

Análisis de admisibilidad física de objetos compactos en el límite de Buchdahl

J. David D. Amaya

Trabajo de investigación para optar al título de Física

Director

Antonio Calixto Gutiérrez Piñeres

Doctorado en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2024

## **Dedicatoria**

*A mi madre y a mi nona.*

In a Sentimental Mood - Jhon Coltrane

### Agradecimientos

En esta tarde de otoñal, ahora que he tomado el aliento suficiente para escribir estas palabras dedicadas a todos los amados que me alentaron a concluir este trabajo, deseo con todo mi ser agradecer a dos mujeres sabias, viejas y rectas: a Melida Haydee Amaya Guillen, mi madre; a Benita Triana de Delgado, mi nona.

A mi madre que ha sido el ejemplo tácito de la honestidad, sinceridad y fuerza santandereana de una madre soltera. Ella apoyó muchas de las decisiones que me han llevado hasta este punto. Con su acento fuerte me enseñó a leer y a estudiar; con sus regaños corrigió y formó el proyecto de hombre que cree correcto. Aunque hubo pobreza, siempre me enseñó a no robar y forjar rectitud en la adversidad; fue por ella que estudié en la UIS. Sin embargo, no soy capaz de escribir en palabras lo que mi garganta, bajo el nudo que se me forma en recordarla, quiere decir. Para ella es el primer tercio de este trabajo.

A mi nona que bajo la dulzura del ala paternal contribuyó como mi mecenas en todo momento de la carrera universitaria. A ella le debo la paciencia, la virtud del silencio en ciertos momentos y el uso del trabajo como medio para obtener cosas. Benita vio confianza en la incertidumbre, luz en la intranquilidad y amor en la soledad. Para ti es el segundo tercio de mi trabajo.

Llegados a este punto quiero mencionar a otra mujer increíble que se cruzó en mi línea de mundo: Dennis Katherine Viveros Sanabria, mi única gran amiga. A ella le debo haber aprendido a entender la palabra perrenque. Negrita, cada vez que escucho Te Busco - Celia Cruz, me acuerdo de tus churcos, tu risa y tu olor. Te quiero demasiado. También quiero agradecer al trío de Jotas:

Juan Diego Herrera Cáceres, Juan Manuel Velásquez Cadavid y Johan Andrés Rodríguez. Desde que conocí a estos increíbles seres humanos mi vida dejó de ser la misma. Entendí después de mucho tiempo lo que significa la palabra amistad y confiaría mi vida entera en ellos.

A mis compañeros de carrera: Miguel Vallesteros, Wilson, Hugo, Charlie, el Boyaco (QEPD), Nicolás, Angie, Jose, Coach, Alejo, Eve y Leo, Eric y todos con los que compartí un salón de clases, una cerveza en los bares cercanos a la universidad, un café en el sufrimiento de un parcial cercano y la esperanza de entender, aunque sea un poco, el universo en el que vivimos. Para mis compañeras y amigos del grupo de investigación y del Cubetazo: William Jaimes, del cual amo su espontaneidad; Daniela Jaimes, de la cual me encanta su risa ahogada en felicidad y desparpajo; Paola Ramírez, una gran confidente que desde las velas y los inciensos hace cualquier conversación un taza de café colombiano; Luis Gabriel, que se mantiene fuerte en la adversidad de la vida y tiene una sonrisa contagiosa; Jhan Martínez, que desde que compartimos salón en 903 del colegio Salesiano supe que sería un gran pana; Jose Rodríguez, que desde empezó a frecuentar el grupo de investigación GIRG encendió la curiosidad y la luz buscando sabiduría; Óscar Pimentel, con su ejemplo entendí el significado de la palabra profesor; Christian Sarmiento, que desde su franqueza me enseñó a entender el presente; a Laura Becerra, que desde su silencio hablaba más fuerte que cualquier otra persona. A mis compañeros de carreras afines y amores puntuales: Karen, la dulce alquimista; Juan José, el gordo degenerado que debe existir en todo grupo; Metacho, el honoris físico, filósofo y sabio viviendo en un cuerpo de joven; Tefa, la economista que resultó más guapa desde la olas y el sol de DC; Oswi, por mostrarme que nunca debemos pararnos de una mesa sin habernos tomado una pola que nos deje pares; a Jorge, que desde su psicorrigidez me mostró un

orden y en las mesas de café comentarios y secretos; Venus, desde que me enseñaste el término de primer amor no he podido volver a ver el cielo de la misma forma, muchos momentos fueron llevados contigo y jamás dejaré de recordar la sonrisa Heliconezca de las flores en los parques de Antioquia.

También quiero agradecer a todos mis profesores de primaria y secundaria que desde que era pequeño me enseñaron a dilucidar los problemas de la vida. A Antonio, mi director y mentor, por su paciencia en este largo trayecto y sus correcciones oportunas y puntuales. También al profesor Fabio Lora, por las oportunidades brindadas y la esperanza de continuar. Y cada una de las personas que dejo en Bucaramanga, que sepan que volveré para encontrarnos, no en busca de la felicidad del pasado, sino para compartir la alegría del presente. *What a wonderful world* diría Louis A. y estoy de acuerdo con él en darme cuenta de lo afortunado que he sido y sigo siendo. Finalmente, quiero agradecer a la que se ha convertido en mi nueva familia acá en Gaylord, Michigan; ayudándome en la adversidad y el frío que viene con sus experiencias y consejos. A Perla, por mostrarme un nuevo brillo de la luna y una tranquilidad inexplorada, un amor como el de Remedios y el coronel Aureliano, por llevarme a vivir la realidad de los escritos en prosa a hechos tangibles. Todos sus nombres reposan en mi corazón y para ellos es el tercer tercio de mi trabajo.

## Tabla de Contenido

<b>Introducción</b>	<b>13</b>
<b>1. Admisibilidad física y estrellas de Buchdahl</b>	<b>21</b>
1.1. Introducción	21
1.2. Criterios de admisibilidad física	22
1.2.1. Criterio de isotropía	23
1.2.2. Criterio de regularidad en $r = 0$	23
1.2.3. Criterio de presión $p$ y densidad de energía $\rho$ positivo definidas	24
1.2.4. Criterio de decrecimiento monótono de la presión $p$ y la densidad de energía $\rho$	26
1.2.5. Criterio de causalidad	27
1.3. Soluciones interiores admisibles	27
1.3.1. Tolman IV	28
1.3.1.1. Criterio de isotropía	28
1.3.1.2. Criterio de regularidad en $r = 0$	29
1.3.1.3. Criterio de presión $p$ y densidad de energía $\rho$ positivo definidas	32
1.3.1.4. Criterio de decrecimiento monótono de la presión $p$ y la densidad de energía $\rho$	34
1.3.1.5. Criterio de causalidad	36
1.4. Criterio del límite de Buchdahl	38

Admisibilidad en objetos compactos y el límite de Buchdahl	7
1.4.1. Tolman IV	39
1.4.2. Admisibilidad en soluciones	41
<b>2. Valores propios y admisibilidad física</b>	<b>44</b>
2.1. Introducción	44
2.2. Valores propios de la curvatura	45
2.2.1. Fluido perfecto	48
2.3. Valores propios de soluciones interiores admisibles y no admisibles	49
2.3.1. Tolman IV	50
2.4. Admisibilidad en soluciones interiores	51
<b>3. Conclusiones</b>	<b>60</b>
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>61</b>

### Lista de Figuras

- Figura 1. Presión  $p(r)$ , densidad de energía  $\rho(r)$ , presión central  $p_0$ , densidad de energía central  $\rho_0$  y radio frontera  $r_b$  correspondientes a la solución Tolman IV. 33
- Figura 2. Presión  $p(r)$ , densidad de energía  $\rho(r)$ , gradiente de presión  $p(r),r$ , gradiente de densidad de energía  $\rho(r),r$  y radio frontera  $r_b$  correspondientes a la solución Tolman IV. 36
- Figura 3. Velocidad al cuadrado dentro del fluido  $v_s^2$  en la solución Tolman IV, velocidad de la luz en el vacío  $c_0^2$  y radio frontera  $r_b$ . 37
- Figura 4. Valor propio  $\lambda_{11}$  correspondiente a la ecuación (62) de la solución Tolman IV. 51
- Figura 5. Valor propio  $\lambda_{22}$  correspondiente a la ecuación (63) de la solución Tolman IV. 52
- Figura 6. Valor propio  $\lambda_{44}$  correspondiente a la ecuación (64) de la solución Tolman IV. 53
- Figura 7. Valor propio  $\lambda_{55}$  correspondiente a la ecuación (65) de la solución Tolman IV. 54
- Figura 8. Valores propios del tensor de curvatura correspondientes a la solución Schwarzschild interior. 55
- Figura 9. Valores propios del tensor de curvatura correspondientes a la solución Kottler. 56
- Figura 10. Valores propios del tensor de curvatura correspondientes a la solución Kucho-wicz 71 II. 57
- Figura 11. Valores propios de Nariai IV y su radio frontera  $r_b$  respectivo. 58
- Figura 12. Valores propios del tensor de curvatura correspondientes a la solución Buchdahl 1 y su radio frontera  $r_b$  respectivo. 58

Figura 13. Valores propios del tensor de curvatura correspondientes a la solución Heintzmann IIa y su radio frontera  $r_b$  respectivo. 58

Figura 14. Valores propios de Durgapal IV y su radio frontera  $r_b$  respectivo. 58

**Lista de Apéndices**

	<b>pág.</b>
Apéndice A. Ecuaciones de campo para una métrica estática general con simetría esférica interior	67
Apéndice B. Valores propios para una solución interior estática general con simetría esférica	78
Apéndice C. Valores propios de soluciones interiores	81

## Resumen

**Título:** Análisis de admisibilidad física de objetos compactos en el límite de Buchdahl \*

**Autor:** Jesus David Delgado Amaya \*\*

**Palabras Clave:** Escalares, criterios de admisibilidad, método de bivectores, límite de Buchdahl.

**Descripción:** Este trabajo analiza la admisibilidad física de soluciones estáticas y esféricamente simétricas de las ecuaciones de Einstein para describir campos gravitacionales en objetos astrofísicos, utilizando los valores propios del tensor de curvatura, los cuales son independientes del observador. Primero se emplean los cinco criterios de admisibilidad usados por Delgaty *et al.*, los cuales en principio usan cantidades dependientes del observador, junto con un criterio adicional relacionado con el límite de Buchdahl, para determinar cuáles soluciones son admisibles. Siguiendo a esto, se utiliza el método de bivectores, previamente aplicado por Gutiérrez-Piñeres *et al.*, para reescribir las componentes del tensor de curvatura y se determinan los valores propios de dicho tensor para seis soluciones interiores admisibles y cinco que no lo son. Finalmente, se analizó la relación entre el comportamiento de estos autovalores con los criterios de admisibilidad tratados anteriormente. Como resultado, se establece la clasificación de soluciones interiores desde los valores propios de curvatura es, en cierta medida, equivalente con la clasificación de Delgaty *et al.*, siendo su principal diferencia el uso de cantidades escalares.

---

\* Trabajo de investigación

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Antonio Calixto Gutiérrez Piñeres, Doctorado en Física.

### Abstract

**Title:** Physical admissibility analysis of compact objects in the Buchdahl limit \*

**Author:** Jesus David Delgado Amaya \*\*

**Keywords:** Scalars, admisibility criteria, bivectors method, Buchdahl limit.

**Description:** This work analyzes the physical admissibility of static and spherically symmetric solutions of the Einstein equations for describing gravitational fields in astrophysical objects, using the eigenvalues of the curvature tensor, which are observer-independent. Firstly, the five admissibility criteria used by Delgaty et al., which are initially observer-dependent quantities, are employed along with an additional criterion related to the Buchdahl limit, to determine which solutions are admissible. Following this, the bivector method, previously applied by Gutiérrez-Piñeres et al., is used to rewrite the components of the curvature tensor and to determine the eigenvalues of said tensor for six admissible interior solutions and five that are not. Finally, the relationship between the behavior of these eigenvalues and the admissibility criteria discussed earlier was analyzed. As a result, the classification of interior solutions based on curvature eigenvalues is, to some extent, equivalent to the classification by Delgaty et al., with the main difference being the use of scalar quantities.

---

\* BSc Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Antonio Calixto Gutiérrez Piñeres, PhD in Physics.

## Introducción

### Naturaleza e Importancia del Problema

La mejor manera de abordar su naturaleza, me refiero a la correspondiente a clasificar soluciones e interpretarlas, es enseñando el primer párrafo del libro *Exact Solutions to Einstein's Field Equations* Stephani et al. (2009).

*The theories of modern physics generally involve a mathematical model, defined by a certain set of differential equations, and supplemented by a set of rules for translating the mathematical results into meaningful statements about the physical world. In the case of theories of gravitation, it is generally accepted that the most successful is Einstein's theory of general relativity.*

Es ampliamente conocido que las distintas teorías físicas expresan, implícitamente, la necesidad de ser interpretadas en cuanto a sus resultados. La manera general de encontrar y clasificar soluciones parte de resolver ecuaciones diferenciales. En el caso correspondiente a la gravitación, se parte de resolver las ecuaciones de campo de Einstein, que se pueden compactar en una ecuación como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa_0 T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

donde  $R_{\mu\nu}$ ,  $g_{\mu\nu}$  y  $T_{\mu\nu}$  son el tensor de Ricci, el tensor métrico y el tensor de energía-momentum,

respectivamente, y cuyas soluciones respectivas son llamadas *métricas*. Estas soluciones pueden ser clasificadas a partir de considerar ciertas simetrías, restringir la estructura algebraica del tensor de Riemann, agregar ecuaciones extra las cuales contengan información de las variables materiales; todo estas maneras de resolución convierten el problema en uno más sencillo de abordar. Otra cuestión que debe considerarse es el tipo de materia que es deseado analizar, para lo cual, el tensor de energía-momentum forma una parte necesaria en este desarrollo. Por otra parte, los métodos de resolución requieren el uso de la topología y el análisis, mas que los propios métodos para resolver ecuaciones diferenciales. Igualmente, es posible abordar situaciones físicas realistas de acuerdo a las ambiciones del problema a ser resuelto; sin embargo, proponer este tipo de soluciones convierte el problema en uno más complejo, como bien lo dijo Kinnersley en 1975

*... most of the known exact solutions describe situations which are frankly unphysical, and these do have a tendency to distract attention from the more useful ones. But the situation is also partially the fault of those of us who work in this field. We toss in null currents, macroscopic neutrino fields and tachyons for the sake of greater "generality"; we seem to take delight at the invention of confusing anti-intuitive notation; and when all is done we leave our newborn metric wobbling on its vierbein without any visible means of interpretation.*

Dada la complejidad de solucionar estas ecuaciones, las soluciones analíticas de (1) son muy raras de ser obtenidas, a lo que el uso de métodos numéricos permite completar la tarea de resolver tal ecuación; no obstante, estos métodos deben ser puestos a prueba para comprobar la validez de las

técnicas de aproximación. Las soluciones analíticas de mayor relevancia y aplicabilidad suelen ser Schwarzschild exterior y Kerr para agujeros negros, y las soluciones cosmológicas de Friedmann para la cosmología Thorne et al. (2000).

### **Estado General del Tema**

En la Teoría General de la Relatividad (TGR) se define a un objeto compacto como un cuerpo cuyo radio es del orden del radio de Schwarzschild Lemos and Zaslavskii (2020). Las primeras soluciones analíticas de (1) fueron obtenidas por K. Schwarzschild, entre las cuales, la solución de vacío es de suma importancia al momento de ser pegado con determinadas soluciones interiores Schwarzschild (1999a); conforme al teorema de Birkhoff Carroll (2019), la métrica exterior de Schwarzschild es la única solución de vacío con simetría esférica; en cambio, la solución interior Schwarzschild (1999b) describe a un cuerpo simétricamente esférico y estático, pero correspondiente a un fluido incomprensible, aunque esto la convierte en una solución poco atractiva, dado que la velocidad de propagación del sonido dentro del fluido es infinita, *i.e.*, viola el principio de causalidad. Posterior a estos trabajos, R. C. Tolman Tolman (1939) y J. R. Oppenheimer *et al.* Oppenheimer and Volkoff (1939), independientemente, obtuvieron los primeros modelos para objetos compactos, los cuales correspondieron a estrellas de neutrones. Mas aún, R. C. Tolman desarrolló un método para obtener soluciones analíticas de las ecuaciones de campo, de tal suerte que proveyere soluciones explícitas en términos de funciones analíticas. Otro rasgo de este trabajo fue el

estudio respectivo de tres de las ocho métricas halladas<sup>1</sup>. Con respecto al trabajo de J. R. Oppenheimer y G. M. Volkoff Oppenheimer and Volkoff (1939), fueron estudiadas las configuraciones de materia de neutrones, en lo cual encontraron masas de equilibrio gravitacional usando la ecuación de estado de un gas de Fermi junto a TGR. Por todo esto, estos dos trabajos son considerados los pilares en el estudio de objetos compactos y soluciones interiores.

En lo que respecta al equilibrio hidrostático, se ha aceptado la idea de Buchdahl propuesta en 1959, según la cual para cualquier solución estática, esféricamente simétrica y no singular de las ecuaciones de campo de Einstein los valores de la masa  $M_*$  y el radio  $R_*$  del objeto están restringidos por la expresión  $R_* \geq \frac{9}{8}r_+$  Buchdahl (1959)<sup>2</sup>. Esta restricción ha sido ampliamente estudiada en la literatura, y suele ser llamada como el *teorema de Buchdahl*. *Grosso modo*, existe una masa límite en un radio finito para el cual la presión hidrostática no será infinita; una demostración, muy detallada, de este teorema fue realizada por Chávez *et al.* Chavez Nambo and Sarbach (2020). Por otro lado, cabe resaltar que la desigualdad de Buchdahl fue descubierta por Schwarzschild<sup>3</sup> en términos de un fluido incomprensible respecto a su solución interior; sin embargo, Buchdahl logró generali-

---

<sup>1</sup> Tolman obtuvo para las soluciones IV, V y VI los radios de pegado, la presión central, la densidad de energía central, las dependencias para los potenciales métricos en términos del radio frontera y la expresión para la masa de la esfera. Además, logró acotar los valores de los parámetros propios de cada métrica.

<sup>2</sup>  $r_+$  corresponde al radio gravitacional, que se expresa como  $r_+ = 2M_*$ .

<sup>3</sup> En realidad, Schwarzschild obtuvo la igualdad de esa expresión.

zarla para una densidad de energía monótonamente decreciente en función de la coordenada radial ( $r$ ). Conviene subrayar la parte correspondiente al título "*estrellas de Buchdahl*", y es que, por la definición del teorema de Buchdahl es conocido que los objetos que cumplan la igualdad de este teorema son llamados *estrellas de Buchdahl*. La presión de los objetos que satisfacen la igualdad de Buchdahl tiende a ser infinita, a lo que la solución se tornará singular. Aprovechando las ideas de Lemos *et al.* Lemos and Zaslavskii (2020), decidimos orientarnos en comprender el comportamiento y la admisibilidad de las soluciones interiores antes de que suceda el colapso gravitacional, de donde resulta que enfocamos este trabajo en cumplir, netamente, la desigualdad de Buchdahl; entonces, como hemos aceptado la existencia de las estrellas de Buchdahl, llamaremos a los objetos que satisfagan la desigualdad del teorema de Buchdahl como *estrellas en el límite de Buchdahl*. Un punto importante que debe ser aclarado con prontitud es la no detección observacional de las estrellas de Buchdahl<sup>4</sup>; es posible que existan estos objetos ultra densos, tal como lo escribió N. Dadhich en su último artículo, en el cual demostró que la estrella de Buchdahl es una estrella Virial a medida que su equilibrio se mantenga por una energía cinética promedio siendo la mitad de la energía potencial Dadhich (2022).

