

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN EN TEORIAS DE CONTROL  
MODERNO

ALEN FABIAN GALVIS ACERO  
BAYRON HENRRY VERGARA SANCHEZ  
IVAN DARIO QUITIAN MENDEZ  
JUAN MANUEL ORDOÑEZ FRANCO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICO - MECANICAS  
ESCUELA DE INGENIERIA MECANICA  
BUCARAMANGA

2010

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN EN TEORIAS DE CONTROL  
MODERNO

ALEN FABIAN GALVIS ACERO  
BAYRON HENRRY VERGARA SANCHEZ  
IVAN DARIO QUITIAN MENDEZ  
JUAN MANUEL ORDOÑEZ FRANCO

Trabajo de grado para optar al titulo de  
Ingeniero Mecánico

Director  
Ing. CARLOS BORRAS PINILLA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICO - MECANICAS  
ESCUELA DE INGENIERIA MECANICA  
BUCARAMANGA

2010

A mi madre por su perseverancia,  
paciencia y esfuerzo en pro  
de la superación de sus hijos.

A mi hermana que siempre me apoyo.

A mis amigos y compañeros con los  
que compartí esta etapa de mi vida.

A todas aquellas personas que de una u  
otra forma contribuyeron con  
mi formación profesional.

*IVAN*

A mis padres por su esfuerzo y confianza.

A mi hermana por incondicionalidad.

A mi familia putativa por su apoyo constante.

A mis amigos y compañeros que contribuyeron  
con mi formación personal y profesional .

*JUAN MANUEL*

A Dios por las bendiciones que me ha concedido le dedico  
este trabajo fruto del esfuerzo y la perseverancia,  
a él le debo todo lo que soy.  
A mi familia que es lo más valioso que tengo.

*BAYRON*

## AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Industrial de Santander por posibilitar nuestro crecimiento profesional.

A la escuela de Ingeniería Mecánica y su cuerpo docente por brindarnos las herramientas necesarias para nuestra formación.

A Carlos Borrás Pinilla, ingeniero mecánico, director del proyecto por su dedicación, apoyo, asesoría y orientación lo cual permitió el desarrollo y la culminación exitosa de este proyecto de grado.

A nuestros compañeros y familiares que siempre nos apoyaron

# Índice general

<b>I SEMINARIO DE INVESTIGACION</b>	<b>24</b>
<b>1 GENERALIDADES DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN</b>	<b>25</b>
1.1 QUE ES EL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN . . . . .	25
1.2 OBJETIVO DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN . . . . .	26
1.3 VENTAJAS DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN . . . . .	26
1.4 CARACTERÍSTICAS . . . . .	27
1.5 ORGANIZACIÓN DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN . . . . .	28
1.6 DIRECCIÓN DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN EN TEORIAS DE CONTROL MODERNO . . . . .	28
<b>2 PLANEACIÓN</b>	<b>30</b>
2.1 OBJETIVOS DEL SEMINARIO . . . . .	31
2.2 PROGRAMACIÓN DEL SEMINARIO . . . . .	32
2.3 ANALISIS BIBLIOGRAFICO . . . . .	33
2.4 TEMARIO . . . . .	35
<b>3 EJECUCIÓN</b>	<b>39</b>
3.1 EL ACTA . . . . .	40

<b>II</b>	<b>FINALIZACIÓN</b>	<b>45</b>
<b>4</b>	<b>PRESENTACIONES, DOCUMENTOS Y APLICACIÓN</b>	<b>46</b>
4.1	PRESENTACIONES . . . . .	46
4.1.1	Características . . . . .	46
4.2	DOCUMENTO . . . . .	48
4.3	APLICACIONES EN MATLAB . . . . .	49
4.3.1	Sistemas dinámicos . . . . .	49
4.3.2	Vectores y el vector lineal espacial . . . . .	56
4.3.3	Fundamentos de algebra matricial moderna . . . . .	60
4.3.4	Descripción de sistemas dinámicos bajo espacio y variables de estado . . .	64
4.3.5	Análisis de ecuaciones de estado para sistemas lineales . . . . .	68
4.3.6	Estabilidad, controlabilidad y observabilidad de sistemas lineales . . . .	71
4.3.7	Relación entre variables de estado y ecuaciones de transferencia de los sistemas . . . . .	78
4.3.8	Diseño de un sistema de control con realimentación lineal . . . . .	83
4.3.9	Introducción al control óptimo . . . . .	85
<b>5</b>	<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>103</b>
<b>III</b>	<b>INVESTIGACIÓN</b>	<b>104</b>
<b>6</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>106</b>
6.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	106
6.2	HISTORIA DEL CONTROL AUTOMÁTICO . . . . .	107
6.3	DEFINICIONES BÁSICAS Y REPRESENTACIÓN DE UN SISTEMA . . . .	111

6.4	CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE CONTROL . . . . .	113
6.4.1	Sistema de control de lazo abierto . . . . .	113
6.4.2	Sistema de control de lazo cerrado . . . . .	114
6.4.3	Comparación entre sistemas de control en lazo abierto y lazo cerrado . .	115
6.5	COMPONENTES DE UN SISTEMA DE CONTROL (LAZO CERRADO) . .	116
6.6	CLASIFICACIÓN DE LAS SEÑALES . . . . .	120
6.7	ELEMENTOS DE UN SISTEMA DE CONTROL . . . . .	122
6.8	CONTROL AUTOMÁTICO . . . . .	124
6.8.1	Operaciones básicas en un sistema de control automático . . . . .	125
6.8.2	Modelo estructural de un SAC (Sistema Automático de Control) . . . .	126
6.9	EJEMPLOS DE SISTEMAS DE CONTROL . . . . .	127
6.10	ACCIONES DE CONTROL . . . . .	132
6.10.1	Clasificación de los controladores industriales . . . . .	132
6.11	ALGUNAS ESTRATEGIAS DE CONTROL . . . . .	137
6.11.1	Control Feedback (retroalimentación) . . . . .	138
6.11.2	Control Feedforward (adelanto) . . . . .	138
6.11.3	Control de cascada . . . . .	139
6.12	NECESIDAD DEL MODELO MATEMÁTICO . . . . .	142
6.12.1	las matemáticas y el control automático . . . . .	143
6.12.2	Fases del método del control automático . . . . .	144
6.13	REALIMENTACIÓN, RETARDOS Y OSCILACIÓN . . . . .	145

<b>7</b>	<b>SISTEMAS DINÁMICOS</b>	<b>147</b>
7.1	INTRODUCCION . . . . .	147
7.2	MODELADO . . . . .	149
7.2.1	Sistemas Mecanicos . . . . .	149
7.2.2	Sistemas hidraulicos . . . . .	156
7.2.3	Sistemas electricos . . . . .	166
7.2.4	Sistemas termicos . . . . .	176
7.3	LINEALIZACION . . . . .	179
<b>8</b>	<b>VECTORES Y EL VECTOR LINEAL ESPACIAL</b>	<b>183</b>
8.1	VECTOR ESPACIAL LINEAL PLANAR Y TRIDIMENSIONAL DE ESTADO . . . . .	183
8.1.1	Suma, resta y multiplicación por un escalar de vectores . . . . .	184
8.1.2	Propiedades de la suma de vectores . . . . .	185
8.1.3	Producto de vectores . . . . .	186
8.1.4	Espacio Vectorial Real . . . . .	188
8.2	DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL . . . . .	189
8.2.1	Base y dimensión de un espacio vectorial . . . . .	191
8.2.2	Teorema de la base . . . . .	192
8.2.3	Bases canónicas . . . . .	192
8.3	OPERACIONES ESPECIALES Y DEFINICIÓN DE VECTOR ESPACIAL . . . . .	193
8.3.1	Producto punto . . . . .	193
8.3.2	Norma de un vector en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	193
8.3.3	Ángulo entre vectores . . . . .	194

8.3.4	Espacio vectorial real . . . . .	195
8.3.5	El proceso Gram-Schmidt . . . . .	195
8.4	LOS EIGENVALUES Y LOS EIGENVECTORS . . . . .	196
8.4.1	Procedimiento para el cálculo de los eigenvalores y los eigenvectores: . .	197
8.4.2	Matrices simétrica, antisimétrica y ortogonal . . . . .	198
8.4.3	Propiedades de los eigenvectores . . . . .	199
8.5	TRANSFORMACIONES Y FUNCIONES DE MATRICES CUADRADAS	200
8.5.1	Funciones de Matrices cuadradas . . . . .	203
8.6	TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON . . . . .	205
8.6.1	Calculo de la inversa de una matriz con el teorema de Cayley-Hamilton	206
8.6.2	Problemas . . . . .	207
<b>9</b>	<b>FUNDAMENTOS DE ALGEBRA MODERNA</b>	<b>214</b>
9.1	OPERACIONES ALGEBRAICAS CON MATRICES . . . . .	215
9.1.1	Igualdad de matrices . . . . .	215
9.1.2	Suma y Resta de matrices . . . . .	215
9.1.3	Multiplicación de matrices . . . . .	216
9.1.4	Multiplicacion de Kronecker . . . . .	218
9.1.5	La matriz nula (cero) y la matriz identidad . . . . .	219
9.2	LAS PROPIEDADES ASOCIATIVA, CONMUTATIVA Y DISTRIBUTIVA DEL ALGEBRA MATRICIAL . . . . .	220
9.3	MATRIZ TRANSPUESTA, CONJUGADA Y LA MATRIZ ASOCIADA . . . . .	220
9.3.1	Propiedades de la transposición de matrices: . . . . .	221
9.3.2	Propiedades de la conjugación de matrices . . . . .	222
9.3.3	Propiedades de las matrices adjuntas . . . . .	223

9.4	DETERMINANTES, MENORES Y COFACTORES . . . . .	224
9.4.1	Menores . . . . .	225
9.4.2	Cofactores . . . . .	226
9.4.3	Determinantes por el método de Expansión de Laplace . . . . .	227
9.4.4	Determinantes por el método del pivote . . . . .	229
9.5	RANGO Y TRAZA DE UNA MATRIZ . . . . .	230
9.6	INVERSIÓN DE MATRICES . . . . .	231
9.7	PARTICIÓN DE MATRICES . . . . .	233
9.8	DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN DE MATRICES . . . . .	235
9.9	EL OPERADOR GRADIENTE . . . . .	237
9.10	SERIE DE TAYLOR . . . . .	238
9.11	VECTORIZACIÓN DE MATRICES . . . . .	241
<b>10</b>	<b>DESCRIPCIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS BAJO ESPACIO Y VARIABLES DE ESTADO</b>	<b>242</b>
10.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	242
10.1.1	Definiciones básicas . . . . .	243
10.2	LAS VARIABLES DE ESTADO DE UN SISTEMA DINÁMICO . . . . .	245
10.3	LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL ESTADO . . . . .	246
10.3.1	Modelado de espacio de Estados según el tipo de sistema. . . . .	251
10.4	SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS POR EL MÉTODO DE EULER . . . . .	261
10.4.1	Método de Euler . . . . .	263
10.5	INTERCONECTIBILIDAD DE LOS SUBSISTEMAS . . . . .	264

<b>11 ANÁLISIS DE LAS ECUACIONES DE ESTADO PARA SISTEMAS LINEALES EN TIEMPO CONTINUÓ</b>	<b>268</b>
11.1 ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN LINEALES. . . . .	268
11.2 MATRIZ CON COEFICIENTES CONSTANTES . . . . .	274
11.3 SISTEMAS MODALES Y DESCOMPOSICION MODAL . . . . .	277
11.4 TIEMPO VARIANTE . . . . .	283
11.5 MATRIZ DE TRANSICION . . . . .	285
<b>12 ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES Y DISCRETOS</b>	<b>291</b>
12.1 REPRESENTACIÓN DE ECUACIONES DE ESTADO EN EL DOMINIO DISCRETO DEL TIEMPO . . . . .	291
12.2 COEFICIENTES CONSTANTES DISCRETOS DE ECUACIONES DE ESTADO . . . . .	300
12.3 DESCOMPOSICIÓN MODAL. . . . .	301
12.4 COEFICIENTES VARIABLES EN EL TIEMPO. . . . .	303
12.5 MATRIZ DE TRANSICIÓN DISCRETA . . . . .	303
<b>13 ESTABILIDAD</b>	<b>311</b>
13.1 INTRODUCCIÓN . . . . .	311
13.2 PUNTOS DE EQUILIBRIO Y CONCEPTOS DE ESTABILIDAD . . . . .	314
13.3 DEFINICIONES DE ESTABILIDAD . . . . .	316
13.4 ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES . . . . .	318
13.5 SISTEMAS LINEALES CONSTANTES . . . . .	322
13.6 EL MÉTODO DIRECTO DE LYAPUNOV . . . . .	325

**14 CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD PARA SISTEMAS LINEALES 335**

14.1 DEFINICIONES . . . . . 335

    14.1.1 Controlabilidad . . . . . 336

    14.1.2 Obseabilidad . . . . . 336

    14.1.3 Dependencia del Modelo . . . . . 337

14.2 SISTEMAS DE TIEMPO INVARIABLE . . . . . 337

    14.2.1 Sistemas de Tiempo Invariante con Eigenvalues distintos . . . . . 337

    14.2.2 Sistemas de Tiempo Invariante con Eigenvalues arbitrarios . . . . . 343

14.3 SISTEMAS DE TIEMPO VARIABLE . . . . . 346

    14.3.1 Controlabilidad de Sistemas en Tiempo Continuo . . . . . 346

    14.3.2 Observabilidad de Sistemas en Tiempo Continuo . . . . . 349

    14.3.3 Sistemas en Tiempo Discreto . . . . . 351

14.4 FORMAS CANÓNICAS DE KALMAN . . . . . 352

14.5 ESTABILIZABILIDAD Y DETECTABILIDAD . . . . . 356

**15 RELACIÓN ENTRE VARIABLES DE ESTADO Y ECUACIONES DE TRANSFERENCIA DE LOS SISTEMAS 357**

15.1 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE ECUACIONES DE ESTADO . . . . . 357

    15.1.1 Obtención de una Función de transferencia a partir de un sistema con una entrada y una salida (SISO) . . . . . 360

    15.1.2 Obtención de una matriz de transferencia a partir de un sistema con dos entradas y dos salidas (MIMO); . . . . . 363

15.2 ECUACIÓN DE ESTADO DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA (REALIZACIÓN) . . . . . 364

    15.2.1 Realización directa . . . . . 365

    15.2.2 Realización cascada. . . . . 375

15.2.3	Realización en paralelo . . . . .	376
15.3	ECUACIONES DE ESTADO DE MATRICES DE TRANSFERENCIA :REALIZACIÓN . . . . .	378
15.4	CONCEPTO DE IMPLICACIÓN Y IRREDUCTIBILIDAD EN LA REALIZACIÓN . . . . .	381
<b>16</b>	<b>DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL CON REALIMENTACIÓN LINEAL</b>	<b>385</b>
16.1	ESTADO CON REALIMENTACION Y SEÑAL DE SALIDA CON REALIMENTACION . . . . .	385
16.2	EFECTO DE LA REALIMENTACIÓN SOBRE LAS PROPIEDADES DEL SISTEMA . . . . .	389
16.2.1	Controlabilidad . . . . .	389
16.2.2	Observabilidad . . . . .	389
16.2.3	Estabilidad . . . . .	390
16.2.4	Polos y Ceros . . . . .	390
16.3	ASIGNACIÓN DE LOS POLOS USANDO REALIMENTACIÓN DE ESTADO . . . . .	391
16.3.1	<i>Resumen del algoritmo para la ubicación de los polos (Asignación de valores propios y vectores propios)</i> . . . . .	401
16.3.2	Formula de Ackermann . . . . .	405
16.4	APLICACIÓN DE ASIGNACIÓN DE POLOS USANDO REALIMENTACIÓN DE ESTADO . . . . .	411
16.5	ASIGNACIÓN DE LOS POLOS USANDO REALIMENTACIÓN DE SALIDA . . . . .	418
16.6	RECONSTRUCCIÓN DE ESTADO CON LAS SALIDAS DISPONIBLES . . . . .	421
16.6.1	Observador en tiempo continuo total . . . . .	421
16.6.2	Observador en tiempo discreto total . . . . .	427

<b>17 INTRODUCCIÓN AL CONTROL ÓPTIMO</b>	<b>434</b>
17.1 CONCEPTOS DE CONTROL ÓPTIMO . . . . .	434
17.2 PROGRAMACIÓN DINÁMICA . . . . .	437
17.2.1 Introducción general al principio de optimalidad . . . . .	437
17.2.2 Aplicación del control optimo en tiempo discreto . . . . .	440
17.2.3 Programación dinámica enfocada al control óptimo en tiempo continuo .	442
17.3 LQ y LQR . . . . .	447
17.3.1 Lq en tiempo discreto . . . . .	447
17.3.2 Lq en tiempo continuo . . . . .	451
17.3.3 Lqr . . . . .	456
17.4 ECUACIÓN DE RICCATI . . . . .	469
17.5 PRINCIPIO DEL MÍNIMO DE PONTRYAGINADO . . . . .	475
17.5.1 Principio del mínimo de Pontryagin . . . . .	477
17.6 MÉTODO LQG . . . . .	486
17.7 FILTRO DE KALMAN . . . . .	489
<b>18 BIBLIOGRAFIA</b>	<b>497</b>

# Índice de figuras

2.1	Mapa conceptual de las teorías de control . . . . .	30
2.2	Diagrama de gant . . . . .	32
3.1	Formato del acta . . . . .	42
3.2	Acta diligenciada . . . . .	43
4.1	Presentación en Power Point . . . . .	48
4.2	Lyx . . . . .	49
4.3	Escalón unitario . . . . .	50
4.4	Impulso . . . . .	51
4.5	Sistema de doble masa y doble resorte . . . . .	52
4.6	Señal impuslo . . . . .	55
4.7	Señal escalon unitario . . . . .	55
4.8	Circuito R.L.C. . . . .	64
4.9	Representación ejemplo matlab . . . . .	81
4.10	Funciones en paralelo . . . . .	82
4.11	Sistema equivalente . . . . .	82
4.12	Respuesta con realimentación . . . . .	84
4.13	Péndulo . . . . .	87

4.14 Péndulo doble invertido . . . . .	94
6.1 Proceso a Controlar . . . . .	107
6.2 Resumen histórico de los sistemas de control . . . . .	110
6.3 Representación de un Sistema . . . . .	112
6.4 Representación de un Sistema de control . . . . .	112
6.5 Diagrama SISO . . . . .	113
6.6 Representación de un sistema de control en lazo abierto . . . . .	114
6.7 Representación de un sistema de control en lazo cerrado . . . . .	115
6.8 Representación de un sistema de control retroalimentado . . . . .	115
6.9 Clasificación de los sensores dependiendo del tipo de señal de salida . . . . .	119
6.10 Clasificación según el tipo de variable a medir . . . . .	119
6.11 Clasificación de los controladores según el tipo de lógica . . . . .	120
6.12 Pare-Actuadores y Actuadores . . . . .	120
6.13 Clasificación de las señales . . . . .	121
6.14 Tipos de señal . . . . .	121
6.15 Unidad de control digital con las interfaces de entrada y salida para operar con señales analógicas . . . . .	122
6.16 Sistema de control de lazo abierto . . . . .	123
6.17 Sistema de control de lazo cerrado . . . . .	123
6.18 Control mediante realimentación . . . . .	125
6.19 Operaciones básicas en un sistema de control automático . . . . .	126
6.20 Modelo estructural de un SAC (Sistema Automático de Control) . . . . .	126
6.21 Ejemplo SAC . . . . .	127
6.22 Control de nivel del líquido, Sistema de control (lazo cerrado) . . . . .	127

6.23	Diagrama de bloques del sistema de control . . . . .	128
6.24	Regulador centrífugo de Watt para el control de velocidad de una máquina de vapor que fue diseñado en el siglo XVIII [2] . . . . .	129
6.25	Sistema de control del regulador . . . . .	129
6.26	Reloj de agua Probablemente el primer sistema de retroalimentación creado por el hombre, Inventado por Ctesibios de Alejandría (Egipto, aprox. 260 a.c.) . . . .	131
6.27	Sistema de control del reloj de agua . . . . .	131
6.28	Acción de control . . . . .	132
6.29	Diagrama a bloques de un controlador proporcional . . . . .	133
6.30	Diagrama a bloques de un controlador integral . . . . .	134
6.31	Controlador proporcional . . . . .	135
6.32	Controlador proporcional-derivativo . . . . .	136
6.33	Controlador proporcional-integral-derivativo . . . . .	137
6.34	Control Feedback (retroalimentación) . . . . .	138
6.35	Control Feedforward (adelanto) . . . . .	139
6.36	Control de cascada . . . . .	139
6.37	Intercambiador de calor . . . . .	140
6.38	Feedback en un intercambiador de calor . . . . .	140
6.39	Feedforward en un intercambiador de calor . . . . .	141
6.40	Feedback+feedforward en un intercambiador de calor . . . . .	142
6.41	Fases del método de control . . . . .	144
6.42	Ejemplo de realimentación . . . . .	145
6.43	Ejemplo de oscilaciones y retardos . . . . .	146
7.1	Sistema dinámico . . . . .	147

7.2	Sistema masa - resorte . . . . .	150
7.3	Sistema masa - resorte - amortiguador . . . . .	153
7.4	Grados de libertad . . . . .	154
7.5	Llenado de tanques . . . . .	156
7.6	Fujo laminar . . . . .	161
7.7	Fujo turbulento . . . . .	161
7.8	Modelo de euler . . . . .	162
7.9	Representación de las fuentes de poder . . . . .	166
7.10	Representación de una resistencia . . . . .	167
7.11	Representación de una capacitancia . . . . .	167
7.12	Representación de un inductor . . . . .	167
7.13	Circuito en serie . . . . .	168
7.14	Circuito en paralelo . . . . .	169
7.15	Circuito combinado . . . . .	170
7.16	Nodo . . . . .	171
7.17	Malla . . . . .	171
7.18	Circuito . . . . .	172
7.19	Analogia fuerza - voltaje . . . . .	173
7.20	Analogia fuerza - corriente . . . . .	174
7.21	Sistema termico . . . . .	178
7.22	Representación grafica de la serie de Taylor . . . . .	181
8.1	Dependencia lineal . . . . .	189
8.2	Independencia lineal . . . . .	190
8.3	Angulo entre vectores . . . . .	195

8.4	Vectores . . . . .	202
8.5	Sistema de dos masas . . . . .	211
8.6	Diagrama de cuerpr libre . . . . .	211
8.7	Modo de vibración 1 . . . . .	213
8.8	Modo de vibración 2 . . . . .	213
9.1	Algoritmo cofactores . . . . .	227
9.2	Algoritmo determinante . . . . .	228
9.3	Algoritmo matriz adjunta . . . . .	232
9.4	Gradiente . . . . .	237
10.1	Diagrama de Bloques del sistema . . . . .	245
10.2	Sistema dinámico . . . . .	246
10.3	Diagrama de bloques del sistema de control lineal en tiempo continuo representado en el espacio de estados . . . . .	250
10.4	Representación de un sistema con tres entradas y tres salidas . . . . .	252
10.5	Sistema Mecánico . . . . .	254
10.6	Diagrama de bloques del sistema mecánico . . . . .	256
10.7	Circuito RLC . . . . .	256
10.8	Sistema de dos masas , dos resortes , dos amortiguadores . . . . .	258
10.9	D.C.L. Masa 1 . . . . .	259
10.10	D.C.L. Masa 2 . . . . .	259
10.11	Circuito R.L.C. . . . .	261
10.12	Interconectibilidad de los subsistemas . . . . .	265
10.13	Interconexión de Cuatro Subsistemas . . . . .	267

11.1 Circuito R.C . . . . .	273
12.1 Muestreador . . . . .	292
12.2 Conversión de señales . . . . .	294
13.1 Zonas Estables . . . . .	311
13.2 Análisis grafico de estabilidad . . . . .	315
13.3 Trayectoria Asintoticamente estable . . . . .	317
13.4 Clasificación de P.E. . . . .	324
13.5 Clasificación de P.E. . . . .	325
13.6 Sistema masa-resorte . . . . .	328
14.1 Avion . . . . .	344
15.1 Representación en diagramas de bloques . . . . .	363
15.2 Representación . . . . .	365
15.3 Diagrama de bloques de la forma canónica controlable . . . . .	366
15.4 Función de transferencia . . . . .	366
15.5 Diagrama de bloques equivalente . . . . .	368
15.6 Descomponiendo una función de transferencia . . . . .	369
15.7 Función de transferencia . . . . .	371
15.8 Representación en diagrama de bloques . . . . .	371
15.9 Representación de la función de transferencia . . . . .	372
15.10 Representación de la ecuación de transferencia en variables de estado . . . . .	373
15.11 Diagrama de bloques de la forma canónica controlable . . . . .	374
15.12 Representación de la ecuación . . . . .	374

15.13	Diagrama de bloques de realización en cascada (Representación del sistema en series)	375
15.14	Representación de la ecuación de transferencia	376
15.15	Representación del sistema en paralelo	377
15.16	Representación en diagrama de bloques	378
15.17	Diagrama de bloques de $H(s)$	379
15.18	Realización del ejemplo	380
16.1	Sistema con realimentación de variables de estado	386
16.2	Sistema con realimentación de la señal de salida	387
16.3	Diagrama de planta con la matriz de ganancia $\mathbf{K}$	404
16.4	Péndulo invertido	412
16.5	Funcionamiento del observador	424
16.6	Representación grafica del ejemplo 9	426
16.7	Observador en tiempo discreto total	428
16.8	Representación grafica ejemplo 10	430
16.9	Arreglos para el observador	432
16.10	Representación grafica del ejemplo 11	433
17.1	Trayectorias alternativas para ir de $a$ hasta $l$	438
17.2	Trayectorias del ejemplo	439
17.3	Realimentación control óptimo	453
17.4	Realimentación control óptimo	453
17.5	Diagrama de bloques	462
17.6	Relación del estado final y el instante	477
17.7	Relación de $\bar{u}$ con $u^*$	480

17.8 Solución de Contorno . . . . .	482
17.9 Solución de interior . . . . .	482
17.10Valores de $\lambda$ . . . . .	483
17.11Diagrama de bloques . . . . .	484
17.12Valores de $u^*$ . . . . .	486
17.13Regulación de Kalman . . . . .	489
17.14Observador . . . . .	489
17.15Diagrama de las variables estimadas . . . . .	491
17.16Diagrama del ejemplo . . . . .	494
17.17Diagrama de bloques . . . . .	495

# Índice de cuadros

1.1	Formación Ing. Carlos Borrás Pinilla . . . . .	29
2.1	Temario del seminario . . . . .	35
3.1	Asignación de roles . . . . .	39
4.1	Funciones elementales con vectores . . . . .	57
4.3	Simbolos de Matlab . . . . .	61
4.5	Parámetros físicos . . . . .	97
7.1	Analogía fuerza - voltaje . . . . .	174
7.3	Analogía fuerza - corriente . . . . .	175
7.5	Unidades . . . . .	176
10.1	Modelado de espacio de estados según el tipo de Sistema . . . . .	251
12.1	Transformadas . . . . .	296
12.3	Propiedades . . . . .	296
13.1	Tiempo continuo . . . . .	312
13.2	Tiempo discreto . . . . .	313

TITULO<sup>1</sup>: SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN EN TEORIAS DE CONTROL MODERNO

AUTORES<sup>2</sup>: ALEN FABIAN GALVIS ACERO

JUAN MANUEL ORDÓÑEZ FRANCO

IVÁN DARÍO QUITIÁN MÉNDEZ

BAYRON HENRRY VERGARA SÁNCHEZ

PALABRAS CLAVES: Control Moderno, Función de Transferencia, Variables de Estado, Control Óptimo, Realimentación, Diagrama de Bloque.

#### DESCRIPCIÓN

El control automático ha jugado un papel importante en el avance de la ingeniería. El objetivo es proporcionar una introducción a la rama de la ciencia y la matemática conocida como teoría de control, un campo que juega un papel importante en casi todos los dispositivos de precisión moderna. Algunas razones para estudiar las teorías de control son: un conocimiento detallado del tema permitirá que se construyan los dispositivos de alta precisión que realizan exactamente sus tareas previstas a pesar de disturbios grandes del ambiente. Ciertamente, la electrónica y los sistemas modernos de ingeniería serían imposibles sin teoría de control. Otra razón es potencialmente más emocionante, es desarrollar las herramientas matemáticas generales para describir y entender sistemas dinámicos. Por ejemplo, las matemáticas que se han desarrollado para los usos de la ingeniería, tales como aviones de vuelo, ahora se están utilizando para el análisis cuantitativo del comportamiento de sistemas complejos.

Por medio de este trabajo a través de la metodología de seminario de investigación, busca llevar tal conocimiento de un nivel de post-grado a un nivel académico de pregrado aprovechando la disponibilidad que se cuenta de Teorías de Control en textos, dando las bases necesarias para continuar con la investigación en esta área en la escuela de Ingeniería Mecánica.

---

<sup>1</sup>Trabajo de grado

<sup>2</sup>Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas, Escuela de Ingeniería Mecánica, Director: Ing. Carlos Borrás Pinilla

TITLE<sup>3</sup>: CONTROL MODERN THEORIES RESEARCH SEMINAR

AUTHORS<sup>4</sup>: ALEN FABIAN GALVIS ACERO

JUAN MANUEL ORDÓÑEZ FRANCO

IVÁN DARÍO QUITIÁN MÉNDEZ

BAYRON HENRRY VERGARA SÁNCHEZ

KEYWORDS: Modern Control, Transfer Function, State Variables, Optimal Control, Feedback, Block Diagram.

#### DESCRIPTION

Automatic control has played an important role in the advancement of engineering. The aim is to provide an introduction to the branch of science and mathematics known as control theory, a field that plays an important role in almost all modern precision devices. Some reasons for studying the theories of control are: a detailed knowledge of the subject will be built high-precision devices that perform their tasks exactly planned, despite major environmental disturbances. Certainly, electronics and modern engineering systems would be impossible without control theory. Another reason is potentially more exciting, is to develop mathematical tools to describe and understand general dynamical systems. For example, the mathematics has been developed for engineering applications such as aircraft flight, are now being used for quantitative analysis of the behavior of complex systems.

Through this work by means the research seminar methodology, it seeks to bring such knowledge of a post-graduate level to an undergraduate academic level taking advantage of the availability told of Theories of Control in texts, giving the necessary foundation to continue research in this area in the School of Mechanical Engineering.

---

<sup>3</sup>Thesis Project

<sup>4</sup>Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas, Escuela de Ingeniería Mecánica, Director: Ing. Carlos Borrás Pinilla

# INTRODUCCION

La escuela de Ingeniería Mecánica en su misión contempla la construcción, aplicación y divulgación del conocimiento científico, para cumplir con dicha misión es necesario implementar herramientas que faciliten el desarrollo del conocimiento científico y el mejoramiento de los procesos de investigación. Una forma de contribuir al logro de la misión es investigar en el área del control moderno, en este caso se desea estudiar los aspectos teóricos y su aplicabilidad en aspectos ingenieriles.

El seminario de investigación en teorías de control moderna es un proceso reflexivo, sistemático y crítico que tiene como propósito fortalecer en el estudiante las habilidades requeridas en el manejo de la información y la comunicación para desarrollar la investigación científica valiéndose de las ventajas dadas por el trabajo personal, en equipo y original iniciando el estudio de nuevos objetos de investigación de interés para la escuela de Ingeniería Mecánica mediante una dinámica que comprende actividades de relatoría, correlatoria, discusión y elaboración de un documento síntesis, en el que se incluyen el estudio de los referentes contextuales de las Teorías de Control Moderna, desarrollando así todo el tema de manera compacta y coherente entre los subtemas que conforman el seminario. Adicionalmente se abre el espacio para la continuidad en el estudio y profundización del control moderno.

Con esta labor se desea elevar el nivel de conocimiento en la escuela de Ingeniería Mecánica en el ámbito del control moderno, pues con el pasar del tiempo las teorías de control moderno han evolucionado constantemente y juegan un papel muy importante en muchas aplicaciones ingenieriles. En los últimos años, los sistemas de control automático han asumido un papel importante en la tecnología moderna y el desarrollo de la humanidad. Prácticamente todas las actividades y aspectos de nuestro diario vivir están afectadas por algún tipo de sistema de control. En el ambiente doméstico, en el automóvil, en la oficina, la industria, en el transporte, las telecomunicaciones, medicina, servicios en general, viajes espaciales, generación de energía, extracción de recursos naturales y muchos otros están utilizando diversos sistemas de control.

La ingeniería de control se basa en los fundamentos de la teoría de la realimentación y el análisis de sistemas lineales, los conceptos de las teorías de redes y de comunicación. Por tanto, la ingeniería de control no está limitada a ninguna disciplina de la ingeniería, sino que es igualmente

aplicable a las ingenierías aeronáutica, química, mecánica, del medio ambiente, civil y eléctrica. Por ejemplo, un sistema de control incluye a menudo componentes eléctricos, mecánicos y químicos. Además, al aumentar el conocimiento de la dinámica de los sistemas comerciales, sociales y políticos, también se incrementa la capacidad de control de estos sistemas.

Además, cabe resaltar que el control automático ha tenido una importancia relevante en el avance de la ingeniería y la ciencia, en el desarrollo de los sistemas de vehículos espaciales, la manufactura, la industria

Teniéndose en cuenta lo anterior, el presente informe es una descripción de como se cumplieron los objetivos planteados para la realización del seminario de investigación en Teorías de Control Moderna:

- Documento (recopilación de la sesiones realizadas).
- Presentaciones en Power Point de los temas expuestos en el seminario.
- Programas en Matlab de ejemplos referenetes a los temas expuestos en el seminario.

En la primera parte se abordan temas que aclaran y dan una perspectiva del seminario de investigación, en la segunda parte se explican los resultados obtenidos por medio del seminario y en una tercera parte se hace la recopilación de todos los documentos que se elaboraron a partir de cada sesión realizada.

## Parte I

# SEMINARIO DE INVESTIGACION

# Capítulo 1

## GENERALIDADES DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

### 1.1 QUE ES EL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN<sup>1</sup>

El seminario de Investigación, también conocido como Seminario Alemán, es una actividad académica cuyo origen se dio a finales del siglo XVIII en la Universidad de GOTTINGEN de Alemania, para renovar las estrategias de estudio y formación de los investigadores, además para demostrar que la docencia y la investigación se pueden unir y complementar para obtener mejores resultados.

Consiste en estudiar, discutir e intercambiar experiencias acerca de un tema en particular, en un grupo, en el cual sus participantes se intercomunican exponiendo dicho tema (la Relatoría) complementándolo, evaluándolo (Correlatoria), aportando entre todos (la Discusión), sacando conclusiones y planteando nuevos interrogantes lo que permite que todo ello quede en la memoria escrita (el Protocolo).

El seminario de investigación se programa por subtemas, estos son seleccionados con la orientación del director del seminario, quien con su experiencia y conocimiento del tema central, guía la selección con la debida pertinencia, actualidad y ubicación en el contexto. Los temas son desarrollados en sesiones planificadas, en las cuales los miembros del grupo deben asumir diferentes roles de acuerdo con la descripción anterior y mantener una relación de interés y compromiso con el conocimiento sin jerarquías en un clima de colaboración y participación activa.

---

<sup>1</sup>Univesidad Industrial de Santander. Lineamientos para el seminario de investigación como modalidad para el desarrollo del trabajo de grado. Vicerrectoria académica. Septiembre de 2007

## 1.2 OBJETIVO DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

El objetivo es formar a los participantes en la investigación científica mediante el desarrollo de habilidades específicas aplicadas al asumir los diferentes roles dentro del seminario. Dichas habilidades están orientadas a desarrollar la capacidad de lector crítico de resultados de investigación en cualquiera de las áreas del conocimiento, a fortalecer la capacidad de observar e identificar los problemas presentes en temas bajo análisis, a buscar respuestas a preguntas clave y sustentarlas teórica y metodológicamente en forma verbal y por escrito; y a identificar las relaciones del problema objeto de estudio con el contexto económico, político o social a fin de enriquecer, con una mirada de integralidad, el conocimiento para el grupo de estudiantes. Para ello se programan y ejecutan ejercicios estructurados que permiten a los estudiantes desarrollar competencias iniciales de investigador, avanzar en el conocimiento y aportar buenas revisiones y análisis sobre temas que pueden facilitar el desarrollo de la investigación.

Para alcanzar dicho objetivo es preciso que haya una formación desde el trabajo personal hacia el trabajo en equipo; para esto, cada participante debe reconocer intereses, estilos de aprendizaje, capacidades para aprender en interacción con pares; además debe apropiarse de la metodología y los instrumentos con los cuales trabajara con el fin de lograr, al interactuar con los demás miembros del grupo en las sesiones del seminario, compartir, criticar y corregir las ideas que surjan de él en un ambiente de colaboración mutua.

Los seminarios de investigación no se enfocan hacia la repetición de trabajos ya realizados, sino hacia la búsqueda de respuestas con nuevos argumentos; por tal razón los trabajos que se deriven del cumplimiento del objetivo del Seminario deben caracterizarse por su originalidad y estar acordes al nivel científico de formación de sus participantes.

## 1.3 VENTAJAS DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

El seminario de investigación, como herramienta para el desarrollo integral, presenta las siguientes ventajas:

- Permite a los participantes contar con un director (profesor) durante el seminario, el cual les guía hacia la consecución de los propósitos establecidos, y además, resuelve las dudas e inquietudes o en su defecto, orienta sobre las fuentes de consulta y ayuda a los miembros del grupo en la búsqueda para suplir las necesidades de información.
- Fortalece el hábito de documentarse acerca del tema bajo estudio. Para esto los participantes recurren a fuentes bibliográficas, bases de datos, textos de referencia obligada; este ejercicio refuerza el desarrollo de las competencias interpretativas, argumentativas y propositivas; les permite apropiarse y aprender de los métodos que emplearon los autores de los artículos y textos, sí como también, reconocer su valor y aporte a la investigación.

- Permite que los participantes desempeñen diferentes roles dentro del grupo, desarrollando habilidades comunicativas y de relaciones interpersonales, complementarias para la formación tanto personal como profesional.
- Fomenta el aprendizaje como una experiencia grupal, permite experimentar la eficiencia del trabajo en equipo y si el grupo está conformado con estudiantes de diferentes áreas del conocimiento, la riqueza de la interdisciplinariedad, características todas aplicables y necesarias en el desempeño laboral del mundo de hoy.
- Permite el uso de distintas herramientas didácticas de apoyo al desarrollo de las sesiones, así como un control sobre la planificación establecida de éstas.
- Es una metodología integradora centrada en el estudiante, con amplio potencial para fortalecer la habilidad de aprender a aprender, fundamental para tomar el perfil del ciudadano del siglo XXI, quien deberá asumir el compromiso de aprender a lo largo de la vida, como la plantea J. Delors<sup>3</sup> .<sup>2</sup>

## 1.4 CARACTERÍSTICAS

El seminario de investigación posee las siguientes características:

- Participación activa de todos los miembros del seminario, puesto que no solo el director (profesor) interviene, sino también todos los integrantes del grupo realizan su aporte desde el rol que estén desempeñando. En este proceso los participantes siendo discípulos empiezan a recorrer el camino hacia Maestros.
- El Seminario de Investigación está conformado por un grupo reducido, de aprendizaje activo y cooperativo, inducido a investigar, reflexionar, descubrir y concluir.
- Empleo del dialogo permanente para compartir los conocimientos adquiridos.
- Ambiente amable y cooperativo fomentando la mayor participación de los integrantes del grupo.
- Sesiones desarrolladas utilizando medios didácticos de apoyo al aprendizaje.
- La estructura del seminario y todas las actividades y parámetros para desarrollarlas, son planificados en la primera sesión.
- El seminario de investigación exige a los participantes una alta responsabilidad para lograr la preparación adecuada, que les permita tener bases para llevarlo a cabo.

---

<sup>2</sup>Jaques Delors et al. La Educación Encierra un Tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la educación para el siglo XXI. París, 1996.

## 1.5 ORGANIZACIÓN DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

El Seminario de Investigación se compone de las siguientes actividades: la Relatoría, la Correlatoría, la Discusión y el Protocolo, las cuales deben girar en torno a un tema, del que se desprenden los subtemas a tratar durante las sesiones. Dichas actividades son responsabilidad de los integrantes del grupo, por lo cual a cada uno de ellos es asignado un rol, de carácter rotativo; es así como una persona que en una sesión asume el rol de correlator, en la siguiente puede ser el protocolante, es decir el responsable del protocolo. La organización del seminario también implica establecer el lugar del seminario, el número de sesiones y las fechas para realizarlas, así como la duración de cada una de las actividades (Relatoría, Correlatoría, Discusión y Protocolo).

### **Director:**

- Ing. Carlos Borrás Pinilla

### **Participantes:**

- Alen Fabian Galvis Acero
- Bayron Henry Vergara Sanchez
- Ivan Dario Quitian Mendez
- Juan Manuel Ordoñez Franco

A los cuales se les asigna un rol para cada sesión. Las sesiones se llevan a cabo en el salón 103 de la Escuela de Ingeniería Mecánica. El número de sesiones depende de la cantidad de temas seleccionados para el seminario. Las sesiones están programadas para una duración de 2 horas.

## 1.6 DIRECCIÓN DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN EN TEORIAS DE CONTROL MODERNO

La dirección del seminario de Investigación en Teorías de Control Moderno estuvo a cargo del profesor: Ing. Carlos Borrás Pinilla que cuenta con la siguiente formación:

Table 1.1: Formación Ing. Carlos Borrás Pinilla

<b>Formación</b>
M. Sc. Student. University of Oklahoma. Thesis research: Pattern Recognition of Failures Using Neural Fuzzy Logic.
Specialist in Management of Maintenance. Universidad Industrial de Santander Thesis research: Total Productive Maintenance, Colombian Approach.
Specialist in Fluid Power. Training course in hydraulics. Kitakyushu International Techno-Cooperative Association. Kitakyushu, Japan
Mechanical Engineer. Universidad Industrial de Santander. Thesis project: Design and manufacturing of electrohydraulics valves 2W-2P. NC & NO.

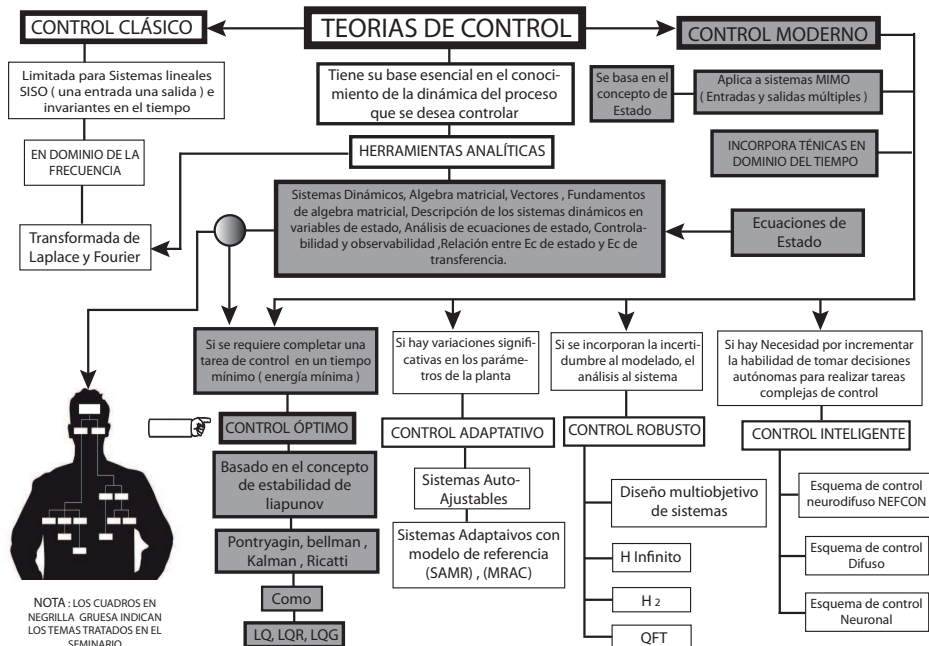
Para llevar a cabo el seminario de investigación en Teorías de Control Moderno satisfactoriamente y garantizar la fluidez de las sesiones y el cumplimiento de los objetivos planteados, el proceso del seminario se realizó en tres etapas: planeación, ejecución y finalización, los cuales dependen uno del otro para poder avanzar en el proceso; los cuales se explicarán en los siguientes capítulos.

