

**INVESTIGACION DE LA CONVERGENCIA DE SOLUCIONES APROXIMADAS  
DE PROBLEMAS SINGULARES EN ELASTICIDAD ANISOTROPICA**

**Elaborada por:  
JESÚS ANTONIO GARCÍA SÁNCHEZ**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE FISICO-MECANICAS  
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL  
BUCARAMANGA  
2005**

**INVESTIGACION DE LA CONVERGENCIA DE SOLUCIONES APROXIMADAS  
DE PROBLEMAS SINGULARES EN ELASTICIDAD ANISOTROPICA**

**Elaborada por:  
JESÚS ANTONIO GARCÍA SÁNCHEZ**

Trabajo de Grado presentado como requisito para optar el título de Ingeniero Civil

**Orientada por:  
ADAIR ROBERTO AGUIAR Ph.d  
Prof. *Universidade de São Paulo***

**Co-Orientada por:  
DALTON MORENO GIRARDOT M.sc  
Prof. Universidad Industrial de Santander**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE FISICO-MECANICAS  
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL  
BUCARAMANGA  
2005**

*Dedicada a Edith Sánchez por el apoyo y el amor brindado durante tantos años*

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar mis palabras de gratitud van dirigidas a mi familia por ser mi principal apoyo en todas las empresas que en mi vida he intentado llevar.

Agradezco grandemente al profesor Adair Roberto Aguiar por tanta paciencia y dedicación en estos meses de trabajo. Por haberme mostrado e incentivado a seguir el camino de la investigación.

Agradezco a los profesores de la escuela de Ingeniería Civil de la Universidad Industrial de Santander por mi formación integral y por facilitar el progreso de sus alumnos.

A mis amigos Luis Rodríguez, Sergio Bueno y Diana Ardila que además de haberme brindado su amistad durante tantos años de estudio me ayudaron a gestionar problemas relacionados con el intercambio.

Expreso mi gratitud al departamento de estructuras de la *Universidade de São Paulo* y al Brasil por abrirme las puertas y hacerme sentir como en casa.

## TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	xv
1. CONTENIDO TEÓRICO	1
1.1 Método de los Elementos Finitos (MEF)	1
1.1.1. Formulación variacional para problemas uni- dimensionales	1
1.1.2. Soluciones equivalentes	3
1.1.3. Método de Rayleigh – Ritz	5
1.1.4. Definición del MEF	5
1.1.5. Ejemplo de aplicación	7
1.2 Tratamiento de problemas singulares	27
1.2.1 Método de los elementos de contorno	28
1.2.2 Uso de la solución analítica	30
1.2.3 Mallas adaptativas	30
2. PROBLEMA DE LEKHNITSKII	32
3. FORMULACION DISCRETA.	37
3.1 Aproximación con polinomios simples	42
3.1.1 Aproximación con funciones de forma lineares	42
3.1.2 Aproximación con funciones de forma cuadráticas	42
3.1.3 Aproximación con funciones de forma cúbicas	43
3.1.4 Aproximación con funciones de forma de grado 4	43
3.2 Aproximación con enriquecimiento	44
3.3 Norma $H_1$	45

4. RESULTADOS NUMERICOS	47
4.1 Análisis de convergencia del MEF	47
4.2 Análisis del error debido a la precisión de la maquina	58
4.3 Otras fuentes de error	64
5. CONCLUSIONES	68
6. BIBLIOGRAFÍA	70
7. ANEXOS	71

## LISTA DE FIGURAS

	Pag
Figura 1. Elemento de Cercha.....	2
Figura 2. Intersección entre Elementos Finitos.....	6
Figura 3. Acoplamiento entre Elementos Finitos.....	6
Figura 4. Funciones de forma lineares.....	11
Figura 5. Solución analítica comparada con la solución numérica funciones de forma de grado 1.....	12
Figura 6. Funciones de forma cuadráticas para $j = 1, 3, \dots, 2*N+1$ .....	13
Figura 7. Funciones de forma cuadráticas para $j = 2, 4, \dots, 2*N+1$ .....	14
Figura 8. Solución analítica y solución numérica con funciones de forma de grado dos.....	15
Figura 9. Funciones de forma cúbicas para $j = 1, 4, \dots, 3*N+1$ .....	16
Figura 10. Funciones de forma cúbicas para $j = 2, 5, \dots, 3*N+2$ .....	17
Figura 11. Funciones de forma cúbicas para $j = 3, 6, \dots, 3*N+3$ .....	18
Figura 12. Solución analítica y solución numérica con funciones de forma de grado tres.....	20
Figura 13. Funciones de forma de grado 4 para $j = 1, 5, \dots, 4*N+1$ .....	21
Figura 14. Funciones de forma de grado 4 para $j = 2, 6, \dots, 4*N+2$ .....	22
Figura 15. Funciones de forma de grado 4 para $j = 3, 7, \dots, 4*N+3$ .....	23
Figura 16. Funciones de forma de grado 4 para $j = 4, 8, \dots, 4*N+4$ .....	24
Figura 17. Solución analítica y solución numérica con funciones de forma de grado cuatro.....	26
Figura 18. Elemento basado en la solución de contorno $\beta^1$ en un campo clásico de elementos finitos.....	29

Figura 19. Problema de Lekhnitskii.....	31
Figura 20. Equilibrio de tensiones.....	33
Figura 21. Partes del Contorno.....	36
Figura 22. Mapeamiento de la posición indeformada a la posición deformada.....	37
Figura 23. Aproximación con función enriquecedora.....	44
Figura 24. Desplazamiento radial, $u$ , versus el radio del disco, $r$ . Soluciones para el problema de Lekhnitskii.....	47
Figura 25. Desplazamiento radial, $u$ , versus el radio del disco, $r$ . MEF con funciones de forma lineares realizando un refinamiento de la malla con respecto al tamaño del elemento.....	49
Figura 26. Desplazamiento radial, $u$ , versus el radio del disco, $r$ . MEF con funciones de forma cuadráticas realizando un refinamiento de la malla con respecto al tamaño del elemento.....	49
Figura 27. Desplazamiento radial, $u$ , versus el radio del disco, $r$ . MEF con funciones de forma cúbicas realizando un refinamiento de la malla con respecto al tamaño del elemento.....	50
Figura 28. Desplazamiento radial, $u$ , versus el radio del disco, $r$ . MEF con funciones de forma de grado 4 realizando un refinamiento de la malla con respecto al tamaño del elemento.....	50
Figura 29. El logaritmo en base 10 de la norma $H_1$ versus el logaritmo en base 2 del número de grados de libertad. Análisis de convergencia de la solución numérica con funciones de forma lineares en todo el dominio.....	51
Figura 30. El logaritmo en base 10 de la norma $H_1$ versus el logaritmo en base 2 del número de grados de libertad. Análisis de convergencia de la solución numérica con función enriquecedora en el primero intervalo y funciones lineares en el resto del dominio.....	53
Figura 31. Paralelo de la convergencia entre la solución numérica con funciones lineares y la solución numérica con función enriquecedora en el primero intervalo y funciones lineares en el resto del dominio.....	54
Figura 32. El logaritmo en base 10 de la norma $H_1$ versus el logaritmo	

en base 2 del número de grados de libertad. Análisis de convergencia de la solución numérica hallada con funciones de forma de grado 4.....	55
Figura 33. Paralelo entre la convergencia de la solución numérica hallada con funciones de forma de grado 1 y funciones de norma de grado 4.....	56
Figura 34. Desplazamiento radial, $u$ , contra el radio del disco, $r$ . Refinamiento de la malla tipo $P$ . $M = 1920$ .....	57
Figura 35. Logaritmo en base 10 de la norma $H_1$ en función del grado del polinomio aproximador.....	58
Figura 36. La variación del dislocamiento radial, $u$ , con relación al radio, $r$ . Solución numérica con funciones de forma cúbicas.....	59
Figura 37. La variación del dislocamiento radial, $u$ , con relación al radio, $r$ . Solución numérica con funciones de forma de grado 4.....	60
Figura 38. Logaritmo en base 10 del mínimo número de dígitos necesario para obtener un resultado preciso versus el logaritmo en base 2 del número de grados de libertad, $M$ , para funciones de forma cúbicas.....	62
Figura 39. Logaritmo en base 10 del mínimo número de dígitos necesario para obtener un resultado preciso versus el logaritmo en base 2 del número de grados de libertad, $M$ , para funciones de forma de grado 4.....	63
Figura 40. Logaritmo en base 10 de la condición de la matriz versus el logaritmo en base 2 del número de grados de libertad, para funciones lineares.....	65
Figura 41. Logaritmo en base 10 de la condición de la matriz versus el logaritmo en base 2 del número de grados de libertad, para funciones de grado 4.....	66
Figura 42. Logaritmo en base 10 de la condición de la matriz versus el grado del polinomio aproximador, para 60 grados de libertad.....	67

## LISTA DE TABLAS

	Pag
Tabla 1. Error $H_1$ -norm con relación a $M$ , para funciones lineares en todo el dominio.....	52
Tabla 2. La norma $H_1$ con relación a $M$ , con función enriquecedora en $u_h$ y $v$ sobre el primero intervalo y funciones lineares.....	53
Tabla 3. Norma $H_1$ con relación a $M$ , con funciones de forma de grado 4.....	55
Tabla 4. Norma $H_1$ en función del grado del polinomio $d$ .....	57
Tabla 5. Número de dígitos necesarios para obtener un resultado preciso con un polinomio aproximador de grado 3.....	61
Tabla 6. Número de dígitos necesarios para obtener un resultado preciso con un polinomio aproximador de grado 4.....	63
Tabla 7. Condición de la matriz, calculada con funciones lineares, en relación al número de grados de libertad.....	64
Tabla 8. Condición de la matriz, calculada con funciones de grado 4, en relación al número de grados de libertad.....	65
Tabla 9. Condición de la matriz en relación al orden polinomial de la función de forma. Para 60 grados de libertad.....	66

## OBJETIVOS

### Objetivo general

- Investigar las propiedades de convergencia de las soluciones aproximadas, obtenidas por el Método de los Elementos Finitos, de problemas singulares de la elasticidad lineal clásica anisotrópica.

### Objetivos específicos

- Encontrar un procedimiento numérico simple para obtener soluciones aproximadas aceptables de problemas singulares en elasticidad lineal anisotrópica sin tener conocimiento de la tendencia o el comportamiento de dicha singularidad.
- Analizar las posibles causas de error del método de los elementos finitos en aplicados a problemas de elasticidad anisotrópica.
- Refinar la malla, generada por medio del método de los elementos finitos, con respecto al grado del polinomio aproximador, tipo  $p$ , y con respecto al tamaño del elemento finito, tipo  $h$ , y determinar si el método fornece una secuencia de soluciones aproximadas que converja para la solución del problema de elasticidad lineal.

**TITULO:**  
**INVESTIGACIÓN DE LA CONVERGENCIA DE SOLUCIONES APROXIMADAS DE PROBLEMAS SINGULARES EN ELASTICIDAD ANISOTRÓPICA.\***

**Autor:**  
GARCÍA SÁNCHEZ, Jesús Antonio \*\*

**Objetivos:**  
Investigar las propiedades de convergencia de las soluciones aproximadas, obtenidas por el Método de los Elementos Finitos, de problemas singulares de elasticidad lineal clásica anisotrópica.

**Descripción:**  
Soluciones de problemas elástico-lineares predicen la existencia de tensiones infinitas en cantos y vértices de fracturas. Los métodos numéricos clásicos ofrecen soluciones que aproximan bien las tensiones lejos de estos puntos singulares. Aquí se utiliza el Método de los Elementos Finitos para investigar numéricamente el problema de equilibrio de una placa circular homogénea, cuyo material es elástico-lineal y anisotrópico, que está bajo compresión radial uniforme. El problema posee solución analítica (Lehknitskii, 1968), la cual predice tensiones infinitas en el centro de la placa e un comportamiento anómalo de auto-intersección en puntos aledaños al centro. Se realizó un estudio de convergencia del método con respecto al tamaño del elemento finito,  $h$ , y al grado del polinomio interpolador,  $p$ .

**Resultados y Conclusiones:**  
Al hacer un refinamiento  $h$  el método converge linealmente, pero muy despacio. Mientras que el refinamiento tipo  $p$  muestra una convergencia no muy eficiente y deja dudas de si el método converge para la solución exacta o no. La utilización de la función singular de la solución analítica en el método numérico ofrece resultados más precisos que los encontrados en la literatura, sin embargo la velocidad de convergencia, en relación a la solución numérica común, no mejora. Se encontró también que al aumentar el grado del polinomio y/o el número de elementos la precisión numérica debe ser aumentada para obtener resultados numéricos precisos.

**Palabras Clave:**  
Elementos Finitos, Anisotropía, Convergencia, Singularidad, Métodos Numéricos.

---

\* Trabajo de Grado.

\*\* UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER. FACULTAD DE FÍSICO-MÉCANICAS. ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL. Orientador: AGUIAR, Adair Roberto. Co-Orientador: MORENO GIRARDOT, Daltón.

**TITLE:**  
**INVESTIGATION OF CONVERGENCE OF APPROXIMATE SOLUTIONS OF SINGULAR PROBLEMS IN ANISOTROPIC ELASTICITY.\***

**Author:**  
GARCIA SANCHEZ, Jesús Antonio. \*\*

**Objective:**  
To investigate the convergence properties of approximate solutions which are obtained with the Finite Element Method of singular problems in anisotropic classical linear elasticity.

**Description:**  
Solutions of linearly elastic problems predict the existence of infinite stresses in the vicinity of corners and crack tips. The classical numerical methods yield solutions that approximate well the stress field away from these singular points. Here, we use the Finite Element Method to investigate numerically the equilibrium problem of a homogeneous circular plate, which is linearly elastic and anisotropic, under a uniform radial compression. The problem has a closed form solution (Lekhnitskii, 1968), which yields both infinite stresses at the center of the plate and anomalous self-intersecting behavior in a vicinity of the center. We study the convergence of the method with respect to the size of the finite element function,  $p$ .

**Results and Conclusions:**  
By refining the mesh, i.e., by letting  $h \rightarrow 0$ , the method converges linearly at a slow rate. By augmenting the polynomial degree, i.e., by letting  $p \rightarrow 0$ , it is not clear from the results that the method converges. By using the singular structure of the analytical solution, the method yields results that are more accurate than those found in the literature, even though the rate of convergence is still low. In addition, as we either increase  $p$ , or decrease  $h$ , the numerical precision used in the calculation of the rigidity matrix must be increased in order to obtain accurate numerical results.

**Key words:**  
Finite Elements, Anisotropy, Convergence, Singularity, Numerical Methods.

---

\* Graduate work.

\*\* INDUSTRIAL UNIVERSITY OF SANTANDER. DEPARTAMENT OF FICIO-MECANICS. SCHOOL OF CIVIL ENGINEERING. Orienting: AGUIAR, Adair Roberto. Co-orienting: MORENO GIRARDOT, Dalton.

## INTRODUCCIÓN

La teoría linear clásica predice tensiones infinitas en la vecindad de puntos denominados singulares, tales como, cantos y vértices de fisuras. Las soluciones encontradas a través de los métodos numéricos clásicos aproximan muy bien todo el campo de deformaciones y también obtienen buenos resultados para las tensiones lejos de los puntos singulares. Existe otro tipo de problemas en los cuales los métodos numéricos fornecen soluciones erradas en todo el dominio tanto para las deformaciones como para las tensiones.

En este trabajo se utilizó el método de los elementos finitos para aproximar el problema de equilibrio de una placa circular homogénea, cuyo material es elástico-linear y anisotrópico, sometida a compresión por una carga radial por unidad de longitud uniformemente distribuida sobre el contorno. Este problema posee una solución cerrada planteada por Lekhnitskii (1968) la cual predice tensiones infinitas en el centro de la placa y un comportamiento anómalo, en una pequeña zona alrededor del centro, de auto-penetración o auto-intersección del material. La literatura muestra soluciones, con métodos numéricos clásicos, para el campo de dislocamientos las cuales no convergen en ningún punto del dominio.

Posibles soluciones para el problema de Lekhnitskii han sido planteadas en diferentes trabajos. Aguiar y Fosdick (2001) asumen propiedades no lineares del material y con eso consiguen preservar la inyectividad del sistema

Fosdick y Royer (2001) colocan en la teoría linear clásica una restricción de inyectividad y utilizan la técnica de los multiplicadores de Lagrange para plantear el problema como un problema de minimización con restricciones. El problema

planteado por Fosdick y Royer consiste en encontrar un vector  $\mathbf{v}$  que minimice la energía potencial total,  $\Phi$ , obtenida de la teoría linear clásica en una región admisible  $A_e$  tal que satisfaga la restricción de inyectividad " $\det(1+\tilde{N}V)=\epsilon>0$ " donde  $\epsilon$  es un número suficientemente pequeño perteneciente a los reales. Este problema es altamente no linear y por lo tanto posee una solución numérica compleja.

Obeidat (2001) planteo una solución utilizando el método de los elementos finitos para minimizar el problema con restricciones. Pero este tipo de solución presento partes del subdominio donde la restricción de inyectividad era violada.

Aguiar (2004) utiliza el método de las penalidades interiores, el cual permite desenvolver un problema de optimización con restricciones con los algoritmos comunes de optimización sin restricciones, para minimizar la energía del problema utilizando como función barrera " $P=\det(1+\nabla V)=\epsilon>0$ ". El método de las penalidades transforma la energía potencial total del sistema,  $\Phi$ , por una energía penalizada,  $\Phi_d = \Phi + \Phi/d$ , donde  $d$  es un número arbitrario positivo y  $\Phi$  es la función barrera definida por el conjunto de restricciones que definen la región admisible  $A_e$ . Con la característica que  $\Phi[\mathbf{v}]$  va a infinito cuando  $\mathbf{v}$  se aproxima a la región de la singularidad, funcionando así como una barrera. Siendo así el problema consiste en encontrar el mínimo de la función  $\Phi_d$  en el interior de  $A_e$ . Aguiar discretiza el dominio de la función de la energía penalizada por medio del método de los elementos finitos con funciones de forma lineares y obtiene buenas soluciones aproximadas a la solución analítica.

A pesar de encontrar en la literatura buenas soluciones aproximadas para el problema de Lekhnitskii con restricciones nunca se ha realizado un estudio de convergencia de dichas soluciones.

En este trabajo se analiza la convergencia del problema de Lekhnitskii sin restricciones. Lo cual se hace minimizando la energía potencial total,  $\Pi$ , discretizando el dominio por medio de los elementos finitos y realizando refinamientos de la malla con relación al tamaño del elemento finito, refinamiento tipo  $h$ , y con relación al grado del polinomio, refinamiento tipo  $p$ . Al desarrollar el problema por este método es posible transformar el problema de minimización cuadrática en un problema variacional de la forma  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ , donde  $\mathbf{A}$  es la matriz de rigidez,  $\mathbf{x}$  es el vector solución y  $\mathbf{b}$  es el vector de cargas.

El contenido del trabajo se puede dividir en cuatro grandes tópicos:

- Contenido Teórico.
- Planteamiento del Problema.
- Formulación Discreta del Problema.
- Resultados Numéricos.

En el capítulo uno se proporcionan las bases teóricas para entender y aplicar el método de los elementos finitos. Además en este capítulo se recopilan algunos métodos y tratamientos dados por diversos autores a problemas con singularidades clásicas en la mecánica lineal.

En el capítulo dos se muestra el planteamiento teórico realizado por Lekhnitskii (1968) para el problema de estudio, además de las singularidades que dicho problema presenta.

En el capítulo tres se aplica el método de los elementos finitos al problema de Lekhnitskii, y se realiza todo el planteamiento teórico necesario para realizar los resultados numéricos.

En el capítulo cuatro se presentan los resultados numéricos. Se muestran diversos tratamientos realizados en los elementos finitos para conseguir la convergencia del método hacia la solución exacta.

## 1. CONTENIDO TEÓRICO

### 1.1 Método de los Elementos Finitos (MEF)

En la modelación de la gran mayoría de problemas en ingeniería surgen ecuaciones diferenciales cuyo tratamiento analítico es complejo o en muchos casos imposible. Una definición introductoria se podría decir que el MEF es un método numérico que ayuda a fornecer una solución aproximada de una ecuación diferencial cualquiera. Para entender más claramente el MEF es necesario primero conocer ciertos conceptos que serán explicados a continuación.

#### 1.1.1. Formulación variacional para problemas uni-dimensionales

Muchos de los problemas tratados en la mecánica clásica lineal se pueden encontrar en tres tipos de posibles planteamientos:

- Problema de valor de contorno (**D**).
- Problema variacional (**V**).
- Problema de minimización (**M**).

##### 1.1.1.1. Problema de valor de contorno

Este problema consiste en hallar  $u$  perteneciente a los reales y al intervalo  $(0,L)$  tal que las siguientes condiciones se cumplan

$$\left\{ \begin{array}{l} -u''(x)=f(x) \text{ , para } 0 < x < L. \end{array} \right. \quad \text{Ec. 1}$$

**[Problema D]**  $u(0)=u(L)=0.$

Esta es llamada formulación fuerte del problema. Esta formulación puede ser obtenida por leyes como la conservación de la energía o por ecuaciones de equilibrio en algunos problemas de mecánica clásica, por ejemplo considere una barra de cercha tal como ilustra la figura 1.

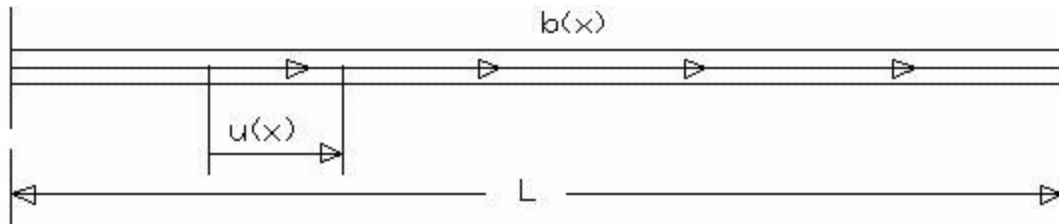


Figura 1, Elemento de Cercha

Entonces por equilibrio tenemos que

$$E u''(x) = -b(x) , \quad 0 < x < L; \quad \text{Ec. 2}$$

$$u(0) = u(L) = 0.$$

Donde E es el modulo de elasticidad,  $u(x)$  es el desplazamiento en la dirección x ,  $b(x)$  es el la carga axial aplicada en la barra,  $u(0)$  y  $u(L)$  son las condiciones de contorno.

### 1.1.1.2. Problema variacional

Primero es necesario definir un conjunto U formado por un conjunto de funciones v, tal que v sea continua en el intervalo (0,L) y cumpla las condiciones de contorno  $v(0)=v(L)=0.$

Este problema consiste en hallar u perteneciente a un conjunto de funciones

**[Problema V]**  $(u',v')=(b,v) \quad ? v ? U \quad \text{Ec. 3}$

El problema variacional puede ser planteado a partir del principio del trabajo virtual, ósea el trabajo realizado por los esfuerzos internos es equivalente al trabajo realizado por las fuerzas externas.

