B$,

$$\begin{aligned}F(a_1, a_2, \dots, a_m) &\equiv F(a_1, \dots, a_m) - F(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, 0) \\ &\quad + F(a_1, \dots, a_{m-1}, 0) - F(a_1, a_2, \dots, a_{m-2}, 0, 0) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \dots \\ &\quad + F(a_1, 0, \dots, 0) - F(0, 0, \dots, 0) + F(0, 0, \dots, 0).\end{aligned}$$

Esta identidad puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
F(a_1, a_2, \dots, a_m) &= F(0, 0, \dots, 0) + \sum_{\mu=1}^m F(a_1, \dots, ta_\mu, 0, \dots, 0) \Big|_{t=0}^{t=1}, \\
&= F(0, 0, \dots, 0) + \sum_{\mu=1}^m \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial u^\mu}(a_1, \dots, a_{\mu-1}, ta_\mu, \dots, 0) a_\mu dt, \\
&= F(0, 0, \dots, 0) + \sum_{\mu=1}^m a_\mu F_\mu(a_1, a_2, \dots, a_m),
\end{aligned}$$

donde $F_\mu(a) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial u^\mu}(a_1, \dots, a_{\mu-1}, ta_\mu, 0, \dots, 0) dt$ es una función de clase C^∞ en $B \subset \mathbb{R}^m$. Ahora definimos $f_\mu = F_\mu \circ \phi$ la cual inicialmente es definida para una vecindad de $p \in M$ pero que puede ser extendida arbitrariamente al resto de M , entonces

$$\begin{aligned}
f(q) &= (f \circ \phi^{-1})(\phi(q)) = F(x^1(q), \dots, x^m(q)), \\
&= F(0) + \sum_{\mu=1}^m x^\mu(q) F_\mu(x^1(q), \dots, x^m(q)), \\
&= f(p) + \sum_{\mu=1}^m x^\mu(q) f_\mu(q),
\end{aligned}$$

y de aquí se tiene la representación deseada. Ahora,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p f = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p f(p) + \sum_{v=1}^m \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p x^v f_v(p) + x^v(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p f_v \right],$$

donde $f(p)$ hace referencia a la función constante la cual asigna el mismo valor $f(p)$ a todos los puntos $q \in M$. Sin embargo, si $v \in D_p M$ y si $c : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación constante entonces

$$\begin{aligned}
v(c) &= cv(1) = cv(1, 1) = c[1.v(1) + 1.v(1)], \\
&= 2cv(1),
\end{aligned}$$

y de aquí $v(c) = 0$. Aplicando este resultado a la ecuación

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p f = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p f(p) + \sum_{v=1}^m \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p x^v f_v(p) + x^v(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p f_v \right],$$

tenemos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f = \sum_{v=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p x^v f_v(p) = f_\mu(p)$$

con lo que se completa la demostración del lema. ■

Teorema 4.1 *La aplicación lineal $\mu : T_p M \rightarrow D_p M$ definida por*

$$[\mu(v)](f) = \frac{d}{dt} f(\sigma(t)) \Big|_{t=0}, \quad \text{donde } [\sigma] = v$$

es un isomorfismo.

Demostración. Sea $v \in D_p M$ y construimos una curva $\sigma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que

$$i) \sigma_v(0) = p$$

$$ii) v(x^\mu) = \frac{d}{dt} x^\mu \circ \sigma_v(t) \Big|_{t=0}$$

entonces, si $f \in C^\infty(M)$,

$$v(f) = \sum_{v=1}^m v(x^\mu) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f = \sum_{\mu=1}^m \frac{d}{dt} x^\mu \circ \sigma_v(t) \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f$$

pero

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f \circ \sigma_v &= \frac{d}{dt} f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \sigma_v \\ &= \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial}{\partial u^\mu} (f \circ \phi^{-1}) \Big|_{\phi(p)} \frac{du^\mu}{dt} (\phi \circ \sigma_v) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{\mu=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f \frac{d}{dt} x^\mu \circ \sigma_v(t) \Big|_{t=0} = v(f) \end{aligned}$$

así $[\sigma_v](f) = v(f)$ y de ahí la aplicación μ es sobreyectiva. ■

4.3. Campos vectoriales

Consideramos ahora funciones las cuales asignan un vector tangente a cada punto de M .

Definición 4.10 *Un campo vectorial X de clase C^∞ sobre una variedad diferenciable M es una aplicación que asigna un vector tangente $X_p \in T_p M$ para cada punto $p \in M$, esto significa que para toda $f \in C^\infty(M)$, la función*

$$M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \mapsto (Xf)(p) = X_p(f)$$

es de clase C^∞ .