Por otra parte, desde los inicios históricos de la formulación de TGR hasta hoy se ha trabajado para encontrar soluciones interiores de (1) que describan apropiadamente objetos astrofísicos. En particular, se ha explorado la tarea de hallar y formular soluciones analíticas que permitan entender

---

<sup>4</sup> No se han encontrado registros de su existencia; por el momento son objetos teóricos.

físicamente la estructura interna de los objetos compactos, entre lo cual, el libro *Exact Solutions to Einstein's Field Equations* Stephani et al. (2009) constituye quizá la mejor referencia bibliográfica para los investigadores en soluciones exactas. Indiscutiblemente, el trabajo realizado por Delgaty et al. Delgaty and Lake (1998) se conoce como uno de los principales trabajos de clasificación de soluciones interiores y para el cual los autores recopilaron cinco criterios de admisibilidad física<sup>5</sup> aplicados a ciento veintisiete soluciones interiores correspondientes a un fluido perfecto. En el marco de esos criterios de admisibilidad física sólo dieciséis soluciones<sup>6</sup> constituyen modelos físicamente razonables, candidatas para ser pegadas a la solución exterior de la fuente Delgaty and Lake (1998).

Recientemente, los autores A. C. Gutiérrez y H. Quevedo han estudiado las propiedades de objetos físicos descritos por soluciones interiores de las ecuaciones de Einstein en términos de la diferenciabilidad de los valores propios del tensor de curvatura para ciertas soluciones interiores Gutiérrez-Piñeres and Quevedo (2019, 2022). Simultáneamente, H. Quevedo ha trabajado con el método de valores propios del tensor de curvatura para pegar soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell Quevedo (2012); también, por medio del comportamiento de los valores pro-

---

<sup>5</sup> En este trabajo definimos criterios de admisibilidad física como el conjunto de pautas que permitirán distinguir entre soluciones matemáticas que satisfacen la ecuación de campo de Einstein y las soluciones que, además de satisfacer la ecuación de Einstein, pueden ser asociadas a objetos astrofísicos.

<sup>6</sup> Estas soluciones fueron: Tolman IV, Tolman VII+, P-V IIa+, Wyman IIa, Nariai IV+, Buch1, Mehra+, Kuch2 III+, Heint IIa, Gold III+, M-W I+, Durg IV+, Durg V+, Whitman II, Whitman IV y F-S. Las soluciones interiores que se encuentren acompañadas por un + tienen una velocidad del sonido decreciente.

pios de curvatura, propuso un método invariante para caracterizar las zonas de gravedad repulsiva Luongo and Quevedo (2014); por otra parte, estudió los efectos de la gravedad repulsiva sobre los escenarios tardío y temprano de la evolución del universo Luongo and Quevedo (2018). En suma, el estudio de los valores propios de curvatura podría brindar información adicional para determinar la admisibilidad de soluciones interiores, ya que, como se ha dicho, en el uso de éstos se lograron abordar distintos problemas desde un punto de vista completamente geométrico.

### **Propósito y Organización del Trabajo**

Conforme a lo escrito anteriormente, cabe plantearse la siguiente pregunta: *¿Cuáles de las soluciones correspondientes a estrellas en el límite de Buchdahl presentes en la literatura son físicamente admisibles según los criterios físicos recopilados por Delgaty et al., y según los criterios geométricos propuestos por Gutiérrez et al.?* Para lo cual, en el capítulo 1 está dividido en dos partes: la primera parte consistirá en explicar los cinco criterios detalladamente para su posterior aplicación en seis soluciones interiores con simetría esférica y cuyos resultados serán explicados para la solución Tolman IV. En lo que respecta a la segunda parte del primer capítulo, se calcularán los radios de frontera y de Schwarzschild para las métricas admisibles anteriores y la consiguiente aplicación de un criterio adicional, el criterio de estrella en el límite de Buchdahl, mediante el cálculo de la relación de compacidad.

En el capítulo 2 se explicará el formalismo con el cual se calcularán los valores propios de curvatura, en cuyo caso serán realizados para el caso particular de una solución de un tensor energía-

momentum tipo fluido perfecto. En el apéndice 2 se enseñarán las formas funcionales de estos valores propios calculados para una métrica general con simetría esférica. A continuación se mostrarán los rasgos principales que presentan los valores propios de soluciones admisibles con respecto a las soluciones no admisibles; además, se definirá un criterio de admisibilidad física desde un análisis del comportamiento de los valores propios de curvatura, y por último, se expondrá que esta definición aplica para las soluciones admisibles analizadas anteriormente. Como parte final se presentarán las características más relevantes de esta investigación y posibles direccionamientos para ampliar este trabajo en el capítulo 3. Se debe agregar que, en el apéndice 1 se expondrán los cálculos de las ecuaciones de campo para una métrica general, estática y con simetría esférica usando las ecuaciones de Cartan.

## 1. Admisibilidad física y *estrellas de Buchdahl*

### 1.1. Introducción

Con el fin de clasificar las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein, estas son las métricas, se suelen aplicar ciertas restricciones que cumplan condiciones que concuerden con la física tal cual como la conocemos, *e. g.*, que la velocidad de la propagación en un fluido material sea menor a la velocidad de la luz en el vacío, con esto quiero decir, bajo ningún criterio se puede violar la causalidad. Así mismo, en el caso de los distintos fluidos materiales que actualmente son estudiados, conviene agregar dependiendo de cual sea este, ciertas condiciones extra que limiten el modelo de estudio. Por todo esto, es necesario que dichas soluciones de las ecuaciones de campo, también proporcionen información física del objeto en cuestión.

En este capítulo abordaremos los criterios de admisibilidad física mínimos para que la solución pueda describir un cuerpo astrofísico real y los explicaremos para el modelo de estudio en cuestión; además, describiremos seis soluciones interiores de fluido perfecto que satisfacen los criterios propuestos por Delgaty *et al.* Delgaty and Lake (1998), en particular, nos enfocaremos en Tolman IV haciendo un análisis de los resultados en la aplicación de los criterios, y finalmente, describiremos el límite de Buchdahl, el cual será tomado en su forma de desigualdad para aplicarse a las soluciones interiores admisibles, en el caso particular, a Tolman IV. Adicionalmente, enseñaremos las relaciones de compacidad de las soluciones admisibles, sus respectivos radios de frontera y radios de Schwarzschild.

## 1.2. Criterios de admisibilidad física

La clasificación de soluciones interiores se da en el ámbito de la física, y en particular, para la relatividad al momento de recolectar y recopilar información; la información del espacio-tiempo está codificada en la geometría, y esta a su vez se encuentra almacenada en la métrica que define la gravedad del objeto en cuestión. El trabajo de Delgaty *et al.* Delgaty and Lake (1998) es conocido como uno de los trabajos más relevantes en la rama de clasificación de soluciones interiores; los autores recopilaron ciento veintisiete soluciones interiores aisladas, estáticas y con simetría esférica en la cual el tensor de energía-momentum correspondió a un fluido perfecto. De acuerdo con el tipo de fluido, exigieron que estas soluciones satisficiesen cinco criterios, los cuales son propuestos como los mínimos criterios físicos que una solución de fluido perfecto debe cumplir para que sea admisible físicamente de acuerdo a este modelo.

Por otra parte, Ivanov Ivanov (2017) propuso una clasificación para modelos de estrellas anisótropas, las cuales se asemejan al caso de isotropía del fluido perfecto, aunque, exige seis criterios para restringir el comportamiento de tales fluidos, en los cuales se encuentran: criterio de estabilidad dado por el índice adiabático, estabilidad ante el crackeo, la condición de estabilidad de Harrison-Zeldovich-Novikov, etc. En concordancia con este trabajo Núñez *et al.* han aplicado en años recientes los criterios de admisibilidad anisótropa a distintos objetos compactos con distintas ecuaciones de estado Hernández *et al.* (2018); Ramos-Salamanca *et al.* (2021); Suárez-Urango *et al.* (2021); Hernández *et al.* (2021); Suárez-Urango *et al.* (2022).

En los siguientes apartados serán descritos cada uno de los criterios de admisibilidad para un fluido isótropo y más adelante se aplicarán a seis soluciones interiores de fluido perfecto.

**1.2.1. Criterio de isotropía.** La ecuación de campo de Einstein es una ecuación tensorial construida de tal suerte que sea covariante; relaciona la geometría con la materia, y descrita en componentes es

$$G_{\nu}^{\mu} = \kappa T_{\nu}^{\mu}, \quad (2)$$

donde  $G_{\nu}^{\mu}$  corresponde a las componentes del *tensor de Einstein*, siendo esto la representación de un tensor tipo  $(1, 1)$  y el miembro derecho de la ecuación (2) responde a las componentes del *tensor de energía-momentum* por un factor de proporcionalidad, el cual en unidades geometrizadas será  $\kappa = 8\pi$  Thorne et al. (2000). La condición de isotropía expresa netamente que: de acuerdo a la fuente de estudio y por la ecuación de campo tres componentes del tensor de Einstein serán iguales, lo cual verifica la isotropía de la presión. Esto en componentes es  $G_r^r = G_{\theta}^{\theta}$ . Además, por la simetría esférica  $G_{\theta}^{\theta} = G_{\phi}^{\phi}$ .

**1.2.2. Criterio de regularidad en  $r = 0$ .** La métrica interior no debe presentar singularidades en un intervalo  $r \in [0, R_*]$ . Para ilustrar mejor se parte de considerar una métrica general, estática y con simetría esférica

$$ds^2 = -a(r)dt \otimes dt + b(r)dr \otimes dr + c(r)r^2 d\Omega \otimes d\Omega, \quad (3)$$

donde  $a(r)$ ,  $b(r)$  y  $c(r)$  corresponden a las componentes de la métrica. Con miras a representar el espacio-tiempo de un cuerpo físico finito, la métrica (3) debe ser regular en el origen  $r = 0$ . Debido a esto, se acostumbra a expresar la regularidad en el origen que requiere  $b(0) = 1$ . Sin embargo, esta condición no garantiza la regularidad. Para ilustrar mejor se eligen los coeficientes  $a(r) = 1$  y  $b(r) = 1 + dr$ , de donde resulta que el escalar de Ricci

$$R = \frac{2d(2+d)}{r(r+dr)^2}$$

es singular en  $r = 0$ . Lake *et al.* propusieron que mediante exigencias geométricas los invariantes de curvatura sean finitos en el origen Lake and Musgrave (1994)<sup>7</sup>. De manera que las funciones  $a(r)$ ,  $b(r)$  y  $c(r)$  deben ser tipo  $C^2$  y los invariantes de curvatura en  $r = 0$  serán finitos si y solo si  $a(0) = \text{cte.}$ ,  $b(0) = c(0) = 1$  y  $a'(0) = b'(0) = c'(0) = 0$ .

**1.2.3. Criterio de presión  $p$  y densidad de energía  $\rho$  positivo definidas.** En los modelos de objetos compactos usualmente se supone que la densidad de energía es  $\rho \geq 0$  y la presión es  $p \geq 0$ . Dicha forma de describir el problema en TGR se convierte en una manera de pensar el problema sin especificar la materia de la cual  $T_{\mu\nu}$  se deriva. Por lo que las condiciones para que las soluciones interiores en TGR en la presencia de una fuente realista se basan en aplicar condiciones para limitar la arbitrariedad de  $T_{\mu\nu}$  Carroll (2019); Ivanov (2017).

- *Condición de energía débil (WEC):* La densidad de energía medida por un observador arbi-

---

<sup>7</sup> Tales invariantes son  $R$ ,  $r_1 \equiv S_a^b S_b^a / 4$ ,  $r_2 \equiv -S_a^b S_b^c S_c^a / 8$  y  $r_3 \equiv -S_a^b S_b^c S_c^d S_d^a$ , con  $S_b^a = R_b^a - \delta_b^a R / 4$ .

trario no puede ser negativa. Esto se puede escribir en términos de las siguientes desigualdades

$$T_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho \geq 0, \quad \rho + p_i > 0, \quad (4)$$

donde  $t^\alpha$  es un vector tipo tiempo.

- *Condición de energía fuerte (SEC)*: Esta condición de energía se asocia con que el campo gravitacional debe ser atractivo. Dicha condición se satisfará si se cumplen las siguientes relaciones

$$T_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta \geq -\frac{1}{2}T \quad \Longrightarrow \quad \rho + p \geq 0, \quad \rho + 3p \geq 0. \quad (5)$$

- *Condición de energía dominante (DEC)*: el vector flujo de energía, medido por un observador, debe tipo tiempo futuro dirigido o nulo. En el tensor de energía-momentum esto se expresa como

$$T_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta \geq 0, \quad T^{\alpha\beta}t_\beta \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho \geq |p|. \quad (6)$$

Físicamente, esta condición de energía se interpreta diciendo que la materia y la energía no puede fluir más rápido que la luz. Además, esta condición de energía contiene a WEC. Cabe resaltar que estas tres condiciones de energía son independientes matemáticamente Pimentel

et al. (2016, 2017).

**1.2.4. Criterio de decrecimiento monótono de la presión  $p$  y la densidad de energía  $\rho$ .** Se presume una ecuación de estado tipo  $p = p(\rho)$ , en la cual su derivada respecto a la coordenada  $r$  brinda información del gradiente de presión, que corresponde a

$$\frac{dp}{dr} = \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dr}, \quad (7)$$

donde  $dp/d\rho$  es supuesta en capas de fluido estático con simetría esférica con presión isotropa una cantidad positivo definida para  $p > 0$ , de acuerdo a las restricciones sobre la ecuación de estado Rendall and Schmidt (1991); Baumgarte and Rendall (1993). Adicionalmente, el gradiente de presión se define haciendo uso de la ecuación que gobierna el equilibrio hidrostático, dicha ecuación se conoce como la *ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff* (TOV) Tolman (1939); Oppenheimer and Volkoff (1939)

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{(p(r) + \rho(r)) (m(r) + 4\pi p(r)r^3)}{r(r - 2m(r))}, \quad (8)$$

la cual es la generalización de la ecuación del equilibrio hidrostático en el caso newtoniano, y sobre la cual  $m(r)$  es la masa efectiva gravitacional, definida como

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(s)s^2 ds. \quad (9)$$

Observando el signo de la ecuación TOV (8), se infiere que la cantidad  $dp/dr$  será una cantidad

decreciente, conduciendo a que  $\rho(r)$  y  $p(r)$  sean cantidades monótonamente decrecientes.

**1.2.5. Criterio de causalidad.** El último criterio de admisibilidad requiere, de acuerdo al postulado de *causalidad local*, que la velocidad de propagación  $v_s$  en un medio material no debe exceder la velocidad de la luz; de manera que  $v_s > c$  se toma como un criterio que permite rechazar teorías o en este caso soluciones interiores de las ecuaciones de campo ya que la causalidad local es uno de los cimientos de la teoría especial de la relatividad, y a su vez debe ser un requerimiento absoluto en toda construcción física Ellis et al. (2007). Para un modelo de fluido, en el caso particular de un fluido perfecto, la relación entre la velocidad del sonido y la velocidad de la luz se escribe de la siguiente forma

$$v_s^2 = \frac{dp}{d\rho} < 1. \quad (10)$$

### 1.3. Soluciones interiores admisibles

En este apartado aplicamos los criterios a seis soluciones que de antemano sabemos cumplen la admisibilidad física y pretendemos reproducir los resultados obtenidos por Delgaty *et al.* Delgaty and Lake (1998) con una elección distinta de parámetros. Enfocaremos el análisis para la solución Tolman IV con el objetivo de enseñar los resultados principales y mostraremos gráficamente el comportamiento de la presión, la densidad de energía, y la velocidad de propagación en el fluido, limitando estas curvas al radio frontera para cada solución interior  $r_b$ . Hay que mencionar, además, que las soluciones Nariai IV, Buchdahl 1, Heintzmann IIa, Durgapal IV y Durgapal V también satisficieron los criterios de admisibilidad. Deseo subrayar que los resultados son cualita-

tivamente similares a los que se presentarán para Tolman IV.

**1.3.1. Tolman IV.** El espacio-tiempo de Tolman IV Tolman (1939) es una solución analítica correspondiente a un fluido perfecto. La geometría viene descrita por el siguiente tensor métrico

$$\mathbf{g} = -B^2 \left(1 + \frac{r^2}{A^2}\right) dt \otimes dt + \frac{1 + \frac{2r^2}{A^2}}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \left(1 + \frac{r^2}{A^2}\right)} dr \otimes dr + r^2 d\Omega \otimes d\Omega, \quad (11)$$

con  $A, B$  y  $R$  constantes. La presión  $p(r)$  y la densidad de energía  $\rho(r)$  vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$p(r) = \frac{-A^2 + R^2 - 3r^2}{8\pi R^2(A^2 + 2r^2)}, \quad (12)$$

$$\rho(r) = \frac{6r^4 + (7A^2 + 2R^2)r^2 + 3A^4 + 3A^2R^2}{8\pi R^2(A^2 + 2r^2)^2}. \quad (13)$$

**1.3.1.1. Criterio de isotropía.** Empezamos analizando si la presión descrita por la solución (11) presenta el carácter isótropo en las componentes  $G_r^r = G_\theta^\theta$ . Cabe ser aclarado que todos los cálculos son proporcionados con más detalle en el anexo 1, ahí se encuentran las expresiones para las componentes del tensor de Einstein en términos de los coeficientes de una métrica general y estática. La tres componentes del tensor de Einstein relacionadas con la presión fueron calculadas mediante un programa construido en el software Maple 2020 y cuyo resultado fue

$$p(r) = \frac{-A^2 + R^2 - 3r^2}{8\pi R^2(A^2 + 2r^2)}, \quad (14)$$

donde la solución satisfizo el criterio de isotropía en la componentes del tensor  $G_b^a$ , de modo que, las componentes radial y tangencial de la presión  $p(r)_r$  y  $p(r)_\perp$  son iguales. Un caso más general corresponde al del fluido anisótropo, en el cual dos de las componentes, las cuales corresponden a la presión tangencial, son distintas a la presión radial, por ende el número de ecuaciones aumentará en lo cual se debe implementar una ecuación de estado para completar el sistema de ecuaciones y que este sea resoluble Suárez-Urango et al. (2022). Es por esto que la métrica de Tolman IV corresponde a una solución de fluido perfecto.