### 1.1.1.3. Problema de minimización.

Teniendo en cuenta que  $F$  es un funcional cuadrático

$$F(v) = 1/2(v', v') - (b, v) \quad \text{Ec. 4}$$

El problema de minimización consiste en hallar  $u$  perteneciente a  $U$  tal que

$$\text{[Problema M]} \quad F(u) = F(v), \quad \forall v \in U \quad \text{Ec. 5}$$

En otras palabras el funcional  $F$  corresponde a la energía potencial total asociada con el desplazamiento  $v$  perteneciente a  $U$  y  $F(u)$  es la mínima energía del sistema. El término  $1/2(v', v')$  representa la energía elástica interna y  $(b, v)$  representa el trabajo realizado por los esfuerzos externos.

### 1.1.2. Soluciones equivalentes

Es importante mostrar que la solución del problema de valor de contorno o de la ecuación diferencial **(D)** también es solución del problema de minimización **(M)** y del problema variacional **(V)**. Primero se mostrara que la solución del problema **(D)** es también solución del problema **(V)**. Entonces partiendo de que  $u$  es solución de la ecuación diferencial del problema **(D)**,  $u''(x) = -b(x)$ , y multiplicando a ambos lados por una función teste,  $v$ , que pertenece al conjunto  $U$ , entonces

$$-(u'', v) = (b, v), \quad \text{Ec. 7}$$

Integrando por partes el lado izquierdo en el intervalo (0,1) , y con las condiciones de contorno,  $v(0)=v(1)=0$ , se obtiene

$$-\int_0^1 (u', v) dx = u(1) \cdot v(1) + u(0) \cdot v(0) + \int_0^1 (u', v') dx \quad \text{Ec. 8}$$

$$\int_0^1 (u', v') dx = \int_0^1 (b, v) dx \quad \text{Ec. 9}$$

$$(u', v') = (b, v), \quad \forall v \in U \quad \text{Ec. 10}$$

Esta comprobado entonces que  $u$ , solución de **(D)**, también es solución de **(V)**.

Probamos ahora que la solución del problema **(V)** también es solución del problema **(M)**. Suponiendo que  $u$  es una solución del problema **(V)**, existe un  $v$  tal que  $w = v - u$ , entonces  $v = u + w$ , donde  $w$  pertenece a  $U$ .

Entonces se tiene,

$$F(v) = F(u+w) = \frac{1}{2} (u'+w', u'+w') - (b, u+w) = F(u)$$

$$F(v) = \frac{1}{2}(u', u') - ((b, u') + (u', w') - (b, u) + \frac{1}{2}(w', w')) = F(u). \quad \text{Ec. 11}$$

Entonces de la ecuación 10 tenemos que  $[(u', w') - (b, u)] = 0$ , siendo  $(w', w')$  un número no negativo, se tiene que  $F(v) = F(u)$ .

Por tanto,  $u$  es un minimizador de  $F$ , y la solución de el problema variacional **(V)** es también una solución del problema de minimización **(M)**. Teniendo en cuenta que la solución para un problema de minimización es un punto donde  $F(u)$  tiene el menor valor posible, entonces si aplicamos una pequeña perturbación  $ev$  tenemos,

$$F(u) = F(u+ ev) \quad \text{Ec. 12}$$

Si la ecuación  $g(e) = F(u + ev)$  tiene su mínimo cuando  $e=0$ , entonces

$$g'(0) = 0 \quad \text{Ec. 13}$$

$$g(e) = F(u + ev) = \frac{1}{2}(u', u') + e(u', v') + \frac{e^2}{2}(v', v') - (b, u) - e(b, v) \quad \text{Ec. 14}$$

$$g'(0) = (u', u') - (b, u) \quad \text{Ec. 15}$$

Para que la ecuación 13 se cumpla,

$$(u', u') = (b, u). \quad \text{Ec. 16}$$

Se puede concluir que la solución del problema **(M)** es también la solución del problema **(V)**.

### 1.1.3 . Método de Rayleigh – Ritz

Este método se encarga de encontrar una solución aproximada del problema de minimización en dominios arbitrarios, limitados y con frontera suave. Definiendo  $U_h$  como un sub-espacio de  $U$  de dimensión finita. El método de Rayleigh–Ritz define problemas similares al problema **M** en  $U_h$  que a su vez pertenece a  $U$ .

Entonces el problema discreto puede ser escrito así:

Encontrar  $u_h$  perteneciente  $U_h$  tal que,

$$[\text{Problema } \mathbf{M}_h] \quad F(u_h) = F(v_h), \quad \forall v \in U \quad \text{Ec. 17}$$

### 1.1.4. Definición del MEF

El MEF es un proceso que permite construir los subespacios  $U_h$ , aquí llamados espacios de los elementos finitos.

Las características de los elementos finitos se pueden tratar en tres grandes tópicos, que son denominados MEF1, MEF2 y MEF3.

### 1.1.4.1. MEF1

Definiendo  $\Omega$  como el dominio del problema. Haciendo una partición,  $\mathcal{T}_h$ , de  $\Omega$  y llamando cada una de las subdivisiones por  $k$ , siendo  $k$  un elemento finito. El método de los elementos finitos tiene que cumplir con las siguientes propiedades,

- $\Omega = \bigcup k$ .
- $k$  es cerrado y el interior de  $k$  no es vacío.
- La intersección de dos elementos finitos cualquiera es vacío tal como muestra la figura 2b. Un contraejemplo es presentado en la figura 2a.
- El contorno de  $k$  es descrito por una superficie suave.
- Cualquier lado de  $k$  es un subconjunto de  $\Omega$  o es un lado de otro elemento de la partición. Por lo tanto la situación mostrada en la figura 3 es prohibida.

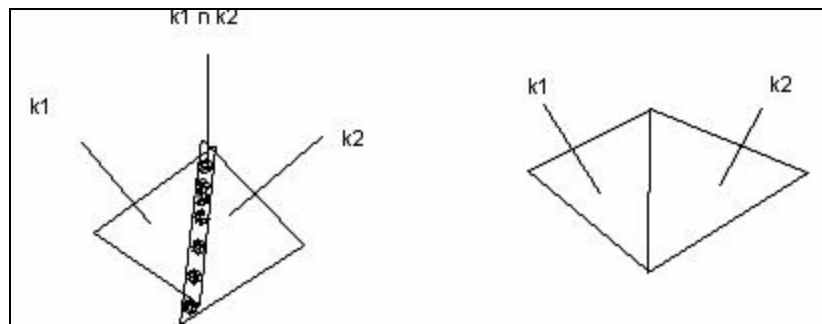


Figura 2a

Figura 2b

Figura 2 Intersección entre Elementos Finitos

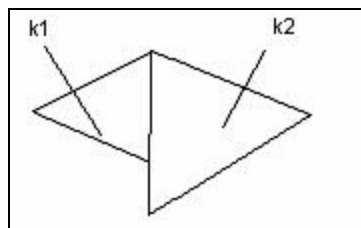


Figura 3 Acoplamiento entre Elementos Finitos

#### 1.1.4.2. MEF2

Se puede definir un conjunto de funciones,  $u_h$ , formado por funciones  $v_h$  generadas por las restricciones en los elementos finitos  $k$ . Dichos espacios contienen polinomios o funciones próximas a polinomios, lo cual facilita grandemente la convergencia y la implementación computacional del método.

#### 1.1.4.3. MEF3

Existe por lo menos una base canónica en el espacio  $U_h$  cuyas funciones de base tienen soportes tan pequeños como son posibles.

#### 1.1.5. Ejemplos de Aplicación

En esta sección se aplica el método de los elementos finitos en la solución aproximada del problema de valor de contorno 1.1.1.1. Esto con el objeto de visualizar fácil y claramente el método aplicado paso a paso. El mismo ejemplo se desarrollara con polinomios aproximadores de grado 1 hasta 4, proporcionando así muchas informaciones útiles para la aplicación del método en problemas más complejos.

#### Ejemplo

Teniendo la viga mostrada en la figura 1. Se pide encontrar una solución aproximada del problema. Dados el modulo de elasticidad,  $E = 2.1 \text{ E}10 \text{ Kg-f/m}^2$ , La longitud de la viga,  $L = 10 \text{ m}$ , y la fuerza axial,  $f = 1 \text{ kg-f}$ ,

Siendo los nodos  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_M < x_{M+1}$ ,  $M$  es el número de elementos,  $x_0$  es el nodo inicial,  $x_{M+1}$  es el nodo final.

Haciendo una partición del intervalo  $(0,L)$  en sub-intervalos

$$k_j = [x_{j-1}, x_j] \quad \text{de longitud } h_j = x_j - x_{j-1}$$

para  $j = 1, 2, 3, \dots, M+1$ ,  $j$  indica el nodo

La función  $v$  se puede expresar como una combinación lineal de funciones multiplicada por parámetros arbitrarios multiplicados por unas funciones base, estas funciones base son uno en el nodo  $j$  y cero en los otros nodos.

O sea,

$$v(x) = \sum_{j=1}^M \eta_j \cdot \phi_j(x) \quad \text{Ec. 18}$$

Siendo los parámetros  $\eta_j$  arbitrarios y sabiendo que la solución  $u_h$  satisface el problema variacional entonces

$$(u_h', v_j) = (b, F_j), \quad \text{Ec. 19}$$

Siendo,

$$u_h = \sum_{j=1}^M \xi_j \cdot \phi_j(x) \quad \text{Ec. 20}$$

Donde  $\xi_j$  son los valores nodales de la función  $u_h$ ,

$$\xi_j = u_h(x_j).$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^M (\phi_i', \phi_j') \xi_i = \sum_{i=1}^M (b, \phi_j') \quad j = 1, 2, \dots, M \quad \text{Ec. 21}$$

La expresión 21 es un sistema lineal de  $M$  ecuaciones  $M$  incógnitas.

Para tener un adecuado manejo de estas ecuaciones se hace necesario expresarlas en forma matricial,

$$[ \mathbf{A} ] \{ \mathbf{q} \} = \{ \mathbf{b} \} \quad \text{Ec. 22}$$

donde  $[ \mathbf{A} ] = [ a_{ij} ]$  es la matriz  $M \times M$  con elementos  $a_{ij} = ( F_i' , F_j' )$ , es llamada matriz de rigidez de la estructura.

$$\{ \mathbf{q} \} = \{ q_1, q_2, q_3, \dots, q_M \}$$

$$\{ \mathbf{b} \} = \{ \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_M \}$$

$\{ \mathbf{b} \}$  es el vector con  $M$  elementos  $\beta_j$  ( $b, F_j$ ) es denominado vector carga.

$\{ \mathbf{q} \}$  es el vector con  $M$  parámetros a determinar

Siendo así,

$$( \phi_i' , \phi_i' ) = \int_0^1 \left( \frac{d}{dx} \phi_i \cdot \frac{d}{dx} \phi_i \right) dx \quad \text{Ec. 23}$$

$$( b, \phi_i ) = \int_0^1 b \cdot \phi_i dx \quad \text{Ec. 24}$$

Entonces el problema se reduce a resolver el sistema linear,

$$[ \mathbf{A} ] \{ \mathbf{q} \} = \{ \mathbf{b} \} \quad \text{Ec. 25}$$

donde  $\{ \mathbf{q} \}$  es la incógnita a ser resuelta.

De manera similar para el problema  $M_h$

$$F(u_h') = \frac{1}{2} ( u_h' , u_h' ) - ( b, u_h )$$

$$F(u_h') = \frac{1}{2} ( q_i F_i' , q_j F_j' ) - ( b, q_i F_i ), \quad i,j=1,2,\dots,M$$

$$F(u_h') = \frac{1}{2} \underbrace{q_i F_i' , q_j F_j'}_{a_{ij}} - \underbrace{( b, q_i F_i )}_{\beta_i}, \quad i,j=1,2,\dots,M \quad \text{Ec. 26}$$

Representación matricial

$$F(u_h') = \frac{1}{2} \{ \mathbf{q} \} \cdot [ \mathbf{A} ] \{ \mathbf{q} \} - \{ \mathbf{b} \} \cdot \{ \mathbf{q} \} \quad \text{Ec. 27}$$

Entonces el problema se reduce a minimizar

$$F(u_h) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{q} \} \cdot [ \mathbf{A} ] \{ \mathbf{q} \} - \{ \mathbf{b} \} \cdot \{ \mathbf{q} \}$$

Debido a que  $F_i$  es cero para cualquier punto diferente de  $i$ .

### 1.1.5.1 Solución analítica

La solución exacta se obtiene a partir de la integración, entre 0 y L, de la ecuación de equilibrio del sistema

$$E \cdot \frac{d^2}{dx^2} u = -b$$

$$E \cdot \frac{d}{dx} u = -b \cdot x + K1$$

$$E \cdot u = -b \cdot \frac{x^2}{2} + K1 \cdot x + K2$$

Aplicando las condiciones de contorno  $u(0)=u(L)=0$ .

Entonces  $K2=0$  y  $K1= b \cdot L/E$

$$u = \frac{b}{2 \cdot E} (-x^2 + xL)$$

### 1.1.5.2. Aproximación con funciones de forma lineares

Ahora adoptemos la función de forma

$$F_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{Para } i, j = 1, 2, \dots, M \quad \text{Ec.28}$$

O sea  $F_j$  es una función continua y lineal por partes que toma el valor de 1 en el nodo  $x_j$  y cero en los otros nodos, como muestra la figura 4.

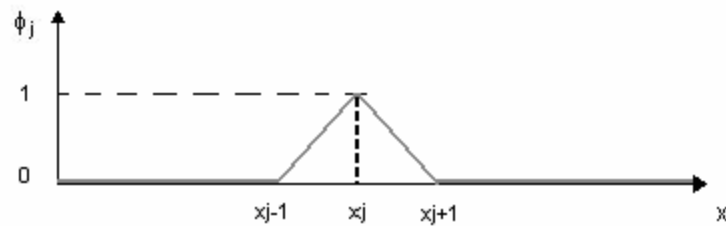


Figura 4, Funciones de forma lineares

Por lo tanto la matriz  $\mathbf{A}$  solo tiene tres diagonales diferentes de cero, es tridiagonal.

Los elementos de la matriz  $\mathbf{A}$  se pueden de la siguiente forma

$(F_i', F_j') = 0$  si  $|i-j| > 1$

$$(F_j', F_j') = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{(h_j)^2} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{(h_{j+1})^2} dx = \frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}}$$

Ec. 29

Si  $h_j$  es constante e igual a  $h$  entonces siendo  $h = 1/(M+1)$ , entonces

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \xi_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_M \end{pmatrix}$$

Ec. 30

Siendo

$$\beta_i = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} b \cdot \phi_1 dx = \frac{h}{2} b_{med}$$

Ec. 31

Este es un sistema linear de fácil desarrollo, donde las incógnitas es el vector de los valores nodales,  $\mathbf{q}$ .

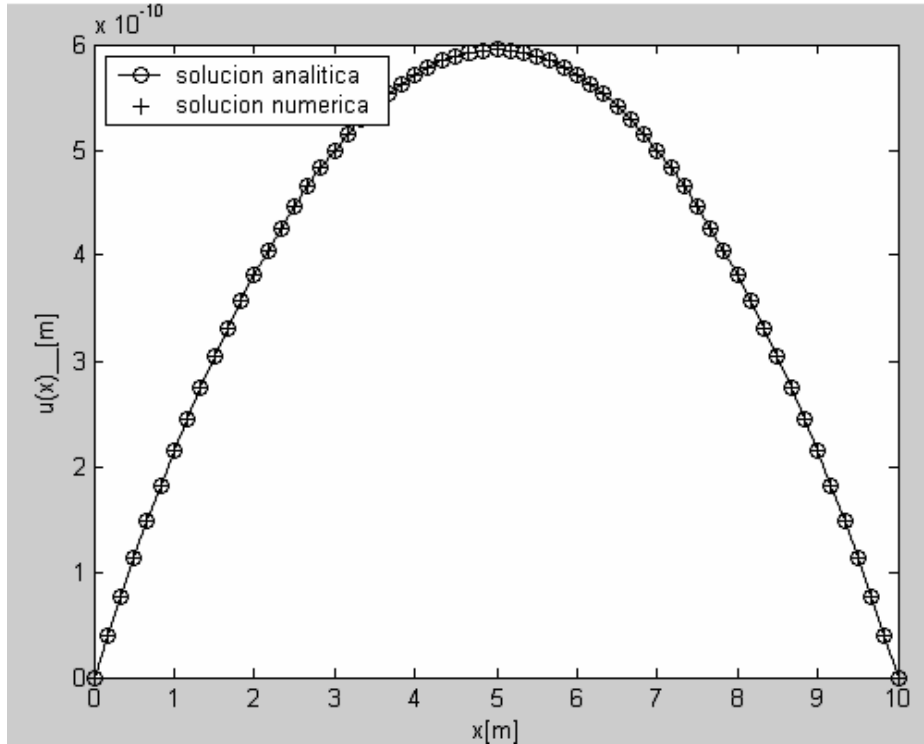


Figura 5, solución analítica comparada con la solución numérica funciones de forma de grado 1

El ejercicio fue resuelto para 61 nodos (60 elementos), ver figura 5. Se observa que las soluciones exacta y numérica coinciden en todos los puntos del dominio.

### 1.1.5.3. Aproximación con funciones de forma cuadráticas

Utilizando los polinomios aproximadores de Lagrange(anexo 1) podemos obtener las funciones de forma de grado 2,  $F_j$ ,  $j=1,2,\dots,M$ , tal que  $F_j$  tome el valor de 1 en el nodo  $j$  y 0 en cualquier otro nodo.

Así, para  $j=1,3,\dots,2N+1$ , donde  $N$  es el número de elementos finitos, obtenemos,

$$\phi_j = \begin{cases} \frac{(x_{j-1} - x) \cdot (x_{j+1} - x)}{(x_{j-1} - x_j)(x_{j+1} - x_j)} & \text{si } x_{j-1} \leq x \leq x_{j+1} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Ec. 32

La ecuación 32 esta representada en la figura 6.

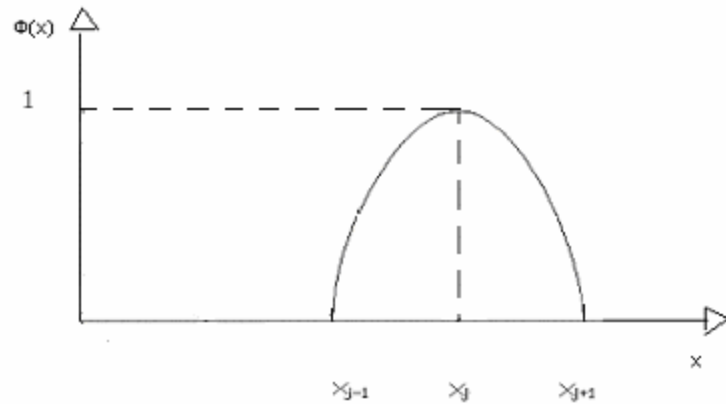


Figura 6, Funciones de forma cuadráticas,  $j=1,3,\dots,2N+1$

Para  $j = 2,4,\dots,2N+2$  donde  $N$  es el número de elementos finitos, obtenemos,

$$\phi_j = \begin{cases} \frac{(x_{j-1} - x) \cdot (x_{j-2} - x)}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-2} - x_i)} & \text{si } x_{j-2} \leq x \leq x_j \\ \frac{(x_{j+2} - x) \cdot (x_{j+1} - x)}{(x_{j+2} - x_i)(x_{j+1} - x_i)} & \text{si } x_j \leq x \leq x_{j+2} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Ec. 33

La ecuación 33 esta representada en la figura 7.

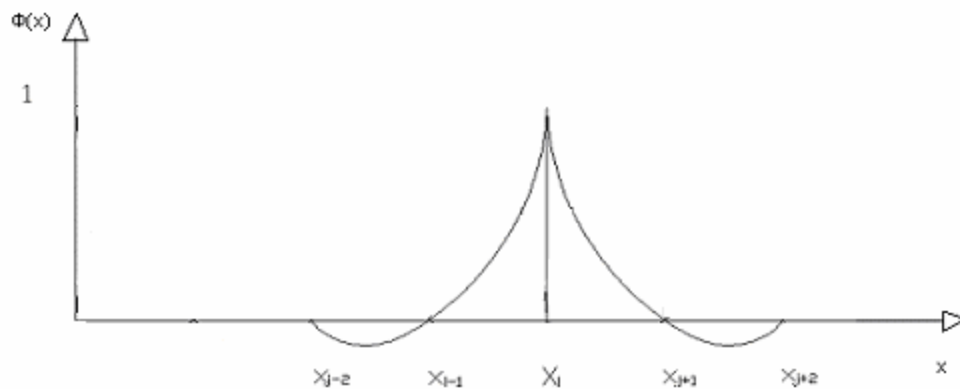


Figura 7, funciones de forma cuadráticas  $j=2,4,\dots,2 \cdot N$

Los elementos de la matriz **A** se pueden expresar de la siguiente forma

$$(F_i', F_j') = 0, \quad \text{si } |i-j| > 2$$

y los términos de las diagonales son hallados derivando cada una de las funciones de forma y reemplazando en 29 y 31. Si  $h_j$  es constante e igual a  $h$  entonces siendo  $h = 1/(M+1)$ , entonces,

Al ensamblar cada uno de los terminos  $\alpha_{ij}$  en la matriz **A** se obtiene y luego reemplazar en la ecuación

$$A = \frac{1}{\delta \cdot h} \begin{pmatrix} 16 & -8 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -8 & 14 & -8 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -8 & 16 & -8 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 14 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -8 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \dots \\ \xi_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \\ \beta_M \end{pmatrix}$$

Siendo

$$\beta_i = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} b \cdot \phi_i dx = \frac{h}{2} b_{med}$$

Ec. 34

Este es un sistema linear de fácil resolución donde las incógnitas es el vector de los valores nodales.

Los resultados del análisis son presentados en la figura 8. Se observa que las soluciones numérica y exacta coinciden, ya que la solución analítica

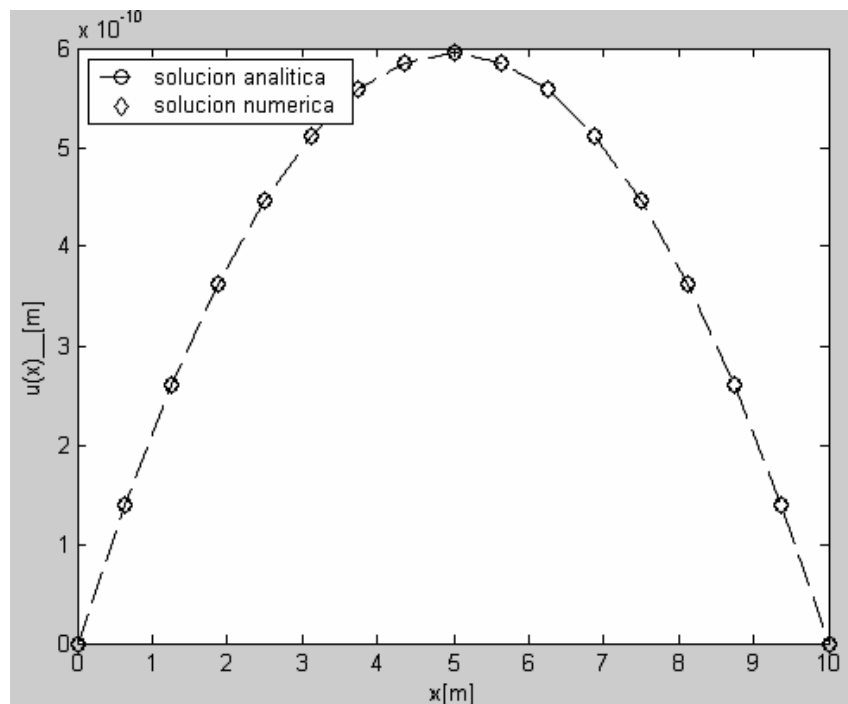


Figura 8, solución analítica y solución numérica con funciones deforma de grado 2

#### 1.1.5.4. Aproximación con funciones de forma cúbicas

Utilizando los polinomios aproximadores de Lagrange(anexo 1) podemos obtener las funciones de forma de grado 3,  $F_j$ ,  $j=1,2,\dots,M$ , tal que  $F_j$  tome el valor de 1 en el nodo  $j$  y 0 en cualquier otro nodo.