# Capítulo 2

# PLANEACIÓN

En esta etapa se establecen las directrices bajo las cuales se desarrolla el seminario, se definen los objetivos que se esperan alcanzar mediante el desarrollo del seminario, el estudio bibliográfico, los temas y subtemas; y la planeación de las sesiones.

Figure 2.1: Mapa conceptual de las teorías de control



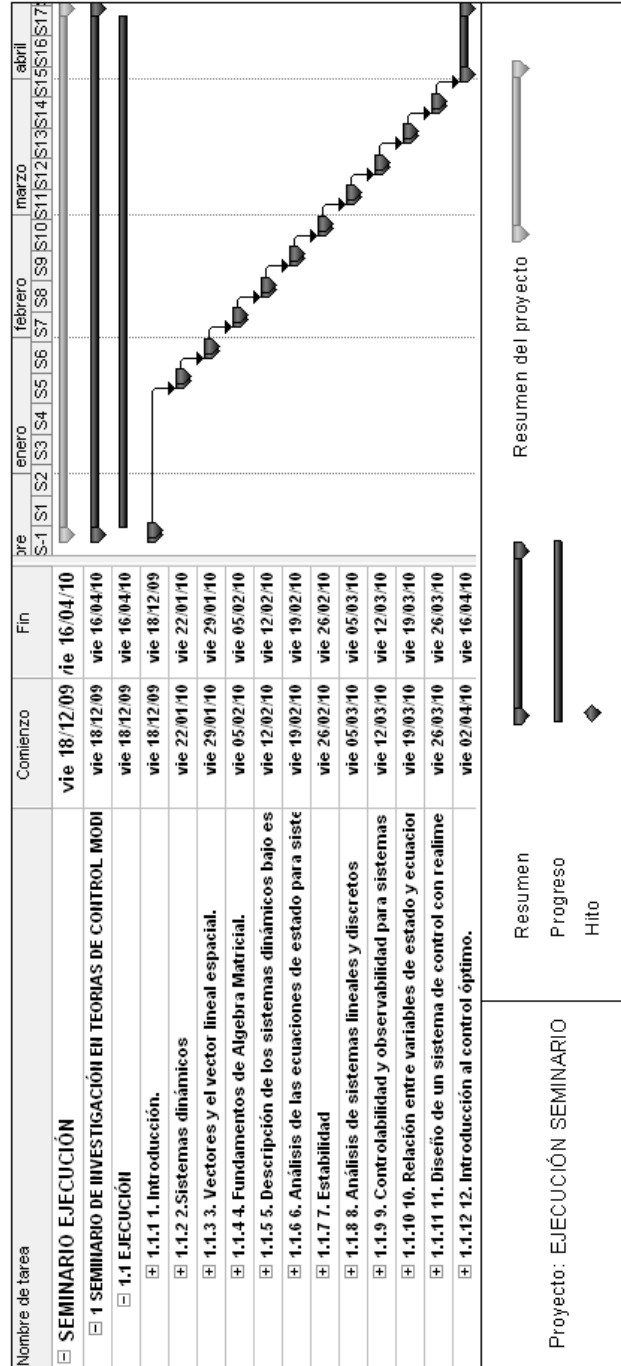
## 2.1 OBJETIVOS DEL SEMINARIO

- Elaborar un documento síntesis original donde se recojan los resultados de la investigación y la discusión realizada en cada sesión a partir de los resúmenes, las relatorías recopiladas y los protocolos en el seminario de investigación de acuerdo con los temas establecidos para el seminario.
- Cumplir con los roles asignados a cada integrante del seminario de investigación.
- Elaborar presentaciones en PowerPoint o Latex/Lyx y documentos síntesis de cada uno de los temas investigados, obtenidos de las relatorías y los protocolos recopilados de cada sesión.
- Desarrollar programas en Matlab o Simulink alusivos a los temas que se encuentran en el temario del seminario.

Para la selección del tema, se selecciono uno en el que los integrantes del grupo tubieramos conocimiento previo en Sistemas Dinamicos y Control Automatico, ademas se hizo una seleccion para el director de proyecto el cual contara con la capacidad de orientación y el perfil para dirigirlo.

## 2.2 PROGRAMACIÓN DEL SEMINARIO

Figura 2.2: Diagrama de gant



## 2.3 ANALISIS BIBLIOGRAFICO

Seguidamente se hizo un analisis bibliografico para poder desarrollar los temas conteplados en el seminario y poder dar inicio a las sesiones; el cual fue:

BROGAN L. William. Modern Control Theory. Prentice Hall, Third Edition, 1991. 639 p. Este libro nos da una visión y orientación en cuanto a los problemas de control y los procesos de control industriales. Se habla sobre el sistema de modelado y control lineal clásico en la transformación de dominio, y se desarrolla el álgebra lineal / teoría de la matriz necesaria para el análisis de la variable de estado.

CHEN Chi - Tsong. Linear System Theory and Desing. Oxford University Press. Third Edition, 1999. 331 p. Este libro se caracteriza porque no es un texto de control, de por sí, ya que no se refieren a criterios de rendimiento, las limitaciones físicas, los costos, la optimización, y los problemas de sensibilidad. Chen desarrolla los principales resultados y los procedimientos de diseño utilizando métodos simples y eficaces. Así, la presentación no es exhaustiva, y sólo aquellos conceptos que son esenciales en el desarrollo son introducidos, en este texto vienen un conjunto de problemas después de cada capítulo el cual ayuda a los estudiantes a comprender y utilizar los conceptos y los resultados estudiados.

GREENBERG D. Michael. Advance engineering mathematics. Prentice Hall. Second Edition., 1998. 1315 p. Este libro facilita la compresion y desarrollo del curso de matematicas avazadas enfonca a ingenieros que es necesario profundizar y tener bien claro para el desarrollo de los temas de aplicacion del seminario.

KATSUHIKO Ogata. Ingeniería de Control Moderna. Pearson Education. Tercera Edicion, 1998. 987p. Este libro nos da un tratamiento completo de análisis y diseño de sistemas continuos de control de tiempo, el cual fue escrito para estudiantes de ingeniería de alto nivel. Se integra MATLAB en el texto, utilizando el programa para resolver todos los problemas, incluye material introductorio como , la transformación de Laplace de base, modelación matemática de sistemas dinámicos, la transferencia de modelos de función, estado de modelos espaciales, análisis de la respuesta transitoria de primera y sistemas de segundo orden, las acciones básicas de control, la raíz del análisis de lugar, el diseño y técnicas de compensación de frecuencia utilizando métodos de respuesta, y aplicaciones de análisis de estabilidad de Lyapunov para el diseño. En un apéndice se suministra el material de referencia necesario para el uso de MATLAB. Incluye gráficos, tablas, ecuaciones y ejemplos.

KATSUHIKO Ogata. Dinamica de Sistemas. Prentice Hall Hispanoamerica, S.A, 1987. 608 p. Este libro fue fundamental para la compresion de los sitemas dinamicos de una manera didactica, la cual contemplaba el desarrollo de modelos matematicos y el analisis de respuestas en dichos sistemas. Presenta una variedad de problemas que describen situacioens reales encontradas en la practica ingenieril.

KARNOPP C. Dean, Margols C. Donald, Rosenberg Donald. System Dynamics: Modeling And Simulation Of Mechatronic Systems. Jhon Wiley & Sons, Inc. 505 p. Este libro trata sobre la importancia de los sistemas dinámicos, el cual es un recurso fundamental para los ingenieros frente al cada vez más complejo trabajo de diseño de sistemas mecatrónicos, aparatos eléctricos, subsistemas de mecánica, hidráulica, neumática, térmicos y magnéticos. Es una guía completa para modelar, diseñar, simular y analizar sistemas dinámicos que comprende una variedad de tecnologías y ámbitos de la energía. La presentación comienza con los elementos básicos y da lugar a sofisticados modelos matemáticos adecuados para la simulación por ordenador automatizado.

KREYSZIG Erwin. Matemáticas Avanzadas, volumen I. Limusa Wiley. Tercera Edición, 2003. 853 p. Este libro presenta a los estudiantes de ingeniería las áreas de las matemáticas que, desde una perspectiva moderna poseen mayor importancia en relación con problemas prácticos, en los temas de ecuaciones deiferenciales, algebra lineal, calculo vectorial, análisis de Fourier, metodos numéricos, optimización entre muchos otros que contempla el libro.

NISE Norman S. Control Systems Engineering. Jhon Wiley & Sons, Inc. Four Edition, 2004. 970 p. Este libro introduce a la teoría y práctica de ingeniera de sistemas de control, se puede destacar la aplicación de la materia al analisis y diseño de sistemas realimentados. El libro cuenta con un repaso de cursos inferiores de fisica y matematicas como ecuacioanes diferenciales, algebra lineal, Laplace entre otras que se deben dominar.

POWELL David, Franklin F. Gene. Feedback control of dynamic systems. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. Third Edition. 790 p. Este libro desarrolla ideas sobre los problemas del control y la intuición acerca de los métodos disponibles para resolverlos, presenta este material en una forma que es fácilmente comprensible para los estudiantes de cualquier ingeniería. Además de las mejoras pedagógicas, este libro agrega comandos de computadora para muchas operaciones y pone a su disposición una caja de herramientas de MATLAB.

Cada integrante del seminario recurrio a estas fuentes bibliograficas y en caso que esta información no fuera suficiente, se recurrio a otras fuentes que aportaron algo nuevo a la investigación del tema.

El numero de sesiones se determinó de acuerdo a los temas seleccionados, se asigno a cada integrante un numero de temas para exponer, de tal forma que tubiera un tiempo prudencial para recopilar y crear la exposición del tema, ademas de equilibrar las cargas en el desarrollo del seminario, a la vez se defnieron los roles de cada uno. Se escogieron los viernes para realizar las sesiones por la disponibilidad horaria de los integrantes, como del director y tambien por la facilidad para disponer dicho dia de salón y videobeam.

## 2.4 TEMARIO

Table 2.1: Temario del seminario

Temas
<p>1. Introducción.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Sistemas clásicos de la teoría de control</li><li>• Representación de un sistema.</li><li>• Realimentación, indicadores y medida de desempeño.</li><li>• Métodos de análisis de control clásico, extensión de técnicas clásicas a sistemas más complejos.</li></ul>
<p>2. Sistemas dinámicos</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Introducción</li><li>• Modelado<ul style="list-style-type: none"><li>◦ Generalidades</li><li>◦ Sistemas Mecánicos</li><li>◦ Sistemas Hidromecánicos</li><li>◦ Sistemas Electromecánicos</li><li>◦ Sistemas Termicos</li></ul></li><li>• Linealización</li></ul>
<p>3. Vectores y el vector lineal espacial.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Dependencia lineal e independencia.</li><li>• Operaciones especiales y definiciones de vectores espacial.</li><li>• Los Eigenvalues y Eigenvectores.</li></ul>

Continúa en la página siguiente

- Transformaciones y funciones de matrices cuadradas.
- Teorema de Cayley-Hamilton.

#### 4. Fundamentos de Algebra Matricial Moderna.

- Operaciones algebraicas con matrices.
- Leyes del algebra matricial.
- La traspuesta, conjugada y la matriz asociativa.
- Determinantes y cofactor.
- Rank y el trace de una matriz.
- La inversión de una matriz.
- Particiones de matrices.
- Diferenciación e integración de matrices.
- Gradientes.
- Vectorización de matrices.

#### 5. Descripción de los sistemas dinámicos bajo espacio y variables de estado.

- Concepto de espacio de estado.
- Representación dinámica en el espacio de estado.
- Obtención de las ecuaciones de estado dinámica.
- Interconectibilidad de los subsistemas.

#### 6. Análisis de las ecuaciones de estado para sistemas lineales en tiempo continuo.

- Ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Matriz con coeficientes constantes.

Continua en la pagina siguiente

- Sistemas modales y descomposición modal.
- Tiempo variante.
- Matriz de transición.

#### 7. Análisis de sistemas lineales y discretos

- Representación de ecuaciones de estado en el dominio discreto del tiempo.
- Coeficientes constantes discretos de ecuaciones de estado.
- Descomposición modal.
- Coeficientes variables en el tiempo.
- Matriz de transición discreta.

#### 8. Estabilidad

- Introducción
- Puntos de equilibrio y concepto de estabilidad
- Definiciones de estabilidad
- Estabilidad de sistemas lineales
- Sistemas lineales constantes
- El método directo de Lyapunov

#### 9. Controlabilidad y observabilidad para sistemas lineales.

- Definiciones
- Sistemas invariantes en el tiempo con eigenvalues definidos y sistemas con Eigenvalues arbitrarios.
- Ecuación canónica para Kalman, detección y estabilización.

#### 10. Relación entre variables de estado y ecuaciones de transferencia de los sistemas.

Continúa en la página siguiente

- Matrices de transferencia de un sistema de ecuaciones de estado.
- Realización de ecuaciones de estado proveniente de matrices de transferencia.
- Concepto de implicación y reductibilidad en la realización.
- Determinación de realizaciones irreducibles de un sistema dinámico.

11. Diseño de un sistema de control con realimentación lineal.

- Estado y salida realimentadas.
- Efecto de la realimentación sobre las propiedades del sistema.
- Asignación de los polos usando el estado de realimentación y salida realimentada.
- Reconstrucción de estado con las salidas disponibles.

12. Introducción al control óptimo.

- Conceptos de control óptimo.
- Programación dinámica.
- LQR y LQG.
- Ecuación de Riccati.
- Principio del mínimo de Pontryaginado.

Fin

## Capítulo 3

# EJECUCIÓN

En la siguiente tabla se ilustra el orden de las actividades desarrolladas por cada integrante del seminario, compuesta por relator (r), correlator (c), protocolo (p), discusion (d) y apertura (a).

Table 3.1: Asignación de roles

Tema	Director	Alen Galvis.				Juan Manuel.				Bayron V.				Ivan Quitian.			
	A	R	C	P	D	R	C	P	D	R	C	P	D	R	C	P	D
1	x	x							x		x					x	
2	x			x		x							x		x		
3	x		x					x		x							x
4	x				x		x					x		x			
5	x	x							x		x						x
6	x			x		x							x		x		
7	x		x					x		x							x
8	x				x		x					x		x			
9	x				x		x					x		x			
10	x	x							x		x						x
11	x			x		x							x		x		
12	x		x					x		x							x

El protocolo consta de los siguientes pasos:

- Levantar un acta la cual tiene un numero consecutivo, fecha de la sesión, lugar, roles, tema desarrollado, observaciones y/o correcciones.

- Hacer un documento del tema expuesto.
- Guardar el archivo de Power Point de la presentación realizada por el relator.

### 3.1 EL ACTA

El acta es un documento escrito donde se hace constar la relación de los roles de los participantes en cada sesión del seminario de investigación. El documento modelo se aplicó en todas las sesiones realizadas como se observa en la figura X.

Estructura del acta:

- **Numeración:** Es el número consecutivo de cada acta, en total se realizaron un total de 12 actas, que corresponden a los 12 temas desarrollados a lo largo del seminario.
- **Fecha:** Es la fecha de realización de la sesión.
- **Hora:** Se toma nota de la hora de inicio y la hora de finalización. La duración total de las sesiones es de aproximadamente dos horas.
- **Lugar:** Sitio de realización del seminario, el cual fue el salón 103 de la Escuela de Ingeniería Mecánica.
- **Relator:** Es el encargado de exponer el tema correspondiente en la sesión del seminario. El relator tiene como misión principal enriquecer, como resultado de su investigación y estudio, el saber de los demás, buscando por medio de una argumentación rigurosa aportar algo nuevo que permita avanzar en el conocimiento sobre el objeto de estudio.

El relator durante su exposición debe estimular e inducir el grupo a la discusión, mantener su atención y despertar interés de participación, a través de la argumentación rigurosa, explicaciones claras y el planteamiento de su punto de vista.

El relator tiene toda la libertad para organizar su material de trabajo, puede utilizar, en términos didácticos, comparaciones, relaciones, ejemplos y pruebas lógicas o experimentales; además debe abordar su exposición desde diferentes posiciones, es decir lo puede hacer desde un enfoque informativo, en el cual el relator es imparcial y objetivo, y cita con exactitud las fuentes y/o desde un enfoque argumentativo en el que expresa su opinión y comparte con el grupo sus propias conclusiones, con el fin de llegar a nuevos resultados. El rumbo de la relatoría depende de lo que el grupo espera de la sesión y de la naturaleza de los temas.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Nestor H. Bravo Salinas. El seminario investigativo. El seminario como práctica pedagógica para la formación integr03/02/10al



- **Correlator:** Es la persona encargada de complementar y enriquecer la relatoria, el cual debe estar muy atento a la exposición del relator, pues no debe repetir lo expuesto, sino evaluar el contenido, la claridad y el manejo de la exposición, con del fin de plantear su reflexión personal, y su posición frente a la relatoría, de una manera crítica, destacando los aportes mas relevantes de la relatoría motivando a los participantes al debate.
- **Discusión:** Es el medio a través del cual los participantes con base en lo expuesto en la relatoría y la argumentación del correlator, confrontan sus concepciones y apreciaciones sobre el tema. Esta dinámica se desarrolla a manera de discusión, la cual se caracteriza por ser de carácter positivo, argumentativo y enfocado al enriquecimiento del trabajo en grupo. La discusión requiere participación oportuna y respeto por las opiniones de los demás, criticándolas constructivamente. Este ejercicio permite a los participantes fortalecer procesos cognitivos a partir de la escucha atenta, la reflexión, la toma notas sobre lo que desea expresar para luego a hablar.
- **Protocolo:** El protocolo es la evidencia escrita de cada sesión del seminario y un insumo para la elaboración del informe final. Éste debe ser leído antes de comenzar cada sesión, ya que es un acta de registro de lo ocurrido en la anterior y de los compromisos planteados. Su autor es el protocolante, el cual plasma en un documento las actividades tal y como fueron desarrolladas, utilizando una redacción clara y concisa.

El protocolo, como documento testimonial, debe recoger el tema, día, duración, asistentes, funciones y tareas cumplidas (síntesis de la relatoría y correlatoría), desarrollo de la discusión, aportes de los participantes, interrogantes nuevos sobre el tema, validaciones y acuerdos entre los miembros del seminario.

El protocolante además de documentar la relación exacta de lo ejecutado durante la sesión, también juzga y evalúa su desarrollo integral registrando sus aportes en el protocolo, el cual debe ser revisado por el Director del seminario y el Relator antes de iniciar la sesión, teniendo en cuenta que cada integrante del grupo debe tener una copia de él.

- **Observaciones y Correcciones:** Se anotaron en el acta para cada una de las sesiones, las cuales en la siguiente sesión eran revisadas.

Figure 3.1: Formato del acta



**TEORIAS DE CONTROL MODERNO**  
**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER, ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**ACTA No. ##**

**FECHA:**  
**HORA:**  
**LUGAR:**

**RELATOR:**  
**CORRELATOR:**  
**DISCUSIÓN:**  
**PROTOCOLO:**

Se realizo la ## sesión del SEMINARIO DE INVESTIGACION EN TEORIAS DE CONTROL MODERNO.

**Tema desarrollado:**


**Observaciones y Conclusiones:**

---

Ing. Carlos Borrás Pinilla

Figure 3.2: Acta diligenciada

(a)



**TEORIAS DE CONTROL MODERNO**  
**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER, ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**ACTA No. 03**

**FECHA:** 28 de Enero de 2010  
**HORA:** 2:40 p.m.  
**LUGAR:** Salón 104 Escuela Ing. Mecánica


**RELATOR:** BAYRON H. VERGARA  
**CORRELATOR:** ALEN FABIAN GALVIZ  
**DISCUSIÓN:** IVAN DARIO QUITIAN M  
**PROTOCOLO:** JUAN MANUEL ORDÓÑEZ FRANCO

Se realizo la tercera sesión del SEMINARIO DE INVESTIGACION EN TEORIAS DE CONTROL MODERNO.

**Tema desarrollado:**

3. Vectores y el vector lineal espacial
  - 3.1 Vector espacial lineal planar y tridimensional de estado
  - 3.2. Dependencia lineal e independencia lineal
  - 3.3 Operaciones especiales y definiciones de vectores espaciales
  - 3.4 Los Eigenvalues y Eigenvectores
  - 3.5 Transformaciones y funciones de matrices cuadradas
  - 3.6 Teorema de Cayley - Hamilton

(b)



**Observaciones y Conclusiones:**

- Hacer la un ejemplo del producto punto.
- Incluir las definiciones de matriz inversa, del rango de una matriz y de la norma de un vector.
- Desarrollar un ejemplo de la definición de núcleo o Kern.
- Hacer la representación grafica de los modos de movimiento del ejemplo de los bloques que describen los egenvalues
- Desarrollar ejemplos con números complejos.

\_\_\_\_\_  
Ing. Carlos Borrás Pinilla



## Parte II

# FINALIZACIÓN

## Capítulo 4

# PRESENTACIONES, DOCUMENTOS Y APLICACIÓN

### 4.1 PRESENTACIONES

La presentación de trabajos de investigación en foros académicos son la culminación del esfuerzo realizado por los investigadores. Si no se siguen los lineamientos establecidos en la elaboración de las presentaciones, el trabajo de investigación, al momento de su presentación, no será valorado de forma completa por el auditorio presente. Es por esto que se estableció una guía precisa para este seminario.

#### 4.1.1 Características

La diapositiva es un medio que facilita una exposición, pero para ello es necesario tener en mente los objetivos que se pretenden alcanzar:

1. Servir como guía al expositor
2. Evitar o minimizar el uso de apuntes
3. Dar un orden lógico a la presentación

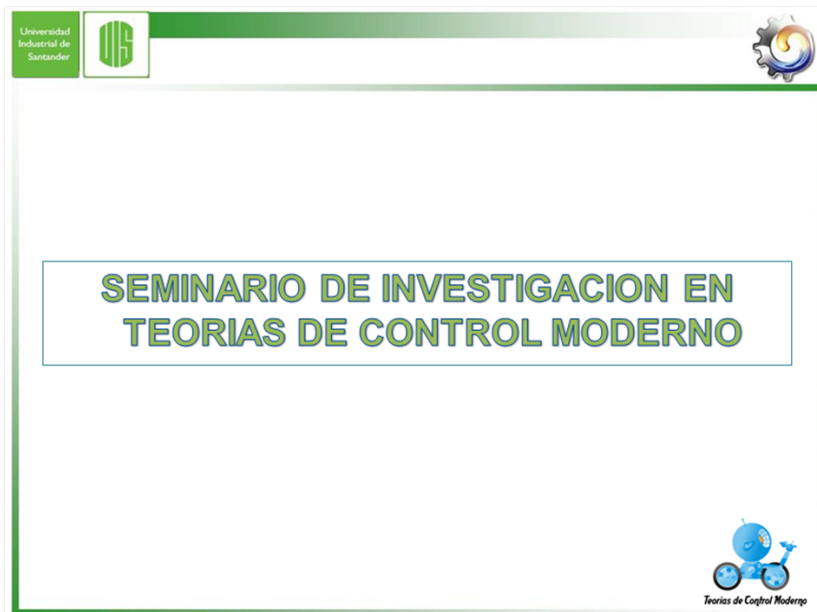
#### 4. Favorecer la captación del mensaje

A continuación se exponen las características que ayudan a cumplir con estos objetivos:

- La comunicación humana es verbal y corporal. Mientras las palabras envían un mensaje, el cuerpo emite mensajes adicionales que pueden ser complementarios, afirmativos o contradictorios. El balance entre ambas formas de comunicación acompañadas con la exposición de imágenes, gráficas y textos favorecen que el mensaje llegue, por alguna de las vías de percepción del ser humano. Es por ello que el formato resulta relevante. El color blanco ayuda a que las personas que estén presentes durante la presentación centren su atención y no cansen la vista.
- Su identificación está siempre presente por lo que incluye el logo del seminario, el cual fue diseñado por los integrantes, también el logo de la universidad y el de la escuela, lo que da sentido de pertenencia.
- El color negro de la letra resalta sobre el fondo blanco haciendo atractivo el mensaje y evita la fatiga al espectador, pues las sesiones son de larga duración y por el cansancio es fácil de distraerse.
- Se establecieron márgenes en las diapositivas que restringen el uso de textos recargados y quien elabora la diapositiva se ve en la tarea de preparar bien dicha presentación a solo incluir ideas claras y concretas.
- Se utilizó un tipo de letra y tamaño estándar y adecuado para facilitar la lectura.
- Las imágenes cumplen una función nemotécnica, son más atractivas que las palabras y los números, por lo que son más fácilmente recordadas por quienes las observan.
- El título del tema está presente en cada diapositiva para que el auditorio siempre sepa que tema se está desarrollando y no pierda el hilo de la exposición.
- La información se organiza de forma lógica, dividida en ideas sencillas que facilitan su exposición.

La totalidad de las diapositivas resultantes de las sesiones en el trascurso del seminario estan recopiladas en forma digital, debido al gran numero y anexadas al informe.

Figure 4.1: Presentación en Power Point



## 4.2 DOCUMENTO

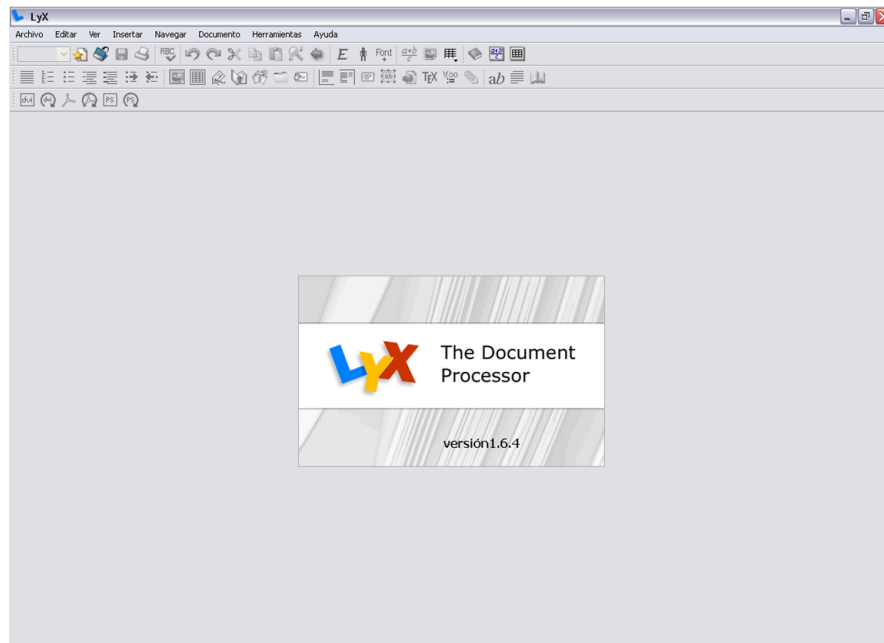
El documento escrito fue elaborado con todas las normas y técnicas de la metodología científica y no consiste en una serie de puntos de vista, opiniones, de ideas, etc..., sino que es producto de la acción de investigar, cuestionar, fundamentar y contribuir realmente al avance del seminario, se desarrollo y enriqueció con los aportes individuales, la discusión de grupo y con la asesoría del director durante el trascurso de las sesiones.

El documento esta dividido en tres secciones, con un total de 16 capítulos, con una recopilación de todos los subtemas expuestos durante las sesiones siguiendo el mismo orden para tener continuidad.

El documento fue elaborado en **Lyx**, el cual es un procesador de texto interactivo de alto nivel y que esta intimamente relacionado con LaTeX, ya que se aprovecha de las características de este para producir textos de alta calidad en su formato. Como sucede con LaTeX, en **Lyx** solo es necesario preocuparse por el contenido, ya que los detalles del formato los entrega la aplicación, lo que convierte a **Lyx** en un software ideal para documentos de gran tamaño como

libros o tesis. Como se dijo anteriormente, **Lyx** trabaja como lo hace LaTeX, es decir bajo la filosofía WYSIWYM (“lo que ves es lo que quieres decir”), a diferencia de otros softwares que se basan en WYSIWYG (“lo que ves es lo que obtienes”), ya que en Lyx se señala que es lo que se desea hacer y la propia aplicación se encarga de los pasos necesarios para dar el formato al documento.

Figure 4.2: Lyx



## 4.3 APLICACIONES EN MATLAB

### 4.3.1 Sistemas dinámicos

- Considerando el sistema, encontrar la respuesta escalón

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

Resolviendo en Matlab

```

$----Respuesta escalón unitario-----

$--definir el numerador y el denominador de la función de
transferencia

num = [0 0 25];
den = [1 4 25];

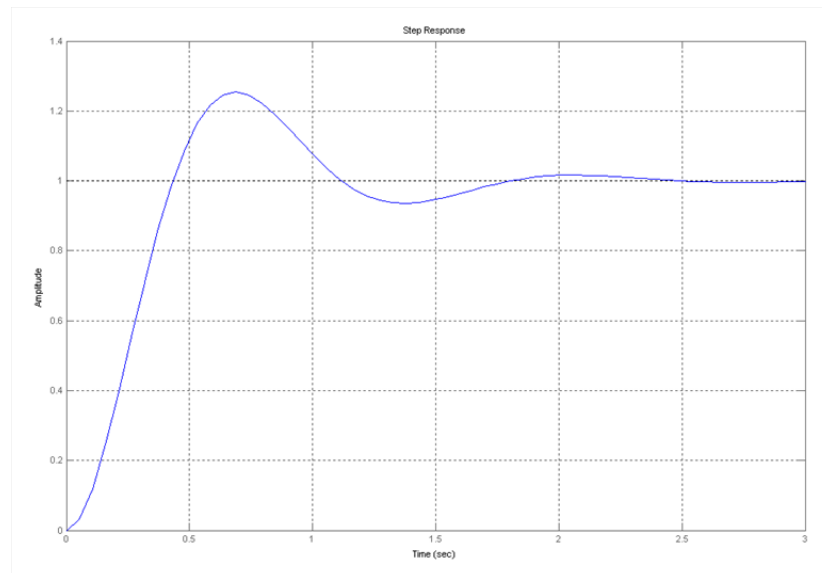
$--comando escalon unitario

step(num,den)
grid on

```

Respuesta grafica

Figure 4.3: Escalón unitario



- Considerando el siguiente sistema, obtener la respuesta impulso

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

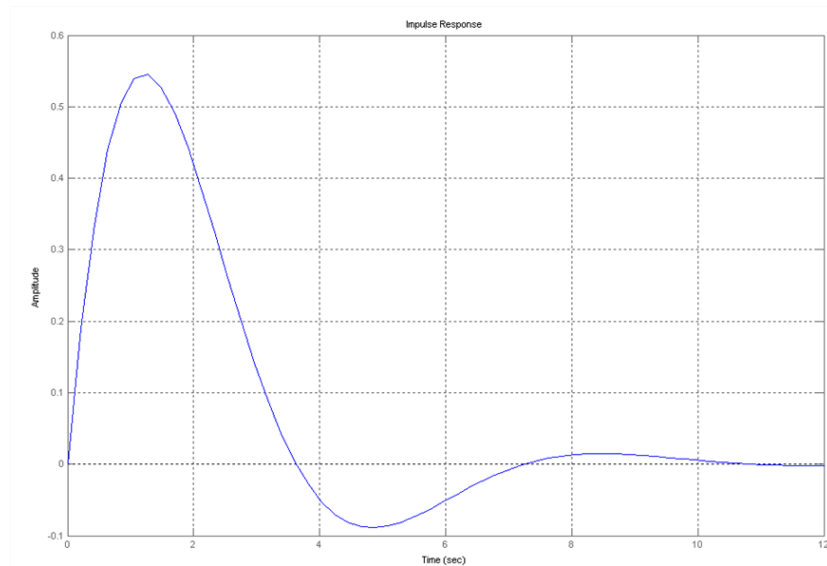
$$y = [ 1 \ 0 ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] u$$

Resolviendo en MATLAB

```
%----Respuesta impulso----  
%--definiendo las matrices A,B,C,D  
A = [0 1;-1 -1];  
B = [0;1];  
C = [1 0];  
D = [0];  
  
%--comando impulso  
impulse(A,B,C,D);  
grid on
```

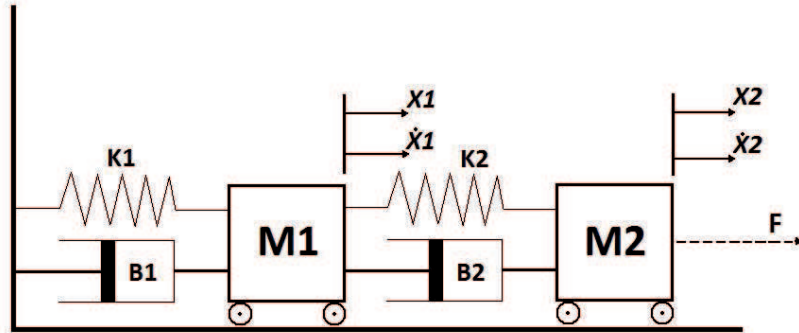
Respuesta grafica

Figure 4.4: Impulso



- Sistema de doble masa y doble resorte

Figure 4.5: Sistema de doble masa y doble resorte



Simular el sistema con los siguientes parametros

- $M_1 = 10Kg$
- $M_2 = 20Kg$
- $K_1 = 2\text{ N/m}$
- $K_2 = 4\text{ N/m}$
- $B_1 = 5\text{ N/(m/s)}$
- $B_2 = 4\text{ N/(m/s)}$

Hallar la respuesta a una señal impulso  $F = 1\text{ N}$  y escalón unitario,

Es necesario hallar las ecuaciones de transferencia

$$M_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (B_1 + B_2) \frac{dx_1}{dt} - B_2 \frac{dx_2}{dt} + (K_1 + K_2) x_1 - K_2 x_2 = 0$$

$$M_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + B_2 \frac{dx_2}{dt} - B_2 \frac{dx_1}{dt} + K_1 x_2 - K_2 x_1 = F(t)$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2 x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (B_1 + B_2) & -B_2 \\ -B_2 & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix}$$

Ahora encontrando las ecuaciones de transferencia y reemplazando los valores

$$\frac{x_1}{F(s)} = \frac{4s+4}{200s^4+220s^3+180s^2+28s+8}$$

$$\frac{x_2}{F(s)} = \frac{10s^2+9s+6}{200s^4+220s^3+180s^2+28s+8}$$

Resolviendo en MATLAB

```

% Programa para el ejercicio de doble masa y doble resorte

clc
clear all
close all

% Parámetros

M1=10;
M2=20;
B1=5;
B2=4;
K1=2;
K2=4;

% Función de transferencia

num1 = [B2 K2];
num2= [M1 (B1+B2) (K1+K2)];
dem = [M1*M2 ((M1*B2)+(M2*(B1+B2))) ((M1*K2)+(M2*(K1+K2
))+ (B1*B2)) ((B1*K2)+(B2*K1)) (K1*K2)];
x1=tf(num1,dem);
x2=tf(num2,dem);

[z,p,k]=zpkdata(x1,'v');
[z,p,k]=zpkdata(x2,'v');
damp(x1);
damp(x2);

figure
pzmap(x1),grid on
legend('x1 Polos y Zeros')

figure
pzmap(x2),grid on
legend('x2 Polos y Zeros')

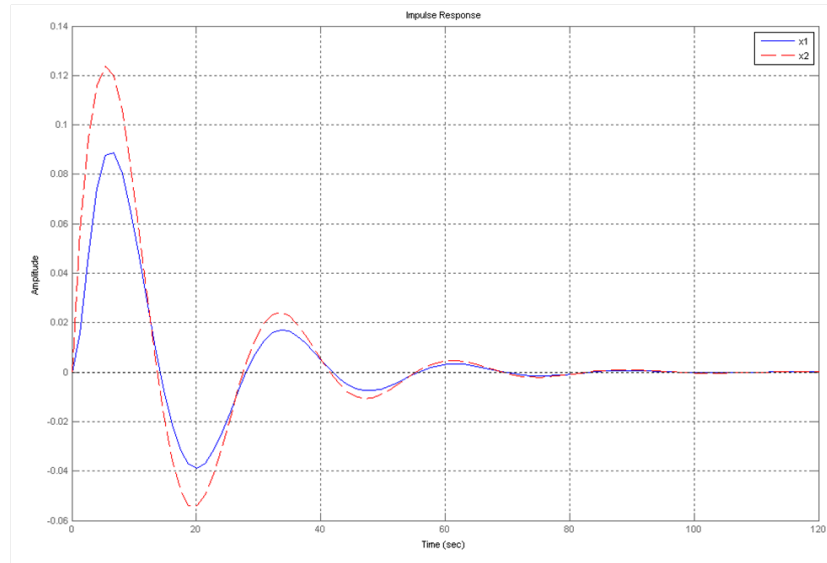
figure
step(x1,x2,'r--'),grid on
legend ('x1','x2');

figure
impulse(x1,x2,'r--'),grid on
legend ('x1','x2');

```

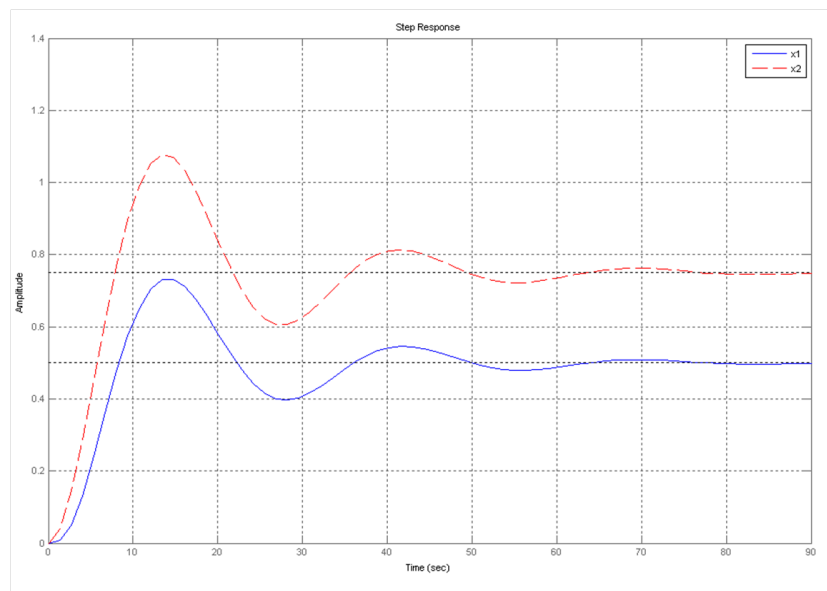
La respuesta a la señal impulso

Figure 4.6: Señal impulsio



La respuesta a la señal escalon unitario

Figure 4.7: Señal escalon unitario



### 4.3.2 Vectores y el vector lineal espacial

- Suma, resta y multiplicación por un escalar de vectores

Para la suma de vectores y matrices solo hay que tener en cuenta es la forma como se ingresan estos, escribiendo sus elementos separados por comas o espacios en blanco, entre corchetes entre corchetes “[]”, se separan filas por “;” ,Si se quiere definir un vector columna, entonces los elementos irán separados por puntos y comas.

```
>> A=[4 5 2 5 2];
B=[2 4 8 9 5];
C=A+B

C =

     6     9    10    14     7

C1=5*A

C1 =

    20    25    10    25    10

C =

     6     9    10    14     7
```

- Producto de vectores:

Producto punto

```
>> A=[4 5 2 5 2];
B=[2 4 8 9 5];
D=dot(A,B)

D =

    99

D =

    99
```

```

>> A=[3 5 3];
B=[3 6 3];
cross(A,B)

ans =

    -3     0     3

>> cross(B,A)

ans =

     3     0    -3

```

Las funciones matemáticas elementales admiten vectores como argumentos y se interpretan componente a componente. Algunas funciones específicas para vectores son:

Table 4.1: Funciones elementales con vectores

<i>Comando Matlab</i>	<i>Operación</i>
<b>sum(A)</b>	Suma de las componentes del vector <b>A</b>
<b>prod(A)</b>	Producto de las componentes del vector <b>A</b>
<b>dot(A,B)</b>	Producto escalar de dos vectores del mismo tipo y las mismas dimensiones
<b>cross(A,B)</b>	Producto vectorial de dos vectores del mismo tipo y dimensión 3
<b>max(A)</b>	Máximo de las componentes del vector <b>A</b> (Sin valor absoluto)
<b>norm(A)</b>	Norma euclídea del vector <b>A</b>
<b>norm(A,p)</b>	Norma p del vector <b>A</b> : $\text{sum}(\text{abs}(\mathbf{A}).^p)^{1/p}$
<b>norm(A,inf)</b>	Norma infinito del vector <b>A</b>

- Dependencia e independencia lineal, base y dimensión

Para determinar si una familia o conjunto de vectores de un espacio vectorial es linealmente independiente o linealmente dependiente, se calcula el determinante de la matriz conformada por las componentes de los vectores

```
>> A = [3 2 -1; 4 0 0; 0 1 2];
det(A)

ans =

    -20
```

Como el determinante es diferente de cero los vectores son linealmente independientes ahora veamos otro caso:

```
>> B = [3 2 -1; 9 6 -3; 6 4 -2];
det(B)

ans =

     0
```

El determinante de cero, los vectores son linealmente dependientes.

Sea  $\mathbf{A}$  el espacio en  $\mathbb{R}^5$  Calculamos su rango para mirar su dependencia o independencia lineal:

```
>> A = [1,2,-1,5,3;1,-1,4,-2,0;1,1,-1,3,12;0,4,3,1,-1];
rank(A)

ans =

     4
```

Los 4 vectores pertenecen al espacio  $\mathbb{R}^5$ , no es posible aplicar el determinante, el rango de la matriz, que conforman, es 4. Como son menor o igual que 4 estos son linealmente dependientes.

- Norma de un vector o una matriz

En la tabla anterior se mostró el comando para hallar la norma y en la siguiente figura se puede ver la sintaxis

```
>> A=[1 4; 5 4];  
>> norm(A)  
  
ans =  
  
7.292926247048961
```

- Eigenvalues

Con el comando **eig** se pueden calcular los valores propios de una matriz

```
>> A=[1 0 3;7 2 1;0 0 1]  
  
A =  
  
1 0 3  
7 2 1  
0 0 1  
  
>> eig(A)  
  
ans =  
  
2  
1  
1
```

También es posible calcular con el comando **eig** una matriz cuyas columnas son los eigenvec- tores (eves), como también una matriz cuya diagonal son los eigenvalores



- Los elementos de la matriz se escriben dentro de corchetes cuadrados [ ].
- Se introducen los elementos por filas separados por comas ',' o espacios en blanco ' '.
- Al final de cada fila se pone punto y coma ';'.

Las operaciones matriciales estan defindas por:

Cuadro 4.3: Simbolos de Matlab

Suma	+
Resta	-
Multiplicacion escalar y matricial	*
Multiplicación de Kronecker	kron(·,·)
Matriz Nula	zeros(i,j)
Matriz Identidad	eye(n)
Matriz Traspuesta	.'
Matriz Conjugada	conj(·)
Matriz Asociada	'
Determinante	det(·)
Rango	rank(·)
Traza	trace(·)
Inversa	inv(·) o ^-1
Func. Matricial Exponencial	expm(·)

- Determinantes

Teniendo la matriz  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 15 \\ 9 & 11 & 18 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

Resolviendo en MATLAB

```
>> A=[4 8 15; 9 11 18; 3 1 2]

A =

     4     8    15
     9    11    18
     3     1     2

>> detA=det(A)

detA =

    -56
```

- Cofactores de una matriz

Esta no es una función definida en MATLAB por lo que se puede realizar donde los valores de entrada sean la matriz  $\mathbf{A}$ , y la posición del cofactor deseado  $k,l$  (fila, columna)

Desarrollandola en MATLAB

```
function ckl = cofact(A,k,l)
% Cofactor ckl del elemento a_kl de la matriz A.
[m,n] = size(A);
if m ~= n
error('La matriz debe ser cuadrada')
end
B = A([1:k-1,k+1:n],[1:l-1,l+1:n]);
ckl = (-1)^(k+l)*det(B);
```

```
>> C1=cofact(A,1,1)

C1 =

     4
```

- Determinante de una matriz por el metodo de los cofactores

Este es uno de los métodos para hallar el determinante de la matriz  $\mathbf{A}$ .

Desarrollandolo en MATLAB

```

function d = mydet(A)
% Determinante d de la matriz A.
[m,n] = size(A);
if m ~= n
    error('La matriz debe ser cuadrada')
end
a = A(1,:);
c = [];
for l=1:n
    c1l = cofact(A,1,l);
    c = [c;c1l];
end
d = a*c;

```

```

>> Det=mydet(A)

Det =

    -56

```

Hay que tener en cuenta que esta función tiene implícita la función de cofactores desarrollada anteriormente.