**1.3.1.2. Criterio de regularidad en  $r = 0$ .** Debido a que este espacio-tiempo (11) debe describir un cuerpo regular, los escalares de curvatura no deben ser degenerados sobre el intervalo  $r \in [0, R_*]$ . Las funciones de los potenciales métricos y su valor evaluados en  $r = 0$  son:

$$g_{tt}(r) = -B^2 \left(1 + \frac{r^2}{A^2}\right), \quad (15)$$

$$g_{tt}(r=0) = -B^2, \quad (16)$$

$$g_{rr}(r) = \frac{1 + 2\frac{r^2}{A^2}}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \left(1 - \frac{r^2}{A^2}\right)}, \quad (17)$$

$$g_{rr}(r=0) = 1, \quad (18)$$

$$g_{tt,r}(r) = \frac{2B^2 r}{A^2}, \quad (19)$$

$$g_{tt,r}(r=0) = 0, \quad (20)$$

$$g_{rr,r}(r) = \frac{2rR^2 (A^4 + A^2R^2 + 2A^2r^2 + 2r^4)}{(R^2 - r^2)^2 (A^2 + r^2)^2}, \quad (21)$$

$$g_{rr,r}(r=0) = 0. \quad (22)$$

Observemos que  $g_{tt}(r=0) = -B^2$  y  $g_{rr}(r=0) = 1$ , estos resultados se encuentran en concordancia con los requisitos definidos por Lake *et al.* Lake and Musgrave (1994); consideremos ahora la primera derivada ordinaria de  $g_{tt}$  y  $g_{rr}$  y cuyos valores en  $r=0$  son 0, que a su vez concuerdan con lo dicho por Lake *et al.*; sírvase de ejemplo observar la forma del escalar de Ricci  $R_e$  y las otras tres contracciones del tensor de curvatura  $r_1, r_2$  y  $r_3$ :

$$R_e = \frac{6A^4 + 22A^2r^2 - 4R^2r^2 + 24r^4}{R^2(A^2 + 2r^2)^2}, \quad (23)$$

$$r_1 = \frac{3(A^2 + 2R^2)^2(A^2 + r^2)^2}{4(A^2 + 2r^2)^4R^4}, \quad (24)$$

$$r_2 = \frac{3(A^2 + 2R^2)^3(A^2 + r^2)^3}{8(A^2 + 2r^2)^6R^6}, \quad (25)$$

$$r_3 = \frac{21(A^2 + 2R^2)^4(A^2 + r^2)^4}{4(A^2 + 2r^2)^8R^8}. \quad (26)$$

Como resultado de que los potenciales métricos satisfagan que  $g_{tt}(0) = \text{cte.}$ ,  $g_{rr}(0) = 1$  y al mismo tiempo sus derivadas cumplan  $g_{tt,r}(0) = g_{rr,r}(0) = 0$  los escalares no describen ninguna irregularidad. Deseo subrayar que de los escalares (23-26) ninguno presenta infinitos mediante un análisis por inspección, esto es, la única manera de que estos cuatro escalares sean degenerados es mediante una elección de los parámetros  $A$  y  $R$  igualados a cero. Otro rasgo de esto es la dependencia de los escalares en términos de  $r$ , sobre todo que los denominadores de cada expresión no son múltiplos de potencias negativas de  $r$ , de modo que esta métrica no tiene infinitos en  $r = 0$ .

En suma, la solución de Tolman IV no presenta singularidades en ningún punto de la coordenada radial sobre el intervalo  $r \in [0, R_*]$ , por consiguiente cumple el segundo criterio de admisibilidad, lo cual la convierte en una solución interior isótropa no singular de las ecuaciones de campo de Einstein.

**1.3.1.3. Criterio de presión  $p$  y densidad de energía  $\rho$  positivo definidas.** Continuamos exigiendo a la solución interior que la presión  $p(r)$  y la densidad de energía  $\rho(r)$  sean positivo definidas en el origen. A causa de esta exigencia la presión presenta un máximo central, denominado *presión central* ( $p_0$ ); de manera análoga la densidad de energía también presenta un máximo central, el cual se conoce como *densidad de energía central* ( $\rho_0$ ). Las expresiones fueron:

$$p_0 = \frac{-A^2 + R^2}{8\pi R^2 A^2}, \quad (27)$$

$$\rho_0 = \frac{3A^2 + 3R^2}{8\pi R^2 A^2}. \quad (28)$$

Indiscutiblemente, no es posible seleccionar valores arbitrarios para las constantes  $A$  y  $R$ , la forma común de encarar esta elección es mediante las condiciones de energía. A continuación, se presentan los perfiles correspondientes a la densidad de energía (12) y la presión (13) que fueron obtenidos de un código que construido en Maple 2020, donde, fueron seleccionadas las constantes de la siguiente forma:  $A = 1$  y  $R = 9$ , también se demuestra que  $p_0$  (27) y  $\rho_0$  (28) son máximas en  $r = 0$ , y finalmente que  $p(r)$  y  $\rho(r)$  son cantidades positivas en  $r \in [0, R_*]$ .

En la figura 1<sup>8</sup> se aprecian el cumplimiento de WEC, DEC y SEC. Comenzamos por WEC, y en

---

<sup>8</sup> Cabe ser aclarado que en este trabajo usamos coordenadas geometrizadas, acorde con esto, las unidades para la presión y la densidad de energía corresponderán a  $L^{-2}$ .

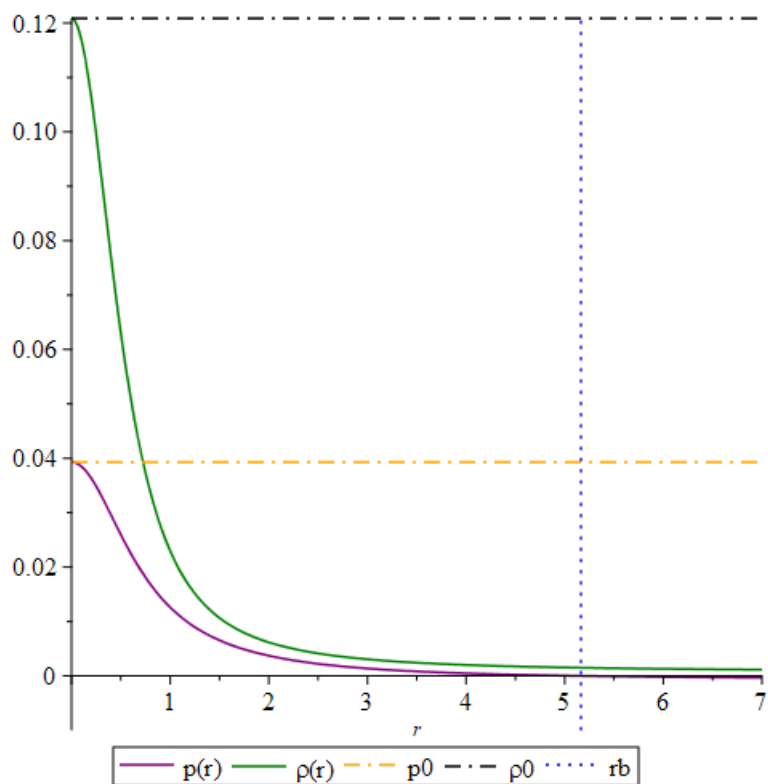


Figura 1. Presión  $p(r)$ , densidad de energía  $\rho(r)$ , presión central  $p_0$ , densidad de energía central  $\rho_0$  y radio frontera  $r_b$  correspondientes a la solución Tolman IV.

vista de que  $\rho(r)$ , para Tolman IV, es una función de potencias pares, conlleva a que la densidad de energía se satisfará sobre la región de importancia, esta es comprendida en el intervalo  $r \in [0, R_*]$ .

En continuación, DEC se cumple si se satisfacen los siguientes condiciones: isotropía en la presión, escalares de curvatura distintos de cero al momento de ser evaluados en  $r = 0$ , y  $p_0, \rho_0 > 0$  para la solución de interés. Estas tres condiciones son garantía, según Delgaty *et al.* Delgaty and Lake (1998), de que DEC se cumplirá para las soluciones que las cumplan. Observando los resultados de esta parte encontramos que de antemano sabemos que Tolman IV es una solución isótropa, no tiene singularidades en la región  $r \in [0, R_*]$  y que  $p_0, \rho_0 > 0$ . Finalmente, inspeccionando la imagen

1 SEC también se satisfizo sobre el intervalo  $r \in [0, R_*]$ .

Físicamente, que WEC, DEC y SEC fueron satisfechas para la solución Tolman IV implica que: la densidad de energía será una cantidad positivo definida medida por cualquier observador arbitrario, que el campo gravitacional será atractivo y que el vector flujo de densidad de energía es tipo tiempo o un vector nulo. Así que la solución Tolman IV satisfizo el tercer criterio de admisibilidad junto a las condiciones de energía WEC, DEC y SEC.

**1.3.1.4. Criterio de decrecimiento monótono de la presión  $p$  y la densidad de energía  $\rho$ .** Considerando que se seleccionaron soluciones interiores en equilibrio hidrostático, el comportamiento de  $p(r)$  debía presentar un decrecimiento monótono, dado que esta función satisface la ecuación de equilibrio TOV (8); se conoce de antemano que la presión decrece a medida que la coordenada radial aumenta. Conviene subrayar que al considerar soluciones de objetos aislados se requiere que la función  $p(r)$  se reduzca a cero en algún radio frontera  $r_b > 0$ . Con respecto a la densidad de energía también se observa dicho decrecimiento. Baste, como muestran las siguientes funciones:

$$p_{,r} = -\frac{r(A^2 + 2R^2)}{4\pi R^2(A^2 + 2r^2)^2}, \quad (29)$$

$$p_{,rr} = -\frac{(A^2 - 6r^2)(A^2 + 2R^2)}{4\pi R^2(A^2 + 2r^2)^3}, \quad (30)$$

$$\rho_{,r} = -\frac{r(5A^2 + 2r^2)(A^2 + 2R^2)}{4\pi R^2(A^2 + 2r^2)^3}, \quad (31)$$

$$\rho_{,rr} = -\frac{(5A^4 - 44A^2r^2 - 12r^4)(A^2 + 2R^2)}{4\pi R^2(A^2 + 2r^2)^4}, \quad (32)$$

donde la primera derivada respecto de la coordenada radial, tanto en  $p(r)$  como en  $\rho(r)$ , denota un carácter negativo. Como se afirmó arriba, la solución interior debía satisfacer TOV; al mismo tiempo  $\rho(r)$  decrece con la coordenada radial, lo que la hace cumplir con la ecuación (8). Algo semejante sucede con las primeras derivadas de estas cantidades lo cual se pueden observar en la siguiente imagen.

Los perfiles de las primeras derivadas radiales mostraron, en la figura 2<sup>9</sup>, que en el punto  $r = 0$  existe un máximo global, y a su vez, los gradientes (29) y (31) tuvieron como solución el punto  $r = 0$ ; por otra parte, se observó el carácter decreciente de  $p(r)$  (12) y  $\rho(r)$  (13). Mediante el criterio de la segunda derivada, y por inspección, las funciones  $p_{rr}$  (30) y  $\rho_{rr}$  (32) correspondieron a funciones negativas, de modo que,  $p(r)$  y  $\rho(r)$  son cóncavas hacia abajo. Así, la solución Tolman IV satisfizo el criterio de decrecimiento monótono.

---

<sup>9</sup> Las unidades para los gradientes correspondieron a  $L^{-3}$ .

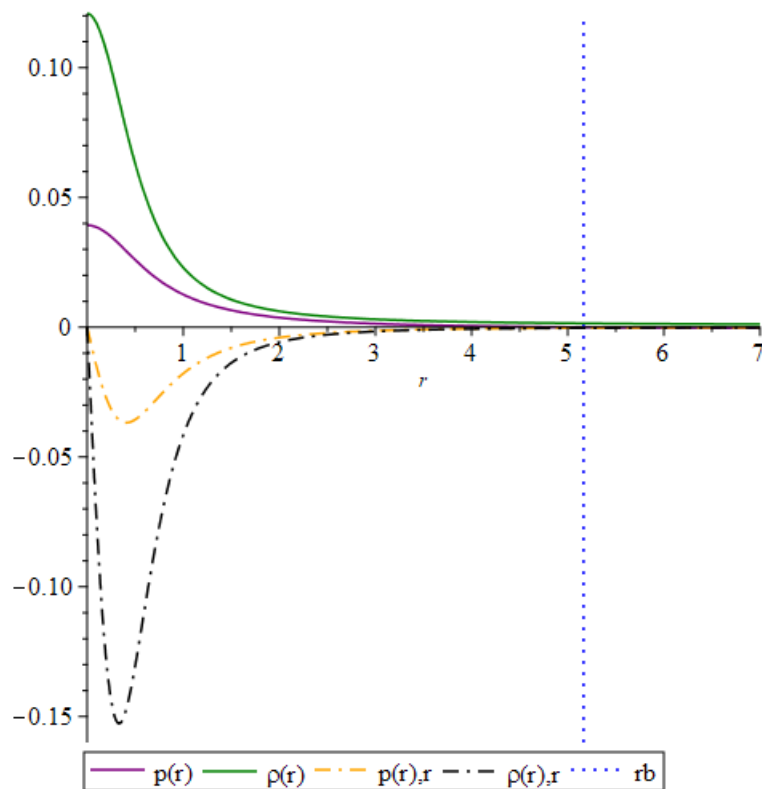


Figura 2. Presión  $p(r)$ , densidad de energía  $\rho(r)$ , gradiente de presión  $p(r),r$ , gradiente de densidad de energía  $\rho(r),r$  y radio frontera  $r_b$  correspondientes a la solución Tolman IV.

**1.3.1.5. Criterio de causalidad.** Finalmente, en cuanto a causalidad la expresión

(11) correspondiente a la solución Tolman IV fue

$$v_s^2 = \frac{A^2 + 2r^2}{5A^2 + 2r^2}. \quad (33)$$

Dicho lo anterior, se pueden comparar la velocidad de la luz en el vacío  $c_0$  con la velocidad de propagación del sonido dentro del fluido  $v_s$ . Tal comparación se puede apreciar en la siguiente figura donde el valor de  $c_0$  está igualado a la unidad.

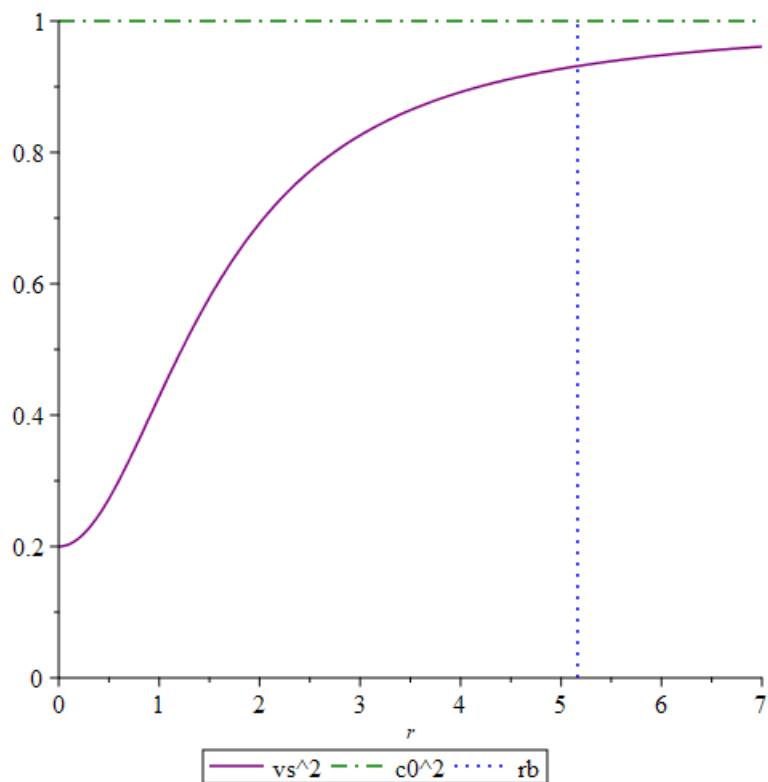


Figura 3. Velocidad al cuadrado dentro del fluido  $v_s^2$  en la solución Tolman IV, velocidad de la luz en el vacío  $c_0^2$  y radio frontera  $r_b$ .

En la figura 3<sup>10</sup> la velocidad  $v_s^2$  no fue una función decreciente de  $r$ , lo cual concuerda con los resultados de Delgaty *et al.* Delgaty and Lake (1998). Hay que mencionar, además que en  $r \in [0, R_*]$ ,  $v_s^2$  tiene un comportamiento "asintótico" hacia  $c_0^2$ . Por tanto, la solución de Tolman IV satisfizo el criterio de causalidad.

Como se ha dicho al final de mostrar los resultados de la solución Tolman IV, hemos observado que

---

<sup>10</sup> Como  $c = 1$  por el tipo de unidades que se están usando, la velocidad de propagación en el fluido es adimensional.

es una solución físicamente admisible de las ecuaciones de campo, esto es debido a que cumplió los criterios suficientes para que así fuese: regular, cumplió las condiciones de energía, obedeció a la ecuación TOV y no violó la causalidad. Cosa parecida sucede también con las soluciones de Nariai IV, Buchdahl I, Heintzmann IIa, Durgapal IV y Durgapal V; no obstante, debido a que los resultados para estas cinco soluciones son, cualitativamente, similares a los presentados para el espacio-tiempo de Tolman IV, estos fueron compilados en la tabla 1.

#### 1.4. Criterio del límite de Buchdahl

Para  $R > 0$  lo suficientemente pequeño, existe una solución continua y diferenciable  $P : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}$  de la ecuación adimensional (TOV) que satisface  $\lim_{x \rightarrow 0} P(x) = 1$ <sup>11</sup>.

**Teorema 1.** Sea  $P : (0, x_*) \rightarrow \mathbb{R}$  la solución máximamente extendida de la ecuación TOV que es continua y diferenciable, tal que  $\lim_{x \rightarrow 0} P(x) = 1$ ,  $0 < P(x) < 1$  y  $1 - 2\lambda x^2 \omega(x) > 0$  para todo  $x \in (0, x_*)$  Chavez Nambo and Sarbach (2020). Entonces,

$$\frac{2m(r)}{r} = 2\lambda x^2 \omega(x) < \frac{8}{9}, \quad \forall x \in (0, x_*) \wedge r \in (0, R_*). \quad (34)$$

**Corolario 1.** Partiendo del teorema de Buchdahl (34), en el caso particular de un objeto de masa  $M$  y radio  $R_*$ , descrito por una solución interior de las ecuaciones de Einstein, cumple la siguiente

---

<sup>11</sup> En esta sección trabajaremos, principalmente, con cantidades adimensionalizadas, las cuales serán:  $\lambda := p_c/\rho_c$ ,  $r = lx$ ,  $p(r) = p_c P(x)$ ,  $\rho(r) = \rho_c e(P)$ ,  $\bar{\rho}(r) = \rho_c \omega(x)$ . Donde  $p_c = p(0)$  es la presión central,  $\rho_c = \rho(0)$  la densidad de energía central. Aquí la función  $e(P)$  representa la ecuación de estado adimensional. Por definición, las funciones  $P(x)$ ,  $\omega(x)$  y  $e(P)$  satisfacen las siguientes condiciones en el centro  $P(0) = \omega(0) = 1$  y  $e(1) = 1$ .

relación entre  $M$  y  $R_*$  de la forma

$$M_* \leq \frac{4}{9}R_*, \quad (35)$$

donde la anterior desigualdad se conoce como el *límite de Buchdahl*.

**Definición 1.** Toda solución interior de las ecuaciones de campo de Einstein que cumple la relación entre su radio  $R_*$  y su radio gravitacional  $r_+$ <sup>12</sup> de la forma

$$R_* = \frac{9}{8}r_+, \quad (36)$$

constituye una *Estrella de Buchdahl* Lemos and Zaslavskii (2020).