Así, para  $j=1,4,\dots,3*N+1$ , donde  $N$  es el número de elementos finitos, obtenemos,

$$\phi = \begin{cases} \frac{(x - x_{j-1}) \cdot (x - x_{j+1}) \cdot (x - x_{j+2})}{(x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdot (x_j - x_{j+2})} & x_{j-1} \leq x \leq x_{j+2} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Ec. 35

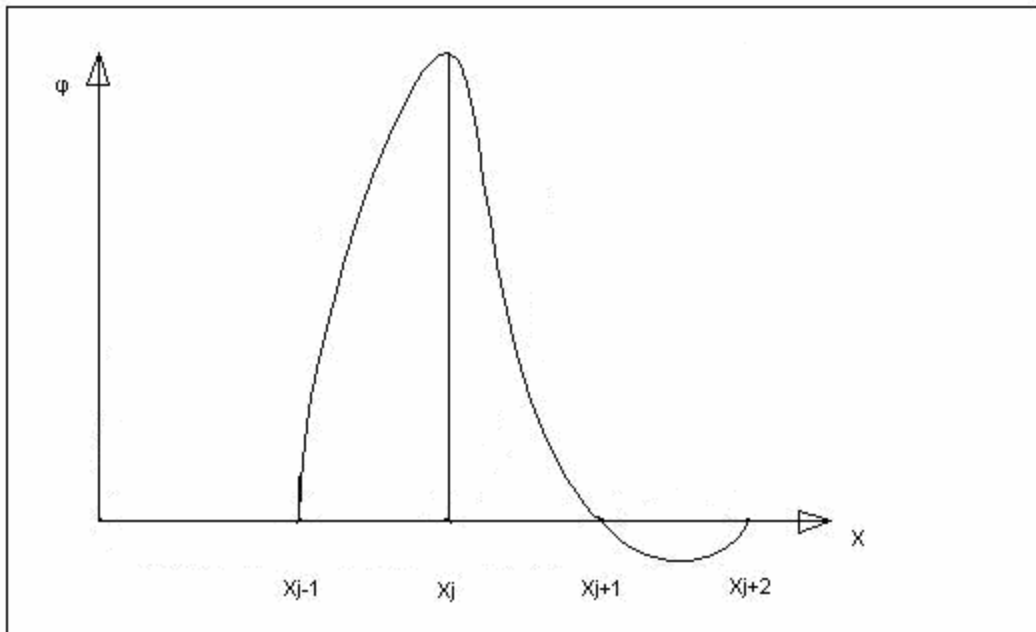


Figura 9, Funciones de forma cúbicas  $j= 1,4,\dots,3*N+1$ .

La figura 9 grafica las funciones de forma representadas en la ecuación 36.

Para  $j=2,5,\dots,3*N+2$ , donde N es el número de elementos finitos, obtenemos,

$$\phi_j = \begin{cases} \frac{(x - x_{j+1}) \cdot (x - x_{j-1}) \cdot (x - x_{j-2})}{(x_j - x_{j+1}) \cdot (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j-2})} & x_{j-2} \leq x \leq x_{j+1} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Ec.36

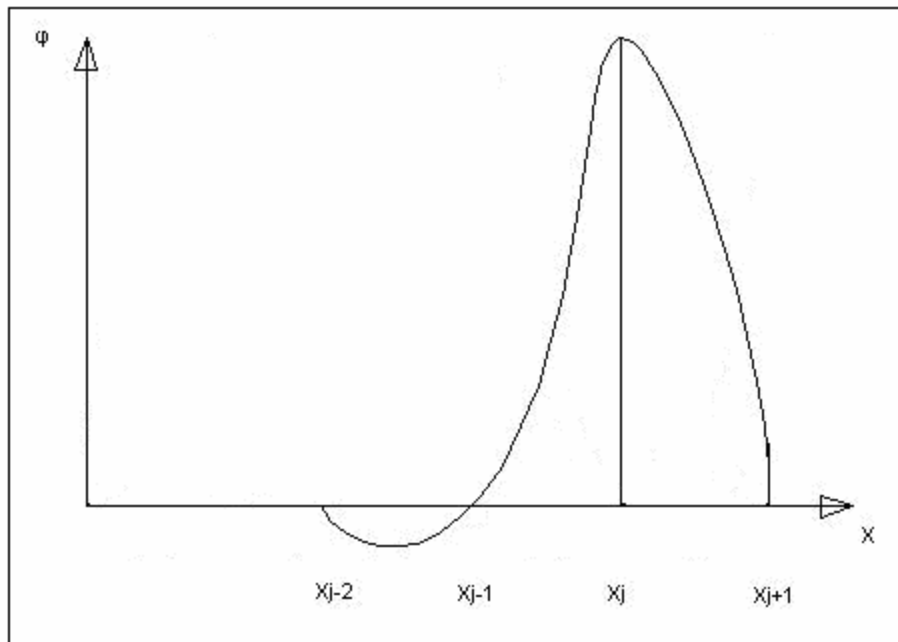


Figura 10, Funciones de forma cúbicas para  $j = 2,5,\dots,3*N+2$ .

La figura 10 muestra la función de forma dada por la ecuación 36.

Para  $j=2,5,\dots,3*N+3$ , donde N es el número de elementos finitos, obtenemos,

$$\phi_j = \begin{cases} \frac{(x - x_{j-3}) \cdot (x - x_{j-2}) \cdot (x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-3}) \cdot (x_j - x_{j-2}) \cdot (x_j - x_{j-1})} & \text{si } x_{j-3} \leq x \leq x_j \\ \frac{(x - x_{j+3}) \cdot (x - x_{j+2}) \cdot (x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j+3}) \cdot (x_j - x_{j+2}) \cdot (x_j - x_{j+1})} & \text{si } x_j \leq x \leq x_{j+3} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Ec. 37

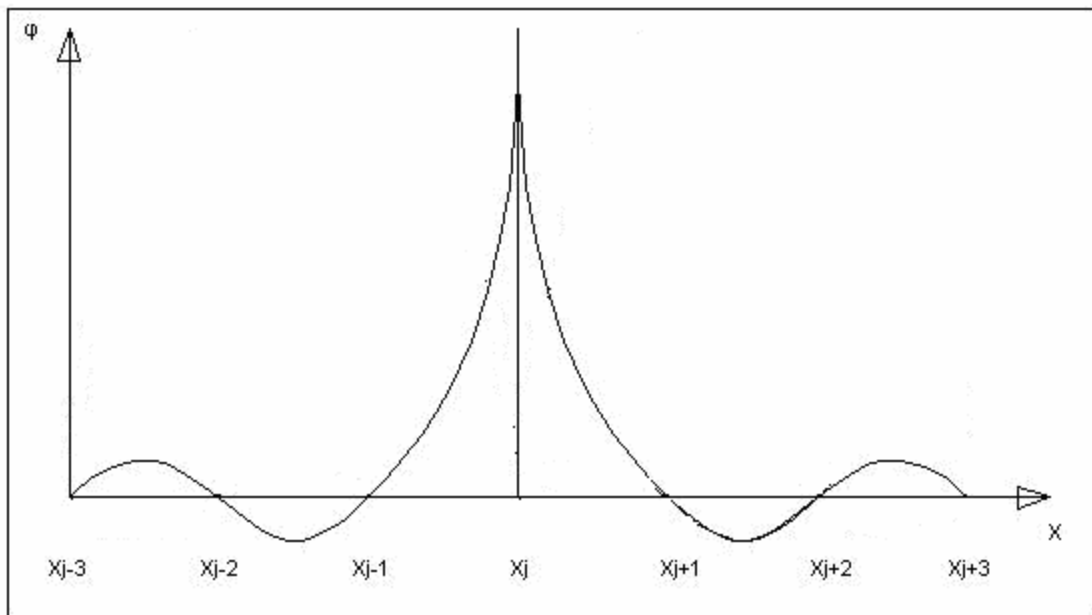


Figura 11, Funciones de forma cúbicas para  $j = 3, 6, \dots, 3N+3$ .

La figura 11 muestra la función de forma dada por la ecuación 37.

Donde  $\phi_j$  son los valores nodales de la función  $u_h$ .

Entonces  $(F'_j, F_j) \phi_j = (b, F_j)$ , Para  $j = 1, 2, \dots, M$   
 que es un sistema linear de ecuaciones con M ecuaciones y M incógnitas

Los elementos de la matriz **A** se pueden de la siguiente forma

$$(F_i', F_j')=0 \text{ si } |i-j| > 3$$

Ec. 38

Si  $h_j$  es constante e igual a  $h$  entonces siendo  $h = 1/(M+1)$ , entonces

Derivando cada una de las funciones de forma e integrando según las ecuaciones 29 y 31 se obtiene

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} \frac{54}{5} & \frac{-297}{40} & \frac{27}{20} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{-297}{40} & \frac{54}{5} & \frac{-180}{40} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{27}{20} & \frac{-180}{40} & \frac{37}{5} & \frac{-189}{40} & \frac{27}{20} & \frac{-13}{40} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-189}{40} & \frac{54}{5} & \frac{-297}{40} & \frac{27}{20} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{27}{20} & \frac{-297}{40} & \frac{54}{5} & \frac{-180}{40} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-13}{40} & \frac{27}{20} & \frac{-180}{40} & \frac{37}{5} & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{54}{5} & \frac{-180}{40} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-180}{40} & \frac{37}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_{M-1} \\ \xi_M \end{pmatrix} = h b \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

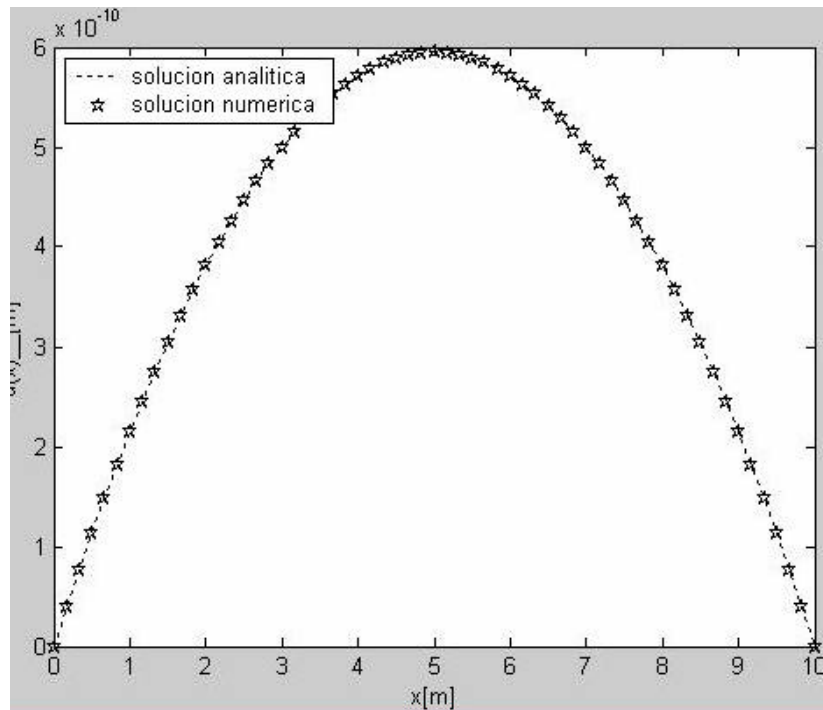


Figura 12 solución analítica y solución numérica con funciones de forma de grado 3

Al igual que en las anteriores aproximaciones las soluciones numérica y exacta coinciden.

#### 1.1.5.5. Aproximación con funciones de forma de grado 4

Utilizando los polinomios aproximadores de Lagrange(anexo 1) podemos obtener las funciones de forma de grado 2,  $F_j$ ,  $j=1,2,\dots,M$ , tal que  $F_j$  tome el valor de 1 en el nodo  $j$  y 0 en cualquier otro nodo.

Así, para  $j=1,5,\dots,4*N+1$ , donde  $N$  es el número de elementos finitos, obtenemos,

$$\phi_j = \begin{cases} \frac{(x - x_{j-1}) \cdot (x - x_{j+1}) \cdot (x - x_{j+2}) \cdot (x - x_{j+3})}{(x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdot (x_j - x_{j+2}) \cdot (x_j - x_{j+3})} & x_{j-1} \leq x \leq x_{j+3} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Ec. 39

La ecuación 39 es representada en la figura 13

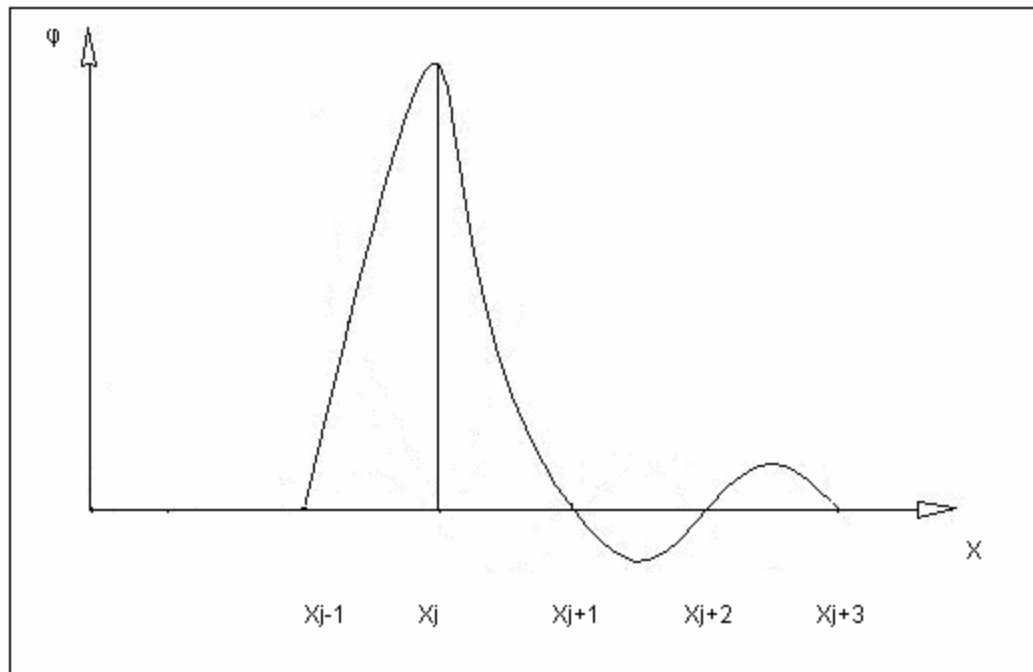


Figura 13, Funciones de forma de grado 4. Para  $j = 1, 5, \dots, 4N+1$ .

Para  $j = 2, 6, \dots, 4N+2$ , donde  $N$  es el número de elementos finitos, obtenemos,

$$\phi_j = \begin{cases} \frac{(x - x_{j-2}) \cdot (x - x_{j-1}) \cdot (x - x_{j+1}) \cdot (x - x_{j+2})}{(x_j - x_{j-2}) \cdot (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdot (x_j - x_{j+2})} & x_{j-2} \leq x \leq x_{j+2} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Ec.40

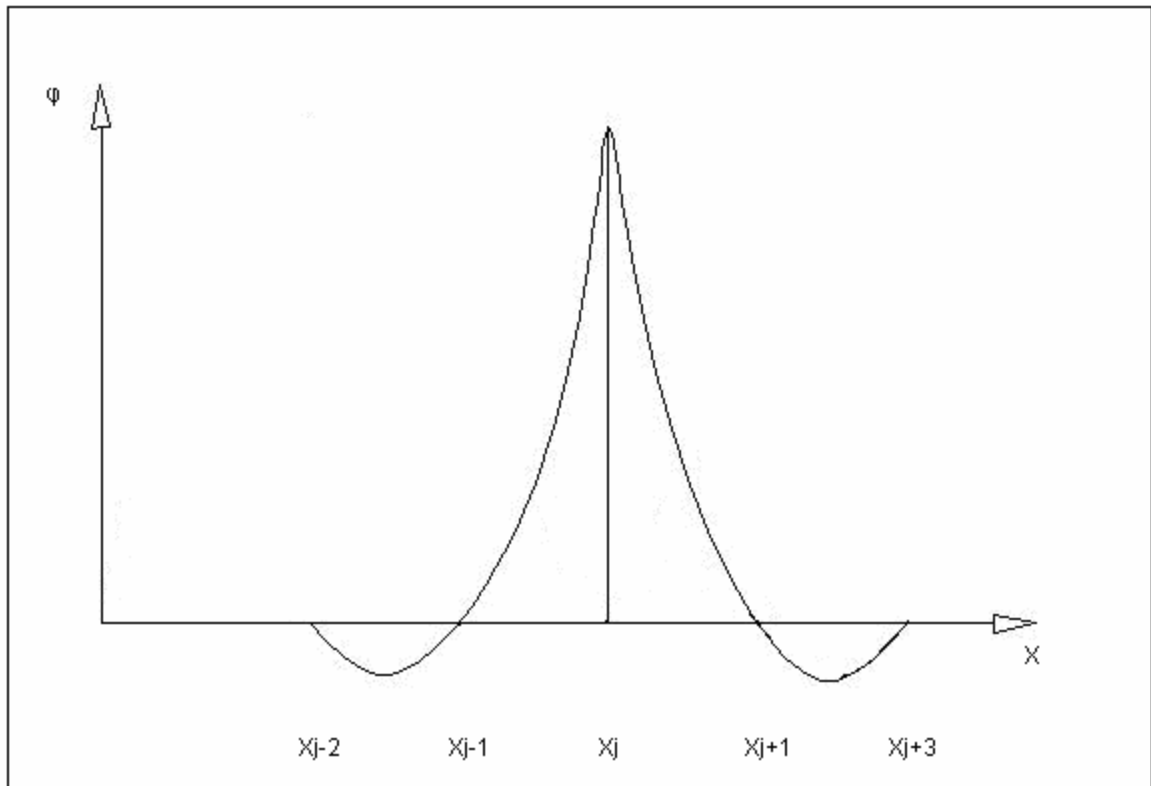


Figura 14, Funciones de forma cuárticas de tipo 2.

La ecuación 40 es representada en la figura 14

Para  $j = 3, 7, \dots, 4N+3$ , donde  $N$  es el número de elementos finitos, obtenemos,

$$\phi = \begin{cases} \frac{(x - x_{j-3}) \cdot (x - x_{j-2}) \cdot (x - x_{j-1}) \cdot (x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j-3}) \cdot (x_j - x_{j-2}) \cdot (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1})} & x_{j-3} \leq x \leq x_{j+1} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Ec. 41

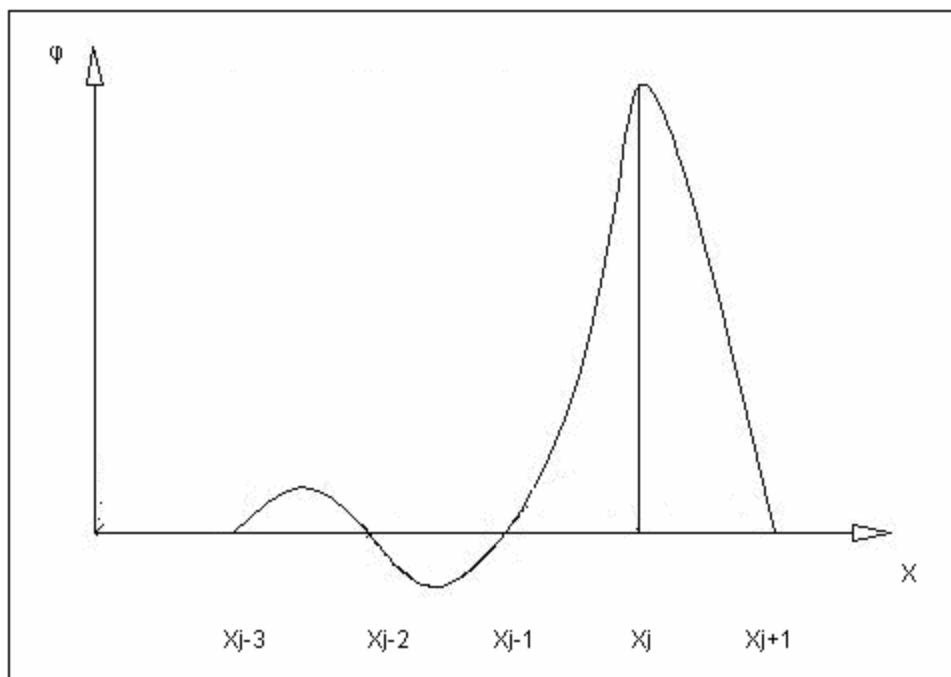


Figura 15, Funciones de forma cúbicas de tipo 3.

La ecuación 41 es representada en la figura 15.

