

**DETERMINACIÓN DE RAÍCES REALES Y COMPLEJAS EN SISTEMAS DE  
ECUACIONES UTILIZANDO OPTIMIZACIÓN POR ENJAMBRE DE  
PARTÍCULAS (PSO)**

**JULIAN ALBERTO PLATA RUEDA**

**SERGIO ANDRÉS REYES SIERRA**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA  
Y TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA**

**2011**

**DETERMINACIÓN DE RAÍCES REALES Y COMPLEJAS EN SISTEMAS DE  
ECUACIONES UTILIZANDO OPTIMIZACIÓN POR ENJAMBRE DE  
PARTÍCULAS (PSO)**

**JULIAN ALBERTO PLATA RUEDA**

**SERGIO ANDRÉS REYES SIERRA**

**Trabajo de Grado para optar al título de INGENIERO ELECTRÓNICO**

**DR. CARLOS RODRIGO CELY**

**DIRECTOR TRABAJO DE GRADO**

**DR. JORGE LUIS CHACÓN VELASCO**

**CODIRECTOR DEL TRABAJO DE GRADO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICO-MECÁNICAS**

**ESCUELAS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA**

**Y TELECOMUNICACIONES**

**BUCARAMANGA**

**2011**

## **AGRADECIMIENTOS**

Un especial agradecimiento al Servicio de supercomputación y calculo científico UIS, en especial al Doctor Carlos Jaime Barrios Hernández, Responsable del servicio y Leonardo Camargo Forero, Ingeniero de Soporte de plataforma y desarrollo pues gracias a su colaboración y orientación se pudieron realizar las pruebas que permitieron finalizar el presente proyecto.

## CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	13
1. FUNDAMENTACIÓN	15
1.1. <i>TEOREMA</i>	15
2. PARTICLE SWARM OPTIMIZATION	17
3. MODIFICACIONES AL PSO	19
5. RESULTADOS Y ANÁLISIS	21
5.1. <i>SISTEMA DE DOS ECUACIONES</i>	21
5.2. <i>SISTEMA DE TRES ECUACIONES</i>	24
5.3. <i>SISTEMA DE CINCO ECUACIONES</i>	28
5.4. <i>SISTEMA DE DIEZ ECUACIONES</i>	32
5.5. <i>SISTEMA DE CINCO ECUACIONES EN CLÚSTER</i>	37
6. OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES	47
BIBLIOGRAFÍA	48

## TABLAS

	Pág.
TABLA 1. ECUACIONES 2, 10 PARTÍCULAS SIN MINIMIZACIÓN	21
TABLA 2. ECUACIONES 2, 10 PARTÍCULAS CON MINIMIZACIÓN	22
TABLA 3. ECUACIONES 2, 100 PARTÍCULAS SIN MINIMIZACIÓN	22
TABLA 4. ECUACIONES 2, 100 PARTÍCULAS CON MINIMIZACIÓN	23
TABLA 5. ECUACIONES 2, 1000 PARTÍCULAS CON MINIMIZACIÓN	23
TABLA 6. ECUACIONES 3, 10 PARTÍCULAS CON MINIMIZACIÓN	25
TABLA 7. ECUACIONES 3, 100 PARTÍCULAS CON MINIMIZACIÓN	25
TABLA 8. ECUACIONES 3, 1000 PARTÍCULAS CON MINIMIZACIÓN	26
TABLA 9. ECUACIONES 3, 3000 PARTÍCULAS CON MINIMIZACIÓN	27
TABLA 10. ECUACIONES 5, 10 PARTÍCULAS CON MINIMIZACIÓN	28
TABLA 11. ECUACIONES 5, 100 PARTÍCULAS CON MINIMIZACIÓN	29
TABLA 12. ECUACIONES 5, 300 PARTÍCULAS CON MINIMIZACIÓN	31
TABLA 13. ECUACIONES 10, 10 PARTÍCULAS CON MINIMIZACIÓN	33
TABLA 14. ECUACIONES 10, 100 PARTÍCULAS CON MINIMIZACIÓN	35
TABLA 15. ECUACIONES 5, 10 PARTÍCULAS EN CLÚSTER CON 1 NODO	37
TABLA 16. ECUACIONES 5, 10 PARTÍCULAS EN CLÚSTER CON 2 NODOS	38
TABLA 17. ECUACIONES 5, 10 PARTÍCULAS EN CLÚSTER CON 3 NODOS	39
TABLA 18. ECUACIONES 5, 10 PARTÍCULAS EN CLÚSTER CON 4 NODOS	40
TABLA 19. ECUACIONES 5, 100 PARTÍCULAS EN CLÚSTER CON 1 NODO	41

TABLA 20. ECUACIONES 5, 100 PARTÍCULAS EN CLÚSTER CON 4 NODOS	42
TABLA 21. ECUACIONES 5, 1000 PARTÍCULAS EN CLÚSTER CON 4 NODO	44
TABLA 22. ECUACIONES 5, 1000 PARTÍCULAS EN CLÚSTER CON 4 NODOS VARIANDO PARÁMETROS	45

## RESUMEN

### TÍTULO

**DETERMINACIÓN DE RAÍCES REALES Y COMPLEJAS EN SISTEMAS DE ECUACIONES UTILIZANDO OPTIMIZACIÓN POR ENJAMBRE DE PARTÍCULAS (PSO)\***

### AUTORES

Julian Alberto Plata Rueda\*\*

Sergio Andrés Reyes Sierra\*\*

### PALABRAS CLAVES

CLUSTER, PARTICLE SWARM OPTIMIZATION (PSO), SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES, METAHEURÍSTICA.

### DESCRIPCIÓN

En este artículo se presenta una alternativa para solucionar sistemas de ecuaciones no lineales con raíces reales y/o complejas. Para esto es necesario convertir el problema de solucionar un sistema de ecuaciones en un trabajo de optimización, es decir se utilizará un método de minimización y posteriormente se implementará una técnica heurística como PSO (*Particle Swarm Optimization*) debido a que esta facilitará la solución de problemas de grandes dimensiones. En este caso se hará una modificación al algoritmo de PSO con el fin de que el mismo comprenda partículas que se puedan desplazar tanto en el eje real como en el imaginario. En el presente texto se plasmarán los resultados de implementar el código en un computador convencional y en un cluster de computadores, también se mostrará lo sucedido al utilizar tan solo una parte de la capacidad computacional que ofrece el mismo. Finalmente se concluye que no es suficiente aprovechar las ventajas en hardware que presenta un clúster de computadores para disminuir los tiempos de cómputo en la solución de sistemas de ecuaciones, ya que es necesaria la paralelización del algoritmo. Además se muestra que PSO es un método de alta precisión y rápida convergencia que permite resolver sistemas de ecuaciones con cualquier tipo de soluciones (Reales y complejas).

---

\* Trabajo de Grado.

\*\* Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones. Director: Carlos Rodrigo Correa Cely. Codirector: Jorge Luis Chacón Velasco.

## SUMMARY

### TITLE

**Determination of real and complex roots using Particle Swarm Optimization (PSO) in equations systems.\***

### AUTHORS

Julian Alberto Plata Rueda\*\*

Sergio Andrés Reyes Sierra\*\*

### KEYWORDS

CLUSTER, PARTICLE SWARM OPTIMIZATION (PSO), SYSTEMS OF NONLINEAR EQUATIONS, METAHEURISTIC.

### DESCRIPCIÓN

This article presents an alternative to solving systems of nonlinear equations with real and/or complex roots. The problem is necessary to convert in an optimization work. A minimization technique is applied first followed by a slightly modified PSO (Particle Swarm Optimization). This new PSO algorithm uses particles that move in the real and imaginary axes. In this text will be the results of implementing the code in a conventional computer and a computer cluster, also it will show what happened when using only a part of the computational capacity (or power) offered by itself. Finally it concludes that is not enough to take advantage on hardware that a cluster of computers has, thus reducing computation times to solve systems of equations, as is required the parallelization of the algorithm. Also it shows that pso is a method of high precision and rapid convergence that allows us to solve systems of equations with any type of solutions (real and complex).

---

\* Degree Work.

\*\* Faculty of Physic mechanical Engineering. School of electric, electronic and telecommunications. Project director: Carlos Rodrigo Correa Cely. Project co-director: Jorge Luis Chacón Velasco.

## INTRODUCCIÓN

Dada la complejidad de descripción de fenómenos físicos que se presentan en áreas de importancia como la ingeniería, medicina, economía, química y robótica, entre muchas otras, se hace necesaria la utilización de sistemas de ecuaciones no lineales que permitan interpretar matemáticamente estos comportamientos [1]. Debido a los avances significativos al hallar soluciones a este tipo de sistemas, la comunidad científica se ha esforzado en crear algoritmos y teorías constructivas [2] [3]; sin embargo, algunos sistemas no tienen única respuesta, por lo que encontrar parte de las soluciones se convierte en un desafío matemático y computacional. En algunos casos se pueden usar métodos algebraicos que permitan obtener una o varias soluciones, sin embargo la mayoría de sistemas de ecuaciones no lineales son ineficientes, por ello se hace necesario utilizar métodos numéricos para conseguir una solución aproximada que cumpla con un error de precisión deseado [4]. Se han desarrollado muchas técnicas numéricas que permiten encontrar la solución óptima a un sistema de ecuaciones no lineales. Una de las más utilizadas es la de Newton-Raphson; sin embargo la convergencia de este método depende de los valores iniciales que se supongan. Cuando el sistema de ecuaciones aumenta de tamaño, los métodos tradicionales para su solución se vuelven un trabajo muy dispendioso elevando el tiempo de cómputo. Por tanto estos sistemas solamente pueden ser resueltos por técnicas heurísticas [5]. Durante la última década, los métodos de optimización metaheurísticos, basados en imitar a nivel computacional procesos naturales, biológicos, sociales o culturales, han sido de gran acogida para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales. Una de estas técnicas es PSO (*Particle Swarm Optimization*), esta es un ejemplo concreto de un método de solución con alta precisión y rápida convergencia que tiene la capacidad de explorar eficientemente espacios de soluciones multidimensionales [6].