- Matriz Adjunta

También se puede implementar una función para hallar esta matriz.

Desarrollándola en MATLAB

```

function B = adj(A)
% Matriz Adjunta B de la matriz cuadrada A.
[m,n] = size(A);
if m ~= n
    error('La matriz debe ser cuadrada')
end
B = [];
for k = 1:n
    for l=1:n
        B = [B;cofact(A,k,l)];
    end
end
B = reshape(B,n,n);

```

```
>> B=adj(A)

B =

     4     -1    -21
    36    -37     63
   -24     20    -28
```

Hay que tener en cuenta que esta función tiene implícita la función de cofactores desarrollada anteriormente.

#### 4.3.4 Descripción de sistemas dinámicos bajo espacio y variables de estado

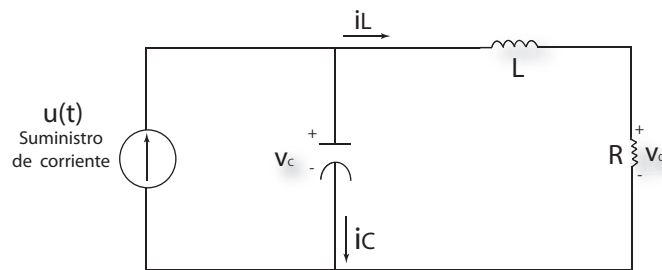
Dada la ecuación de un sistema y la ecuaciones de salida expresada en forma matricial compacta , consideramos un sistema Continuo e invariante en el tiempo , tal como se muestra

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Aplicando el concepto de caracterización de variables de estado para circuito RCL visto en la sesión 5 , Tenemos ;

Figura 4.8: Circuito R.L.C.



$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) ;$$

y las salidas tal como se muestra en las ecuaciones algebraicas ;

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para cuando  $R = 3$ ,  $L = 1$  y  $C = 1/2$  ;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix}, \mathbf{D} = 0$$

Es decir ,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Pasar el sistema a ecuaciones de estado mediante MATLAB utilizando el comando ss.
- Mostrar a respuesta a la señal escalón unitario ( step ) como entrada al sistema.

```
>> %-----
%SEMINARIO DE INVESTIGACION EN TEORIAS DE CONTROL MODERNO " APLICACIÓN "
%Ejemplo: Modelo de estado " SIMULACIÓN CIRCUITO RLC"
%-----
% Primero introducimos la matrices de estado A,B,C,D.

A=[0 -2; 1 -3]
B=[2;0]
C=[0 3]
D=0

sys=ss(a,b,c,d) % creamos el modelo en espacio de estado
step(sys)% Sometemos al sistema a una entrada de escalon unitario %
```

- Introducidos los valores de las matrices A, B, C, y D utilizando el comando ss, creamos un modelo de estado.

```

a =
      x1  x2
x1    0  -2
x2    1  -3

b =
      u1
x1    2
x2    0

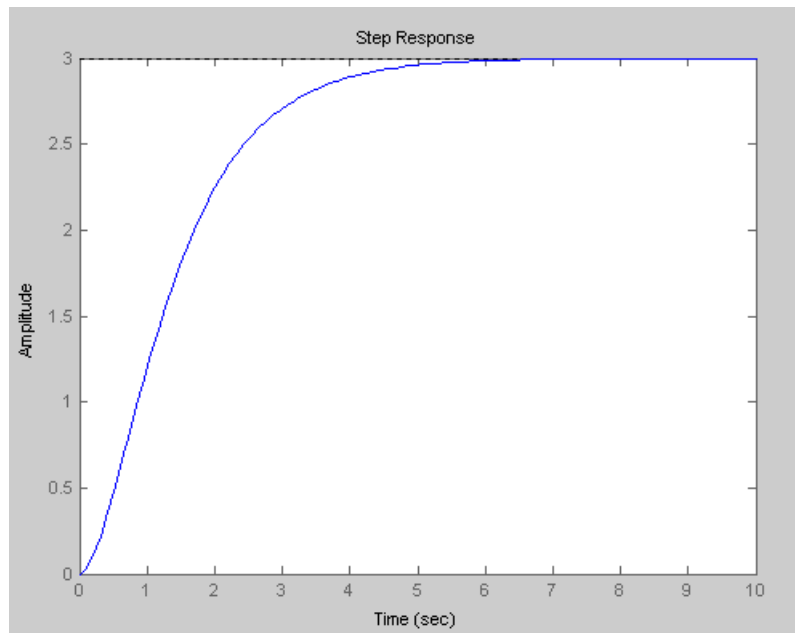
c =
      x1  x2
y1    0   3

d =
      u1
y1    0

Continuous-time model.
>>

```

b) Respuesta al escalón unitario



Ahora consideremos un sistema Discreto e invariante en el tiempo , tal como se muestra

$$\dot{\mathbf{x}}(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

Consideremos el ejemplo anterior

c) Pasar el sistema discreto a ecuaciones de estado considerando el tiempo de muestreo 0.01s.

Si el sistema es discreto se introduce el tiempo de muestreo y se crea el modelo de estado.

```
>> %-----
%SEMINARIO DE INVESTIGACION EN TEORIAS DE CONTROL MODERNO " APLICACIÓN "
%Ejemplo: Modelo de estado " SIMULACIÓN CIRCUITO RLC"
%-----
% Primero introducimos la matrices de estado A,B,C,D.

A=[0 -2; 1 -3]
B=[2;0]
C=[0 3]
D=0

sys=ss(a,b,c,d) % creamos el modelo en espacio de estado
sys=ss(a,b,c,d,0.01) % si fuera un sistema discreto
                    % se añade el tiempo de muestreo

a =
      x1    x2    x3
x1      0     1     0
x2      0     0     1
x3    -18   -27   -10

b =
      u1
x1      0
x2      0
x3      1

c =
      x1    x2    x3
y1      1     0     0

d =
      u1
y1      0

Sampling time: 0.01
Discrete-time model.
>> |
```

### 4.3.5 Análisis de ecuaciones de estado para sistemas lineales

Para tiempo continuo tenemos un sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0u$$

Donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{D} = 0$$

Si la condición de estado inicial es  $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  Se calculará la matriz de transición  $\Phi(\mathbf{x})$

para este sistema por medio de la herramienta MATLAB

```
%%%---Solucion ecuaciones de estado---

clear all
close all
clc

syms t

%%%---Introduciendo las matrices A,B,C,D---

A=[-2 1; -1 0];
B=[1; 0];
C=[1 0];
D=[0];
X0=[1;1]
HC=ss(A,B,C,D) %se arma es ss-state space-
HD=c2d(HC,0.25) %comando para convertir el sistema continuo en discreto

%%%---Matriz de transferencia para A cte.---

phic=expm(t*HC.A)*X0 %Para tiempo continuo
phid=HD.A.^t*X0 %Para tiempo discreto
```

Segun la solucion de MATLAB el sistema en tiempo discreto es

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1947 & 0,1947 \\ -0,1947 & 0,9735 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1947 \\ -0,0265 \end{bmatrix} u$$

$$y = [ 1 \ 0 ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0u$$

Donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,1947 & 0,1947 \\ -0,1947 & 0,9735 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,1947 \\ -0,0265 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [ 1 \ 0 ] \text{ y } \mathbf{D} = 0$$

```

a =
      x1      x2
x1  0.5841  0.1947
x2 -0.1947  0.9735

b =
      u1
x1  0.1947
x2 -0.0265

c =
      x1  x2
y1  1    0

d =
      u1
y1  0

Sampling time: 0.25
Discrete-time model.

```

Para estos dos sistemas las matrices de transferencia estan dadas por

Tiempo continuo

$$\Phi(\mathbf{x}) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}(0)$$

El resultado en MATLAB es

```
phic =
      exp(-t)
      exp(-t)
```

Lo que es

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Tiempo discreto

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T \mathbf{x}(0)$$

El resultado en MATLAB es

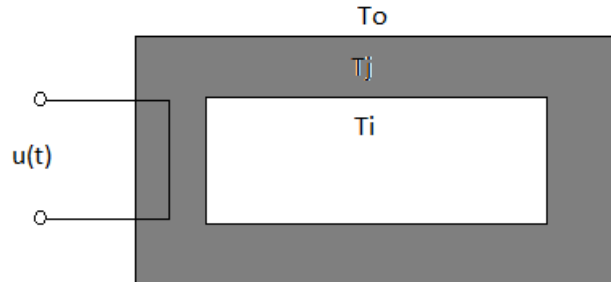
```
phid =
      (657638796831793/1125899906842624) ^t+(7014813832872459/36028797018963968) ^t
      (-1753703458218115/9007199254740992) ^t+(4384258645545287/4503599627370496) ^t
```

Lo que es

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0,5841^t + 0,1947^t \\ -0,1947^t + 0,9735^t \end{bmatrix}$$

### 4.3.6 Estabilidad, controlabilidad y observabilidad de sistemas lineales

- Determinar la estabilidad del siguiente sistema sistema térmico



Se toman en cuenta los siguientes parámetros:

- $u(t)$  es la cantidad de calor de entrada al recinto  $T_j$  (calentador eléctrico)
- $T_o, T_j, T_i$  son las temperaturas en el exterior del horno (ambiente), en el primer recinto y en el recinto interior respectivamente.
- $A_i, A_o$ : son las superficies interiores y exteriores de los recintos respectivamente.
- $C_i, C_j$ : son la capacidades caloríficas del espacio interior y del exterior respectivamente.
- $h_i, h_o$  son los coeficientes de transmisión de calor para las superficie interior y exterior respectivamente.

#### Consideraciones

Teniendo en cuenta una serie de consideraciones físicas, se supondrá que: los valores reales de superficie, los valores para las capacidades caloríficas de los recintos y sus coeficientes de transmisión de calor, permanecerán constantes en todo momento, bajo cualquier condición.

Se tomarán como variables de estado las temperaturas de los recintos.

$$x_1 = T_i$$

$$x_2 = T_j$$

y  $u(t)$  la señal de control.

Las ecuaciones propuestas del sistema son:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = 0,5x_1 - 0,75x_2 + 0,5u + 0,25T_o(amb)$$

Considerando constante la temperatura ambiente, se puede eliminar el correspondiente término compensándolo con un término de valor  $-0,25T_{amb}$ .

Se tomará como salida la temperatura del recinto interior  $x_1$ . Es la de mayor interés hipotéticamente.

Las ecuaciones matriciales del sistema son

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0,5 & -0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} u$$

$$y = [ 1 \ 0 ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0u$$

Donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0,5 & -0,75 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [ 1 \ 0 ] \text{ y } \mathbf{D} = 0$$

Este sistema se puede discretizar por medio de la función 'c2d' para ver el comportamiento en los dos sistemas, con un  $T = 0,25\text{seg}$ , entonces el sistema discreto en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,62774 & 0,359712 \\ 0,089928 & 0,85256 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,025105 \\ 0,11503 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y = [ 1 \ 0 ] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + 0u(k)$$

Donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,62774 & 0,359712 \\ 0,089928 & 0,85256 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,025105 \\ 0,11503 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [ 1 \ 0 ] \text{ y } \mathbf{D} = 0$$

A continuación se analizará la estabilidad, controlabilidad y observabilidad del sistema en los dos dominios de tiempo usando la herramienta MATLAB.

```

%%!--Horno--

clear all
close all
clc

%%!--Introduciendo las matrices A,B,C,D--

A=[-2 2; 0.5 -0.75];
B=[0; 0.5];
C=[1 0]; %Tomando como salida solo una de las temperaturas
D=[0];

HC=ss(A,B,C,D); %se arma es ss-state space-
HD=c2d(HC,0.25) %comando para convertir el sistema continuo en discreto

%%!--Estabilidad por medio del analisis de ubicación de polos--

EigC=eig(HC.A) %Eigenvalues de A contunuo(polos)
EigD=eig(HD.A) %Eigenvalues de A discreto(polos)

figure %Gráfica de polos y ceros de A contunuo
pzmap(HC),grid on

figure %Gráfica de polos y ceros de A contunuo
pzmap(HD),grid on

%%!--Estabilidad por segundo método de Liapunov--
%%V(x)=x.'*P*x --> A.'*P+PA=-Q ||Q=I t cont
%% A.'*P*A+P=-Q

Q=[1 0;0 1];
Pc=lyap(HC.A,Q)
Pd=dlyap(HD.A,Q)

x0=[20; 100]; % suponiendo temps. ini. de 20° y 100° en cada recinto.

figure
initial(HC,x0)
figure
initial(HD,x0)

%%!--Controlabilidad--
%%!--Co=[B AB A^2B A^(n-1)B]

Coc=ctrb(HC.A,HC.B)
nocontc=length(HC.A)-rank(Coc)

Cod=ctrb(HD.A,HD.B)
nocontd=length(HD.A)-rank(Cod)

%%!--Observabilidad--
%%!--Ob=[C AC A^2C A^(n-1)C]

Obc=obsv(HC.A,HC.C)
noobserc=length(HC.A)-rank(Obc)

Obd=obsv(HD.A,HD.C)
noobserd=length(HD.A)-rank(Obd)

```

El comando `c2d` muestra el siguiente resultado

```
a =
      x1      x2
x1  0.6277  0.3597
x2  0.08993  0.8526

b =
      u1
x1  0.02511
x2  0.115

c =
      x1  x2
y1  1  0

d =
      u1
y1  0

Sampling time: 0.25
Discrete-time model.
```

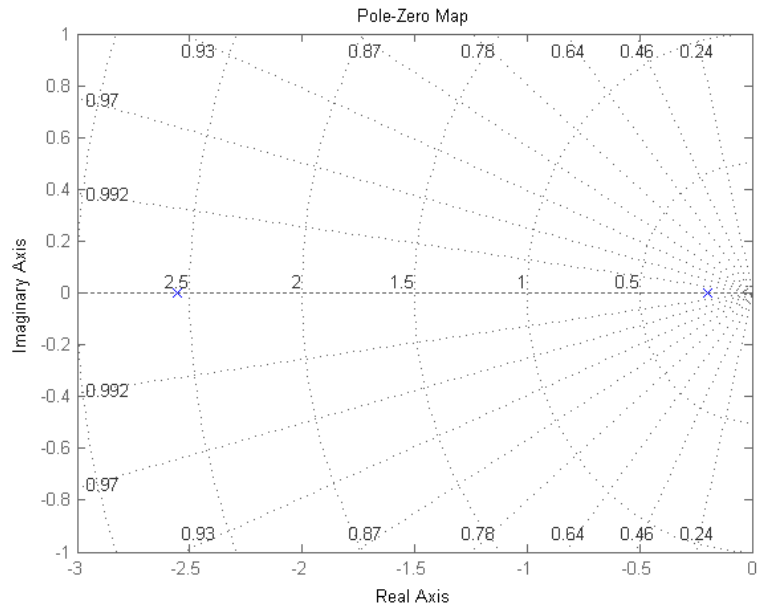
Cuando se analiza la estabilidad por medio de la ubicación de los polos (en este caso los *eigenvalues*) se tiene para tiempo continuo y discreto

```
EigC =
      -2.5542
      -0.1958

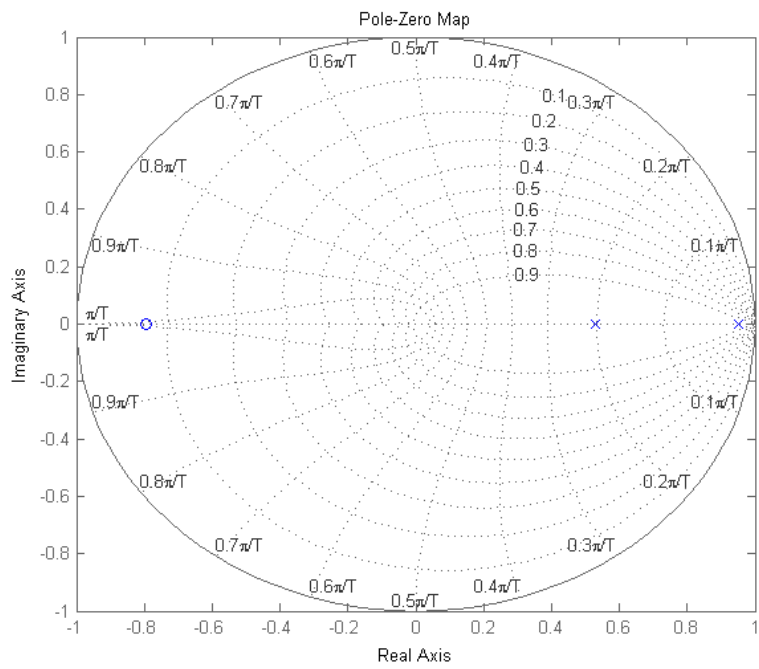
EigD =
      0.5281
      0.9522
```

y graficando

- Tiempo Continuo



- Tiempo Discreto



Como se puede observar para tiempo continuo son valores reales  $\gamma < 0$  y en tiempo discreto los dos valores son reales entre 0 y 1, por lo que el sistema es asintóticamente estable.

Por el segundo método de Lyapunov se obtienen las siguientes matrices P para tiempo continuo y discreto respectivamente,

$P_c =$

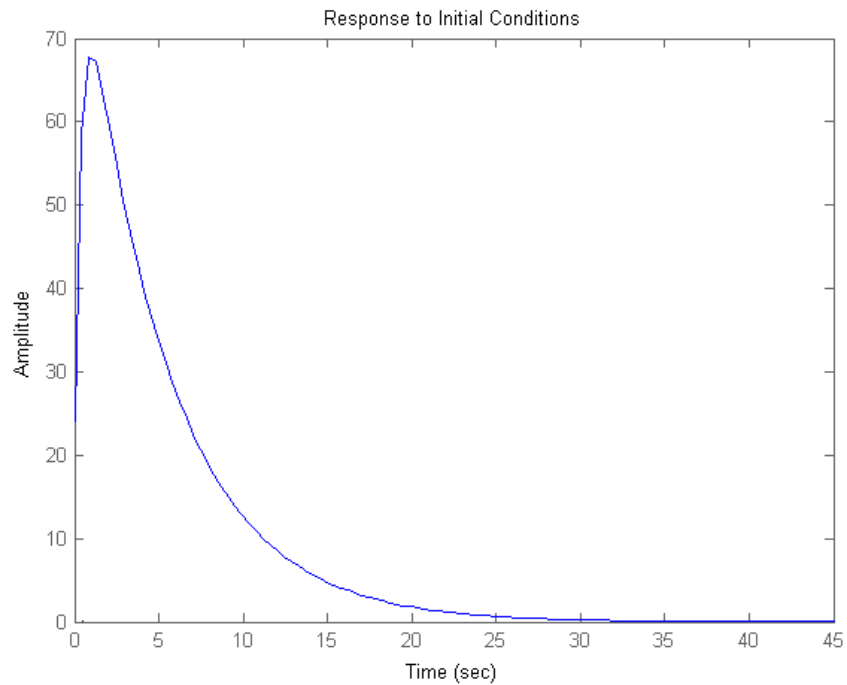
$$\begin{bmatrix} 1.8409 & 1.5909 \\ 1.5909 & 1.7273 \end{bmatrix}$$

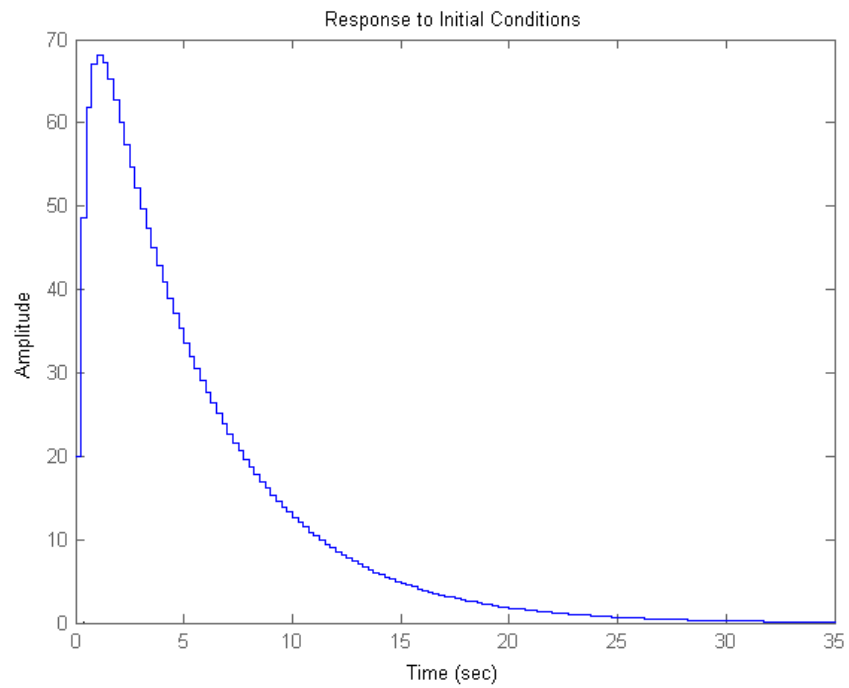
$P_d =$

$$\begin{bmatrix} 7.9438 & 6.3127 \\ 6.3127 & 7.4399 \end{bmatrix}$$

las cuales son definidas positivas por lo que también se define la estabilidad asintótica.

A continuación se presentan gráficas de las respuestas a condiciones iniciales para tiempo continuo y discreto.





Para el analisis de controlabilidad se calcula la matriz y comparamos su rango con el de  $\mathbf{A}$  tanto para tiempo contunuo y discreto.

```

Coc =
      0      1.0000
    0.5000  -0.3750

nocontc =
      0

Cod =
      0.0251      0.0571
      0.1150      0.1003

nocontd =
      0

```

como se puede observar la diferencia es 0 lo que nos indica que sus rangos son iguales siendo el sistema completamente controlable.

Para el analisis de observabilidad se calcula la matriz y comparamos su rango con el de  $\mathbf{A}$  tanto para tiempo continuo y discreto.

```

Obc =
     1     0
    -2     2

noobsorc =
     0

Obd =
    1.0000     0
    0.6277    0.3597

noobsord =
     0

```

como se puede observar la diferencia es 0 lo que nos indica que sus rangos son iguales siendo el sistema completamente observable.

### 4.3.7 Relación entre variables de estado y ecuaciones de transferencia de los sistemas

Dada la ecuación de un sistema y las ecuaciones de salida expresada en forma matricial compacta, consideramos un sistema Continuo e invariante en el tiempo, tal como se muestra

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Pasar de ecuación de estado a función de transferencia utilizando MATLAB

Dada las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -18 & -17 & -10 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [ 1 \ 0 \ 0 ], \mathbf{D} = 0$$

```

>> %-----
%SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN EN TEORIAS DE CONTROL MODERNO " APLICACIÓN "
%Ejemplo: De modelo de estado a función de transferencia
%-----
% Introducimos las matrices de la ecuacion de estado

A=[0 1 0; 0 0 1; -18 -27 -10];
B=[0;0;1];
C=[1 0 0];
D=0;

% convertimos el modelo a funcion de transferencia

[num,den]=ss2tf(A,B,C,D)
sys=tf(num,den)

```

Formulado el código obtenemos el modelo transformado en función de transferencia

```

num =

      0   -0.0000   0.0000   1.0000

den =

      1.0000   10.0000   27.0000   18.0000

Transfer function:
-1.776e-015 s^2 + 3.553e-015 s + 1
-----
      s^3 + 10 s^2 + 27 s + 18

>>

```

Como se menciona en la sección 10 , dado las matrices **A**, **B**, **C** y **D** existe una única representación como función de transferencia.

En el siguiente ejemplo vamos a realizar el proceso inverso , es decir dada una función de transferencia hallaremos las constantes **A**, **B**, **C** y **D** para la representación de espacio estados.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-1,776e^{-0,15}s^2 + 3,553e^{-0,15}s + 1}{s^3 + 10s^2 + 27s + 18}$$

```

>> %-----
%SEMINARIO DE INVESTIGACION EN TEORIAS DE CONTROL MODERNO " APLICACIÓN "
%ejemplo: De función de transferencia a modelo de estado
%-----
% introducimos la función de transferencia

NUM = [-1.776e-015 3.553e-015 1]
DEN = [1 10 27 18]
sys=tf(NUM,DEN)

% convertimos el modelo a espacio de estado

[A,B,C,D]=tf2ss(NUM,DEN)

```

Se obtiene la transformación de función de transferencia a modelo de estado.

```

Transfer function:
-1.776e-015 s^2 + 3.553e-015 s + 1
-----
s^3 + 10 s^2 + 27 s + 18

```

A =

```

-10   -27   -18
  1     0     0
  0     1     0

```

B =

```

  1
  0
  0

```

C =

```

-0.0000   0.0000   1.0000

```

D =

```

  0

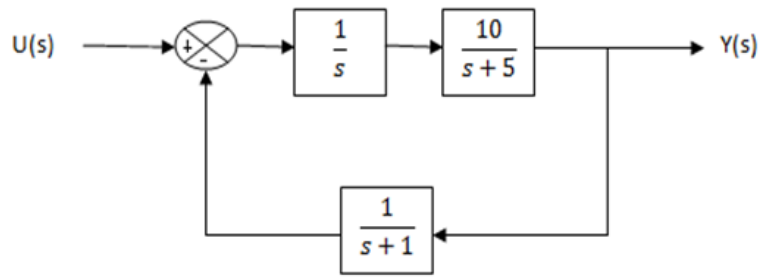
```

>>

Nota : Recordando lo que se menciona en la sección 10 , se puede observar que para una función de transferencia dada existen un numero infinito de representación en el espacio de estado , es decir se pueden obtener muchas matrices **A**, **B**, **C** y **D** que me describirán la misma función de transferencia , es otras palabras lo que será común en dichas representaciones serán los polos o valores propios de **A** , el hecho importante es encontrar la mínima representación en el espacio de estados la cual se llamará *realización* , en el ejemplo que vimos anteriormente , apesar de que la matriz **A** es ligeramente diferente , las dos tienen los mismos polos.

Dada la siguiente representación

Figura 4.9: Representación ejemplo matlab



Haciendo representación de de las funciones de transferencia en serie tenemos ,

```
>> %-----
%SEMINARIO DE INVESTIGACION EN TEORIAS DE CONTROL MODERNO " APLICACION "
%ejemplo: función de transferencia " Fracciones "
%-----
% introducimos la función de transferencia

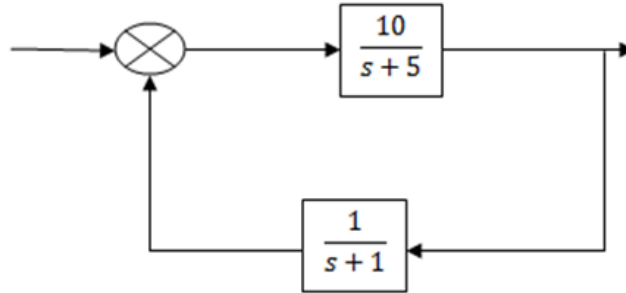
num1=[1];
den1=[1 0];
num2=[10];
den2=[1 5];
num3=[1];
den3=[1 1];
[num4,den4]=series(num1,den1,num2,den2); % Multiplicación en serie
printsys(num4,den4)

num/den =

      10
-----
s^2 + 5 s
>>
```

Entonces , quedan dos funciones de transferencia en paralelo como se muestra

Figura 4.10: Funciones en paralelo



```
>> %-----
%SEMINARIO DE INVESTIGACION EN TEORIAS DE CONTROL MODERNO " APLICACIÓN "
%ejemplo: función de transferencia " Fracciones "
%-----
% introducimos la función de transferencia

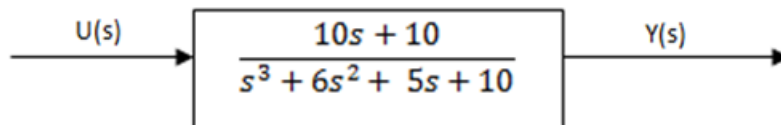
[num,den]=feedback(num4,den4,num3,den3);% Multiplicación en Paralelo
printsys(num,den)

num/den =

      10 s + 10
-----
s^3 + 6 s^2 + 5 s + 10
>>
```

Por tanto el sistema original es equivalente a tener una sola representación en el dominio de la frecuencia , mostrada por la siguiente función de transferencia.

Figura 4.11: Sistema equivalente



### 4.3.8 Diseño de un sistema de control con realimentación lineal

- Pendulo lineal invertido: Como se pudo ver en el capítulo 17 se realizó el desarrollo matemático

```
%%--Pendulo lineal invertido--  
  
clear all  
close all  
clc  
  
%--Introduciendo las matrices A,B,C,D  
  
A=[0 1 0 0;20.601 0 0 0;0 0 0 1;-0.4905 0 0 0];  
B=[0;-1;0;0.5];  
C=[1 0 0 0;0 0 1 0];  
D=[0;0];  
  
%--Definiendo la matriz de controlabilidad y comprobando el  
rango  
  
P=[B A*B A^2*B A^3*B];  
rank(P)  
  
%--Como es completamente controlable se puede ubicar los  
polos  
%--arbitrariamente, introduciendo el polinomio caracteristico  
deseado  
  
J=[-2+2*sqrt(3)*j 0 0 0;0 -2-2*sqrt(3)*j 0 0;0 0 -10 0; 0 0 0  
-10];  
JJ=poly(j);  
  
%--Introduciendo el polinomi Phi  
  
Phi=polyvalm(poly(J),A);  
  
%--La matriz de realimentación se determina  
  
K=[0 0 0 1]*(inv(P))*Phi  
  
%Desempeño  
  
AA=A-B*K;  
BB=[0.1;0;0;0];  
x1=[1 0 0 0]*x';  
x2=[0 1 0 0]*x';  
x3=[0 0 1 0]*x';  
x4=[0 0 0 1]*x';
```

```
%Graficas

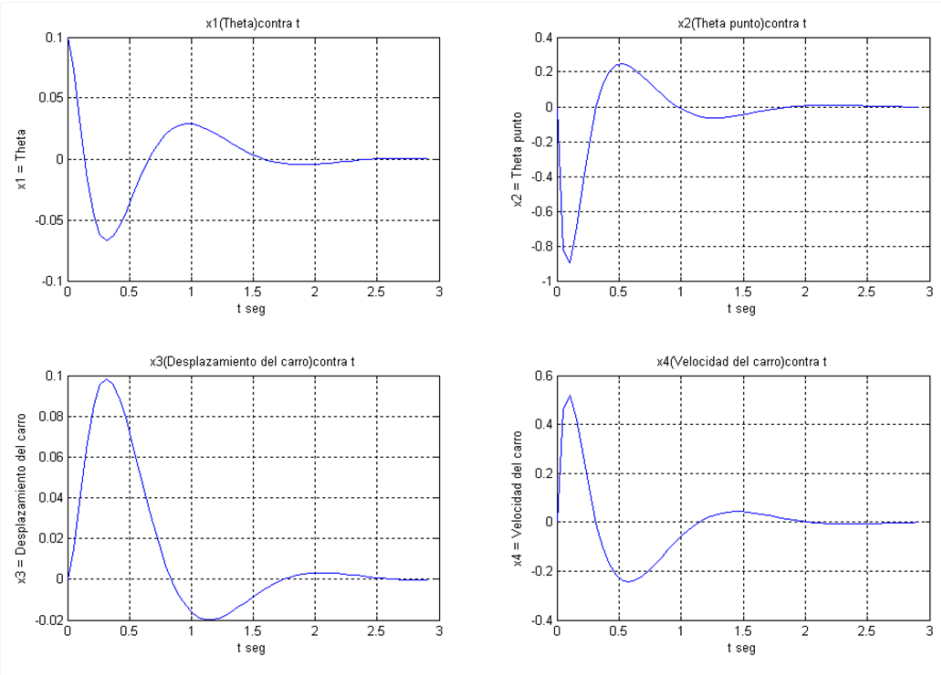
subplot(2,2,1);
plot(t,x1);grid
title('x1(Theta)contra t')
xlabel('t seg')
ylabel('x1=Theta')

subplot(2,2,2);
plot(t,x2);grid
title('x2(Theta punto)contra t')
xlabel('t seg')
ylabel('x2=Theta punto')

subplot(2,2,3);
plot(t,x3);grid
title('x3(Desplazamiento del carro)contra t')
xlabel('t seg')
ylabel('x3=Desplazamiento del carro')

subplot(2,2,4);
plot(t,x4);grid
title('x4(Velocidad del carro)contra t')
xlabel('t seg')
ylabel('x4=Velocidad del carro')
```

Figure 4.12: Respuesta con realimentación



### 4.3.9 Introducción al control óptimo

- Ecuación en tiempo continuo de la ecuación de Riccati

Si se tienen las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{R}$  se puede hallar la matriz  $\mathbf{P}$  de la ecuación de Riccati

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = 0$$

con el comando `care`

Sea el sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad -1] \quad \mathbf{R} = [3]$$

La siguiente figura muestra la sintaxis

```
>> A= [-3 2;1 1];  
B = [0 ; 1];  
C = [1 -1];  
R = 3;  
[P] = care(A,B,C'*C,R)  
  
P =  
  
    0.589517437276262    1.821574724886084  
    1.821574724886084    8.818839806923114
```

- LQR

Matlab tambien le da solucion a la ecuación de Riccati con el comando **lqr**

Sea el sistema descrito por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El indice de desempeño  $J$  de la forma

$$J = \int_0^{\infty} (x' \mathbf{Q} x + u' \mathbf{R} u) dt$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = [1]$$

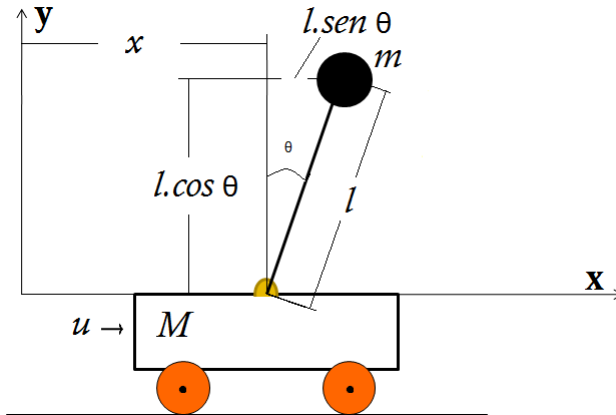
Se determina la matrix de ganancias de realimentación  $\mathbf{K}$  con Matlab

```
>> A=[0 1;0 -1];  
B=[0;1];  
Q=[1 0;0 1];  
R=[1];  
K=lqr(A,B,Q,R)  
  
K =  
  
1.0000000000000002    1.0000000000000002
```

- Péndulo invertido

Considerar el péndulo invertido que se muestra en la figura

Figure 4.13: Péndulo



se desea diseñar un controlador digital para este sistema. Se escoge un periodo de muestreo de  $T = 0.1$  [s]. Se definen las variables de estado  $x_1, x_2, x_3, x_4$  de la siguiente manera

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$x_3 = x$$

$$x_4 = \dot{x}$$

Los parámetros físicos son:

M	2[Kg]
m	0.1[Kg]
l	0.5[m]

Para este sistema es necesario mantener el ángulo  $\theta$  pequeño como sea posible mientras el carro se esta moviendo, se considerará el desplazamiento del carro como la salida del sistema,

entonces la ecuacion de salida es:

$$y = [ 0 \ 0 \ 1 \ 0 ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Entonces las ecuaciones de estado para el sistema son:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$$

Donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.495 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [ 0 \ 0 \ 1 \ 0 ] \quad \mathbf{D} = 0$$

Entonces se convierte el sistema de tiempo continuo a discreto con el comando **cd2** de Matlab para obtener así las matrices **G** y **H**

```

>> A=[0 1 0 0;20.601 0 0 0;0 0 0 1;-0.4905 0 0 0];
>> B=[0;-1;0;0.5];
>> T=0.1;
>> [G,H]=c2d(A,B,T)

G =

    1.104785526290998    0.103469040738024         0         0
    2.131565708244036    1.104785526290998         0         0
   -0.002494893483119   -0.000082596208048    1.000000000000000    0.100000000000000
   -0.050751564482001   -0.002494893483119         0    1.000000000000000

H =

   -0.005086429119509
   -0.103469040738024
    0.002502057836179
    0.050082596208048

```

El sistema que se tiene ahora es

$$x(k+1) = \mathbf{G}x(k) + \mathbf{H}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}x(k) + \mathbf{D}u(k)$$

Donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1.1048 & 0.1035 & 0 & 0 \\ 2.1316 & 1.1048 & 0 & 0 \\ -0.0025 & -0.0001 & 1 & 0.1 \\ -0.0508 & -0.0025 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -0.0051 \\ -0.1035 \\ 0.0025 \\ 0.0501 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad \mathbf{D} = 0$$

La representación completa del sistema es

$$x(k+1) = \mathbf{G}x(k) + \mathbf{H}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}x(k)$$

$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k)$$

$$u(k) = -\mathbf{K}x(k) + K_1v(k)$$

donde

$$\mathbf{K} = [ k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 ]$$

ya que

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1) \\ &= v(k) + r(k+1) - \mathbf{C}[\mathbf{G}x(k) + \mathbf{H}u(k)] \\ &= -\mathbf{C}\mathbf{G}x(k) + v(k) - \mathbf{C}\mathbf{H}u(k) + r(k+1) \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k+1)$$

Se asume que la entrada es una función escalón

$$r(k) = r(k+1) = r$$

como  $k$  se aproxima a infinito

$$\begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ -\mathbf{CG} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{CH} \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty)$$

Se define

$$x_e(k) = x(k) - x(\infty)$$

$$v_e(k) = v(k) - v(\infty)$$

Entonces la ecuación del error es

$$\begin{bmatrix} x_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ -\mathbf{CG} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{CH} \end{bmatrix} u(k)$$

Observe que

$$u_e(k) = -\mathbf{K}x_e(k) + K_I v_e(k) = - \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix}$$

Ahora se define

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ -\mathbf{CG} & 1 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{CH} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -K_I \end{bmatrix}, w(k) = u_e(k)$$

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1e}(k) \\ x_{2e}(k) \\ x_{3e}(k) \\ x_{4e}(k) \\ x_{5e}(k) \end{bmatrix}$$

Donde  $x_{5e}(k) = v_e(k)$  cuando se tiene

$$\xi(k+1) = \hat{\mathbf{G}}\xi(k) + \hat{\mathbf{H}}w(k)$$

$$w(k) = -\hat{\mathbf{K}}\xi(k)$$

El objetivo es determinar la matriz  $\hat{\mathbf{K}}$  de tal forma que se minimice el índice de desempeño

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\xi' \mathbf{Q} \xi + w' \mathbf{R} w]$$

Donde  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  se escogen para que la respuesta del sistema sea la apropiada, el propósito de usar un índice de desempeño cuadrático es garantizar la estabilidad del sistema escogiendo  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  de la siguiente forma

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = [1]$$

Observe que es importante analizar  $x_{3e}$  y  $x_{1e}$ . Observe que muchos pares de  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  se pueden usar.

Para el desarrollo en Matlab del sistema se usa la siguiente notación

$$G1 = \hat{\mathbf{G}} \quad H1 = \hat{\mathbf{H}} \quad K = \hat{\mathbf{k}}$$

```

>> %Seminario de Investigación en Teorías de Control Moderno%
%Aplicación Control Óptimo: Sistema de Péndulo Invertido%
close all
clear all
clc
%Matrices G H C D
G=[1.1048 0.1035 0 0;2.1316 1.1048 0 0;-0.0025 -0.0001 1 0.1;-0.0508 -0.0025 0 1];
H=[-0.0051;-0.1035;0.0025;0.0501];
C=[0 0 1 0];
D=[0];
% Matrices G1, H1, Q, R
G1=[G zeros(4,1);-C*G 1];
H1=[H;-C*H];
Q=[10 0 0 0 0;0 1 0 0 0;0 0 100 0 0;0 0 1 0 0;0 0 0 0 1];
R=[1];
%Desarrollo de la ecuación de Riccati para estado estable
%para P, con P=diag(0,4)
P=diag(0,4);
P=Q+G1'*P*G1-G1'*P*H1*inv(R+H1'*P*H1)*H1'*P*G1;
for i=1:20
    P=Q+G1'*P*G1-G1'*P*H1*inv(R+H1'*P*H1)*H1'*P*G1;
end
P
%La matriz de ganancias de retroalimentación KK es
KK=inv(R+H1'*P*H1)*H1'*P*G1

```

De esta forma finalmente se obtienen la matrices **P** y **K**

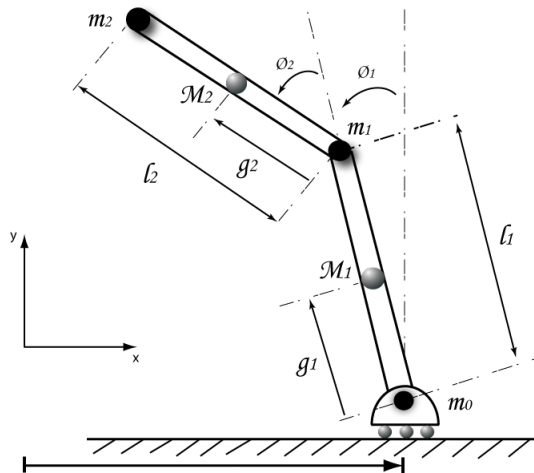
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 9609.4 & 2149.8 & 3427.2 & 2409.2 & -174.51 \\ 2149.8 & 483.54 & 773.21 & 543.37 & -39.379 \\ 3399.1 & 766.87 & 2277.9 & 1166.8 & -131.17 \\ 2405.5 & 542.54 & 1176.1 & 771.93 & -62.595 \\ -173.4 & -39.126 & -130.62 & -62.217 & 18.494 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -62.197 & -13.864 & -9.4744 & -8.4057 & 0.40538 \end{bmatrix}$$

- Péndulo doble invertido

Se implementará el péndulo doble invertido, este es un sistema de alta inestabilidad y múltiples variables no lineales de rápida reacción, está formado por un carro, dos péndulos y un riel para definir la posición del carro y sus estados son altamente sensibles a los cambios de los parámetros. Los datos son medidos a través de encoders angulares en las juntas de las varillas y el carro, y un tercer encoder que registra la ubicación del carro en el riel. Éste sistema de tres grados de libertad donde sólo se actúa el grado correspondiente al carro deslizante mientras que los otros dos grados que corresponden a los ángulos que giran los péndulos no están actuados. Se considera solamente el problema bidimensional en que el péndulo se mueve exclusivamente en el plano del papel.