Para  $j = 4, 5, \dots, 4 \cdot N + 4$ , donde  $N$  es el número de elementos finitos, obtenemos,

$$\phi = \begin{cases} \frac{(x - x_{j-4}) \cdot (x - x_{j-3}) \cdot (x - x_{j-2}) \cdot (x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-4}) \cdot (x_j - x_{j-3}) \cdot (x_j - x_{j-2}) \cdot (x_j - x_{j-1})} & \text{si } x_{j-4} \leq x \leq x_j \\ \frac{(x - x_{j+1}) \cdot (x - x_{j+2}) \cdot (x - x_{j+3}) \cdot (x - x_{j+4})}{(x_j - x_{j+1}) \cdot (x_j - x_{j+2}) \cdot (x_j - x_{j+3}) \cdot (x_j - x_{j+4})} & \text{si } x_j \leq x \leq x_{j+4} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Ec. 42

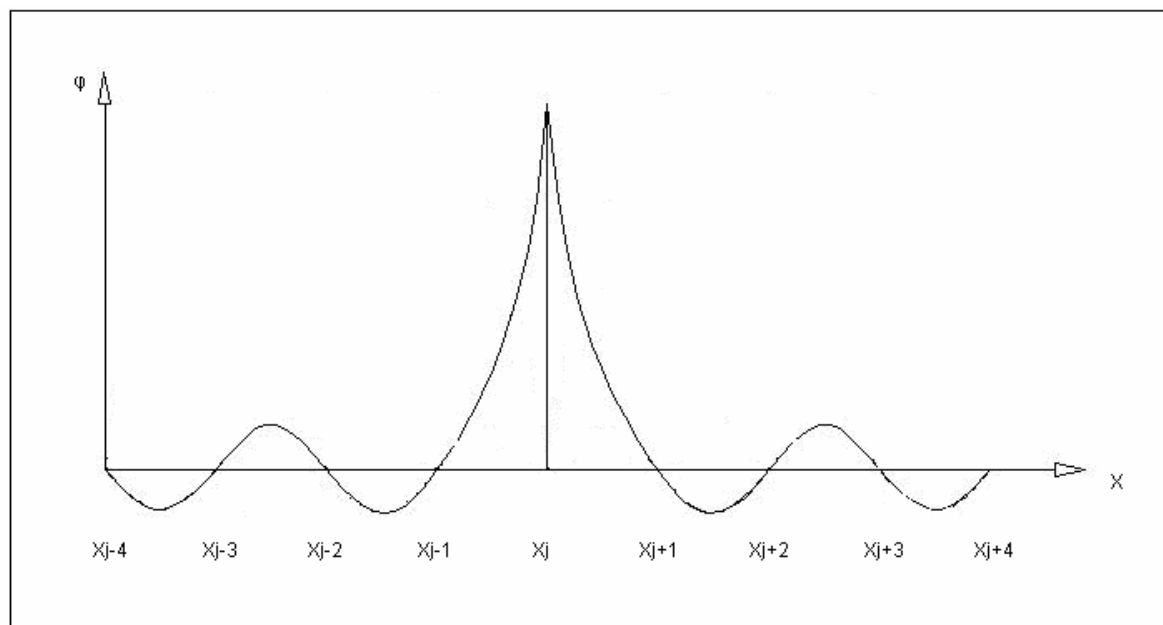


Figura 16, Funciones de forma de grado 4, para  $j = 4, 5, \dots, 4 \cdot N + 4$

La ecuación 42 es representada en la figura 16.

Los elementos de la matriz **A** se pueden de la siguiente forma

$$(F_i', F_j') = 0 \quad \text{si } |i - j| > 4$$

Ec. 43

Si  $h_j$  es constante e igual a  $h$  entonces, derivando cada una de las funciones de forma e integrando según la ecuación 22 se obtiene

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} \frac{3328}{189} & \frac{-4736}{315} & \frac{5888}{945} & \frac{-1472}{945} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-4736}{315} & \frac{496}{21} & \frac{-4736}{315} & \frac{1016}{315} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{5888}{945} & \frac{-4736}{315} & \frac{3328}{189} & \frac{-6848}{945} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-1472}{945} & \frac{1016}{315} & \frac{-6848}{945} & \frac{1970}{189} & \frac{-6848}{945} & \frac{1016}{315} & \frac{-1472}{945} & \frac{347}{945} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-6848}{945} & \frac{3328}{189} & \frac{-4736}{315} & \frac{5888}{945} & \frac{-1472}{945} & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1016}{315} & \frac{-4736}{315} & \frac{496}{21} & \frac{-4736}{315} & \frac{1016}{315} & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-142}{945} & \frac{5888}{945} & \frac{-4736}{315} & \frac{3328}{189} & \frac{-6848}{945} & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \frac{347}{945} & \frac{-1472}{945} & \frac{1016}{315} & \frac{-6848}{945} & \frac{1970}{189} & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{1970}{189} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \\ \cdot \\ \xi_M \end{pmatrix} = h b \begin{pmatrix} \frac{16}{45} \\ \frac{2}{15} \\ \frac{16}{45} \\ \frac{7}{45} \\ \frac{16}{45} \\ \frac{2}{15} \\ \frac{16}{45} \\ \frac{7}{15} \\ \cdot \\ \frac{7}{15} \end{pmatrix}$$

Este es un sistema linear de fácil resolución donde las incógnitas es el vector de los valores nodales.

Aquí se realizó un refinamiento tipo  $p$ , o sea, se refino con respecto al grado de la función de forma aproximadora. En estos ejemplos las soluciones numéricas se aproximan bien a la solución exacta. Más adelante se verá que siguiendo los pasos aplicados en estos ejemplos se desenvuelve el refinamiento tipo,  $p$ , para un problema de elasticidad anisotrópica. Además aquí también se puede ver el buen comportamiento y la efectividad que tiene el método de los elementos finitos en problemas comunes de elasticidad.

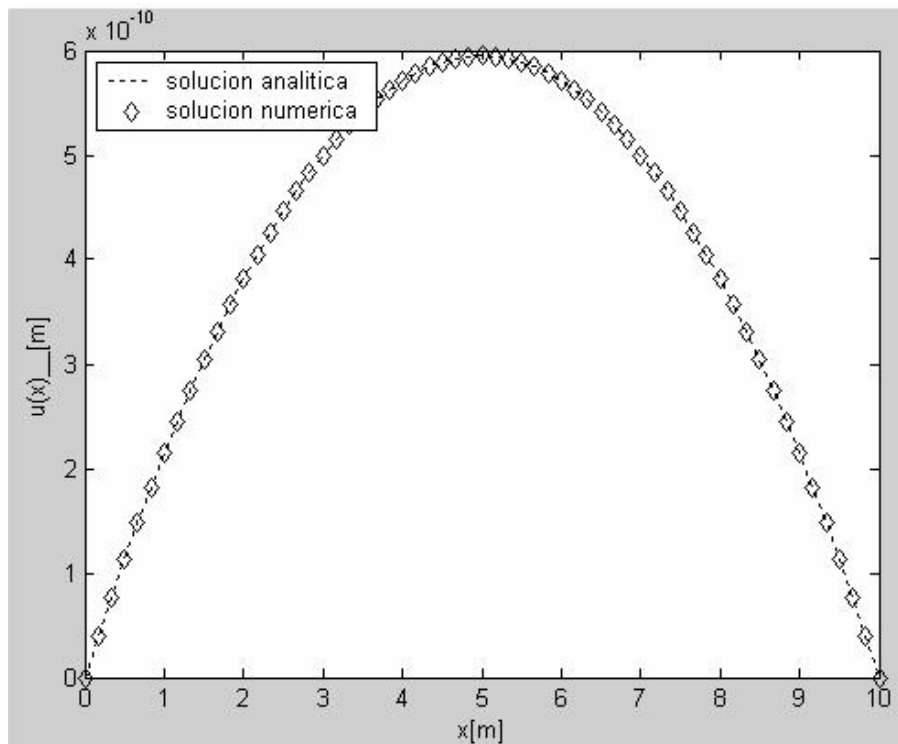


Figura 17 solución analítica y solución numérica con funciones de forma de grado 4

## 1.2 Tratamiento de Problemas Singulares

Pese a su versatilidad y gran aplicación el MEF presenta ciertos inconvenientes. En problemas comunes de la mecánica lineal esas dificultades suelen manifestarse como singularidades en las que el campo de tensión es infinito. El MEF por medio de expresiones polinómicas puede hacer una aproximación pobre alrededor de dichos puntos pero dicha aproximación puede llevar para una solución errada. Además todos los teoremas de convergencia dejarán de ser aplicables puesto que el desarrollo de Taylor ya no converge en los entornos de dichas singularidades. Mas es claro que en la práctica estas dificultades son solo ficciones matemáticas.

En la literatura son encontradas diversas técnicas para tratamiento de problemas clásicos con singularidades. Es interesante analizar la eficacia de esas técnicas en un problema de elasticidad anisotrópica.

Zienkiewicz O.C.(2000), plantea el uso de los elementos de contorno como una técnica eficaz para operar con problemas singulares, Johnson(1987) aconseja el uso de mallas adaptativas o el uso de la expansión asintótica de la solución analítica exacta en ciertos elementos(sub-dominios del problema), Obeidat (2001) recurre a mallas no uniformes con un refinamiento adecuado alrededor de la singularidad.

El tratamiento con elementos de contorno no será analizado en este trabajo mas se incluye este ítem en el contenido teórico, para dejar la base para futuro análisis.

### 1.2.1 Método de los elementos de contorno

Este procedimiento consiste en elegir un conjunto de funciones de interpolación para representar la función incógnita en la forma usual, es decir,

$$u(x) = \sum_{j=1}^M a_j \cdot N_j(x)$$

Ec. 44

Pero en este caso, a diferencia del método habitual mediante elementos finitos, estas funciones de interpolación se escogen de manera que la ecuación que rige el problema, independientemente de que sea lineal o no,

$$f(u) = L u + z$$

Ec. 45

Donde  $f(u)$  es el conjunto de ecuaciones diferenciales a resolver se satisfaga automáticamente en  $\beta$ , al menos en su forma homogénea, o sea,

$$L N = 0$$

Ec. 46

Obteniéndose así, por superposición, un conjunto de funciones de interpolación  $\mathbf{N}$  que satisfacen todos los requisitos dentro del dominio.

Como generalmente puede prescindirse de la parte no homogénea,  $z$ , en el dominio  $\beta$ , mediante la adición de una solución particular y un cambio apropiado de las condiciones de contorno. Los parámetros  $a$  pueden determinarse imponiendo que dichas condiciones se satisfagan apropiadamente, es decir, asegurando que de alguna manera

$$g(u)_i = 0, \quad \text{en el contorno } G \quad \text{Ec. 47}$$

Las soluciones basadas en elementos de contorno difieren de las aplicaciones de los elementos finitos en:

a) las funciones de forma se eligen de manera que satisfagan la ecuación 46.

b) y en que la aproximación solo se realiza en el contorno del dominio del problema.

Como ahora en el proceso de discretización solo interviene el contorno, puede utilizarse un número de parámetros mucho más reducido en comparación con los procesos de elementos finitos clásicos, lo que es económicamente más ventajoso. Otra ventaja del procedimiento de la solución de contorno es que se puede usar una función de interpolación analítica para tratar las singularidades o el infinito, evitando así las dificultades del MEF, esta definición es ilustrada claramente en la figura 18.

Es importante anotar que el método de los elementos de contorno arroja resultados satisfactorios para problemas donde la singularidad se encuentra en el contorno.

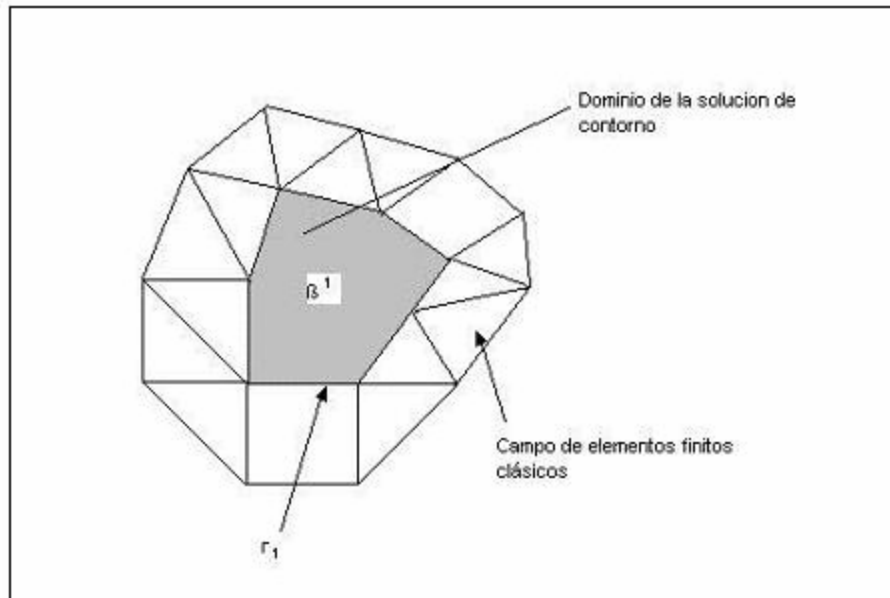


Figura 18, Elemento basado en la solución de contorno  $\beta^1$  en un campo clásico de elementos finitos

### 1.2.2 Uso de la expansión asintótica de la solución analítica

Este procedimiento consiste en emplear la expansión asintótica de la solución analítica para obtener una idea acerca de la función de forma que debe adoptarse, generalmente en adición a los términos polinómicos clásicos. La integración sigue llevándose a cabo de la manera clásica sobre todo el dominio de elemento. Dichas funciones pueden usarse simplemente para aproximar el comportamiento de un subdominio, generalmente donde se encuentra la singularidad.

### 1.2.3 Mallas Adaptativas

Este método consiste en redefinir o adaptar la malla de acuerdo a la grandeza del error. Entonces las regiones en donde el error es mayor la malla debe ser mas refinada. Este procedimiento por lo tanto consiste en una secuencia de soluciones

computacionales y en un sucesivo refinamiento de la malla alrededor de los puntos de mayor error.

En este trabajo no se implementa la técnica de las mallas adaptativas pues como se ve en el capítulo 4, los problemas de elasticidad anisotrópica no presentan un error predominante alrededor de los puntos de mayor singularidad. Por lo tanto se puede concluir ligeramente (ya que esta técnica no fue implementada y solo se está especulando a partir de resultados gráficos) que la ganancia obtenida al aplicar este procedimiento sea poca o nula.

## 2. PROBLEMA DE LEKHNITSKII

Lekhnitskii (1968), considera una placa circular de radio  $\rho_e$  en equilibrio, con material homogéneo y anisotrópico. La cual es solicitada axialmente a compresión por una fuerza radial uniformemente distribuida en el contorno tal como se muestra en la figura 19.

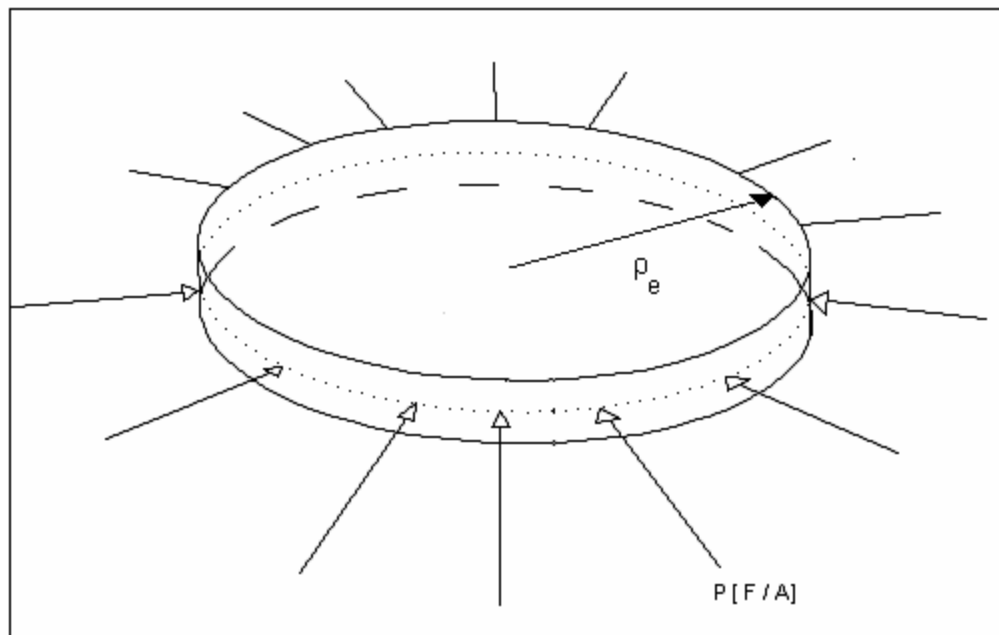


Figura 19, Placa circular bajo compresión.

Teniendo en cuenta que el problema es bidimensional, y tomando un sistema de coordenadas polares, con vectores base ortonormales  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ , entonces los tensores de las tensiones y de las deformaciones son dados por,

$$\mathbf{T} = s_{rr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + s_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + s_{r\theta} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r), \quad \text{Ec. 48}$$

$$\mathbf{E} = \epsilon_{rr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \epsilon_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \epsilon_{r\theta} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r). \quad \text{Ec. 49}$$

Cada uno de los esfuerzos esta relacionado con las deformaciones por medio de las siguientes relaciones constitutivas,

$$\left. \begin{aligned} s_{\theta\theta} &= 1 / (1 - \mu_r \mu_\theta)(E_r \epsilon_{\theta\theta} + \mu_\theta E_\theta \epsilon_{rr}), \\ s_{rr} &= 1 / (1 - \mu_r \mu_\theta)(\mu_r E_r \epsilon_{\theta\theta} + E_\theta \epsilon_{rr}), \\ s_{r\theta} &= 2G \epsilon_{r\theta} \end{aligned} \right\} \text{Ec. 50}$$

Donde  $E_r$ ,  $E_\theta$  representan el modulo de elasticidad en las direcciones tangencial,  $\theta$ , y radial,  $r$ , respectivamente,  $G$  es el modulo de rigidez a torsión.  $\mu_r$ ,  $\mu_\theta$  representan el modulo de poisson en las direcciones  $r$  y  $\theta$  respectivamente.

Las anteriores constantes siguen las siguientes propiedades para garantizar que la matriz es positiva definida y simétrica.

$$\mu_r / E_r = \mu_\theta / E_\theta, \quad E_r > 0, \quad E_\theta > 0, \quad G > 0, \quad (1 - \mu_r \mu_\theta) > 0. \quad \text{Ec. 51}$$

Debido a que el desplazamiento puede ser rotacionado simétricamente con respecto al centro de la placa, o sea el desplazamiento varia solamente con  $\theta$ , entonces las relaciones deformación-desplazamiento son dadas por

$$\epsilon_{\theta\theta} = u', \quad \epsilon_{rr} = u / r, \quad \epsilon_{r\theta} = 0, \quad \text{Ec. 52}$$

Considerando el equilibrio de una pieza de la placa tal como lo muestra la figura 20 Se tiene la siguiente ecuación  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r s_{rr}) + (s_{\theta\theta} - s_{rr}) / r = 0$

La ecuación de equilibrio puede ser expresada en función de los desplazamientos por medio de las ecuaciones 48 a 52.

$$E_r \left( \frac{d}{dr} u + \frac{d^2}{dr^2} u \right) - E_\theta \cdot \frac{u}{r^2} = 0 \quad \text{Ec.53}$$

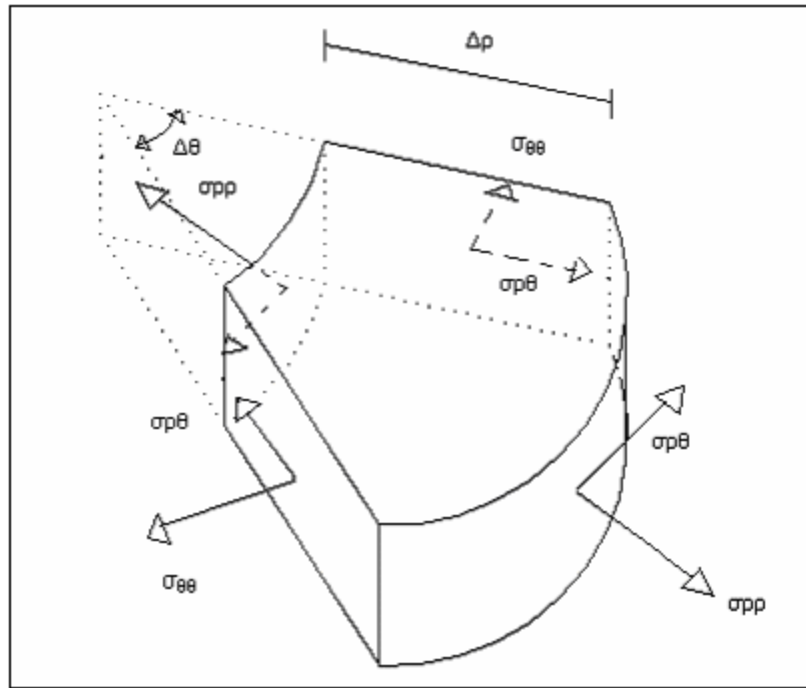


Figura 20, Equilibrio de tensiones

Imponiendo la condición natural de compatibilidad,  $u(0) = 0$ , y la condición de contorno,  $s_{??}(\rho_e) = -P$ , se obtiene la solución clásica de Lekhnistkii,

$$u(\rho) = -q \cdot \frac{\rho^k}{(\rho_e)^{k-1}} \tag{Ec. 54}$$

Donde:

$$q = P \cdot \frac{(1 - \mu_\theta \cdot \mu_\rho)}{[(E_\rho \cdot E_\theta)^{0.5} + \mu_\rho \cdot E_\theta]} \tag{Ec. 55}$$

$$k = \left( \frac{E_\theta}{E_\rho} \right) \tag{Ec. 56}$$

El termino k es mayor que cero debido a las expresiones 51.

Partiendo de las ecuaciones 48, 49, 50, 52 y 54 se obtienen las expresiones para los esfuerzos.

$$\sigma_{\theta\theta} = -P \cdot k \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_e}\right)^{k-1}, \quad \sigma_{\rho\rho} = -P \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_e}\right)^{k-1} \quad \text{Ec. 57}$$

Es fácil observar que este problema presenta tensiones infinitas en el centro de la placa,  $\rho=0$ , cuando  $P>0$  y  $k<1$ . Esta es una de las singularidades que presenta este problema.

Otro aspecto importante notado por Fosdick y Royer (2001), es que para cualquier  $P>0$  existe una región central definida por

$$0 < \left(\frac{\rho}{\rho_e}\right)^{1-k} < q \quad \text{Ec. 58}$$

para la cual  $u(\rho) < -\rho$ . Una vez que la deformación del cuerpo es dada por  $f(x) = [\rho + u(\rho)] e_\rho$ , entonces para cada partícula  $x = (\rho, \theta)$  dentro de la región central definida por la ecuación 58 vemos que el material se auto-penetra.

Esta región central posee una zona anular definida por,

$$kq < \left(\frac{\rho}{\rho_e}\right)^{1-k} < q \quad \text{Ec.59}$$

donde el determinante del gradiente de la deformación, dado por,

$$\det \nabla f = \left[1 - k \cdot q \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_e}\right)^{k-1}\right] \cdot \left[1 - q \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_e}\right)^{k-1}\right] \quad \text{Ec. 60}$$

es negativo. Fuera de esa región central el determinante es positivo.

Regiones con  $\det \nabla F < 0$ , son equivalentes a regiones con auto-intersección. Lo cual no tiene sentido físico. Por tanto una teoría que se disponga a modelar correctamente el comportamiento del material debe prever que  $\det \nabla F > 0$ .

En el problema de Lekhnitskii, Fosdick & Royer (2001) utilizan los multiplicadores de Lagrange para minimizar el problema de Lekhnitskii con la restricción que el

$\det \nabla F = \lambda > 0$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ , en todos los puntos del dominio. Al utilizar la restricción  $\det \nabla F = \lambda > 0$ , la cual es altamente no lineal, se pasa de un problema de minimización cuadrática a un problema altamente no lineal.

Aguiar (2004) y Obeidat (2001) proponen métodos numéricos para la resolución de problemas de minimización con la restricción  $\det \nabla F = \lambda > 0$ .

Aunque las soluciones obtenidas por estos autores sean buenas aproximaciones de la solución analítica del problema de Lekhnitskii con la restricción  $\det \nabla F = \lambda > 0$ , no hay todavía un estudio de convergencia de dichas soluciones.