En este artículo se propone un algoritmo que permite resolver sistemas de ecuaciones no lineales con raíces reales y complejas utilizando PSO. Previo a esto se aplica un método que permite convertir el problema de hallar la solución a un sistema de ecuaciones, en un sencillo proceso de minimización, logrando de esta manera disminuir el tiempo de respuesta. Igualmente se presentan pruebas realizadas al algoritmo en un computador convencional y en un clúster de computadores.

## 1. FUNDAMENTACIÓN

Se supone un sistema no lineal de ecuaciones con  $m$  funciones y  $m$  incógnitas [7], tal como se observa en las ecuaciones (1) - (3), donde  $\mathcal{F}_i(z_1, z_2, \dots, z_i)$ , con  $i = 1, 2, \dots, m$  es un sistema de funciones no lineales y  $z_i$  con  $i = 1, 2, \dots, m$  son variables complejas.

$$\mathcal{F}_1(z_1, z_2, \dots, z_m) \quad (1)$$

$$\mathcal{F}_2(z_1, z_2, \dots, z_m) \quad (2)$$

...

$$\mathcal{F}_m(z_1, z_2, \dots, z_m) \quad (3)$$

Encontrar la solución a este sistema de ecuaciones, implica un problema de minimización. La demostración al siguiente teorema se transcribe de la referencia [8].

### 1.1. TEOREMA

Sea  $\mathbb{C}$  el conjunto de los números complejos y  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{C}^n$ . Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\text{Sistema} \begin{cases} f_1(z) = 0 \\ f_2(z) = 0 \\ \vdots \\ f_m(z) = 0 \end{cases} \quad \text{con } z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \quad (4)$$

donde, para cada  $i$ ,  $f_i$  es una función cuyo dominio contiene a  $X$  y con rango en los complejos. Sea  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  definida como sigue:

$$f(z) := \sum_{i=1}^m f_i(z) \overline{f_i(z)} = \sum_{i=1}^m \|f_i(z)\|^2 \quad (5)$$

donde  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ,  $\|c\|$  representa la magnitud del número complejo  $c$ ,  $\bar{c}$  es el conjugado complejo de  $c$  y  $\|c\|^2 = c\bar{c}$ .

Siendo  $f$  bien definida y con imágenes reales no-negativas, se tiene el siguiente resultado:

*Proposición 1.* Suponga que el sistema (4) tiene solución en  $X$ , y sea  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in X$ . Entonces:  $a$  satisface (4) si, y sólo si,  $a$  minimiza  $f$ .

*Prueba.* Si  $a$  satisface el sistema (4) entonces  $f_i(a) = 0$  para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ . Luego  $f(a) = 0$  y, como  $f(z) \geq 0$  para todo  $z \in X$ , entonces  $a$  es un punto de mínimo para  $f$ .

Ahora, si  $a$  minimiza a  $f$  pero no satisface el sistema (4) entonces  $f(a)$  debe ser positivo, ya que  $f(z) \geq 0$  para todo  $z \in X$ . Como el sistema tiene solución en  $X$ , existe  $z^* \in X$  tal que  $f(z^*) = 0$  y  $z^* \neq a$ . Luego,  $f(z^*) < f(a)$  lo cual contradice que  $a$  sea el punto de mínimo para  $f$ . Note la importancia de la condición general sobre la consistencia del sistema (4) en  $X$ , ya que dado un sistema de ecuaciones, siempre es posible construir un  $f$  y si  $a$  lo minimiza esto no implica en general que el sistema tenga solución. Por tanto, se puede convertir el problema de hallar soluciones a un sistema de ecuaciones (no-lineales) a un conjunto  $X$  dado, en un problema de optimización (en este caso minimización), para una función  $f$  (construida como se muestra en (5)) en el conjunto  $X$ . Un algoritmo basado en lo anterior es:

*Algoritmo 1.*

*Entradas:* El sistema de ecuaciones dado (4) y el conjunto  $X$

*Paso 1* : Construir  $f$

*Paso 2* : Minimizar  $f$  en  $X$ .

*Paso 3* : Sea  $a \in X$  un mínimo para  $f$ . Si  $f(a) = 0$  entonces  $a$  satisface (4), en caso contrario (4) no tiene solución en  $X$ .

Es importante notar que el trabajar con los cuadrados de las magnitudes de cada expresión del sistema de ecuaciones no es una imposición; se puede trabajar también con sólo las magnitudes.

## 2. PARTICLE SWARM OPTIMIZATION

PSO<sup>1</sup> es una técnica de optimización estocástica, adaptativa, desarrollada por Eberhart y Kennedy en 1995, que se basa en analizar procesos naturales. Está relacionada directamente con la capacidad que tienen los individuos para compartir información y aprovecharse de la experiencia acumulada por los otros miembros de la población. De dicho comportamiento se obtuvo un modelo matemático mediante expresiones simples que revelan su verdadero potencial como método de optimización [9]. PSO genera una población con una posición y velocidad iniciales, cuyos miembros podrían ser una posible solución al problema de optimización. Para un problema N-dimensional, la posición y velocidad pueden ser especificados por matrices de tamaño M x N como se describe en las ecuaciones (6) y (7) a continuación:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{M1} & x_{M2} & \dots & x_{MN} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1N} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{M1} & v_{M2} & \dots & v_{MN} \end{bmatrix} \quad (7)$$

donde X y V son las matrices de posiciones y velocidades respectivamente. La población está constituida por un número de partículas M. Cada fila en la matriz X representa la posición de cada partícula en el espacio de búsqueda [9]. En cada

---

<sup>1</sup> PSO es la sigla para Particle Swarm Optimization a la cual se hará referencia de ahora en adelante.

iteración, las partículas memorizan y siguen el rastro de su mejor posición ( $Pbest$ ) y el vector con la mejor posición global de la población ( $Gbest$ ), para actualizar la velocidad de la matriz [9].  $Pbest$  es la posición con el mejor valor local que se ha encontrado, y se puede definir como se observa en la ecuación (8).

La mejor posición global ( $Gbest$ ), es la mejor posición de entre todas las partículas de la mejor población ( $Pbest$ ) y es definida en la ecuación (9).

$$Pbest = \begin{bmatrix} pbest_{11} & pbest_{12} & \dots & pbest_{1N} \\ pbest_{21} & pbest_{22} & \dots & pbest_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ pbest_{M1} & pbest_{M2} & \dots & pbest_{MN} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$Gbest = [gbest_1 \quad gbest_2 \quad \dots \quad gbest_N] \quad (9)$$

Conociendo los resultados de las expresiones (8) y (9), las partículas pueden modificar velocidades y posiciones usando las ecuaciones (10) y (11) descritas a continuación:

$$V_{ij}^{iter+1} = w * V_{ij}^{iter} + C1 * rand( ) * (pbest_{ij} - X_{ij}^{iter}) + C2 * Rand( ) * (gbest_i - X_{ij}^{iter}) \quad (10)$$

$$X_{ij}^{iter+1} = X_{ij}^{iter} + V_{ij}^{iter+1} \quad (11)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, M$  y  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $iter$  es la iteración actual [9];  $w$  es el parámetro de inercia que regula el impacto de las velocidades anteriores en la nueva velocidad de la partícula,  $C_1$  es el parámetro cognitivo que indica la influencia máxima de la mejor experiencia individual de la partícula en su nueva localidad y  $C_2$  es el parámetro social que indica la influencia máxima de la información social, en el nuevo valor de velocidad de la partícula.  $Rand()$  y  $rand()$  son funciones que retornan un número aleatorio en el intervalo  $[0,1]$ , mediante el cual se determina la influencia real de las informaciones individual y social en la nueva velocidad para la partícula [9].

## 2.1. PASOS DEL PSO

Para aplicar PSO se siguen los pasos descritos a continuación [7]:

1. Dar un valor aleatorio e inicial a la posición y a la velocidad de cada una de las partículas de la población.
2. Evaluar la función objetivo para así seleccionar el *pbest* y el *gbest*.
3. Actualizar la posición y la velocidad de cada partícula según las ecuaciones (10) y (11).
4. Evaluar la función objetivo.
5. Comparar el valor actual de la función para cada partícula con el valor al evaluar el *pbest*; si dicho valor es mejor entonces se debe actualizar el *pbest*.
6. Seleccionar la partícula de la iteración actual con el mejor valor de la función objetivo, compararla con el valor al evaluar el *gbest*. En caso que la partícula actual tenga una mejor posición, se debe actualizar el *gbest*.
7. Comparar el valor de la función evaluado en el *gbest* con un criterio de parada; si este se cumple se tendrá solución al problema de optimización, de no ser así se debe volver al paso 3.