Así un campo vectorial puede ser visto como una aplicación $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, donde $f \mapsto X(f)$ es definida por $p \mapsto (Xf)(p) = X_p(f)$. La función $X(f)$ es frecuentemente conocida como la derivada de Lie de la función f a lo largo del campo vectorial X y es denotada $L_X f$.

La aplicación $f \mapsto X(f)$ cumple las siguientes propiedades con respecto a la estructura de anillo sobre $C^\infty(M)$

- i) $X(f + g) = X(f) + X(g)$ para toda $f, g \in C^\infty(M)$,*
- ii) $X(rf) = rX(f)$ para toda $f \in C^\infty(M)$ y $r \in \mathbb{R}$,*
- iii) $X(fg) = fX(g) + gX(f)$ para toda $f, g \in C^\infty(M)$.*

Definición 4.11 *Sean M y N variedades diferenciables, y sean X y Y campos vectoriales en M y N respectivamente, entonces*

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Es decir, $[X, Y](f) = (XY - YX)(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$, para toda $f \in C^\infty(M)$.

Definición 4.12 *Sean M y N variedades diferenciables, $h : M \rightarrow N$ y sean X y Y campos vectoriales en M y N respectivamente, entonces X y Y se dice que están h -relacionados si para todos los puntos x en M ,*

$$h_*(X_x) = Y_{h(x)}$$

y entonces escribimos $Y = h_*X$.

Si $h_*X_1 = Y_1$ y $h_*X_2 = Y_2$ entonces, para toda f en $C^\infty(M)$ utilizamos que $X(f \circ h) = (Yf) \circ h$ para escribir

$$\begin{aligned} ([Y_1, Y_2]f) \circ h &= (Y_1(Y_2f)) \circ h - 1 \leftrightarrow 2, \\ &= X_1(Y_2f) \circ h - 1 \leftrightarrow 2, \\ &= X_1(X_2(f \circ h)) - 1 \leftrightarrow 2, \\ &= [X_1, X_2](f \circ h), \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$h_*([X_1, X_2]_p) = [h_*X_1, h_*X_2]_{h(p)},$$

para todo p en M .

Así $[X_1, X_2]$ está h -relacionado a $[Y_1, Y_2]$ con

$$h_*[X_1, X_2] = [h_*X_1, h_*X_2]$$

Definición 4.13 Sea X un campo vectorial sobre una variedad diferenciable M y sea p un punto en M , entonces la curva integral de X que pasa por el punto p es una curva $t \mapsto \sigma(t)$ en M tal que

$$i) \sigma(0) = p$$

$$ii) \sigma_*\left(\frac{d}{dt}\right)_s = X_{\sigma(s)}, \text{ para todo } s \text{ en algún intervalo abierto } (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ de } \mathbb{R}.$$

Definición 4.14 Un campo vectorial X sobre una variedad diferenciable M es completo si para cada punto p en M , la curva integral que pasa por el punto p puede ser extendida a la curva integral de X que es definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Capítulo 5

Grupos de Lie

Los grupos de Lie han jugado un papel importante en la historia de las matemáticas del siglo XX; estos datan del siglo XIX cuando Sophus Lie y Felix Klein entre otros, propusieron “La teoría de los grupos continuos” como fue llamada originalmente. Aunque este tema se comenzó a estudiar en el siglo XIX solo tuvo éxito en el siglo XX.

5.1. Grupos de Lie

Definición 5.1 *Un Grupo de Lie es una variedad diferenciable, G , junto con una aplicación diferenciable $\varphi : G \times G \longrightarrow G$; siendo G un grupo. Donde φ satisface*

1. $\varphi(a, \varphi(b, c)) = \varphi(\varphi(a, b), c)$.
2. Existe $e \in G$ tal que $\varphi(e, b) = b$, para todo $b \in G$, y
3. existe una aplicación diferenciable de G en G que envía $a \longmapsto a^{-1}$ y satisface que $\varphi(a, a^{-1}) = e$.

Denotaremos $\varphi(a, b)$ por ab .

Mas brevemente, un grupo de Lie es un grupo el cual tiene la estructura de variedad diferenciable y para el cual la aplicación de $G \times G$ en G , definida por $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ es

diferenciable. En realidad, la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ puede escribirse como $(e, x) \mapsto ex^{-1}$ así tenemos 3.

Ejemplo 5.1 $G = \mathbb{R}^n$ con la operación de suma, es un grupo de Lie.

Ejemplo 5.2 $G = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ con la multiplicación como producto es un grupo de Lie.