En este trabajo se realiza un estudio de convergencia del problema de Lekhnitskii, sin restricciones, en el contexto de la teoría de la elasticidad lineal clásica. Lo cual es un punto de partida para el análisis del problema con restricciones.

### 3. FORMULACION DISCRETA.

Siendo  $\beta$ , perteneciente a  $\mathbb{R}^2$ , la referencia de un cuerpo en su posición in deformada. Mapeando los puntos  $\mathbf{y} \in \beta$  a los puntos  $\mathbf{y} = f(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + \mathbf{u}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2$ , donde  $\mathbf{u}(\mathbf{y})$  es el desplazamiento del punto  $\mathbf{y}$ . El contorno,  $\partial\beta$ , de  $\beta$  es compuesto por dos partes,  $\partial_1\beta$  y  $\partial_2\beta$ ,  $\partial\beta = \partial_1\beta \cup \partial_2\beta$ , tal que la carga total a tracción esta sobre los puntos  $\mathbf{y} \in \partial_2\beta$  y tal que  $\mathbf{u}(\mathbf{y})=0$  para los puntos  $\mathbf{y} \in \partial_1\beta$ .

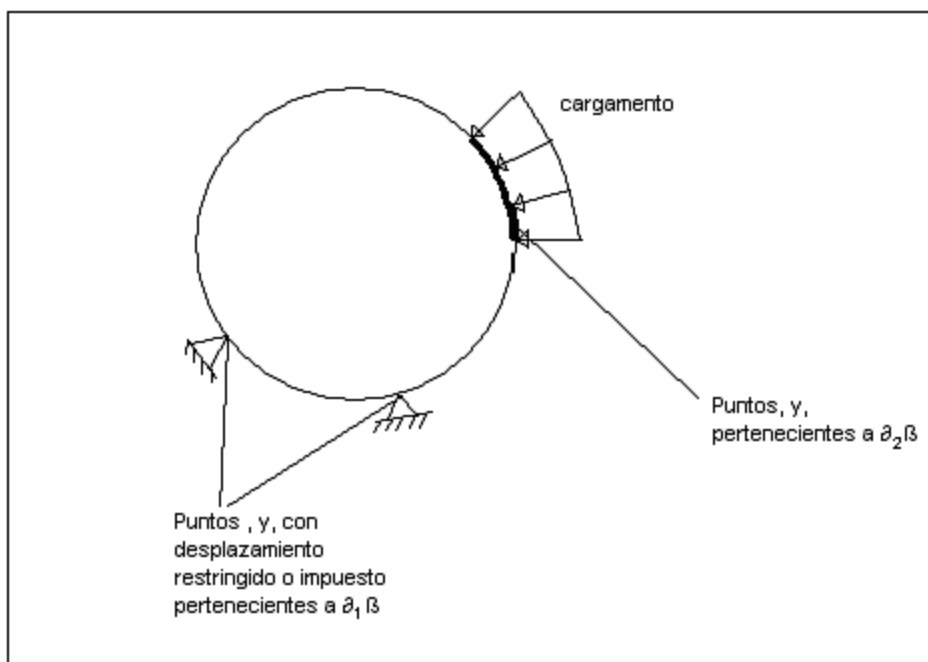


Figura 21, Partes del Contorno

Además una fuerza de cuerpo  $b(\mathbf{y})$  por unidad de volumen de  $\beta$  actúa en los puntos  $\mathbf{y} \in \beta$ .

Resolver el problema de minimización es equivalente a resolver el problema diferencial de equilibrio, ver sección 2.3.1.3. Entonces el objetivo es encontrar  $\mathbf{v}$  tal que la energía potencial sea mínima.

$$\min. e[\mathbf{v}], \quad \text{tal que } \mathbf{v} \in U \quad \text{Ec. 61}$$

Donde  $e[\mathbf{v}]$  es la energía potencial total de la teoría lineal clásica y puede ser escrita como,

$$e[\mathbf{v}] = \frac{1}{2} a[\mathbf{v}, \mathbf{v}] - f[\mathbf{v}], \quad \text{Ec. 62}$$

$$a[\mathbf{v}, \mathbf{v}] \equiv \int_{\mathcal{B}} \mathbb{C} [\nabla \text{sym } \mathbf{v}] \cdot [\nabla \text{sym } \mathbf{v}] \, dx, \quad f[\mathbf{v}] \equiv \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\partial 2\mathcal{B}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \text{Ec. 63}$$

Donde,  $[\nabla \text{sym } \mathbf{v}]$  es el tensor que define el campo infinitesimal de desplazamientos y  $\mathbb{C}$  es el tensor de elasticidad.

$$[\nabla \text{sym } \mathbf{v}] = [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] / 2 \quad \text{Ec. 64}$$

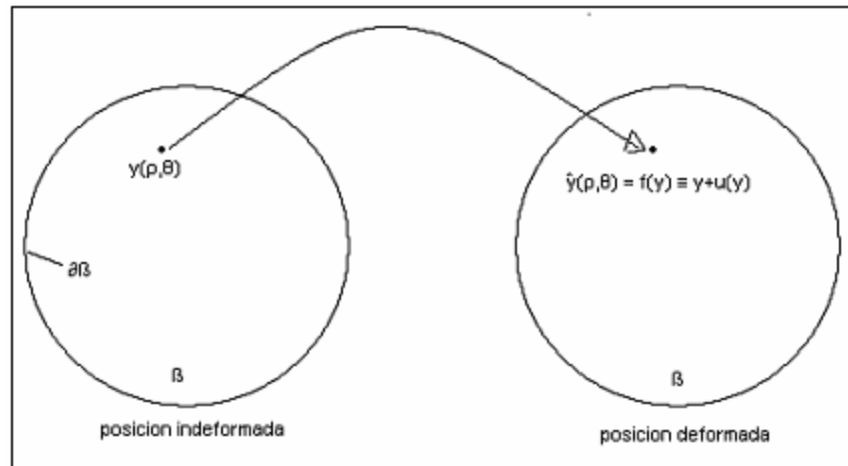


Figura 22, Mapeamiento de la posición indeformada a la posición deformada

Por las ecuaciones 62 y 63 se define la energía potencial total como,

$$e[\mathbf{v}] = \frac{\Pi}{(1 - \mu_p \cdot \mu_\theta)} \left[ \int_0^{P_\theta} \left[ E_p \left( \frac{d}{d\rho} \mathbf{v} \right)^2 \cdot \rho + \mu_p \cdot E_\theta \cdot \frac{d}{d\rho} (\mathbf{v}^2) + E_\theta \cdot \frac{\mathbf{v}^2}{\rho} \right] d\rho \right] + 2 \cdot \Pi \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}(\rho_e) \cdot \rho_e \quad \text{Ec. 65}$$

Definiendo

$$(\mathbf{v}/\rho, \mathbf{v}/\rho) \equiv \int_0^{\rho_0} E_\theta \cdot \frac{\mathbf{v}^2}{\rho} d\rho, \quad (\mathbf{v}', \mathbf{v}') \equiv \int_0^{\rho_0} E_\rho \left( \frac{d}{d\rho} \mathbf{v} \right)^2 \cdot \rho d\rho$$

Ec. 66

Se puede expresar la ecuación 65 como:

$$\frac{\varepsilon[\mathbf{v} e_\rho]}{2 \cdot \Pi} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{E_\rho}{1 - \mu_\rho \mu_\theta} (\mathbf{v}, \mathbf{v}') + \frac{E_\theta}{1 - \mu_\rho \mu_\theta} \left( \frac{\mathbf{v}}{\rho}, \frac{\mathbf{v}}{\rho} \right) + \mu_\rho \cdot E_\theta \cdot \mathbf{v}(\rho_e)^2 \right] + P \cdot \mathbf{v}(\rho_e) \cdot \rho_e$$

Ec.67

Si se impone una pequeña perturbación  $dw$ , tal que,  $v = u + dw$ , donde  $w = U_h, d$  ?  
R.

Entonces la primera variación puede ser definida como

$$\frac{\varepsilon(\mathbf{v} e_\rho)}{2 \cdot \Pi} - \frac{\varepsilon(\mathbf{u} e_\rho)}{2 \cdot \Pi} = \delta \cdot \left[ \frac{E_\rho}{1 - \mu_\rho \mu_\theta} (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \frac{E_\theta}{1 - \mu_\rho \mu_\theta} \left( \frac{\mathbf{u}}{\rho}, \frac{\mathbf{w}}{\rho} \right) + \mu_\rho \cdot E_\theta \cdot \mathbf{u}(\rho_e) \cdot \mathbf{w}(\rho_e) + P \cdot \mathbf{w}(\rho_e) \cdot \rho_e \right] + \Theta(\delta^2)$$

Ec.68

Donde  $\Theta(\delta^2)$  términos de orden superior, entonces evaluando el limite cuando  $\delta$  tiende a cero y aplicando la definición de derivada,

$$\frac{1}{2 \cdot \Pi} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(\varepsilon(\mathbf{v} e_\rho) - \varepsilon(\mathbf{u} e_\rho))}{\delta} = \frac{1}{2 \cdot \Pi} \cdot \frac{d}{d\delta} \varepsilon(\mathbf{v} e_\rho) = 0$$

Ec. 69

Entonces la mínima energía puede ser escrita como

$$\frac{1}{(1 - \mu_\rho \cdot \mu_\theta)} \left[ \int_0^{\rho_0} \left[ E_\rho \left[ \frac{d}{d\rho} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{g}) \right]^2 \cdot \rho + \mu_\rho \cdot E_\theta \cdot \frac{d}{d\rho} [(s \cdot g)^2] + E_\theta \cdot \frac{(s \cdot g)^2}{\rho} \right] d\rho \right] = - P \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{g}(\rho_e) \cdot \rho_e$$

Ec. 70

Siendo  $v_h = \mathbf{e}_\rho$  ?  $U_h$  una función definida como,  $v_h(?) = \mathbf{s} \cdot \mathbf{g}(?)$ ,

Lo cual es el producto interno entre  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{g} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ .

Los coeficientes  $s_i$  son definidos como  $s_i = v_h(s_i)$  y las funciones  $F_i$  son proporcionadas por los polinomios de Lagrange (ver anexo 1).

Tomando  $v_h$  como función aproximadora y reemplazando en la ecuación 65 se obtiene la expresión discretizada de la energía potencial total.

$$\frac{1}{(1 - \mu_p \cdot \mu_\theta)} \left[ \int_0^{\rho_e} \left[ E_p \left[ \frac{d}{d\rho} (s \cdot g) \right]^2 \cdot \rho + \mu_p \cdot E_\theta \cdot \frac{d}{d\rho} [(s \cdot g)^2] + E_\theta \cdot \frac{(s \cdot g)^2}{\rho} \right] d\rho \right] = -P \cdot s \cdot g(\rho_e) \cdot \rho_e \quad \text{Ec. 75}$$

$$\underbrace{\frac{1}{(1 - \mu_p \cdot \mu_\theta)} \left[ \int_0^{\rho_e} \left[ E_p \left[ \frac{d}{d\rho} (s \cdot g) \right]^2 \cdot \rho + E_\theta \cdot \frac{(s \cdot g)^2}{\rho} \right] d\rho \right]}_{(-1-)} + \underbrace{\mu_p \cdot E_\theta \cdot \frac{1}{(1 - \mu_p \cdot \mu_\theta)} (s(\rho_e) \cdot g(\rho_e))^2}_{(-2-)} = \underbrace{-P \cdot s \cdot g(\rho_e) \cdot \rho_e}_{(-3-)} \quad \text{Ec. 76}$$

Siendo la parte uno de 76

$$\int_0^{\rho_e} \frac{\Pi}{(1 - \mu_p \mu_\theta)} \left[ \left[ E_p \cdot \left[ \sum_{i=1}^M \xi_i \cdot \left( \frac{d}{d\rho} \phi_i \right) \right] \right]^2 \cdot \rho + \frac{E_\theta \cdot \left( \sum_{i=1}^M \xi_i \cdot \phi_i \right)^2}{\rho} \right] d\rho \quad \text{Ec.77}$$

desarrollando  $\left[ \sum_{i=1}^M \xi_i \cdot \left( \frac{d}{d\rho} \phi_i \right) \right]^2$  Ec. 78

Se obtiene

$$(\xi_1)^2 \cdot \left( \frac{d}{d\rho} \phi_1 \right)^2 + (\xi_2)^2 \cdot \left( \frac{d}{d\rho} \phi_2 \right)^2 + \dots + (\xi_M)^2 \cdot \left( \frac{d}{d\rho} \phi_M \right)^2 +$$

$$+ 2 \cdot \left[ \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \left( \frac{d}{d\rho} \phi_1 \right) \cdot \left( \frac{d}{d\rho} \phi_2 \right) + \dots + \xi_{M-1} \cdot \xi_M \cdot \left( \frac{d}{d\rho} \phi_{M-1} \right) \cdot \left( \frac{d}{d\rho} \phi_M \right) \right]. \quad \text{Ec. 79}$$

desarrollando  $\left( \sum_{i=1}^M \xi_i \cdot \phi_i \right)^2$  Ec. 80

Se obtiene

$$(\xi_1)^2 \cdot (\phi_1)^2 + (\xi_2)^2 \cdot (\phi_2)^2 + \dots + (\xi_M)^2 \cdot (\phi_M)^2 + 2 \cdot [\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot (\phi_1) \cdot (\phi_2) + \dots + \xi_{M-1} \cdot \xi_M \cdot (\phi_{M-1}) \cdot (\phi_M)]$$

Entonces la expresión (-1-) se puede representar en forma matricial de la siguiente manera

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M) \cdot \underbrace{\int_0^{\rho_e} E_\rho \cdot \left[ \frac{d}{d\rho} \phi_i \cdot \left( \frac{d}{d\rho} \phi_j \right) \cdot \rho \right] + E_0 \cdot \frac{(\phi_i \cdot \phi_j)}{\rho} d\rho}_{\text{a}_{ij}} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_M \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 81}$$

Siempre recordando que 81 es una expresión igualada al vector

$$-P \mathfrak{g}(\rho_e) \rho_e \quad \text{Ec. 82}$$

La parte izquierda de la ecuación 70 se puede expresar en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1M} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{M1} & \alpha_{M2} & \dots & \alpha_{MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^M \alpha_{1j} \cdot \xi_j \\ \sum_{j=1}^M \alpha_{2j} \cdot \xi_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{j=1}^M \alpha_{Mj} \cdot \xi_j \end{pmatrix}$$

Ec. 83

Donde el termino  $a_{MM}$  tiene adicionada la parte (-2-) de la ecuación 76.

En la Ec. 83 esta expresado el problema de minimización como un problema variacional, de la forma  $\mathbf{Ax} = b$ . Entonces el vector solución,  $x$ , se obtiene así,

$$x = b \mathbf{A}^{-1}$$

### 3.1 Aproximación con polinomios

El procedimiento seguido para aproximar el problema de Lekhnitskii esta basado en los ejemplos de la sección 1.1.5.

#### 3.1.1 Aproximación con funciones de forma lineares.

Utilizando las funciones de forma planteadas en la ecuación 28, e incorporándolas en la 81 y 76 se plantea el problema, siguiendo un procedimiento semejante al realizado en la sección 1.1.5.1.

Cada uno de los elementos de la matriz  $\mathbf{A}$ , la cual es tridiagonal, esta dado por:

$$\int_0^{\rho_0} E_{\rho} \cdot \left[ \frac{d}{d\rho} \phi_i \cdot \left( \frac{d}{d\rho} \phi_j \right) \cdot \rho \right] + E_{\theta} \cdot \frac{(\phi_i \cdot \phi_j)}{\rho} d\rho$$

Ec. 84

Recordando siempre que al valor (M,M) de la matriz **A** se le debe adicionar la expresión (-2-) de la ecuación 76.

### 3.1.2 Aproximación con funciones de forma cuadráticas

Utilizando las funciones de forma planteadas en las ecuaciones 32 y 33, e incorporándolas en la 81 y 76 se plantea el problema, siguiendo un método semejante al realizado en la sección 1.1.5.2.

Cada uno de los elementos de la matriz **A**, la cual es una matriz con 5 diagonales diferentes de cero, esta dado por:

$$\int_0^{\rho_0} E_{\rho} \cdot \left[ \frac{d}{d\rho} \phi_i \cdot \left( \frac{d}{d\rho} \phi_j \right) \cdot \rho \right] + E_{\theta} \cdot \frac{(\phi_i \cdot \phi_j)}{\rho} d\rho$$

Ec. 85

Recordando siempre que al valor (M,M) de la matriz **A** se le debe adicionar la expresión (-2-) de la ecuación 76.

### 3.1.3 Aproximación con funciones de forma cúbicas

Utilizando las funciones de forma planteadas en las ecuaciones 35 a 37, e incorporándolas en la 81 y 76 se plantea el problema, siguiendo un método semejante al realizado en la sección 1.1.5.3.

Cada uno de los elementos de la matriz **A**, la cual es una matriz con 7 diagonales diferentes de cero, esta dado por:

$$\int_0^{\rho_0} E_{\rho} \cdot \left[ \frac{d}{d\rho} \phi_i \cdot \left( \frac{d}{d\rho} \phi_j \right) \cdot \rho \right] + E_{\theta} \cdot \frac{(\phi_i \cdot \phi_j)}{\rho} d\rho$$

Ec. 85

Recordando siempre que al valor (M,M) de la matriz **A** se le debe adicionar la expresión (-2-) de la ecuación 76.

### 3.1.4 Aproximación con funciones de forma de grado 4

Utilizando las funciones de forma planteadas en las ecuaciones 39 a 45, e incorporándolas en la 81 y 76 se plantea el problema, siguiendo un método semejante al realizado en la sección 1.1.5.4.

Cada uno de los elementos de la matriz **A**, la cual es una matriz con 9 diagonales diferentes de cero, esta dado por:

$$\int_0^{\rho_0} E_{\rho} \cdot \left[ \frac{d}{d\rho} \phi_i \cdot \left( \frac{d}{d\rho} \phi_j \right) \cdot \rho \right] + E_{\theta} \cdot \frac{(\phi_i \cdot \phi_j)}{\rho} d\rho$$

Ec. 86

Siguiendo la ecuación 76 al elemento (M,M) de la matriz **A** se le suma la expresión (-2-) de la ecuación de dicha ecuación.

### 3.2 Aproximación con enriquecimiento

Es importante saber si las técnicas, usadas para tratamiento de los ejemplos clásicos con singularidad en mecánica lineal, son aplicables a este tipo de problemas anisotrópicos con singularidad.

Jonson (1987) propone enriquecer el intervalo donde se encuentra la singularidad con funciones de forma con un comportamiento similar al de la solución exacta (expansión asintótica de la solución analítica, ver sección 1.2.)

$$u(\rho) = -c_1 \cdot \frac{\rho^k}{(\rho_e)^{k-1}}$$

Ec. 87

La función enriquecedora también debe cumplir con los requisitos de los elementos finitos. Entonces definimos  $\tilde{\varphi}_1$  como función de forma para el primero intervalo,

$$\tilde{\varphi}_1(\rho_1) = \begin{cases} \frac{\rho^k}{\rho_1^k} & \text{Si } 0 < \rho < \rho_1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Ec. 88

La técnica de enriquecimiento con la función planteada en la ecuación 88 es mostrado en la figura 23.

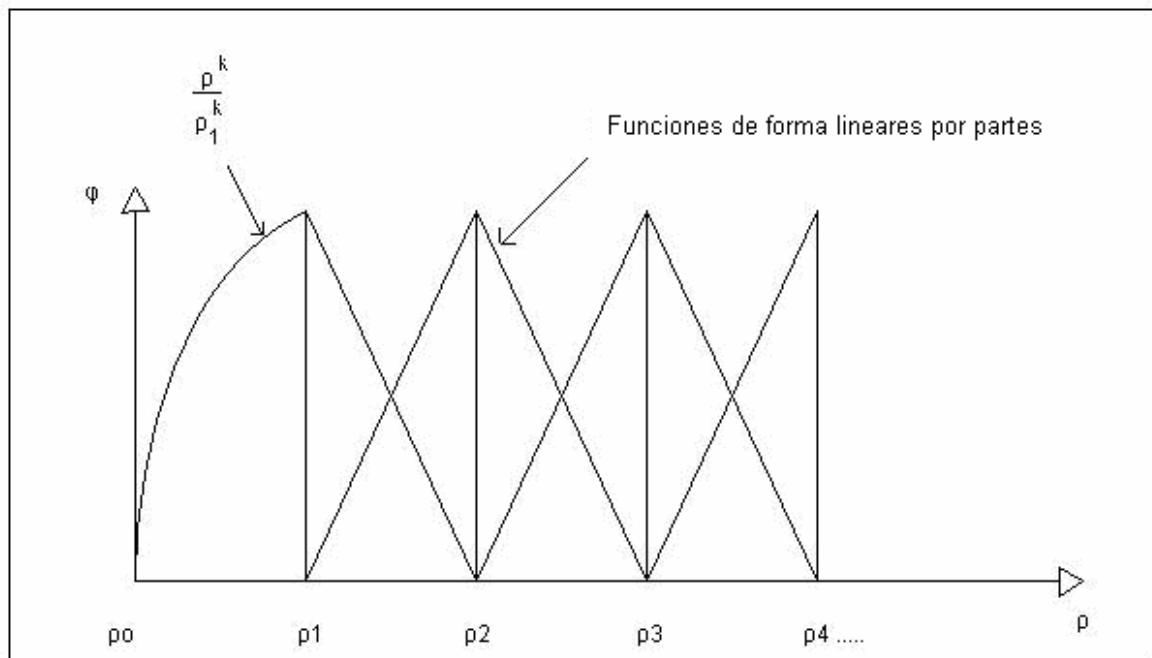


Figura 23, Aproximación con función enriquecedora.

### 3.3 Norma $H_1$

La norma  $H_1$  proporciona una cantidad escalar, producto de una integración, que da una estimativa del error.

La norma  $H_1$  es definida como

$$\left( \|u_h - u\| \right)_{H_1} = \left[ \int_{\Omega} \left[ (|u_h - u|)^2 + (|u'_h - u'|)^2 \right] dV \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{Ec. 89}$$

Donde  $u_h$  es la solución aproximada,  $u$  es la solución exacta.

Entonces la integral de volumen puede ser redefinida como,

$$\left( \|u_h - u\| \right)_{H_1} = \left[ 2 \cdot \Pi \int_0^{\rho_e} \left[ (|u_h - u|)^2 + (|u'_h - u'|)^2 \right] \cdot \rho \, d\rho \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{Ec. 90}$$

$$\left( \|u_h - u\| \right)_{H_1} = \left[ 2 \cdot \Pi \left[ \int_0^{\rho_e} \left[ \left[ \left| s \cdot g + \frac{q \cdot \rho^k}{(\rho_e)^{k-1}} \right|^2 \right] + \left[ \left| s \cdot g' + \frac{q \cdot k \cdot \rho^{k-1}}{(\rho_e)^{k-1}} \right|^2 \right] \right] \cdot \rho \, d\rho \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{Ec.. 91}$$

Donde  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{g}$  son los vectores con los valores nodales y con las funciones de forma, respectivamente. Las constantes  $q$  y  $k$  son definidas en las ecuaciones 55 y 56.