## 3. MODIFICACIONES AL PSO

Para resolver ecuaciones con raíces complejas se vió la necesidad de modificar el algoritmo del PSO, y más exactamente, la actualización de las velocidades (10). La nueva ecuación planteada se observa en la ecuación (12).

$$V_{ij}^{iter+1} = w * V_{ij}^{iter} + C1 * rand( ) * real(pbest_{ij} - X_{ij}^{iter}) + C2 * Rand( ) * real(gbest_i - X_{ij}^{iter}) + C1 * rand( ) * imag(pbest_{ij} - X_{ij}^{iter}) * i + C2 * Rand( ) * imag(gbest_i - X_{ij}^{iter}) * i \quad (12)$$

Donde *real(...)* se utiliza para denotar la parte real de lo que encontramos dentro del paréntesis e *imag(...)* la parte imaginaria. El cambio brinda la posibilidad que las partículas se muevan en todo el plano y no solo en una línea recta, lo cual

garantiza su rápida convergencia.

#### 4. EXPERIMENTOS

Los experimentos se realizaron en un computador convencional y un Clúster de computadoras con las siguientes especificaciones técnicas:

1. Computador: Dell XPS 16<sup>2</sup>
  - a. Procesador: Intel Core i5 M430 @ 2.27 GHz, con frecuencia máxima de 2.53 GHz y memoria cache de 3 MB.
  - b. Memoria Ram: 4.0 GB DDR3.
  - c. Sistema Operativo: Windows 7, 64 bits.
  
2. Clúster de computadoras<sup>2</sup>.
  - a. Numero de nodos: 4 cada uno con 2 GB de RAM.
  - b. Procesador: 3.2 GHz Intel Pentium IV cada uno.
  - c. Sistema operativo: Rocks.
  - d. Interfax de red: Gigabit Ethernet.
  - e. Cores por nodo: 2.

En busca de fiabilidad en los resultados, cada experimento se realizó con 3 repeticiones y se definió una precisión de  $1 * 10^{-8}$ . El tiempo medido fue tomado mediante la herramienta Tic Toc y comparado con cronometro para mayor fiabilidad en los resultados.

---

<sup>2</sup> De aquí en adelante se hace referencia a esta máquina como equipo N° 1

<sup>3</sup> De aquí en adelante se hace referencia a esta máquina como equipo N° 2

## 5. RESULTADOS Y ANÁLISIS

### 5.1. SISTEMA DE DOS ECUACIONES

En el Equipo No 1 se implementó el algoritmo para resolver el sistema formado por las ecuaciones (13) y (14).

$$F(x_a, x_b) = x_a * \text{sen}(x_b) + x_b * \cos(x_a) + 10 \quad (13)$$

$$G(x_a, x_b) = x_b * \cos(\text{sen}(x_b)) + x_a * x_b * \cos(x_a) - 2 \quad (14)$$

Los resultados obtenidos se observan en las Tablas 1 a 5 a continuación:

Tabla 1. Ecuaciones 2, 10 Partículas sin Minimización

Exp. <sup>3</sup>	Iter. <sup>4</sup>	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
1	580	39 s	Xa=4.6874929899 + 0.1160956341i  Xb= -1.6154876744 - 1.4136469095i	F=4.0055176953e-009 +7.6049669728e-008i  G= 3.3331062354e-008 +8.7172343233e-008i
2	688	44 s	Xa= -2.1720585069 - 0.3202166493i  Xb=1.5166862926 - 2.0403818821i	F= 7.3751278862e-008 +6.2274218226e-008i  G= -7.1738528451e-009 +5.7452867797e-008i
3	605	40 s	Xa= -4.4445698922 - 0.1721611517i  Xb=1.6266588589 + 1.3725371530i	F=-1.6757084608e-008 - 1.4711595164e-008i  G=2.7735869157e-008 +5.93557607509e-008i
<b>Prom<sup>5</sup></b>	<b>624</b>	<b>41 s</b>		

Fuente: elaboración propia.

<sup>3</sup> Expresión corta que significa experimento de aquí en adelante.

<sup>4</sup> Expresión corta que significa iteraciones de aquí en adelante.

<sup>5</sup> Expresión corta que significa promedio de aquí en adelante.

Tabla 2. Ecuaciones 2, 10 Partículas con Minimización

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
1	573	1 s	Xa= -10.8903817115 Xb=1.1367733976	F= -7.7905113471e-009 G= -3.6300860096e-009
2	718	1 s	Xa= 1.1004315824 + 1.2401276098i Xb=-2.1763718242 - 1.9105615137i	F= 2.291557166e-009 +3.6647034296e-009i G= -1.6044232609e-009 - 9.4583034738e-009i
3	900	1 s	Xa= 0.0857566229 + 1.3036583782i Xb=-3.9512098126 - 1.6028966813i	F=-8.2114901545e-009 +7.9304518508e-010i G=-2.8507476379e-009 +6.9440151407e-009i
<b>Prom</b>	<b>730</b>	<b>1 s</b>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 3. Ecuaciones 2, 100 Partículas sin Minimización

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
1	440	4min 16s	Xa= -4.4445699023 + 0.1721611665i Xb=1.6266588666 - 1.3725371477i	F= -1.3546586075e-009 - 5.7314385238e-008i G= 6.3328170263e-008 +7.0148302500e-008i
2	486	4min 19s	Xa=-2.1976619387 + 0.1400807640i Xb=1.7985527796 - 2.1199359165i	F= -7.1805633439e-008 - 5.0089875137e-008i G= 7.3353934482e-008 +6.0793198031e-008i

3	530	4min 46s	Xa= -2.1976619258 + 0.1400807499i	F=-1.3733451709e-008 - 3.7347791970e-008i
			Xb=1.7985527680 - 2.1199359159i	G=4.8314419132e-008 +5.5744950878e-009i
<b>Prom</b>		<b>485</b>	<b>4 min 27 s</b>	

Fuente: elaboración propia.

Tabla 4. Ecuaciones 2, 100 Partículas con Minimización

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
1	529	1 s	Xa= -2.1720584877 - 0.3202166456i	F= -7.9000379571e-009 - 2.0028386727e-009i
			Xb=1.5166862968 - 2.0403819036i	G= -7.9259194763e-009 +1.4583263486e-009i
2	570	1 s	Xa=-2.1720584891 + 0.3202166452i	F= -2.8736693025e-009 - 3.9621179670e-009i
			Xb=1.5166862967 + 2.0403819024i	G= -8.9971587958e-009 - 1.5918584229e-009i
3	377	1 s	Xa=10.79241561480	F=7.67187557923e-009
			Xb=-1.25325581542	G=9.16991105271e-009
<b>Prom</b>		<b>492</b>	<b>1 s</b>	

Fuente: elaboración propia.

Tabla 5. Ecuaciones 2, 1000 Partículas con Minimización

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
1	409	4 s	Xa= -42.23465262154	F= -5.18435605556e-009

			Xb= 0.23802206697	G=-8.20914891619e-009
2	413	5 s	Xa= -2.1720584896 - 0.3202166466i	F=-5.7514686347e- 009+6.4543450584e-009
			Xb= 1.5166862958 - 2.0403819021i	G= -7.5909130093e- 009+3.9577201516e-009
3	450	5 s	Xa=-2.1976619256 + 0.1400807576i	F= 6.40819663999e-009- 5.15596143557e-009
			Xb= 1.7985527695 - 2.1199359146i	G=-9.5202339345e- 009+2.7501507738e-009
<b>Prom</b>	<b>424</b>	<b>4,66 s</b>		

Fuente: elaboración propia.

Dada la marcada disminución de tiempos aplicando el teorema de minimización, este se hace indispensable al momento de resolver un sistema de grandes dimensiones, ya que convierte al problema de solución de un sistema de ecuaciones en uno de optimización. Es por ello que de aquí en adelante todos los experimentos se realizan aplicando dicho concepto.

## 5.2. SISTEMA DE TRES ECUACIONES

En el Equipo N° 1 se implementaron las ecuaciones (15) a (17) que forman el sistema mostrado a continuación:

$$F(x_a, x_b, x_c) = x_a * \text{sen}(x_b) + x_b * \cos(x_a * \cos(x_c)) + 10 \quad (15)$$

$$G(x_a, x_b, x_c) = x_b * \cos(\text{sen}(x_c)) + x_a * x_b * \cos(x_a) - 2 \quad (16)$$

$$H(x_a, x_b, x_c) = x_c * \text{sen}(x_a * x_b) + x_a * \cos(\text{sen}(x_b * x_c)) \quad (17)$$

En las Tablas 6 a 9 se observan los experimentos realizados para diferentes cantidades de partículas.