Figura 4.14: Péndulo doble invertido



Se definen los parámetros físicos del sistema o planta:

- $m_0$  es la masa del carro
- $m_1$  es la masa del extremo del péndulo 1
- $m_2$  es la masa del extremo del péndulo 2
- $M_1$  es la masa del péndulo 1
- $M_2$  masa del péndulo 2
- $l_1$  es la longitud péndulo 1
- $l_2$  es la longitud péndulo 2
- $g_1$  es la longitud al centro de masa del péndulo 1

- $g_2$  es la longitud al centro de masa del péndulo 2
- $x$  es la posición del carro
- $\phi_1$  es el ángulo del péndulo 1 desde la vertical
- $\phi_2$  ángulo del péndulo 1 con respecto al péndulo 2
- $F$  es la fuerza aplicada al carro
- $g$  es la gravedad
- $I_i$  Momento de inercia de la barra

Para el modelo matemático que describe la dinámica del sistema se utilizan consideraciones energéticas:

- Energía potencial  $V$

$$V = (g \cos \phi_1) (M_1 g_1 + m_1 l_1 + M_2 l_1 + m_2 l_1) + (\cos (\phi_1 + \phi_2)) (M_2 g_2 + m_2 l_2)$$

- Energía cinética

$$T = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M_1 \left[ \left( \dot{x} - g_1 \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 \right)^2 + \left( g_1 \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 \right)^2 \right] + \frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}_1^2 +$$

$$\frac{1}{2} m_1 \left[ \left( \dot{x} - l_1 \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 \right)^2 + \left( l_1 \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 \right)^2 \right] + \frac{1}{2} M_2$$

$$\left[ \left( \dot{x} - l_1 \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 - g_2 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos (\phi_1 + \phi_2) \right)^2 + \left( l_1 \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 + g_2 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \sin (\phi_1 + \phi_2) \right)^2 \right] +$$

$$\frac{1}{2} I_2 (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) + \frac{1}{2} m_2$$

$$\left[ \left( \dot{x} - l_1 \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 - g_2 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos (\phi_1 + \phi_2) \right)^2 + \left( l_1 \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 + g_2 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \sin (\phi_1 + \phi_2) \right)^2 \right]$$

Se aplican las ecuaciones de lagrange para relacionar las ecuaciones que modelan el sistema, estas son:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} = F \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi_1} - \frac{\partial V}{\partial \phi_1} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi_2} - \frac{\partial V}{\partial \phi_2} = 0 \quad (4.3)$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores

para (4,1) se tiene que:

$$\begin{aligned} & (m_0 + M_1 + M_2 + m_1 + m_2) \ddot{x} - \\ & [(M_1 g_1 + m_1 l_1 + M_2 l_2 + m_2 l_1) \cos \phi_1 + (M_2 g_2 + m_2 l_2) \cos (\phi_1 + \phi_2)] \ddot{\phi}_1 - \\ & (M_2 g_2 + m_2 l_2) \cos (\phi_1 + \phi_2) \ddot{\phi}_2 + (M_1 g_1 + m_1 l_1 + M_2 l_2 + m_2 l_1) \sin \phi_1 \dot{\phi}_1^2 + \\ & \left[ M_2 g_2 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)^2 + m_2 l_2 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)^2 \right] \sin (\phi_1 + \phi_2) = F \end{aligned}$$

Para (4,2)

$$\begin{aligned} & - [(M_1 g_1 + m_1 l_1 + M_2 l_1 + m_2 l_1) \cos \phi_1 + (M_2 g_2 + m_2 l_2) \cos (\phi_1 + \phi_2)] \ddot{x} - \\ & [M_1 g_1^2 + I_1 + (m_1 + M_2 + m_2) l_1^2 + 2 (M_2 g_2 + m_2 l_2) l_1 \cos \phi_2 + M_2 g_2^2 + I_2 + m_2 l_2^2] \ddot{\phi}_1 - \\ & [M_1 g_1^2 + I_1 + (m_1 + M_2 + m_2) l_1^2 + 2 (M_2 g_2 + m_2 l_2) l_1 \cos \phi_2 + M_2 g_2^2 + I_2 + m_2 l_2^2] \ddot{\phi}_1 + \\ & [M_2 g_2^2 + I_2 + m_2 l_2^2 + (M_2 g_2 + m_2 l_2) l_1 \cos \phi_2] \ddot{\phi}_2 - 2 (M_2 g_2 + m_2 l_2) l_1 \sin \phi_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 - \\ & (M_2 g_2 + m_2 l_2) l_1 \sin \phi_2 \dot{\phi}_2^2 - g \\ & [(M_2 g_2 + m_2 l_2) \sin (\phi_1 + \phi_2) + (M_1 g_1 + m_1 l_1 + M_2 l_1 + m_2 l_1) \sin \phi_2] = 0 \end{aligned}$$

Finalmente para (4,3)

$$\begin{aligned} & - [(M_2 g_2 + m_2 l_2) \cos (\phi_1 + \phi_2)] \ddot{x} + [(M_2 g_2 + m_2 l_2) l_1 \cos \phi_2 + M_2 g_2^2 + I_2 + m_2 l_2^2] \ddot{\phi}_1 + \\ & [M_2 g_2^2 + I_2 + m_2 l_2^2] \ddot{\phi}_2 + (M_2 g_2 + m_2 l_2) l_1 \sin \phi_2 \dot{\phi}_1^2 - g (M_2 g_2 + m_2 l_2) \sin (\phi_1 + \phi_2) = 0 \end{aligned}$$

Para la linealización del sistema se toma como punto de referencia  $\phi_i = \pi$  y se asume:

- $\phi_1 = \pi + \theta_1$  ,  $\phi_2 = \pi + \theta_2$  donde  $\theta$  es un ángulo con respecto a la vertical
- $\cos \phi_1 = -1$ ,  $\sin \phi_1 = -\theta_1$ ,  $\cos \phi_2 = -1$ ,  $\sin \phi_2 = -\theta_2$ ,  $\cos (\phi_1 + \phi_1) = 1 - \theta_1 \theta_2$
- $\sin (\phi_1 + \phi_2) = \theta_1 \theta_2$ ,  $\dot{\phi}_1^2 = 0$ ,  $\dot{\phi}_2^2 = 0$ ,  $\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 = 0$ ,  $F = u$

Entonces las ecuaciones de movimiento se reducen a lo siguiente:

Para la ecuación (4,1):

$$(m_0 + M_1 + M_2 + m_1 + m_2) \ddot{x} - [(M_1 g_1 + m_1 l_1 + M_2 l_1 + m_2 l_1)] \ddot{\theta}_1 - (M_2 g_2 + m_2 l_2) \ddot{\phi}_2 = u$$

Para la ecuación (4,2):

$$\begin{aligned} & - [-(M_1 g_1 + m_1 l_1 + M_2 l_1 + m_2 l_1) + (M_2 g_2 + m_2 l_2)] \ddot{x} - \\ & [M_1 g_1^2 + I_1 + (m_1 + M_2 + m_2) l_1^2 - 2 (M_2 g_2 + m_2 l_2) l_1 + M_2 g_2^2 + I_2 + m_2 l_2^2] \ddot{\theta}_1 + \\ & [M_2 g_2^2 + I_2 + m_2 l_2^2 - (M_2 g_2 + m_2 l_2) l_1] \ddot{\theta}_2 - \\ & g [(M_2 g_2 + m_2 l_2) (\theta_1 + \theta_2) - (M_1 g_1 + m_1 l_1 + M_2 l_1 + m_2 l_1) \theta_2] = 0 \end{aligned}$$

y para la ecuación (4,3)

$$\begin{aligned} & - [(M_2 g_2 + m_2 l_2)] \ddot{x} + [M_2 g_2^2 + I_2 + m_2 l_2^2 - (M_2 g_2 + m_2 l_2) l_1] \ddot{\theta}_1 + \\ & [M_2 g_2^2 + I_2 + m_2 l_2^2] \ddot{\theta}_2 - g (M_2 g_2 + m_2 l_2) (\theta_1 + \theta_2) = 0 \end{aligned}$$

Cuadro 4.5: Parámetros físicos

Párametro	Valor
$m_0$	1.1 [Kg]
$m_1$	0.12 [Kg]
$m_2$	0.02 [Kg]
$M_1$	0.08 [Kg]
$M_2$	0.08 [Kg]
$l_1$	0.39 [m]
$l_2$	0.39 [m]
$g_1$	0.195 [m]
$g_2$	0.1975 [m]
$I_i$	$\frac{M_i r_i^2}{12}$

Al reemplazar los datos de la tabla anterior se obtiene sistema representado en variables de estado de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -33,794 & 0 & -11,561 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,641 & 0 & 34,748 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2,394 & 0 & -0,053 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2,461 \\ 0 \\ 2,231 \\ 0 \\ 0,889 \end{bmatrix} [u]$$

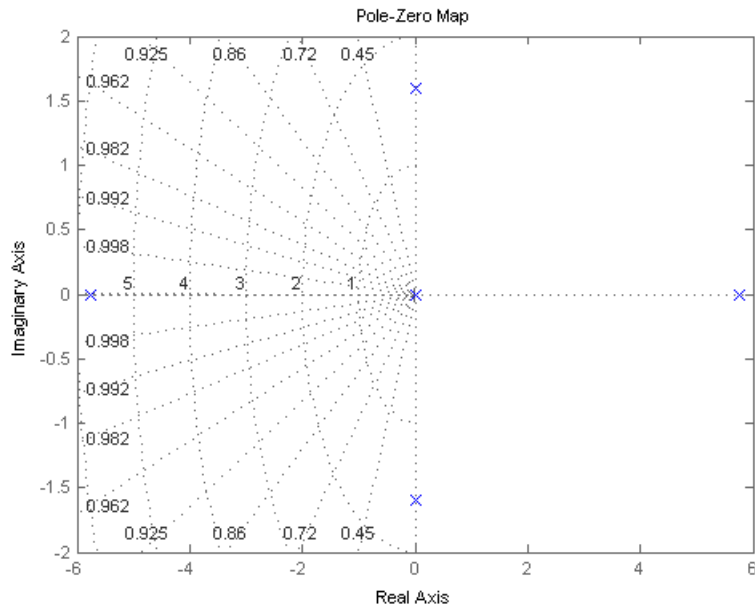
### Control óptimo

Se analiza la estabilidad del sistema de acuerdo a la localización de los polos en el plano  $s$

Se hallan los eigenvalues de la matriz  $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5,7575 \\ 5,7575 \\ -1,9429e - 016 + 1,6003i \\ -1,9429e - 016 - 1,6003i \end{bmatrix}$$

Como se puede observar tiene dos eigenvalues cero, además tiene un eigenvalue positivo, lo que hace al sistema inestable.



Se comprueba controlabilidad del sistema hallando

$$\mathbf{F} = [ \mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^4\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^5\mathbf{B} ]$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -2,5 & 0 & -85,7 & 0 & -3416,4 \\ -2,5 & 0 & -85,7 & 0 & -3416,4 & 0 \\ 0 & 2,2 & 0 & 99,3 & 0 & 3226,3 \\ 2,2 & 0 & 99,3 & 0 & 3226,3 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 & 5,3 & 0 & 237,4 \\ 0,9 & 0 & 5,3 & 0 & 237,4 & 0 \end{bmatrix}$$

y calculando su rango se obtiene que es

$$rank(\mathbf{F}) = 6$$

Efectivamente el sistema es controlable, se procede a calcular los términos de la ecuación de Riccati

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -33,7940 & 0 & 30,6410 & 0 & 2,3940 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11,5610 & 0 & 34,7840 & 0 & -0,0530 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T = [ 0 \quad -2,461 \quad 0 \quad 2,231 \quad 0 \quad 0,889 ]$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \\ -33,794p_{21} + 30,641p_{41} + 2,394p_{61} & -33,794p_{22} + 30,641p_{42} + 2,394p_{62} \\ p_{31} & p_{32} \\ -11,561p_{21} + 34,784p_{41} - 0,053p_{61} & -11,561p_{22} + 34,784p_{42} - 0,053p_{62} \\ p_{51} & p_{52} \\ \\ 0 & 0 \\ p_{13} & p_{14} \\ -33,794p_{23} + 30,641p_{43} + 2,394p_{63} & -33,794p_{24} + 30,641p_{44} + 2,394p_{64} \\ p_{33} & p_{34} \\ -11,561p_{23} + 34,784p_{43} - 0,053p_{63} & -11,561p_{24} + 34,784p_{44} - 0,053p_{64} \\ p_{53} & p_{54} \\ \\ 0 & 0 \\ p_{15} & p_{16} \\ -33,794p_{25} + 30,641p_{45} + 2,394p_{65} & -33,794p_{26} + 30,641p_{46} + 2,394p_{66} \\ p_{35} & p_{36} \\ -11,561p_{25} + 34,784p_{45} - 0,053p_{65} & -11,561p_{26} + 34,784p_{46} - 0,053p_{66} \\ p_{55} & p_{56} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 0 & p_{11} & -33,794p_{12} + 30,641p_{14} + 2,394p_{16} \\ 0 & p_{21} & -33,794p_{22} + 30,641p_{24} + 2,394p_{26} \\ 0 & p_{31} & -33,794p_{32} + 30,641p_{34} + 2,394p_{36} \\ 0 & p_{41} & -33,794p_{42} + 30,641p_{44} + 2,394p_{46} \\ 0 & p_{51} & -33,794p_{52} + 30,641p_{54} + 2,394p_{56} \\ 0 & p_{61} & -33,794p_{62} + 30,641p_{64} + 2,394p_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_{13} & -11,561p_{12} + 34,784p_{14} - 0,053p_{16} & p_{15} \\ p_{23} & -11,561p_{22} + 34,784p_{24} - 0,053p_{26} & p_{25} \\ p_{33} & -11,561p_{32} + 34,784p_{34} - 0,053p_{36} & p_{35} \\ p_{43} & -11,561p_{42} + 34,784p_{44} - 0,053p_{46} & p_{45} \\ p_{53} & -11,561p_{52} + 34,784p_{54} - 0,053p_{56} & p_{55} \\ p_{63} & -11,561p_{62} + 34,784p_{64} - 0,053p_{66} & p_{65} \end{bmatrix}$$

De la misma forma se hace para

$$\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$$

posteriormente se igualan los terminos  $ij$  con los  $ji$  ya que  $\mathbf{P}$  es una matriz simétrica, de esta forma se obtien  $n(n+1)/2$  ecuaciones, se resuelve este sistema y se obtienen los términos de la matriz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 906 & 526 & -976 & 225 & 2946 & 868 \\ 526 & 1029 & -2436 & 370 & 5802 & 1867 \\ -976 & -2436 & 21095 & 1191 & -14409 & -9238 \\ 225 & 370 & 1191 & 418 & 2048 & 31 \\ 2946 & 5802 & -14409 & 2048 & 33273 & 10826 \\ 868 & 1867 & -9238 & 31 & 10826 & 4926 \end{bmatrix}$$

La matriz de ganancia de retroalimentación óptima es

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = [ -20 \quad -45,29 \quad 439,77 \quad 48,81 \quad -84,82 \quad -147,27 ]$$

El anterior desarrollo se realizó con la ayuda de la herramienta Matlab, la cual posee infinidad de funciones que facilitan el análisis de problemas de este tipo, a continuación se presenta un programa con el que se verificarán los resultados obtenidos

```

%Seminarario de Investigación en teorías de control moderno
%Péndulo doble invertido
close all
clear all
clc
A=[0 1 0 0 0 0;0 0 -33.794 0 -11.561 0;
    0 0 0 1 0 0;0 0 30.641 0 34.784 0;0 0 0 0 1;0 0 2.394 0 -0.053 0];
B=[0;-2.461;0;2.231;0;0.889];
C=eye(6,6);
D=0;
Q=[400 0 0 0 0 0;0 1000 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 40];
R=1;
T=0:0.25:20;
U=0.2*ones(size(T));
[K,P,e]=lqr(A,B,Q,R)

```

```

K =
    -20    -45.29    439.77    48.814   -84.823   -147.28

P =
    905.8    525.59   -976.28    224.78    2945.6    868.38
    525.59    1028.7   -2435.6    370.5    5801.9    1866.9
   -976.28   -2435.6    21095    1191.4   -14409   -9237.6
    224.78    370.5    1191.4    418.38    2048.3    30.597
    2945.6    5801.9   -14409    2048.3    33273    10826
    868.38    1866.9   -9237.6    30.597    10826    4925.7

e =
   -78.466
  -0.63246
  -2.7422 + 2.9508i
  -2.7422 - 2.9508i
  -2.4243 + 2.9494i
  -2.4243 - 2.9494i

```

## Capítulo 5

# CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El seminario es una herramienta válida para la formación de investigadores y maestros en la disciplina. Sin dejar de reconocer, que siguen siendo válidas las cátedras magistrales, y los serán mucho más si se evaluarán críticamente y se aprovechan responsablemente las ventajas que poseen.

El desarrollo del seminario se partió del supuesto que se aprende a investigar investigando y que dicha tarea no simplemente fue la aplicación de ciertas técnicas, si no un proceso a través del cual se integraron conocimientos teóricos y prácticos en función de resolver los problemas planteados en la investigación.

Debido a las diferentes metodologías para la solución de problemas del Control Moderno fue necesario dedicar gran parte del seminario a fortalecer y adquirir los fundamentos de matemática avanzada los cuales pertenecen al nivel de postgrado.

El desarrollo teórico de problemas de control muchas veces no son aplicables a sistemas reales ya que el procesamiento de la información requiere de un tiempo, por lo que no se tienen respuestas en tiempo real.

El control Automático es una ciencia muy extensa, en el seminario se estudiaron las bases para el control moderno, se recomienda continuar la línea investigativa con las demás áreas del control como lo son Control Robusto, Adaptativo e Inteligente, las cuales no fueron parte del temario desarrollado.

## Parte III

# INVESTIGACIÓN

# TEORIAS DE CONTROL MODERNO

## Capítulo 6

# INTRODUCCIÓN

### 6.1 INTRODUCCIÓN

La ingeniería en sistemas de control está interesada en el conocimiento y control de los distintos sistemas que utiliza el hombre en beneficio de la sociedad, a fin de proporcionar un producto, bien o servicio, económico y útil.

En los últimos años, los sistemas de control automático han asumido un papel importante en la tecnología moderna y el desarrollo de la humanidad. Prácticamente todas las actividades y aspectos de nuestro diario vivir están afectadas por algún tipo de sistema de control. En el ambiente doméstico, en el automóvil, en la oficina, la industria, en el transporte, las telecomunicaciones, medicina, servicios en general, viajes espaciales, generación de energía, extracción de recursos naturales y muchos otros están utilizando diversos sistemas de control.

La ingeniería de control se basa en los fundamentos de la teoría de la realimentación y el análisis de sistemas lineales, los conceptos de las teorías de redes y de comunicación. Por tanto, la ingeniería de control no está limitada a ninguna disciplina de la ingeniería, sino que es igualmente aplicable a las ingenierías aeronáutica, química, mecánica, del medio ambiente, civil y eléctrica. Por ejemplo, un sistema de control incluye a menudo componentes eléctricos, mecánicos y químicos. Además, al aumentar el conocimiento de la dinámica de los sistemas comerciales, sociales y políticos, también se incrementa la capacidad de control de estos sistemas. [3]

Además, cabe resaltar que el control automático ha tenido una importancia relevante en el avance de la ingeniería y la ciencia, en el desarrollo de los sistemas de vehículos espaciales, la manufactura, la industria automotriz y en operaciones industriales, entre otras. Estos avances

en la teoría y práctica de control mejoran la productividad y el desempeño de los sistemas dinámicos pues aligeran la carga de muchas operaciones manuales repetitivas.

Los sistemas de control se utilizan para hacer la vida más cómoda, para evitar tareas rutinarias y riesgos. En la industria se emplean para mejorar tanto la calidad como la cantidad de los productos manufacturados. Para lograr productos a menores costos, utilizando menos recursos, con el menor consumo de energía y con la menor contaminación del ambiente. Se trata de desarrollar sistemas eficaces, tomando a la eficiencia como premisa fundamental.

Un sistema de control es una interconexión de componentes que forman una configuración del sistema que proporcionará una respuesta deseada. La base para el análisis de un sistema es el fundamento proporcionado por la teoría de los sistemas lineales, que supone una relación entre causa y efecto para sus componentes.[3]

Por tanto, un componente o proceso que vaya a ser controlado puede representarse mediante un bloque tal como se muestra en la figura 6.1.

Figure 6.1: Proceso a Controlar



La Figura 6.1 muestra la relación entrada-salida la cual representa la conexión entre causa y efecto del proceso, que a su vez representa un procesamiento de la señal de entrada para proporcionar una señal de salida.

## 6.2 HISTORIA DEL CONTROL AUTOMÁTICO

La aplicación del principio de realimentación tiene sus comienzos en maquinas e instrumentos muy sencillos, algunos de ellos se remontan a mas de 2000 años atrás.

Los egipcios, hacia el 1400 a.C., ya utilizaban vasijas en las que se vertía agua a un ritmo constante. Tenían unas muescas que determinaban, según alcanzaba el agua un determinado nivel, el tiempo transcurrido en el llenado.

Uno de los ejemplos más antiguos de sistemas automáticos son los mecanismos reguladores con flotador, desarrollados en Grecia durante el siglo III a.C., como el reloj de agua de *Ktesibios* o la lámpara de Filón, que permitía mantener un nivel constante de aceite. En el siglo I d.C. *Herón* publicó su obra *Pneumatica*, en la que describía varios automatismos hidráulicos y neumáticos. En la Edad Media se empezaron a construir en Europa relojes con maquinaria mecánica, dichos relojes constaban de engranajes que transmitían movimiento a una frecuencia de giro determinada para el paso de los minutos y las horas. El mecanismo que impulsa el giro de estos relojes consiste en un resorte tensado que transmite el movimiento a los engranajes. En el siglo XVI, sir John Harrington puso en funcionamiento el primer inodoro automático que vertía agua desde una cisterna, usando una válvula intermedia que permitía el paso de agua a voluntad. En 1681, el ingeniero francés *Denis Papin* desarrolló un regulador de presión con el que consiguió mantener la presión del vapor dentro de una caldera, hoy en día estos reguladores se aplican en las ollas a presión, en las que un elemento regulador gira mientras deja salir parte del vapor que se genera en el interior, esta invención supone el principio de la regulación y de la automatización de máquinas neumáticas. En 1692, con ayuda de multitud de piezas mecánicas, el científico y matemático *Pascal* inventó una máquina calculadora sumadora.[1]

En la Revolución Industrial, *la invención de la máquina de vapor supuso un avance enorme en la automatización de los sistemas*. Se aplicó principalmente a la tracción de locomotoras y vehículos, y posteriormente derivó en la invención de los motores de combustión interna. Todas estas invenciones tienen en común el aporte de un medio energético a una máquina para que funcione de forma autónoma.

El nacimiento de la automatización industrial surgió con la invención del regulador centrífugo de Watt, que permitía controlar la velocidad de las máquinas de vapor. A partir del siglo XIX comenzaron a aparecer multitud de aparatos que realizaban funciones automáticas, como máquinas mecánicas de multiplicar o una máquina para resolver ecuaciones de segundo grado inventada por *Charles Babbage*.

En 1801, *Jacquard* inventó el primer telar automático. Este telar entrecruzaba los hilos para formar el tejido de manera que, tras introducir el tipo de ligamento que se quería obtener a través de una tarjeta perforada, iba situando los hilos de forma automática. *Podemos considerar las tarjetas perforadas como el primer sistema de control programado, en el que se basaría años después el método de programación de los primeros ordenadores*.

La Segunda Guerra Mundial marcó un hito en el desarrollo de los sistemas de control automáticos, coincidiendo con el desarrollo de la electrónica. Así, se avanzó enormemente en los medios de control con fines militares, como el radar, el piloto automático en los aviones, los sistemas de cálculo de tiro o las comunicaciones a través de la radio y la telefonía.

A partir de los años cincuenta comenzó la incorporación de los ordenadores para el control de procesos, naciendo los autómatas programables y los robots. En 1954, el norteamericano G. Devol desarrolló un brazo mecánico programable capaz de realizar tareas específicas, y durante la misma década una empresa norteamericana instaló el primer autómata programable en sus cadenas de montaje. Sin embargo, el desarrollo de los robots no se produjo hasta la década de los setenta, cuando el también estadounidense V. Scheinman diseñó el denominado PUMA (Brazo Manipulador Universal Programable), que constituye la base de los actuales robots industriales. Desde entonces, la evolución de los robots ha sido vertiginosa, y hoy en día se utilizan en gran número de actividades industriales[1].

La automatización de los sistemas electrónicos ha permitido también el progreso de la astronáutica, una de cuyas principales aplicaciones son los satélites de comunicaciones. Asimismo, los sistemas de control automático han permitido la exploración del espacio y la llegada del hombre a la Luna en la misión Apollo, el aterrizaje de naves Viking y Pathfinder en la superficie de Marte y el envío de naves no tripuladas, como las Voyager I y II, hasta los confines del Sistema Solar.

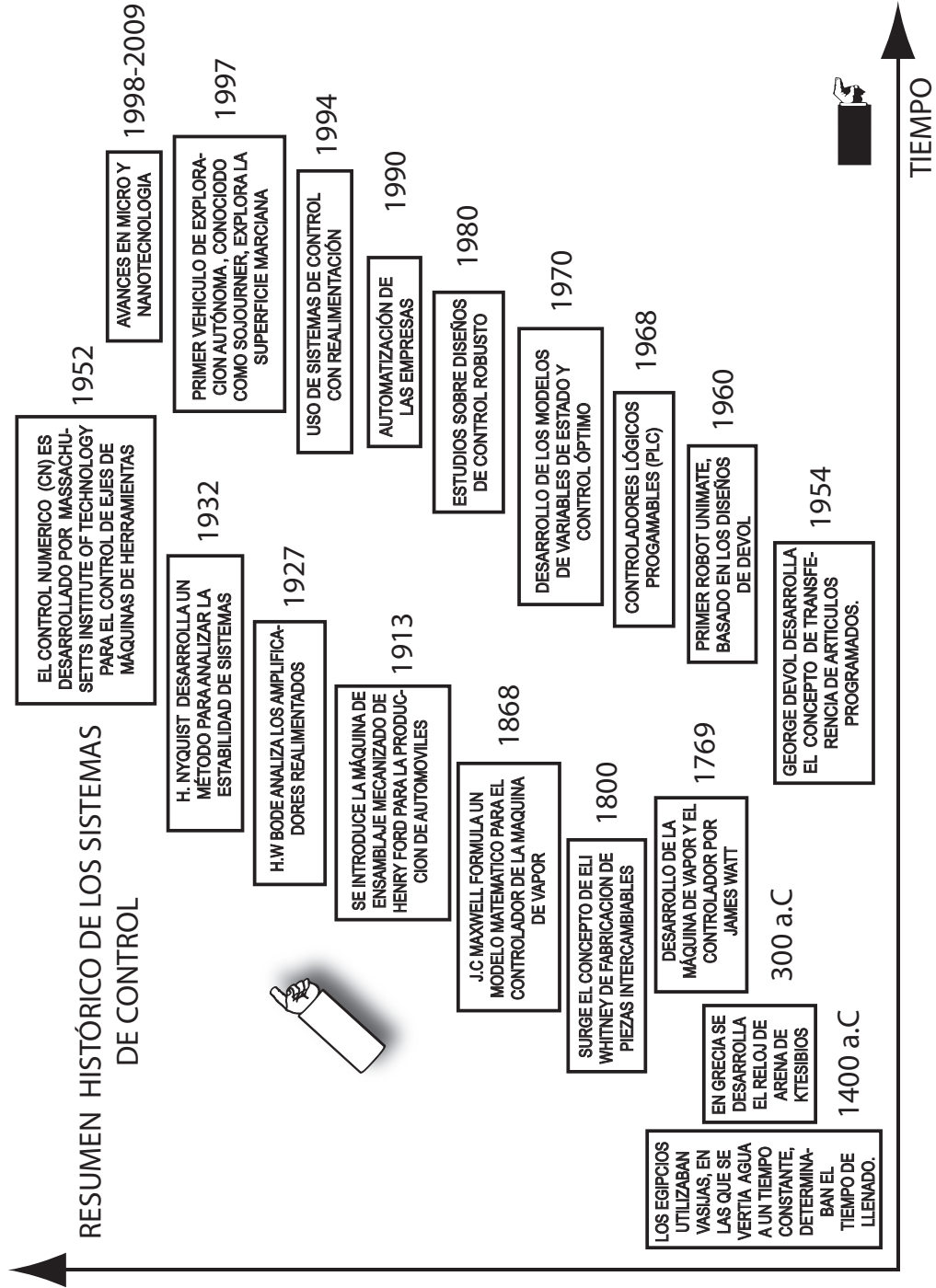
En definitiva, se puede decir que el desarrollo de los sistemas de control automáticos ha supuesto que los objetos de consumo posean una autonomía tal que funcionan prácticamente sin intervención de las personas, no solo en la industria, sino también, y de forma más acusada, en el hogar. Así, aparatos como microondas, frigoríficos, sistemas de calefacción y aire acondicionado, alarmas antirrobo, ordenadores, etc., son aparatos que usamos habitualmente, mejorando la calidad de vida de las personas y realizando funciones de forma automática.[5].

1

---

<sup>1</sup>En la Figura 6.2 se puede ver un resumen de la historia del control a lo largo del tiempo[1].

Figure 6.2: Resumen histórico de los sistemas de control



## 6.3 DEFINICIONES BÁSICAS Y REPRESENTACIÓN DE UN SISTEMA

**Sistema:** Es una combinación de componentes que interactúan conjuntamente para alcanzar un objetivo específico, el concepto de sistema se puede ampliar a fenómenos abstractos, como la economía, el transporte y la biología.

**Control realimentado:** Se refiere a una operación, que en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia y lo continua haciendo en base a esta diferencia.

**Componente:** Es una unidad funcional dentro del sistema.

**Perturbación:** Es una señal que tiende a afectar el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema se la denomina interna, mientras que una perturbación externa se genera fuera del sistema y constituye otra entrada.

**Variable de entrada:** es una variable del sistema tal que una modificación de su magnitud o condición puede alterar el estado del sistema. Variable de salida: es una variable del sistema cuya magnitud o condición se mide.

**Sistema dinámico:** Se llama dinámico si su salida en el presente depende de una entrada en el pasado.

**Sistema estático:** Se conoce como estático si su salida en curso depende solamente de la entrada en curso. La salida de un sistema estático cambia si la entrada sufre variaciones, y permanece constante si la entrada no cambia.

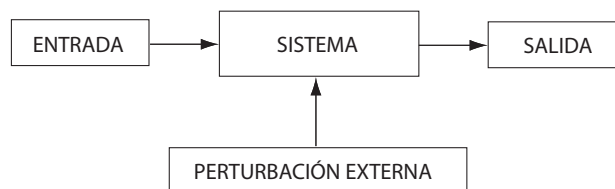
**Modelo matemático:** Es una descripción matemática que predice el funcionamiento de un sistema. Para los sistemas físicos los modelos matemáticos se describen en ecuaciones diferenciales.

**Variable controlada y variable manipulada:** La variable controlada es la cantidad o condición que se mide y controla, la variable manipulada es la cantidad o condición que el controlador modifica para regular el valor de la variable controlada, en general la variable controlada es la salida o el resultado del sistema.

**Controlar:** Significa medir el valor de la variable controlada del sistema y aplicar la variable manipulada al sistema para corregir o limitar una desviación del valor medido a partir de un valor deseado.

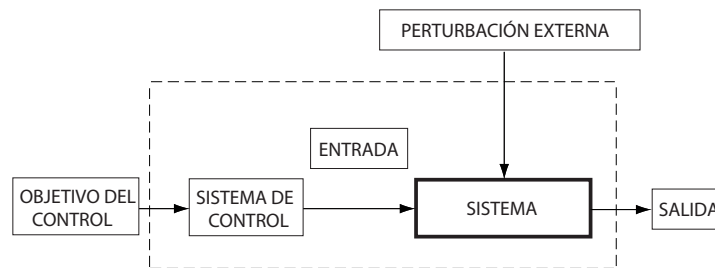
La Figura 7.3 muestra la representación típica de un sistema, en el cual se proporciona una respuesta o salida determinada.

Figure 6.3: Representación de un Sistema



**Sistema de control:** La Figura 6.4 muestra la representación de un sistema de control, el cual es una interconexión de componentes o elementos que proporcionará una respuesta deseada del sistema.

Figure 6.4: Representación de un Sistema de control



Las entradas del sistema también son llamadas señales actuantes, y las salidas son conocidas como variables controladas. La relación entrada-salida representa la relación causa-efecto. Esto significa que cuando se aplica una señal de entrada (causa) a un componente del sistema, éste responde de una forma particular o salida (efecto). En el caso de que se aplique un determinado control al sistema, el objetivo de control hará las veces de variable de entrada y controlará la variable de salida, mediante los elementos del sistema de control.

**Sistema de control clásico:** La teoría de control clásica trata de sistemas con una entrada y una salida (SISO), el núcleo de la teoría de control clásica está conformado por los métodos de respuesta en frecuencia y del lugar geométrico de las raíces, estos conducen a sistemas

estables que satisfacen un conjunto más o menos arbitrario de requerimientos de desempeño, En general, estos sistemas son aceptables pero no óptimos en forma significativa.

Figure 6.5: Diagrama SISO



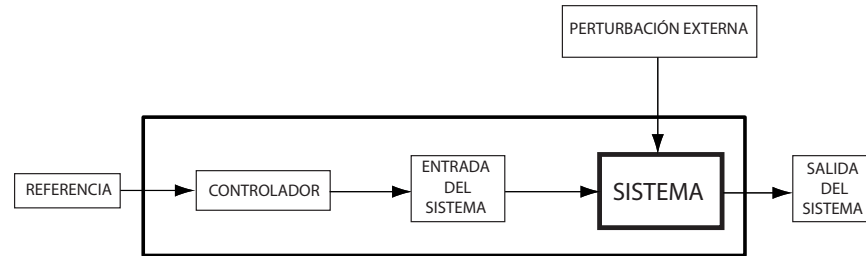
## 6.4 CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE CONTROL

Se distinguen dos tipos en función de la naturaleza de la información utilizada para calcular la acción de control del sistema, estos son lazo abierto y lazo cerrado.

### 6.4.1 Sistema de control de lazo abierto

Aquellos sistemas en los cuales la salida no afecta la acción de control se denominan sistemas de control en lazo abierto. En otras palabras, en un sistema de control en lazo abierto no se mide la salida ni se realimenta para compararla con la entrada, La Figura 6.6 muestra la representación de un sistema de control en lazo abierto. Un ejemplo práctico es una lavadora. El remojo, el lavado y el enjuague en la lavadora operan con una base de tiempo. La máquina no mide la señal de salida, que es la limpieza de la ropa. En cualquier sistema de control en lazo abierto, la salida no se compara con la entrada de referencia. Por tanto, a cada entrada de referencia le corresponde una condición operativa fija; como resultado, la precisión del sistema depende de la calibración. Ante la presencia de perturbaciones, un sistema de control en lazo abierto no realiza la tarea deseada. En la práctica, el control en lazo abierto sólo se usa si se conoce la relación entre la entrada y la salida y si no hay perturbaciones internas ni externas. Es evidente que estos sistemas no son de control realimentado. Se debe tener en cuenta que cualquier sistema de control que opere con una base de tiempo es en lazo abierto. Por ejemplo, el control del tránsito mediante señales operadas con una base de tiempo es otro ejemplo de control en lazo abierto[3].

Figure 6.6: Representación de un sistema de control en lazo abierto



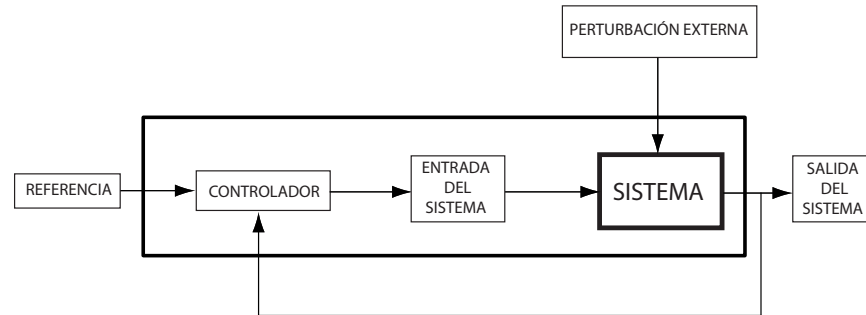
Podemos mencionar algunas Características de los sistemas de control en lazo abierto., Tales como, son más sencillos y económicos, no hay comparación de la salida del sistema con el valor deseado de la salida del sistema (referencia). , *para cada entrada de referencia le corresponde una condición de operación fijada. La exactitud de la salida del sistema depende de la calibración del controlador*; en general son imprecisos y poco confiables, también puede decirse que en presencia de perturbaciones estos sistemas de control no cumplen su función adecuadamente (no se adaptan a variaciones del medio, ni tampoco a las internas, como en el caso de desgaste de los componentes del sistema. ***El control en lazo abierto suele aparecer en dispositivos de control secuencial***, en el que no hay una regulación de variables sino que se realizan una serie de operaciones de una manera determinada. ***Esa secuencia de operaciones puede venir impuesta por eventos (eventdriven) o por tiempo (timeddriven)***. Se programan utilizando medios electromecánicos, o PLC's (controladores de lógica programable)[3].

Algunos ejemplos de un sistema en lazo abierto es la lavadora, la cual funciona sobre una base de tiempos – Variable de salida “limpieza de la ropa” no afecta al funcionamiento de la lavadora, además los Semáforos de una ciudad representan otro ejemplo de sistemas en lazo abierto, estos funcionan sobre una base de tiempo – Variable de salida “estado del tráfico” no afecta la funcionamiento del sistema.

#### 6.4.2 Sistema de control de lazo cerrado

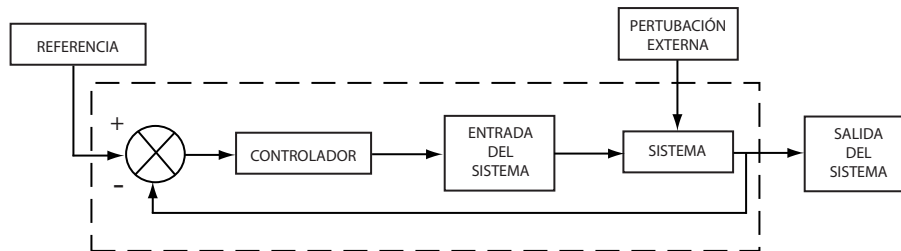
Son aquellos sistemas de control en los que la señal de salida del sistema (variable controlada) tiene efecto directo sobre la acción de control (variable de control) tal como se muestra en la Figura 6.7, En contraste con un sistema de lazo abierto, el de circuito cerrado utiliza una medición adicional de la salida real, para compararla con la salida deseada.

Figure 6.7: Representación de un sistema de control en lazo cerrado



Control retroalimentado: *Es una operación que en presencia de perturbaciones tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia. Esta reducción se logra manipulando alguna variable de entrada del sistema, siendo la magnitud de dicha variable de entrada función de la diferencia entre la variable de referencia y la salida del sistema, tal como se ilustra en la Figura 7.8.*

Figure 6.8: Representación de un sistema de control retroalimentado



Los sistemas de control realimentados se denominan también sistemas de control en lazo cerrado. En la práctica, los términos control realimentado y control en lazo cerrado se usan indistintamente. En un sistema de control en lazo cerrado, se alimenta al controlador la señal de error de actuación, que es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de realimentación (que puede ser la señal de salida misma o una función de la señal de salida y sus derivadas y/o integrales), a fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor conveniente. El término control en lazo cerrado siempre implica el uso de una acción de control realimentado para reducir el error del sistema.

### 6.4.3 Comparación entre sistemas de control en lazo abierto y lazo cerrado

Una ventaja del sistema de control en lazo cerrado es que el uso de la realimentación vuelve la respuesta del sistema relativamente insensible a las perturbaciones externas y a las variaciones

internas en los parámetros del sistema. Por tanto, es posible usar componentes relativamente precisos y baratos para obtener el control adecuado de una planta determinada, en tanto que hacer eso es imposible en el caso de un sistema en lazo abierto.

Desde el punto de vista de la estabilidad, el sistema de control en lazo abierto es más fácil de desarrollar, porque la estabilidad del sistema no es un problema importante. Por otra parte, la estabilidad es una función principal en el sistema de control en lazo cerrado, lo cual puede conducir a corregir en exceso errores que producen oscilaciones de amplitud constante o cambiante.

Debe señalarse que, para los sistemas en los que se conocen con anticipación las entradas y en los cuales no hay perturbaciones, es aconsejable emplear un control en lazo abierto. Los sistemas de control en lazo cerrado sólo tienen ventajas cuando se presentan perturbaciones impredecibles y/o variaciones impredecibles en los componentes del sistema. Se debe tener en cuenta que la valoración de la energía de salida determina en forma parcial el costo, el peso y el tamaño de un sistema de control.

La cantidad de componentes usados en un sistema de control en lazo cerrado es mayor que la que se emplea para un sistema de control equivalente en lazo abierto. Por tanto, el sistema de control en lazo cerrado suele tener costos y potencias más grandes. Para disminuir la energía requerida de un sistema, se emplea un control en lazo abierto cuando puede aplicarse. Por lo general, una combinación adecuada de controles en lazo abierto y en lazo cerrado es menos costosa y ofrecerá un desempeño satisfactorio del sistema general[4].

## 6.5 COMPONENTES DE UN SISTEMA DE CONTROL (LAZO CERRADO)

Básicamente se pueden enunciar tres componentes de un sistema de control en lazo cerrado, estos son:

**A. Sensor/transmisor:** en donde el sensor es el elemento primario y el transmisor es el elemento secundario.

Los sensores constituyen el principal medio de enlace entre los procesos industriales y los dispositivos electrónicos encargados de controlarlos o monitorearlos.

El comportamiento de un sistema de control automático depende directamente de las características del sensor o sensores utilizados en su lazo de realimentación. Idealmente, un sensor debería entregar una señal de salida proporcional a la variable de entrada dentro de un amplio rango de validez, responder instantáneamente a los cambios de la misma, ser inmune a las perturbaciones externas, etc.

En la práctica, esto no siempre sucede y la respuesta real de los sensores se ve frecuentemente afectada por linealidades, retardos, ruido, etc. Por esta razón, las características técnicas de los sensores se expresan generalmente en forma de curvas o familias de curvas. Las curvas características de un sensor definen el comportamiento real del mismo con respecto al comportamiento ideal deseado o con el de un sensor tomando como patrón. Estas características se agrupan en dos grandes categorías: estáticas y dinámicas.

*Las características estáticas*, que describen la actuación del sensor en régimen permanente o con cambios muy lentos de la variable a medir. Ejemplos de características estáticas son el campo de medida, la resolución, la exactitud, la precisión, la repetibilidad, la linealidad, la sensibilidad, el ruido y la histéresis, *las características dinámicas*, que describen la actuación del sensor en régimen transitorio, a base de dar su respuesta temporal ante determinados estímulos estándar o a base de identificar el comportamiento del transductor con sistemas estándar, e indicar las constantes de tiempo relevantes. Ejemplos de características dinámicas son la velocidad de respuesta, la respuesta de frecuencia, la estabilidad y el error dinámico[11].

**B. Controlador:** es el cerebro del sistema de control.

El controlador es el dispositivo que se emplea para el gobierno de uno o varios procesos. Por ejemplo, el controlador que regula el funcionamiento de un horno dispone de un sensor que mide constantemente su temperatura interna y, cuando traspasa los límites prefijados, genera las señales adecuadas que accionan los efectores que intentan llevar el valor de la temperatura dentro del rango estipulado. Aunque el concepto de controlador ha permanecido invariable a través del tiempo, su implementación física ha variado frecuentemente. Hace tres décadas, los controladores se construían exclusivamente con componentes de lógica discreta, posteriormente se emplearon los microprocesadores, que se rodeaban con chips de memoria y E/S sobre una tarjeta de circuito impreso. En la actualidad, todos los elementos del controlador se han podido incluir en un chip, el cual recibe el nombre de microcontrolador. Realmente consiste en un sencillo pero completo computador contenido en el corazón (chip) de un circuito integrado.

Un microcontrolador es un circuito integrado de alta escala de integración que incorpora la mayor parte de los elementos que configuran un controlador. Un microcontrolador dispone normalmente de los siguientes componentes: Procesador o UCP (Unidad Central de Proceso), Memoria RAM para contener los datos, Memoria para el programa tipo ROM/PROM/EPROM, Líneas

de E/S para comunicarse con el exterior, Diversos módulos para el control de periféricos (temporizadores, Puertas Serie y Paralelo, CAD, Conversores Analógico/Digital, CDA, Conversores Digital/Analógico, etc.), Generador de impulsos de reloj que sincronizan el funcionamiento de todo el sistema[1].

**C. Elemento final de control (preactuadores y/o actuadores):** actúan sobre la variable manipulada.

Estos a su vez se pueden clasificar como ;

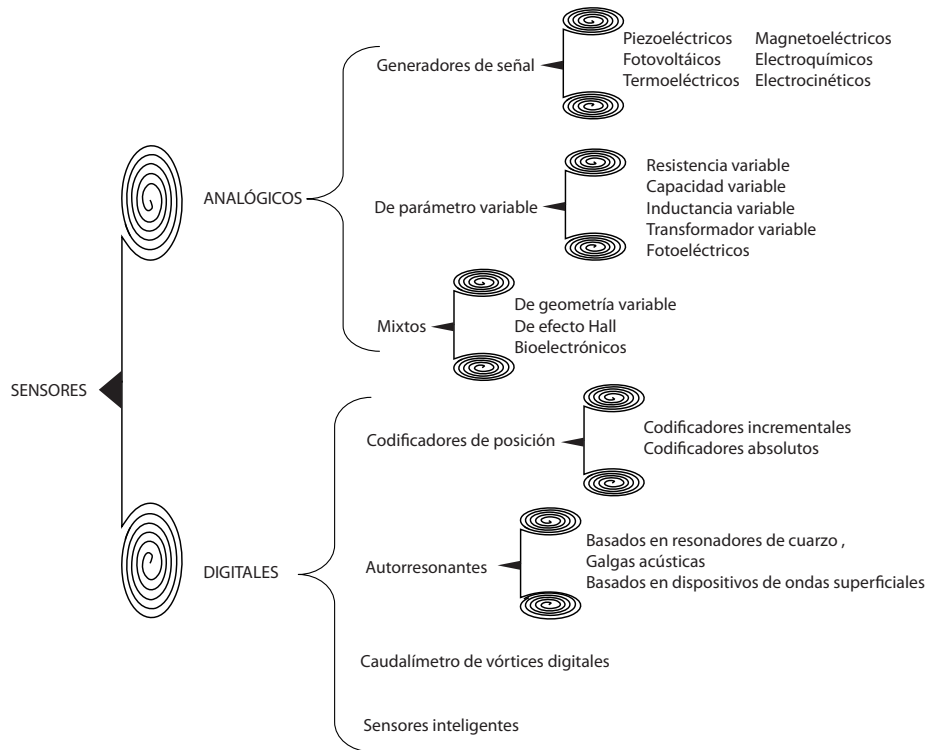
A. Sensores : Estos se pueden clasificar de diferentes maneras, como por ejemplo, según el aporte de energía, según la señal de salida entre otros.