#### 4. RESULTADOS NUMERICOS

Con la formulación planteada en la sección 3 fue resuelto numéricamente el problema de Lekhnitskii. Con el objeto de comparar resultados se usaron los datos utilizados por otros autores como Obeidat (2001) y Aguiar (2004), o sea, se utilizaron los mismos parámetros geométricos y las mismas constantes del material. Los datos utilizados por estos autores fueron: el radio del disco  $r_e = 1$ , la carga aplicada  $P = 500$ , y las constantes elásticas,  $c_{11} = E_r / (1 - \mu_r \mu_z) = 10^5$ ,  $c_{22} = E_r / (1 - \mu_r \mu_z) = 10^3$ ,  $c_{12} = \mu_r c_{22} = 10^3$ .

##### 4.1 Análisis de Convergencia del MEF.

En esta sección se investigan las propiedades de convergencia de las soluciones aproximadas, obtenidas por el Método de los Elementos Finitos, de problemas singulares de la elasticidad lineal clásica anisotrópica.

Figura 24, desplazamiento radial,  $u$ , con el radio  $r$ , aquí se comparo la solución analítica con la solución numérica del problema de Lekhnitskii. Para esto se utilizaron 60 grados de libertad. Esta parte del grafico da una idea clara de la diferencia entre las soluciones analítica y numérica. Se incluyo en esta figura la solución numérica enriquecida en el primero intervalo para mostrar la eficiencia que esta técnica puede poseer en problemas de elasticidad anisotrópica con singularidad.

La línea continua corresponde a la solución analítica, calculada con la ecuación 54, los círculos describen la solución numérica enriqueciendo la función aproximadora,  $u_h$ , y la función teste,  $v$ , del primero intervalo con la función de

forma definida en la ecuación 88. Las cruces representan la solución numérica enriqueciendo solamente la función aproximadora  $u_h$  del primero intervalo. Es fácil notar la proximidad de las soluciones halladas con función enriquecedora con la solución exacta, Obeidat (2001) ya había realizado el mismo procedimiento de enriquecimiento que se efectuó en este trabajo mas los resultados encontrados por este autor evidencian un error mayor\*. Finalmente la línea a trazos describe la aproximación dada por el MEF utilizando solo funciones lineares en todo el dominio discretizado. Obeidat (2001) comento que la solución numérica utilizando solo funciones de forma lineares por partes estaba distante de la solución exacta como se ve claramente en la figura 24.

En las figuras 25 a 28 se muestra un refinamiento con respecto al tamaño del elemento finito. Cada una de las graficas fue modelada con un polinomio aproximador de diferente grado, los cuales varían desde polinomios lineares de grado uno hasta polinomios de grado 4. Para efecto de comparación en las cuatro graficas se utilizo la misma separación entre nodos. El refinamiento es hecho para cada uno de los siguientes grados de libertad,

$$M = 60, 120, 240, 480, 960, 1920 = \text{Numero de grados de libertad.} \quad \text{Ec. 92}$$

En la figura 25 las líneas a trazos exhiben la solución numérica modelada con funciones de forma lineares ( $d=1$ ), en la figura 26 las líneas a trazos representan la solución numérica modelada con funciones de forma cuadráticas ( $d=2$ ), en la figura 27 las líneas a trazos simbolizan la solución numérica modelada con funciones de forma cúbicas ( $d=3$ ), en la figura 28 las líneas a trazos describen la solución numérica con funciones de forma de grado 4 ( $d=4$ ). En todas las anteriores graficas  $M$  varia según lo indica la ecuación 92, y la línea continua representa la solución exacta calculada con la ecuación 54. Se utiliza  $d$  para referirse al grado del polinomio aproximador.

---

\* ver Obeidat (2001) figura 1.

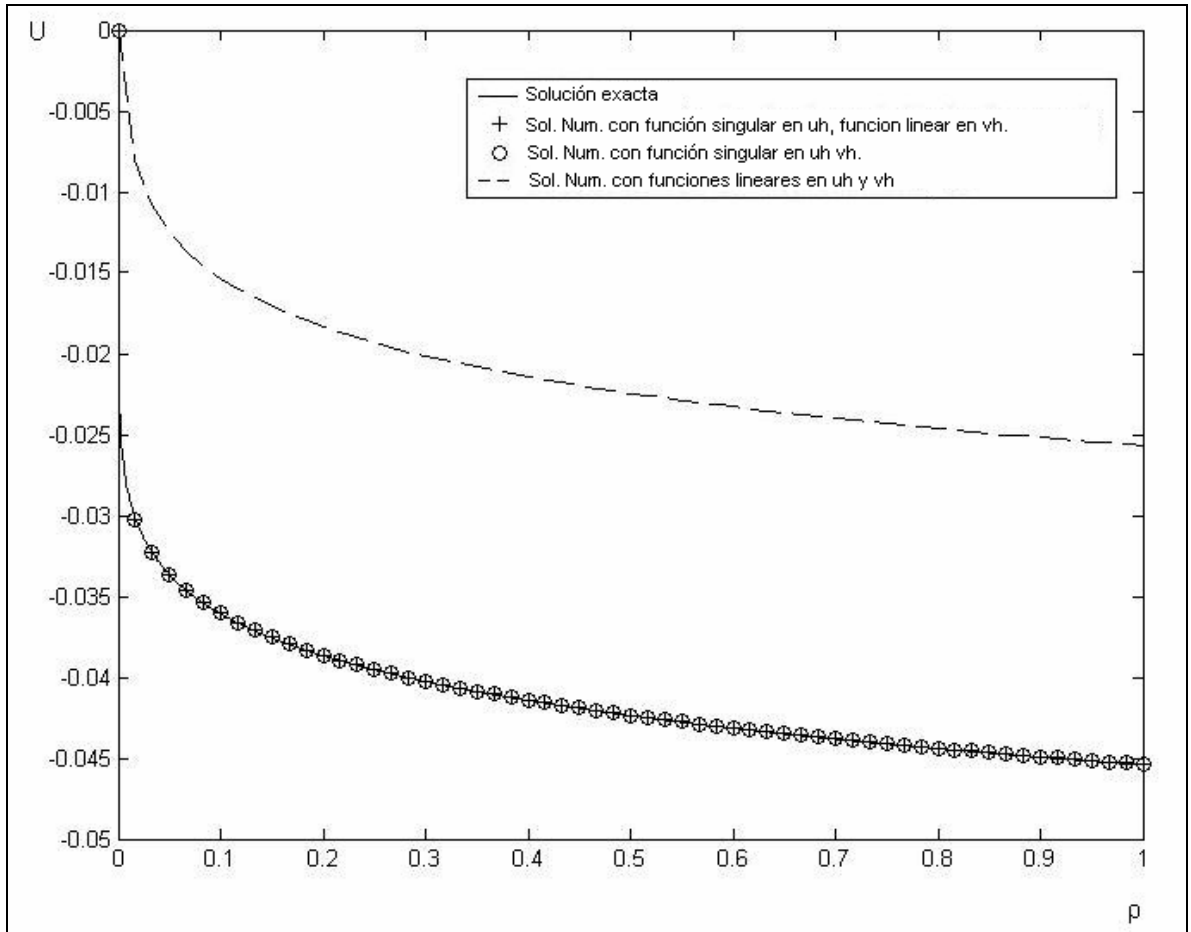


Figura 24, Desplazamiento radial,  $u$ , versus el radio del disco,  $\rho$ . Soluciones para el problema de Lekhnitskii.

Observando en las figuras 25 a la 28 se puede suponer que el método converge, mas también es fácil notar que es de una forma muy lenta, para la solución exacta. Este supuesto sirvió como antecedente para realizar el análisis de convergencia presentado en las figuras 29 a 32.

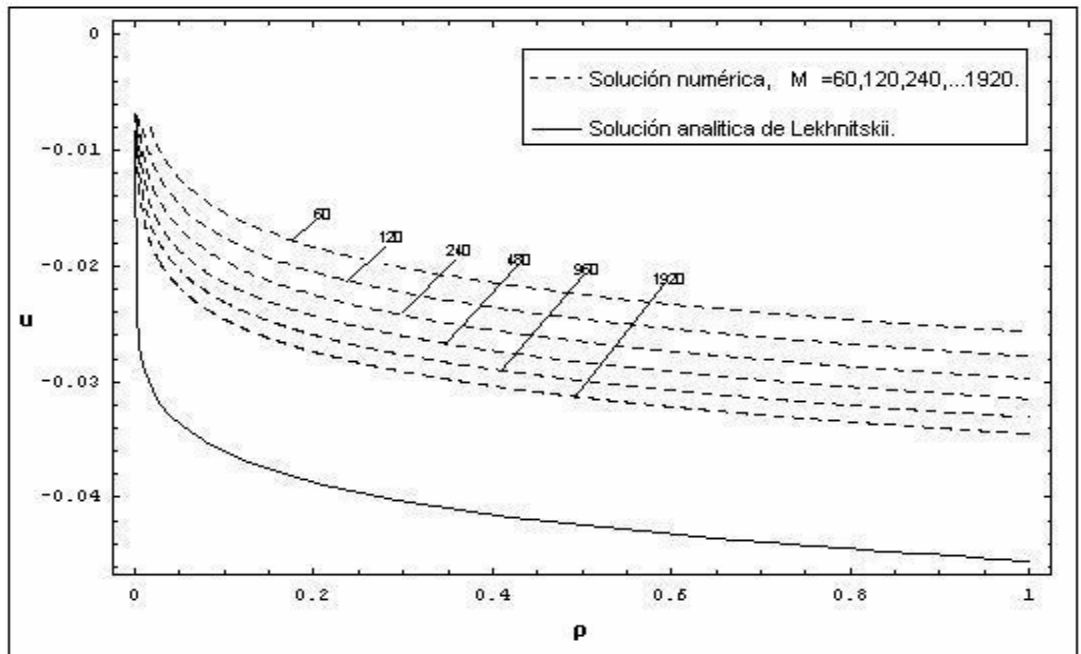


Figura 25, Desplazamiento radial,  $u$ , versus el radio del disco,  $\rho$ . MEF con funciones de forma lineares realizando un refinamiento de la malla con respecto al tamaño del elemento

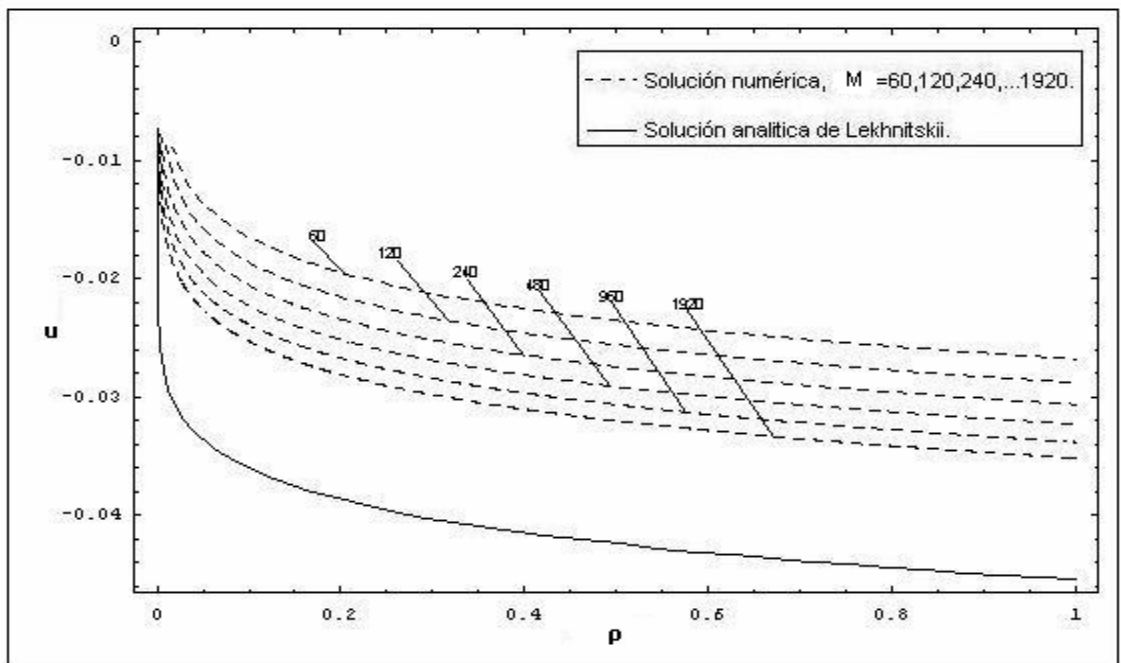


Figura 26, Desplazamiento radial,  $u$ , versus el radio del disco,  $\rho$ . MEF con funciones de forma cuadráticas realizando un refinamiento de la malla con respecto al tamaño del elemento

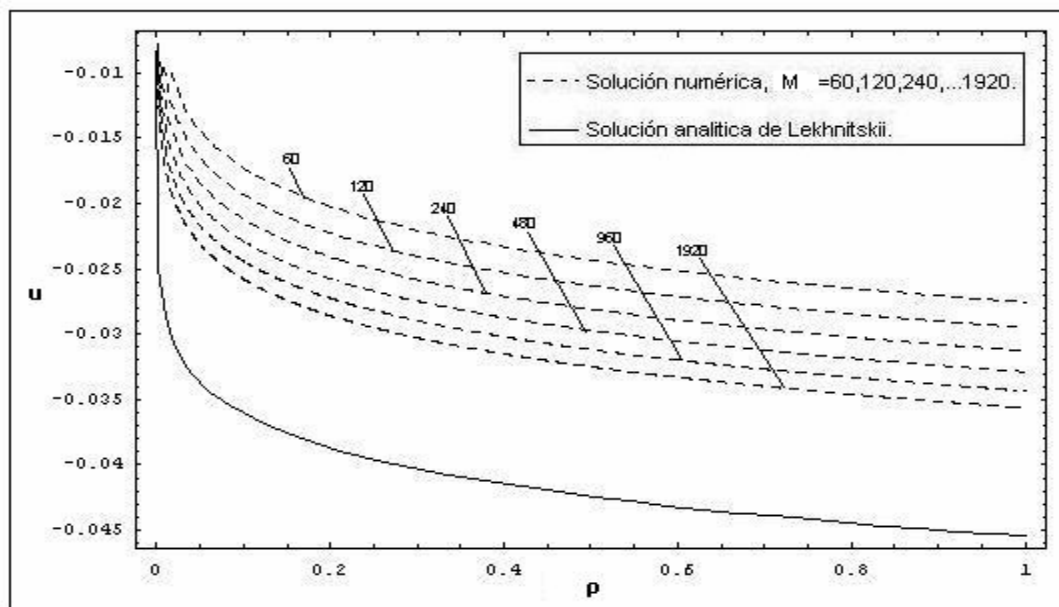


Figura 27, Desplazamiento radial,  $u$ , versus el radio del disco,  $\rho$ . MEF con funciones de forma cúbicas realizando un refinamiento de la malla con respecto al tamaño del elemento.

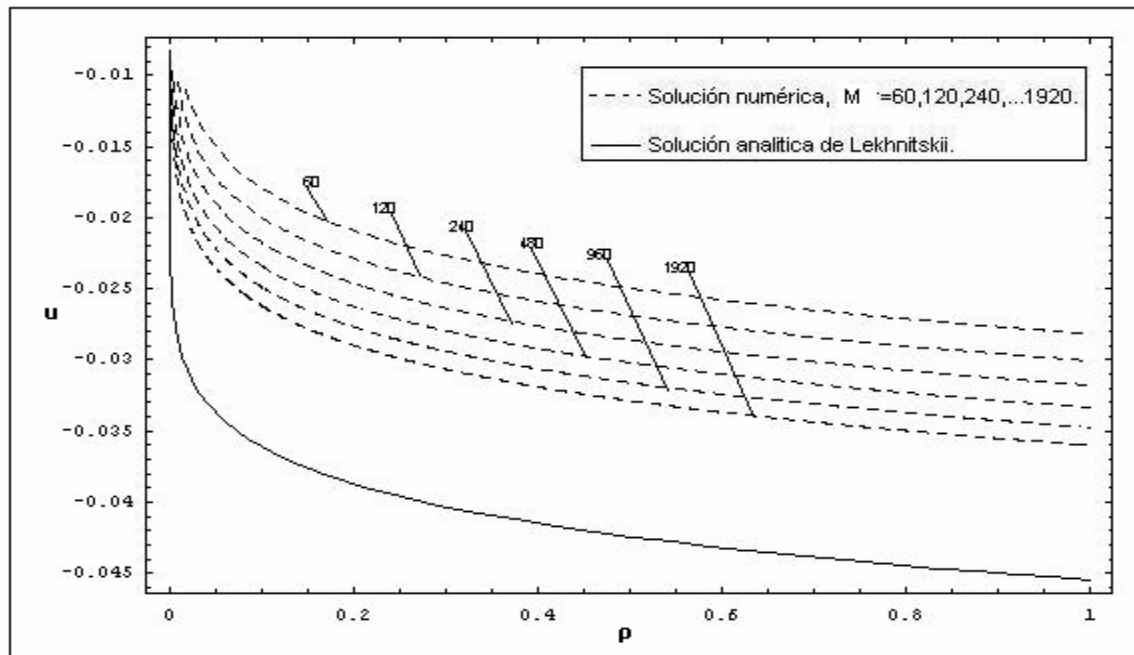


Figura 28, Desplazamiento radial,  $u$ , versus el radio del disco,  $\rho$ . MEF con funciones de forma de grado 4 realizando un refinamiento de la malla con respecto al tamaño del elemento.

Estas graficas fueron realizadas en escala logarítmica para un manejo mas adecuado de los valores obtenidos. La letra “d” es utilizada para referirse al grado del polinomio aproximador,  $\|u - u_h\|_{H_1}$  simboliza la norma de la energía  $H_1$  descrita en la sección 3.3, M define el numero de grados de libertad y  $R^2$  es un indicador de error\*.

La figura 29, contiene el logaritmo en base 10 de la norma  $H_1$ , descrita en la sección 3.3, versus el logaritmo en base 2 del número de grados de libertad, M, del problema de Lekhnitskii modelado con funciones de forma lineares. Los datos correspondientes a esta figura se encuentran en la tabla 1.

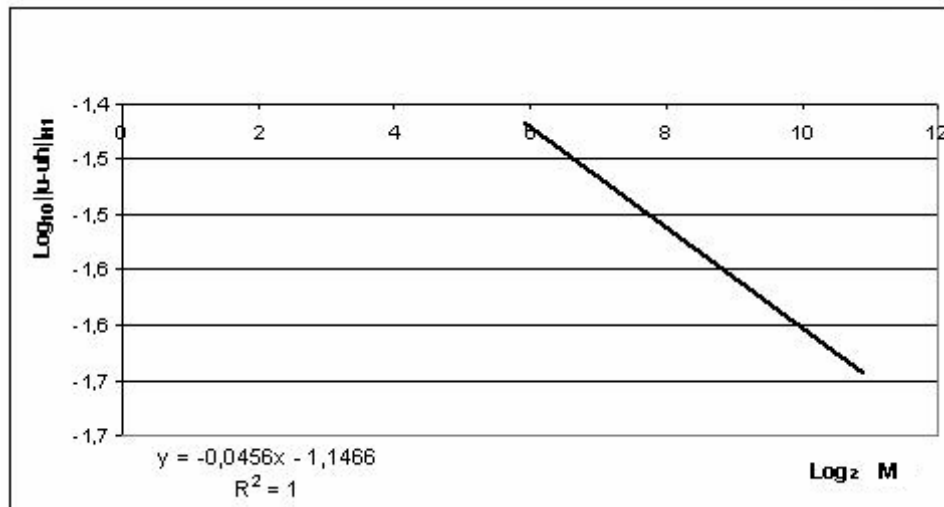


Figura 29, El logaritmo en base 10 de la norma  $H_1$  versus el logaritmo en base 2 del numero de grados de libertad. Análisis de convergencia de la solución numérica con funciones de forma lineares en todo el dominio.

\*  $R^2$ , utilizado en el software Excel 2003, es un numero de 0 a 1 que determina el grado de correspondencia entre los valores estimados para la línea de tendencia y los datos reales. La línea de tendencia es mas confiable cuando el valor de  $R^2$  es 1 o próximo de uno, este valor es conocido también como coeficiente de determinación. Ver Excel 2003.

Aproximación con funciones lineares(d=1)			
M	$\ u-uh\ _{H^1}$	$\text{Log}_2 M$	$\text{Log}_{10}\ u-uh\ _{H^1}$
60	0,038357	5,906890596	-1,416155367
120	0,034593	6,906890596	-1,461011773
240	0,031162	7,906890596	-1,506374677
480	0,028051	8,906890596	-1,552051652
960	0,025241	9,906890596	-1,597893443
1920	0,022712	10,9068906	-1,64374462

Tabla 1, Error  $H_1$ -norm con relación a M, para funciones lineares en todo el dominio

Esta representación nos permite afirmar que el método converge y de una manera muy lenta, esto lo indica la pendiente de la recta. Por lo cual va a necesitar un número muy elevado de elementos para que el error tienda a cero.

Para garantizar que la convergencia mantenía un comportamiento linear se modelo para un número elevado de grados de libertad. Así, el problema fue resuelto con 983040 elementos y fue obtenido un valor de -2,036 para el  $\text{Log}_{10}\|u-uh\|_{H^1}$ . Ese mismo indicador calculado con la ecuación de la línea de tendencia de la recta, mostrada en la figura 23, fue de -2,054. Aunque los valores no fueron exactamente iguales fue fácil ver que la tendencia de la curva se mantiene.

La figura 30, logaritmo en base 10 versus logaritmo en base 2 del numero de grados de libertad, es modelada utilizando en el primero intervalo como función aproximadota la función de forma singular planteada en la ecuación 88 y funciones de forma lineares en el resto del dominio. Los datos graficados en esta figura se encuentran en la tabla 2.

Es posible notar, de las figuras 29 y 30, que al inserir una función de forma con la tendencia de la solución exacta el error disminuye en una orden de grandeza inclusive para un número pequeño de elementos.

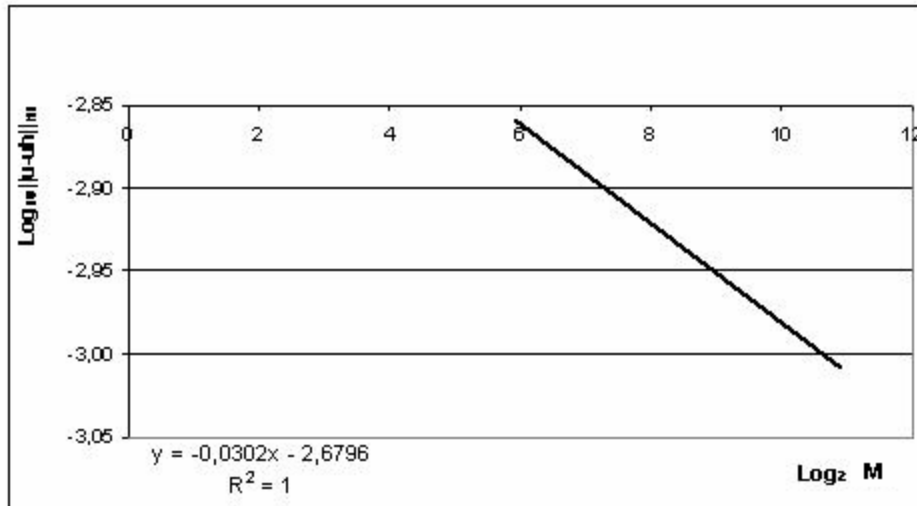


Figura 30, El logaritmo en base 10 de la norma H1 versus el logaritmo en base 2 del numero de grados de libertad. Análisis de convergencia de la solución numérica con función enriquecedora en el primero intervalo y funciones lineares en el resto del dominio.