Tabla 6. Ecuaciones 3, 10 Partículas con Minimización

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
1	1893	1 s	Xa=10.917010158697522	F= -2.282e-009
			Xb=1.089042159846451	G=-2.443e-009
			Xc=12.362999348347607	H=4.994e-009
2	940	1 s	Xa= 2.2378836741 + 0.2674436070i	F= 2.8908667459e-008 +1.7333544821e-008i
			Xb= -1.3425202209 + 2.3063841401i	G= 1.6992223628e-008 +7.8898343414e-008i
			Xc= -0.0130579524 - 0.0344497469i	H= -1.1536850141e-008 +3.3492023710e-008i
3	1393	1 s	Xa= -1.2408130803 - 1.0424519401i	F= 1.1779629716e-008 +2.0949404655e-008i
			Xb= 1.0863559813 - 1.5380855701i	G= 3.9491023784e-009 +6.0179067063e-008i
			Xc= -0.0122913508 - 1.2263703830i	H= 3.9866814294e-008 +9.0750390535e-008i
<b>Prom</b>	<b>1409</b>	<b>1 s</b>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 7. Ecuaciones 3, 100 Partículas con Minimización

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
1	568	1 s	Xa=10.755693636602013	F= 8.221679337339083e-009
			Xb=-1.284970605223318	G=2.53547249862516e-009
			Xc= 6.237424417768746	H= 4.133936748473843e-009

2	717	1 s	Xa= 2.4512730100 - 0.0648831419i	F= 1.8292551474e-008 - 8.3214273250e-009i
			Xb= -1.1093927782 - 0.0988399888i	G= 9.3303536008e-008 +7.7906614979e-009i
			Xc= 1.5634336306 - 0.9331561023i	H= -1.7041010159e-008 - 4.23858528276e-008i
3	583	1 s	Xa= -1.3465116829 + 0.5996201616i	F= -9.2583363198e-010 - 9.8640220880e-008i
			Xb= 0.9940188393 + 2.4711941100i	G= 1.0522205773e-008 - 5.1706977366e-008i
			Xc= -0.1151164387 - 0.1671659400i	H= 5.8283171622e-008 - 3.4047833885e-008i
<b>Prom</b>	<b>623</b>	<b>1 s</b>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 8. Ecuaciones 3, 1000 Partículas con Minimización

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
1	444	8 s	Xa= -2.0654697407 + 0.7532966750i	F= -5.3265669209e-008 - 2.8687456188e-008i
			Xb= 1.5475836400 + 1.2704449768i	G= 6.1043330390e-009 +5.1669131640e-008i
			Xc= 0.8821609601 - 1.3153401795i	H= 1.47271546070e-008 +9.4868700673e-008i
2	451	8 s	Xa= -1.2408130755 - 1.0424519318i	F= -1.2464028032e-008 - 4.9189765594e-008i
			Xb= 1.0863559652 - 1.5380855961i	G= 6.5529017768e-009 +4.7368539313e-008i
			Xc= -0.0122913453 - 1.2263703750i	H= -7.6163943152e-008 +4.4294788837e-008i
3	469	8 s	Xa= -1.1894475461 + 1.1296722712i	F= -6.8076172255e-008 - 5.7646278972e-008i

$$\begin{aligned}
 X_b &= 0.9540416674 + 0.9449652259i & G &= -5.1895395980e-008 + 1.7910843475e-008i \\
 X_c &= -0.0360042526 - 1.3778761879i & H &= 3.2410787415e-008 + 5.7182727442e-009i
 \end{aligned}$$

---

**Prom      455      8 s**

Fuente: elaboración propia.

**Tabla 9. Ecuaciones 3, 3000 Partículas con Minimización**

---

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
1	411	20 s	$X_a = -1.3465116917 - 0.5996201357i$	$F = 4.3778499048e-008 - 8.0767543320e-008i$
			$X_b = 0.9940188843 - 2.4711941107i$	$G = 2.1513748116e-008 - 6.1386721483e-008i$
			$X_c = -0.1151164266 + 0.1671659329i$	$H = 2.2062791372e-008 - 8.4827589397e-009i$
2	414	20 s	$X_a = -1.3465116751 - 0.5996201295i$	$F = -2.4434637425e-008 - 4.8304380496e-008i$
			$X_b = 0.9940188765 - 2.4711941354i$	$G = -5.3548872891e-008 - 7.2668393969e-008i$
			$X_c = -0.1151164373 + 0.1671659274i$	$H = 1.7900153804e-008 + 3.8188697038e-008i$
3	548	27 s	$X_a = -3.0865839664 - 0.9957920599i$	$F = 9.8311190300e-009 + 2.3889860812e-008i$
			$X_b = 0.3017411672 - 0.1538180578i$	$G = 2.7768161104e-008 + 9.1488034537e-008i$
			$X_c = -2.3558871522 - 1.0721956346i$	$H = -9.2700593424e-008 - 2.0018444125e-008i$
<b>Prom</b>	<b>458</b>	<b>22,33 s</b>		

---

Fuente: elaboración propia.

De los resultados se observa que el incremento en la cantidad de partículas representa una mejora en la cantidad de iteraciones, disminuyendolas, debido al aumento en la cantidad de información compartida entre partículas. Sin embargo cuando la cantidad supera las 1000 este hecho deja de ser favorable ya que el tiempo se incrementa sustancialmente y se necesita aproximadamente igual cantidad de iteraciones.

### 5.3. SISTEMA DE CINCO ECUACIONES

En el Equipo N° 1 se implementaron las ecuaciones (18) a (22).

$$F(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e) = x_a * \text{sen}(x_b) + x_c^{x_d} - 32 * x_e \quad (18)$$

$$G(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e) = 3 * x_a + 8 * x_b + x_c + x_c * \cos(x_b) - x_d + x_e - 143 \quad (19)$$

$$H(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e) = x_c * e^{x_a} + 3 * x_b + 6 * x_a + 100 + 3 * x_d + 10 * x_e - 9 + x_d^{\cos(x_e)} \quad (20)$$

$$I(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e) = x_a + 8 * x_b - 3 * x_c + x_d + 1 - 67 * \cos(x_b) + 5 * x_a^{x_d} \quad (21)$$

$$J(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e) = 3x_a - 6 * x_b + 8 * x_c - x_d * \text{sen}(x_d) + 1 \quad (22)$$

En las Tablas 10 a 12 se observan los experimentos realizados para diferentes cantidades de partículas. De aquí en adelante solo se buscará la respuesta compleja.

Tabla 10. Ecuaciones 5, 10 Partículas con Minimización

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
			Xa= 0.7051721600 - 0.5506096212i	F= 9.10721755786e-008 - 2.7675012504e-008i
1	8717	3 s	Xb= 9.3108375079 - 2.1812272869i	G= -4.2832724034e-008 +6.2305947068e-008i
			Xc= -11.1117028336 -	H= 8.1488906289e-008

			7.8293172681i	+5.5379792308e-008i
			Xd= -24.0184236428 + 2.5195973351i	I= -2.4946473332e-008 +8.2942111845e-008i
			Xe= 0.0859784960 + 0.0869483560i	J= 1.3170847524e-008 - 7.1173644756e-008i
			Xa= 0.9010426976 - 2.5549804799i	F= -2.4421740186e-008 - 6.8860336988e-008i
			Xb= 8.0196175228 - 1.1627655589i	G= -6.2974656601e-008 - 7.1980167604e-008i
2	2724	1 s	Xc= 27.3026436355 - 37.3264351887i	H= -6.2010384827e-008 +5.1537514700e-008i
			Xd= -3.5454658212 - 4.7593944907i	I= 3.5227852855e-009 - 4.3619332329e-008i
			Xe= 0.0677568460 - 0.1315619409i	J= 8.3611809032e-008 - 1.1836561953e-008i
			Xa= 0.4258045313 - 5.0253757667i	F= -3.8404962932e-008 - 4.4152377754e-008i
			Xb= 7.9215587328 + 1.1316100959i	G= 3.4654753733e-008 +9.3554692882e-008i
3	2526	1 s	Xc= 17.7095929914 +31.2190069696i	H=-3.0148044061e-009 +6.0320312079e-008i
			Xd= -19.4130567504 - 3.2254582879i	I= 7.8139658367e-008 +3.1166961403e-008i
			Xe= 0.0079927059 - 0.2694261176i	J= -7.2678119523e-008 +1.3231897356e-008i
<b>Prom</b>	<b>4656</b>	<b>1,67 s</b>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 11. Ecuaciones 5, 100 Partículas con Minimización

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
------	-------	--------	-----------	---------------------

1	1033	3 s	Xa= 0.3838079626 - 6.1948785921i	F= 1.9600819079e-008 - 6.5733255283e-008i
			Xb= 7.9225469920 + 1.0489956141i	G= -3.1752662721e-009 - 5.4446505970e-008i
			Xc= 13.4409373166 +27.7778222079i	H= -4.6515680197e-009 +6.7430559358e-008i
			Xd= -31.7974610481 - 2.5669947034i	I= -7.6025488127e-008 +5.1394792422e-008i
			Xe= 0.0025668960 - 0.3105349028i	J= 3.7384296547e-008 +7.5564230428e-009i
2	1491	4 s	Xa= -2.6671982103 + 0.0325773309i	F= -3.8680267878e-009 +6.6366637602e-008i
			Xb= 13.3200931137 - 0.0037662512i	G= 7.0184981382e-008 - 5.4856315101e-008i
			Xc= 9.0826420339 - 0.0616164972i	H= -9.7342830685e-008 +2.2646543973e-008i
			Xd= -28.7924649712 - 0.0146063954i	I= -1.3871700024e-008 - 2.5433926202e-008i
			Xe= -0.0570387883 + 0.0009255994i	J= -6.4308931513e-008 +4.8094110361e-008i
3	828	2 s	Xa= 0.9898393198 - 4.2472245815i	F= -9.2451561962e-009 - 3.4653826475e-008i
			Xb= 7.7933872075 + 1.2081746612i	G= -8.1113647354e-008 - 2.4769306606e-009i
			Xc= 19.7815460363 +34.1991052177i	H= 6.0085049824e-008 +3.9826611342e-008i
			Xd= -3.6149446356 + 4.5617860224i	I= -8.1250664863e-008 - 3.5545753008e-008i
			Xe= 0.0685398345 - 0.2386670420i	J= -7.5069181094e-008 +1.1246157783e-008i
<b>Prom</b>	<b>1117</b>	<b>3 s</b>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 12. Ecuaciones 5, 300 Partículas con Minimización