**1.4.1. Tolman IV.** La manera habitual de obtener el radio de una estrella  $R_*$  se realiza igualando la presión a cero, en lo cual la expresión de  $p(r)$  (12) no debe ser una cantidad infinita de acuerdo al tercer 1.2.3 y cuarto criterio de admisibilidad 1.2.4. Comenzamos igualando el numerador de  $p(r)$  a cero

$$-A^2 + R^2 - 3r^2 = 0, \quad (37)$$

donde la solución a esta ecuación de segundo grado fue

---

<sup>12</sup> El radio gravitacional será dado por  $r_+ = 2M_*$ .

$$R_* = \sqrt{\frac{1}{3}(R^2 - A^2)}, \quad (38)$$

conforme al resultado obtenido por Tolman<sup>13</sup>. En segunda instancia, se obtuvo la masa total del objeto  $M_*$  representado por esta solución interior. Para empezar, se tomó la expresión de la densidad de energía  $\rho(r)$  (13)

$$\rho(r) = \frac{6r^4 + (7A^2 + 2R^2)r^2 + 3A^4 + 3A^2R^2}{8\pi R^2(A^2 + 2r^2)^2}, \quad (39)$$

como el objeto de estudio tiene simetría esférica se multiplica por un factor de  $4\pi r^2$  y se integra en el intervalo  $r' \in [0, r]$ , para así sustituir  $R_*$  (38) en la función integrada y obtener la función  $M(r)$ , la cual es la masa del objeto descrito por Tolman IV

$$M_* = -\frac{(A^2 - R^2)\sqrt{-3A^2 + 3R^2}}{9R^2}. \quad (40)$$

La ecuación (40) corresponde a la masa total del objeto correspondiente a la solución interior de Tolman IV. Por otro lado, el radio de Schwarzschild  $r_S$  fue

$$r_S = -\frac{2(A^2 - R^2)\sqrt{-3A^2 + 3R^2}}{9R^2}. \quad (41)$$

Como resultado de los desarrollos anteriores, la relación masa-radio (m-r) del objeto descrito por

---

<sup>13</sup> Corresponde a la ecuación (6.6) del trabajo *Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid*.

la solución interior correspondiente con los parámetros  $A, R$  fue

$$\frac{R_*}{r_S} = -\frac{3R^2}{2A^2 - 2R^2}, \quad (42)$$

y con los siguientes valores para las constantes  $A = 1, R = 9$  la relación de compacidad fue de

$$e = \frac{9}{8} < \frac{243}{160}, \quad (43)$$

y con los valores (los cuales correspondieron a los valores usados por Delgaty *et al.* Delgaty and Lake (1998))  $A = 5, R = 10$  la relación de compacidad fue

$$e = \frac{9}{8} < 2. \quad (44)$$

Por consiguiente, la solución de Tolman IV cumplió el criterio del teorema de Buchdahl en la expresiones (43) y (44) derivadas de la relación (42). En la siguiente sección mostramos

**1.4.2. Admisibilidad en soluciones.** A continuación, enseñamos los principales resultados correspondientes a las soluciones admisibles. Ajustamos los valores de los parámetros de cada métrica de acuerdo a dos conjuntos distintos de valores: los seleccionados por Delgaty *et al.* en su artículo, y los seleccionados en la primera parte de este capítulo. Con miras a exponer los resultados de forma compacta simplificamos la aplicación de los criterios de admisibilidad para cada solución interior estudiada para ciertos valores de los parámetros de la métrica, que correspondería desde la segunda columna hasta la séptima columna; las siguientes dos columnas

mostrarán los valores de  $R_*$  y  $r_S$ ; la última columna muestra las soluciones que satisficieron el criterio del límite de Buchdahl.

Es posible apreciar que: para los dos conjuntos de parámetros las soluciones satisficieron C6. De este modo, las soluciones de Tolman IV, Nariai IV Buchdahl 1, Heint IIa, Durg IV y Durg V, al mismo tiempo que corresponden a soluciones admisibles, también son soluciones que respetan el límite de Buchdahl. Para continuar con esta investigación, calcularemos los valores propios de estas soluciones admisibles y, además, para soluciones no admisibles, de tal suerte, que nos permitan distinguir rasgos entre los comportamientos de estos.

Solución interior	Parámetros	C1	C2	C3	C4	C5	$R_*$	$r_S$	C6
<b>Tolman IV</b>	$A = 1,$ $R = 9$	✓	✓	✓	✓	✓	5.16	3.4	✓
	$A = 5,$ $R = 10$	✓	✓	✓	✓	✓	5	2.5	✓
<b>Nariai IV</b>	$A = \cos^2(b)$ $a = 1, b = 2.41,$ $M = 1.2$	✓	✓	✓	✓	✓	0.75	0.36	✓
	$A = \cos^2(b)$ $a = 1, b = 2.4$ $M = 1$	✓	✓	✓	✓	✓	0.76	0.32	✓
<b>Buchdahl 1</b>	$A = 2, B = 1/4,$ $C = 3$	✓	✓	✓	✓	✓	0.41	0.2	✓
	$A = 1, B = 1/2,$ $C = 1$	✓	✓	✓	✓	✓	1.1	0.9	✓
<b>Heintzmann IIa</b>	$A = 2, a = 2,$ $C = 1$	✓	✓	✓	✓	✓	0.39	0.23	✓
	$A = 1, a = 1,$ $C = 1$	✓	✓	✓	✓	✓	0.55	0.32	✓
<b>Durgapal IV</b>	$A = 2, C = 3,$ $K = -1/2$	✓	✓	✓	✓	✓	0.27	0.15	✓
	$A = 1, C = 1,$ $K = -1/4$	✓	✓	✓	✓	✓	0.49	0.3	✓
<b>Durgapal V</b>	$A = 2, C = 3,$ $K = -1/4$	✓	✓	✓	✓	✓	0.18	0.09	✓
	$A = 1, C = 1,$ $K = -1/2$	✓	✓	✓	✓	✓	0.46	0.27	✓

Tabla 1

Resultados correspondientes a las seis soluciones interiores. C1: criterio de isotropía. C2: criterio de regularidad en  $r = 0$ . C3: criterio de presión  $p$  y densidad de energía  $\rho$  positivo definidas. C4: criterio de decrecimiento monótono de la presión  $p$  y la densidad de energía  $\rho$ . C5: criterio de causalidad.  $R_*$  y  $r_S$  correspondieron al radio frontera y el radio de Schwarzschild, respectivamente. C6: criterio del límite de Buchdahl.

## 2. Valores propios y admisibilidad física

### 2.1. Introducción

En el capítulo 1 caracterizamos seis soluciones interiores, las cuales cumplieron los criterios mínimos de admisibilidad y son aptas para describir el campo gravitacional de fuentes con simetría esférica, estáticas y aisladas correspondientes a fuentes de fluido perfecto, además, de satisfacer el límite de Buchdahl como un sexto criterio de admisibilidad; sin embargo, al cumplirse que las soluciones admisibles obedecieron la ecuación TOV, fue suficiente solamente considerar los criterios que aparecen en el artículo Delgaty and Lake (1998). En este capítulo explicaremos, someramente, cómo por medio de las ecuaciones de Cartan obtenemos el tensor de curvatura y mediante la reescritura de este mismo haciendo uso de la representación de bivectores se obtienen las componentes de este tensor. Por otro lado, obtendremos las componentes de este para el caso de un tensor energía-momentum de fluido perfecto. A continuación, calcularemos los valores propios del tensor de curvatura para la solución de Tolman IV, y de las cinco soluciones restantes admisibles y cinco soluciones interiores no admisibles se mostrarán los valores propios en el apéndice 3.

Posteriormente, realizaremos un análisis de las soluciones interiores admisibles y no admisibles, bajo la elección de los parámetros propios de cada métrica usados en el primer capítulo. Para llevar a cabo esto, mostraremos el comportamiento de cuatro valores propios de la solución interior de Tolman IV, de modo que nos permitan distinguir las características que la hacen admisible desde los valores propios. Así mismo, mostraremos las curvas de los valores propios de las soluciones

admisibles Nariai IV, Buchdahl 1, Heintzmann IIa, Durgapal IV, Durgapal V, junto a los radios frontera respectivos para cada métrica. Con respecto a las soluciones no admisibles, expondremos las gráficas de los valores propios de las soluciones de Kuchowicz 71 II, N-P-V Ib y Schwarzschild interior. Por último, definiremos cuándo una solución es admisible desde los valores propios de curvatura para las simetrías estudiadas en este trabajo.

## 2.2. Valores propios de la curvatura

Con el fin de calcular los valores propios del tensor de Riemann se empieza seleccionando una tétrada ortonormal para la cual el elemento de línea es escrito como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{ab} \vartheta^a \otimes \vartheta^b, \quad (45)$$

con  $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , y una 1-forma que bajo una transformación, de la base en coordenadas locales a la tétrada, es descrita como  $\vartheta^a = e^a_\nu dx^\nu$ . De modo que, usando las ecuaciones de estructura de Cartan:

$$d\vartheta^a = -\omega_b^a \wedge \vartheta^b, \quad (46)$$

$$\Gamma_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c = \frac{1}{2} R_{bcd}^a \vartheta^c \wedge \vartheta^d, \quad (47)$$

las componentes  $R_{hag}^m$  quedan determinadas por las 2-formas de curvatura  $\Gamma_c^v$ .

El tensor de curvatura se puede representar como una matriz  $(6 \times 6)$  haciendo uso de la notación

de bivectores para los índices  $A, B, \dots$ , i.e.,  $ab \rightarrow A$ . En este trabajo seguimos el convenio propuesto en el libro *Gravitation* Thorne et al. (2000), que establece la siguiente relación entre índices de tétrada y bivector

$$01 \rightarrow 1, \quad 02 \rightarrow 2, \quad 03 \rightarrow 3, \quad 23 \rightarrow 4, \quad 31 \rightarrow 5, \quad 12 \rightarrow 6. \quad (48)$$

Así, el tensor de curvatura puede ser representado por una matriz simétrica  $\mathbf{R}_{AB} = \mathbf{R}_{BA}$ . Usando las propiedades de simetría del tensor de curvatura  $R_{a[bcd]} = 0$ , en la representación de bivectores es

$$\mathbf{R}_{14} + \mathbf{R}_{45} + \mathbf{R}_{36} = 0. \quad (49)$$

Por consiguiente, la representación del tensor de curvatura en índices de bivectores, el uso de la ecuación de campo de Einstein (2), y la propiedad de simetría (49) reducen las componentes independientes de la matriz  $\mathbf{R}_{AB}$  a 10, las cuales pueden ser organizadas en la siguiente matriz

$$\mathbf{R}_{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{L} \\ \mathbf{L} & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix}, \quad (50)$$

donde  $\mathbf{L}$  escrito en componentes corresponde a

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{14} & \mathbf{R}_{15} & \mathbf{R}_{16} \\ \mathbf{R}_{15} - \kappa T_{03} & \mathbf{R}_{25} & \mathbf{R}_{26} \\ \mathbf{R}_{16} + \kappa T_{02} & \mathbf{R}_{26} - \kappa T_{01} & -\mathbf{R}_{14} - \mathbf{R}_{25} \end{pmatrix}, \quad (51)$$

y  $\mathbf{M}_1$  con  $\mathbf{M}_2$  corresponden a matrices  $(3 \times 3)$  simétricas

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{13} \\ \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{23} \\ \mathbf{R}_{13} & \mathbf{R}_{23} & -\mathbf{R}_{11} - \mathbf{R}_{22} + \kappa \left( \frac{T}{2} + T_{00} \right) \end{pmatrix}, \quad (52)$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}_{11} + \kappa \left( \frac{T}{2} + T_{00} - T_{11} \right) & -\mathbf{R}_{12} - \kappa T_{12} & -\mathbf{R}_{13} - \kappa T_{13} \\ -\mathbf{R}_{12} - \kappa T_{12} & -\mathbf{R}_{22} + \kappa \left( \frac{T}{2} + T_{00} - T_{22} \right) & -\mathbf{R}_{23} - \kappa T_{23} \\ -\mathbf{R}_{13} - \kappa T_{13} & -\mathbf{R}_{23} - \kappa T_{23} & \mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{22} - \kappa T_{33} \end{pmatrix}, \quad (53)$$

con  $T = \eta^{ab} T_{ab}$ . Las trazas de estas matrices brindarán restricciones que relacionarán las componentes del tensor de curvatura con el tensor de energía-momentum, convenientemente, para relacionarlos con los valores propios de curvatura. En particular, la trazas correspondientes a las matrices  $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$  son

$$\text{Tr}(\mathbf{M}_1) = \kappa \left( \frac{T}{2} + T_{00} \right), \quad \text{Tr}(\mathbf{M}_2) = \kappa T_{00}, \quad (54)$$

de manera que la traza del tensor de curvatura  $\mathbf{R}_{AB}$  es

$$\text{Tr}(\mathbf{R}_{AB}) = \kappa \left( \frac{T}{2} + 2T_{00} \right). \quad (55)$$

**2.2.1. Fluido perfecto.** Con respecto a un fluido perfecto, las matrices  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$  dadas por las ecuaciones (51), (52), y (53) corresponderán a:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{14} & \mathbf{R}_{15} & \mathbf{R}_{16} \\ \mathbf{R}_{15} & \mathbf{R}_{25} & \mathbf{R}_{26} \\ \mathbf{R}_{16} & \mathbf{R}_{26} & -\mathbf{R}_{14} - \mathbf{R}_{25} \end{pmatrix}, \quad (56)$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{13} \\ \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{23} \\ \mathbf{R}_{13} & \mathbf{R}_{23} & -\mathbf{R}_{11} - \mathbf{R}_{22} + \frac{\kappa}{2}(3p + \rho) \end{pmatrix}, \quad (57)$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}_{11} + \frac{\kappa}{2}(\rho + p) & -\mathbf{R}_{12} & -\mathbf{R}_{13} \\ -\mathbf{R}_{12} & -\mathbf{R}_{22} + \frac{\kappa}{2}(\rho + p) & -\mathbf{R}_{23} \\ -\mathbf{R}_{13} & -\mathbf{R}_{23} & \mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{22} - \kappa p \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Los trazas correspondientes a estas matrices son

$$\text{Tr}(\mathbf{M}_1) = \frac{\kappa}{2}(3p + \rho), \quad \text{Tr}(\mathbf{M}_2) = \kappa\rho, \quad (59)$$

por consiguiente la traza de la matriz de curvatura es

$$\text{Tr}(\mathbf{R}_{AB}) = \frac{3\kappa}{2}(p + \rho). \quad (60)$$

Como resultado, los valores propios de la matriz  $\mathbf{R}_{AB}$  corresponderán con los valores propios del tensor de curvatura, los cuales son funciones  $\lambda_i(r)$  con  $i = 1, 2, \dots, 6$ , de las coordenadas determinadas por la tétrada  $\vartheta^\nu$ . Por consiguiente, para el caso particular de un fluido perfecto se encontrarán relacionados con la presión y la densidad de energía mediante la siguiente ecuación

$$\sum_{i=1}^6 \lambda_i = \frac{3\kappa}{2}(\rho + p). \quad (61)$$

### 2.3. Valores propios de soluciones interiores admisibles y no admisibles

Acorde con el método enseñado en 2.2, mostraremos la forma funcional de los valores propios para la solución de Tolman IV. De manera análoga, las soluciones interiores admisibles restantes presentaron comportamientos similares a Tolman IV, por lo que al ser esta la solución interior admisible más sencilla, vale como caso que ejemplifica a las otras apropiadamente. Entraremos en más detalles respecto a esto en la siguiente sección. Por otra parte, mostraremos los valores propios para las soluciones interiores no admisibles y en el siguiente capítulo analizaremos

con más detalles cómo clasificar soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein por medio de este método<sup>14</sup>.

**2.3.1. Tolman IV.** Una de las soluciones más conocidas de R. C. Tolman es el espacio-tiempo IV (11). Los valores propios correspondientes a esta solución interior fueron:

$$\lambda_{11} = \frac{(R^2 - 2r^2)A^2 - 2r^4}{R^2(A^2 + 2r^2)^2}, \quad (62)$$

$$\lambda_{22} = \lambda_{33} = \frac{R^2 - r^2}{(A^2 + 2r^2)R^2}, \quad (63)$$

$$\lambda_{44} = \frac{A^2 + R^2 + r^2}{R^2(A^2 + 2r^2)}, \quad (64)$$

$$\lambda_{55} = \lambda_{66} = \frac{A^4 + (R^2 + 2r^2)A^2 + 2r^4}{R^2(A^2 + 2r^2)^2}, \quad (65)$$

donde estas funciones no son degeneradas en el dominio de la estrella. A continuación, intrincaremos más sobre las principales características que deberían poseer los valores propios de curvatura para que describan el espacio-tiempo de una solución interior admisible físicamente.

---

<sup>14</sup> Cabe señalar que los cálculos de los valores propios se desarrollaron para una métrica de la forma (3) mediante las ecuaciones de Cartan (46, 47). En los apéndices 1 y 2 se precisó más sobre los respectivos cálculos para esta métrica general con simetría esférica.

## 2.4. Admisibilidad en soluciones interiores

Recordando lo hecho para Tolman IV en la sección 1.3 en la que estudiamos la admisibilidad física de Tolman IV exigiéndole que satisficiera cinco criterios; en la sección 1.4 demostramos que es una solución cuya relación de compacidad fue de tal suerte que  $e > 9/8$  y en la sección 2.3 obtuvimos sus expresiones para los valores propios. Todo esto con miras de analizar el comportamiento de sus valores propios. En las siguientes cuatro imágenes mostramos las curvas correspondientes a  $\lambda_{11}$  (62),  $\lambda_{22}$  (63),  $\lambda_{44}$  (64) y  $\lambda_{55}$  (65)<sup>15</sup>. Consideramos esta hipótesis: los valores propios deben presentar características similares a las exigidas en el capítulo 1.

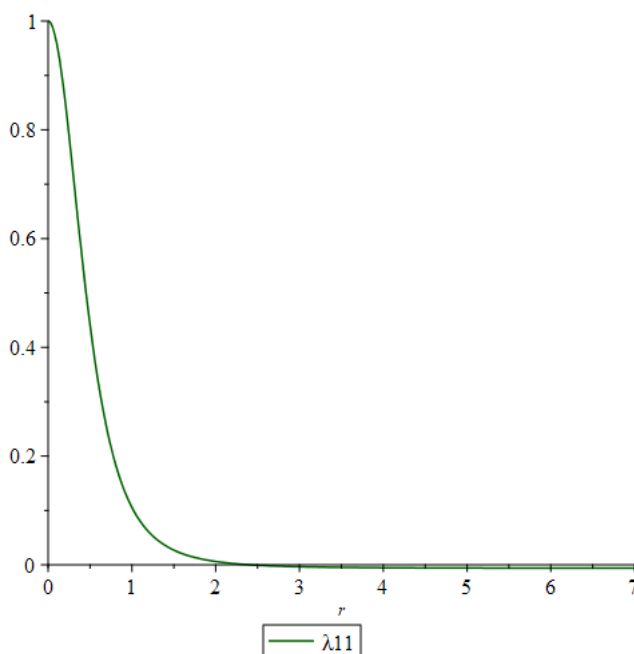


Figura 4. Valor propio  $\lambda_{11}$  correspondiente a la ecuación (62) de la solución Tolman IV.

---

<sup>15</sup> Los valores propios  $\lambda_{33}$  y  $\lambda_{66}$  son iguales a  $\lambda_{22}$  y  $\lambda_{55}$ , como lo demostramos en el apéndice 2.