Es importante reparar que el coeficiente que indica la inclinación de la curva de convergencia es pequeño para los dos casos. Las dos razones expuestas en este párrafo dieron pie a querer saber la eficacia que la técnica de enriquecimiento aparentemente muestra en relación a la convergencia.

d=1 con enriquecimiento en el primero intervalo			
M	$\ u-uh\ _{H1}$	$\log_2 M$	$\log_{10} \ u-uh\ _{H1}$
60	0,001387	5,9068906	-2,8580175
120	0,001294	6,9068906	-2,8881664
240	0,001207	7,9068906	-2,9184007
480	0,001126	8,9068906	-2,9486159
960	0,00105	9,9068906	-2,9788107
1920	0,000979	10,906891	-3,0090089

Tabla 2, la norma  $H_1$  con relación a M. Con función enriquecedora en  $u_h$  y  $v$  sobre el primero intervalo y funciones lineares.

La figura 31, logaritmo en base 10 de la norma  $H_1$  versus logaritmo en base 2 del número de grados de libertad, compara las rectas de las figuras 29 y 30.

Puede notarse, gráficamente, que la solución obtenida con enriquecimiento en el primero intervalo y con funciones lineales en el resto del dominio es casi paralela a la solución obtenida con funciones lineales en la totalidad del dominio, o sea, la velocidad de convergencia del MEF se mantiene casi igual por lo tanto la mejoría en la aproximación del modelo con enriquecimiento es solo en el primero intervalo.

La figura 32, enfrenta el logaritmo en base 10 de la norma  $H_1$  con el logaritmo en base 2 del número de grados de libertad. Aquí podemos observar la convergencia de la solución numérica modelada con funciones de forma de grado 4, y con  $M$  variando entre 60 y 1920 como lo indica la ecuación 92.

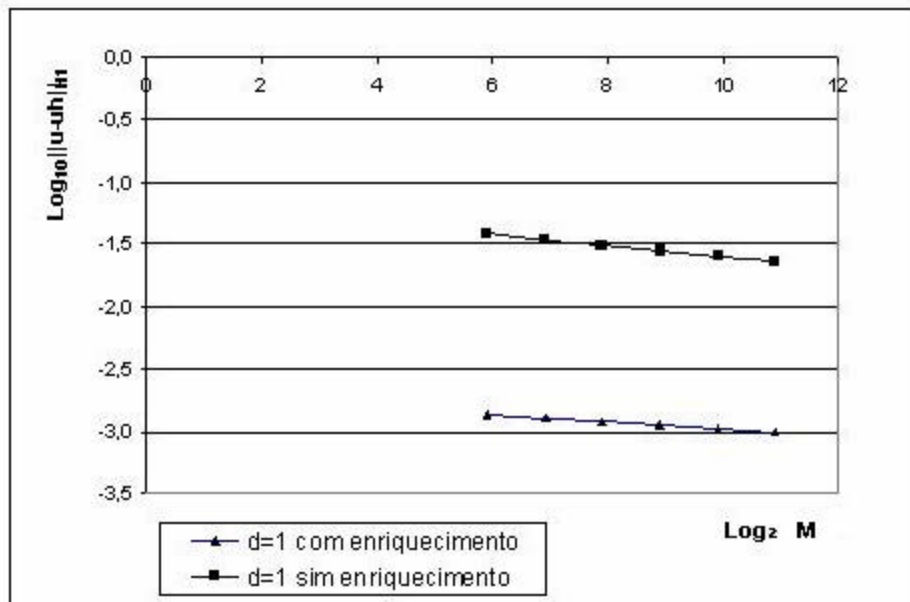


Figura 31, Paralelo de la convergencia entre la solución numérica con funciones lineales y la solución numérica con función enriquecedora en el primero intervalo y funciones lineales en el resto del dominio.

En la figura 32 se muestra que la convergencia se conserva lineal para cualquier polinomio. Es interesante apreciar que la inclinación de las rectas de las figuras 29 y 32 se mantiene casi igual tal como lo indican las ecuaciones de las rectas de respectivas figuras. Esto se observa claramente en la figura 33.

Aproximación con funciones de grado 4(d=4)			
M	$\ u-uh\ _{H1}$	$\text{Log}_2 M$	$\text{Log}_{10}\ u-uh\ _{H1}$
60	0,033938	5,906891	-1,46931375
120	0,030566	6,906891	-1,51476139
240	0,027511	7,906891	-1,56049362
480	0,024754	8,906891	-1,60635461
960	0,022274	9,906891	-1,65220178
1920	0,020051	10,90689	-1,69786396

Tabla 3, Norma H1 con relación a M. Con funciones de forma de grado 4

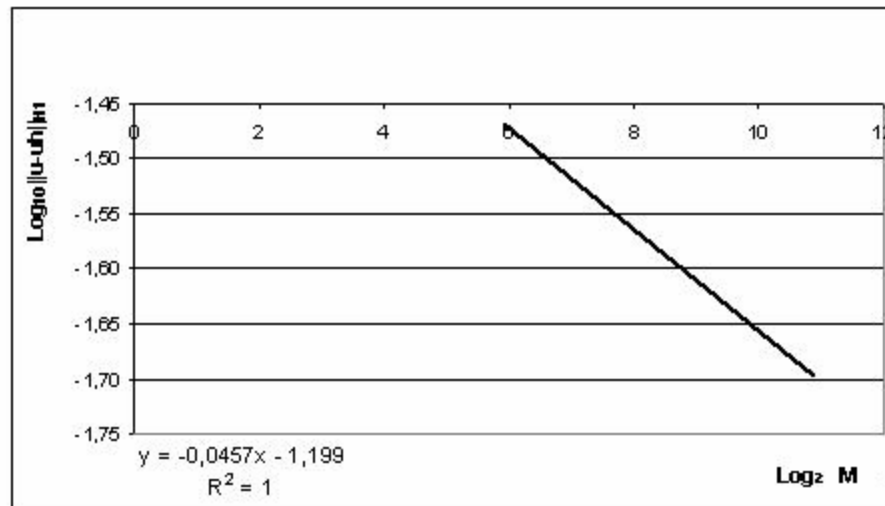


Figura 32, El logaritmo en base 10 de la norma H1 versus el logaritmo en base 2 del numero de grados de libertad. Análisis de convergencia de la solución numérica hallada con funciones de forma de grado 4.

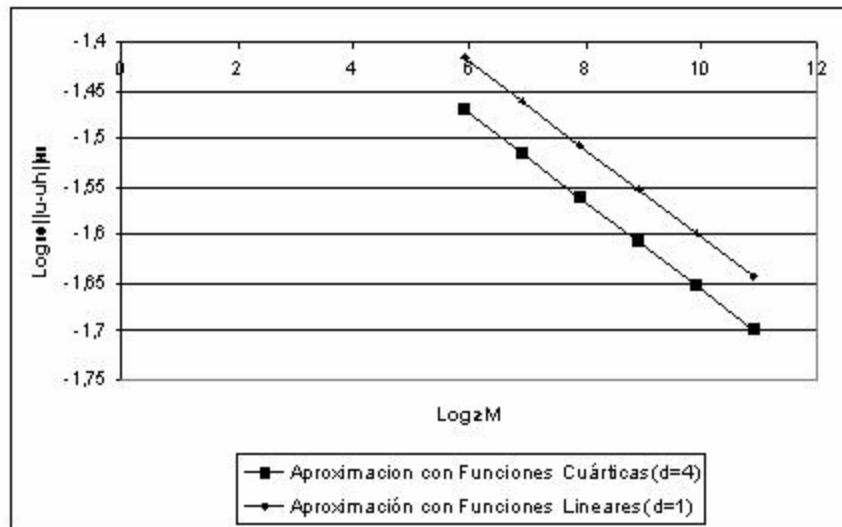


Figura 33, Paralelo entre la convergencia de la solución numérica hallada con funciones de forma de grado 1 y funciones de forma de grado 4

Es difícil apreciar en las graficas 25 a 28 la mejoría que tiene la aproximación a medida que aumentamos el grado del polinomio. Para percibir esa variación se tomó de las graficas 25 a 28 cada una de las líneas correspondientes a  $M=1920$  y se ubicaron en la grafica 34. El refinamiento como esta presentado en esta figura, con respecto al grado del polinomio aproximador, es denominado tipo  $p$ .

En la figura 34, se encuentra el desplazamiento radial,  $u$ , confrontado con el radio,  $r$ . La curva representada con línea-punto describe la solución numérica del problema de Lekhnitskii modelado con un polinomio aproximador de grado uno. La línea a puntos reproduce la solución numérica con funciones de forma cuadráticas. La curva con el trazo en forma línea-punto-punto muestra la solución numérica con funciones de forma cúbicas. La curva línea-línea refiere a la solución numérica con polinomios aproximadores de grado 4. Finalmente la línea llena es la solución analítica calculada con la ecuación 54.

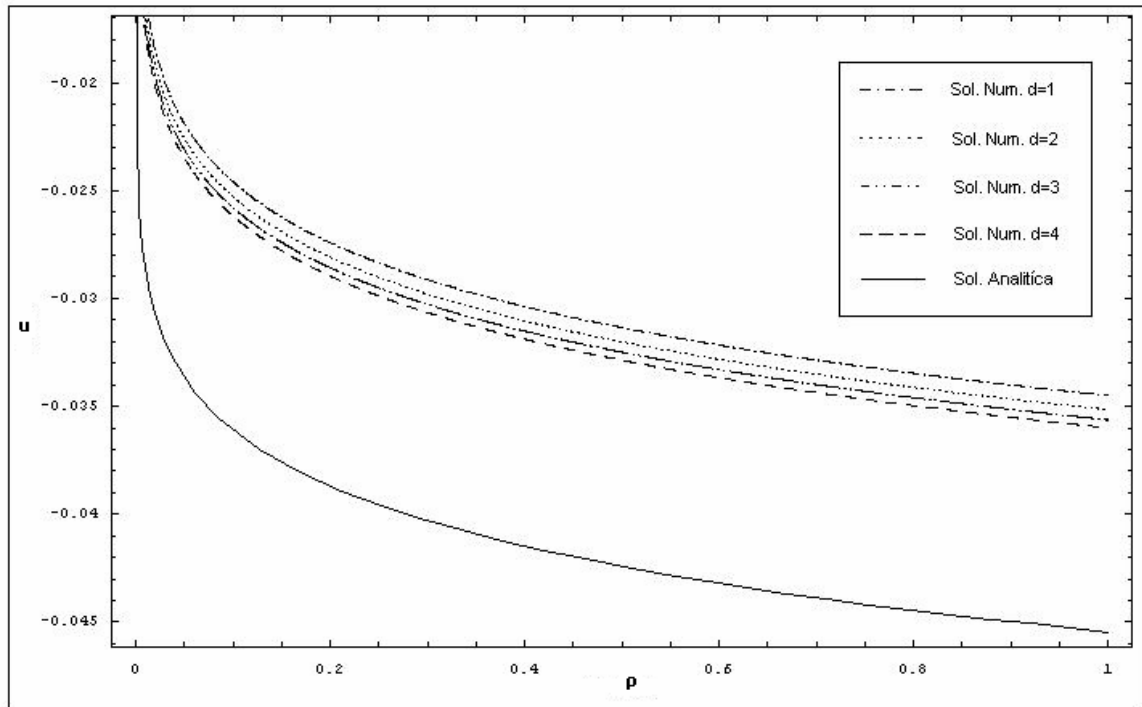


Figura 34, desplazamiento radial,  $u$ , versus el radio del disco,  $\rho$ . Refinamiento de la malla tipo  $P$ .  $M = 1920$ .

La figura 35, logaritmo en base 10 de la norma  $H_1$  versus el grado del polinomio, grafica los datos de la tabla 4. Esta muestra un análisis de convergencia para un refinamiento tipo  $p$ , con relación al grado del polinomio, semejante al realizado para la convergencia tipo  $h$ , con relación al tamaño del elemento.

Puede verse que la velocidad de convergencia del refinamiento tipo  $p$  es desacelerada por lo tanto no es aconsejable realizar un refinamiento con relación al grado del polinomio, puesto que la ganancia obtenida no es mucha comparada al esfuerzo computacional acarreado.

d=1,2,3,4		
d	$\ u-uh\ _{H_1}$	$\text{Log}_{10}\ u-uh\ _{H_1}$
1	0,022712	-1,64374462
2	0,021345	-1,67070384
3	0,020546	-1,68727272
4	0,020051	-1,69786396

Tabla 4. Norma  $H_1$  en función del grado del polinomio  $d$

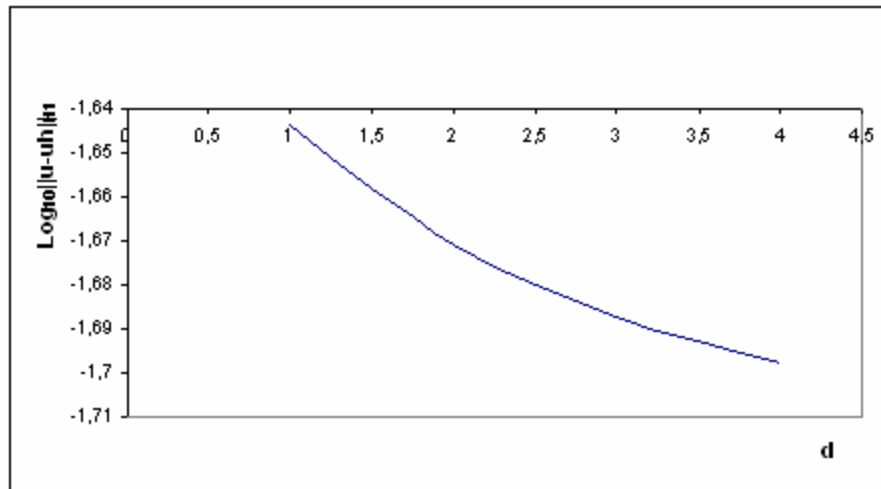


Figura 35. Logaritmo en base 10 de la norma  $H_1$  en función del grado del polinomio aproximador

#### 4.2 Análisis del Error Debido a la Precisión de la Máquina

En el comienzo de esta investigación se intentó obtener las soluciones presentadas en las figuras 25-28, esto con la ayuda de la herramienta computacional MATLAB. En MATLAB el problema fue resuelto sin mayor novedad para funciones de forma lineales y cuadráticas, pero cuando el refinamiento tipo p nos llevó a funciones de forma de grado 3 y 4 se extrajeron las respuestas representadas en las figuras 36 y 37, las cuales muestran una aparente divergencia. Reflexionando en estos hechos se dedujo que el problema de divergencia se presentaba a medida que se refinaba la malla ya fuese con respecto, al tamaño del elemento finito o al grado del polinomio aproximador.

La figura 36 da la variación en escala logarítmica del desplazamiento radial,  $u$ , con relación al radio,  $r$ , con el número de grados de libertad,  $M$ , los cuales varían entre 60 y 1920. Esta solución numérica es hallada con funciones de forma de grado 3 con la ayuda de la herramienta computacional MATLAB.

La figura 37 también en escala logarítmica representa la variación del desplazamiento radial,  $u$ , en función del radio,  $\rho$ , para grados de libertad,  $M$ , variando entre 60 y 1920. Esta solución numérica es hallada con funciones de forma de grado 4 con la ayuda de la herramienta computacional MATLAB.

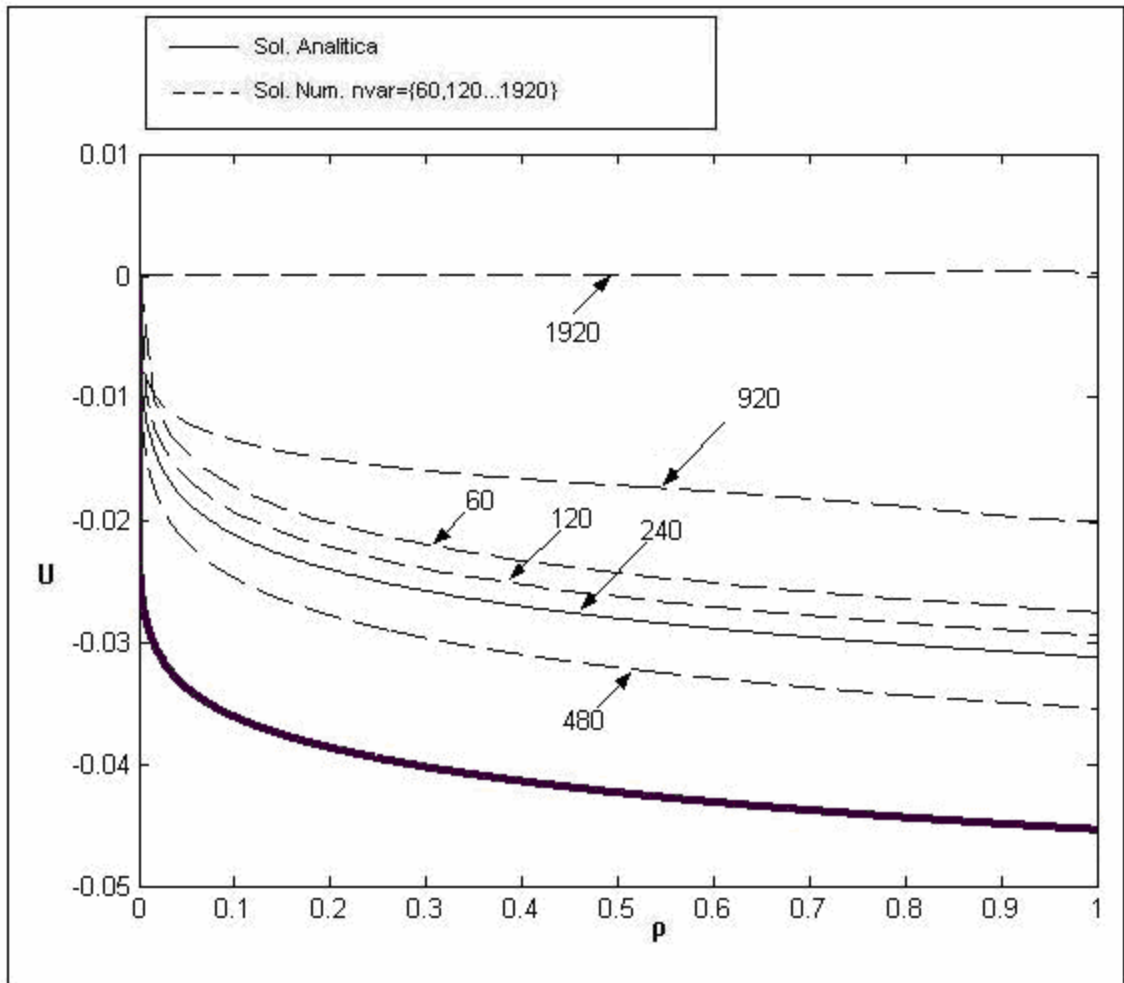


Figura 36, La variación del desplazamiento radial,  $u$ , con relación al radio,  $\rho$ . Solución numérica con funciones de forma cúbicas

Respuestas como las encontradas en las figuras 36 y 37 ya habían dificultado el estudio de este tipo de problemas. En nuestra investigación se concluyó que tal error estaba ligado a la precisión con que la máquina estaba trabajando, o sea, relacionado directamente al número de cifras decimales manejadas durante la resolución de los cálculos.

Indagando respecto a la precisión con la que la maquina estaba trabajando, se encontró que el software "MATLAB" normalmente almacena números con un máximo de 16 cifras decimales, debido a que esta basado en un lenguaje binario. Para saber si la precisión con la que se estaba trabajando era suficiente se decidió cambiar de herramienta de programación adoptando un software que permitiera definir el grado de aproximación a trabajar.

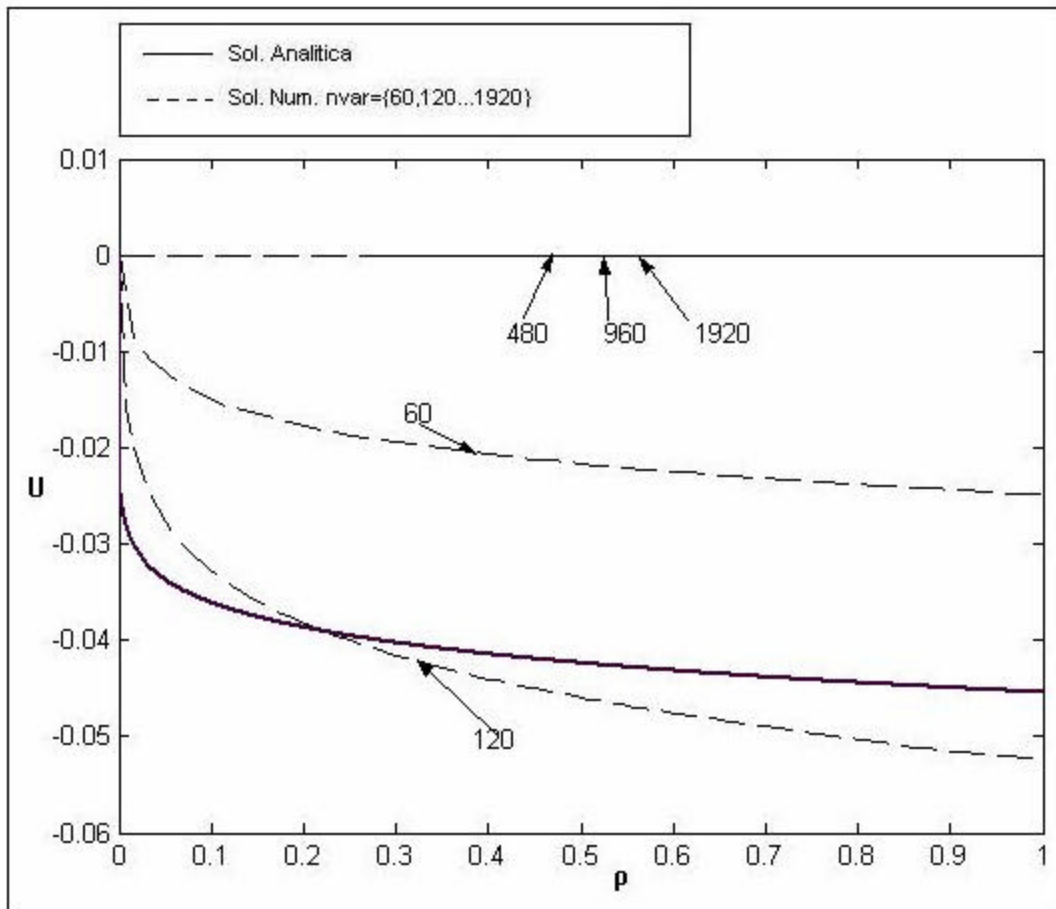


Figura 37 es la variación del desplazamiento radial,  $u$ , con relación al radio,  $\rho$ . Solución numérica con funciones de forma de grado 4

Al mudar de herramienta de programación para el software comercial *MATHEMATICA*, versión 5.0, se obtuvieron resultados alentadores que

permitieron concluir que una gran fuente de error era el número de dígitos decimales con que se realizaban los cálculos internos.