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
1	825	6 s	$Xa= 2.2449516463 - 3.7341905832i$	$F= -3.8801642343e-008 - 6.83399126178e-008i$
			$Xb= 13.0650469980 + 0.4456976578i$	$G= -1.6224888100e-008 - 9.6703322239e-008i$
			$Xc= 11.8494402503 + 4.1722507485i$	$H= 8.5727780430e-009 - 1.3196537196e-008i$
			$Xd= -7.4348952038 - 2.0739670195i$	$I= -7.4121829817e-008 - 2.4495753639e-008i$
			$Xe= 0.0841438792 - 0.0330677414i$	$J= -2.5254713876e-009 - 3.3119061271e-008i$
2	902	7 s	$Xa= -2.4117873474 + 1.2837696083i$	$F= -2.0134282686e-008 + 8.9805932468e-008i$
			$Xb= 11.2504391761 + 0.8036326110i$	$G= -4.2347338081e-008 + 8.7340031207e-008i$
			$Xc= 12.5919893650 - 17.5037176633i$	$H= 5.7276146492e-008 - 7.2866233047e-009i$
			$Xd= -28.1695873552 - 2.3276121556i$	$I= -1.0350740699e-008 + 3.1859672745e-008i$
			$Xe= 0.0887483407 - 0.0690150874i$	$J= 5.1238512100e-008 + 6.0017129044e-008i$
3	819	6 s	$Xa= 2.2449516448 + 3.7341905926i$	$F= 5.4868027011e-008 - 7.4135003914e-008i$
			$Xb= 13.0650470039 - 0.4456976635i$	$G= 2.9225383003e-008 - 7.2263476314e-008i$
			$Xc= 11.8494402425 - 4.1722508546i$	$H= -1.4341372534e-009 - 3.0395197470e-010i$
			$Xd= -7.4348951871 + 2.0739670331i$	$I= 6.6720902247e-008 - 4.05145164987e-008i$
			$Xe= 0.0841438774 + 0.0330677466i$	$J= -8.3087812186e-009 - 7.5232996721e-008i$
<b>Prom</b>	<b>849</b>	<b>6,33 s</b>		

Fuente: elaboración propia.

A medida que se incrementa la cantidad de partículas en un intervalo, se disminuye la cantidad de iteraciones necesarias para encontrar una solución a un sistema de ecuaciones determinado. De igual manera, si la distribución de las posiciones iniciales de las partículas se encuentra muy distante entre si, la cantidad de iteraciones para encontrar una solución a un sistema de ecuaciones tiende a incrementarse.

#### 5.4. SISTEMA DE DIEZ ECUACIONES

En el Equipo N° 1 se implementaron las ecuaciones (23) a (32) que se observan a continuación:

$$F(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h, x_i, x_j) = x_a * \text{sen}(x_b) + x_c^{x_d} - x_e * \tan(x_f) + 54 * x_g - 35 * x_h + x_i - 16 * x_j + 32 \quad (23)$$

$$G(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h, x_i, x_j) = 3 * x_a + 8 * x_b + x_c - x_d + x_e - x_f + 7 * x_g - 8 * x_h + x_i + x_j - 89 + x_c * \cos(x_b) - 54 \quad (24)$$

$$H(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h, x_i, x_j) = x_c * e^{x_a} + 3 * x_b + 6 * x_a + 91 + 3 * x_d + 10 * x_e + 3 * x_f - x_j + x_d^{\cos(x_e)} \quad (25)$$

$$I(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h, x_i, x_j) = x_a + 8 * x_b - 3 * x_c + x_d + 1 + x_g - x_i + 8 * x_j - 67 * \cos(x_b) + 5 * x_a^{x_d} \quad (26)$$

$$J(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h, x_i, x_j) = x_f + 3 * x_a - 6 * x_b + 8 * x_c + x_g - 3 * x_i - x_d * \text{sen}(x_d) + 1 \quad (27)$$

$$K(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h, x_i, x_j) = x_g + x_a + 3 * x_b - 8 * x_i + x_c * \tan\left(\frac{x_h}{x_f}\right) + 54 \quad (28)$$

$$L(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h, x_i, x_j) = x_h + 3 * x_j - 6 * x_e + x_d - x_a + x_j^{\frac{x_i}{x_b}} \quad (29)$$

$$M(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h, x_i, x_j) = x_i + 3 * x_b + 8 * x_c - x_j + x_i + \text{sen}(x_a - x_e) - 98 \quad (30)$$

$$N(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h, x_i, x_j) = 4 * x_j - 8 * x_i + 32 * x_a - x_b + x_c * x_e^{\frac{x_i}{x_b}} \quad (31)$$

$$O(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h, x_i, x_j) = x_d + x_c - 10 * x_f + x_g - x_c. \quad (32)$$

Se resolvió el sistema con 10 y 100 partículas, y se obtuvieron los resultados de las Tablas 13 y 14.

Tabla 13. Ecuaciones 10, 10 Partículas con Minimización

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
1	225530	2min 6s	Xa= 0.2869962725 - 2.1041945272i	F= -1.4221868128e-009 - 6.4902394570e-010i
			Xb= 4.7990818202 - 3.2133826909i	G= 1.3056933312e-010 +4.7546073745e-009i
			Xc= 0.4098123427 +21.4135754979i	H=-2.8064942037e-008 +1.1962965471e-008i
			Xd=-10.1409223215 + 3.6214779146i	I= 1.0302371315e-008 - 8.9806053705e-009i
			Xe= -1.2394890093 + 2.9970392956i	J= -4.2983572257e-010 +4.5588421926e-011i
			Xf= -29.8487482171 + 0.0280325679i	K= -9.7603727767e-008 +2.1755827806e-008i
			Xg= -19.707825819 - 3.5934453856i	L= -3.7111292261e-008 +1.5810656369e-008i
			Xh= 3.4569914375 + 1.2193003797i	M= -2.7868054531e-009 +1.0186655963e-009i
			Xi= 0.1021549858 - 2.2301162421i	N= 3.0013061369e-008 - 2.8706566013e-009i
			Xj= -0.9539866997 + 3.6760428410i	O= 7.5620732565e-008 - 3.8899848676e-008i
2	285625	2min 40s	Xa= -0.2073446593 - 0.2127501157i	F= 2.9558577808e-012 - 5.0424091569e-009i
			Xb= -0.7459428041 + 5.3950727330i	G= -2.0055495042e-009 - 2.5310527008e-009i
			Xc= 3.2144999467 - 4.5150053330i	H= -2.5838682305e-009 +1.2715958952e-008i
			Xd= -9.5407470407 - 2.7648975917i	I= -1.0051053323e-009 +1.6343619791e-009i
			Xe= -12.150323543 + 0.7952325161i	J= -2.6236495643e-008 - 4.2772768438e-008i

			Xf= -9.9734761226 + 1.3451132319i	K= 3.4881928456e-009 - 1.7299122135e-009i
			Xg= -0.4327290362 + 4.1100108654i	L= -1.3959805755e-008 - 7.7299304735e-009i
			Xh= 46.316319834 - 8.6020086359i	M= -8.8813990828e-008 +4.5935098281e-008i
			Xi= 2.4154503285 + 4.6034246117i	N= 4.4300634272e-009 +1.5817207100e-008i
			Xj= -93.0987716965 +19.9128811903i	O= 4.5633920198e-008 +4.1723759558e-008i
<hr/>				
			Xa= 0.5590232188 + 0.4760165052i	F= -1.9354978065e-008 +6.1001514950e-009i
			Xb= 14.6344109285 - 1.2992180908i	G= 5.5632654039e-009 - 1.8421673076e-009i
			Xc= 44.8588708065 + 2.3941151276i	H= 3.1936338019e-009 - 5.7525113561e-009i
			Xd= -14.464620127 + 3.5993793298i	I= -1.1375078657e-009 - 1.5120065200e-009i
			Xe= -0.3053526513 - 1.0170282077i	J= 5.5438817981e-009 +1.3455867531e-009i
3	42493	24 s	Xf= 0.3305794604 - 3.4402417596i	K= -4.5457291264e-009 - 9.9210146765e-009i
			Xg= 14.7951995232 - 7.0396210208i	L= -9.9313533619e-008 - 1.0829139363e-008i
			Xh= -0.2091303816 + 1.3612751840i	M= -2.9952929025e-008 - 9.5008547473e-008i
			Xi= 5.6849163117 - 1.5821511175i	N= 2.8995323475e-008 - 1.6339356534e-009i
			Xj= 3.9101689335 - 3.2962812953i	O= -6.4065844185e-008 +6.8598465575e-008i

---

Prom 184549 1min 43s

Fuente: elaboración propia.