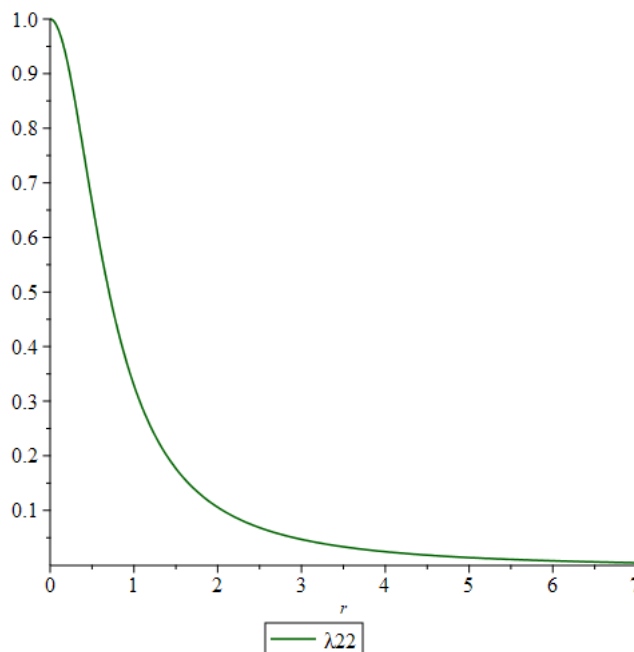


Figura 5. Valor propio  $\lambda_{22}$  correspondiente a la ecuación (63) de la solución Tolman IV.

Como lo discutimos en el primer capítulo, Tolman IV es una solución admisible con los criterios que recopilamos. Para corroborar la relación entre los valores propios del tensor de curvatura (mostrados en las figuras 4, 5, 6 y 7), para Tolman IV, con la suma de  $p$  y  $\rho$ . Partimos de la ecuación (61), el miembro izquierdo contiene la información geométrica del espacio-tiempo, esto es así porque los valores propios son funciones de las componentes del tensor de curvatura, que a su vez son relaciones derivadas de la métrica. Para el caso de la matriz  $\mathbf{R}_{AB}$  corresponderá a una matriz diagonal, de la cual la traza será la sumatoria de los valores propios, lo cual está en la siguiente ecuación

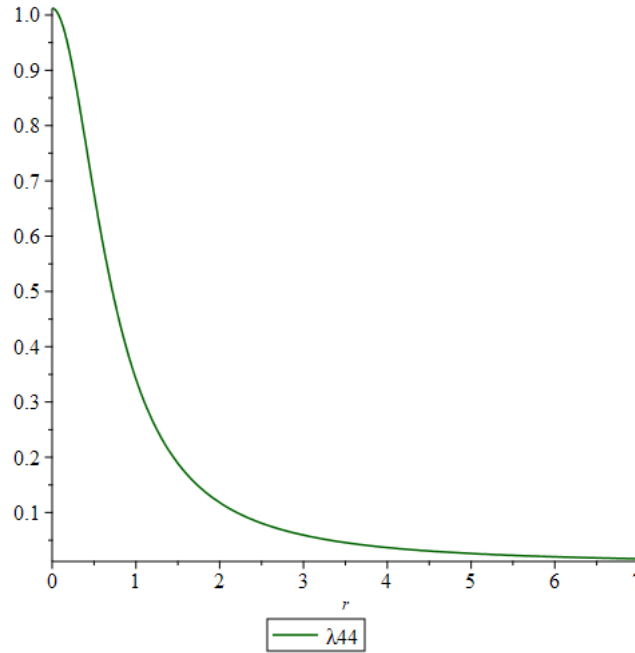


Figura 6. Valor propio  $\lambda_{44}$  correspondiente a la ecuación (64) de la solución Tolman IV.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^6 \lambda_i &= \lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33} + \lambda_{44} + \lambda_{55} + \lambda_{66} \\
 &= \frac{(R^2 - 2r^2)A^2 - 2r^4}{R^2(A^2 + 2r^2)^2} + \frac{2(R^2 - r^2)}{(A^2 + 2r^2)R^2} + \frac{A^2 + R^2 + r^2}{R^2(A^2 + 2r^2)} \\
 &\quad + \frac{2(A^4 + (R^2 + 2r^2)A^2 + 2r^4)}{R^2(A^2 + 2r^2)^2} \\
 &= \frac{3(A^2 + r^2)(A^2 + 2R^2)}{R^2(A^2 + 2r^2)^2}, \tag{66}
 \end{aligned}$$

y en correspondencia con el miembro derecho de (61), el cual tiene codificada la información física del espacio-tiempo de interés, y recordando las expresiones de  $p(r)$  (12) y  $\rho(r)$  (13), obtendremos lo siguiente

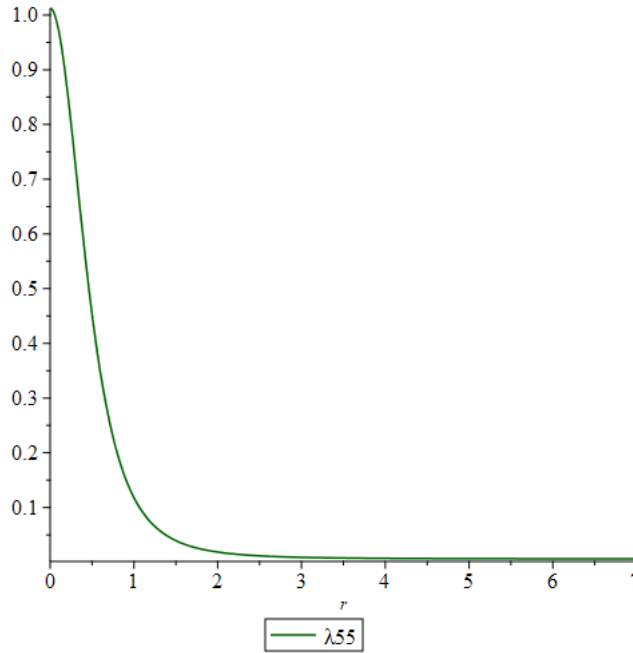
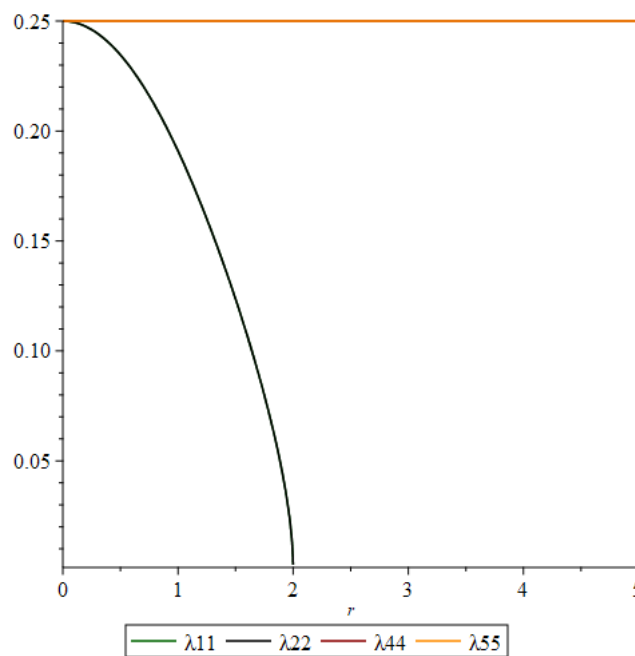


Figura 7. Valor propio  $\lambda_{55}$  correspondiente a la ecuación (65) de la solución Tolman IV.

$$\begin{aligned}
 \frac{3\kappa}{2}(\rho + p) &= \frac{3\kappa}{2} \left( \frac{-A^2 + R^2 - 3r^2}{8\pi R^2(A^2 + 2r^2)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{6r^4 + (7A^2 + 2R^2)r^2 + 3A^4 + 3A^2R^2}{8\pi R^2(A^2 + 2r^2)^2} \right) \\
 &= \frac{3(A^2 + r^2)(A^2 + 2R^2)}{R^2(A^2 + 2r^2)^2}, \tag{67}
 \end{aligned}$$

donde  $\kappa = 8\pi$ . Por tanto, de la parte teórica en la construcción del formalismo de valores propios, demostramos que para el caso particular Tolman IV, se cumple la relación entre geometría (la cual se muestra por la suma de los valores propios del tensor de curvatura) y la física (puestas en las cantidades de  $p$  y  $\rho$ ). Lo siguiente que queda por relacionar es cómo el comportamiento de los

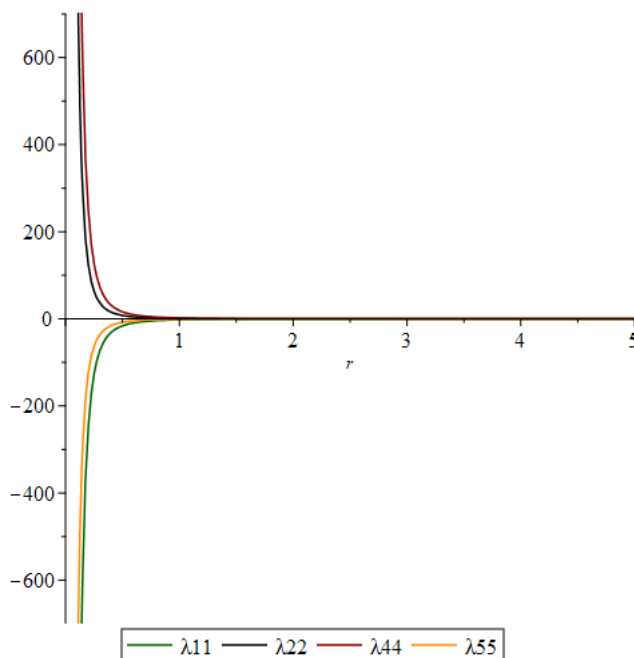
valores propios se encuentra ligado a la admisibilidad de soluciones interiores. Exploremos un poco la idea de que ambos miembros de (61) están relacionados con los criterios de admisibilidad del primer capítulo, *e. g.*, aunque la solución interior de Schwarzschild cumple cuatro criterios, la velocidad de propagación dentro del fluido es infinita. Justamente, un valor propio de esta solución tiene un comportamiento constante, estos son los correspondientes a  $\lambda_{44}$  y  $\lambda_{55}$  son constantes. Esto se puede observar en la siguiente imagen donde estos valores fueron  $\lambda_{44} = \lambda_{55} = 0.25 [L^{-2}]$ .



*Figura 8.* Valores propios del tensor de curvatura correspondientes a la solución Schwarzschild interior.

Los valores propios  $\lambda_{11}, \lambda_{22}$  presentaron comportamientos similares a los exigidos bajo los criterios de admisibilidad. Sin embargo,  $\lambda_{44}$  y  $\lambda_{55}$  presentan comportamientos que no garantizan que dicha solución interior sea admisible bajo las simetrías propuestas. Hay que mencionar además, que las soluciones de Kottler y Kuchowicz 71 II mostraron comportamientos asintóticos, con máximos

ubicados en la coordenada radial diferente de cero. En las siguientes imágenes se puede entender porqué no son soluciones admisibles desde el comportamiento de sus valores propios.



*Figura 9.* Valores propios del tensor de curvatura correspondientes a la solución Kottler.

Todas estas observaciones se relacionan también con el comportamiento no monótono decreciente asociado a las cantidades  $p(r)$  y  $\rho(r)$ , y el degeneramiento en la coordenada radial para estas soluciones interiores. En vista de que, para soluciones interiores isótropas, es deseado un comportamiento similar al de las soluciones admisibles, proponemos una definición de una solución interior admisible de las ecuaciones de campo mediante el cálculo de los valores propios de curvatura, la cual versa de la siguiente manera.

**Definición 3.** Si los valores propios del tensor de curvatura de una solución interior de un fluido perfecto con simetría esférica de las ecuaciones de campo de Einstein cumplen con:

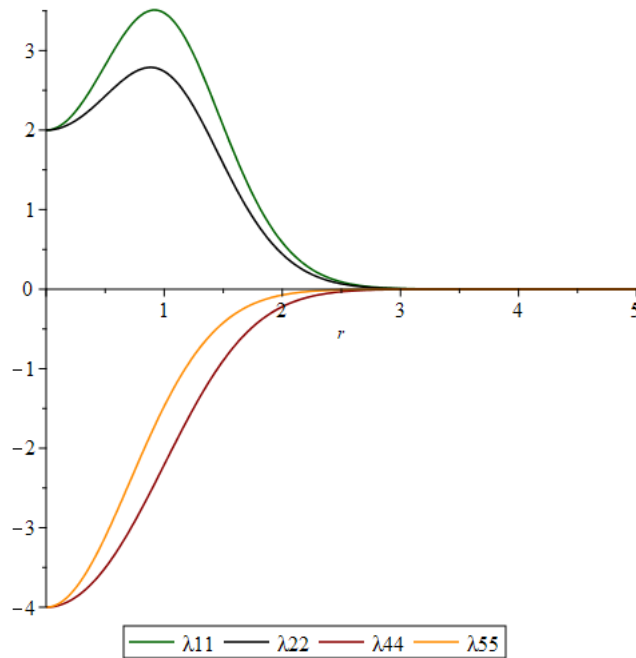


Figura 10. Valores propios del tensor de curvatura correspondientes a la solución Kuchowicz 71 II.

- tener un máximo en  $r = 0$ ,
- no ser singulares en el intervalo  $r \in [0, r_b]$ ,
- comportarse como funciones monótonamente decrecientes,

es dicho que, tal solución es *físicamente admisible*.

Es importante enfatizar que esto no es una demostración formal, más bien, es una conjetura que podrá formalizarse en trabajos posteriores. Como resultado de la anterior definición mostramos las gráficas de los valores propios para las cinco soluciones admisibles restantes del primer capítulo.

En las imágenes (11-??) se encuentran en consonancia con los comportamientos definidos en la

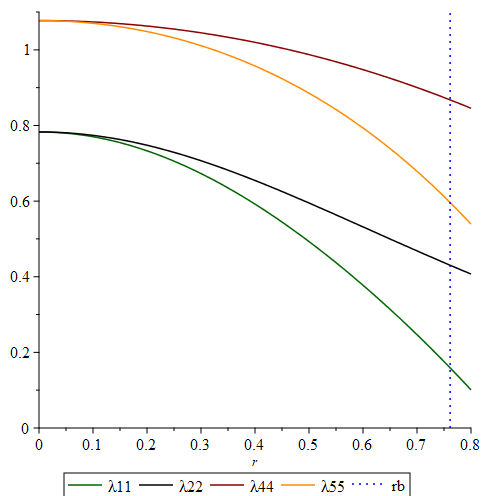


Figura 11. Valores propios de Nariai IV y su radio frontera  $r_b$  respectivo.

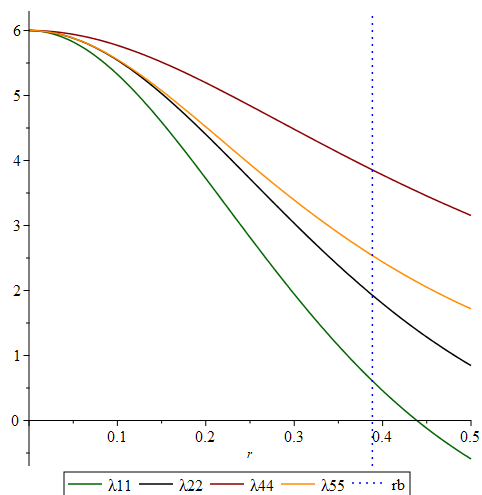


Figura 13. Valores propios del tensor de curvatura correspondientes a la solución Heintzmann IIa y su radio frontera  $r_b$  respectivo.

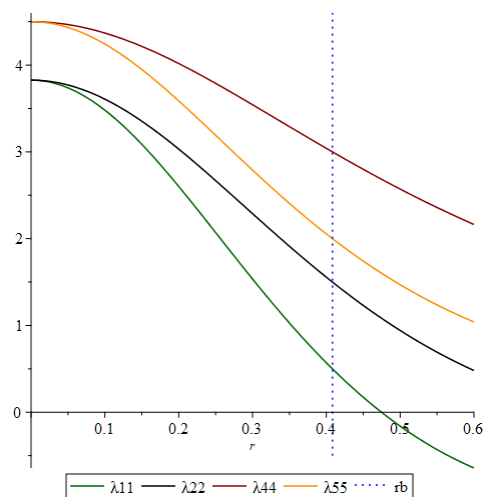


Figura 12. Valores propios del tensor de curvatura correspondientes a la solución Buchdahl 1 y su radio frontera  $r_b$  respectivo.

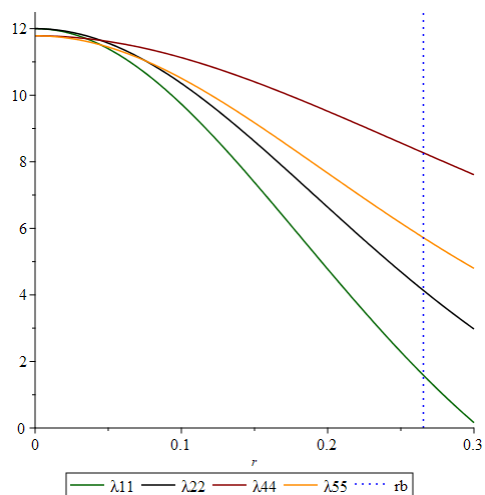


Figura 14. Valores propios de Durgapal IV y su radio frontera  $r_b$  respectivo.

definición 2.4: todos los valores propios presentaron un máximo en  $r = 0$ , por lo que se puede afirmar que  $p(r)$  y  $\rho(r)$  también tuvieron máximos en ese punto; se pueden escribir como funciones monótonamente decrecientes en un intervalo definido desde el centro del objeto hasta el radio frontera, lo que permitió relacionarlo con el comportamiento propuesto por la ecuación TOV; también presentan un comportamiento no degenerado, a causa de que los escalares de curvatura no son singulares en el intervalo  $r \in [0, R_*]$ . Por todo esto, estas funciones  $\lambda_{ij}$  brindaron información, simplemente, siendo calculados mediante la reescritura del tensor de curvatura permitiendo clasificar soluciones de manera más eficiente a las usadas por Delgaty *et al.* en Delgaty and Lake (1998).

### 3. Conclusiones

Después de presentar el grueso de este trabajo, hemos podido concluir lo siguiente: logramos reproducir los resultados del trabajo de Delgaty *et al.* Delgaty and Lake (1998) para seis espacios-tiempos: Tolman IV, Nariai IV, Buchdahl 1, Heintzmann IIa, Durgapal IV y Durgapal V. En particular, analizamos los resultados para Tolman IV, ya que, de las soluciones admisibles es la más simple (en sus potenciales métricos) con respecto a las características exigidas (esféricamente simétrica, aislada, estática y correspondiente a un fluido perfecto). Además, establecimos un criterio de admisibilidad dado por el límite de Buchdahl. Acorde con lo anterior, calculamos los radios fronteras de cada solución, los radios de Schwarzschild y la relación  $e$  de cada una de estas métricas.