Se realizaron unos diversas pruebas para saber si era posible encontrar una línea de tendencia que permitiera averiguar la cantidad de dígitos decimales necesarios para obtener una respuesta precisa, dado un número de grados de libertad.

Funciones de forma cúbicas			
M	No. Dig	Log2 M	Log10 No. Dig
60	25	5,906891	1,397940009
120	27	6,906891	1,431363764
240	30	7,906891	1,477121255
480	33	8,906891	1,51851394
960	36	9,906891	1,556302501
1920	38	10,90689	1,579783597

Tabla 5, Numero de dígitos necesarios para obtener un resultado preciso con un polinomio aproximador de grado 3

El estudio con respecto a la precisión del computador fue realizado solo para funciones de forma cúbicas y de grado 4 (donde se comenzó a percibir el problema de divergencia).

La figura 38, el logaritmo en base 10 del mínimo número de dígitos necesario para obtener un resultado preciso versus el logaritmo en base 2 del número de grados de libertad, M. Muestra el análisis realizado para polinomios aproximadores de grado 3 y la figura 39 para polinomios aproximadores de grado 4. En estas figuras se muestra el número de dígitos máximo para el cual el programa MATHEMÁTICA produce el error  $ovfl^{***}$  variando con el número de grados de libertad, M. Estos

---

\*\*\* El error ovfl es producido por el *MATHEMATICA* cuando la escala del resultado excede la escala de números que puede ser representado por la versión del *MATHEMATICA* en uso.

cálculos son presentados en escala logarítmica para mejor presentación. Los datos representados en estas figuras se encuentran en las tablas 5 y 6 para funciones aproximadoras de grado 3 y 4, respectivamente. Las ecuaciones mostradas en las figuras son las líneas de tendencia de los datos mostrados en dichas tablas.

En varios testes realizados se noto que las graficas 38 y 39 dependen de factores como: la maquina utilizada, la cantidad de tareas que el ordenador esté ejecutando y el software o herramienta de programación utilizada.

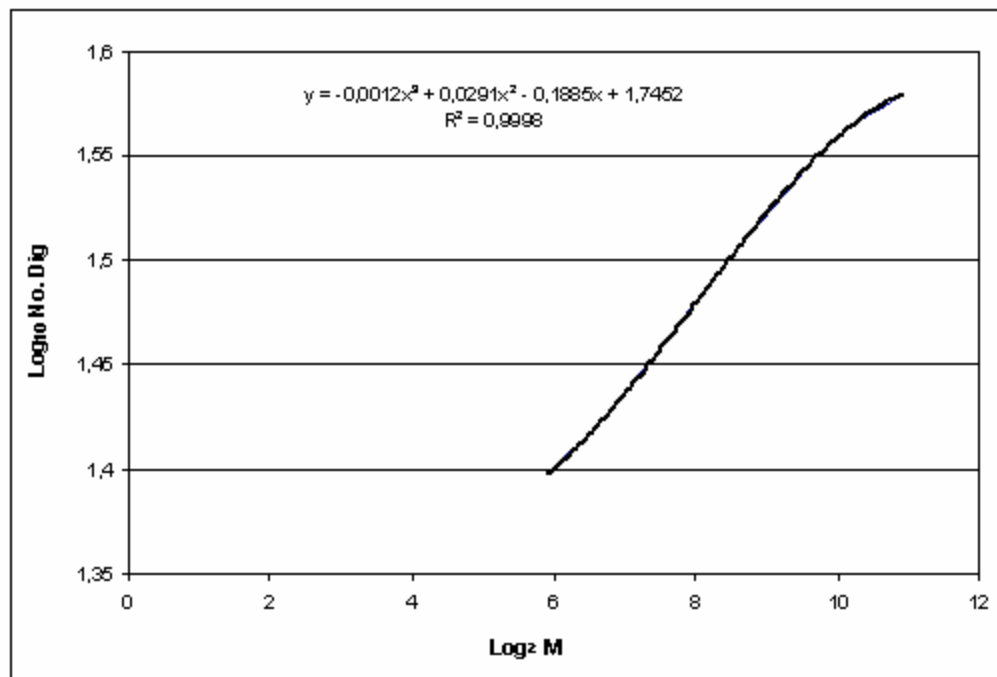


Figura 38, Logaritmo en base 10 del mínimo número de dígitos necesario para obtener un resultado preciso versus el logaritmo en base 2 del número de grados de libertad, M. Para funciones de forma cúbicas

---

También este error es ocasionado cuando el número trabajado es mas grande que el mayor número que puede representar el programa  $10^{(323228010)}$ . Ver *Mathematica Help Browser*.

Funciones de forma de grado 4			
M	No. Dig	Log2 M	Log10 No. Dig
60	29	5,906891	1,462397998
120	33	6,906891	1,51851394
240	37	7,906891	1,568201724
480	41	8,906891	1,612783857
960	47	9,906891	1,672097858
1920	49	10,90689	1,69019608

Tabla 6, Numero de dígitos necesarios para obtener un resultado preciso con un polinomio aproximador de grado 4

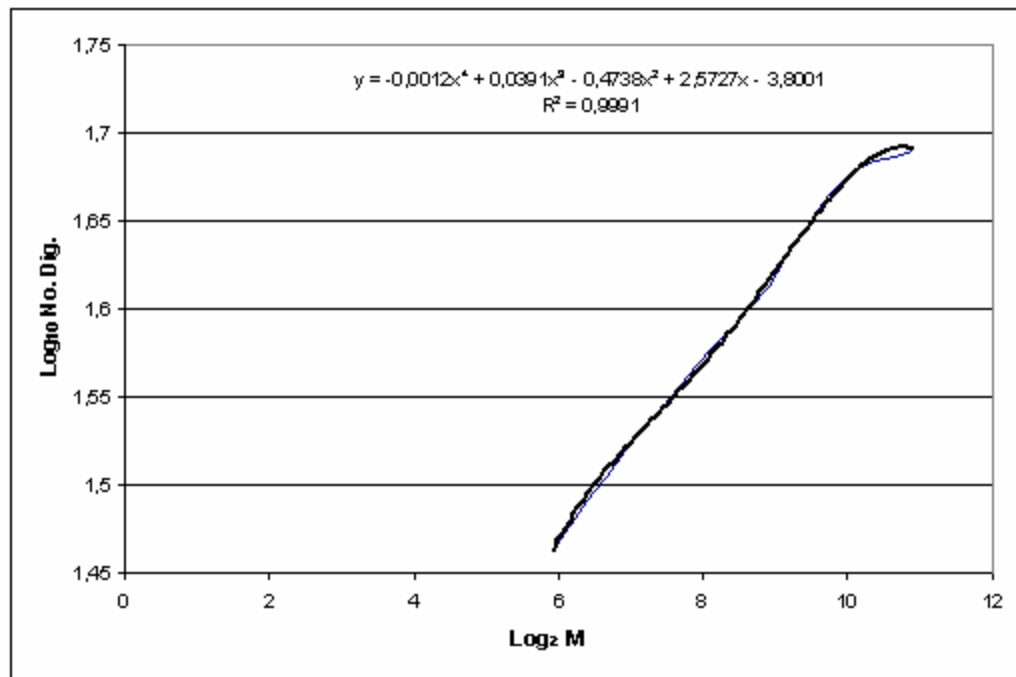


Figura 39, Logaritmo en base 10 del mínimo número de dígitos necesario para obtener un resultado preciso versus el logaritmo en base 2 del número de grados de libertad, M. Para funciones de forma de grado 4.

### 4.3 Otras Fuentes de Error.

Es valioso reparar en el deterioro que sufre la condición de la matriz de rigidez, cuyos elementos  $a_{ij}$  son calculados como se indica en la ecuación 81.

La condición de la matriz es dada por la división del menor valor normal por el mayor.  $C = \lambda_{\min} / \lambda_{\max}$ . Sabiendo que cero es el valor de la condición de una matriz singular.

La figura 40 muestra el logaritmo en base 10 de la condición de la matriz de rigidez calculada con funciones de forma lineares por partes versus el número de grados de libertad. Para probar que la pérdida de condición de la matriz en relación al número de grados de libertad mantenía la misma tendencia, sin interesar el grado del polinomio, se grafica en la figura 41 el logaritmo en base 10 de la matriz de rigidez calculada con funciones de forma de grado 4 versus el número de grados de libertad. Puede verse en cada una de estas figuras las ecuaciones de la recta de las líneas de tendencia y también el error  $R^2$ . Los gráficos representados en las figuras 40 y 41 corresponden a los datos ubicados en las tablas 7 y 8, respectivamente.

Funciones lineares			
condición	M	Log <sub>10</sub> [Cond.]	Log <sub>2</sub> [M]
1,92E-05	60	-4,71742547	5,9068906
4,21E-06	120	-5,37603781	6,9068906
9,48E-07	240	-6,02336166	7,9068906
2,18E-07	480	-6,66212162	8,9068906
5,08E-08	960	-7,29431158	9,9068906

Tabla 7. Condición de la matriz, calculada con funciones lineares, en relación al número de grados de libertad

Puede verse que la pérdida en la condición de la matriz sigue una tendencia lineal, decayendo con el aumento de los grados de libertad.

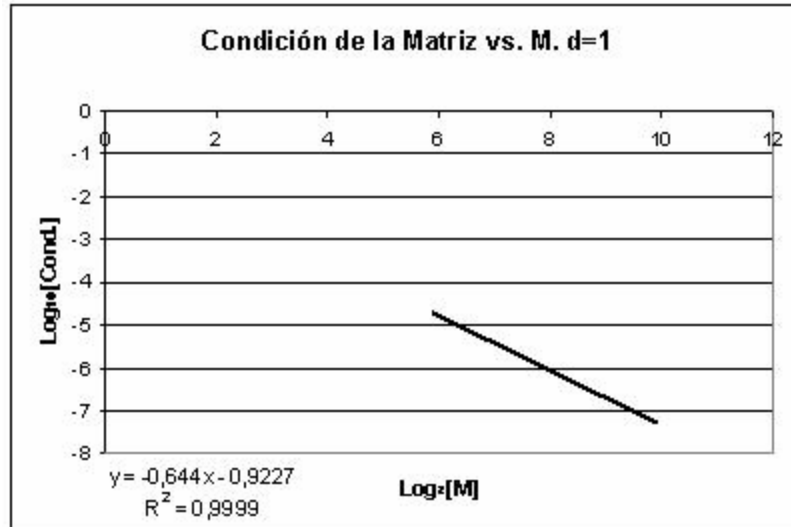


Figura 40, Logaritmo en base 10 de la condición de la matriz versus el logaritmo en base 2 del número de grados de libertad, M, para funciones lineales

En la figura 42, Logaritmo en base 10 de la condición de la matriz, calculada con 60 grados de libertad, contra el grado de cada uno de los polinomios aproximadores. En esta figura aparece la ecuación de la línea de tendencia de segundo grado que aproxima los datos que aparecen en la tabla 9 y el indicador  $R^2$  que proporciona una medida del error.

Funciones de grado 4			
Condición	M	Log <sub>10</sub> [Cond.]	Log <sub>2</sub> [M]
5,40E-06	60	-5,2673941	5,906891
1,22E-06	120	-5,9139368	6,906891
2,80E-07	240	-6,5527613	7,906891
6,53E-08	480	-7,1853618	8,906891
1,54E-08	960	-7,812791	9,906891

Tabla 8. Condición de la matriz, calculada con funciones de forma de grado 4, en relación al número de grados de libertad, M.

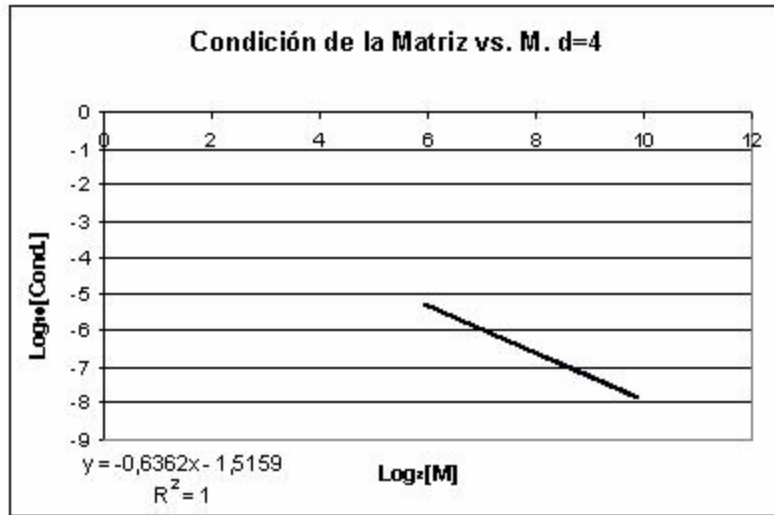


Figura 41, Logaritmo en base 10 de la condición de la matriz versus el logaritmo en base 2 del número de grados de libertad, para funciones de forma de grado 4.

Se aprecia un decaimiento acelerado de la condición de la matriz al realizar un refinamiento del grado del polinomio. Esto lleva a concluir que probablemente al aumentar el orden polinomial de las funciones de forma se puede llegar a trabajar con una matriz de rigidez mal condicionada.

M=60		
Condición	Grado(d)	Log <sub>10</sub> [Cond.]
1,92E-05	1	-4,7174255
1,37E-05	2	-4,8629657
9,10E-06	3	-5,0408042
5,40E-06	4	-5,2673941

Tabla 9. Condición de la matriz en relación al orden polinomial de la función de forma, para 60 grados de libertad.

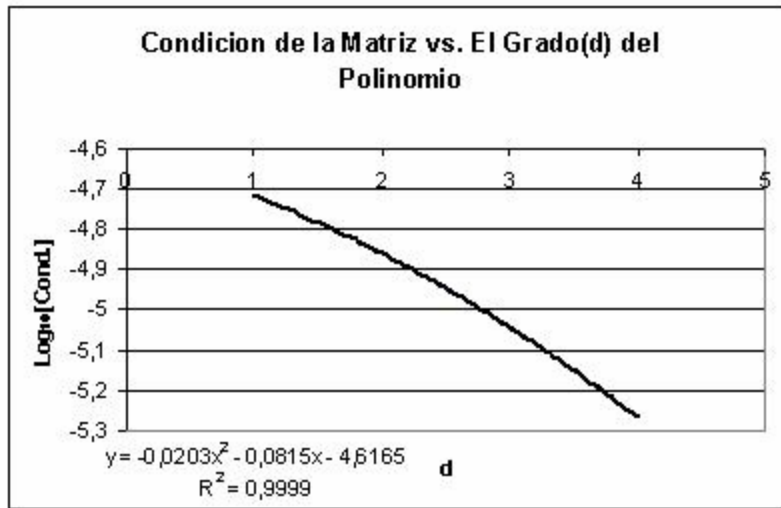


Figura 42, Logaritmo en base 10 de la condición de la matriz versus el grado del polinomio aproximador, d, para 60 grados de libertad.

## 5. CONCLUSIONES

El planteamiento de este trabajo estaba basado en averiguar si el método de los elementos finitos proporcionaba una secuencia convergente de aproximaciones de la solución del problema analizado, a medida que se realizaba un refinamiento de la malla de los elementos finitos.

En las figuras 29,30 y 32 se ve que el MEF en este tipo de problemas describe una convergencia lineal al reducir el tamaño del elemento finito, esta tendencia es confirmada en parte por el resultado arrojado al modelar el problema con un número elevado de elementos. Aunque queda claro que nada garantiza que este comportamiento se mantenga para cualquier número de elementos. Esta convergencia es muy lenta y precisaría de un número muy grande de elementos para obtener un error aceptable, recordando que se necesita aproximadamente de  $10^6$  elementos para obtener un error de  $10^{-2}$ .

Al hacer una expansión asintótica de la solución analítica y utilizar esta como función enriquecedora en el primer elemento finito se nota una reducción marcada del error. Mas la figura 31 indica que la velocidad de convergencia se mantiene casi igual a la del problema modelado solo con funciones lineares. O sea el error continuaría yendo lentamente hacia cero.

La velocidad de convergencia con respecto al tamaño del elemento finito tampoco aumenta si aumentamos el grado de las funciones aproximadoras, como se ve en la figura 33.

El refinamiento con relación al grado del polinomio aproximador en problemas de elasticidad anisotrópica resulta poco eficiente. En la figura 35 se nota que, a pesar

del número reducido de grados polinomiales utilizado ( $d=1, 2, 3, 4$ ), la curva de error exhibe una tendencia asintótica que parece indicar la no convergencia del método con respecto al aumento del grado del polinomio aproximador.

Por último podemos afirmar que la precisión del resultado depende fuertemente del número de dígitos utilizado. Por eso al realizar cualquier tipo de refinamiento en la malla es necesario hacer un aumento de los dígitos decimales utilizados. Si se desea saber que cantidad de dígitos decimales a utilizar para un dado número de elementos y una dada función de base de un grado  $n$  cualquier, es necesario realizar un nuevo estudio similar al mostrado en la sección 4.2 ya que la precisión necesaria depende de factores como: el software utilizado y la capacidad y el uso del ordenador en el que se trabaja.

Es importante agregar que el deterioro en la condición de la matriz puede acarrear problemas si se desea continuar con cualquier tipo de refinamiento, además del ya realizado en este trabajo.

## 6. BIBLIOGRAFIA

Aguiar, A. R. & Fosdick, R. L., 2000. A singular incompressible nonlinear elastostatics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 10, pp. 1181-1207.

Aguiar, A. R. & Fosdick, R. L., 2001. Self- Intersection in elasticity. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 38, pp. 4797-4823.

Fosdick, R. L. & royer, G., 2001. The constraint of local injectivity in linear elasticity theory. *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 457, pp. 2167 – 2187.

Lekhnitskii, S. G., 1968. *Anisotropic Plates*. New York: Gordon and Breach Science Publishers.

Luenberger, D. G., 1984. *Linear and Nonlinear Programming*. Reading: Addison-Wesley Publishing Company, 2 edition.

Obeidat, K., Stolarski, H., Fosdick, R., & Royer-Carfagni, G., 2001. Numerical analysis of elastic problems with injectivity constraints. In *European Conference on Computational Mechanics. (ECCM-2001)*.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., 2000. *The Finite Element Method*. ButterWorth Heinemann. vol. 1, Fifth Edition.

Johnson, Claes, 1987. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University.

## 7. ANEXOS

### 1. Polinomios de Lagrange

Utilizados para generar funciones de forma de cualquier orden.

Considere la figura A.1 la cual es una serie de nodos externos e internos distribuidos en una malla regular. Suponga que se quiere determinar la función de forma para el punto indicado con el círculo doble. Claramente los polinomios son de quinto orden polinomial en  $\xi$  los cuales tienen un valor de la unidad en los puntos de la segunda columna de nodos y cero en cualquier otra columna de nodos. En dirección  $\eta$  los polinomios son de cuarto orden polinomial con uno en la fila donde esta definido el polinomio y cero en cualquier otra fila. Satisfaciendo así todas las condiciones de continuidad entre elementos.

Los polinomios de Lagrange son dados por la siguiente formula:

$$l_k^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0) \cdot (\xi - \xi_1) \cdot \dots \cdot (\xi - \xi_{k-1}) \cdot (\xi - \xi_{k+1}) \cdot \dots \cdot (\xi - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_0) \cdot (\xi_k - \xi_1) \cdot \dots \cdot (\xi_k - \xi_{k-1}) \cdot (\xi_k - \xi_{k+1}) \cdot \dots \cdot (\xi_k - \xi_n)}$$

Siendo la unidad en  $\xi_k$  y definido para n puntos.

En mas de una dimensión es simplemente un producto polinomial.

$$N_i = N_{ij} = l_i^n(\xi) l_j^m(\eta)$$

Donde m y n son el número de subdivisiones en cada dirección.

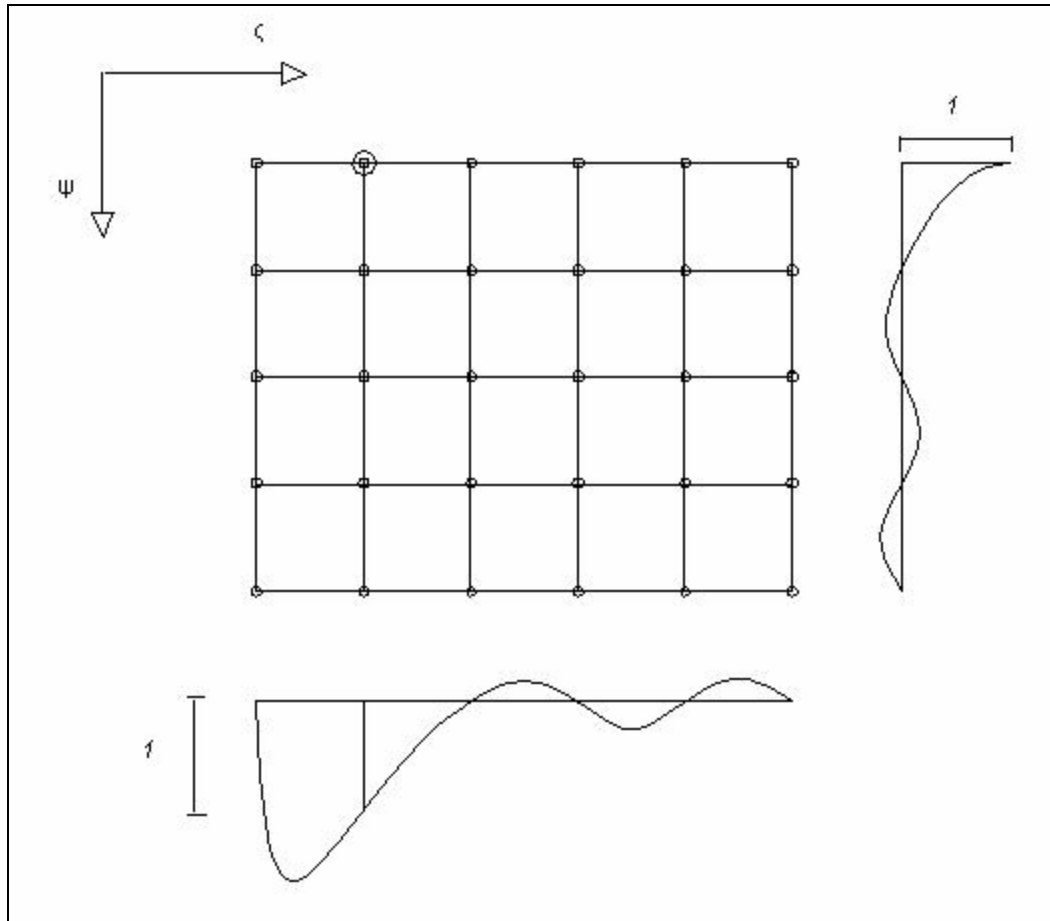


Figura A1, Funciones de Lagrange