Tabla 14. Ecuaciones 10, 100 Partículas con Minimización

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
1	24448	1min 52s	Xa= -0.5277680826 - 1.5283098689i	F= -4.5448445007e-010 - 2.8121434070e-009i
			Xb= 7.7962005980 - 1.4231054183i	G= 2.5054021080e-009 +1.1053923998e-008i
			Xc= 14.4156920826 - 6.3345255965i	H=-6.6833618639e-009 - 6.0228955156e-010i
			Xd= -8.9800859158 - 2.3314054570i	I=-4.9275434164e-009 +1.2331246207e-008i
			Xe= -2.4629686688 + 3.2381025794i	J= -2.1878285850e-009 - 2.5049473606e-010i
			Xf= -17.2730895444 - 0.0029571587i	K= -9.1274046099e-009 +1.1580755910e-008i
			Xg= -8.2930036068 + 2.3284482007i	L= -1.9023227438e-009 - 5.3774200648e-009i
			Xh= -16.8858945561 + 5.2451585585i	M= -1.5188561520e-010 +2.8231426086e-009i
			Xi= 3.8674931214 - 2.7606840329i	N=-4.2459404881e-009 - 4.1239260895e-009i
Xj= 2.4340896095 + 4.8108047237i	O= 2.1884927648e-008 - 9.7565134638e-008i			
2	27819	2min 6s	Xa= -0.1398231948 - 5.7226507271i	F= -4.0774494892e-009 - 1.5212904714e-008i
			Xb= 3.4180969580 + 0.5623452789i	G= 2.3155244833e-008 - 8.0999829066e-009i
			Xc= 12.1887290118 + 0.0513514004i	H= 5.2514437243e-010 +1.1714968551e-008i
			Xd= -14.2888829100 + 2.5645488408i	I= -6.6222396493e-008 +2.2629874402e-008i
			Xe= -7.8191513632 - 0.9036340461i	J= -5.2261981409e-009 - 9.1110452516e-009i

			Xf= 9.6545089121 +10.9335769552i	K= -7.9477050718e-008 - 5.9366032257e-008i
			Xg= 23.9433918121 + 8.3690281663i	L= -2.7202290198e-008 +4.1010572716e-009i
			Xh= 3.1292222917 + 4.2197114099i	M= -2.6302018341e-009 - 2.5823680971e-009i
			Xi= 5.4528907347 + 0.5973655057i	N= -7.0170074196e-009 - 1.2696801832e-008i
			Xj= -3.6676211826 - 7.8261084149i	O= -1.0002962014e-008 +5.1839311732e-008i
			Xa= -0.4899906343 - 1.4390721752i	F= 1.2253373427e-008 - 1.1770282526e-009i
			Xb= 1.2105178720 - 2.4443423591i	G= -2.9848820304e-008 - 3.3414693234e-010i
			Xc= -0.5709205322 - 17.0521974483i	H= 1.46152956404e-009 +1.3261432841e-008i
			Xd= -3.8941329032 - 3.8089631076i	I= -1.4613814202e-008 - 2.7360129613e-008i
			Xe= -2.4547751166 + 3.8140058133i	J= 9.7342578442e-011 - 1.4803077874e-008i
3	19758	1min 29s	Xf= 7.6648459103 - 3.1160236655i	K= 2.8504723914e-008 +4.5085045918e-008i
			Xg= 11.5589788969 + 0.6929393892i	L= 5.0908277593e-008 - 1.9243771021e-009i
			Xh= 2.4422089736 - 4.5840164960i	M= -5.2479123269e-009 +1.2282612261e-008i
			Xi= 1.4352243372 - 1.8927927261i	N= -3.9155239051e-009 - 2.2080389073e-008i
			Xj= -3.8122143647 + 8.5176659594i	O= 8.3430992670e-008 - 5.2982098708e-008i
<b>Prom</b>			<b>24008</b>	<b>1min 49s</b>

Fuente: elaboración propia.

Al plantearse un sistema de 10 ecuaciones no lineales y más de 100 partículas, las exigencias computacionales se incrementan, creando la necesidad de buscar

una mayor capacidad de computo como la ofrecida por los son Clúster de computadoras.

### 5.5. SISTEMA DE CINCO ECUACIONES EN CLÚSTER

En el Equipo N° 2 se implementaron las ecuaciones (18) a (22) y se obtuvieron los resultados que se observan en las Tablas 15 a 21.

Tabla 15. Ecuaciones 5, 10 Partículas en Clúster con 1 Nodo

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
1	4035	3 s	$X_a = -11.574141781 + 3.4858151623i$	$F = -7.2536927576e-009 - 9.9687880172e-008i$
			$X_b = 13.9638148386 - 0.8560284035i$	$G = -1.3125230681e-008 - 8.2813134128e-008i$
			$X_c = 23.1830980801 - 23.3876863617i$	$H = 5.3303093495e-008 + 7.0629623039e-008i$
			$X_d = -15.531397776 - 3.1494114605i$	$I = 4.9816504407e-008 - 6.7355990646e-008i$
			$X_e = -0.4768527012 + 0.2092428795i$	$J = 5.0939334528e-008 - 2.7606205322e-008i$
2	2299	2 s	$X_a = 1.2102749225 + 2.6168831967i$	$F = -1.0548528939e-008 + 4.8998360036e-008i$
			$X_b = 7.5854511090 + 1.3809625506i$	$G = -8.7426151651e-008 + 4.8007251507e-008i$
			$X_c = 28.593914079 + 17.7757190194i$	$H = -3.8980967343e-008 - 4.6980622948e-008i$
			$X_d = -2.0682536419 - 4.5459029115i$	$I = 4.5167411145e-008 + 8.1517299577e-008i$
			$X_e = 0.0366512007 + 0.1857339627i$	$J = 7.7243043961e-008 - 2.2837127744e-009i$
3	2750	2 s	$X_a = 0.9010426976 - 2.5549804799i$	$F = -2.4421740186e-008 - 6.8860336988e-008i$

Xb= 8.0196175228 - 1.1627655589i	G= -6.2974656601e-008 - 7.1980167604e-008i
Xc= 27.3026436355 -37.3264351887i	H= -6.2010384827e-008 +5.1537514700e-008i
Xd= -3.5454658212 - 4.7593944907i	I= 3.5227852855e-009 - 4.3619332329e-008i
Xe= 0.0677568460 - 0.1315619409i	J= 8.3611809032e-008 - 1.1836561953e-008i

---

Prom            3028            2,33 s

Fuente: elaboración propia.

Tabla 16. Ecuaciones 5, 10 Partículas en Clúster con 2 Nodos

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
1	2338	2 s	Xa= -0.1372474005 - 6.0322187982i	F= -4.0762321907e-008 +7.9807525921e-008i
			Xb= 7.8816357045 + 1.0769410779i	G= -8.1569581312e-008 - 4.1634194758e-008i
			Xc= 12.942531804 + 30.7572802924i	H= 1.9613466407e-008 +6.4632508234e-008i
			Xd= -28.123077637 + 2.7876001898i	I= -3.3402434152e-008 +8.0774881894e-008i
			Xe= -0.0137864647 - 0.3085325735i	J= -5.6520349290e-008 +5.4770680435e-008i
2	3217	2 s	Xa= 2.2449516448 + 3.7341905926i	F= 5.4868027011e-008 - 7.4135003914e-008i
			Xb= 13.0650470039 - 0.4456976635i	G= 2.9225383003e-008 - 7.2263476314e-008i
			Xc= 11.8494402425 - 4.1722508546i	H= -1.4341372534e-009 - 3.0395197470e-010i
			Xd= -7.4348951871 + 2.0739670331i	I= 6.6720902247e-008 - 4.05145164987e-008i
			Xe= 0.0841438774 + 0.0330677466i	J= -8.3087812186e-009 - 7.5232996721e-008i

			$Xa= 1.5620683893 +13.4670887977i$	$F= -5.9312736056e-008 - 7.8986293062e-008i$
			$Xb= 7.6949193651 - 1.0935765594i$	$G= -5.3471985950e-008 - 4.0298353543e-008i$
3	2572	2 s	$Xc= 2.9489058377 -26.9090560642i$	$H= 4.1469476741e-008 - 4.9574467198e-008i$
			$Xd= -37.658586590 + 2.2058583702i$	$I= -2.6358108585e-008 - 7.1519011158e-008i$
			$Xe= 0.1683282652 + 0.6795307942i$	$J= -2.4495527384e-008 - 1.3277116295e-008i$

---

Prom            2709            2 s

Fuente: elaboración propia.