Ejemplo 5.3 $G = GL(n, \mathbb{R})$ con la multiplicación de matrices como producto, donde

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}.$$

El espacio $M(n, \mathbb{R})$ está en correspondencia biyectiva con \mathbb{R}^{n^2} heredando así una topología natural y una estructura diferenciable, notese que $\det : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto \det A$ es una aplicación continua y de aquí se tiene que $\det^{-1}\{0\}$ es un subconjunto cerrado de $M(n, \mathbb{R})$. $GL(n, \mathbb{R})$ es el complemento de este subconjunto cerrado, por lo tanto $GL(n, \mathbb{R})$ es un abierto de $M(n, \mathbb{R})$. Como ambos adquieren una topología y una estructura diferenciable de $M(n, \mathbb{R})$, es con respecto a esta estructura que $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

Ejemplo 5.4 Sea G el grupo de matrices triangulares superiores $n \times n$ con los elementos de su diagonal iguales a 1. Como conjunto G está en biyección con el espacio vectorial $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, por lo tanto se tiene una estructura de variedad diferenciable. En relación a esta estructura el producto en G (producto de matrices) es diferenciable por lo que G es un grupo de Lie.

Ejemplo 5.5 Sea G un grupo cualquiera dotado de la topología discreta. Con esta topología G tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión 0 en la que el producto es diferenciable por lo tanto, todo grupo G puede ser visto como un grupo de Lie. Un grupo de Lie con estas características es denominado, un grupo de Lie discreto.

Lema 5.1 *Sea G un grupo el cual también es variedad diferenciable tal que la aplicación de $G \times G$ en G definida por $(x, y) \mapsto xy$ es diferenciable. Entonces G es un grupo de Lie.*

Demostración. Lo que debemos demostrar es que si la aplicación $(x, y) \mapsto xy$ es diferenciable, entonces la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ es diferenciable.

Primero observamos que es suficiente demostrar que la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ es diferenciable en alguna vecindad, N , de la identidad, e .

En realidad, para cualquier $a \in G$, las aplicaciones $x \mapsto r_a(x) = xa$ y $x \mapsto l_a(x) = ax$ son diferenciables. Ahora $x^{-1} = a(xa)^{-1}$, así que $x \mapsto x^{-1}$ puede ser factorizado por $x \mapsto r_a(x) \mapsto (r_a(x))^{-1} \mapsto l_a(r_a(x))^{-1}$. Si tomamos a tal que $xa \in N$, vemos que $x \mapsto x^{-1}$ es diferenciable en x .

Ahora demostramos que ésta es una vecindad N de e . Las aplicaciones L_x son todas difeomorfismos de G sobre G . Si elegimos una coordenada de vecindades de la identidad, la aplicación L_x es diferenciable sobre x . Por el teorema de la función implícita, se tiene que ésta es una vecindad N de e , tal que $(L_x)^{-1}y$ es diferenciable sobre x , para todo $x, y \in N$. Así $(L_x)^{-1}e = x^{-1}$ es diferenciable sobre x , es decir, la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ es diferenciable. ■

Teorema 5.1 *Sea G un grupo de Lie, M una variedad diferenciable, y f una inmersión uno a uno de M en G tal que:*

i) $f(x)f(y) \in f(M)$ y $(f(x))^{-1} \in f(M)$, para todo $x, y \in M$.

Definida la multiplicación en M por $xy = f^{-1}(f(x)f(y))$. Entonces M es un grupo de Lie bajo esta multiplicación.

Demostración. En realidad la condición i) dice que $f(M)$ es un subgrupo de G . Así la aplicación $\tilde{\varphi}$ de $M \times M$ en G definida por $(x, y) \mapsto f(x)f(y)$ es diferenciable.

Sea $z(x, y) = f^{-1}(f(x)f(y))$ deseamos demostrar que la aplicación φ de $M \times M$ en M definida por $(x, y) \longrightarrow z(x, y)$ es diferenciable.

Puesto que φ es continua basta demostrar que existe una vecindad, U , de $z(x, y)$ tal que para cada función diferenciable, g , definida en U , $g \circ \varphi$ es diferenciable en (x, y) .

Puesto que f es una inmersión, podemos encontrar una vecindad V de $f(z)$ y una vecindad U de z con coordenadas v^1, v^2, \dots, v^n tal que $f(U)$ está definida por aquellos puntos de V donde $v^{p+1} = \dots = v^n = 0$, y v^1, \dots, v^p son coordenadas en U .

Así una función g en U puede ser extendida a una función \tilde{g} de la siguiente manera

$$\tilde{g}(v^1, \dots, v^n) = g(v^1, \dots, v^p, 0, \dots, 0)$$

pero $g \circ \varphi = \tilde{g} \circ \tilde{\varphi}$ la cual es diferenciable. ■

Definición 5.2 Sean G_1 y G_2 grupos de Lie, y f un isomorfismo de G_1 en G_2 el cual es uno a uno, llamaremos el par (G_1, f) un subgrupo de Lie de G_2 . En general, una aplicación diferenciable de G_1 en G_2 la cual es un homomorfismo de grupos, es llamado un homomorfismo de Lie. Así un subgrupo de Lie de un grupo de Lie es un subgrupo en la teoría de grupos el cual es también una subvariedad.