En segundo lugar, calculamos los valores propios de cada tensor de curvatura para las seis soluciones admisibles estudiadas en el primer capítulo y para cinco soluciones no admisibles (Bayin III, Kottler, Kuchowicz 71 II, N-P-V Ib y Schwarzschild interior) de acuerdo con nuestros criterios de admisibilidad. Estos valores propios fueron calculados usando la reescritura en componentes de bivectores para el tensor de curvatura. En realidad, calculamos los valores propios para una métrica con las simetrías exigidas con miras a generalizar cada resultado obtenido en esta sección. Con estas cantidades planteamos la hipótesis: *¿existirá una conexión entre admisibilidad y el comportamiento de los valores propios para las soluciones interiores tipo fluido perfecto?* Precisamente, esta idea de soluciones admisibles desde los valores propios, ya estaba empezando a germinar en

los artículos de los autores Gutiérrez y Quevedo Gutiérrez-Piñeres and Quevedo (2019, 2022), cuyos resultados coinciden plenamente con los conseguidos en este trabajo de grado.

Finalmente, en continuación con la idea de admisibilidad logramos relacionar los rasgos característicos de los valores propios mediante la ecuación (61), donde también el comportamiento de estos se encuentra concatenado con el de  $p(r)$  y  $\mu(r)$ , esto lo logramos caracterizando los principales rasgos de los valores propios de tres soluciones no admisibles (Kottler, Kuchowicz 71 II y Schwarzschild Interior). A causa de lo anterior, definimos lo que es una solución interior físicamente admisible calculando los valores de curvatura. En este punto, enseñamos los comportamientos de los valores propios  $(\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{44}, \lambda_{55})$  para Tolman IV y en comparación con estas cantidades para Kottler, Kuchowicz 71 II y Schwarzschild Interior definimos un criterio de admisibilidad desde sus cualidades principales, las cuales están en relación con los criterios de admisibilidad de Delgaty *et al.* Delgaty and Lake (1998). Esta definición no es una prueba formal a lo cual deberá ser formalmente demostrado en posteriores trabajos.

Con vista a futuros trabajos derivados de este, se desea extender este estudio de soluciones interiores al caso de fluidos anisótropos, lo cual debería brindar una generalización de lo calculado en este trabajo de grado. Para eso se deberán implementar los criterios propuestos por Ivanov en Ivanov (2017). Hay que mencionar, que los valores propios de curvatura podrían brindar información del radio de colapso, ya que en trabajos anteriores se ha logrado calcular con este formalismo el radio de repulsión para ciertas métricas interiores.

### Referencias Bibliográficas

- Baumgarte, T. W. and Rendall, A. D. (1993). Regularity of spherically symmetric static solutions of the Einstein equations. *Classical and Quantum Gravity*, 10(2):327.
- Bayin, S. Ş. (1978). Solutions of einstein's field equations for static fluid spheres. *Physical Review D*, 18(8):2745.
- Buchdahl, H. A. (1959). General relativistic fluid spheres. *Physical Review*, 116(4):1027.
- Carroll, S. M. (2019). *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press.
- Chandrasekhar, S. and Thorne, K. S. (1985). The mathematical theory of black holes.
- Chavez Nambo, E. and Sarbach, O. (2020). Static spherical perfect fluid stars with finite radius in general relativity: a review. *arXiv e-prints*, pages arXiv–2010.
- Dadhich, N. (2022). Equation of state for buchdahl star and black hole. *arXiv preprint arXiv:2212.06745*.
- Delgaty, M. and Lake, K. (1998). Physical acceptability of isolated, static, spherically symmetric, perfect fluid solutions of Einstein's equations. *Computer Physics Communications*, 115(2-3):395–415.
- Durgapal, M. (1982). A class of new exact solutions in general relativity. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 15(8):2637.

- Ellis, G. F. R., Maartens, R., and MacCallum, M. A. H. (2007). Causality and the speed of sound. *General Relativity and Gravitation*, 39(10):1651–1660.
- Gutiérrez-Piñeres, A. C. and Quevedo, H. (2019). C3 matching for asymptotically flat spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 36(13):135003.
- Gutiérrez-Piñeres, A. C. and Quevedo, H. (2022). Darmois matching and C3 matching. *Classical and Quantum Gravity*, 39(3):035015.
- Heintzmann, H. (1969). New exact static solutions of einsteins field equations. *Zeitschrift für Physik*, 228(4):489–493.
- Hernández, H., Núñez, L. A., and Vásquez-Ramírez, A. (2018). Convection and cracking stability of spheres in general relativity. *The European Physical Journal C*, 78(11):1–13.
- Hernández, H., Suárez-Urango, D., and Núñez, L. A. (2021). Acceptability conditions and relativistic barotropic equations of state. *The European Physical Journal C*, 81(3):1–17.
- Ivanov, B. (2017). Analytical study of anisotropic compact star models. *The European Physical Journal C*, 77(11):1–12.
- Kottler, F. (1918). Über die physikalischen grundlagen der einsteinschen gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, 361(14):401–462.
- Kuchowicz, B. (1971). Two relativistic matter distributions of radial symmetry. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2:297–300.

- Lake, K. and Musgrave, P. (1994). The regularity of static spherically cylindrically and plane symmetric spacetimes at the origin. *General Relativity and Gravitation*, 26(9):917–925.
- Lemos, J. P. S. and Zaslavskii, O. B. (2020). Compact objects in general relativity: From Buchdahl stars to quasiblack holes. *arXiv preprint arXiv:2007.00665*.
- Luongo, O. and Quevedo, H. (2014). Characterizing repulsive gravity with curvature eigenvalues. *Physical Review D*, 90(8):084032.
- Luongo, O. and Quevedo, H. (2018). Self-accelerated universe induced by repulsive effects as an alternative to dark energy and modified gravities. *Foundations of Physics*, 48:17–26.
- Nariai, H. (1950). On some static solutions of Einstein's gravitational field equations in a spherically symmetric case. *Sci. Rep. Tohoku Univ. Eighth Ser.*, 34:160.
- Narlikar, V., Patwardhan, G., and Vaidya, P. (1943). Some new relativistic distributions of radial symmetry. In *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, volume 9, pages 229–236.
- Oppenheimer, J. R. and Volkoff, G. M. (1939). On massive neutron cores. *Physical Review*, 55(4):374.
- Pimentel, O. M., Lora-Clavijo, F., and Gonzalez, G. A. (2016). The energy-momentum tensor for a dissipative fluid in general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 48(10):1–17.
- Pimentel, O. M., Lora-Clavijo, F., and González, G. A. (2017). Ideal magnetohydrodynamics with radiative terms: energy conditions. *Classical and Quantum Gravity*, 34(7):075008.

- Quevedo, H. (2012). Matching conditions in relativistic astrophysics. In *The Twelfth Marcel Grossmann Meeting: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories (In 3 Volumes)*, pages 35–52. World Scientific.
- Ramos-Salamanca, D., Núñez, L., and Ospino, J. (2021). Physical acceptability conditions for realistic neutron star equations of state. *arXiv preprint arXiv:2102.00340*.
- Rendall, A. D. and Schmidt, B. G. (1991). Existence and properties of spherically symmetric static fluid bodies with a given equation of state. *Classical and Quantum Gravity*, 8(5):985.
- Schwarzschild, K. (1916). Sitz deut akad wiss berlin. *Kl. Math. Phys*, 24:424.
- Schwarzschild, K. (1999a). On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. *arXiv preprint physics/9905030*.
- Schwarzschild, K. (1999b). On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to einstein's theory. *arXiv preprint physics/9912033*.
- Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C., and Herlt, E. (2009). *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge university press.
- Suárez-Urango, D., Núñez, L. A., and Hernández, H. (2021). Relativistic anisotropic polytropic spheres: physical acceptability. *arXiv preprint arXiv:2102.00496*.
- Suárez-Urango, D., Ospino, J., Hernández, H., and Núñez, L. A. (2022). Acceptability condi-

tions and relativistic anisotropic generalized polytropes. *The European Physical Journal C*, 82(2):1–22.

Thorne, K. S., Misner, C. W., and Wheeler, J. A. (2000). *Gravitation*. Freeman San Francisco, CA.

Tolman, R. C. (1939). Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid. *Physical Review*, 55(4):364.

## Apéndice A. Ecuaciones de campo para una métrica estática general con simetría esférica interior

En este anexo se obtienen las ecuaciones de campo para una solución interior de las ecuaciones de Einstein. Estas ecuaciones proporcionan toda la información del campo gravitatorio determinado por un cuerpo, el cual no necesariamente debe ser material. Con respecto a la parte geométrica de dicha ecuación, una forma más eficiente, y poco común, de calcular las componentes del tensor de curvatura es por medio de las ecuaciones de estructura de Cartan Chandrasekhar and Thorne (1985); Thorne et al. (2000). Es necesario introducir una tétrada ortonormal  $\vartheta^a$  de manera que el tensor métrico tome la siguiente estructura  $\mathbf{g} = \eta_{ab}\vartheta^a \otimes \vartheta^b$ . Las ecuaciones de estructura de Cartan son:

$$d\vartheta^a = -\omega^a_b \wedge \vartheta^b, \quad (68)$$

$$\Gamma^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = \frac{1}{2}R^a_{bcd}\vartheta^c \wedge \vartheta^d, \quad (69)$$

donde se puede observar que la segunda ecuación relaciona las conexiones con las componentes del tensor de curvatura mediante un producto exterior de la tétrada ortonormal con ella misma.

Llegados a este punto, es necesario proponer una solución interior general que posea una simetría esférica y sea estática; dicha solución interior corresponderá a

$$\mathbf{g} = -A(r)dt \otimes dt + B(r)dr \otimes dr + C(r)r^2 d\Omega \otimes d\Omega, \quad (70)$$

y eligiendo una tétrada ortonormal por conveniencia de la siguiente forma

$$\vartheta^t = \sqrt{A}dt, \quad \vartheta^r = \sqrt{B}dr, \quad \vartheta^\theta = \sqrt{C}rd\theta, \quad \vartheta^\phi = \sqrt{C}r\sin\theta d\phi, \quad (71)$$

se obtendrán las componentes del tensor de curvatura más generales que satisfagan las ecuaciones de campo de una solución con simetría esférica, estática a la cual se le adicionará un tensor de energía-momentum correspondiente a un fluido perfecto.

Empezaremos por considerar las derivadas exteriores de las 1-formas que conforman la tétrada ortonormal, estas son:

$$\begin{aligned} d\vartheta^t &= d(\sqrt{A}dt) = \frac{1}{2}A^{-1/2}A_r dr \wedge dt \\ &= -\frac{1}{2}A^{-1}A_r B^{-1/2} \vartheta^t \wedge \vartheta^r, \end{aligned} \quad (72)$$

$$d\vartheta^r = d(\sqrt{B}dr) = 0, \quad (73)$$

$$\begin{aligned} d\vartheta^\theta &= d(\sqrt{C}rd\theta) = \frac{1}{2}C^{-1/2}C_r r dr \wedge d\theta + C^{1/2}dr \wedge d\theta \\ &= -\left(\frac{1}{2}B^{-1/2}C^{-1}C_r + r^{-1}B^{-1/2}\right) \vartheta^\theta \wedge \vartheta^r, \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} d\vartheta^\phi &= d(\sqrt{C}r\sin\theta d\phi) = \frac{1}{2}C^{-1/2}C_r r \sin\theta dr \wedge d\phi + C^{1/2}\sin\theta dr \wedge d\phi \\ &\quad + C^{1/2}r\cos\theta d\theta \wedge d\phi \\ &= -\left(\frac{1}{2}B^{-1/2}C^{-1}C_r + r^{-1}B^{-1/2}\right) \vartheta^\phi \wedge \vartheta^r \\ &\quad - r^{-1}C^{-1/2}\cot\theta \vartheta^\phi \wedge \vartheta^\theta, \end{aligned} \quad (75)$$

y de la primera ecuación de estructura (68) se calcula la derivada exterior de la tétrada<sup>16</sup>.

De modo que, la ecuación de cada derivada exterior de las 1-formas son:

$$\begin{aligned} d\vartheta^t &= -\omega^t_t \wedge \vartheta^t - \omega^t_r \wedge \vartheta^r - \omega^t_\theta \wedge \vartheta^\theta - \omega^t_\phi \wedge \vartheta^\phi \\ &= -\frac{1}{2}A^{-1}A_r B^{-1/2} \vartheta^t \wedge \vartheta^r, \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} d\vartheta^r &= -\omega^r_t \wedge \vartheta^t - \omega^r_r \wedge \vartheta^r - \omega^r_\theta \wedge \vartheta^\theta - \omega^r_\phi \wedge \vartheta^\phi \\ &= 0, \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} d\vartheta^\theta &= -\omega^\theta_t \wedge \vartheta^t - \omega^\theta_r \wedge \vartheta^r - \omega^\theta_\theta \wedge \vartheta^\theta - \omega^\theta_\phi \wedge \vartheta^\phi \\ &= -\left(\frac{1}{2}B^{-1/2}C^{-1}C_r + r^{-1}B^{-1/2}\right) \vartheta^\theta \wedge \vartheta^r, \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} d\vartheta^\phi &= -\omega^\phi_t \wedge \vartheta^t - \omega^\phi_r \wedge \vartheta^r - \omega^\phi_\theta \wedge \vartheta^\theta - \omega^\phi_\phi \wedge \vartheta^\phi \\ &= -\left(\frac{1}{2}B^{-1/2}C^{-1}C_r + r^{-1}B^{-1/2}\right) \vartheta^\phi \wedge \vartheta^r \\ &\quad -r^{-1}C^{-1/2} \cot \theta \vartheta^\phi \wedge \vartheta^\theta, \end{aligned} \quad (79)$$

y conforme al sistema de ecuaciones (76-79) las 1-formas  $\omega^\alpha$  son:

---

<sup>16</sup> Los subíndices  $r$  corresponderán a la derivada  $\partial_r$  de los potenciales métricos.

$$\omega^t_r = \frac{1}{2}A^{-1}A_rB^{-1/2}\vartheta^t, \quad (80)$$

$$\omega^\theta_r = \left( \frac{1}{2}B^{-1/2}C^{-1}C_r + r^{-1}B^{-1/2} \right) \vartheta^\theta, \quad (81)$$

$$\omega^\phi_r = \left( \frac{1}{2}B^{-1/2}C^{-1}C_r + r^{-1}B^{-1/2} \right) \vartheta^\phi, \quad (82)$$

$$\omega^\phi_\theta = r^{-1}C^{-1/2} \cot \theta \vartheta^\phi. \quad (83)$$

Antes de continuar con los cálculos, se aplicarán propiedades de simetría y antisimetría de estas 1-formas, para eso siempre se pueda elegir un observador de modo que la métrica corresponda localmente a Minkowski, por lo cual tal observador medirá el espacio-tiempo de la siguiente forma

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \vartheta^\mu \otimes \vartheta^\nu, \quad (84)$$

y consecuente con esto las 1-formas guardarán la siguientes correspondencias:

$$\omega_{tr} = \eta_{tt} \omega^t_r = -\omega^t_r \rightarrow \omega_{tr} = -\omega_{rt} = -\omega^t_r \rightarrow \omega_{rt} = \omega^t_r, \quad (85)$$

$$\omega_{\theta r} = \eta_{\theta\theta} \omega^\theta_r = \omega^\theta_r \rightarrow \omega_{\theta r} = -\omega_{r\theta} = \omega^\theta_r \rightarrow \omega_{r\theta} = -\omega^\theta_r, \quad (86)$$

$$\omega_{\phi r} = \eta_{\phi\phi} \omega^\phi_r = \omega^\phi_r \rightarrow \omega_{\phi r} = -\omega_{r\phi} = \omega^\phi_r \rightarrow \omega_{r\phi} = -\omega^\phi_r, \quad (87)$$

$$\omega_{\phi\theta} = \eta_{\phi\phi} \omega^\phi_\theta = \omega^\phi_\theta \rightarrow \omega_{\phi\theta} = -\omega_{\theta\phi} = \omega^\phi_\theta \rightarrow \omega_{\theta\phi} = -\omega^\phi_\theta. \quad (88)$$

Acorde con lo planteado en las ecuaciones de estructura (68, 69), estas relaciones cumplen que estamos trabajando en un espacio-tiempo sin torsión, por lo que la 1-forma  $\omega^{ab}$  cumple

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \quad (89)$$

Como resultado, las 1-formas  $\omega_{ab}$  poseen las siguientes simetrías:

$$\omega^t_r = \omega^r_t = \frac{1}{2}A^{-1}A_rB^{-1/2}\vartheta^t, \quad (90)$$

$$\omega^\theta_r = -\omega^r_\theta = \left(\frac{1}{2}B^{-1/2}C^{-1}C_r + r^{-1}B^{-1/2}\right)\vartheta^\theta, \quad (91)$$

$$\omega^\phi_r = -\omega^r_\phi = \left(\frac{1}{2}B^{-1/2}C^{-1}C_r + r^{-1}B^{-1/2}\right)\vartheta^\phi, \quad (92)$$

$$\omega^\phi_\theta = -\omega^\theta_\phi = r^{-1}C^{-1/2}\cot\theta\vartheta^\phi. \quad (93)$$

Ahora veamos la segunda ecuación de Cartan (69), que será dividida en dos miembros; la primera parte corresponderá a  $\Gamma^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$ , y teniendo en cuenta las 1-formas  $\omega_{ab}$  distintas de cero, sus derivadas exteriores y las 2-formas de curvatura, se obtendrán directamente las componentes del tensor de curvatura. Como se ha dicho, se usarán los dos primeros miembros de la segunda ecuación de estructura (69), donde primeramente se calcularán las derivadas exteriores de las 1-formas  $\omega_{ab}$ , las cuales corresponden con:

$$d\omega^t_r = d\left(\frac{1}{2}A^{-1}A_rB^{-1/2}\vartheta^t\right) = \left(\frac{1}{4}A^{-2}A_r^2B^{-1} + \frac{1}{4}A^{-1}A_rB^{-2}B_r - \frac{1}{2}A^{-1}A_{rr}B^{-1}\right)\vartheta^t \wedge \vartheta^r = d\omega^r_t, \quad (94)$$

$$d\omega^\theta_r = d\left[\left(\frac{1}{2}B^{-1/2}C^{-1}C_r + r^{-1}B^{-1/2}\right)\vartheta^\theta\right] = \left(\frac{1}{4}B^{-2}B_rC^{-1}C_r - \frac{1}{2}B^{-1}C^{-1}C_{rr} + \frac{1}{2}r^{-1}B^{-2} + \frac{1}{4}B^{-1}C^{-2}C_r^2 - r^{-1}B^{-1}C^{-1}C_r\right)\vartheta^\theta \wedge \vartheta^r = -d\omega^r_\theta, \quad (95)$$

$$d\omega^\phi_r = d\left[\left(\frac{1}{2}B^{-1/2}C^{-1}C_r + r^{-1}B^{-1/2}\right)\vartheta^\phi\right] = \left(\frac{1}{4}B^{-1}C^{-2}C_r^2 - \frac{1}{2}B^{-1}C^{-1}C_{rr} + \frac{1}{2}r^{-1}B^{-2}B_r + \frac{1}{4}B^{-2}B_rC^{-1}C_r - r^{-1}B^{-1}C^{-1}C_r\right)\vartheta^\phi \wedge \vartheta^r + \left(-\frac{1}{2}r^{-1}\cot\theta B^{-1/2}C^{-3/2}C_r - r^{-2}\cot\theta B^{-1/2}C^{-1/2}\right)\vartheta^\phi \wedge \vartheta^\theta = -d\omega^r_\phi, \quad (96)$$

$$d\omega^\phi_\theta = d\left(r^{-1}\cot\theta C^{-1/2}\vartheta^\phi\right) = r^{-2}C^{-1}\vartheta^\phi \wedge \vartheta^\theta = -d\omega^\theta_\phi. \quad (97)$$