Tabla 17. Ecuaciones 5, 10 Partículas en Clúster con 3 Nodos

---

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
			$Xa= 0.1282948558 - 4.8168477027i$	$F= 1.5466732783e-008 +9.4456823696e-008i$
			$Xb= 8.3751422936 - 1.0710733537i$	$G= -3.1231280673e-008 - 9.3505207133e-008i$
1	3654	3 s	$Xc= 28.0392808454 -28.4980666709i$	$H= -5.1781576360e-008 - 3.6438175144e-008i$
			$Xd= -38.405031983 + 2.7269596272i$	$I= 3.0136099838e-008 - 5.0815799568e-008i$
			$Xe= 0.1021939708 - 0.2102891254i$	$J= 7.0922311579e-008 - 1.1964999658e-008i$
			$Xa= 0.9010426966 + 2.5549804809i$	$F= 5.0046845779e-008 +7.6814728800e-008i$
			$Xb= 8.0196175235 + 1.1627655589i$	$G= -9.1701636507e-008 - 3.5442916158e-008i$
2	2550	2 s	$Xc= 27.302643677 +37.3264351739i$	$H= -1.1597919514e-008 - 2.9462870366e-008i$
			$Xd= -3.5454658201 + 4.7593944911i$	$I= -3.5623308077e-008 +8.2300925512e-008i$

			$X_e = 0.0677568437 + 0.1315619407i$	$J = -1.3080637018e-008 + 4.06891444498e-008i$
			$X_a = -0.1372474176 - 6.0322188060i$	$F = 5.9995282797e-008 - 6.2171569226e-008i$
			$X_b = 7.8816357055 + 1.0769410794i$	$G = 8.2568853088e-008 - 5.3896563657e-008i$
3	2970	3 s	$X_c = 12.942531818 + 30.7572804022i$	$H = 8.6431697355e-009 - 8.2834687998e-008i$
			$X_d = -28.123077638 + 2.7876001935i$	$I = 3.7382080542e-008 - 6.9999600782e-008i$
			$X_e = -0.0137864690 - 0.3085325699i$	$J = -4.4422094447e-008 + 3.1639615372e-009i$
<b>Prom</b>			<b>3058</b>	<b>2,67 s</b>

Fuente: elaboración propia.

Tabla 18. Ecuaciones 5, 10 Partículas en Clúster con 4 Nodos

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
			$X_a = 0.3722521726 - 4.4802755543i$	$F = -9.2703024701e-009 - 6.2996498684e-008i$
			$X_b = 7.8806420832 + 1.1310728534i$	$G = -4.7006750492e-008 - 7.8878798604e-008i$
1	3572	3 s	$X_c = 17.3004023524 + 33.6829165654i$	$H = -5.6352838840e-008 - 3.2422773355e-008i$
			$X_d = -15.571795734 + 3.5076919078i$	$I = -9.7586761912e-008 - 1.6133230282e-008i$
			$X_e = 0.0147139360 - 0.2398767178i$	$J = -2.0035088255e-008 + 4.8922117912e-008i$
			$X_a = 0.3838079634 + 6.1948786017i$	$F = -5.7142762716e-008 - 5.9558418641e-008i$
2	3400	3 s	$X_b = 7.9225469908 - 1.0489956145i$	$G = -2.5578124507e-008 - 9.6165717167e-008i$
			$X_c = 13.4409372199 - 27.7778222274i$	$H = 3.3855009463e-008 + 6.7293625783e-008i$

			$X_d = -31.797461044 + 2.5669947032i$	$I = 8.0641592959e-008 - 4.0193143036e-008i$
			$X_e = 0.0025668988 + 0.3105349073i$	$J = 6.6515632113e-008 + 1.6892528265e-008i$
			$X_a = 0.9383674408 + 2.1299016662i$	$F = 1.4610113119e-008 + 9.5705505743e-008i$
			$X_b = 4.6842604783 - 1.4636484313i$	$G = 7.8593998865e-008 + 2.5040030494e-008i$
3	2053	2 s	$X_c = 15.0954367479 + 44.1193856691i$	$H = 5.2103377168e-008 + 8.3392221129e-008i$
			$X_d = 1.5293410296 + 4.9835891637i$	$I = 6.3720266154e-008 - 3.2842034019e-008i$
			$X_e = -0.0839990018 - 0.1311891326i$	$J = -6.3679550522e-009 + 9.0587263912e-008i$
<b>Prom</b>			<b>3008</b>	<b>2,67 s</b>

Fuente: elaboración propia.

Implementar un algoritmo en un clúster de computadoras, no necesariamente significa una mejora en tiempos de cómputo, debido a que este hecho depende principalmente de que el algoritmo sea paralelizable.

Por lo anteriormente expuesto, se puede notar que al incrementar la cantidad de nodos del clúster los tiempos de ejecución se mantienen aproximadamente constantes.

Tabla 19. Ecuaciones 5, 100 Partículas en Clúster con 1 Nodo

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
1	1406	9 s	$X_a = 1.5620683893 + 13.4670887977i$	$F = -5.9312736056e-008 - 7.8986293062e-008i$
			$X_b = 7.6949193651 -$	$G = -5.3471985950e-008 -$

			1.0935765594i	4.0298353543e-008i
			Xc= 2.9489058377 - 26.9090560642i	H= 4.1469476741e-008 - 4.9574467198e-008i
			Xd= -37.658586590 + 2.2058583702i	I= -2.6358108585e-008 - 7.1519011158e-008i
			Xe= 0.1683282652 + 0.6795307942i	J= -2.4495527384e-008 - 1.3277116295e-008i
			Xa= 2.1748856556 + 3.7819612240i	F= -2.4107186469e-008 - 9.2254759387e-010i
			Xb= 13.0555662362 - 0.4890877099i	G= -3.3398706023e-008 +9.2266788876e-008i
2	1010	6 s	Xc= 10.6706908167 - 6.0760158965i	H= -1.8347943609e-008 - 2.9203090612e-008i
			Xd= -9.2500755650 - 2.0773835956i	I= -6.4751284166e-008 +2.6011808146e-008i
			Xe= 0.0889169967 + 0.0317875694i	J= -1.0937544203e-008 - 8.2479523655e-008i
			Xa= 2.2240436425 + 3.6551785361i	F= 6.8890952054e-008 +1.9952655528e-008i
			Xb= 13.1217107908 - 0.4266167462i	G= 9.4233818970e-008 +3.0268466178e-008i
3	932	6 s	Xc= 14.6111070556 - 4.0165986732i	H= -3.0596110534e-008 +1.7009007536e-008i
			Xd= -2.1670686532 + 3.2345416613i	I= 6.3122860714e-008 +6.4791462745e-008i
			Xe= 0.0824977102 + 0.0398314222i	J= 8.1447666389e-009 - 8.7410590766e-008i
<b>Prom</b>	<b>1116</b>	<b>7 s</b>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 20. Ecuaciones 5, 100 Partículas en Clúster con 4 Nodos

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
------	-------	--------	-----------	---------------------

1	1073	7 s	Xa= -11.574141788 + 3.4858151158i	F= -9.0177088907e-008 +1.1203553640e-009i
			Xb= 13.9638148414 - 0.8560284002i	G= -8.3168458787e-008 +2.2617953732e-008i
			Xc= 23.1830982292 - 23.3876863023i	H= 9.2995451340e-008 - 3.0521420058e-008i
			Xd= -15.531397769 - 3.1494114618i	I= -8.0684559770e-008 +5.2336307784e-009i
			Xe= -0.4768526986 + 0.2092428728i	J= -2.0767558340e-008 - 8.1031146237e-009i
2	939	6 s	Xa= 2.2449516481 + 3.7341905928i	F= 4.0838100457e-008 - 5.5286711209e-008i
			Xb= 13.0650470009 - 0.4456976637i	G= -5.1450456340e-008 - 7.7063405657e-008i
			Xc= 11.8494402060 - 4.1722508459i	H= 1.7357242754e-008 - 3.7843606027e-008i
			Xd= -7.4348951792 + 2.0739670253i	I= 5.44094595115e-008 - 1.1836806320e-009i
			Xe= 0.0841438777 + 0.0330677456i	J= 7.8112915247e-008 - 1.9395564266e-008i
3	983	7 s	Xa= 2.2449516436 + 3.7341905934i	F= 7.2185787126e-008 - 5.0185442246e-008i
			Xb= 13.0650470044 - 0.4456976643i	G= 4.0825170800e-008 - 8.8371622464e-008i
			Xc= 11.8494402479 - 4.1722508625i	H= 8.6591715132e-008 - 1.8414991310e-008i
			Xd= -7.4348951834 + 2.0739670381i	I= 5.6743571044e-008 - 5.8111446019e-008i
			Xe= 0.0841438769 + 0.0330677459i	J= 5.2848783128e-009 +6.4586277659e-008i
<b>Prom</b>	<b>998</b>	<b>4,66 s</b>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 21. Ecuaciones 5, 1000 Partículas en Clúster con 4 Nodos

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
1	647	39 s	$X_a = 2.2449516499 + 3.7341905866i$	$F = -2.8481523806e-008 + 5.7738451131e-008i$
			$X_b = 13.0650469983 - 0.4456976616i$	$G = -8.9964004246e-008 + 2.7700457261e-008i$
			$X_c = 11.8494401963 - 4.1722507786i$	$H = 3.3100064911e-008 + 3.7518764096e-008i$
			$X_d = -7.4348951904 + 2.0739670173i$	$I = 1.7868227434e-008 - 5.7812462741e-008i$
			$X_e = 0.0841438795 + 0.0330677417i$	$J = -6.5719174103e-008 + 6.0693988502e-008i$
2	691	42 s	$X_a = 2.1748856529 + 3.7819612338i$	$F = -1.9370911541e-008 + 3.8400138624e-009i$
			$X_b = 13.0555662407 - 0.4890877158i$	$G = -1.8764495735e-008 - 9.7810699984e-008i$
			$X_c = 10.6706907671 - 6.0760160117i$	$H = 6.8369512718e-008 + 1.9877655077e-008i$
			$X_d = -9.2500755884 - 2.0773836111i$	$I = 7.6320207889e-008 - 2.3834020171e-008i$
			$X_e = 0.0889169976 + 0.0317875698i$	$J = 8.5626158608e-008 + 3.1527804367e-008i$
3	626	37 s	$X_a = 2.2449516499 + 3.7341905857i$	$F = -6.2151654490e-008 + 4.3906756453e-008i$
			$X_b = 13.0650469968 - 0.4456976615i$	$G = -6.8321966751e-008 + 3.6126424963e-008i$
			$X_c = 11.8494402091 - 4.1722507714i$	$H = -5.4405157712e-008 - 2.3531416815e-009i$
			$X_d = -7.4348951939 + 2.0739670128i$	$I = -8.8861543487e-008 - 3.9075453669e-008i$
			$X_e = 0.0841438805 + 0.0330677419i$	$J = 6.0724950401e-008 - 6.2071759288e-008i$
<b>Prom</b>	<b>655</b>	<b>39,33 s</b>		

Fuente: elaboración propia.