5.2. El álgebra de Lie de un grupo de Lie G

Una de las características más importantes de un grupo de Lie G , es el hecho de que siempre tiene asociada una álgebra de Lie, la cual proporciona información sobre muchas propiedades del grupo. Es notable que se pueda obtener información sobre ciertas propiedades topológicas globales, como por ejemplo, saber si el grupo es una variedad compacta o no. El concepto fundamental que se usa aquí es el de traslaciones a derecha y a izquierda.

Definición 5.3 *Un campo vectorial X sobre un grupo de Lie G es invariante a izquierda si está l_g – relacionado con él mismo para todo $g \in G$, es decir:*

$$l_{g*}X = X \text{ para todo } g \in G,$$

o equivalentemente

$$l_{g*}(X_{g'}) = X_{gg'} \text{ para todo } g, g' \in G.$$

Definición 5.4 *Un campo vectorial X sobre un grupo de Lie G es invariante a derecha si está r_g – relacionado con él mismo para toda $g \in G$, es decir:*

$$r_{g*}X = X \text{ para todo } g \in G,$$

o equivalentemente

$$r_{g*}(X_{g'}) = X_{g'g} \text{ para todo } g, g' \in G.$$

El conjunto de campos vectoriales invariantes a izquierda sobre un grupo de Lie G es denotado por $L(G)$ y es claramente un espacio vectorial real.

Si dos campos vectoriales X_1 y X_2 , en una variedad M están h -relacionados a dos campos vectoriales Y_1 y Y_2 en una variedad N , donde $h : M \rightarrow N$ entonces $[X_1, X_2]$ está h -relacionado a $[Y_1, Y_2]$, esto significa que si X_1 y X_2 son dos campos vectoriales invariantes a izquierda sobre G entonces

$$l_{g*}[X_1, X_2] = [l_{g*}X_1, l_{g*}X_2],$$

de la definición 4.10

$$l_{g*}[X_1, X_2] = [X_1, X_2].$$

Así $X_1, X_2 \in L(G)$ implica que $[X_1, X_2] \in L(G)$ y así el conjunto $L(G)$ de todos los campos vectoriales invariantes a izquierda sobre G es una **subálgebra de Lie** del álgebra de Lie de dimensión infinita de todos los campos vectoriales sobre la variedad G .

Esta es llamada el **álgebra de Lie de G** y para saber cuál es su dimensión es necesaria la comprensión del siguiente teorema.

Teorema 5.2 *Existe un isomorfismo de $L(G)$, considerado como un espacio vectorial real, con el espacio tangente T_eG .*

Demostración. Construiremos un isomorfismo explícito $i : T_eG \longrightarrow L(G)$; específicamente, si $A \in T_eG$ definimos $i(A) := L^A$ donde L^A es un campo vectorial en G definido por

$$L_g^A := l_{g*}A, \text{ para todo } g \in G.$$

Nótese que para todo $g, g' \in G$,

$$l_{g'*}(L_g^A) = l_{g'*}(l_{g*}A) = l_{g'g*}A = L_{gg'}^A,$$

de modo que L^A es un campo vectorial invariante a izquierda.

Es claro que $A \longrightarrow L^A$ es una aplicación lineal y solo falta probar que es uno a uno y sobre.

► Si $L^A=L^B$ entonces en particular $L_e^A = L_e^B$ pero $L_e^A = l_{e*}A = A$ y análogamente $L_e^B = B$ así se tiene que la aplicación $i : T_eG \longrightarrow L(G)$ es inyectiva.

► Ahora sea L un campo vectorial en $L(G)$ y definimos $A_L \in T_eG$ por

$$A_L = L_e (= l_{g^{-1}*}L_g \text{ para cualquier } g \in G).$$

Claramente $l_{g*}A_L = l_{g*}(L_e) = L_g$ puesto que L es invariante a izquierda.

Así $i(A_L) = L$ de donde se tiene que $i : T_eG \longrightarrow L(G)$ es sobreyectiva. ■

NOTA: Es claro que $L \longrightarrow A_L$ es la inversa de $i : T_eG \longrightarrow L(G)$ tal que $l_{g*}(A_L) = L_g$ y $l_{g^{-1}*}(L_g^A) = A$.

Corolario 5.1 *La dimensión del espacio vectorial $L(G)$ es igual a $\dim(T_eG) = \dim(G)$. Puesto que se asume que G es una variedad de dimensión finita resulta que*

$L(G)$ es de dimensión finita y es una subálgebra no trivial del álgebra de Lie de todos los campos vectoriales sobre G .