Por otra parte, las 2-formas de curvatura distintas de cero son:

$$\Gamma^t_r = d\omega^t_r = \left(\frac{1}{4}A^{-2}A_r^2B^{-1} + \frac{1}{4}A^{-1}A_rB^{-2}B_r - \frac{1}{2}A^{-1}A_{rr}B^{-1}\right)\vartheta^t \wedge \vartheta^r, \quad (98)$$

$$\Gamma^t_\theta = \omega^t_r \wedge \omega^r_\theta = \left(-\frac{1}{4}A^{-1}A_rB^{-1}C^{-1}C_r - \frac{1}{2}r^{-1}A^{-1}A_rB^{-1}\right)\vartheta^t \wedge \vartheta^\theta, \quad (99)$$

$$\Gamma^t_\phi = \omega^t_r \wedge \omega^r_\phi = \left( -\frac{1}{4}A^{-1}A_r B^{-1}C^{-1}C_r - \frac{1}{2}r^{-1}A^{-1}A_r B^{-1} \right) \vartheta^t \wedge \vartheta^\phi, \quad (100)$$

$$\Gamma^r_t = d\omega^t_r = - \left( \frac{1}{4}A^{-2}A_r^2 B^{-1} + \frac{1}{4}A^{-1}A_r B^{-2}B_r - \frac{1}{2}A^{-1}A_{rr} B^{-1} \right) \vartheta^r \wedge \vartheta^t, \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^r_\theta = d\omega^r_\theta + \omega^r_\phi \wedge \omega^\phi_\theta = & \left( \frac{1}{4}B^{-2}B_r C^{-1}C_r - \frac{1}{2}B^{-1}C^{-1}C_{rr} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}r^{-1}B^{-2} + \frac{1}{4}B^{-1}C^{-2}C_r^2 - r^{-1}B^{-1}C^{-1}C_r \right) \vartheta^r \wedge \vartheta^\theta, \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^\theta_\phi = d\omega^r_\phi + \omega^r_\theta \wedge \omega^\theta_\phi = & \left( \frac{1}{4}B^{-2}B_r C^{-1}C_r - \frac{1}{2}B^{-1}C^{-1}C_{rr} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}r^{-1}B^{-2}B_r + \frac{1}{4}B^{-1}C^{-2}C_r^2 - r^{-1}B^{-1}C^{-1}C_r \right) \vartheta^r \wedge \vartheta^\phi, \end{aligned} \quad (103)$$

$$\Gamma^\theta_t = \omega^\theta_r \wedge \omega^r_t = \left( \frac{1}{4}A^{-1}A_r B^{-1}C^{-1}C_r + \frac{1}{2}r^{-1}A^{-1}A_r B^{-1} \right) \vartheta^\theta \wedge \vartheta^t, \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^\theta_r = d\omega^\theta_r + \omega^\theta_\phi \wedge \omega^\phi_r = & \left( \frac{1}{4}B^{-2}B_r C^{-1}C_r - \frac{1}{2}B^{-1}C^{-1}C_{rr} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}r^{-1}B^{-2} + \frac{1}{4}B^{-1}C^{-2}C_r^2 - r^{-1}B^{-1}C^{-1}C_r \right) \vartheta^\theta \wedge \vartheta^r, \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^\theta_\phi = d\omega^\theta_\phi + \omega^\theta_r \wedge \omega^r_\phi = & \left( r^{-2}C^{-1} - \frac{1}{4}B^{-1}C^{-2}C_r^2 - r^{-2}B^{-1} \right. \\ & \left. - r^{-1}B^{-1}C^{-1}C_r \right) \vartheta^\theta \wedge \vartheta^\phi, \end{aligned} \quad (106)$$

$$\Gamma^\phi_t = \omega^\phi_r \wedge \omega^r_t = \left( \frac{1}{4} A^{-1} A_r B^{-1} C^{-1} C_r + \frac{1}{2} r^{-1} A^{-1} A_r B^{-1} \right) \vartheta^\phi \wedge \vartheta^t, \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^\phi_r = d\omega^\phi_r + \omega^r_\theta \wedge \omega^\theta_\phi = & \left( \frac{1}{4} B^{-2} B_r C^{-1} C_r - \frac{1}{2} B^{-1} C^{-1} C_{rr} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} r^{-1} B^{-2} B_r + \frac{1}{4} B^{-1} C^{-2} C_r^2 - r^{-1} B^{-1} C^{-1} C_r \right) \vartheta^\phi \wedge \vartheta^r, \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^\phi_\theta = d\omega^\phi_\theta + \omega^\phi_r \wedge \omega^r_\theta = & \left( r^{-2} C^{-1} - \frac{1}{4} B^{-1} C^{-2} C_r^2 - r^{-2} B^{-1} \right. \\ & \left. - r^{-1} B^{-1} C^{-1} C_r \right) \vartheta^\phi \wedge \vartheta^\theta. \end{aligned} \quad (109)$$

En cuanto a la última parte de la segunda ecuación de estructura (69),  $\Gamma^a_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd} \vartheta^c \wedge \vartheta^d$ , y mediante el uso de las 2-formas de curvatura  $\Gamma_{ab}$ , las componentes de tensor de curvatura son:

$$R^t_{trr} = -R^r_{trt} = \frac{1}{4} A^{-2} A_r^2 B^{-1} + \frac{1}{4} A^{-1} A_r B^{-2} B_r - \frac{1}{2} A^{-1} A_{rr} B^{-1}, \quad (110)$$

$$R^t_{\theta t \theta} = -R^\theta_{t \theta t} = -\frac{1}{4} A^{-1} A_r B^{-1} C^{-1} C_r - \frac{1}{2} r^{-1} A^{-1} A_r B^{-1}, \quad (111)$$

$$R^t_{\phi t \phi} = -R^\phi_{t \phi t} = -\frac{1}{4} A^{-1} A_r B^{-1} C^{-1} C_r - \frac{1}{2} r^{-1} A^{-1} A_r B^{-1}, \quad (112)$$

$$\begin{aligned} R^r_{\theta r \theta} = R^\theta_{r \theta r} = & \frac{1}{4} B^{-2} B_r C^{-1} C_r - \frac{1}{2} B^{-1} C^{-1} C_{rr} + \frac{1}{2} r^{-1} B^{-2} B_r \\ & + \frac{1}{4} B^{-1} C^{-2} C_r^2 - r^{-1} B^{-1} C^{-1} C_r, \end{aligned} \quad (113)$$

$$\begin{aligned}
R^r_{\phi r \phi} = R^\phi_{r \phi r} &= \frac{1}{4} B^{-2} B_r C^{-1} C_r - \frac{1}{2} B^{-1} C^{-1} C_{rr} + \frac{1}{2} r^{-1} B^{-2} B_r \\
&+ \frac{1}{4} B^{-1} C^{-2} C_r^2 - r^{-1} B^{-1} C^{-1} C_r,
\end{aligned} \tag{114}$$

$$\begin{aligned}
R^\theta_{\phi \theta \phi} = R^\theta_{\theta \phi \theta} &= r^{-2} C^{-1} - \frac{1}{4} B^{-1} C^{-2} C_r^2 - r^{-2} B^{-1} \\
&- r^{-1} B^{-1} C^{-1} C_r.
\end{aligned} \tag{115}$$

Contrayendo el tensor de curvatura una vez, se obtiene el tensor de Ricci; las componentes distintas de cero son:

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= R^r_{trt} + R^\theta_{t\theta t} + R^\phi_{t\phi t} \\
&= \frac{1}{2} A^{-1} A_r B^{-1} C^{-1} C_r + r^{-1} A^{-1} A_r B^{-1} + \frac{1}{2} A^{-1} A_{rr} B^{-1} \\
&- \frac{1}{4} A^{-2} A_r^2 B^{-1} - \frac{1}{4} A^{-1} A_r B^{-2} B_r,
\end{aligned} \tag{116}$$

$$\begin{aligned}
R_{rr} &= R^t_{rtr} + R^\theta_{r\theta r} + R^\phi_{r\phi r} \\
&= \frac{1}{4} A^{-2} A_r^2 B^{-1} + \frac{1}{4} A^{-1} A_r B^{-2} B_r - \frac{1}{2} A^{-1} A_{rr} B^{-1} + \frac{1}{2} B^{-2} B_r C^{-1} C_r \\
&- B^{-1} C^{-1} C_{rr} + \frac{1}{2} B^{-1} C^{-2} C_r^2 - 2r^{-1} B^{-1} C^{-1} C_r + r^{-1} B^{-2} B_r,
\end{aligned} \tag{117}$$

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= R^t_{\theta t \theta} + R^r_{\theta r \theta} + R^\phi_{\theta \phi \theta} \\
&= -\frac{1}{4} A^{-1} A_r B^{-1} C^{-1} C_r - \frac{1}{2} r^{-1} A^{-1} A_r B^{-1} + \frac{1}{4} B^{-2} B_r C^{-1} C_r \\
&- \frac{1}{2} B^{-1} C^{-1} C_{rr} - 2r^{-1} B^{-1} C^{-1} C_r + r^{-2} C^{-1} - r^{-2} B^{-1} \\
&+ \frac{1}{2} r^{-1} B^{-2} B_r,
\end{aligned} \tag{118}$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi\phi} &= R^t{}_{\phi t\phi} + R^r{}_{\phi r\phi} + R^\theta{}_{\phi\theta\phi} \\
&= -\frac{1}{4}A^{-1}A_rB^{-1}C^{-1}C_r - \frac{1}{2}r^{-1}A^{-1}A_rB^{-1} + \frac{1}{4}B^{-2}B_rC^{-1}C_r \\
&\quad - \frac{1}{2}B^{-1}C^{-1}C_{rr} - 2r^{-1}B^{-1}C^{-1}C_r + r^{-2}C^{-1} - r^{-2}B^{-1} \\
&\quad + \frac{1}{2}r^{-1}B^{-2}B_r.
\end{aligned} \tag{119}$$

Enseguida, el escalar de curvatura  $R$  es la última contracción obtenida del tensor de curvatura; en particular, para la solución interior con simetría esférica y estática, el escalar de curvatura es

$$\begin{aligned}
R &= \eta^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = \eta^{tt}R_{tt} + \eta^{rr}R_{rr} + \eta^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + \eta^{\phi\phi}R_{\phi\phi} \\
&= -A^{-1}A_{rr}B^{-1} - 2B^{-1}C^{-1}C_{rr} + \frac{1}{2}A^{-2}A_r^2B^{-1} - A^{-1}A_rB^{-1}C^{-1}C_r \\
&\quad + \frac{1}{2}A^{-1}A_rB^{-2}B_r - 2r^{-1}A^{-1}A_rB^{-1} + \frac{1}{2}B^{-1}C^{-2}C_r^2 + B^{-2}B_rC^{-1}C_r \\
&\quad - 6r^{-1}B^{-1}C^{-1}C_r + 2r^{-1}B^{-2}B_r + 2r^{-2}C^{-1} - 2r^{-2}B^{-1}.
\end{aligned} \tag{120}$$

Las ecuaciones de campo de Einstein en componentes se da por la relación

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{121}$$

de manera que las componentes del tensor de Einstein distintas de cero son las correspondientes a la diagonal del tensor, lo cual se debe a la simetría propuesta inicialmente; así que, las componentes son:

$$\begin{aligned}
G^t_t &= R^t_t \eta^{tt} - \frac{1}{2} R \delta^t_t = -R_{tt} - \frac{1}{2} R \\
&= B^{-1} C^{-1} C_{rr} - \frac{1}{4} B^{-1} C^{-2} C_r^2 - \frac{1}{2} B^{-2} B_r C^{-1} C_r + 3r^{-1} B^{-1} C^{-1} C_r \\
&\quad - r^{-1} B^{-2} B_r - r^{-2} C^{-1} + r^{-2} B^{-1},
\end{aligned} \tag{122}$$

$$\begin{aligned}
G^r_r &= R^r_r \eta^{rr} - \frac{1}{2} R \delta^r_r = R_{rr} - \frac{1}{2} R \\
&= \frac{1}{4} B^{-1} C^{-2} C_r^2 + r^{-1} B^{-1} C^{-1} C_r + \frac{1}{2} A^{-1} A_r B^{-1} C^{-1} C_r \\
&\quad + r^{-1} A^{-1} A_r B^{-1} - r^{-2} C^{-1} + r^{-2} B^{-1},
\end{aligned} \tag{123}$$

$$\begin{aligned}
G^\theta_\theta &= R^\theta_\theta \eta^{\theta\theta} - \frac{1}{2} R \delta^\theta_\theta = R_{\theta\theta} - \frac{1}{2} R \\
&= \frac{1}{4} A^{-1} A_r B^{-1} C^{-1} C_r + \frac{1}{2} r^{-1} A^{-1} A_r B^{-1} - \frac{1}{4} B^{-2} B_r C^{-1} C_r \\
&\quad - \frac{1}{2} r^{-1} B^{-2} B_r + r^{-1} B^{-1} C^{-1} C_r + \frac{1}{2} A^{-1} A_{rr} B^{-1} - \frac{1}{4} A^{-2} A_r^2 B^{-2} \\
&\quad - \frac{1}{4} A^{-1} A_r B^{-2} B_r - \frac{1}{4} B^{-1} C^{-2} C_r^2 \\
&= G^\phi_\phi,
\end{aligned} \tag{124}$$

donde por la simetría,  $G^\theta_\theta = G^\phi_\phi$ .

## Apéndice B. Valores propios para una solución interior estática general con simetría esférica

En este anexo se obtienen los valores propios para una solución general con simetría esférica. Del anterior anexo, aprovechamos los resultados correspondientes a las componentes del tensor de curvatura (110 - 115), y bajando el primer índice de  $R^m{}_{bcd}$  de la forma

$$R_{abcd} = \eta_{am} R^m{}_{bcd}, \quad (125)$$

obtenemos las componentes covariantes del tensor:

$$R_{trtr} = -\frac{1}{4}A^{-2}A_r^2B^{-1} - \frac{1}{4}A^{-1}A_rB^{-2}B_r + \frac{1}{2}A^{-1}A_{rr}B^{-1}, \quad (126)$$

$$R_{t\theta t\theta} = \frac{1}{4}A^{-1}A_rB^{-1}C^{-1}C_r + \frac{1}{2}r^{-1}A^{-1}A_rB^{-1}, \quad (127)$$

$$R_{t\phi t\phi} = \frac{1}{4}A^{-1}A_rB^{-1}C^{-1}C_r + \frac{1}{2}r^{-1}A^{-1}A_rB^{-1}, \quad (128)$$

$$R_{r\theta r\theta} = \frac{1}{4}B^{-2}B_rC^{-1}C_r - \frac{1}{2}B^{-1}C^{-1}C_{rr} + \frac{1}{2}r^{-1}B^{-2}B_r + \frac{1}{4}B^{-1}C^{-2}C_r^2 - r^{-1}B^{-1}C^{-1}C_r, \quad (129)$$

$$R_{r\phi r\phi} = \frac{1}{4}B^{-2}B_r C^{-1}C_r - \frac{1}{2}B^{-1}C^{-1}C_{rr} + \frac{1}{2}r^{-1}B^{-2}B_r + \frac{1}{4}B^{-1}C^{-2}C_r^2 - r^{-1}B^{-1}C^{-1}C_r, \quad (130)$$

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = r^{-2}C^{-1} - \frac{1}{4}B^{-1}C^{-2}C_r^2 - r^{-2}B^{-1} - r^{-1}B^{-1}C^{-1}C_r. \quad (131)$$

De acuerdo a la reescritura en índices de bivectores es posible agrupar las componentes del tensor de Riemann en una matriz simétrica  $6 \times 6$

$$\mathbf{R}_{AB} = \begin{pmatrix} R_{0101} & R_{0102} & R_{0103} & R_{0123} & R_{0131} & R_{0112} \\ R_{0201} & R_{0202} & R_{0203} & R_{0223} & R_{0231} & R_{0212} \\ R_{0301} & R_{0302} & R_{0303} & R_{0323} & R_{0331} & R_{0312} \\ R_{2301} & R_{2302} & R_{2303} & R_{2323} & R_{2331} & R_{2312} \\ R_{3101} & R_{3102} & R_{3103} & R_{3123} & R_{3131} & R_{3112} \\ R_{1201} & R_{1202} & R_{1203} & R_{1223} & R_{1231} & R_{1212} \end{pmatrix}. \quad (132)$$

De donde resulta que los valores propios son:

$$\lambda_{11} = -\frac{1}{4}A^{-2}A_r^2 B^{-1} - \frac{1}{4}A^{-1}A_r B^{-2}B_r + \frac{1}{2}A^{-1}A_{rr} B^{-1}, \quad (133)$$

$$\lambda_{22} = \lambda_{33} = \frac{1}{4}A^{-1}A_r B^{-1}C^{-1}C_r + \frac{1}{2}r^{-1}A^{-1}A_r B^{-1}, \quad (134)$$

$$\lambda_{44} = r^{-2}C^{-1} - \frac{1}{4}B^{-1}C^{-2}C_r^2 - r^{-2}B^{-1} - r^{-1}B^{-1}C^{-1}C_r, \quad (135)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{55} = \lambda_{66} = & \frac{1}{4}B^{-2}B_rC^{-1}C_r - \frac{1}{2}B^{-1}C^{-1}C_{rr} + \frac{1}{2}r^{-1}B^{-2}B_r + \frac{1}{4}B^{-1}C^{-2}C_r^2 \\ & - r^{-1}B^{-1}C^{-1}C_r. \end{aligned} \quad (136)$$

## Apéndice C. Valores propios de soluciones interiores

### Soluciones interiores admisibles

**Nariai IV.** El espacio-tiempo de Nariai IV es una solución de fluido perfecto a las ecuaciones de campo de Einstein descrita por la métrica Nariai (1950)

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = & -A \cos^2(\Theta) \cos^{-2}(\Delta) dt \otimes dt \\ & + A \cos^{-2}(\Delta) dr \otimes dr + r^2 d\Omega \otimes d\Omega, \end{aligned} \quad (137)$$

donde  $a, A$  y  $M$  son constantes<sup>17</sup>. La presión  $p(r)$  y la densidad de energía  $\rho(r)$  vinieron dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} p(r) = & \frac{-3M}{32\pi A \cos(\Theta)} \left[ (M \cos^2(\Delta) r^2 - Mr^2 - \frac{8 \cos(\Delta) \sin(\Delta)}{3}) \right. \\ & \times \cos(-\Theta) + \frac{2 \sin(-\Theta) \sqrt{2} \cos(\Delta)}{3} \\ & \left. \times (r^2 M \sin(\Delta) + 2 \cos(\Delta)) \right], \end{aligned} \quad (138)$$

$$\rho(r) = \frac{M}{32\pi A} [M \cos^2(\Delta) r^2 - 3Mr^2 - 12 \cos(\Delta) \sin(\Delta)]. \quad (139)$$

Los valores propios para esta función correspondieron a:

---

<sup>17</sup> Reescribimos los argumentos de las funciones trigonométricas como:  $\Theta = a - \frac{\sqrt{2}M}{4} r^2$  y  $\Delta = b + \frac{M}{4} r^2$ .