-Clasificación de los sensores según su aporte de energía:

- Sensores pasivos (Generadores): Generan señales representativas de las magnitudes a medir por medio de una fuente auxiliar.
- Sensores Activos (Moduladores): No requieren de otras fuentes para generar las señales representativas de las magnitudes.

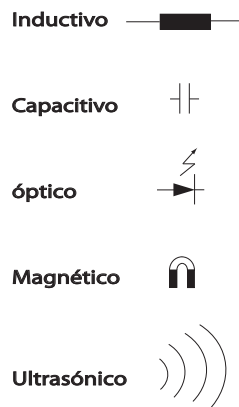
-Clasificación según el tipo de señal de salida, tal como se muestra en la figura 6.9.

Figure 6.9: Clasificación de los sensores dependiendo del tipo de señal de salida



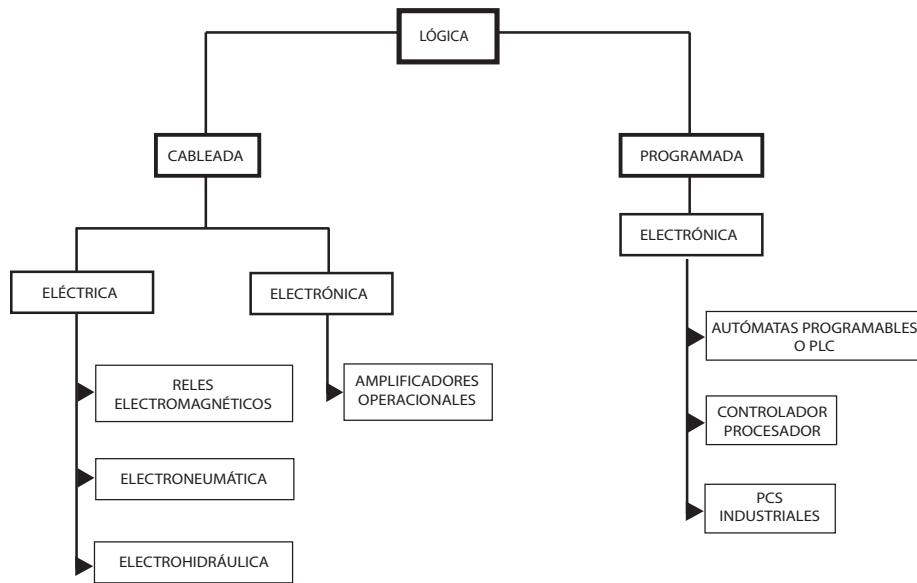
-Clasificación según el tipo de variable a medir: Resistivos , magnéticos ,ópticos, inductivos , capacitivos, tal como se ilustra en la figura 6.10.

Figure 6.10: Clasificación según el tipo de variable a medir



B. Controlador: Estos pueden clasificarse según la lógica empleada , puede ser de lógica cableada o lógica programada tal como se ilustra en la figura 6.11.

Figure 6.11: Clasificación de los controladores según el tipo de lógica



C. Elementos final de control : Formados por el conjunto de pre-actuadores y actuadores los cuales intervienen para mantener unas determinadas condiciones de operación del sistema, tal como se ilustra en la figura 6.12.

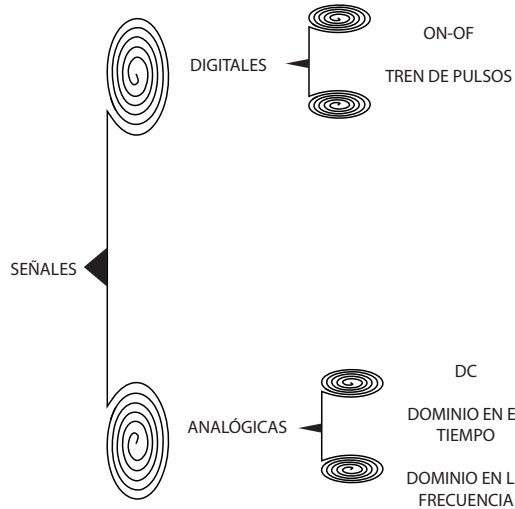
Figure 6.12: Pare-Actuadores y Actuadores



## 6.6 CLASIFICACIÓN DE LAS SEÑALES

Según la naturaleza de las señales que intervienen en el proceso, estas pueden clasificarse en analógicas y digitales tal como se muestra en la figura 6.13.

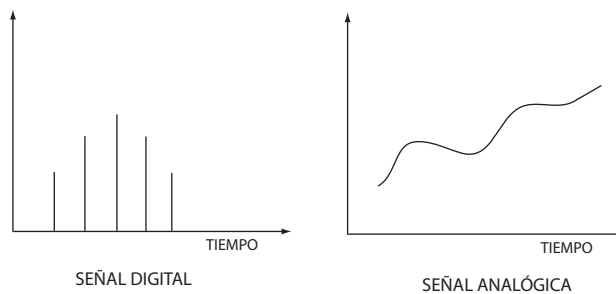
Figure 6.13: Clasificación de las señales



Los sistemas que usan señales analógicas y señales digitales se denomina sistemas analógicos y digitales respectivamente., Los sistemas digitales utilizan señales todo o nada (on-off), llamadas señales binarias por poseer sólo dos estados: abierto o cerrado, alto o bajo, etc, también están las llamadas tren de pulsos, Estos niveles o estados se representan por variables lógicas o bits, cuyo valor sólo puede ser 0 o 1.,

Los sistemas analógicos trabajan con señales continuas, con un margen de variación determinado. Suelen representar magnitudes físicas del proceso, como presión o temperatura por ejemplo, mediante una tensión o corriente proporcionales a su valor. Los valores típicos de los rangos son de 0 a 10 voltios o de 4 a 20 miliamperios, que representan los valores inicial y final del rango elegido para la variable que representan [11].

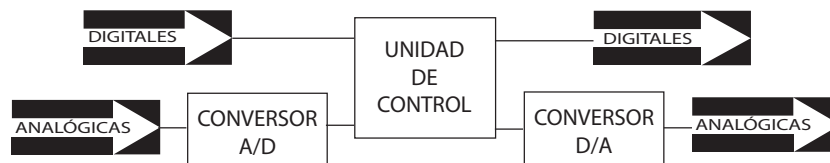
Figure 6.14: Tipos de señal



Los sistemas modernos con un cierto grado de complejidad, y en particular los autómatas programables, son casi siempre sistemas híbridos, procesando señales de los dos tipos anteriores.

Si el sistema de control es por ejemplo electroneumático, tendremos interfaces que conviertan las señales eléctricas a neumáticas y viceversa. Dado que existen muchos sensores y actuadores que trabajan con señales analógicas, las interfaces deben de realizar la conversión analógica digital (llamada A/D) para obtener una señal digital a partir de la analógica; y la digital-analógica (llamada D/A) para obtener señales analógicas a partir de las cantidades numéricas que suministra el controlador digital, Tal como se muestra en la Figura 6.15.

Figure 6.15: Unidad de control digital con las interfaces de entrada y salida para operar con señales analógicas



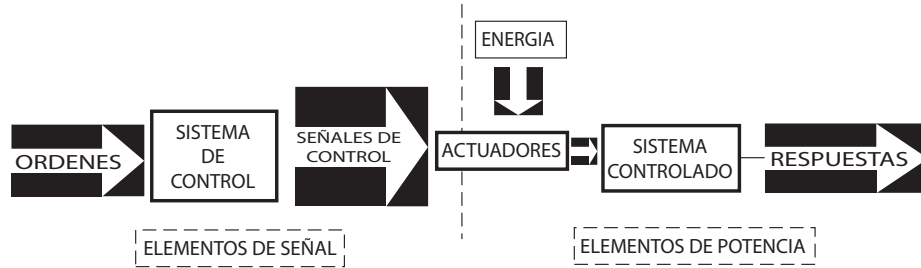
Nota: El hecho de estar a un mismo nivel en el gráfico, de ninguna manera implica que a toda señal de entrada de un tipo le deba corresponder una salida del mismo tipo, ni tampoco que el número de entradas sea igual al de salida. Las señales serán digitales o analógicas según lo requieran los dispositivos sensores y actuadores o registradores.

## 6.7 ELEMENTOS DE UN SISTEMA DE CONTROL

Un sistema de control opera con magnitudes de baja potencia, llamadas señales, y con ellas los actuadores son los que realmente controlan la energía o elementos de entrada y salida del sistema controlado, Tal como se muestra en la Figura 6.16.

Lo expresado puede entenderse como que el sistema de control es un mero convertidor-amplificador de potencia que ejecuta las órdenes dadas a través de las consignas (ordenes). Este tipo de control se denomina de lazo abierto porque no recibe ninguna información del comportamiento del sistema controlado. El operador debe verificar que el sistema responde como está previsto, caso contrario deberá cambiar las consignas o recalibrar el sistema de control.

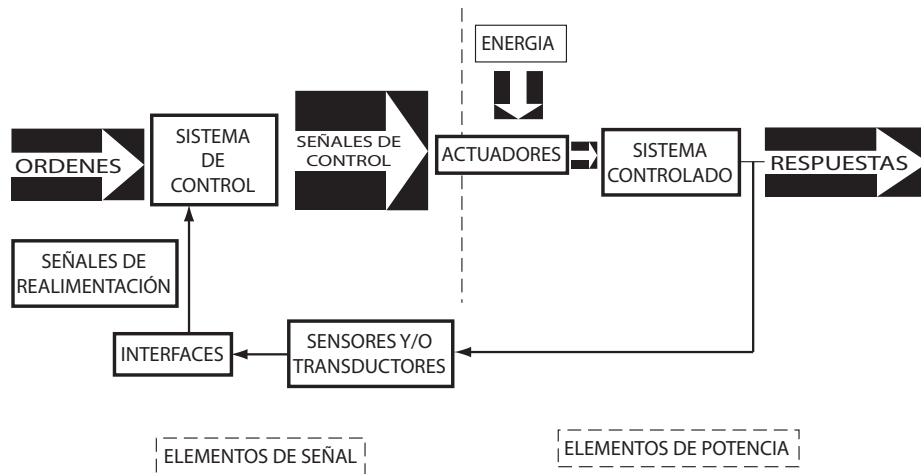
Figure 6.16: Sistema de control de lazo abierto



Sin embargo, lo habitual es que el sistema de control se encargue de tomar ciertas decisiones ante determinados comportamientos del sistema controlado, denominándose en este caso control automático, Tal como se muestra en la Figura 6.17.

Para esta función se requieren de elementos que detecten o midan las salidas del sistema (denominados sensores y/o transductores), y de interfaces que adapten la salida de esos sensores y/o transductores a lo requerido por el controlador. Esto establece un retorno de la salida a la entrada, denominada realimentación o retroalimentación, obteniéndose un sistema de lazo cerrado, o retroalimentado. Al conjunto de señales de consignas (ordenes) y de realimentación se las denomina entradas del sistema de control y al conjunto de las señales de control obtenidas se las denomina salidas del sistema de control.

Figure 6.17: Sistema de control de lazo cerrado



Algunos ejemplos de estos sistemas de control en lazo cerrado son los Servomecanismos (sistemas de control realimentados en los cuales la salida puede ser posición, velocidad o aceleración mecánica).

## 6.8 CONTROL AUTOMÁTICO

El control automático de procesos es una de las disciplinas que se ha desarrollado a una velocidad vertiginosa, dando las bases a lo que hoy algunos autores llaman la segunda revolución industrial. El uso intensivo de las técnicas del control automático de procesos tiene como origen la evolución y tecnificación de las tecnologías de medición y control aplicadas al ambiente industrial. Su estudio y aplicación ha contribuido al reconocimiento universal de sus ventajas y beneficios asociados al ámbito industrial, que es donde tiene una de sus mayores aplicaciones debido a la necesidad de controlar un gran número de variables, sumado esto a la creciente complejidad de los sistemas. El control automático de procesos se usa fundamentalmente porque reduce el costo asociado a la generación de bienes y servicios, incrementa la calidad y volúmenes de producción de una planta industrial entre otros beneficios asociados con su aplicación.

La eliminación de errores y un aumento en la seguridad de los procesos es otra contribución del uso y aplicación de esta técnica de control. En este punto es importante destacar que anterior a la aplicación masiva de las técnicas de control automático en la industria, era el hombre el que aplicaba sus capacidades de cálculo e incluso su fuerza física para la ejecución del control de un proceso o máquina asociada a la producción. En la actualidad, gracias al desarrollo y aplicación de las técnicas modernas de control, un gran número de tareas y cálculos asociados a la manipulación de las variables ha sido delegado a computadoras, controladores y accionamientos especializados para el logro de los requerimientos del sistema[9].

El principio de todo sistema de control automático es la aplicación del concepto de realimentación o feedback (medición tomada desde el proceso que entrega información del estado actual de la variable que se desea controlar) cuya característica especial es la de mantener al controlador central informado del estado de las variables para generar acciones correctivas cuando así sea necesario. Este mismo principio se aplica en campos tan diversos como el control de procesos químicos, control de hornos en la fabricación del acero, control de máquinas herramientas, control de variables a nivel médico.

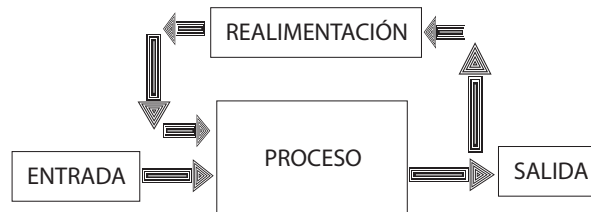
El uso de las computadoras digitales ha posibilitado la aplicación en forma óptima del control automático a sistemas físicos que hace algunos años atrás eran imposibles de analizar o controlar. Uno de estos avances está dado por la aplicación de las técnicas de control difuso, aplicaciones con redes neuronales, simulación de sistemas de control y sistemas expertos entre otros.

Es de vital importancia la aplicación del denominado control adaptativo cuya principal característica es su capacidad de modificar los parámetros del sistema de control en respuesta a cambios en la dinámica y/o perturbaciones del sistema. Esta fue la principal razón para

introducir este tipo de reguladores, es decir, los cambios internos que puede sufrir la dinámica de la planta a controlar por factores ambientales u otros inherentes a los sistemas como el envejecimiento, desgaste y los cambios en el entorno del conjunto regulador-planta, como por ejemplo, cambios en la presión y temperatura entre otros. Uno de los primeros campos donde se introdujo esta técnica de control fue en los pilotos automáticos de vuelo, donde las condiciones atmosféricas y las propias del vehículo, como el peso y la velocidad, pueden cambiar radicalmente

La Figura 6.18 muestra el control mediante realimentación, En conclusión “El control automático es el mantenimiento de un valor deseado para una cantidad o condición física, midiendo su valor actual, comparándolo con el valor referencia, y utilizando la diferencia para proceder a reducirla mediante una acción correctiva. En consecuencia, el control automático exige un lazo cerrado de acción y reacción que funcione sin intervención humana”[10].

Figure 6.18: Control mediante realimentación



Los sistemas de control en la industria son usados para el control de procesos., Los sistemas de control de procesos son aquellos que requieren la regulación de variables de proceso (temperaturas, concentraciones, caudales, niveles. . .). Estos sistemas de control requieren la manipulación de unidades de proceso continuas (no se interrumpe el flujo) y discontinuas, bache o por lotes (se interrumpe el flujo), Ejemplos de estos son la refinería de petróleo, planta de producción de energía eléctrica, papelera entre otros. Además los sistemas de control también son usados en maquinas manufactureras, como las maquinas de control numérico en las que se usa un programa para controlar la secuencia de operaciones de una máquina, dicho programa contiene instrucciones que especifican posiciones, direcciones, velocidades y velocidad de corte[1].

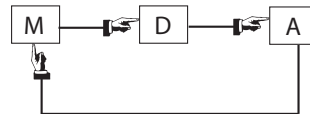
### 6.8.1 Operaciones básicas en un sistema de control automático

En cuanto a las operaciones básicas en un sistema de control podemos clasificarlas así: medición, decisión y acción, tal como se muestra en la figura 6.19.

- a) Medición (M): Medida de la variable controlada(Responsable: Sensor/transmisor).
- b) Decisión (D): Responsable: Controlador.
- c) Acción (A): Resultado de la decisión del controlador (Responsable: Mediante elemento final de control).

La MDA están siempre presentes en todo sistema de control automático.

Figure 6.19: Operaciones básicas en un sistema de control automático

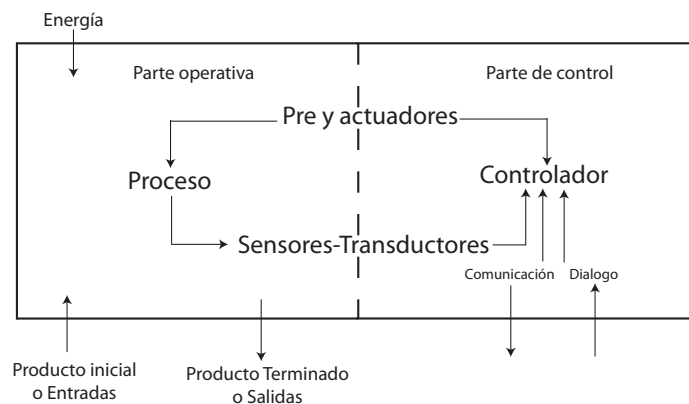


Algunas definiciones que aparecen cuando se habla de un sistema de control automático son la variable controlada (VC), la variable manipulada (VM), el punto de ajuste (SP) y la variable de carga o perturbación (VP), estas a su vez cumplen un papel fundamental dentro del mismo, el cual es ajustar la VM para mantener la VC en su SP a pesar de la presencia de la VP.

### 6.8.2 Modelo estructural de un SAC (Sistema Automático de Control)

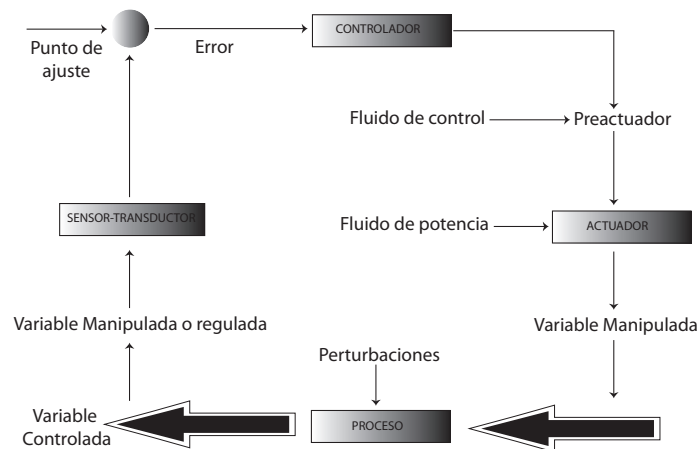
Cuando hablamos de un sistema de control automático es importante definir que componentes dentro del mismo tiene que ver con la parte operativa y cuales con la parte de control para una mejor comprensión del mismo [11], esto se ilustra en la Figura 6.20

Figure 6.20: Modelo estructural de un SAC (Sistema Automático de Control)



A continuación en la Figura 6.21 ilustra un ejemplo del diagrama de bloques de de un SAC (Sistema automático de control) [11]:

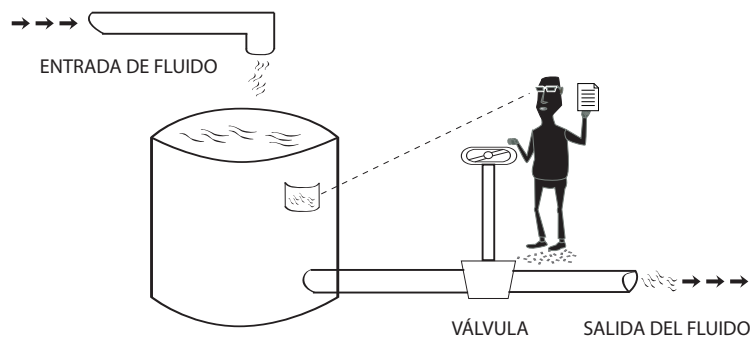
Figure 6.21: Ejemplo SAC



## 6.9 EJEMPLOS DE SISTEMAS DE CONTROL

La figura 6.22 muestra un ejemplo sencillo de un sistema de control ,en este, el control del nivel líquido dentro del tanque depende de la acción del operario al cerrar o abrir la válvula para controlar la salida de dicho fluido[11].

Figure 6.22: Control de nivel del líquido, Sistema de control (lazo cerrado)



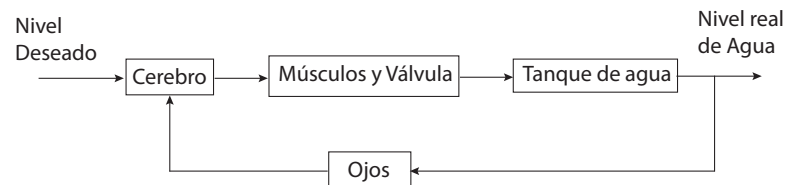
Entonces , las funciones de control son: Medir, Comparar, Computar, Corregir.

A continuación se hace una descripción del proceso de control.

1. Observar el nivel que ha alcanzado el fluido en el tanque.
2. Compararlo con el nivel deseado.
3. Abrir la válvula de salida si el nivel de salida observado es mayor que el deseado.
4. Cerrar la válvula de salida si el nivel observado es menor que el deseado.
5. Ante cualquier variación en el nivel deseado detectada por la continua variación de las acciones 1 y 2, reaccionar según las acciones 3 o 4.

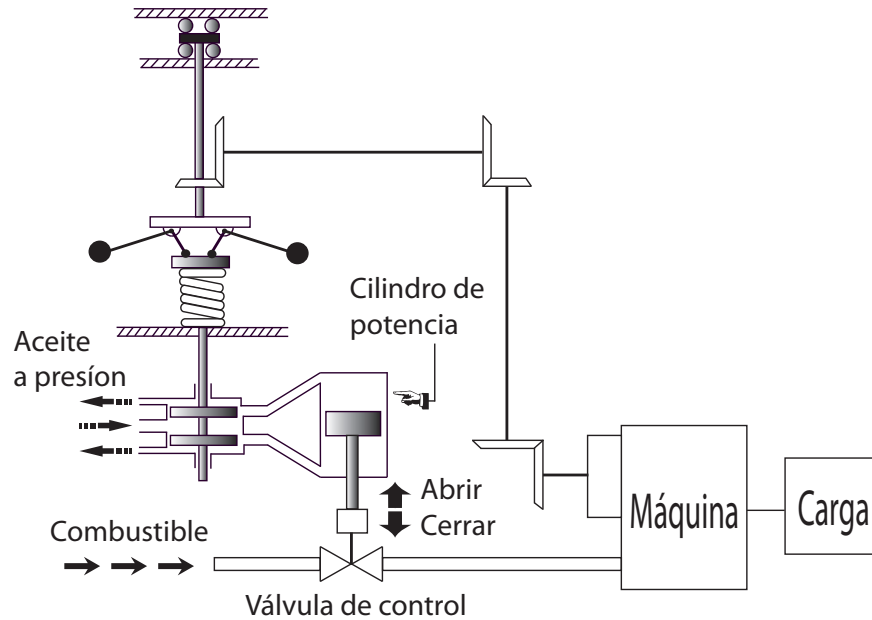
El diagrama de bloques de este sistema es ilustrado en la figura 6.23;

Figure 6.23: Diagrama de bloques del sistema de control



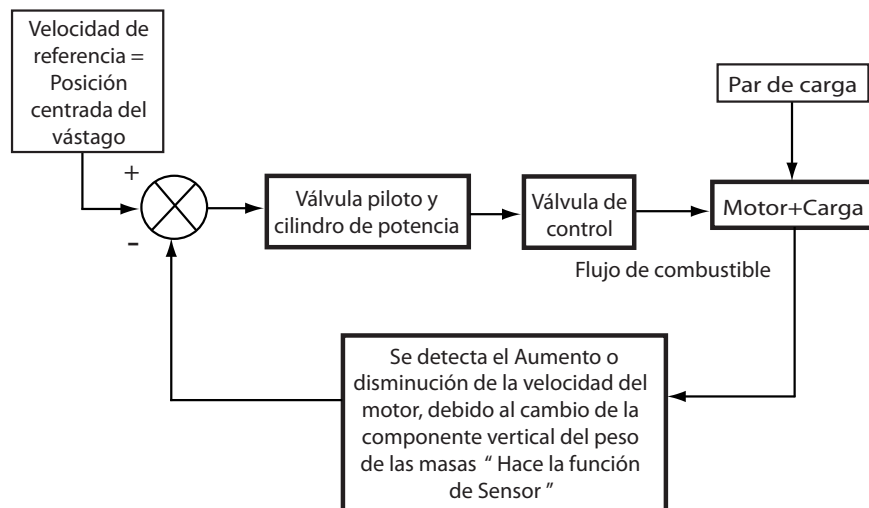
Otro ejemplo ilustra el regulador centrífugo de Watt ( Figura 6.24 ) en el cual se regula el flujo de combustible para mantener una determinada velocidad en el motor pese a las variaciones y perturbaciones.

Figure 6.24: Regulador centrífugo de Watt para el control de velocidad de una máquina de vapor que fue diseñado en el siglo XVIII [2]



El diagrama de bloques de este sistema es ilustrado en la figura 6.25;

Figure 6.25: Sistema de control del regulador



La Descripción del proceso del regulador centrífugo de watt puede verse a continuación, para

el mismo se tendrán en cuenta dos condiciones , en el primero la velocidad del motor cae o disminuirá , y en el segundo la velocidad del motor sube o aumentará , estos casos son;

### **Caso 1**

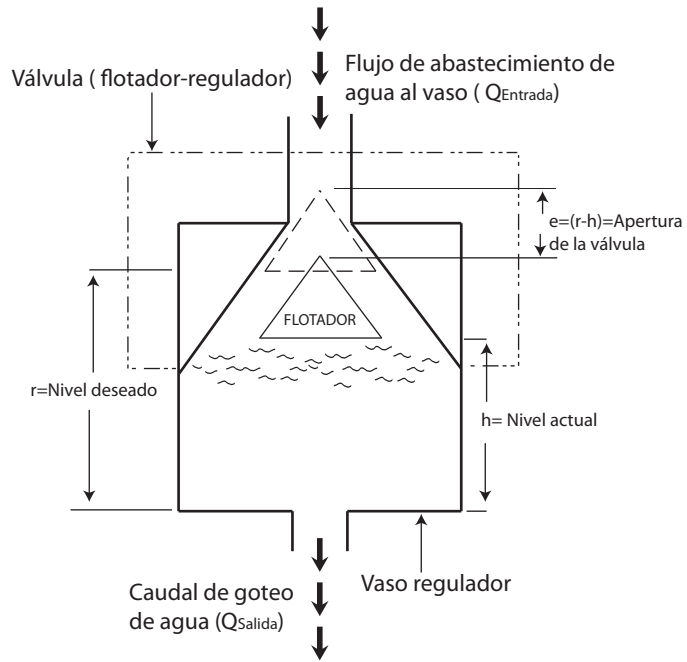
1. Si la velocidad real cae debajo del valor deseado debido a una perturbación, ocurrirá una disminución de la fuerza centrífuga del regulador de velocidad.
2. Esta disminución de velocidad hará que la válvula piloto se desplacé hacia abajo.
3. Comunicando la línea de presión de aceite con la línea del lado vástago del cilindro de potencia, originando una fuerza hacia arriba dentro del cilindro de potencia.
4. Esta fuerza origina que el cilindro de potencia suba, abriendo la válvula de control.
5. Aumentando el flujo de combustible hacia el motor, y la velocidad del motor aumenta hasta alcanzar el valor deseado.

### **Caso 2**

1. Si la velocidad del motor aumenta sobre el valor deseado, debido a un suministro excesivo de combustible u otra causa, ocurrirá un aumento de la fuerza centrífuga.
2. Esta aumento de velocidad hará que la válvula piloto se desplacé hacia arriba.
3. Comunicando la línea de presión de aceite con la línea del lado pistón del cilindro de potencia, originando una fuerza hacia abajo dentro del cilindro de potencia.
4. Esta fuerza origina que el cilindro de potencia baje, cerrando la válvula de control.
5. Disminuyendo el flujo de combustible hacia el motor, y la velocidad del motor disminuye hasta alcanzar el valor deseado.

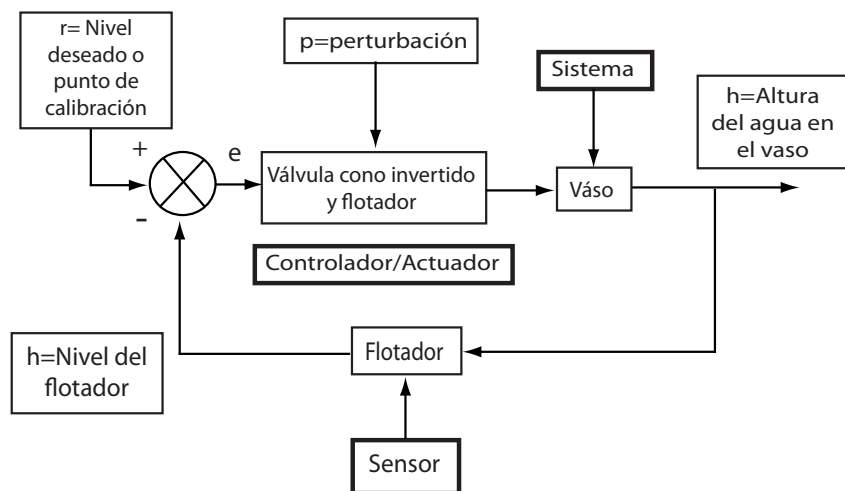
Otro ejemplo se observa la figura 6.26, donde se muestra el reloj de agua el cual controla el nivel del líquido mediante un flotador en forma de cono, este restringe el paso de líquido hacia el vaso en este caso, en la vida cotidiana la aplicación de este principio puede verse en los inodoros de los baños.

Figure 6.26: Reloj de agua Probablemente el primer sistema de retroalimentación creado por el hombre, Inventado por Ctesibios de Alejandría (Egipto, aprox. 260 a.c.)



El diagrama de bloques de este sistema es ilustrado en la figura 6.27;

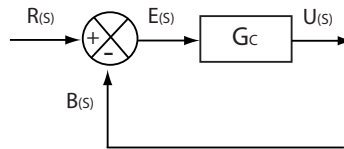
Figure 6.27: Sistema de control del reloj de agua



## 6.10 ACCIONES DE CONTROL

Al controlador ingresan las señales  $R(s)$  ( set-point ) y  $B(s)$  ( medición de la variable controlada ) cuando se comparan se genera la señal de error  $E(s)$ , esta a su vez es modificada de alguna forma por la transferencia del controlador  $G_c$  , y finalmente el resultado es la variable de control  $U(s)$ ., el algoritmo matemático que se ejerce sobre el error es la llamada **acción de control** [6], Tal como se ilustra en la Figura 6.28.

Figure 6.28: Acción de control



### 6.10.1 Clasificación de los controladores industriales

Los controladores industriales se clasifican, de acuerdo con sus acciones de control, como:

1. De dos posiciones o de encendido y apagado (on/off).
2. Proporcionales.
3. Integrales.
4. Proporcionales-integrales.
5. Proporcionales-derivativos.
6. Proporcionales-integrales-derivativos.

#### 6.10.1.1 Acción de control de dos posiciones o de encendido y apagado (on/off)

En un sistema de control de dos posiciones, el elemento de actuación solo tiene dos posiciones fijas que, en muchos casos, son simplemente encendido y apagado. El control de dos posiciones o de encendido y apagado es relativamente simple y barato, razón por la cual su uso es extendido en sistemas de control tanto industriales como domésticos. Supongamos que la señal de salida

del controlador es  $u(t)$  y que la señal de error es  $e(t)$ . En el control de dos posiciones, la señal  $u(t)$  permanece en un valor ya sea máximo o mínimo, dependiendo de si la señal de error es positiva o negativa. Tal como se ilustra en la ecuación 17.1.

$$\begin{aligned} u(t) &= U_1 \text{ Para } e(t) \geq 0 \\ u(t) &= U_2 \text{ Para } e(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

En donde  $U_1$  y  $U_2$  son constantes. Por lo general, el valor mínimo de  $U_2$  es cero o  $-U_1$ . Es común que los controladores de dos posiciones sean dispositivos eléctricos, en cuyo caso se usa extensamente una válvula eléctrica operada por solenoides. Los controladores neumáticos proporcionales con ganancias muy altas funcionan como controladores de dos posiciones y, en ocasiones, se denominan controladores neumáticos de dos posiciones [6],[7].

### 6.10.1.2 Acción de control proporcional

Para un controlador con acción de control proporcional, la relación entre la salida del controlador  $u(t)$  y la señal de error  $e(t)$  es como se muestra en la ecuación 17.2 y 17.3:

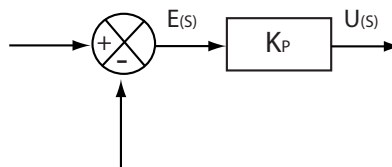
$$u(t) = K_p * e(t) \quad (6.2)$$

o bien, en cantidades transformadas por el método de Laplace,

$$K_p = \frac{U(s)}{E(s)} \quad (6.3)$$

en donde  $K_p$  se considera la ganancia proporcional. Cualquiera que sea el mecanismo real y la forma de la potencia de operación, el controlador proporcional es, en esencia, un amplificador con una ganancia ajustable. En la figura 6.29 se presenta un diagrama de bloques de tal controlador [6],[7].

Figure 6.29: Diagrama a bloques de un controlador proporcional



### 6.10.1.3 Acción de control integral

En un controlador con acción de control integral, el valor de la salida del controlador  $u(t)$  se cambia a una razón proporcional a la señal de error  $e(t)$ . Es decir, como se muestra en las ecuaciones 17.4 o 17.5.

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i * e(t) \quad (6.4)$$

o bien ,

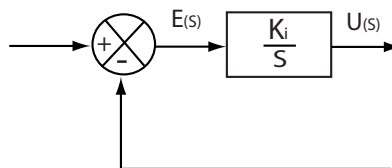
$$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt \quad (6.5)$$

en donde  $K_i$  es una constante ajustable. La función de transferencia del controlador integral es como se ilustra en la ecuación 17.6.

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} \quad (6.6)$$

Si se duplica el valor de  $e(t)$ , el valor de  $u(t)$  varía dos veces más rápido. Para un error de cero, el valor de  $u(t)$  permanece estacionario. En ocasiones, la acción de control integral se denomina control de reajuste (reset). La figura 6.30 muestra un diagrama de bloques de tal controlador [6],[7].

Figure 6.30: Diagrama a bloques de un controlador integral



#### 6.10.1.4 Acción de control proporcional-integral

La acción de control de un controlador proporcional-integral (PI) se define mediante la ecuación 17.7.

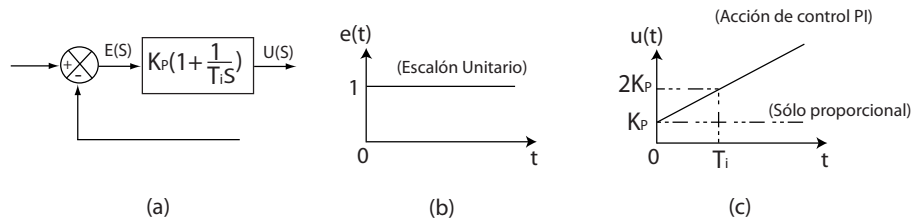
$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad (6.7)$$

o la función de transferencia del controlador es expresada como la ecuación 17.8.

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (6.8)$$

en donde  $K_p$ , es la ganancia proporcional y  $T_i$  se denomina tiempo integral. Tanto  $K_p$  como  $T_i$  son ajustables. El tiempo integral ajusta la acción de control integral, mientras que un cambio en el valor de  $K_p$  afecta las partes integral y proporcional de la acción de control. El inverso del tiempo integral  $T_i$  se denomina velocidad de reajuste. La velocidad de reajuste es la cantidad de veces por minuto que se duplica la parte proporcional de la acción de control. La velocidad de reajuste se mide en términos de las repeticiones por minuto. La figura (a) muestra un diagrama de bloques de un controlador proporcional más integral. Si la señal de error  $e(t)$  es una función escalón unitario, como se aprecia en la figura (b), la salida del controlador  $u(t)$  se convierte en lo que se muestra en la figura (c) [6],[7].

Figure 6.31: Controlador proporcional



### 6.10.1.5 Acción de control proporcional-derivativa

La acción de control de un controlador proporcional-derivativa (PD) se define mediante la ecuación 17.9.

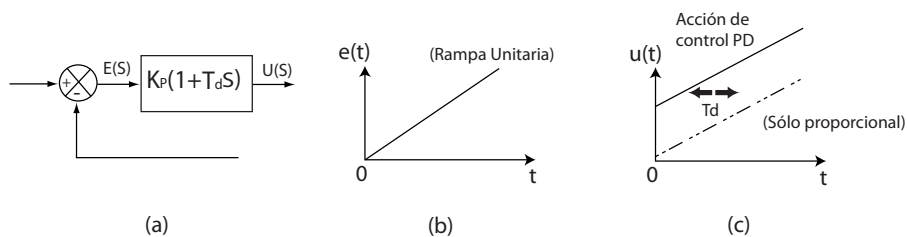
$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (6.9)$$

Y la función de transferencia esta definida por la ecuación 17.10.

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_P(1 + T_d s) \quad (6.10)$$

en donde  $K_P$  es la ganancia proporcional y  $T_d$  es una constante denominada tiempo derivativo. Tanto  $K_P$  como  $T_d$  son ajustables. La acción de control derivativa, en ocasiones denominada control de velocidad, ocurre donde la magnitud de la salida del controlador es proporcional a la velocidad de cambio de la señal de error. El tiempo derivativo  $T_d$  es el intervalo de tiempo durante el cual la acción de la velocidad hace avanzar el efecto de la acción de control proporcional. La figura (a) muestra un diagrama de bloques de un controlador proporcional-derivativo. Si la señal de error  $e(t)$  es una función rampa unitaria como se aprecia en la figura (b), la salida del controlador  $u(t)$  se convierte en la que se muestra en la figura (c). La acción de control derivativa tiene un carácter de previsión. Sin embargo, es obvio que una acción de control derivativa nunca prevé una acción que nunca ha ocurrido. Aunque la acción de control derivativa tiene la ventaja de ser de previsión, tiene las desventajas de que amplifica las señales de ruido y puede provocar un efecto de saturación en el actuador. Observe que la acción de control derivativa no se usa nunca sola, debido a que solo es eficaz durante periodos transitorios[6],[7].

Figure 6.32: Controlador proporcional-derivativo



### 6.10.1.6 Acción de control proporcional-integral-derivativa

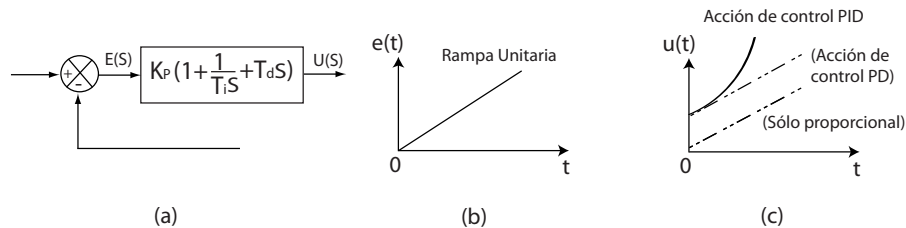
La combinación de una acción de control proporcional, una acción de control integral y una acción de control derivativa se denomina acción de control proporcional-integral-derivativa (PID). Esta acción combinada tiene las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales. La ecuación de un controlador con esta acción combinada esta dada por la ecuación 17.11.

$$u(t) = K_P e(t) + \frac{K_P}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_P T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (6.11)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

En donde  $K_p$  es la ganancia proporcional,  $T_i$  es el tiempo integral y  $T_d$  es el tiempo derivativo. El diagrama de bloques de un controlador proporcional-integral-derivativo aparece en la figura (a). Si  $e(t)$  es una función rampa unitaria, como la que se observa en la figura (b), la salida del controlador  $u(t)$  se convierte en la de la figura (c)[6],[7].

Figure 6.33: Controlador proporcional-integral-derivativo



## 6.11 ALGUNAS ESTRATEGIAS DE CONTROL

Implementar una técnica de control a un proceso dado, implica un conocimiento amplio sobre la dinámica del proceso y de todas las variables que intervienen en el, además de tener presente los algoritmos de control empleados. Independientemente del sistema de control que se aplique a un proceso dado, las estrategias son aplicables.

Estas estrategias, se aplican con el fin de lograr un control regulatorio óptimo sobre la variable o variables de interés, las cuales toman estados inestables en la operación normal del proceso, como resultado de las perturbaciones internas y externas al proceso.

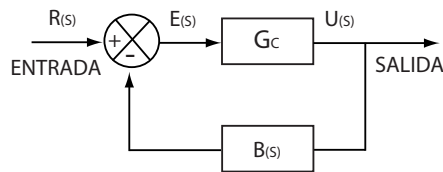
En consecuencia, el funcionamiento correcto de un sistema de control esta determinado por la naturaleza del proceso, de las características del sistema de control y de las perturbaciones externas.

Algunas estrategias de control son , A) Control Feedback (retroalimentación), B) Control Feedforward (adelanto).C) Control de cascada,D) Combinado (feedback + feedforward), dichas estrategias se explican a continuación.

### 6.11.1 Control Feedback (retroalimentación)

El control Feedback tiene como objetivo: Mantener constante una variable en un valor deseado o variable a través del tiempo. El control retroalimentado, es la forma más simple de aplicar un control en lazo cerrado. El problema en este tipo de control, es que la corrección se hace después de que se presentó el problema y una cantidad del producto no lleva la calidad deseada, ya que la corrección llega un tiempo después.( ver Figura 6.34)

Figure 6.34: Control Feedback (retroalimentación)

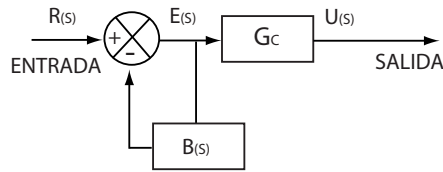


### 6.11.2 Control Feedforward (adelanto)

El control Feedforward tiene como objetivo Sensar la perturbación de una variable, antes de afectar al proceso y tomar la acción correctiva para evitar un efecto dañino al producto. En los procesos que tienen tiempos muertos muy grandes, se presentan desviaciones en magnitud y frecuencia variables, la señal de error se detecta un tiempo después de que se produjo el cambio en la carga y ha sido afectado el producto, y como consecuencia la corrección actúa cuando ya no es necesario. El problema anterior se resuelve aplicando al proceso esta técnica, que parte de la medición de una o varias señales de entrada y actúan simultáneamente sobre la variable de entrada, produciendo la salida deseada sobre el proceso. Aplicar esta técnica de control implica un conocimiento amplio, exacto y completo de las características estáticas y dinámicas del proceso. La relación entre la variable de salida y la variable de entrada, constituye el modelo del proceso y es la función de transferencia del sistema de control en adelanto. El controlador es quien debe responder a los cambios de las perturbaciones, pero

como es lógico, su eficiencia depende de la exactitud del captor y elementos de interfase de una o más variables de entrada y de la exactitud alcanzada en el modelo, calculada en el proceso. El control anticipativo es capaz de seguir rápidamente los cambios dinámicos (estado transitorio), pero puede presentar un error estático considerable. Por tal motivo, regularmente se aplica combinado con el control retroalimentado. Un esquema representativo puede verse en la figura 6.35.

Figure 6.35: Control Feedforward (adelanto)



### 6.11.3 Control de cascada

El control de cascada tiene como objetivo Mejorar la estabilidad de una variable del proceso aun con una óptima sintonización del controlador en lazo retroalimentado. La aplicación de esta técnica de control, es conveniente cuando la variable no puede mantenerse dentro del valor de set point deseado, debido a las perturbaciones inherentes al proceso.