Para estudiar el comportamiento del algoritmo al modificar parámetros del sistema de ecuaciones, se implementaron en el equipo N° 2 las ecuaciones (33) a (37).

$$F(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e) = 3 * x_a * \text{sen}(x_b) + x_c^{x_d} - x_e + 12 \quad (33)$$

$$G(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e) = x_a + 5 * x_b + x_c + x_c * \text{cos}(x_b) - 3 * x_d + x_e - 8 \quad (34)$$

$$H(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e) = \frac{x_c}{7} * e^{x_a} + x_b + 8 * x_a + 3 * x_d + 45 * x_e - 12 + 6 * x_d^{\text{cos}(x_e)} \quad (35)$$

$$I(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e) = x_a + 5 * x_b - x_c + 2 * x_d + 16 - 6 * \text{cos}(x_b) + x_a^{x_d} \quad (36)$$

$$J(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e) = x_a - 7 * x_b + 16 * x_c - 8 * x_d * \text{sen}(x_d) + 100 \quad (37)$$

Los resultados obtenidos se observan en la Tabla 22.

Tabla 22. Ecuaciones 5, 1000 Partículas en Clúster con 4 Nodos Variando Parámetros

Exp.	Iter.	Tiempo	Resultado	Funciones Evaluadas
1	1523	1min 30s	Xa= -2.7074701046 + 4.3783897074i	F= -3.0290271624e-008 +5.6262274395e-008i
			Xb= 2.8666566691 - 0.8313176450i	G= 8.3220998981e-008 +2.8841932731e-008i
			Xc= -3.8701595021 - 0.7762959814i	H= 6.4225549323e-009 - 4.1862772804e-008i
			Xd= 1.7739452840 - 0.4016344108i	I= 1.1027871949e-008 - 9.2635309201e-008i
			Xe= 0.2823448055 - 0.6933354337i	J= 6.6271681476e-008 +7.1111933231e-008i
2	998	59 s	Xa= 3.7935590829 - 0.2014128227i	F= -9.2221974057e-008 - 2.3800091231e-008i
			Xb= -1.6391629732 - 0.3425936177i	G= -6.8595975566e-008 +6.2897787645e-008i
			Xc= 6.5741137664 - 5.2728086537i	H= -2.0723703642e-008 +5.8816498338e-008i

			$X_d = -2.7181273749 - 2.7287803835i$	$I = -9.5474333207e-008 - 1.8600874570e-008i$
			$X_e = -0.0128533507 + 0.9105004178i$	$J = -4.0854800432e-008 + 2.7701759109e-008i$
			$X_a = 1.4301317778 + 1.3081988446i$	$F = 1.9834089926e-010 + 6.6145769750e-008i$
			$X_b = -0.8761173583 + 1.4156892838i$	$G = 1.6580444129e-008 - 8.7334107945e-008i$
3	1231	1min 15s	$X_c = -1.8575596579 - 4.3930995261i$	$H = -4.2143213363e-008 + 5.9659740259e-008i$
			$X_d = -2.9727937609 - 2.0528883722i$	$I = 3.1890032282e-008 + 3.9887341041e-008i$
			$X_e = -0.0586810862 - 1.2526001358i$	$J = 5.9075091485e-008 + 9.4756558155e-009i$
<b>Prom</b>			<b>1251</b>	<b>74,67 s</b>

Fuente: elaboración propia.

## 6. OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

*Particle Swarm Optimization* (PSO) es un método eficiente que puede ser implementado para encontrar la solución a sistemas de ecuaciones no lineales con raíces reales y complejas. Para el algoritmo desarrollado, el hecho de incrementar la cantidad de partículas para solucionar un sistema de ecuaciones no lineales, aumenta los tiempos de cómputo, dado que existe mayor cantidad de información que se debe compartir en el enjambre.

Una estratégica elección de la cantidad de partículas y las posiciones iniciales de las mismas, determinó una mejora en la velocidad de convergencia de PSO. Para disminuir tiempos de ejecución utilizando un clúster de computadoras no basta solo con tener en cuenta que los recursos optimicen Hardware, almacenamiento y red, es necesario también que el algoritmo sea paralelizable. Cuando se utiliza PSO para hallar la solución a un sistema de ecuaciones no lineales, al variar los parámetros de dicho problema varían el tiempo de ejecución y la cantidad de iteraciones necesarias para resolverlo. Esto permite concluir que la velocidad de convergencia con este algoritmo depende de la complejidad del sistema de ecuaciones. Se intentó resolver un sistema con 10 ecuaciones en el equipo N° 2, pero debido a sus limitados recursos de memoria no fue posible efectuar una ejecución satisfactoria. A pesar de ello no era de esperarse que el tiempo de respuesta fuera sustancialmente mejorado en comparación con el equipo N° 1.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. Grosan, A. Abraham , “A New Approach for solving Nonlinear Equations Systems” IEEE transactions on systems, man, and cybernetics—part a: systems and humans, vol. 38, N°. 3, Mayo 2008.
- [2] M. Bianchini, S. Fanelli, M. Gori, “Optimal Algorithms for Well-Conditioned Nonlinear Systems of Equations” IEEE transactions on computers, vol. 50, N° 7, Julio 2001.
- [3] Y. Z. Luo, G. J. Tang, L. N. Zhou, “Hybrid Approach for solving systems of nonlinear equations using chaos optimization and quasi-Newton method ”, College of Aerospace and Material Engineering, National University of Defense Technology, China, June 2005.
- [4] C. Sáez, F. Rodriguez, “Resolución Numérica de Sistemas de Ecuaciones no Lineales”, Universidad Pontificia Comillas, Madrid, España 2005.
- [5] R Brits, A. P. E negelbrecht, F.v an den Bergh, “Solving Systems of Unconstrained Equations using Particle Swarm Optimization”, Department of Computer Science, University of Pretoria, Pretoria, South Africa, 2002.
- [6] J. R. Pérez, ”Contribución a los métodos de optimización basados en procesos naturales y su aplicación a la medida de antenas en campo próximo”, Departamento de Ingeniería de Comunicaciones, Universidad de Cantabria, España, Octubre de 2005.
- [7] O. Aijia, Z. Yongquan, L. Qifang "Hybrid Particle Swarm Optimization Algorithm for Solving Systems of Nonlinear Equations (paper publicado )", College of mathematics and computer science, Guangxi University for nationalities, Nanning, china, Granular Computing, 2009, GRC '09.
- [8] L. A. Gómez Ardila, “Demostración del teorema sobre la relación entre sistemas de ecuaciones en números complejos y el problema de optimización (Comunicación interna UIS. Nov 11 2010 ).
- [9] P. E. Oñate, “Solución del problema de Flujos de potencia óptimo con restricciones de seguridad por un optimizador de partículas modificado”,

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N., Unidad Guadalajara, México, Febrero de 2008.

- [10] S. Iturriaga, P. Maya, D. Pintos. "Proyecto Fenton – Cluster de Computadoras de Alto Desempeño con acceso Remoto (CCADAR)", Universidad de la República, Uruguay, pp. 4-6, Julio de 2008.
- [11] J. Q. lima, B. Baran, "Optimización de Enjambre de Partículas aplicada al problema del cajero viajante BI-Objetivo", Inteligencia Artificial, Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial, año/vol. 10, numero 032, Asociación Española para la Inteligencia Artificial, Valencia, España, pp. 67-76, 2006.
- [12] W. Hui, Z. Zhao, "A Neural Network algorithm for solving systems of nonlinear equations ", College of Electrical & Information Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha, China, 2008.
- [13] Z Cui, X Cai, "Using Social Cognitive Optimization Algorithm to Solve Nonlinear Equations", Complex System and Computational Intelligence Laboratory, Taiyuan University of Science and Technology, Shanxi, P.R. China, 2010.
- [14] C. Grosan, "Multiple Solutions for a System of Nonlinear Equations", Department of Computer Science School Of Technology, Babes-Bolyai University, Kogalniceanu 1, Romania, 2008.