Teorema 5.3 Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo entre los grupos de Lie, G y H , entonces la aplicación inducida $f_* : T_e G \longrightarrow T_e H$ es un homomorfismo entre las álgebras de Lie de los grupos.

Demostración. Puesto que f es un homomorfismo se tiene que, para todo $g, g' \in G$

$$f(gg') = f(g)f(g')$$

y de aquí, para todo $g \in G$, $f \circ l_g = l_{f(g)} \circ f$.

Sea A en $T_e G$ asociado con el campo vectorial invariante a izquierda $L^A \in L(G)$ tal que $A = L_e^A$ y $L_g^A := l_{g*}A$, para todo $g \in G$, entonces

$$\begin{aligned} f_*(L_g^A) &= f_*l_{g*}(A) = (f \circ l_g)_*(A), \\ &= (l_{f(g)} \circ f)_*(A) = l_{f(g)*}f_*(A) = L_{f(g)}^{f_*(A)}, \end{aligned}$$

lo cual dice que los campos vectoriales L^A y $L^{f_*(A)}$ están f -relacionados pero, por la definición 4.10 se tiene

$$\begin{aligned} f_*[A, A] &= f_*([L^A, L^A]_e) = f_*(L^A), f_*(L^A)_{f(e)}, \\ &= [L^{f_*(A)}, L^{f_*(A)}]_e = [f_*(A), f_*(A)] \end{aligned}$$

y de aquí $f_* : T_e G \longrightarrow T_e H$ es un homomorfismo entre las álgebras de Lie. ■

Ahora mostramos un importante resultado en la teoría de los grupos de Lie asociado a las álgebras de Lie. Recordemos primero que una curva integral $t \longrightarrow \sigma^X(t)$ de un campo vectorial X se dice que es completa si está definida para todos los valores del parámetro t , además cada campo vectorial en una variedad compacta es completo.

El resultado clave en la teoría de los grupos de Lie es que cada campo vectorial invariante a izquierda sobre un grupo de Lie G es completo, aún si G es una variedad no

compacta; sin embargo, antes de probar este hecho necesitamos un resultado preliminar concerniente a la forma “infinitesimal” del producto en G .

Sea $\mu : G \times G \longrightarrow G$ la aplicación producto, esto es $\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$. Consideremos la aplicación inducida sobre los espacios tangentes $\mu_* : T_{(g_1, g_2)}G \times G \longrightarrow T_{g_1 g_2}G$.

Existe una aplicación χ de $T_{(g_1, g_2)}G \times G$ sobre el espacio $T_{g_1}G \oplus T_{g_2}G$ con la cual factorizamos la aplicación μ_* , esto es

$$\begin{array}{ccc} T_{(g_1, g_2)}G \times G & \xrightarrow{\chi} & T_{g_1}G \oplus T_{g_2}G \\ \mu_* \searrow & & \swarrow \tilde{\mu} \\ & & T_{g_1 g_2}G \end{array}$$

donde $\mu_* = \tilde{\mu} \circ \chi$. Se tiene que

$$\tilde{\mu}(\alpha, \beta) = (\mu \circ i_{g_2})_* \alpha + (\mu \circ j_{g_1})_* \beta,$$

donde

$$\alpha \in T_{g_1}G, \quad \beta \in T_{g_2}G, \quad i_{g_2}(g) = (g, g_2)$$

y

$$j_{g_1}(g) = (g_1, g) \in G \times G$$

Así, $\mu \circ i_{g_2}(g) = \mu(g, g_2) = g g_2$ y $\mu \circ j_{g_1} = \mu(g_1, g) = g_1 g$; el cual puede ser escrito como $\mu \circ i_{g_2} = r_{g_2}$ y $\mu \circ j_{g_1} = l_{g_1}$, de aquí se tiene que

$$\tilde{\mu}(\alpha, \beta) = r_{g_2*}(\alpha) + l_{g_1*}(\beta),$$

para todo $(\alpha, \beta) \in T_{g_1}G \oplus T_{g_2}G$. Este es el resultado que necesitamos en la prueba del próximo teorema

Teorema 5.4 *Si X es un campo vectorial invariante a izquierda sobre un grupo de Lie G , entonces X es completo.*

Demostación. Basados en la definicin 4.12 demostraremos que X es completo.

Sea $t \longrightarrow \sigma^X(t)$ una curva integral de X que pasa por $e \in G$, la cual está definida para todo $|t| < \varepsilon$, para algún $\varepsilon > 0$.

Así $\sigma_*^X \left(\frac{d}{dt} \right)_s = X_{\sigma^X(s)}$ para todo $|s| < \varepsilon$ y de aquí se tiene que

$$(l_g \circ \sigma^X)_* \left(\frac{d}{dt} \right)_s = l_{g*} \sigma_*^X \left(\frac{d}{dt} \right)_s = l_{g*} (X_{g\sigma^X(s)}) = X_{g\sigma^X(s)},$$

lo cual muestra que $t \longrightarrow l_g \circ \sigma^X(t)$ es una curva integral de X que pasa por el punto $g \in G$.