$$\lambda_{11} = - \frac{[(2M \cos^2(\Delta)r^2 - Mr^2 - 2 \sin(\Delta) \cos(\Delta)) \cos(-\Theta) + \sin(-\Theta)]}{4A \cos(-\Theta)} \times \sqrt{2} \cos(\Delta) (Mr^2 \sin(\Delta) + 2 \cos(\Delta)) \Big] M, \quad (140)$$

$$\lambda_{22} = \lambda_{33} = - \frac{\cos(\Delta)M \left[ \sqrt{2} \sin(-\Theta) \cos(\Delta) - \cos(-\Theta) \sin(\Delta) \right]}{2A \cos(-\Theta)}, \quad (141)$$

$$\lambda_{44} = \frac{-\cos^2(\Delta) + A}{Ar^2}, \quad (142)$$

$$\lambda_{55} = \lambda_{66} = \frac{\cos(\Delta)M \sin(\Delta)}{2A}. \quad (143)$$

**Buchdahl 1.** El espacio-tiempo de Buchdahl 1 describe una solución con simetría esférica de fluido perfecto a las ecuaciones de campo de Einstein Buchdahl (1959). El tensor métrico es

$$\mathbf{g} = -A \left[ \Gamma^{3/2} + B\sqrt{\Lambda}(2\Gamma + 3) \right]^2 dt \otimes dt + \frac{2\Gamma}{\Lambda} dr \otimes dr + r^2 d\Omega \otimes d\Omega, \quad (144)$$

donde  $A, B$  y  $C$  son constantes<sup>18</sup>. La presión  $p(r)$  y la densidad de energía  $\rho(r)$  vinieron dadas por las siguientes expresiones:

---

<sup>18</sup> Renombramos las siguientes expresiones para facilitar la lectura:  $\Gamma = 1 + Cr^2$ ,  $\Delta = B^2 - \frac{1}{4}$  y  $\Lambda = 2 - Cr^2$ .

$$p(r) = -\frac{9C \left[ \sqrt{\Gamma} \left( r^6 \Delta C^3 + r^4 \Delta C^2 - \frac{19r^2 (B^2 - \frac{1}{19})C}{4} - \frac{5B^2}{2} + \frac{1}{4} \right) \right]}{16\pi\Gamma \left[ \left( r^6 \Delta C^3 + 3r^4 \Delta C^2 - \frac{15(B^2 + \frac{1}{3})r^2 C}{4} - \frac{25B^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \right]} \times \frac{\sqrt{\Lambda} + (\Gamma - \frac{3}{2})B(\Gamma + 1)\Gamma(\Gamma - 3)}{\sqrt{\Gamma\Lambda} + (\Gamma + \frac{3}{2})\Gamma^2(-\Lambda)B}, \quad (145)$$

$$\rho(r) = \frac{3C(\Gamma + 2)}{16\pi\Gamma^2}. \quad (146)$$

Los valores propios de este espacio-tiempo fueron:

$$\lambda_{11} = \frac{12C \left[ -\frac{(Cr^2 - 1)\Gamma\sqrt{\Lambda}}{2} + (C^2 r^4 + \frac{3}{2}Cr^2 - \frac{1}{4})\sqrt{\Gamma}B(-\Lambda) \right]}{\sqrt{\Lambda}\Gamma^{5/2} \left[ (4B^2\Gamma)\sqrt{\Lambda} + 2\Gamma^{3/2} \right]}, \quad (147)$$

$$\lambda_{22} = \lambda_{33} = \frac{3C \left( -2BCr^2 + \sqrt{\Gamma}\sqrt{\Lambda} + B \right) \sqrt{\Lambda}}{2 \left[ (2BCr^2 + 5B)\sqrt{\Lambda} + \Gamma^{3/2} \right] \Gamma}, \quad (148)$$

$$\lambda_{44} = \frac{3C}{2\Gamma}, \quad (149)$$

$$\lambda_{55} = \lambda_{66} = \frac{3C}{2\Gamma^2}. \quad (150)$$

**Heintzmann IIa.** El espacio-tiempo de Heintzmann IIa describe una solución de fluido perfecto a las ecuaciones de Einstein Heintzmann (1969). El tensor métrico correspondiente

a esta solución interior es

$$\mathbf{g} = -A^2\Upsilon^3 dt \otimes dt + \left[ 1 - \frac{3ar^2}{2} \frac{1 + C\Psi^{-1/2}}{\Upsilon} \right]^{-1} dr \otimes dr + r^2 d\Omega \otimes d\Omega, \quad (151)$$

donde  $a, A$  y  $C$  son constantes arbitrarias<sup>19</sup>. La presión  $p(r)$  y la densidad de energía  $\rho(r)$  vinieron dadas por las siguientes expresiones:

$$p(r) = -\frac{3 \left( 7ar^2C + 3ar^2\sqrt{\Psi} + C - 3\sqrt{\Psi} \right) a}{16\sqrt{\Psi}\pi\Upsilon^2}, \quad (152)$$

$$\rho(r) = \frac{3a \left( 4\sqrt{\Psi}a^2r^4 + 9ar^2C + 13ar^2\sqrt{\Psi} + 3C + 3\sqrt{\Psi} \right)}{16\Psi^{3/2}\pi\Upsilon^2}. \quad (153)$$

Los valores propios de (151) fueron:

$$\lambda_{11} = \frac{\left( -12a^3r^4 + 9a^2r^2 + 3a \right) \sqrt{\Psi} - 27 \left( ar^2 + \frac{1}{3} \right) a^2r^2C}{\Psi^{3/2}\Upsilon^2}, \quad (154)$$

$$\lambda_{22} = \lambda_{33} = \frac{-3a \left( ar^2 - 2 \right) \sqrt{\Psi} - 9a^2r^2C}{2\sqrt{\Psi}\Upsilon^2}, \quad (155)$$

---

<sup>19</sup> Definiremos, para esta métrica, las siguientes constantes:  $\Upsilon = 1 + ar^2$  y  $\Psi = 1 + 4ar^2$ .

$$\lambda_{44} = \frac{3a \left( \sqrt{\Psi} \right)}{\sqrt{\Psi} (2ar^2 + 2)}, \quad (156)$$

$$\lambda_{55} = \lambda_{66} = -\frac{3a \left( 2Ca^2r^4 - 2ar^2C - 4ar^2\sqrt{\Psi} - C - \sqrt{\Psi} \right)}{2\Upsilon^2\Psi^{3/2}}. \quad (157)$$

**Durgapal IV.** El espacio-tiempo generado por Durgapal IV corresponde a una solución de fluido perfecto de la ecuación de Einstein Durgapal (1982). La métrica asociada a esta solución es

$$\mathbf{g} = -A\Pi^4 dt \otimes dt + \left[ \frac{7 - 10Cr^2 - C^2r^4}{7\Pi^2} + \frac{KCr^2}{\Pi^2\Delta^{5/2}} \right]^{-1} \times dr \otimes dr + r^2 d\Omega \otimes d\Omega, \quad (158)$$

en la cual  $A, C$  y  $K$  son constantes arbitrarias<sup>20</sup>. La presión  $p(r)$  y la densidad de energía  $\rho(r)$  vinieron dadas por las siguientes expresiones:

$$p(r) = -\frac{2C \left[ (C^2r^4 + 7Cr^2 - 2) \Delta^{2/5} - \frac{63KCr^2}{16} - \frac{7K}{16} \right]}{7\Delta^{2/5}\pi\Pi^3}, \quad (159)$$

$$\rho(r) = \frac{C \left[ 40C^3\Delta^{2/5}r^6 + 88C^2\Delta^{2/5}r^4 + 63C^2Kr^4 + 376C\Delta^{2/5}r^2 - 70KCr^2 + 72\Delta^{2/5} - 21K \right]}{56\Delta^{7/5}\pi\Pi^3}. \quad (160)$$

---

<sup>20</sup> Definiremos las siguientes constantes:  $\Pi = 1 + Cr^2$  y  $\Delta = 1 + 5Cr^2$ .

Los valores propios correspondientes a (158) fueron:

$$\lambda_{11} = -\frac{60C \left[ (C^3 r^6 + \frac{103}{15} C^2 r^4 - Cr^2 - \frac{7}{15}) \Delta^{2/5} - \frac{56K(Cr^2 + \frac{1}{4})r^2 C}{15} \right]}{7\Delta^{7/5}\Pi^3}, \quad (161)$$

$$\lambda_{22} = \lambda_{33} = -\frac{4C \left[ (C^2 r^4 + 10Cr^2 - 7) \Delta^{2/5} - 7KCr^2 \right]}{7\Delta^{7/5}\Pi^3}, \quad (162)$$

$$\lambda_{44} = \frac{C \left[ 8C\Delta^{2/5}r^2 + 24\Delta^{2/5} - 7K \right]}{7\Pi^2\Delta^{2/5}}, \quad (163)$$

$$\lambda_{55} = \lambda_{66} = \frac{C \left[ -40C^2\Delta^{2/5}r^4 + 49C^2Kr^4 + 112C\Delta^{2/5}r^2 - 14KCr^2 + 24\Delta^{2/5} - 7K \right]}{7\Pi^3\Delta^{7/5}} \quad (164)$$

**Durgapal V.** Durgapal V es una solución de fluido perfecto a las ecuaciones de campo de Einstein Durgapal (1982). El tensor métrico de esta solución es

$$\mathbf{g} = -A\Pi^5 dt \otimes dt + \left[ \frac{1 - \frac{Cr^2(309+54Cr^2+8C^2r^4)}{112} + \frac{KCr^2}{\Sigma^{1/3}}}{\Pi^3} \right]^{-1} dr \otimes dr + r^2 d\Omega \otimes d\Omega, \quad (165)$$

para el cual  $A, C$  y  $K$  son constantes<sup>21</sup>. La presión  $p(r)$  y la densidad de energía  $\rho(r)$  vinieron

---

<sup>21</sup> Definiremos las siguientes constantes:  $\Pi = 1 + Cr^2$  y  $\Sigma = 1 + 6Cr^2$ .

dadas por las siguientes expresiones:

$$p(r) = -\frac{25 \left[ (C^3 r^6 + \frac{21}{4} C^2 r^4 + \frac{165}{8} C r^2 - \frac{19}{8}) \Sigma^{1/3} - \frac{154 K C r^2}{25} - \frac{14 K}{25} \right]}{112 \Sigma^{1/3} \pi \Pi^4} C, \quad (166)$$

$$\rho(r) = \frac{45 \left[ (C r^2 + \frac{1}{6}) \left( C^3 r^6 + \frac{15}{4} C^2 r^4 + \frac{1}{8} C r^2 + \frac{129}{8} \Sigma^{1/3} + \frac{154 (C^2 r^4 - \frac{1}{2} C r^2 - \frac{3}{22}) K}{45} \right) \right]}{56 \Sigma^{4/3} \pi \Pi^4}. \quad (167)$$

Los valores propios correspondientes al tensor de curvatura para esta solución fueron:

$$\lambda_{11} = \frac{(-480 C^5 r^8 - 2510 C^4 r^6 - 9675 C^3 r^4 + 135 C^2 r^2 + 280 C) \Sigma^{1/3}}{56 \Sigma^{4/3} \Pi^4} + 2800 r^2 K C^2 \left( C r^2 + \frac{1}{5} \right), \quad (168)$$

$$\lambda_{22} = \lambda_{33} = -\frac{5C \left[ (C^3 r^6 + \frac{27}{4} C^2 r^4 + \frac{309}{8} C r^2 - 14) \Sigma^{1/3} - 14 K C r^2 \right]}{14 \Sigma^{1/3} \Pi^4}, \quad (169)$$

$$\lambda_{44} = \frac{C \left[ 120 C^2 \Sigma^{1/3} r^4 + 390 C r^2 \Sigma^{1/3} - 112 K + 645 \Sigma^{1/3} \right]}{112 \Sigma^{1/3} \Pi^3}, \quad (170)$$

$$\lambda_{55} = \lambda_{66} = -\frac{45 \left[ (C^2 r^4 + 17 C r^2 - \frac{43}{2}) (C r^2 + \frac{1}{6}) \Sigma^{1/3} - \frac{392 (C^2 r^4 - \frac{1}{2} C r^2 - \frac{1}{14}) K}{45} \right]}{28 \Sigma^{4/3} \Pi^4}. \quad (171)$$

### Soluciones interiores no admisibles

**Bayin III.** Otra solución interior de las ecuaciones de campo es la propuesta por S. Bayin Bayin (1978)<sup>22</sup>. Esta no corresponde a una solución de fluido perfecto. La métrica de esta solución es

$$\mathbf{g} = -A^2 \left( r + \sqrt{r^2 - \frac{2}{B}} \right)^{2/\sqrt{B}} dt \otimes dt + \left( \frac{2}{r^2} - B \right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 d\Omega \otimes d\Omega. \quad (172)$$

Los valores propios de la solución fueron:

$$\lambda_{11} = \frac{r^2 B \sqrt{r^2 B - 2} r - 2}{\sqrt{r^2 B - 2} r^3}, \quad (173)$$

$$\lambda_{22} = \lambda_{33} = -\frac{\sqrt{r^2 B - 2}}{r^3}, \quad (174)$$

$$\lambda_{44} = \frac{-2 + (B + 1) r^2}{r^4}, \quad (175)$$

---

<sup>22</sup> De acá en adelante, trabajaremos con soluciones no admisibles; estas serán distinguidas por tener un asterisco (\*) después del respectivo nombre que las identifica por la cantidad de criterios de admisibilidad que satisficieron en el trabajo de Delgaty *et al.* Delgaty and Lake (1998).

$$\lambda_{55} = \lambda_{66} = \frac{2}{r^4}. \quad (176)$$

**N-P-V Ib\*.** El espacio-tiempo generado por V. V. Narlikar *et al.* Narlikar et al. (1943) corresponde a una solución interior de fluido perfecto con la siguiente métrica

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = & -(a + b \ln r)^2 \left( Ar^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + Br^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^{-2} dt \otimes dt + \left( Ar^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} + Br^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^{-2} \\ & \times (dr \otimes dr + r^2 d\Omega \otimes d\Omega). \end{aligned} \quad (177)$$

Los valores propios de esta solución fueron:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} = & \frac{-4B^3A \left( b \ln r - \frac{b\sqrt{2}}{2} + a \right) r^{2-\sqrt{2}} + B^4 r^{2-\sqrt{2}} \sqrt{2} b - A \left[ A^2 r^{2-\sqrt{2}} b \sqrt{2} \right. \\ & \left. + 4B \left( A \left( b \ln r + \frac{b\sqrt{2}}{2} + a \right) r^{2+\sqrt{2}} + 2Br^2 (a + b \ln r) \right) \right]}{2(a + b \ln r) r^2 \left( Ar^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + Br^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right)^2} \end{aligned} \quad (178)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{22} = \lambda_{33} = & \frac{\sqrt{2} \left[ B^3 \left( (a + b \ln r) \sqrt{2} + 2b \right) r^{2-\frac{3\sqrt{2}}{2}} + \left( -B^2 \left( (a + b \ln r) \sqrt{2} - 2b \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \times r^{2-\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left( -B \left( (a + b \ln r) \sqrt{2} + 2b \right) r^{2+\frac{\sqrt{2}}{2}} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \left( (a + b \ln r) \sqrt{2} - 2b \right) Ar^{2+\frac{3\sqrt{2}}{2}} \right) A \right] A}{4r^2 \left( Ar^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + Br^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) (a + b \ln r)} \end{aligned} \quad (179)$$

$$\lambda_{44} = \frac{6Ar^2B + A^2r^{2+\sqrt{2}} + B^2r^{2-\sqrt{2}}}{2r^2}, \quad (180)$$

$$\lambda_{55} = \lambda_{66} = 2AB. \quad (181)$$

**Kottler\*\*.** El espacio-tiempo generado por la solución interior hallada por F. Kottler Kottler (1918) corresponde a un fluido perfecto con la siguiente métrica

$$\mathbf{g} = - \left( 1 - \frac{2M}{r} - \frac{r^2}{R^2} \right) dt \otimes dt + \left( 1 - \frac{2M}{r} - \frac{r^2}{R^2} \right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 d\Omega \otimes d\Omega. \quad (182)$$

Los valores propios correspondieron a:

$$\lambda_{11} = \frac{-r^3 - 2MR^2}{r^3 R^2}, \quad (183)$$

$$\lambda_{22} = \lambda_{33} = \frac{-r^3 + MR^2}{R^2 r^3}, \quad (184)$$

$$\lambda_{44} = \frac{r^3 + 2MR^2}{R^2 r^3}, \quad (185)$$

$$\lambda_{55} = \lambda_{66} = \frac{r^3 - MR^2}{R^2 r^3}. \quad (186)$$

**Kuchowicz 71 II\*\*\*.** El espacio-tiempo generado por la solución de B. Kuchowicz Kuchowicz (1971) corresponde a una solución interior de fluido perfecto con la siguiente métrica

$$\mathbf{g} = - \left( A e^{\frac{1+\sqrt{2}}{4}Ar^2} + B e^{\frac{1-\sqrt{2}}{4}Ar^2} \right)^2 dt \otimes dt + C e^{\frac{1}{2}Ar^2} (dr \otimes dr + r^2 d\Omega \otimes d\Omega). \quad (187)$$

Los valores propios obtenidos fueron:

$$\lambda_{11} = \frac{\left[ A \left( (Ar^2 + 2) \sqrt{2} + 2Ar^2 + 2 \right) e^{\frac{(1+\sqrt{2})Ar^2}{4}} - B e^{-\frac{(\sqrt{2}-1)Ar^2}{4}} \right]}{4C \left[ A e^{\frac{(1+\sqrt{2})Ar^2}{4}} + B e^{-\frac{(\sqrt{2}-1)Ar^2}{4}} \right]} \quad (188)$$

$$\times \left( Ar^2 \sqrt{2} - 2Ar^2 + 2\sqrt{2} - 2 \right) A e^{-\frac{Ar^2}{2}},$$

$$\lambda_{22} = \lambda_{33} = \frac{\left[ A \left( 1 + \sqrt{2} \right) e^{\frac{(1+\sqrt{2})Ar^2}{4}} - B e^{-\frac{(\sqrt{2}-1)Ar^2}{4}} \left( \sqrt{2} - 1 \right) \right]}{4C \left[ A e^{\frac{(1+\sqrt{2})Ar^2}{4}} + B e^{-\frac{(\sqrt{2}-1)Ar^2}{4}} \right]} \quad (189)$$

$$\times A \left( Ar^2 + 2 \right) e^{-\frac{Ar^2}{2}},$$

$$\lambda_{44} = -\frac{e^{-\frac{Ar^2}{2}} A \left( Ar^2 + 4 \right)}{4C}, \quad (190)$$

$$\lambda_{55} = \lambda_{66} = -\frac{e^{-\frac{Ar^2}{2}} A}{C}. \quad (191)$$

**Schwarzschild interior\*\*\*\*.** El último espacio-tiempo del cual hallaremos los valores propios corresponde a la solución interior de K. Schwarzschild Schwarzschild (1916), la cual tiene como métrica

$$\mathbf{g} = - \left( A - B \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right)^2 dt \otimes dt + \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 d\Omega \otimes d\Omega. \quad (192)$$

Los valores propios fueron:

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2} B}{\left( AR - B \sqrt{R^2 - r^2} \right) R^2}, \quad (193)$$

$$\lambda_{44} = \lambda_{55} = \lambda_{66} = \frac{1}{R^2}. \quad (194)$$