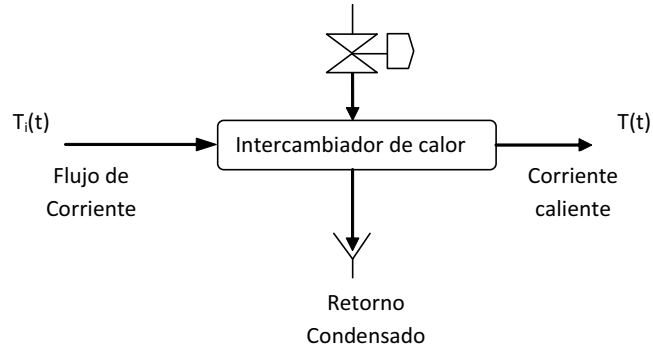
Para que un sistema de control en cascada esté bien aplicada es necesario que se tomen en cuenta algunos aspectos importantes para su aplicación, tales como, la Localización de las variables más importantes del proceso, Localizar la variable básica a controlar, Localizar la variable que introduce la inestabilidad, Determinar la velocidad de cambio de ambas señales, entre otros. ( ver Figura 6.36).

Figure 6.36: Control de cascada



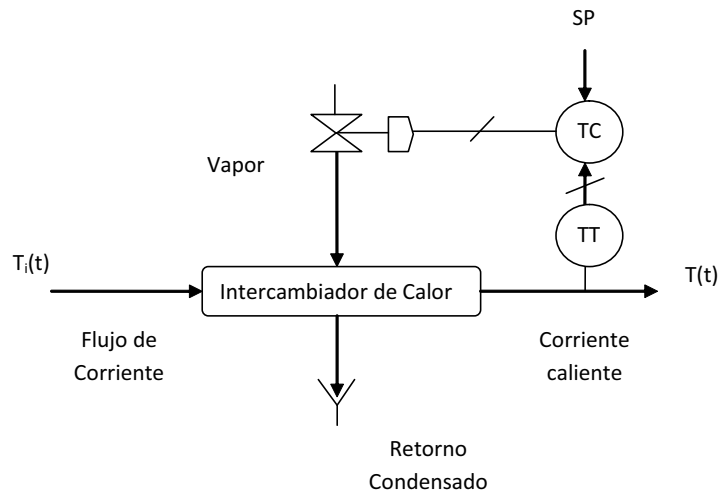
A continuación se ilustrara algunos ejemplos de aplicación de estas estrategias aplicadas en un intercambiador de calor, tal como se muestra en la figura 6.37.

Figure 6.37: Intercambiador de calor



A continuación vemos el ejemplo del feedback en un intercambiador de calor ( Ver Figura 6.38) ;

Figure 6.38: Feedback en un intercambiador de calor



TC= Temperatura de set point ; TT = Temperatura tomada

En este sistema tratara de mantener el valor de set point es decir se ajusta a una determinada temperatura TC , entonces cualquier valor tomado de la corriente caliente TT deberá mantenerse al valor del set point , si se llegase el caso en que la TT fuera menor que TC por ejemplo, se provocaría una diferencia entre estas temperaturas , entonces se produciría una señal de

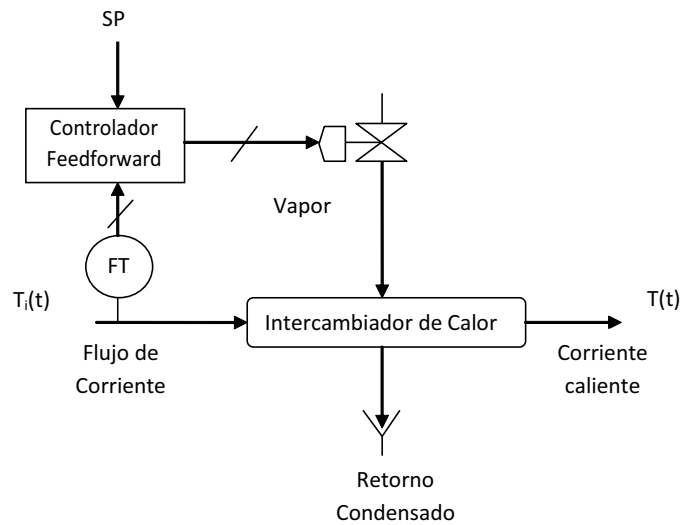
error que lo que en ultimas hará es abrir la válvula para permitir mas paso de vapor para que la temperatura de la corriente aumente hasta alcanzar un error de cero , es decir que el valor de TT iguale al valor de TC , esto también se aplica en forma análoga si la TT fuera mayor.

Algunas ventajas de esta estrategia es que es sencilla y ampliamente difundida, también que no conoce y no le interesa conocer cual perturbación entra al proceso, además trabaja con un mínimo de conocimiento del proceso.

Una de las desventajas es que compensa por efecto de una perturbación únicamente después de que la VC se ha desviado de su SP , la VP debe propagarse por todo el proceso antes que este esquema de control inicie una acción con el fin de compensar este efecto [8].

A continuación vemos el ejemplo del feedforward en un intercambiador de calor (ver Figura 6.39);

Figure 6.39: Feedforward en un intercambiador de calor

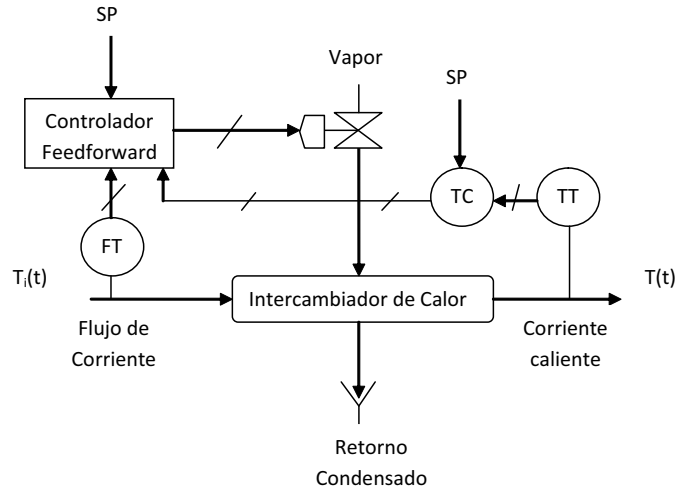


FT=Temperatura de adelanto, es decir tomada antes del intercambiador de calor.

En conclusión el objetivo del feedforward es medir las VP y compensarlas antes que la VC se desvíe de su SP; ello ocasiona un efecto minimizado de las VP sobre la VC.

A continuación de ilustra en la figura el empleo de las dos estrategias de control la cual es mas eficiente, feedback + feedforward (ver Figura 6.40).

Figure 6.40: Feedback+feedforward en un intercambiador de calor



Una ventaja de esta combinación es que es más eficiente pero la implementación de estas estrategias es más costosa y demandante de esfuerzo.

## 6.12 NECESIDAD DEL MODELO MATEMÁTICO

El gobierno de un proceso se reduce al establecimiento de la secuencia de acciones de mando que debe aplicársele para que el funcionamiento sea el requerido. La toma de decisión sobre la señal que debe aplicarse al sistema implica que existan distintas alternativas. Es decir, que existan distintas acciones posibles cada una de las cuales daría un resultado distinto. El problema se reduce al de elegir entre estas señales, aquellas cuyo resultado sea el requerido.

Al existir distintas opciones respecto a la acción a tomar para gobernar el proceso, para realizar la elección conveniente de la señal de entrada que determine un funcionamiento requerido, es necesario que se sepa predecir que resultados se obtendría de cada una de las posibles acciones. Es decir, quien tome la decisión respecto a cual de las posibles acciones a tomar, debe predecir, las acciones que resultaran de cada una de sus posibles opciones, con el fin de escoger aquella señal de entrada a la que corresponda un resultado que sea el buscado.

Por lo tanto, se requiere el conocimiento exhaustivo de las relaciones que existen entre las posibles acciones a tomar sobre el sistema, y los resultados que determinaran cada una de ellas. Esto es lo que se llama un modelo matemático del proceso, y esta constituido por las relaciones formales que ligan a las variables de entrada y las variables de salida.

Por ejemplo, El conductor del automóvil, que es quien toma la decisión del posicionamiento de los distintos órganos que tiene a su alcance (volante, frenos, acelerador...) lo que hace en todo instante es prever cual será el resultado de las decisiones tomadas con el fin de mantener el proceso que gobierna (el automóvil), en un estado de marcha y funcionamiento requerido[1].

Para construir un modelo matemático de un proceso, se requiere establecer de una forma precisa, las magnitudes que lo definen (señales de entrada y de salida) así como las relaciones formales que ligan a estas magnitudes.

En la vida ordinaria, cuando se construyen modelos, de una manera subconsciente, para la toma de decisiones, estos no tienen el nivel de formalidad que se acaba de indicar. Sin embargo, cuando se quiere automatizar un proceso, es indispensable la construcción de estos modelos formales con el fin de poder trasladar el proceso de toma de decisión a una maquina construida para dicha función, con el fin de que este determine las acciones a tomar precisamente a partir del modelo del sistema del que disponga.

La posibilidad de construir un modelo del proceso que se este considerando, constituye una de las mayores limitaciones que a priori se pueden establecer respecto a la posibilidad de automatizar un determinado proceso. Considérese, por ejemplo, el problema del establecimiento de un tratamiento por un medico para uno de sus enfermos. En la medida en que fuese posible en primer lugar definir una serie de magnitudes que caracterizasen el estado del enfermo (temperatura, tensión arterial, resultados de análisis clínicos...) y de las relaciones formales que ligan a estas magnitudes, seria posible automatizar completamente el problema del establecimiento de un tratamiento, que no es sino determinar la acción a seguir sobre el enfermo para conseguir que la evolución del mismo estado de salud se realice en forma requerida[3].

En ciertos casos es posible establecerse un modelo matemático del proceso que ligue de una manera unívoca a cada una de las acciones a que tomen un único resultado. Se tiene entonces un sistema determinista. En otros casos, para cada una de las acciones posibles, no se tiene sino una predicción estadística de posibles resultados; se tienen entonces los llamados sistemas estocásticos.

### **6.12.1 las matemáticas y el control automático**

Las matemáticas tienen un doble empleo en las ciencias empíricas y aplicadas.,Las matemáticas pueden usarse como lenguaje cuando se pretende formular los problemas con la ayuda de conceptos matemáticos buscando con ello la precisión y claridad.,Las matemáticas pueden emplearse como herramientas cuando una vez planteado el problema en términos matemáticos se resuelven las ecuaciones que resultan (analíticamente o por simulación).

Por otra parte, cabe considerar que la ingeniería puede describirse como una mezcla de sentido común y ciencia. Se trata de recurrir a planteamientos teóricos que permitan profundizar en los problemas que se estén tratando, pero sin perder de vista que en último extremo de lo que se trata es de conseguir que algo funcione.

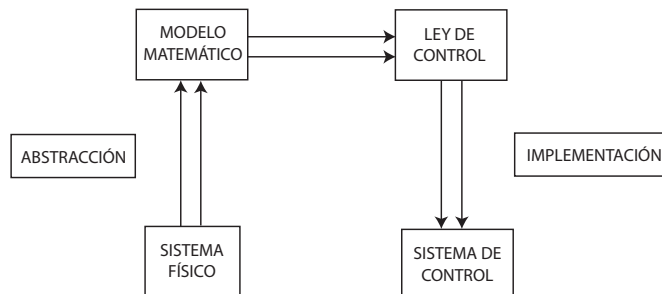
Estas consideraciones previas deben hacerse debido a que las matemáticas juegan un papel fundamental en la teoría moderna del control automático. Tan es así que en algún sentido puede considerarse la teoría del control automático como una rama de las matemáticas aplicadas.

### 6.12.2 Fases del método del control automático

La Figura 6.41 muestra la representación de las Fases del método de control, el cual es de vital importancia para el buen diseño de un sistema de control, en este se pueden definir algunas fases tales como:

1. A partir del proceso, por abstracción, se construye el modelo matemático del mismo. Esta primera fase no es específica del especialista en control, y requiere de la participación del especialista en el proceso a controlar.
2. Una vez obtenido el modelo matemático se determina que tipo de acción debe efectuarse sobre el mismo para que su comportamiento se adecue a las metas propuestas o requerimientos. Se trata de determinar, lo que se denomina ley de control.
3. Por ultimo, se trata de realizar físicamente, la ley de control determinada en el punto anterior para lo que se requiere la participación de instrumentos físicos que realicen esta función. En esta última fase se requiere de nuevo la participación del especialista en el proceso a controlar (en forma de instrumentista).

Figure 6.41: Fases del método de control

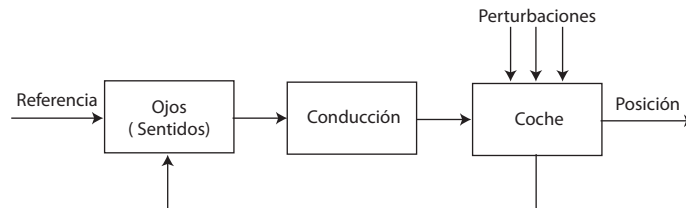


## 6.13 REALIMENTACIÓN, RETARDOS Y OSCILACIÓN

La existencia de retardos en un circuito de realimentación, conduce a la aparición de fenómenos oscilatorios en el comportamiento dinámico del mismo. Este hecho tiene una importancia vital al considerar el comportamiento dinámico de los sistemas realimentados y gran parte del problema de diseño de los mismos reside en el amortiguamiento (o anulación) de estas oscilaciones.

Con el fin de ilustrar de una manera intuitiva este hecho, considérese a un conductor que conduce un automóvil, proceso que se puede interpretar con un circuito con realimentación o lazo cerrado, Tal como se muestra en la Figura 6.42. Entre la detección de un obstáculo, y la acción correctora consiguiente (girar el volante, actuar sobre los frenos...), se produce un cierto retardo que el conductor experimentado tiene perfectamente asimilado, y no constituye un obstáculo para una conducción normal.

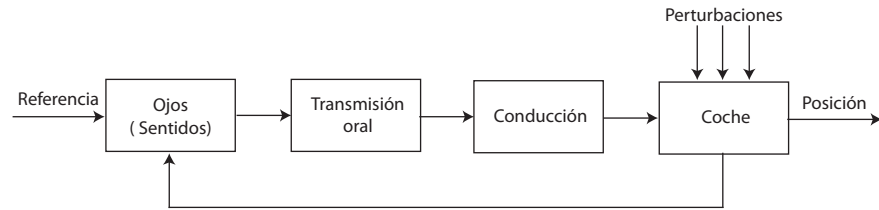
Figure 6.42: Ejemplo de realimentación



Supóngase que se trata de mantener el coche en línea recta sobre una superficie completamente llana, sin ningún obstáculo. Sobre el automóvil solo actúan las pequeñas perturbaciones (baches) del terreno y el conductor puede conseguir su objetivo con relativa facilidad.

Supóngase ahora que el conductor debe realizar su cometido con los ojos cerrados, llevando a su lado un copiloto que es el que le va transmitiendo las indicaciones respecto a las desviaciones de la línea recta que se trata de seguir. El circuito de realimentación se modifica con respecto al caso anterior, Tal como se muestra en la Figura 6.43, con ello lo que se ha introducido es de una manera artificial un notable retardo en el lazo de realimentación. Es fácil comprender, que en este segundo caso, y debido precisamente al retraso que se introduce en el lazo de realimentación, la conducción sería fuertemente oscilante.

Figure 6.43: Ejemplo de oscilaciones y retardos



Un hecho importante que ilustra también el anterior ejemplo es que cuanto mayor sea la velocidad a la que pretende conducirse el automóvil, mayores serán los efectos de oscilación que se han indicado. El dilema entre velocidad de respuesta (precisión) y estabilidad (ausencia de oscilaciones), constituye una de las constantes que aparecen en el estudio de sistemas realimentados.

## Capítulo 7

# SISTEMAS DINÁMICOS

### 7.1 INTRODUCCION

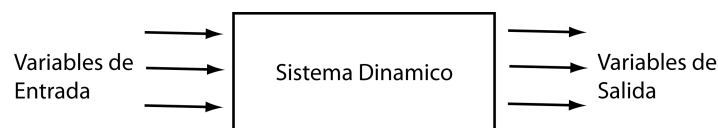
Un sistema es una combinación de componentes que actúan conjuntamente para alcanzar un objetivo específico y se llama dinámico si salida en el presente depende de una entrada en el pasado (figura 7.1).

Cualquier tentativa de diseño debe empezar a partir de una predicción de su funcionamiento antes de que el sistema pueda diseñarse en detalle o construirse físicamente, dicha predicción se base en una descripción matemática de las características dinámicas del sistema, a esta descripción matemática se le llama modelo matemático, la mayoría de los modelos que resultan útiles se describen en termino de ecuaciones diferenciales.

El procedimiento para obtener un modelo matemático de un sistema puede resumirse de la siguiente manera:

1. Dibujar un diagrama esquemático del sistema y definir las variables.
2. Utilizando las leyes físicas, escribir ecuaciones para cada componente, combinándolos de acuerdo con el diagrama del sistema y así obtener un modelo matemático.

Figura 7.1: Sistema dinámico



3. Para verificar la validez del modelo, la predicción acerca del funcionamiento obtenida al resolver las ecuaciones del modelo es necesario compararlo con resultados experimentales.

La dinámica de sistemas trata del modelado matemático y el análisis de la respuesta de los sistemas dinámicos.

- Las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse en ecuaciones diferenciales lineales y no lineales. Las ecuaciones diferenciales lineales pueden clasificarse en ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo (1) y ecuaciones lineales variantes en el tiempo (2). Una ecuación diferencial lineal invariante en el tiempo es aquella en la cual una variable dependiente y sus derivadas aparecen como combinaciones lineales, debido a que los coeficientes de todos los términos son constantes, también se le denomina ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes. En el caso de una ecuación diferencial lineal variante en el tiempo, la variable dependiente y sus derivadas aparecen como combinaciones lineales, pero algunos de los coeficientes pueden involucrar a la variable independiente. Es necesario recordar que con objeto de que sea lineal no debe contener potencias, productos u otras funciones de las variables dependientes y sus derivadas

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 10x = 0 \quad (7.1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1 - \cos 2t)x = 0 \quad (7.2)$$

- Una ecuación se denomina no lineal, cuando no cumple con las condiciones mencionadas anteriormente en las derivadas y variables dependiente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (7.3)$$

La propiedad más importante de los sistemas lineales consiste en que se les puede aplicar el principio de superposición, el cual establece que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos funciones de excitación diferentes, es la suma de dos respuestas individuales, en consecuencia la respuesta a varias entradas puede calcularse tratando una entrada cada vez y después sumando los resultados. Es necesario tener presente que en los sistemas físicos los llamados sistemas lineales cumplen con dicha condición dentro de un rango de operación limitado.

En los sistemas no lineales no es posible aplicar el principio de superposición, por lo que encontrar la solución a tales sistemas es extremadamente complicado, a causa de la dificultad matemática con frecuencia es necesario linealizarlos alrededor de una condición de operación.

## 7.2 MODELADO

### 7.2.1 Sistemas Mecánicos

Para cualquier sistema mecánico se puede desarrollar un modelo matemático, aplicando al sistema las leyes de Newton, las ecuaciones de Lagrange, el método de las energías, trabajo virtual, entre otros métodos. Para el modelado matemático de este tipo de sistemas se necesitan tres tipos de elementos básicos: elemento de inercia, de resorte y elementos amortiguadores.

- Por *elementos de inercia* se entiende por las masas y los momentos de inercia.
- *Elementos de un resorte*: Un resorte lineal es un elemento mecánico que puede ser deformado por una fuerza externa tal que la deformación sea directamente proporcional a la fuerza o par que se le aplique. La constante del resorte indica rigidez, un gran valor de  $k$  corresponde a un resorte duro y un valor pequeño a un resorte suave.

$$k = \frac{\text{Cambio en la fuerza}}{\text{Cambio en el desplazamiento del resorte}} \quad (7.4)$$

$$F = kx = (x_1 - x_2) \quad (7.5)$$

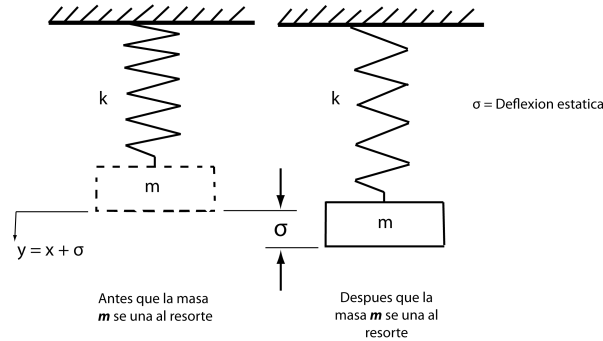
- *Elementos amortiguadores*: Un amortiguador es un elemento mecánico que disipa energía en lugar de almacenarla, en forma de calor que fluye al ambiente.

$$b = \frac{\text{Cambio en la fuerza}}{\text{Cambio en la velocidad}} \quad (7.6)$$

$$F = b\dot{x} = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (7.7)$$

**Sistema masa – resorte:** Describe un sistema que consiste en una masa y un resorte; para el movimiento vertical la masa está suspendida por el resorte y actúan dos fuerzas sobre la masa: la fuerza del resorte  $kx$  y la fuerza gravitacional  $mg$ .

Figura 7.2: Sistema masa - resorte



En la figura 7.2, la dirección positiva del desplazamiento es orientada hacia abajo y la fuerza gravitacional jala a la masa hacia abajo, si se jala a la masa hacia abajo aplicando fuerza externa y luego se suelta, la fuerza del resorte actúa en el sentido opuesto y tiende a jalar la masa hacia arriba; así que mediante la aplicación de la segunda ley de Newton, se obtiene la ecuación del movimiento

$$m\ddot{y} = \sum \text{fuerzas} = -ky + mg \quad (7.8)$$

$$m\ddot{y} = -ky + mg \quad (7.9)$$

La fuerza gravitacional es estáticamente opuesta por la deflexión  $\delta$  de equilibrio del resorte, al medir el desplazamiento desde una posición de equilibrio, el término  $mg$  puede descartarse de la ecuación de movimiento, debido a que  $k\delta = mg$  y sustituyendo  $y = x + \delta$  en la ecuación anterior, se obtiene

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (7.10)$$

El cual es un modelo matemático del sistema; a dicho sistema se le llama sistema de segundo orden, debido a que está gobernado por una ecuación diferencial de segundo orden.

**Vibración Libre:** En el sistema ilustrado en la figura 6.1, supóngase que la masa se jala hacia abajo y luego se suelta en condiciones iniciales arbitrarias  $x(0)$  y  $\dot{x}(0)$ , en este caso la masa oscilará y el movimiento será periódico. Para encontrar la solución es necesario suponer que  $x(t)$  tiene una forma exponencial o sinusoidal.

Para esta situación se supondrá que  $x(t)$  esta en forma exponencial

$$x(t) = Ke^{\lambda t} \quad (7.11)$$

Sustituyendo la en la ecuación (16.8)

$$mK\lambda^2 e^{\lambda t} + kKe^{\lambda t} \quad (7.12)$$

Dividiendo a ambos lados entre  $Ke^{\lambda t}$

$$m\lambda^2 + k = 0 \quad (7.13)$$

La cual es la ecuación característica del sistema y se obtiene

$$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7.14)$$

Estos valores de  $\lambda$  satisfacen la solución propuesta, puesto que la ecuación diferencial de segundo orden debe tener dos constantes arbitrarias en su solución, se puede escribir la solución general  $x(t)$  como

$$x(t) = K_1 e^{j\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)t} + K_2 e^{-j\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)t} \quad (7.15)$$

Aplicando la formula de Euler para expresar las funciones exponenciales en términos de funciones seno y coseno:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (7.16)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t \quad (7.17)$$

Entonces la solución general  $x(t)$  se hace

$$x(t) = A \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t + B \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \quad (7.18)$$

$$x(t) = C \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi \right) \quad (7.19)$$

$$\phi = -\arctan \frac{A}{B} \quad (7.20)$$

A y B son ahora constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales  $x(0)$  y  $\dot{x}(0)$ , para determinar las constantes A y B en términos de las condiciones iniciales sustituimos  $t = 0$

$$x(0) = B \quad (7.21)$$

$$\dot{x}(0) = A \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7.22)$$

$$x(t) = \dot{x}(0) \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t + x(0) \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \quad (7.23)$$

El movimiento periódico descrito por esta última ecuación se denomina movimiento armónico simple; si las condiciones iniciales son  $x(0) = x_0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ , entonces el desplazamiento estaría dado por

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \quad (7.24)$$

El periodo y la frecuencia de un movimiento armónico simple pueden definirse así

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (7.25)$$

$$f = \frac{1}{T} \quad (7.26)$$

La frecuencia natural es la frecuencia de vibración libre de un sistema sin amortiguamiento, si la frecuencia se mide en hertz (Hz) o ciclos por segundo (cps) se representa  $f_n$  y si se mide en radianes por segundo (rad/s) se representa  $w_n$

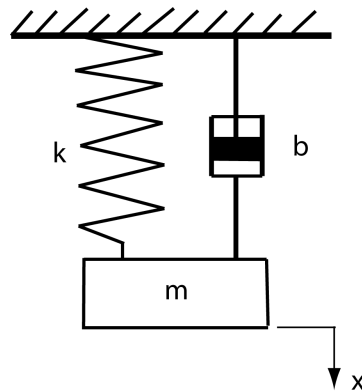
$$w_n = 2\pi f_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7.27)$$

El modelo matemático que corresponde al sistema

$$\ddot{x} + w_n^2 x = 0 \quad (7.28)$$

**Sistema masa-resorte-amortiguador:** La mayor parte de los sistemas físicos constan de algún tipo de amortiguamiento (viscoso, seco, magnético, etc.), el amortiguamiento no solo retarda el movimiento sino que dado el caso, causa que se detenga.

Figura 7.3: Sistema masa - resorte - amortiguador



Suponiendo que la masa de la figura 7.3, se jala hacia abajo y luego se suelta; si el amortiguamiento es ligero, ocurrirá un movimiento vibratorio (sistema subamortiguado), si el amortiguamiento es fuerte, no ocurre movimiento vibratorio (sistema sobreamortiguado) y si el sistema se encuentra entre los dos anteriores casos es un sistema críticamente amortiguado;

independiente de qué forma este amortiguado el sistema, la presencia del amortiguador la vibración libre disminuirá con el tiempo (transitoria).

En el sistema mostrado en la figura 7.3, en el movimiento vertical están actuando tres fuerzas sobre la masa: la fuerza del resorte, la fuerza amortiguadora y la fuerza gravitacional, pero como ya se dijo anteriormente la fuerza gravitacional no participa en la ecuación del movimiento.

$$m\ddot{x} = \sum \text{fuerzas} = -kx - b\dot{x} \quad (7.29)$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (7.30)$$

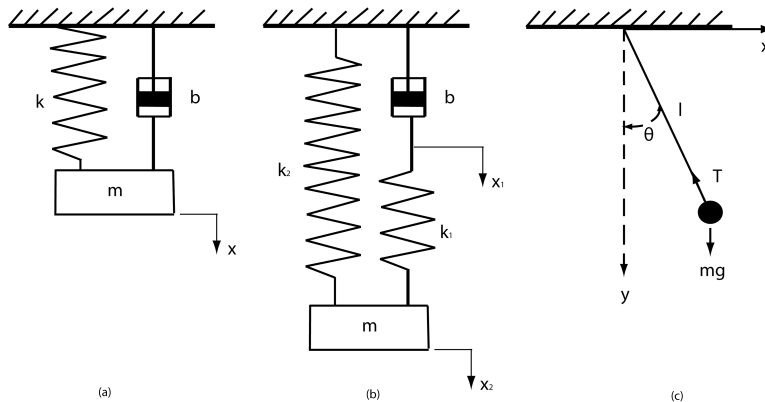
Esta ecuación describe el movimiento del sistema y es también un modelo matemático del sistema.

Sistemas mecánicos con dos o más grados de libertad:

El número de grados de libertad que posee un sistema mecánico es el número mínimo de coordenadas independientes requeridas para especificar las posiciones de todos sus elementos.

$$\text{Numero de grados de libertad} = (\text{Numero de ecuaciones}) - (\text{Numero de restricciones}) \quad (7.31)$$

Figura 7.4: Grados de libertad



En la figura 7.4(a) la masa está restringida a moverse verticalmente, solo requiere de una coordenada x para definir la localización de la masa en cualquier momento, así que el sistema

tiene un grado de libertad. El sistema tiene una ecuación de movimiento y cero de ecuaciones de restricción por lo que:

$$\text{Grados de libertad} = 1 - 0 = 1 \quad (7.32)$$

En la figura 7.4(b) las ecuaciones de movimiento son

$$m\ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) + k_2x_1 = 0 \quad (7.33)$$

$$k_1(x_1 - x_2) = b_1\dot{x}_2 \quad (7.34)$$

Por lo tanto el número de ecuaciones de movimiento es dos y no hay ecuaciones de restricción.

$$\text{Grados de libertad} = 2 - 0 = 2 \quad (7.35)$$

El sistema de péndulo de la figura 7.4(c) las ecuaciones de movimiento son

$$m\ddot{x} = T \sin \theta \quad (7.36)$$

$$m\ddot{y} = mg - T \cos \theta \quad (7.37)$$

La ecuación de restricción es

$$x^2 + y^2 = l^2 \quad (7.38)$$

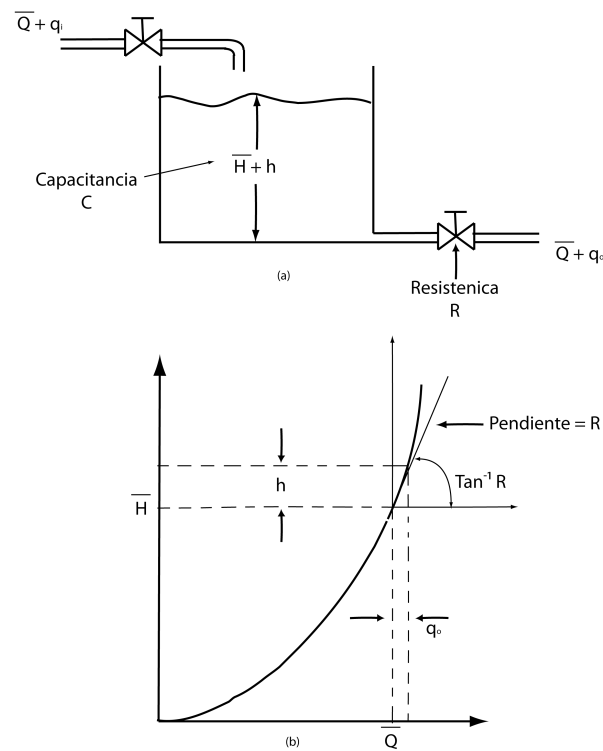
$$\text{Grados de libertad} = 2 - 1 = 1 \quad (7.39)$$

## 7.2.2 Sistemas hidraulicos

### 7.2.2.1 Llenado de tanques

Modelo para nivel de liquido: Según el sistema mostrado en la figura 7.5.

Figura 7.5: Llenado de tanques



Si la variación de la altura y la razón de flujo varían poco respecto al periodo de tiempo considerado, puede encontrarse fácilmente un modelo matemático en términos de resistencia y capacitancia. (Flujo turbulento)

$\bar{H}$  = Altura en estado estable

$h$  = Desviación de altura de su valor en estado estable

$\bar{Q}$  = Caudal en estado estable

$q_i$  = Desviación del caudal de entrada en estado estable

$q_o$  = Desviación del caudal de salida en estado estable

El cambio en el líquido almacenado en el tanque durante  $dt$  segundos es igual al flujo de entrada neto al tanque durante los mismo  $dt$  segundos y por lo tanto

$$Cdh = (q_i - q_o) dt \quad (7.40)$$

La resistencia del flujo a través de una válvula por definición es

$$R = \frac{dH}{dQ} \quad (7.41)$$

Donde para el flujo turbulento  $Q$  está relacionado con  $H$  por

$$Q = K\sqrt{H} \quad (7.42)$$

Si la condición de operación varía un poco durante el periodo de operación, entonces el valor de la resistencia  $R$  puede considerarse constante durante el periodo de operación entero y el sistema puede ser linealizado usando un valor de resistencia promedio. En el sistema definimos las desviaciones de altura en estado estable y de la razón de cambio de salida así

$$dH = h \quad (7.43)$$

$$dQ = q_o \quad (7.44)$$

La resistencia promedio puede escribirse como

$$R = \frac{dH}{dQ} = \frac{h}{q_o} \quad (7.45)$$

Sustituyendo en la ecuación 16.17 obtenemos

$$C \frac{dh}{dt} = q_i - \frac{h}{R} \quad (7.46)$$

$$RC \frac{dh}{dt} + h = Rq_i \quad (7.47)$$

### 7.2.2.2 Potencia Fluida

● **Circuitos hidráulicos:** Los circuitos hidráulicos son capaces de producir muchas combinaciones diferentes de movimiento y fuerza, sin embargo en esencia son lo mismo, independiente de su aplicación. Estos circuitos están formados por cuatro componentes básicos: un depósito para el fluido hidráulico, una o más bombas para forzar al fluido a través del circuito, válvulas para controlar la presión del fluido y su flujo, y un o unos actuadores para convertir la energía hidráulica en energía mecánica para hacer el trabajo.

● **Unidad de potencia hidráulica:** Una unidad de potencia hidráulica incluye componentes tales como un depósito, filtros, un motor eléctrico para impulsar una bomba y una válvula de control de presión máxima.

El depósito, que funciona como fuente de fluido hidráulico, debe ser lo suficientemente grande para almacenar el mayor volumen de líquido que el sistema puede necesitar, además debe estar completamente cerrado con el objeto de mantener el fluido limpio. Para remover las partículas extrañas del fluido hidráulico, se utilizan rejillas, filtros y bujías magnéticas, asegurando de ese modo la larga vida y el funcionamiento sin dificultades del sistema hidráulico.

Utilizadas para convertir energía mecánica en energía hidráulica, las bombas hidráulicas pueden clasificarse como bombas de desplazamiento positivo y bombas de desplazamiento no positivo, la mayoría de bombas utilizadas en sistemas hidráulicos son bombas de desplazamiento positivo. Hay cuatro tipos de bombas de desplazamiento positivo comúnmente usadas en los sistemas hidráulicos.

1. Bombas de piston axial
2. Bombas de piston radial
3. Bombas de paletas

#### 4. Bombas de engranes

● **Acumuladores:** Almacena fluido a presión proveniente de una bomba hidráulica, este componente se usa a menudo en circuitos hidráulicos para tener disponible el fluido a presión ante la demanda y para suavizar las pulsaciones en el flujo.

● **Actuadores:** Realizan la función opuesta a las bombas hidráulicas en el sentido que convierten la energía hidráulica en energía mecánica con el objeto de permitir el trabajo útil.

● **Válvulas hidráulicas de control:** Es un dispositivo que utiliza movimiento mecánico para controlar la dirección del flujo del fluido hacia el actuador.

● **Ventajas de los sistemas hidráulicos:**

1. El fluido hidráulico actúa como lubricante, además de transportar el calor generado en el sistema hasta un intercambiador de calor conveniente.
2. Los actuadores hidráulicos de tamaño comparativamente pequeño pueden desarrollar grandes fuerzas o pares.
3. Los actuadores hidráulicos tienen una mayor velocidad de respuesta con arranques, paros e inversiones de velocidad.
4. Los actuadores hidráulicos pueden operarse sin dañarse en condiciones continuas, intermitentes, inversoras y de paro.
5. La disponibilidad de actuadores lineales y rotatorios ofrece flexibilidades en el diseño
6. Por el escaso escurrimiento en los actuadores hidráulicos, la caída de velocidad es pequeña cuando se aplica carga.

● **Desventajas de los sistemas hidráulicos:**

1. La potencia hidráulica no está tan fácilmente disponible comparada con la potencia eléctrica.
2. El costo de un sistema hidráulico puede ser mayor que un sistema eléctrico semejante que realice una función similar.
3. Existen riesgos de fuego y explosión a menos que se usen fluidos a prueba de incendio.

4. Dificultad en mantener el sistema hidráulico libre de escurrimientos, por lo que el sistema tiende a ser sucio.
5. El aceite contaminado puede causar fallas en el funcionamiento correcto de un sistema hidráulico.

• **Propiedades de los fluidos hidráulicos:** Tienen un efecto importante en el funcionamiento de los sistemas hidráulicos, además de servir como un medio para la transmisión de potencia, el fluido hidráulico debe mantener al mínimo el desgaste de las partes móviles proveyendo una lubricación satisfactoria. En la práctica los aceites basados en el petróleo con aditivos son los fluidos hidráulicos más comúnmente utilizados debido a que ofrecen buena lubricación para las partes móviles en el sistema y son casi incompresibles.

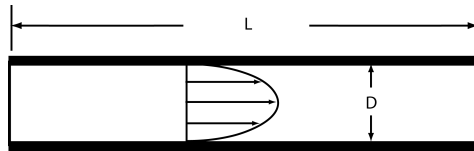
- Densidad: La densidad de masa  $\rho$  de una sustancia es su masa por unidad de volumen.
- Volumen específico: Es el recíproco de la densidad; es el volumen ocupado por una unidad de masa de fluido,  $v$
- Peso específico: Es el peso de la sustancia por unidad de volumen,  $\gamma$
- Densidad específica: Es la relación de su peso con respecto al peso de un volumen igual de agua a la presión atmosférica y temperatura estándar
- Viscosidad: Es la propiedad más importante del fluido hidráulico, es una medida de la fricción interna o de la resistencia del fluido. Una viscosidad baja significa un incremento en las pérdidas por fugas y una alta viscosidad implica una operación lenta. En los sistemas hidráulicos, las viscosidades disponibles están limitadas por las características de operación de la bomba, motor y válvulas, tanto como por las temperaturas del ambiente y de operación, debido a que la viscosidad de un líquido decrece con la temperatura.

• **Numero de Reynolds:** Las fuerzas que afectan el flujo de un fluido son debidas a la gravedad, la flotación, la inercia del fluido, la viscosidad, la tensión superficial y factores semejantes, en muchas situaciones de flujo, las fuerzas resultantes de la inercia del fluido y la viscosidad son las más significativas. La relación adimensional de la fuerza de inercia con respecto a la fuerza viscosa se llama número de Reynolds, por lo que un número de Reynolds grande indica el predominio de la fuerza de inercia y un número pequeño el predominio de la viscosidad.

$$\mathbb{R} = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{4\rho Q}{\pi\mu D} \quad (7.48)$$

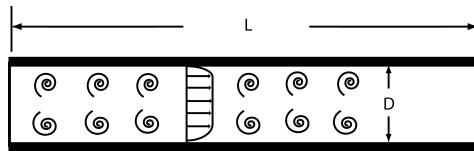
**Flujo Laminar:** Un flujo dominado por la fuerza de viscosidad se llama flujo laminar, está caracterizado por un movimiento del flujo suave, según líneas paralelas, como se puede observar en la figura 7.6; expresado con el numero de Reynolds  $\mathbb{R} \leq 2000$ .

Figura 7.6: Flujo laminar



**Flujo Turbulento:** Cuando dominan las fuerzas de inercia se tiene un flujo turbulento y está caracterizado por un movimiento del flujo irregular y con remolinos, como se puede observar en la figura 7.7. Para un número de Reynolds  $\mathbb{R} \geq 4000$ .

Figura 7.7: Flujo turbulento



● **Ecuaciones de continuidad:** Se obtienen aplicando el principio de conservación de la masa del flujo, este principio establece que la masa dentro de un sistema permanece constante con el tiempo.

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \quad (7.49)$$

$$Q_1 = V_1 A_1 \quad (7.50)$$

$$Q_2 = V_2 A_2 \quad (7.51)$$

Para flujo estable incompresible

$$\rho_1 = \rho_2 \quad (7.52)$$

$$Q_1 = Q_2 \quad (7.53)$$

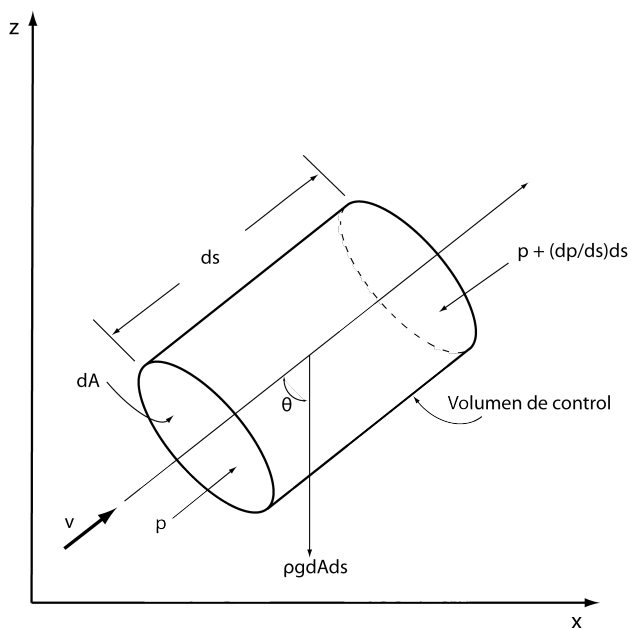
Por lo tanto

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad (7.54)$$

Esto significa que la razón de cambio del flujo de un líquido en un tubo es constante en cualquier sección transversal.

- **Ecuación de movimiento de Euler:**

Figura 7.8: Modelo de euler



Considerando el tubo de corriente infinitesimal de longitud  $ds$  de la figura 7.8. Y considerando el volumen de control compuesto por la pared del tubo de corriente entre las

secciones 1 y 2 más las áreas de las secciones 1 y 2 que son normales al tubo de corriente. Para simplificar el análisis, se asumirá que la viscosidad es cero.

La masa del fluido en el volumen de control es  $\rho dA ds$  y la aceleración de esta masa es  $\frac{dv}{dt}$ . La fuerza de presión que actúa sobre la sección 1 en la dirección positiva de  $s$  es  $p dA$  y la que actúa en la sección 2 en la dirección negativa de  $s$  es  $\left(p + \left(\frac{dp}{ds}\right) ds\right) dA$ . La fuerza de gravedad es  $\rho g dA$ . Aplicando la segunda ley de Newton.

$$m \frac{dv}{dt} = p dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds\right) dA - \rho g dA ds \cos \theta \quad (7.55)$$

Donde  $m = \rho dA ds$

$$\rho dA ds \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial s} ds dA - \rho g dA ds \cos \theta \quad (7.56)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \cos \theta \quad (7.57)$$

Para la velocidad  $v = v(s, t)$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} = v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (7.58)$$

Al combinar las ecuaciones 16.20 y 16.26

$$v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \cos \theta \quad (7.59)$$

Observando que  $\cos \theta = \frac{\partial z}{\partial s}$ , donde  $z$  es el desplazamiento vertical, la ecuación 16.30 se puede escribir.

$$v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} = 0 \quad (7.60)$$

La cual es la ecuación de movimiento de Euler; en flujo estable  $\frac{dv}{dt} = 0$  y la ecuación 16.29 se simplifica a

$$v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} = 0 \quad (7.61)$$

Como  $v$ ,  $p$  y  $z$  son función de  $s$  la ecuación 16.37 puede reescribirse como

$$v \frac{dv}{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} + g \frac{dz}{ds} = 0 \quad (7.62)$$

$$v dv + \frac{dp}{\rho} + g dz = 0 \quad (7.63)$$

La cual es la ecuación de movimiento de Euler para flujo estable.

• **Ecuación de Bernoulli:** Para flujo estable, sin fricción e incompresible la ecuación de movimiento de Euler para flujo estable se puede integrar.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constante} \quad (7.64)$$

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{constante} \quad (7.65)$$

$$\gamma = \rho g \quad (7.66)$$

Al igual que en los sistemas mecánicos y eléctricos, hay tres tipos de elementos básicos en los sistemas hidráulicos: elementos resistivos, elementos capacitivos y elementos de inercia.