De esto se sigue que si definimos $\phi_t^X(g) = g\sigma^X(t)$, entonces $t \longrightarrow \phi_t^X$ es un flujo local para el campo vectorial X ; esto significa que

$$\phi_{t_1}^X(\phi_{t_2}^X(g)) = \phi_{t_1+t_2}^X(g)$$

y como

$$\sigma^X(t_1 + t_2) = \sigma^X(t_1)\sigma^X(t_2),$$

para todo $|t_1| < \varepsilon$, $|t_2| < \varepsilon$ y $|t_1 + t_2| < \varepsilon$ se puede decir que la aplicacin $t \longrightarrow \sigma^X(t)$ es un homomorfismo local del grupo aditivo \mathbb{R} de la recta real en el grupo de Lie G .

En general, si $t \longrightarrow \sigma^X(t)$ es una curva integral para un campo vectorial X sobre alguna variedad entonces puede ser mostrado que $\sigma^{rX}(t) = \sigma^X(rt)$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Esto sugiere una forma por la cual la curva integral en G puede ser extendida consistentemente usando la estructura de grupo.

Si $|t| < 2\varepsilon$ entonces se define $\sigma^X(t) = \left(\sigma^X\left(\frac{t}{2}\right) \right)^2$ el cual es consistente con la definicin original si $|t| < \varepsilon$ de donde se tiene que

$$\left(\sigma^X\left(\frac{t}{2}\right) \right)^2 = \left(\sigma^{\frac{X}{2}}(t) \right)^2 = \sigma^{\frac{X}{2}}(2t) = \sigma^X(t),$$

claramente este procedimiento puede repetirse para $|t| < n\varepsilon$ para cualquier entero positivo n , y de aquí para toda la recta real.

Así, ahora la tarea es probar que la curva definida anteriormente es en realidad una curva integral de X .

Si temporalmente denotamos la curva definida en la parte izquierda de la anterior ecuación, por $\tilde{\sigma}^X$ entonces necesitamos demostrar que para $|s| < 2\varepsilon$, $\tilde{\sigma}_*^X \left(\frac{d}{dt} \right)_s = X_{\sigma^X(s)}$.

La expresión $\sigma^X(t) = \left(\sigma^X \left(\frac{t}{2} \right) \right)^2$ es factorizada como $\tilde{\sigma}^X = \mu \circ \Delta \circ \sigma^X \circ H$ donde $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es definida por $H(t) = \frac{t}{2}$ y $\Delta: G \rightarrow G \times G$ es la aplicación diagonal usual $\Delta(g) = (g, g)$. Así,

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_*^X \left(\frac{d}{dt} \right)_s &= \frac{1}{2} \mu_* \Delta_* \sigma_*^X \left(\frac{d}{dt} \right)_s = \frac{1}{2} \mu_* \Delta_* \left(X_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \right) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{\mu} \circ \chi \circ \Delta_* \left(X_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \right), \end{aligned}$$

donde usamos que $\mu_* = \tilde{\mu} \circ \chi$, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_*^X \left(\frac{d}{dt} \right)_s &= \frac{1}{2} \tilde{\mu} \left(X_{\sigma^X(\frac{s}{2})}, X_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \right), \\ &= \frac{1}{2} \left\{ r_{\sigma^X(\frac{s}{2})_*} \left(X_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \right) + l_{\sigma^X(\frac{s}{2})_*} \left(X_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Sin embargo, las traslaciones a izquierda y a derecha de un grupo son conmutativas, (es decir, $r_g \circ l_g = l_g \circ r_g$, para todo $g \in G$). Usando esto y el hecho de que el campo vectorial X es invariante a izquierda, el primer término de la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\left(r_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \circ l_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \right)_* X_e = \left(l_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \circ r_{\sigma^X(\frac{s}{2})} \right)_* X_e,$$

pero $r_{\sigma^X(t)} \circ \sigma^X = l_{\sigma^X(t)} \circ \sigma^X$ y de aquí

$$\begin{aligned} r_{\sigma^X(t)_*} X_e &= \left(r_{\sigma^X(t)} \circ \sigma^X \right)_* \left(\frac{d}{dt} \right)_0 = \left(r_{\sigma^X(t)} \circ \sigma^X \right)_* \left(\frac{d}{dt} \right)_0 \\ &= l_{\sigma^X(t)_*} X_e = X_{\sigma^X(t)}. \end{aligned}$$

Así,

$$l_{\sigma^X(\frac{s}{2})_*} X_{\sigma^X(\frac{s}{2})} = X_{[\sigma^X(\frac{s}{2})]^2}.$$

De aquí tenemos que $\tilde{\sigma}_*^X \left(\frac{d}{dt} \right)_s = X_{[\sigma^X(\frac{s}{2})]^2} = X_{\sigma^X(s)}$ que es precisamente la afirmación de que $\tilde{\sigma}^X$ es una extensión de la curva integral original σ^X del intervalo $|t| < \varepsilon$ a $|t| < 2\varepsilon$.

Con este procedimiento demostramos que la curva integral de X puede ser extendida para todo valor de $t \in \mathbb{R}$ y de aquí se tiene que el campo vectorial invariante a izquierda X es completo. ■

Definición 5.5

a) La curva integral única $t \longrightarrow \sigma^{L^A}(t)$, $A = \sigma_*^{L^A} \left(\frac{d}{dt} \right)_0$ de el campo vectorial invariante a izquierda L^A que es definido para todo $t \in \mathbb{R}$ por virtud del teorema anterior es escrito como

$$t \longrightarrow \exp tA, \quad A \in T_e G.$$

b) La aplicación exponencial $\exp: T_e G \longrightarrow G$ es definida por $\exp(A) = \exp tA |_{t=1}$.

La aplicación exponencial es un difeomorfismo local del espacio $T_e G$ en G .

Así, existe alguna vecindad abierta V de $0 \in T_e G$ tal que la aplicación exponencial restringida a V es biyectiva; y ambas, ella y su inversa (definida sobre la imagen de V en G bajo \exp) son diferenciables.

Sí G es un grupo de Lie compacto entonces la aplicación exponencial es una función sobreyectiva de $T_e G$ sobre G . Esto quiere decir que no puede ser una aplicación inyectiva, porque entonces sería un difeomorfismo entre el espacio vectorial no compacto $T_e G$ y el grupo compacto G .

Si G no es compacto entonces, la aplicación exponencial puede no ser sobreyectiva. Por otra parte puede ser globalmente inyectiva.

Definición 5.6 Un subgrupo 1-parámetro de un grupo de Lie G es un homomorfismo diferenciable μ del grupo aditivo de la recta real \mathbb{R} en G , es decir, para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

se tiene que

$$\mu(t_1 + t_2) = \mu(t_1) \mu(t_2).$$

Analizando la primera parte de la demostración del teorema 5.4 notamos que $t \rightsquigarrow \exp ta$ es un subgrupo 1-parámetro de G .

La siguiente proposición prueba que el recíproco es verdadero, es decir, todo subgrupo 1-parámetro de G es de la forma $t \rightsquigarrow \exp ta$ para algún $A \in T_e G \cong L(G)$

Así se tiene una función uno a uno entre subgrupos 1-parámetro de un grupo de Lie G y su álgebra de Lie.

Teorema 5.5 Si $\mu : \mathbb{R} \rightarrow G$ es un subgrupo 1-parámetro de G entonces, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\mu(t) = \exp tA$, donde $A := \mu\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0$.

Demostración. La definición 5.6 implica que $\mu \circ l_s = l_{\mu(s)} \circ \mu$, para todo $s \in \mathbb{R}$. De aquí

$$\mu_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_s = \mu_* l_{s*}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0 = l_{\mu(s)*} \mu_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0 = l_{\mu(s)*}(A) = L_{\mu(s)}^A.$$

Luego $t \rightsquigarrow \mu(t)$ es una curva integral para $L^A \in L(G)$. El resultado se sigue de la unicidad de cada curva. ■

Corolario 5.2 Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo entre dos grupos de Lie G y H cuyas aplicaciones exponenciales son denotadas por $\exp_G : T_e G \rightarrow G$ y $\exp_H : T_e H \rightarrow H$, respectivamente. Entonces se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_e G & \xrightarrow{f_*} & T_e H \\ \exp_G \downarrow & & \downarrow \exp_H \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

Para todo $A \in T_e G$, $\exp_H(f_* A) = f(\exp_G A)$.

Demostración. Definimos $\mu : \mathbb{R} \rightarrow H$ por $\mu(t) := f(\exp_G tA)$ entonces

$$\begin{aligned}\mu(t_1 + t_2) &= f(\exp_G(t_1 + t_2)A) = f(\exp_G t_1 A \exp_G t_2 A), \\ &= f(\exp_G t_1 A) f(\exp_G t_2 A) = \mu(t_1) \mu(t_2).\end{aligned}$$

por lo cual μ es un subgrupo 1-parametro de H . En consecuencia del teorema anterior se tiene que

$$\mu(t) = \exp_H tB \text{ donde } B = \mu \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_0 \in T_e H.$$