*Resistencia:* Se define como el cambio en potencial requerido para producir un cambio unitario en la corriente, razón de flujo o velocidad. En flujo de tuberías, orificios o cualquier otro dispositivo resistor de flujo, el cambio en potencial corresponde ya sea a la presión o a la altura y la razón de flujo puede ser la razón de caudal.

$$\text{Resistencia} = \frac{\text{Cambio en potencial}}{\text{Cambio en corriente razon de flujo o velocidad}} \quad (7.67)$$

$$\text{Resistencia} = \frac{\text{Cambio en potencial}}{\text{Cambio en presion}} = \frac{\text{N/m}^2}{\text{m}^2/\text{s}} \quad (7.68)$$

$$\text{Resistencia} = \frac{\text{Cambio en altura}}{\text{Cambio en caudal}} = \frac{m}{\text{m}^2/\text{s}} \quad (7.69)$$

*Capacitancia:* Se define como el cambio en la cantidad de material o distancia requerida para producir un cambio unitario en potencial. En un sistema de tanque lleno de líquido, la cantidad de material puede ser el volumen del líquido, y el potencial puede ser la presión o la altura.

$$\text{Capacitancia} = \frac{\text{Cambio en cantidad de sustancia o material}}{\text{Cambio en potencial}} \quad (7.70)$$

$$\text{Capacitancia} = \frac{\text{Cambio en volumen}}{\text{Cambio en presion}} = \frac{\text{m}^3}{\text{N/m}^2} \quad (7.71)$$

$$\text{Capacitancia} = \frac{\text{Cambio en volumen}}{\text{Cambio en altura}} = \frac{\text{m}^3}{m} \quad (7.72)$$

*Inertancia:* Se define como el cambio en potencial necesario para producir una razón de cambio unitaria en la razón de flujo, la velocidad o la corriente.

$$\text{Inertancia} = \frac{\text{Cambio en potencial}}{\text{Cambio en caudal por segundo}} \quad (7.73)$$

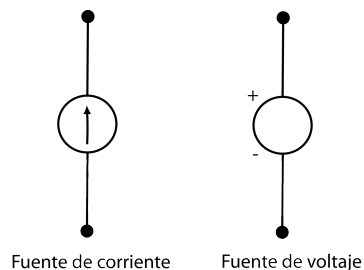
$$\text{Inertancia} = \frac{\text{Cambio en presion}}{\text{Cambio en caudal por segundo}} = \frac{\text{N/m}^2}{\text{m}^3/\text{s}} \quad (7.74)$$

$$\text{Inertancia} = \frac{\text{Cambio en altura}}{\text{Cambio en caudal por segundo}} = \frac{m}{\text{m}^3/\text{s}} \quad (7.75)$$

### 7.2.3 Sistemas electricos

- El *voltaje* en los sistemas eléctricos es análogo a la presión en los sistemas hidráulicos o neumáticos, esta es la fuerza electromotriz requerida para producir un flujo de corriente en un alambre. La unidad es el volt (v).
- La *carga eléctrica* es la integral de la corriente con respecto al tiempo, la unidad de carga es el coulomb (C), el cual es la cantidad de carga transferida en un segundo por una corriente de una ampere.
- La *corriente* hace referencia a la razón de cambio del flujo de carga, la unidad es el ampere.
- La *resistividad* se define como el cambio en voltaje requerido para producir un cambio unitario en la corriente, la unidad es el Ohm ( $\Omega$ )
- La *capacitancia* es una medida de la cantidad de carga que puede almacenarse para un voltaje dado entre las placas, la unidad es el farad (F).
- La *inductancia* es la relación entre el voltaje inducido y la razón de cambio de la corriente, la unidad es el henry (H)
- Por *fuerza de corriente* se entiende una fuente de energía que produce un valor específico de corriente, usualmente como función del tiempo, esta es capaz de suministrar una corriente específica independiente del voltaje a través de la fuente.
- La *fuerza de voltaje* es una fuente de energía que suministra un valor específico de voltaje en función del tiempo, en forma completamente independiente de la corriente

Figura 7.9: Representación de las fuentes de poder



- **Elementos básicos de los circuitos eléctricos:** Se encuentran tres tipos de sistemas básicos en los circuitos eléctricos: elementos resistivos, elementos capacitivos y elementos inductivos.

*Elementos resistivos:* Los resistores no almacenan energía eléctrica en forma alguna pero en su lugar la disipan en forma de calor.

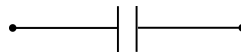
Figura 7.10: Representación de una resistencia



$$\text{Resistencia } (R) = \frac{\text{Cambio en voltaje}}{\text{Cambio en corriente}} \quad (7.76)$$

*Elementos capacitivos:* Dos elementos conductores separados por un medio no conductor (aislante o dieléctrico) forman un capacitor.

Figure 7.11: Representación de una capacitancia



$$\text{Capacitancia } (C) = \frac{\text{Cambio en cantidad de carga eléctrica}}{\text{Cambio en voltaje}} \quad (7.77)$$

*Elementos Inductivos:* Alrededor de una carga en movimiento o corriente hay una región de influencia que se llama campo magnético, si el circuito se encuentra en un campo magnético variante con respecto al tiempo, se induce una fuerza electromotriz en el circuito.

Figura 7.12: Representación de un inductor



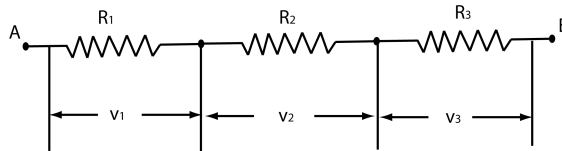
$$\text{Inductancia } (L) = \frac{\text{Cambio en voltaje inducido}}{\text{Cambio en corriente por segundo}} \quad (7.78)$$

• **Ley de Ohm:** Establece que la corriente en un circuito es proporcional a la fuerza electromotriz total (fem) que actúa sobre el circuito e inversamente proporcional a la resistencia total del circuito.

$$i = \frac{v}{R} \quad (7.79)$$

• **Circuitos en serie:** La resistencia combinada de resistores conectados en serie es la suma de las resistencias por separado.

Figura 7.13: Circuito en serie



$$v = v_1 + v_2 + v_3 \quad (7.80)$$

$$v_1 = iR_1 \quad (7.81)$$

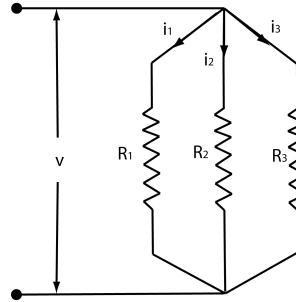
$$v_2 = iR_2 \quad (7.82)$$

$$v_3 = iR_3 \quad (7.83)$$

$$\frac{v}{i} = R_1 + R_2 + R_3 = R_t \quad (7.84)$$

• **Circuito en paralelo**

Figura 7.14: Circuito en paralelo



$$i_1 = \frac{v}{R_1} \quad (7.85)$$

$$i_2 = \frac{v}{R_2} \quad (7.86)$$

$$i_3 = \frac{v}{R_3} \quad (7.87)$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \quad (7.88)$$

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} = \frac{v}{R_t} \quad (7.89)$$

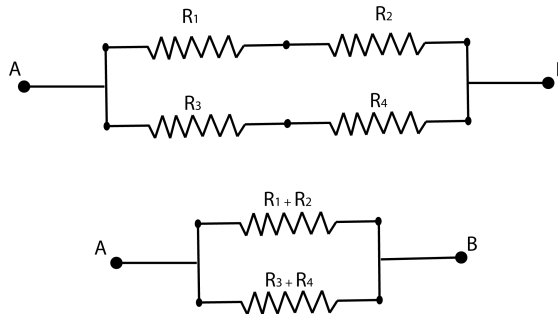
Por lo que la resistencia equivalente es

$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (7.90)$$

$$R_t = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (7.91)$$

- **Circuito combinado en serie y paralelo.**

Figura 7.15: Circuito combinado



El circuito mostrado en la figura 7.15 se puede considerar como un circuito en paralelo que consta de las resistencias  $(R_1 + R_2) + (R_3 + R_4)$ , por lo tanto la resistencia total es

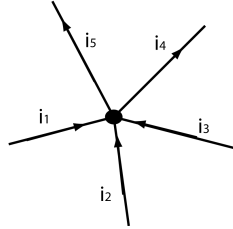
$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} \quad (7.92)$$

$$R_t = \frac{(R_1 + R_2) + (R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \quad (7.93)$$

• **Leyes de Kirchhoff:** En la solución de problemas de circuitos que involucran muchas fuerzas electromotrices, resistencias, capacitancias, inductancias y demás, es necesario el uso de las leyes de Kirchhoff, hay dos leyes: la ley de corrientes (ley de nodos) y la ley de voltajes (ley de mallas).

- Ley de nodos: Un nodo en un circuito eléctrico es un punto donde tres o más conductores se unen entre sí. La ley de corrientes de Kirchhoff establece que la suma algebraica de todas las corrientes que entran al nodo o salen de él, es cero. Al aplicar la ley deben considerarse las siguientes reglas, las corrientes que van hacia el nodo deben estar precedidas por un signo más y las corrientes que van hacia afuera del nodo deben estar precedidas por un signo menos.

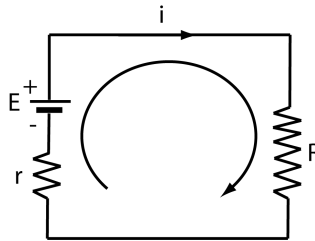
Figura 7.16: Nodo



$$i_1 + i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0 \quad (7.94)$$

- **Ley de mallas:** Establece que en cualquier instante dado del tiempo la suma algebraica de los voltajes alrededor de una malla cualquiera en circuito eléctrico es cero. Al aplicar la ley deben considerarse las siguientes reglas, una elevación en el voltaje debe estar precedida de un signo más y una caída de voltaje debe estar precedida por un signo menos.

Figura 7.17: Malla

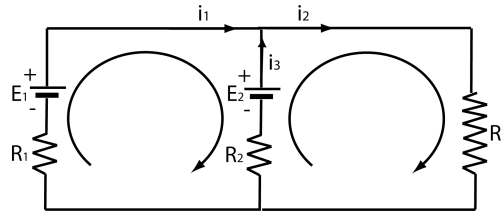


$$E - iR - ir = 0 \quad (7.95)$$

$$i = \frac{E}{R + r} \quad (7.96)$$

Circuitos con dos o mas mallas.

Figura 7.18: Circuito



En el punto A

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad (7.97)$$

Malla 1

$$E_1 - E_2 + i_3 R_2 - i_1 R_1 = 0 \quad (7.98)$$

Malla 2

$$E_2 - i_2 R_3 - i_3 R_2 = 0 \quad (7.99)$$

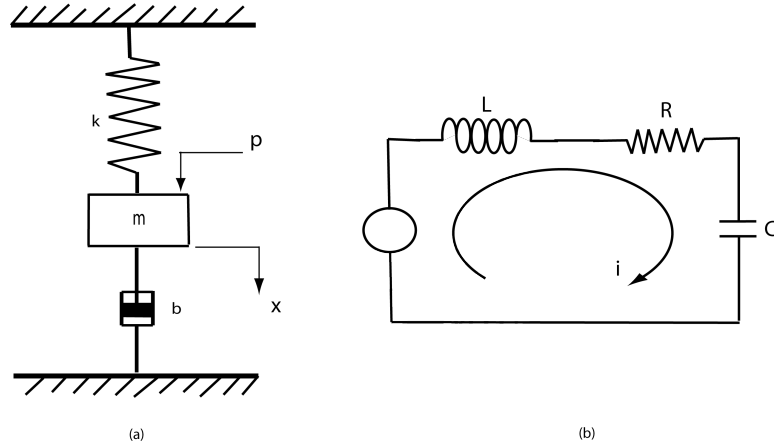
Sustituyendo y despejando las ecuaciones 16.47 y 16.43 en la ecuación 16.89

• **Sistemas análogos (equivalencias mecánicas):** Los sistemas pueden representarse mediante el mismo modelo matemático, pero que son diferentes físicamente se llaman sistemas análogos. Los sistemas análogos se describen mediante las mismas ecuaciones diferenciales o integrales diferenciales o conjuntos de ecuaciones.

Los sistemas mecánicos pueden estudiarse mediante el uso de sus análogos eléctricos, los cuales se construyen más fácilmente que los modelos del sistema mecánico correspondiente; hay dos tipos de analogías eléctricas: la analogía fuerza-voltaje y la analogía fuerza-corriente.

*Analogías fuerza - voltajes:* Para el sistema mecánico de la figura 7.19 se observa que su equivalencia eléctrica es un circuito en serie y la ecuación del sistema es:

Figura 7.19: Analogia fuerza - voltaje



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = p \quad (7.100)$$

Por lo tanto por ser sistemas analogos la ecuacion para el sistema electrico:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = v \quad (7.101)$$

En terminos de carga electrica q:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = v \quad (7.102)$$

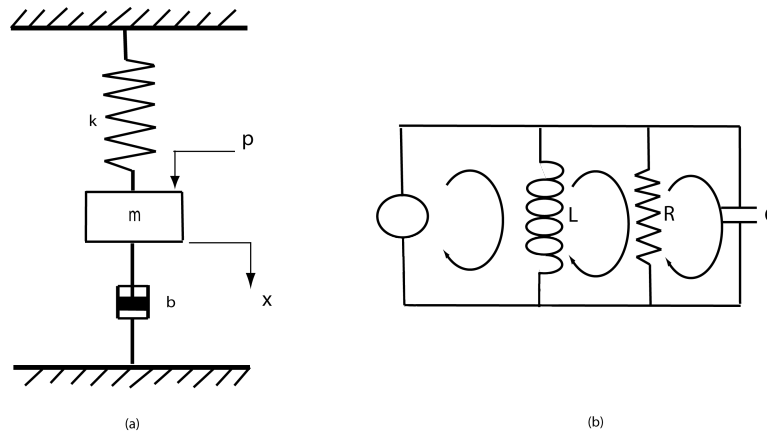
Comparando las ecuaciones diferenciales de los dos sistemas se puede concluir que son identicas, los termino que ocupan las posiciones correspondientes en las ecuaciones diferenciales se llaman cantidades analogas (ver tabla).

Cuadro 7.1: Analogia fuerza - voltaje

Sistemas Mecanicos	Sistemas Electricos
Fuerza $p$ (par $T$ )	Voltaje $V$
Masa $m$ (momento de inercia $j$ )	Inductancia $L$
Coefficiente de friccion $b$	Resistencia $R$
Coefficiente de resorte $k$	Reciproco de la capacitancia
Desplazamiento $x$	Carga $q$
Velocidad $\dot{x}$	Corriente $i$

*Analogias fuerza - corriente:* Para el sistema mecanico de la figura 7.20 se observa que su equivalencia electrica es un circuito en paralelo y la ecuacion del sistemas es:

Figura 7.20: Analogia fuerza - corriente



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = p \quad (7.103)$$

Aplicando las leyes de Kirchhoff:

$$i_L + i_R + i_C = i_T \quad (7.104)$$

$$i_L = \frac{1}{L} \int v dt \quad (7.105)$$

$$i_R = \frac{v}{R} \quad (7.106)$$

$$i_C = C \frac{dv}{dt} \quad (7.107)$$

Por lo tanto

$$i_T = \frac{1}{L} \int v dt + \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} \quad (7.108)$$

El flujo magnetico  $\psi$  esta relacionado con el voltaje mediante la ecuacion

$$\frac{d\psi}{dt} = v \quad (7.109)$$

$$i_T = C \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{L} \psi \quad (7.110)$$

Las cantidades analogas se pueden observar en la siguiente tabla:

Cuadro 7.3: Analogia fuerza - corriente

Sistemas Mecanicos	Sistemas Electricos
Fuerza $p$ (par $T$ )	Corriente $i$
Masa $m$ (momento de inercia $j$ )	Capacitancia $C$
Coficiente de friccion $b$	Reciproco de la resistencia $\frac{1}{R}$
Coficiente de resorte $k$	Reciproco de la capacitancia $\frac{1}{C}$
Desplazamiento $x$	Fujo Magnetico $\psi$
Velocidad $\dot{x}$	Voltaje $V$

$$i_1 = \frac{E_1 (R_2 + R_3) - E_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (7.111)$$

$$i_3 = \frac{E_2 (R_1 + R_3) - E_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (7.112)$$

$$i_2 = i_1 + i_3 = \frac{E_1 R_2 - E_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (7.113)$$

#### 7.2.4 Sistemas termicos

Los sistemas térmicos son aquellos que involucran la transferencia de calor de una sustancia a otra. Estos sistemas se analizan en términos de resistencia y capacitancia; para simplificar el análisis, se supondrá que un sistema térmico se representa mediante un modelo de parámetros concentrados, que las sustancias que se caracterizan mediante una resistencia al flujo de calor tienen una capacitancia insignificante y que las sustancias que se caracterizan por una capacitancia térmica tienen una resistencia insignificante al flujo de calor.

El calor fluye de una sustancia a otra de tres formas diferentes: por conducción, por convección y por radiación. Solo se considerará la conducción y la convección, la transferencia de calor por radiación solo se aprecia si la temperatura del emisor es muy alta en comparación con la del receptor, al igual la mayor parte de los procesos térmicos en los sistemas de control de procesos no involucran transferencia de calor por radiación.

Table 7.5: Unidades

Simbolo	Cantidad	Unidades
$q$	Flujo calorico	Kcal/s
$h$	Coficiente de conveccion	Kcal/m <sup>2</sup> s°C
$k$	Conductividad termica	Kcal/ms°C
$m$	Masa	$Kg$
$A$	Area de intercambio de calor	$m^2$
$c$	Calor especifico	Kcal/Kg°C
$C_T$	Capacitancia termica	Kcal/°C
$R_T$	Resistencia termica	°C/(Kcal/s)
$T$	Temperatura	°C
$e$	Energia Calorica	<i>Joule</i>
$AX$	Espesor del conductor	$m$

La condición de equilibrio para sistemas térmicos establece que el calor administrado a un sistema es igual al calor almacenado más el calor liberado

$$\left\{ \frac{\text{Energia}}{\text{de entrada}} \right\} = \left\{ \frac{\text{Razon de energia}}{\text{almacenada}} \right\} + \left\{ \frac{\text{Energia}}{\text{de salida}} \right\} \quad (7.114)$$

Para la transferencia de calor por conducción o convección

$$q = K\Delta T \quad (7.115)$$

El coeficiente K se obtiene mediante

- Por conducción

$$K = \frac{kA}{AX} \quad (7.116)$$

- Por convección

$$K = hA \quad (7.117)$$

Resistencia térmica: La resistencia térmica R para la transferencia de calor entre dos sustancias se define:

$$R_T = \frac{\text{Cambio en la diferencia de temperatura}}{\text{Cambio en el flujo de calor}} \quad (7.118)$$

$$R_T = \frac{d(\Delta T)}{dq} = \frac{1}{K} \quad (7.119)$$

Los coeficientes de conductividad y convección térmica con casi constantes, se pueden considerar constantes.

$$C_T = \frac{\text{Cambio en el calor almacenado}}{\text{Cambio en la temperatura}} \quad (7.120)$$

$$C_T = mc \quad (7.121)$$

Por lo que la condición inicial expresada en términos de flujo de calor y temperatura se puede escribir

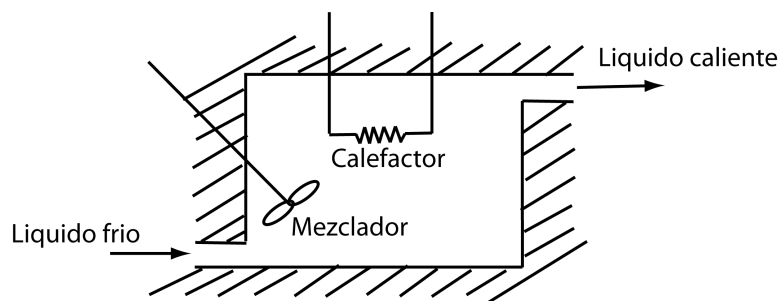
$$q = hA(T_2 - T_1) = \frac{T_2 - T_1}{R_T} \quad (7.122)$$

Por otro lado, la velocidad del cambio en la temperatura se relaciona con la razón de transferencia calórica dentro del cuerpo por medio de la ecuación

$$Q = mc \frac{dT}{dt} = C_T \frac{dT}{dt} \quad (7.123)$$

### Modelo de un sistema termico:

Figura 7.21: Sistema termico



Definiendo

$\bar{\theta}_i$  = Temperatura en estado estable del líquido que entra

$\bar{\theta}_o$  = Temperatura en estado estable del líquido que sale

$G$  = Velocidad de flujo del liquido en estado estable

$M$  = Masa del liquido en el tanque

$c$  = Calor especifico del liquido

$R$  = Resistencia termica

$C$  = Capacitancia termica

$\bar{H}$  = Entrada de flujo de calor en estado estable

Suponiendo que la temperatura del líquido que entra se mantiene constante y que el flujo de calor de entrada al sistema, cambia repentinamente de  $\bar{H}$  a  $\bar{H} + h_i$  en donde  $h_i$  representa una fluctuación en el flujo de calor de entrada, el flujo de calor de salida cambiara en forma gradual de  $\bar{H}$  a  $\bar{H} + h_o$ . La temperatura del liquido que sale también cambiara de  $\bar{\theta}_o$  a  $\bar{\theta}_o + \theta$ .

$$h_o = Gc\theta \quad (7.124)$$

$$C = Mc \quad (7.125)$$

$$R = \frac{\theta}{h_o} = \frac{1}{Gc} \quad (7.126)$$

La ecuación diferencial para este sistema es

$$C \frac{d\theta}{dt} = h_i - h_o \quad (7.127)$$

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = Rh_i \quad (7.128)$$

### 7.3 LINEALIZACION

Es importante el proceso de linealizar sistemas no lineales, porque mediante la linealización de ecuaciones no lineales, es posible aplicar numerosos métodos de análisis lineal que producirán información acerca del comportamiento de sistemas no lineales. El proceso de linealización se basa en la expansión de la función no lineal en series de Taylor. Debido a que despreciamos los

términos de más alto orden de la expansión en series de Taylor, estos términos despreciados deben ser lo suficientemente pequeños y así las variables se desvían ligeramente de la condición de operación.

Linealización de  $z = f(x)$  alrededor de un punto  $(\bar{x}, \bar{z})$ : Considerando un sistema no lineal cuya entrada es  $x$  y cuya salida es  $z$ , entonces la relación entre  $z$  y  $x$  puede escribirse

$$z = f(x) \quad (7.129)$$

Si la condición de operación normal corresponde al punto  $(\bar{x}, \bar{z})$  entonces la anterior ecuación puede expandirse en series de Taylor alrededor de este punto como:

$$z = f(x) = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \dots \quad (7.130)$$

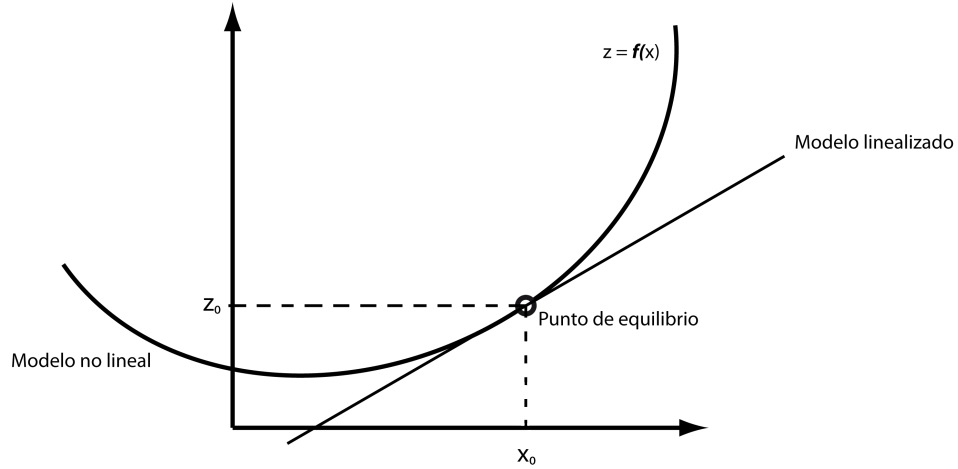
Donde las derivadas están evaluadas en el punto de operación  $x = \bar{x}$  y  $z = \bar{z}$ . Si la variación  $(x - \bar{x})$  es pequeña, se puede despreciar los términos de más alto orden e  $(x - \bar{x})$ , obsérvese que  $\bar{z} = f(\bar{x})$  por lo que la serie se puede escribir

$$\bar{z} - z = a(x - \bar{x}) \quad (7.131)$$

Donde

$$a = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}, z=\bar{z}} \quad (7.132)$$

Figura 7.22: Representación grafica de la serie de Taylor



Linealización de  $z = f(x, y)$  alrededor de un punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ : Considerando un sistema no lineal cuya salida  $z$  es una función de las entradas  $x$  y  $y$  de modo que

$$z = f(x, y) \quad (7.133)$$

Para obtener el modelo matemático lineal para este sistema no lineal alrededor del punto de operación  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , se expande la anterior ecuación en una serie de Taylor alrededor de dicho punto

$$z = f(\bar{x}, \bar{y}) + \left[ \frac{df}{dx} (x - \bar{x}) + \frac{df}{dy} (y - \bar{y}) \right] + \frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2 f}{dx^2} (x - \bar{x})^2 + \frac{d^2 f}{dxdy} (x - \bar{x})(y - \bar{y}) + \frac{d^2 f}{dy^2} (y - \bar{y})^2 \right] + \dots \quad (7.134)$$

Donde las derivadas parciales se evalúan en el punto de operación  $x = \bar{x}$ ,  $y = \bar{y}$  y  $z = \bar{z}$ . Cerca de ese punto, los términos de mal alto orden pueden despreciarse

$$\bar{z} - z = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) \quad (7.135)$$

Donde

$$a = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}, z=\bar{z}} \quad (7.136)$$

$$b = \left. \frac{df}{dy} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}, z=\bar{z}} \quad (7.137)$$

## Capítulo 8

# VECTORES Y EL VECTOR LINEAL ESPACIAL

### 8.1 VECTOR ESPACIAL LINEAL PLANAR Y TRIDIMENSIONAL DE ESTADO

Muchas cantidades físicas tales como fuerzas, velocidades, etc. son representadas por vectores, estos poseen una magnitud y una dirección, se representan por medio de flechas o segmentos de línea, la longitud indica la magnitud de la cantidad física y la orientación indica la dirección. Un vector de n-componentes se define como un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) \tag{8.1}$$

Un vector columna de n-componentes es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

$x_1$  se denomina a la primera componente del vector,  $x_2$  es la segunda componente y así sucesivamente, generalizando  $x_k$  se denomina a la  $k$ -ésima componente del vector, cualquier vector cuyos elementos sean todos cero se denomina un vector cero.

**Definición:**

se usa el símbolo  $\mathbb{R}^n$  para denotar al conjunto de todos los  $n$ -vectores

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

donde cada  $a_i$  es un número real

Se usa  $\mathbb{R}^2$  para indicar vectores en el plano y  $\mathbb{R}^3$  para indicar vectores en el espacio, en términos reales los vectores son tipos especiales de matrices.

**8.1.1 Suma, resta y multiplicación por un escalar de vectores**

La suma entre vectores solo puede realizarse cuando los vectores tienen la misma dimensión, se efectúa por medio de la regla del paralelogramo, para sumar dos vectores, uno de ellos se traslada hasta la punta del otro y el vector suma resultante va del inicio del primero hasta la punta del segundo. Expresado en términos de componentes es obtenido sumando estas de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

De igual forma se hace para la resta de vectores.

Producto por escalares: el producto de un escalar  $C$  siendo este un número real, por un vector  $\vec{x}$  da como resultado un vector. El producto se realiza de la siguiente forma:

$$C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cx_1 \\ Cx_2 \\ \vdots \\ Cx_n \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

Esta operación puede hacerlo mas grande, mas pequeño inclusive cambiarlo de sentido dependiendo del escalar y su signo, puede afectar su magnitud y sentido.

### 8.1.2 Propiedades de la suma de vectores

1. Ley asociativa de la suma de vectores

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

2. Ley conmutativa de la suma de vectores:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

3. Vector cero:

$$\vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A}$$

4. Inversos aditivos:

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = 0$$

5. Propiedad distributiva del producto sobre la suma:

$$\alpha (\vec{A} + \vec{B}) = \alpha \vec{A} + \alpha \vec{B}$$

6. Propiedad distributiva de la suma se escalares sobre el producto:

$$(a + b) \vec{A} = a \vec{A} + b \vec{A}$$

7. Propiedad asociativa del producto:

$$(ab) \vec{A} = a (b \vec{A}) = b (a \vec{A})$$

8. Propiedades generales:

$$1 \vec{A} = \vec{A} \text{ y } 0 \vec{A} = \vec{0}$$

### 8.1.3 Producto de vectores

Producto interno, producto punto o producto escalar: se puede definir en un espacio vectorial en general, y es una magnitud escalar que nos informa de la tendencia de los vectores a apuntar hacia un mismo sentido, sean los vectores  $\vec{v}_1 = (a_1, a_2, a_3)$  y  $\vec{v}_2 = (b_1, b_2, b_3)$  su producto escalar se denota por  $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2$  y se define como:

$$\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (8.6)$$

En general:

$$\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (8.7)$$

Propiedades:

1. Conmutativa

$$(\vec{A} \bullet \vec{B}) = (\vec{B} \bullet \vec{A})$$

2. Distributiva de la suma vectorial

$$\vec{A} \bullet (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \bullet \vec{B}) + (\vec{A} \bullet \vec{C})$$

3. Cancelativa

$$\vec{A} \bullet \vec{0} = 0$$

4. Desigualdad de Swartz

$$|(\vec{A} \bullet \vec{B})| \leq |\vec{A}||\vec{B}|$$

Producto externo, producto cruz o producto vectorial: se puede definir en un espacio vectorial en general, es una magnitud vectorial relacionada con la generación de un vector ortogonal al plano formado por los vectores que intervienen en la operación, Sean  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  dos vectores del espacio  $\mathbb{R}^3$  el producto externo, producto cruz o producto vectorial denotado por  $\vec{A} \times \vec{B}$ , es un vector que tiene como módulo o norma:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin \theta \quad (8.8)$$

Su dirección es perpendicular al plano formado por los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  y su sentido sigue la regla de la mano derecha o también el producto cruz se obtiene mediante la notación de determinantes:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} - (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k} \quad (8.9)$$

Propiedades:

1. No es conmutativa:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \neq (\vec{B} \times \vec{A})$$

2. Asociativa, siempre y cuando no se cambie el orden

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

3. Distributiva

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$$

4. Cancelativa

$$\vec{A} \times 0 = 0$$

### 8.1.4 Espacio Vectorial Real

Un espacio vectorial real  $V$  es un conjunto de objetos, denominados vectores, junto con dos operaciones binarias llamadas suma y multiplicación por un escalar y que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Cerrado bajo la suma: Si  $\mathbf{x} \in V$  y  $\mathbf{y} \in V$ , entonces  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$
2. Ley asociativa de la suma: para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  y  $\mathbf{z} \in V$ ,  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
3. El cero se llama vector cero o idéntico aditivo
4.  $-\mathbf{x}$  se llama inverso aditivo de  $\mathbf{x}$ : si  $\mathbf{x} \in V$ , existe un vector  $-\mathbf{x} \in V$  tal que  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$
5. Ley conmutativa de la suma de vectores: si  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  están en  $V$ , entonces  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
6. Cerrado bajo la multiplicación de un escalar: si  $\alpha$  es un escalar entonces  $\alpha \mathbf{x} \in V$
7. Ley distributiva: Si  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y} \in V$  y  $\alpha$  es un escalar, entonces  $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}$
8. Ley asociativa de la multiplicación por escalares: Si  $\mathbf{x} \in V$  y  $\alpha$  y  $\beta$  son escalares entonces  $\alpha(\beta \mathbf{x}) = (\alpha \beta) \mathbf{x}$

## 8.2 DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Dos vectores en un espacio vectorial son linealmente dependientes si y solo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro. Sean  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \cdots \mathbf{v}_n$   $n$  vectores en un espacio vectorial  $V$ , entonces se dice que los vectores son linealmente dependientes si existe  $n$  escalares  $c_1, c_2, c_3 \cdots c_n$  NO todos cero tales que:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (8.10)$$

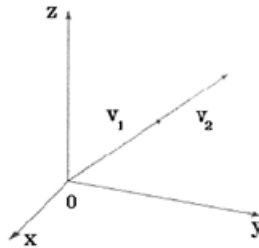
Si los vectores no son linealmente dependientes se dice que son linealmente independientes veamolo con el siguiente ejemplo

**Ejemplo:**

Los vectores  $\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 9 \end{bmatrix}$ , son linealmente dependientes

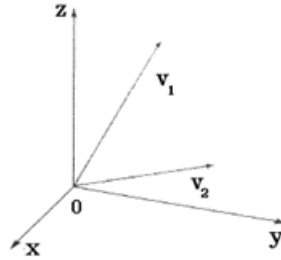
Es claro que son linealmente dependientes por que existe una relación entre los tres vectores, se pueden expresar uno como combinación lineal de los otros.

Figure 8.1: Dependencia lineal



Dos Vectores en  $\mathbb{R}^3$  linealmente dependientes

Figure 8.2: Independencia lineal



Dos Vectores en  $\mathbb{R}^3$  linealmente independientes, estos no se encuentran sobre una misma recta

Propiedades

1. Si entre los vectores  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \cdots \mathbf{V}_n$  figura el vector cero, son linealmente independientes
2. Un solo vector, si es distinto de cero, es linealmente dependiente
3. Dos vectores de  $\mathbb{R}^2$  son linealmente dependientes si y solo si tienen las respectivas componentes proporcionales

Significado geométrico de la dependencia lineal

Suponga que  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son tres vectores linealmente dependientes en  $\mathbb{R}^3$ , se pueden tratar los vectores como si tuvieran un punto terminal en el origen, entonces existen constantes  $c_1, c_2, c_3$ , diferentes de cero no todas, tales que:

$$c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B} + c_3\mathbf{C} = 0 \quad (8.11)$$

Suponga que  $c_3 \neq 0$  ( un resultado similar se cumple si  $c_1 \neq 0$  o  $c_2 \neq 0$ ). Entonces se pueden dividir ambos lados de la ecuación anterior entre  $c_3$  y reordenando tenemos:

$$\mathbf{C} = -\frac{c_1}{c_3}\mathbf{A} - \frac{c_2}{c_3}\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} \quad (8.12)$$

Donde  $\alpha = \frac{-c_1}{c_3}$  y  $\beta = \frac{c_2}{c_3}$  y demostramos que  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son coplanares:

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \alpha[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] + \beta[\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 \quad (8.13)$$

Porque  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son ortogonales a  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ . Sea  $\mathbf{D} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ . Si  $\mathbf{D} = 0$  entonces  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son paralelos y colineales. Así  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  están en cualquier plano que contiene tanto a  $\mathbf{A}$  como a  $\mathbf{B}$  y por consiguiente son coplanares. Si  $\mathbf{D} \neq 0$ , entonces  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  están en el plano que consiste en aquellos vectores que pasan por el origen que son ortogonales a  $\mathbf{D}$ . Pero  $\mathbf{C}$  está en el mismo plano porque  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$ , así vemos que  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son coplanares.

### 8.2.1 Base y dimensión de un espacio vectorial

Sea  $V$  un espacio vectorial. Un conjunto de vectores  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  es una base de  $V$  si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Los vectores son linealmente independientes.
2. Todo vector de  $V$  puede expresarse como combinación lineal de  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ .

#### *Ejemplo:*

En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$  los vectores  $(1, 2)$  y  $(0, 3)$  constituyen una base ya que se verifican las dos condiciones señaladas:

- Son linealmente independientes.

- Cualquier vector  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  puede expresarse como combinación lineal de ellos; en efecto  $(x, y) = \alpha(1, 2) + \beta(0, 3)$  y resolviendo se obtiene

$$\alpha = x ; \beta = \frac{y-2x}{3}$$

Existen los números buscados (escalares) y por tanto,

$$(x, y) = x(1, 2) + \frac{y-2x}{3}(0, 3)$$

Estos escalares reciben el nombre de coordenadas del vector  $(x, y)$  respecto de la base  $\{(1, 2), (0, 3)\}$ . Un espacio vectorial puede tener muchas bases distintas pero todas tienen el mismo número de vectores.

### 8.2.2 Teorema de la base

Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores. La dimensión de un espacio vectorial es el número de vectores que forman la base. La dimensión del espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$  es dos. En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  los vectores  $(2, 1, 3)$ ,  $(0, 4, 1)$  y  $(0, 0, 6)$  constituyen una base como puede comprobarse. La dimensión de  $\mathbb{R}^3$  es tres.

### 8.2.3 Bases canónicas

En  $\mathbb{R}^2$  los vectores  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  y  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  forman una base que recibe el nombre de base canónica de  $\mathbb{R}^2$ . En  $\mathbb{R}^3$  la base canónica la forman los vectores  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$  y  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ . En general, la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  la forman los vectores:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, \dots, 0)$$

$\vdots$

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

Debe advertirse la diferencia entre sistema de generadores y una base. Dos vectores linealmente independientes de  $\mathbb{R}^2$  forman una base del espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$ . Tres vectores linealmente dependientes de  $\mathbb{R}^3$  forman una base del espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ . En general,  $n$  vectores linealmente dependientes constituyen una base de  $\mathbb{R}^n$ .

## 8.3 OPERACIONES ESPECIALES Y DEFINICIÓN DE VECTOR ESPACIAL

### 8.3.1 Producto punto

Sean  $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  y  $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  dos vectores de  $\mathbb{R}^n$ , el producto punto de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  se denota por  $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}$  y se define como

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \quad (8.14)$$

El producto punto asigna un número real a cada par de vectores

Propiedades: sean  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  vectores en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\alpha$  un escalar, tenemos:

1.  $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{B} \bullet \mathbf{A}$
2.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \bullet \mathbf{C} = \mathbf{A} \bullet \mathbf{C} + \mathbf{B} \bullet \mathbf{C}$
3.  $\alpha \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \alpha(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}) = \mathbf{A} \bullet \alpha \mathbf{B}$
4.  $\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} > 0$  y  $\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} = 0$  si y solo si  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$

### 8.3.2 Norma de un vector en $\mathbb{R}^n$

Sea  $\mathbf{A} = (a_1, a_2)$  un vector en  $\mathbb{R}^2$ . Se sabe que la longitud de este vector es  $\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$  podemos generalizar esta definición para vectores en  $\mathbb{R}^n$ . La norma de un vector  $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  en  $\mathbb{R}^n$  se denota por  $\|\mathbf{B}\|$  y se define como:

$$\|\mathbf{B}\| = \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + \dots + (b_n)^2} \quad (8.15)$$

La norma de un vector también se puede expresar en términos del producto punto:

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{\mathbf{B} \bullet \mathbf{B}} \quad (8.16)$$

Un vector unitario es un vector cuya norma es igual a uno. Si  $\mathbf{B}$  es un vector distinto de cero entonces el vector

$$\mathbf{A} = \frac{1}{|\mathbf{B}|} \mathbf{B} \quad (8.17)$$

Es un vector unitario en la dirección de  $\mathbf{B}$ , el procedimiento para construir un vector unitario en la misma dirección del vector dado recibe el nombre de normalización del vector

Propiedades

1. La longitud del vector no puede ser negativa  $|\mathbf{A}| \geq 0$
2.  $|\mathbf{A}| = 0$  si y solo si  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$
3.  $|\alpha \mathbf{A}| = |\alpha| |\mathbf{A}|$  siendo  $\alpha$  una constante

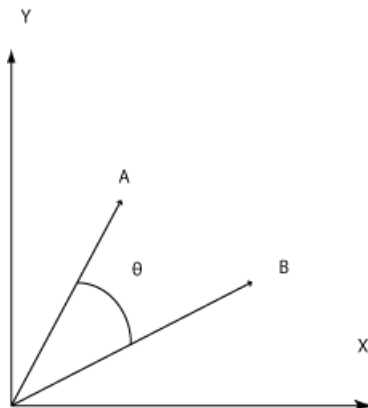
### 8.3.3 Ángulo entre vectores

Sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  dos vectores distintos de cero en  $\mathbb{R}^n$ . El coseno del ángulo  $\theta$  entre estos vectores es:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} \quad (8.18)$$

$$0 \leq \theta \leq \Pi$$

Figure 8.3: Angulo entre vectores



### 8.3.4 Espacio vectorial real

Es un conjunto  $V$  no vacío, cuyos elementos reciben el nombre de vectores dotado de dos operaciones:

1. Una interna llamada suma que cumple las siguientes propiedades:

**I.** Asociativa:  $(\mathbf{A}+\mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B} +\mathbf{C})$

**II.** Conmutativa:  $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$

**III.** Elemento neutro: Hay un elemento  $0$  en  $V$  tal que  $\mathbf{A}+0=\mathbf{A}$

**IV.** Elemento opuesto: Cada elemento  $\mathbf{A}$  tiene su elemento opuesto  $-\mathbf{A}$  tal que  $\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = 0$

2. Una operación externa llamada producto de números reales por vectores que asocia a cada número real  $\alpha$  y a cada vector  $\mathbf{A}$  el vector  $\alpha\mathbf{A}$  y que verifica las siguientes propiedades:

**I.** Distributiva respecto a la suma de escalares:  $(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$

**II.** Distributiva respecto a la suma de vectores:  $\alpha\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$

**III.** Asociativa para escalares:  $\alpha\cdot(\beta\mathbf{A})= (\alpha\beta)\mathbf{A}$

**IV.** Elemento neutro:  $1\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}$

### 8.3.5 El proceso Gram-Schmidt

El proceso Gram-Schmidt es un algoritmo sencillo para producir una base ortogonal u ortonormal para cualquier subespacio diferente de cero de  $\mathbb{R}^n$ . Dada una base  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  para un subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  se define:

$$v_1 = x_1$$

$$v_2 = x_2 \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \mathbf{V}_1$$

$$v_3 = x_3 - \frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \mathbf{V}_1 - \frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} \mathbf{V}_2$$

⋮

$$v_p = x_p - \frac{x_p \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \mathbf{V}_1 - \frac{x_p \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} \mathbf{V}_2 - \dots - \frac{x_p \cdot v_{p-1}}{v_{p-1} \cdot v_{p-1}} \mathbf{V}_{p-1}$$

Entonces  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  es una base ortogonal para  $W$

A los números reales se les llama escalares

## 8.4 LOS EIGENVALUES Y LOS EIGENVECTORS

Si  $\mathbf{A}$  es una matriz  $n \times n$   $\mathbf{A}\mathbf{v}$  no se relaciona por lo general con el vector  $\mathbf{v}$ . un caso muy interesante se da cuando  $\mathbf{A}\mathbf{v}$  resulta ser proporcional (paralelo) a  $\mathbf{v}$ . Así geoméricamente,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{A}\mathbf{v}$  están en la misma recta que pasa por el origen. En este caso se dice  $\mathbf{v}$  es un eigenvector o vector propio de  $\mathbf{A}$ , y que la constante de proporcionalidad es un eigenvector o valor propio de  $\mathbf{A}$

*Definición:* Sea  $\mathbf{A}$  una matriz  $n \times n$ . Un vector  $\mathbf{v}$  distinto de cero es un eigenvector de  $\mathbf{A}$  si para cierto escalar  $\lambda$  tenemos:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{8.19}$$

El escalar  $\lambda$  (que puede ser cero) se llama eigenvalor de  $\mathbf{A}$  correspondiente a (o asociado con) el eigenvector  $\mathbf{v}$ . Los eigenvectores también se le conocen como valores característicos o valores propios (eigen en alemán quiere decir propio) o también raíces latentes.

Sea  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$  Entonces  $\mathbf{A} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  Así  $\lambda_1 = 1$  es un valor característico de  $\mathbf{A}$  con el correspondiente vector característico  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  de manera similar,

$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  de modo que  $\lambda_2 = -2$  es un valor característico  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  como se verá enseguida, estos son los únicos valores característicos de  $\mathbf{A}$ .

Sea  $\mathbf{A}$  una matriz de  $n \times n$ . Entonces  $\lambda$  es un eigenvalor (valor característico) de  $\mathbf{A}$  si y sólo si

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (8.20)$$

Esta ecuación se denomina ecuación característica de  $\mathbf{A}$ ;  $p(\lambda)$  se denomina el polinomio característico de  $\mathbf{A}$ ,  $p(\lambda)$  es un polinomio de grado  $n$  en  $\lambda$ , toda matriz de  $n \times n$  tiene exactamente  $n$  valores característicos.

Sea  $\mathbf{A}$  una matriz de  $n \times n$  y sea  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  valores característicos distintos de  $\mathbf{A}$  es decir  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , si  $i \neq j$  con vectores característicos correspondientes  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ . Entonces  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$  son linealmente independientes es decir los vectores característicos correspondientes a valores característicos distintos son linealmente independientes.