Tomamos $k \in C^\infty(H)$ entonces

$$\begin{aligned}B(k) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_0 (k \circ \mu) = \frac{\partial}{\partial t} (k(\mu(t))) |_{t=0}, \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (k \circ f(\exp_G tA)) |_{t=0} = L_e^A (k \circ f),\end{aligned}$$

de donde se puede concluir porque $t \rightsquigarrow \exp_G tA$ es una curva integral del campo vectorial invariante a izquierda L^A . Pero $L_e^A = A$, de donde $B(k) = A(k \circ f) = (f_* A)(k)$. Es decir $B = f_*(A)$ por lo tanto $f(\exp_G tA) = \mu(t) = \exp_H (tf_*(A))$ de donde, con $t = 1$ se tiene que

$$\exp_H (f_* A) = f(\exp_G A), \text{ para todo } A \in T_e G.$$

■

Corolario 5.3 *La adjunta de G sobre él mismo es $Ad_g(g') := gg'g^{-1}$, para cada $g \in G$. Entonces $\exp(Ad_{g^*}(B)) = g \exp B g^{-1}$, para todo $B \in T_e G$.*

Demostración. Para cada $g \in G$, la aplicación $Ad_g : G \rightarrow G$ es un homomorfismo de un grupo de Lie G sobre el mismo, y por el corolario anterior se tiene que $\exp(Ad_{g^*} B) = Ad_g(\exp B) = g \exp B g^{-1}$ ■

Ejemplo 5.6 *Consideremos un ejemplo explícito de un conjunto de campos vectoriales invariantes a izquierda para la componente $GL^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$*

junto con el grupo lineal general $GL(n, \mathbb{R})$. Este grupo es un subconjunto abierto del espacio lineal $M(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices reales $n \times n$, y el espacio tangente en algún punto en G (especialmente en $e \in G$) puede ser identificado en forma natural con el espacio vectorial $M(n, \mathbb{R})$. Por esto puede ser asociado como el álgebra de Lie de $GL^+(n, \mathbb{R})$. Un sistema natural de coordenadas sobre $GL^+(n, \mathbb{R})$ son las coordenadas matriz-elemento definidas por

$$x^{ij}(g) =: g^{ij}, \text{ donde } g \in GL^+(n, \mathbb{R}) \text{ y } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Sea $A \in T_e D \cong M(n, \mathbb{R})$. Entonces la representación de las coordenadas de el campo vectorial invariante a izquierda asociado con A es:

$$L_e^A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (L^A x^{ij})_g \left(\frac{\partial}{\partial x^{ij}} \right)_g$$

y

$$(L^A x^{ij})_g = \frac{\partial}{\partial t} (x^{ij}(g \exp tA))_{t=0}.$$

Sin embargo, $A \in M(n, \mathbb{R})$ es una matriz y de aquí podemos considerar la curva $t \rightsquigarrow e^{tA}$ en $GL^+(n, \mathbb{R})$ donde e^{tA} se refiere a la exponencial usual de una matriz.

Pero el vector tangente a esta curva cuando $t = 0$ es obviamente la matriz A y, además justifica que es definido un subgrupo 1-parámetro de $GL^+(n, \mathbb{R})$. De aquí

$$e^{tA} = \exp tA, \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } A \in T_e G \cong M(n, \mathbb{R}).$$

En particular $L_g^A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (L^A x^{ij})_g \left(\frac{\partial}{\partial x^{ij}} \right)_g$ puede ser escrita usando

$$\begin{aligned} L_g^A x^{ij} &= \frac{\partial}{\partial t} x^{ij}(g e^{tA})|_{t=0} = \sum_{k=1}^n g^{ik} \frac{\partial}{\partial t} (e^{tA})^{kj} |_{t=0} \\ &= \sum_{k=1}^n g^{ik} A^{kj}. \end{aligned}$$

de aquí el campo vectorial invariante a izquierda puede ser escrito como

$$L_g^A = g^{ik} A^{kj} \left(\frac{\partial}{\partial x^{ij}} \right)_g$$

donde los índices i, j, k son todos contados de $1, 2, \dots, n$.

Referencias

1. BARTLE Robert, Introducción al análisis matemático. Urbana-champaign, México.
2. C. CHEVALLEY, Theory of Lie groups. Princenton University Press.
3. CURTIS W.D., Differential Manifolds and Theretical Physics.
4. ISHAM Chris, Modern Differential Geometry for Physicists, World Scientific Lecture Notes in Physics, vol. 32. 1989.
5. MUÑOZ José M., Introducción a la topología general. Universidad Nacional, Santa Fé de Bogotá.
6. ROLF Bernat, An introduction to symplectic geometry, American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.
7. SAN MARTIN Luiz A.B., Álgebras de Lie. Cidade Universitária-Barão Geraldo.
8. SHLOMO Sternberg, Lectures on differential geometry. Ams Chelsea Rublishing.