#### 8.4.1 Procedimiento para el cálculo de los eigenvalores y los eigenvectores:

1. Se encuentra  $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$
2. Se encuentran las raíces  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  de  $p(\lambda) = 0$
3. Se resuelve el sistema homogéneo  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0$  correspondiente a cada valor característico  $\lambda_i$

#### **Ejemplo:**

Calculo de valores y vectores característicos

Sea  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$  Entonces el  $\det |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$  Entonces los valores característicos son  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 6$  se resuelve  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0$

esto es  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  es claro que cualquier característico correspondiente a  $\lambda_1 = 1$  satisface  $3x_1 + 2x_2 = 0$ . Un vector característico de este tipo es  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ , Así  $\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$  de manera similar, la ecuación  $(\mathbf{A} - 6\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$  significa que  $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  o  $x_1 = x_2$  entonces  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  es un vector característico a  $\lambda_2 = 6$  y  $\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Se Observa que  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , son linealmente independiente ya que uno no es múltiplo del otro, el orden en el que se establezca  $\lambda$  no influye en el resultado ya que para un valor característico dado corresponde un vector característico en particular. Los eigenvalores de una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  son las raíces de la ecuación característica correspondiente, por lo tanto una matriz  $n \times n$  tiene al menos un eigenvalor y máximo  $n$  eigenvalores numéricamente diferentes.

### 8.4.2 Matrices simétrica, antisimétrica y ortogonal

Una matriz cuadrada real  $\mathbf{A} = [a_{jk}]$  se llama

*Simétrica* si la transposición la mantiene invariable

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \tag{8.21}$$

Por lo tanto  $a_{kj} = a_{jk}$

*Antisimétrica* si la transposición da como resultado la negativa de  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \tag{8.22}$$

*Ortogonal* si la transposición da como resultado la inversa de  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \tag{8.23}$$

*Eigenvalores de las matrices simétrica y anti simétrica*

- Los eigenvalores de una matriz simétrica son reales

- Los eigenvalores de una matriz antisimétrica son imaginarios puros o cero

Los eigenvalores de una matriz ortogonal  $A$  son reales o complejos conjugados en pares y tienen valor absoluto 1.

### 8.4.3 Propiedades de los eigenvectores

Los eigenvectores de una matriz  $A$  de  $n \times n$  pueden o no formar una base de  $\mathbb{R}^n$  y si lo hacen pueden usarse para diagonalizar con eigenvalores en la diagonal principal

*Definición:* Se dice que una matriz  $\hat{A}$  de  $n \times n$  es semejante de una matriz  $A$  de  $n \times n$  si:

$$\hat{A} = T^{-1} A T$$

Para alguna matriz no singular de  $T$  de  $n \times n$ , esta transformación de la que se obtiene  $\hat{A}$  a partir de  $A$ , se denomina transformación de semejanza

Si  $\hat{A}$  es semejante a  $A$ , entonces  $\hat{A}$  tiene los mismos eigenvalores que  $A$ . Además si  $x$  es un eigenvector de  $A$ , entonces  $y = T^{-1}x$  es el eigenvector de  $\hat{A}$  correspondiente al mismo valor.

*Dependencia o independencia lineal de los eigenvectores*

Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  eigenvalores diferentes de una matriz de  $n \times n$  entonces los eigenvectores correspondientes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  forman un conjunto linealmente independiente.

*Base de eigenvectores*

Si una matriz  $A$  de  $n \times n$  tiene  $n$  eigenvalores diferentes, entonces  $A$  tiene una base de eigenvectores para  $\mathbb{R}^n$

*Diagonalización*

Si una matriz  $A$  de  $n \times n$  tiene una base de eigenvectores, entonces:

$$D = X^{-1} A X$$

es diagonal, con los eigenvalores de  $A$  como elementos de la diagonal principal

### ***Ejemplo***

Aplicar el proceso de diagonalización a la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Los eigenvectores de esta matriz son:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y utilizando la definición anterior

$$X^{-1}AX = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## **8.5 TRANSFORMACIONES Y FUNCIONES DE MATRICES CUADRADAS**

Como ya se había dicho anteriormente en un espacio vectorial se definen dos operaciones: la adición y la multiplicación por un escalar. Las transformaciones lineales entre espacios vectoriales conservan estas estructuras lineales según el siguiente criterio: Sean A y B espacios vectoriales. Sean a y b vectores en A y sea  $\alpha$  un escalar.

Una transformación  $T:A \rightarrow B$  es lineal si

$$T(a + b) = T(a) + T(b)$$

$$T(\alpha a) = \alpha T(a)$$

La primera condición implica que  $T$  convierte la suma de los vectores en la suma de las imágenes de los vectores, la segunda que  $T$  convierte el múltiplo escalar de un vector en el múltiplo escalar de la imagen, de esta manera las operaciones de adición y multiplicación por un escalar se conservan bajo una misma transformación lineal.

*Definición:* Sea  $T : A \rightarrow B$  una transformación lineal, el núcleo o kernel de  $T$ , el núcleo se representa por  $\ker(T)$ , el conjunto de vectores en  $B$  que constituyen las imágenes de los vectores en  $A$  recibe el nombre de rango de  $T$ , el rango se representa por  $\text{rango}(T)$

Sea  $T: A \rightarrow B$  una transformación lineal:

El núcleo de  $T$  es un subespacio de  $A$ , se sabe que el núcleo no es vacío ya que contiene el vector cero de  $A$ .

El rango de  $T$  es un subespacio de  $B$

*Propiedades básicas de las transformaciones lineales:*

Sea  $T: V \rightarrow W$  una transformación lineal entonces para todo vector  $u, v_1, v_2, \dots, v_n$  en  $V$  y todo escalar  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

1.  $T(0) = 0$
2.  $T(u-v) = Tu - Tv$
3.  $T(\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \dots, \alpha_n v_n) = \alpha_1 T v_1, \alpha_2 T v_2, \dots, \alpha_n T v_n$

**Ejemplo:**

se quiere determinar el núcleo y el rango del operador lineal

$$T(x,y,z) = (x, y, 0)$$

El operador lineal  $T$  transforma  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  el núcleo y el rango serán subespacios de  $\mathbb{R}^3$

Núcleo:  $\text{Ker}(T)$  es el subconjunto transformado en  $(0,0,0)$

$$T(x,y,z) = (x, y, 0) = (0,0,0) \text{ si } x = 0, y = 0$$

Por consiguiente, el  $\text{Ker}(T)$  es el conjunto de vectores  $(0, 0, z)$  esto se expresa como:

$$\text{Ker}(T) = \{(0,0,z)\}$$

Desde una perspectiva geométrica el  $\text{Ker}(T)$  es el conjunto de vectores que se localizan en el eje  $z$

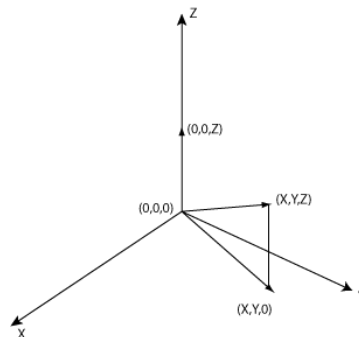
*Rango*: es el conjunto de vectores de la forma  $(x, y, 0)$  entonces:

$$\text{rango}(T) = \{(x, y, 0)\}$$

El  $\text{rango}(T)$  es el conjunto de vectores que se localizan en el plano  $xy$

Se puede observar en la siguiente figura 9.4 que  $T$  proyecta el vector  $(x,y,z)$  en el vector  $(x,y,0)$  en el plano  $xy$ ,  $T$  proyecta todos los vectores en el plano  $xy$ ,  $T$  es operador de proyección

Figure 8.4: Vectores



Se dice que una transformación  $T$  es uno a uno si cada elemento del rango de  $T$  corresponde exactamente a un elemento del dominio de  $T$ , esto significa que  $T$  es uno a uno si  $T(u) = T(v)$  implica que  $u = v$

- Una transformación lineal  $T$  es uno si y solo si el núcleo es el vector cero
- La transformación  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida por  $T(x) = Ax$  es uno a uno si y solo si  $A$  es no singular
- Sea  $T: U \rightarrow V$  una transformación lineal uno a uno. Si el conjunto  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  es linealmente independiente en  $U$ , entonces  $\{T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)\}$  es linealmente independiente en  $V$ , es decir que las transformaciones lineales uno a uno conservan la independencia lineal

### 8.5.1 Funciones de Matrices cuadradas

Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  con Eigenvalues  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  considerar la serie infinita en una variable escalar  $x$

$$\alpha(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots \quad (8.24)$$

es claro que una serie infinita dada puede converger o divergir según el valor de  $x$ , por ejemplo la serie geométrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + \dots \quad (8.25)$$

Converge para  $|x| < 1$  y diverge por otra parte, algunas series infinitas convergen para todos los valores de  $x$  tales como:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$

Porque esta serie infinita es tan ampliamente usada se le da un nombre especial  $e^x$

Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  con eigenvalues  $\lambda_i$ , si la serie infinita  $\sigma(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  es convergente para todos los valores de  $n$  y  $x = \lambda_i$  entonces la matriz de serie infinita es

$$\sigma_{(A)} = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_kA^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kA^k \quad (8.26)$$

- Una sola función uniforme  $f(z)$ , con  $z$  un escalar complejo, se dice que es analítica en un punto  $z_0$  si y sólo si su derivada existe en cada punto en una vecindad de  $z_0$ . Los puntos en los que la función no es analítica se llaman puntos singulares. Por ejemplo,  $f(z) = 1/z$  tiene  $z = 0$  como punto único y singular, es analítica en cada punto
- Si una función  $f(z)$  es analítica (no contiene singularidades) en cada punto, en algunos círculos  $\Omega$  en el plano complejo, entonces  $f(z)$  puede ser representada como una serie de potencias convergente (la serie de Taylor) en cada punto  $z$  dentro  $\Omega$
- Si  $f(z)$  es cualquier función que es analítica dentro de un círculo en el plano complejo que contiene todos los valores propios  $\lambda_i$  de  $A$ , entonces la correspondiente matriz función  $f(A)$  puede ser definido por una serie convergente

**Ejemplo:**

vamos a encontrar  $\frac{d}{dt} [e^{At}]$  la representación de la serie es:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots$$

Término por término la diferenciación sería:

$$\frac{de^{At}}{dt} = A + \frac{2A^2t}{2!} + \frac{3A^3t^2}{3!} + \dots$$

La factorización de  $A$  se puede hacer por la derecha o por la izquierda

$$\frac{de^{At}}{dt} = A \left[ I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots \right] = \left[ I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots \right] A = Ae^{At} = e^{At}A$$

## 8.6 TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

El teorema de Cayley-Hamilton es una herramienta matemática poderosa, que permite obtener con mayor facilidad el cálculo de  $e^{At}$  con un esfuerzo mucho menor comparado con Laplace o el método de eigenvalores, además funciona para calcular funciones matriciales en general. Toda matriz de  $n \times n$  satisface su propia ecuación característica, esto es:

$$|A - \lambda I| = q(\lambda) = q_0 + q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + \dots + q_n\lambda_n = 0 \quad (8.27)$$

Es muy útil para comprobar teoremas que involucren ecuaciones matriciales.

Sea  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  el polinomio característico de esta matriz es:

$|A - \lambda I| = (3 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 5$  entonces:

$$\Delta_{(A)} = A^2 - 5A - 5I = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

El polinomio mínimo de una matriz cuadrada de  $A$  es el polinomio de grado menor (es decir, el coeficiente de la potencia más alta se normaliza a uno) que cumpla:

$$m(A) = [0]$$

Sería un poco más eficiente de utilizar el polinomio mínimo, más que el polinomio característico en algunos casos. El mínimo polinomio  $m(A)$  y el polinomio característico  $\Delta'(A)$  suelen ser los mismos (si todos  $\lambda_i$  son distintos, o en el caso de la degeneración simple). En forma de factores las únicas diferencias posibles entre  $m(A)$  y  $\Delta'(A)$  son las influencias de los términos de las raíces repetidas, entonces:

$$\Delta_{(\lambda)} = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

$$m_{(\lambda)} = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_p)^{k_p}$$

En todos los casos  $k_i \leq m_i$

### 8.6.1 Cálculo de la inversa de una matriz con el teorema de Cayley-Hamilton

Sea  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  los eigenvalores de la matriz  $A$  son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = 3$ , por lo tanto la función se puede expresar de la siguiente forma:

$$f(A) = A^{-1} = \alpha_0 I + \alpha_1 A$$

Las funciones de los eigenvalores son:

$$f(\lambda_1) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1$$

$$f(\lambda_2) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2$$

Donde la inversa de cada eigenvalor se calcula de la siguiente forma:

$$f(\lambda_1) = \lambda_1^{-1} = (-1)^{-1} = -1$$

$$f(\lambda_2) = \lambda_2^{-1} = (3)^{-1} = \frac{1}{3}$$

El sistema de ecuaciones lineales es:

$$\alpha_0 - \alpha_1 = -1$$

$$\alpha_0 - 3\alpha_1 = \frac{1}{3}$$

La solución a este sistema es:

$$\alpha_0 = -\frac{2}{3}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}$$

La inversa de la matriz sería:

$$f(A) = A^{-1} = \alpha_0 I + \alpha_1 A = -\frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

## 8.6.2 Problemas

### 8.6.2.1 Vectores en dos y tres dimensiones

Encontrar el producto cruz  $\vec{v} \times \vec{w}$  y  $\vec{w} \times \vec{v}$  si  $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$  y  $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$  vectores reales:

Si decimos que  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$  son vectores unitarios a lo largo de los tres ejes coordenados el producto cruz se puede calcular con el siguiente determinante:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Usando la expansión de Laplace con respecto a la fila:

$$\vec{v} \times \vec{w} = e_1(v_2w_3 - v_3w_2) - e_2(v_1w_3 - v_3w_1) + e_3(v_1w_2 - v_2w_1)$$

Donde:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{bmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{w} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} v_3w_2 - v_2w_3 \\ v_1w_3 - v_3w_1 \\ v_2w_1 - v_1w_2 \end{bmatrix}$$

### 8.6.2.2 Dependencia e independencia lineal

Sea el conjunto  $\{v_1, v_2\}$  linealmente independiente. Demuestre que  $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$  también es linealmente independiente,

$$\text{Asumiendo: } a(v_1 + v_2) + b(v_1 - v_2) = 0$$

Si podemos demostrar que lo anterior, implica que  $a = 0$  y  $b = 0$ , entonces  $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$  será linealmente independiente así:

$$av_1 + av_2 + bv_1 - bv_2 = 0$$

$$(a + b)v_1 + (a - b)v_2 = 0$$

Ya que  $\{v_1, v_2\}$  es linealmente independiente.

$$a + b = 0$$

$$a - b = 0$$

Este sistema tiene una solución única,  $a = 0$ ,  $b = 0$ . Al retomar lo que asumimos inicialmente, tenemos que  $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$  es linealmente independiente

### 8.6.2.3 Proceso Gram-Schmidt

Usar el proceso Gram-Schmidt para la construcción de un conjunto de vectores ortonormales:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 + j \\ 1 - j \\ j \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 2j \\ 1 - 2j \\ 1 + 2j \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ 5j \end{bmatrix}$$

Verificamos la independencia lineal de conjunto  $\{x_i\}$

$$G = [\langle x_i, x_j \rangle] = [x_i^{-T} x_j] = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 7 & 14 & 8 + 4j \\ 5 & 8 - 4j & 27 \end{bmatrix}$$

El determinante es  $|G|=377 \neq 0$  por lo tanto los  $x_i$  son linealmente independientes

**Paso 1:** Construcción del conjunto ortogonal a  $v_i$

$$v_1 = x_1 \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2j \\ 1-2j \\ 1+2j \end{bmatrix} - \frac{7}{5} \begin{bmatrix} 1+j \\ 1-j \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -7+3j \\ -2-3j \\ 5+3j \end{bmatrix}$$

Los productos  $\langle v_2, v_2 \rangle = \frac{21}{5}$  y  $\langle v_2, v_3 \rangle = 1 + 4j$  son calculados:

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ 5j \end{bmatrix} - \frac{5}{5} \begin{bmatrix} 1+j \\ 1-j \\ j \end{bmatrix} - \frac{5(1+4j)}{21(5)} \begin{bmatrix} -7+3j \\ -2-3j \\ 5+3j \end{bmatrix} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 19+4j \\ -31+53j \\ 7+61j \end{bmatrix}$$

**Paso 2:** Normalizar

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1+j \\ 1-j \\ j \end{bmatrix}, \quad \hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{105}} \begin{bmatrix} -7+3j \\ -2-3j \\ 5+3j \end{bmatrix}$$

Usando  $\langle v_3, v_3 \rangle = \frac{7917}{441}$  obtenemos:

$$\hat{v}_3 = \sqrt{\frac{441}{7917}} v_3 = \frac{1}{\sqrt{7917}} \begin{bmatrix} 19+4j \\ -31+53j \\ 7+61j \end{bmatrix}$$

#### 8.6.2.4 Eigenvalues y eigenvectores

Encontrar los Eigenvalues y los eigenvectores de la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -0.5 & -3 & 1 & 0.5 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica es  $\lambda^4 - 4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 32\lambda + 64 = 0$  y sus raíces son:  $\lambda_i = -2, -2, 4, 4$ .

Con  $\lambda = -2$

$$A - \lambda I = A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ -0.5 & -3 & 3 & 0.5 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 2, por lo tanto  $q = n - r = 2$ , esto muestra que hay dos eigenvectores con  $\lambda = -2$ , dos soluciones linealmente independientes de  $[A+2I]x_i = 0$  son:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con  $\lambda = 4$

$$A - \lambda I = A - 4I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ -0.5 & -3 & -3 & 0.5 \\ -3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

El rango es 3 y  $q = 1$  este es solo un eigenvector, solucionando  $[A+4I]x_i = 0$  da una sola solución independiente

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto  $[A-4I]x_4 = x_3$  y el resultado es:

$$x_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

### 8.6.2.5 Vibración libre de un sistema de dos masas

Considerar el sistema de dos masas y tres resortes y dos fuerzas  $f_1$  y  $f_2$ , unidas por resortes y apoyado sobre una superficie sin rozamiento como se muestra en la figura:

Figure 8.5: Sistema de dos masas

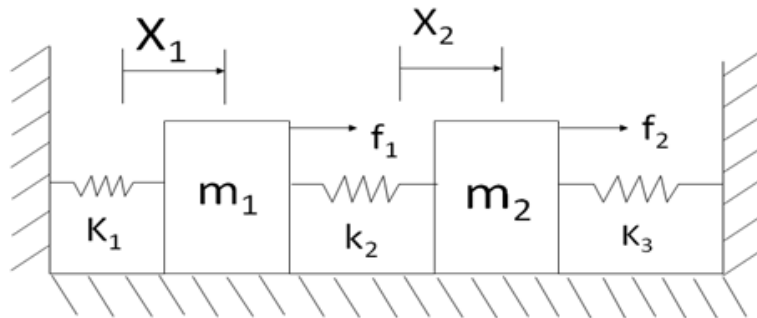
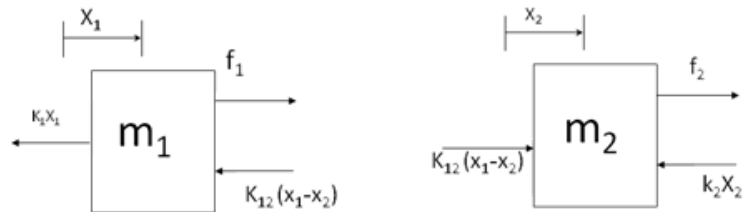


Diagrama de cuerpo libre para las masas:

Figure 8.6: Diagrama de cuerpr libre



Las ecuaciones del movimiento son:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_{12}) x_1 - k_{12} x_2 = f_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_{12} x_1 + (k_2 + k_{12}) x_2 = f_2$$

Asumimos  $m_1 = m_2 = k_1 = k_2 = 1$  y para vibración libre  $f_1 = f_2 = 0$  entonces:

$$\ddot{x}_1 + 2x_1 - x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 - x_1 + 2x_2 = 0$$

La solución a este sistema es de la forma:

$$x_1(t) = q_1 \sin(\omega t + \Phi)$$

$$x_2(t) = q_2 \sin(\omega t + \Phi)$$

Donde  $q_1$  y  $q_2$  son las amplitudes,  $\omega$  es la frecuencia y  $\Phi$  es la fase, remplazamos en las ecuaciones del movimiento:

$$-\omega^2 q_1 + 2q_1 - q_2 = 0$$

$$-\omega^2 q_1 - q_1 + 2q_2 = 0$$

Esto es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Esta ecuación tiene la forma:

$$Av = \lambda v$$

Con  $\lambda = \omega^2$  como eigenvalue, resolviendo los Eigenvalues y los eigenvectores tenemos:

$$\lambda_1 = 1, e_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 3, e_2 = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

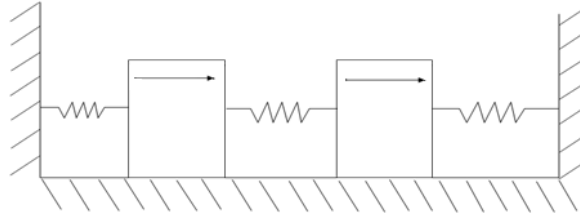
Cada eigenvalor da una solución la primera es  $\omega = (\lambda_1)^{\frac{1}{2}} = 1$  tenemos entonces:

$$x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(t + \Phi_1), \text{ con } \alpha \text{ y } \Phi \text{ arbitrarios}$$

La segunda es  $\omega = (\lambda_2)^{\frac{1}{2}} = (3)^{\frac{1}{2}}$

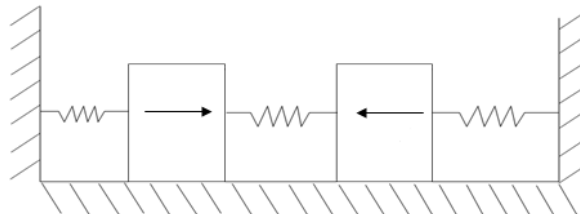
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \sin(\sqrt{3}t + \Phi_2) \text{ con } \beta \text{ y } \Phi \text{ arbitrarios}$$

Figure 8.7: Modo de vibración 1



Nota: Cada eigenvalor define un modo de vibración (ver figura), el eigenvalor da una frecuencia de vibración ( $\omega = \sqrt{\lambda}$ ) y el eigenvector da la forma o configuración. Las frecuencias son llamadas eigenfrecuencias o frecuencias naturales (corresponden a las frecuencias de vibración libre)

Figure 8.8: Modo de vibración 2



## Capítulo 9

# FUNDAMENTOS DE ALGEBRA MODERNA

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos. Donde los elementos de una matriz hacen referencia a escalares y son escritas con letras minúsculas,  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , ect. Con el fin de definir operaciones algebraicas con matrices, es necesario restringir que estos elementos escalares sean miembros de un campo. Un campo  $\mathcal{F}$  es cualquier conjunto de dos o mas elementos para los que las operaciones de suma, multiplicación y división están definidas y cumplen los siguientes axiomas:

1. Si  $a \in \mathcal{F}$  y  $b \in \mathcal{F}$ , entonces  $(a + b) = (b + a) \in \mathcal{F}$ .
2.  $(ab) = (ba) \in \mathcal{F}$ .
3. Existe un único elemento nulo  $0 \in \mathcal{F}$  de tal manera que  $a + 0 = a$  y  $0(a) = 0$ .
4. Si  $b \neq 0$ , entonces  $(a/b) \in \mathcal{F}$ .
5. Existe un único elemento de identidad  $1 \in \mathcal{F}$  de tal manera que  $1(a) = (a)1 = (a/1) = a$ .
6. Para cada  $a \in \mathcal{F}$  existe un único elemento negativo  $-a \in \mathcal{F}$  tal que  $a + (-a) = 0$ .
7. Las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva se cumplen.

Hay que tener en cuenta que el conjunto de enteros no forman un campo debido a que el axioma 4 no siempre se cumple. Algunos ejemplos de campos son el conjunto de numeros reales, numeros racionales y los numeros complejos. Tambien se encuentran matrices con polinomios.

Las matrices se representan con letras mayúsculas y en negrita, como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 45 & 25 \\ 5 & 7 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Los elementos horizontales como (45 25) y (1 9) se llaman filas, y las entradas verticales como (45 5 1) se llaman columnas. Nos referimos al elemento en la fila  $i$ -ésima y la columna  $j$ -ésima de  $\mathbf{A}$  como  $a_{ij}$ . En lugar de mostrar explícitamente todos los elementos de  $\mathbf{A}$ , la forma abreviada  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  es utilizada algunas veces. Si  $\mathbf{A}$  tiene  $m$  filas y  $n$  columnas, se dice que es una matriz de orden  $m \times n$ . En este caso los índices  $i$  y  $j$  en la forma abreviada son los rangos de  $i = 1, 2, \dots, m$  y  $j = 1, 2, \dots, n$ . Si  $n = 1$ , la matriz tiene solo una columna y es llamada *matriz columna*. El índice de columna  $j$  es innecesario y generalmente se omite. Del mismo modo, cuando  $m = 1$ , la matriz se denomina *matriz fila*. Se llama *matriz cuadrada* cuando  $m = n$ . Cuando  $m = n = 1$ , la matriz tiene un único elemento y es solo un escalar. En general  $m$  y  $n$  puede tomar cualquier valor entero.

## 9.1 OPERACIONES ALGEBRAICAS CON MATRICES

### 9.1.1 Igualdad de matrices

Las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son iguales  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ , si y solo si sus correspondientes elementos son iguales. Es decir  $a_{ij} = b_{ij}$  para  $1 \leq i \leq m$  y  $1 \leq j \leq n$ . Esto quiere decir que la igualdad solo puede ocurrir entre matrices del mismo orden  $m \times n$ .

### 9.1.2 Suma y Resta de matrices

La suma de matrices se hacen elemento por elemento. Esto es, si  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  y  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  donde las dos matrices son del mismo orden,  $m \times n$ , entonces  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$  indica que la matriz  $\mathbf{C} = [c_{ij}]$  también es  $m \times n$  y los elementos de esta están dados por  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  para  $i = 1, 2, \dots, m$  y  $j = 1, 2, \dots, n$ . La resta de matrices sigue el mismo principio que la suma de matrices, excepto que  $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ .

### **Ejemplo 1:**

Teniendo las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 15 \\ 9 & 11 & 18 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 20 \\ 6 & 15 & 24 \\ 6 & 0 & 11 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 41 & 37 & 20 \\ 26 & 15 & 12 \end{bmatrix}, \text{ hallar } \mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{B} + \mathbf{A}, \mathbf{A} + \mathbf{C}, \mathbf{B} + \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 35 \\ 15 & 26 & 32 \\ 9 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$\mathbf{A} + \mathbf{C}$  y  $\mathbf{B} + \mathbf{C}$  no se puede hacer debido a que son de diferente orden.

### **9.1.3 Multiplicación de matrices**

Dos tipos de multiplicación se pueden definir:

- Multiplicación de una matriz por un escalar.
- Multiplicación de una matriz por otra matriz.

La primera es multiplicar una matriz  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  por un escalar arbitrario  $\alpha \in \mathcal{F}$  que equivale a multiplicar cada elemento en  $\mathbf{A}$  por  $\alpha$ . Esto es  $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha = [\alpha a_{ij}]$ .

La segunda es la multiplicación de una matriz  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$   $m \times n$  por una matriz  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$   $p \times q$ . Para formar el producto  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ , se dice que  $\mathbf{B}$  premultiplica a  $\mathbf{A}$ , o  $\mathbf{A}$  postmultiplica a  $\mathbf{B}$ . Este producto solo se da cuando  $\mathbf{A}$  tiene el mismo número de columnas que  $\mathbf{B}$  de filas, osea que  $n = p$ . Los elementos de  $\mathbf{C} = [c_{ij}]$  se dan de acuerdo a:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Claramente, el producto  $\mathbf{C}$  es una matriz  $m \times q$ .

**Ejemplo 2:**

$$\text{Tenemos } \mathbf{A}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{2 \times 2} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3(2) + 4(3) + 7(6) & 3(1) + 4(5) + 7(2) \\ 5(2) + 6(3) + 1(6) & 5(1) + 6(5) + 1(2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 60 & 37 \\ 34 & 37 \end{bmatrix}$$

**Propiedades de la multiplicación de matrices:**

1. La multiplicación de matrices no necesariamente es conmutativa:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Aun si  $\mathbf{AB}$  y  $\mathbf{BA}$  existen, las matrices resultantes pueden no ser del mismo orden.

2. Una matriz fila postmultiplicada por una matriz columna es un escalar

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n$$

3. Una matriz columna postmultiplicada por una matriz fila es una matriz.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} [ a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n ]$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & b_1 a_3 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & b_2 a_3 & \cdots & b_2 a_n \\ b_3 a_1 & b_3 a_2 & b_3 a_3 & \cdots & b_3 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m a_1 & b_m a_2 & b_m a_3 & \cdots & b_m a_n \end{bmatrix}$$

es una matriz de orden  $m \times n$ .

4. Una matriz postmultiplicada por una matriz columna es una matriz columna.

5. Una matriz fila postmultiplicada por una matriz es una matriz fila.

6. La multiplicación de matrices es asociativa, es decir:

$$\left( \begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ m \times n & n \times p \end{matrix} \right) \begin{matrix} \mathbf{C} \\ p \times k \end{matrix} = \mathbf{A} \begin{matrix} \left( \mathbf{B} \mathbf{C} \right) \\ n \times p & p \times k \end{matrix}$$

7. La multiplicación de matrices es distributiva con respecto a la suma

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \quad \text{y} \quad (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$$

### 9.1.4 Multiplicación de Kronecker

Otra definición de multiplicación poco usada se puede definir es *la multiplicación de Kronecker*, se escribe  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ . Donde cada uno de los elementos de la primera matriz  $a_{ij}$  se multiplica por la matriz entera  $\mathbf{B}$ . No hay ninguna restricción respecto al orden de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ . Si la matriz  $\mathbf{A}$  es de orden  $m \times n$  y  $\mathbf{B}$  de orden  $p \times q$ , la matriz resultante de  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  será de

orden  $mp \times nq$ . Nótese que  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$ , sin embargo los dos productos son del mismo orden. A continuación un ejemplo ilustrativo de la multiplicación de Kronecker:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{13} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{11}b_{23} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{21}b_{23} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### ***Ejemplo 3:***

Realizar la multiplicación de Kronecker de las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 8 & 15 & 10 & 10 \\ 4 & 20 & 28 & 5 & 25 & 35 \\ 6 & 4 & 4 & 24 & 16 & 16 \\ 2 & 10 & 14 & 8 & 40 & 56 \end{bmatrix}$$

### **9.1.5 La matriz nula (cero) y la matriz identidad**

Como es necesario en el algebra escalar, es necesario tener un elemento nulo y un elemento unitario para cumplir con los axiomas 3 y 5 anteriormente mencionados. En consecuencia, la matriz nula  $\mathbf{0}$  es la que tiene todos sus elementos iguales a cero. Entonces  $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$  y  $\mathbf{0A} = \mathbf{0}$ . Sin embargo, observamos que la matriz nula no es única porque el número de filas y columnas que posee puede ser cualquier número finito entero positivo. Por lo que es necesario indicar el orden de la matriz nula con subíndices,  $0_{mn}$ . Otra diferencia importante entre el cero escalar y la matriz nula es que en el algebra escalar,  $ab = 0$  tiene implícito que  $a$  o  $b$  o los dos son 0. No se puede decir lo mismo del producto de matrices  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ . Un simple ejemplo de

verificación, teniendo  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$  donde el producto  $\mathbf{AB}$  es una matriz cero, sin embargo ninguna ni  $\mathbf{A}$  o  $\mathbf{B}$  son matrices nulas.

La matriz identidad  $\mathbf{I}$  es una matriz cuadrada con todos los elementos cero, exceptuando los de la diagonal principal (posiciones donde  $i=j$ ) que son unos. Esta matriz no es única por sus dimensiones. Cuando es necesario, una matriz identidad se puede denotar  $\mathbf{I}_n$ . La matriz identidad tiene propiedades algebraicas similares al elemento escalar de identidad, si  $\mathbf{A}$  es  $m \times n$ , entonces  $\mathbf{I}_m \mathbf{A} = \mathbf{A}$  y  $\mathbf{A} \mathbf{I}_n = \mathbf{A}$ .

## 9.2 LAS PROPIEDADES ASOCIATIVA, CONMUTATIVA Y DISTRIBUTIVA DEL ALGEBRA MATRICIAL

Muchas de las propiedades asociativas, conmutativas y distributivas del algebra escalar se presentan en el algebra matricial, tales como:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = -\mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad \alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$$

$$\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha \quad \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{BC}$$

La mayor diferencia entre el algebra escalar y matricial es que la multiplicación escalar es conmutativa,  $ab = ba$ , pero la matricial no,  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ . En muchos de los casos el producto invertido ni siquiera esta definido de acuerdo a las condiciones de la operación.

## 9.3 MATRIZ TRANSPUESTA, CONJUGADA Y LA MATRIZ ASOCIADA

La transposición de una matriz es intercambiar cada una de sus filas con sus columnas del mismo índice. Si  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ , entonces la transpuesta de  $\mathbf{A}$  es  $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$ .

### 9.3.1 Propiedades de la transposición de matrices:

1. La transposición de una matriz transpuesta es la misma matriz original

$$(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}$$

2. Si  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

$$\mathbf{C}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}$$

3. Si  $\mathbf{AB}$  es definido,  $(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ .

4. La transpuesta de una matriz identidad es la matriz identidad misma.

5. Si  $\mathbf{A}$  es una matriz tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ ; entonces  $\mathbf{A}$  es una matriz simétrica.

6. Si  $\mathbf{A}$  es una matriz tal que  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$  se dice que  $\mathbf{A}$  es una matriz anti-simétrica

7. La transpuesta de un escalar es el escalar mismo. Por tanto, si  $\beta$  es un escalar

$$\beta = \beta^{\mathbf{T}}$$

8. La transpuesta de  $(\beta\mathbf{A})^{\mathbf{T}}$  es  $\beta\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ ; donde  $\beta$  es un escalar.

#### *Ejemplo 4.*

Hallar la transpuesta de  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 15 \\ 9 & 11 & 18 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 3 \\ 8 & 11 & 1 \\ 15 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

La conjugada de  $\mathbf{A}$ ,  $\bar{\mathbf{A}}$ , es la matriz formada mediante el remplazo de todos los elementos en  $\mathbf{A}$  por su complejo conjugado. Es decir, la parte imaginaria de los elementos de la matriz cambian su signo. Denotada por  $\bar{\mathbf{A}} = [\bar{a}_{ij}]$ . Si todos los elementos de  $\mathbf{A}$  son reales, entonces  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ . Si todos los elementos de  $\mathbf{A}$  son completamente imaginarios, entonces  $\bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}$ .

### 9.3.2 Propiedades de la conjugación de matrices

1. La conjugación de una matriz conjugada es la misma matriz original

$$\overline{(\bar{\mathbf{A}})} = \mathbf{A}$$

2. Si  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

$$\bar{\mathbf{C}} = (\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}) = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}$$

3. Si  $\mathbf{AB}$  es definido,  $(\overline{\mathbf{AB}}) = \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{A}}$ .

4. La conjugada de  $(\beta\bar{\mathbf{A}})$  es  $\bar{\beta}\bar{\mathbf{A}}$ ; donde  $\beta$  es un escalar y  $\bar{\beta}$  es el conjugado de ese escalar.

#### *Ejemplo 5.*

Hallar la conjugada de  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4+j & 8 & -1+2j \\ 2-6j & 11+5j & -1-3j \\ 3 & 1 & 9j \end{bmatrix}$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 4-j & 8 & -1-2j \\ 2+6j & 11-5j & -1+3j \\ 3 & 1 & -9j \end{bmatrix}$$

La matriz asociada de una matriz es la conjugada transpuesta de esta. El orden de estas operaciones es irrelevante. Si  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ , entonces la matriz asociada de  $\mathbf{A}$  es  $\mathbf{A}^* = \bar{\mathbf{A}}^T$ .

### 9.3.3 Propiedades de las matrices adjuntas

1. La adjunta de una matriz adjunta es la misma matriz original

$$(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$$

2. Si  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

$$\mathbf{C}^* = (\mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*) = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$$

3. Si  $\mathbf{AB}$  es definido,  $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{A}^* \mathbf{B}^*$ .
4. La transpuesta de  $(\beta \mathbf{A})^*$  es  $\bar{\beta} \mathbf{A}^*$ ; donde  $\beta$  es un escalar y  $\bar{\beta}$  es el conjugado de ese escalar.
5. Si  $\mathbf{A}$  es una matriz tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ ; entonces  $\mathbf{A}$  es una matriz hermítica.
6. Si  $\mathbf{A}$  es una matriz tal que  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$  se dice que  $\mathbf{A}$  es una matriz anti-hermítica.

#### *Ejemplo 6.*

Hallar la conjugada de  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4+j & 8 & -1+2j \\ 2-6j & 11+5j & -1-3j \\ 3 & 1 & 9j \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 4-j & 2+6j & 3 \\ 8 & 11-5j & 1 \\ -1-2j & -1+3j & 9j \end{bmatrix}$$

## 9.4 DETERMINANTES, MENORES Y COFACTORES

Los determinantes solo están definidos para matrices cuadradas. El determinante de una matriz  $n \times n$  se escribe  $|\mathbf{A}|$ . Por ejemplo, la evaluación del determinante de una matriz de orden  $3 \times 3$  es:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Se tiene como patrón que para una matriz de orden  $n \times n$  su determinante tiene  $n!$  términos y cada uno de esos términos tiene  $n$  elementos de  $\mathbf{A}$ , uno de cada fila y cada columna. Generalmente, este patrón no es eficiente para evaluar determinantes para matrices de orden alto. Para hallar el determinante de estas matrices se usan otros métodos como la expansión de Laplace y pivote entre otros. Además las siguientes propiedades de los determinantes nos ayudan a facilitar su proceso de evaluación:

1. Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son  $n \times n$ , entonces  $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ .
2. Los determinantes de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}^T$  son los mismos:  $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ .
3. Los determinantes de  $\mathbf{A}^*$  y  $\bar{\mathbf{A}}$  son los mismos:  $|\mathbf{A}^*| = |\bar{\mathbf{A}}|$ .
4. Si todos los elementos de cualquier fila o columna de  $\mathbf{A}$  son cero, su determinante es cero.
5. Si cualquier fila o columna de una matriz es una combinación lineal de otras filas o columnas, su determinante es cero. Por tanto, si una fila o una columna de una matriz es un múltiplo de otra fila o columna de esa matriz, su determinante es cero.
6. Si se intercambia dos filas o dos columnas de la matriz el signo del determinante cambia.
7. Al multiplicar los elementos de una fila o columna de  $\mathbf{A}$  por un escalar  $\alpha$ , entonces el determinante de la matriz es  $\alpha |\mathbf{A}|$ .

8. Cualquier múltiplo de una fila o columna se puede añadir a cualquier otra fila o columna sin cambiar el valor del determinante de la matriz.
9. Si todos los elementos de la matriz se multiplican por un escalar  $\alpha$ , entonces el determinante de la matriz es  $\alpha^n |\mathbf{A}|$ .
10. Una matriz cuyo determinante tiene un valor de cero se denomina una matriz singular.

**Ejemplo 7.**

Hallar el determinante de  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 15 \\ 9 & 11 & 18 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$|\mathbf{A}| = 4 * (11 * 2 - 1 * 18) - 9 * (8 * 2 - 1 * 15) + 3 * (8 * 18 - 11 * 15)$$

$$|\mathbf{A}| = 4 * (4) - 9 * (1) + 3 * (-21)$$

$$|\mathbf{A}| = 16 - 9 - 63 = -56$$

### 9.4.1 Menores

Una matriz  $\mathbf{A}$  de orden  $n \times n$  tiene  $n^2$  elementos  $a_{ij}$ . Cada uno de estos elementos esta asociado con un escalar, llamado menor,  $M_{ij}$ . El menor  $M_{ij}$  es el determinante de la matriz  $n - 1 \times n - 1$  formada de  $\mathbf{A}$  eliminando a  $p$ -ésima fila y la  $q$ -ésima columna.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$$

**Ejemplo 8.**

Hallar los menores de la primera fila de  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 15 \\ 9 & 11 & 18 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 11 & 18 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11 * 2 - 18 * 1 = 4$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9 * 2 - 18 * 3 = -36$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 9 * 1 - 11 * 3 = -24$$

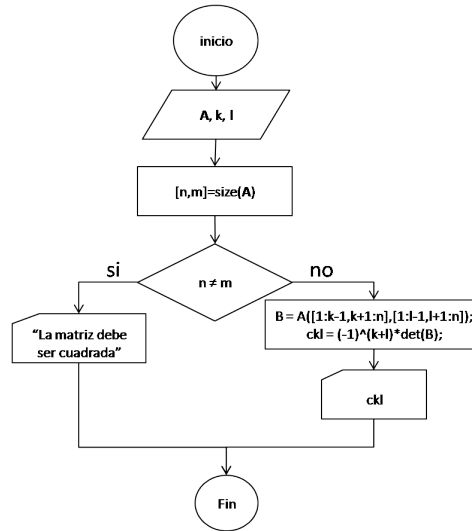
### 9.4.2 Cofactores

Cada uno de los elementos de una matriz  $\mathbf{A}$  tiene un cofactor  $C_{pq}$ , que se diferencia de  $M_{pq}$  básicamente por un cambio de signo. Dado por:

$$C_{pq} = (-1)^{p+q} M_{pq}$$

En la figura 9.1 se muestra el algoritmo para hallar el cofactor de la posición requerida ( $pq$ )

Figure 9.1: Algoritmo cofactores



**Ejemplo 9.**

Hallar los cofactores de la primera fila de  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 15 \\ 9 & 11 & 18 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$M_{11} = 4, C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 4$$

$$M_{12} = -36, C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = 36$$

$$M_{13} = -24, C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = -24$$

**9.4.3 Determinantes por el método de Expansión de Laplace**

Si  $\mathbf{A}$  es una matriz  $n \times n$ , cualquier fila  $k$  se puede seleccionar y  $|\mathbf{A}|$  esta dado por

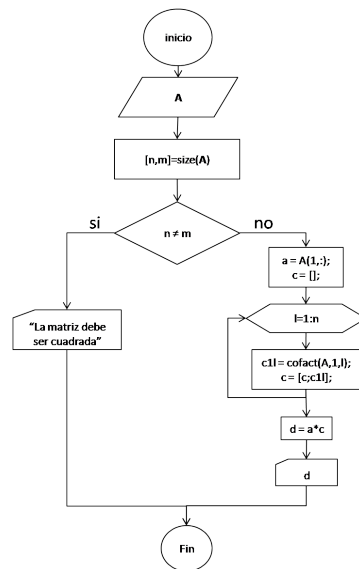
$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n a_{kj} C_{kj}$$

La expansión de Laplace también se puede hacer respecto a cualquier columna  $l$ , entonces  $|\mathbf{A}|$  esta dado por

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n a_{il} C_{il}$$

En la figura 9.2 se muestra el algoritmo para hallar el determinante

Figure 9.2: Algoritmo determinante



**Ejemplo 10.**

Hallar el determinante de  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 15 \\ 9 & 11 & 18 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  por el método de expansión de Laplace

Del ejemplo 9 tenemos los cofactores de la primera fila ( $k = 1$ ).

$$C_{11} = 4, C_{12} = 36, C_{13} = -24$$

Aplicando la fórmula tenemos:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^3 a_{1j}C_{1j} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = 4 * 4 + 8 * 36 + 15 * -24$$

$$|\mathbf{A}| = 16 + 288 - 360 = -56$$

#### 9.4.4 Determinantes por el método del pivote

El método del pivote reduce un determinante  $n \times n$  en un determinante  $(n-1) \times (n-1)$  en donde se evita el largo procedimiento de la expansión de Laplace. Si  $a_{pq}$  es cualquier elemento de  $\mathbf{A}$  diferente de cero, este será llamado el elemento pivote. Se forma un determinante  $(n-1) \times (n-1)$ , donde cada uno de los elemento se obtiene de un determinante  $2 \times 2$ . Cada uno de estos determinantes contiene el elemento pivote  $a_{pq}$ , otro elemento de la  $p$ -ésima fila, otro de la  $q$ -ésima columna y el cuatro elemento es el cruce entre estos dos elementos (formando un rectángulo imaginario). Este determinante  $(n-1) \times (n-1)$  se escribe  $|\Delta|$ . La ecuación es

$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{(a_{pq})^{n-2}} |\Delta|$$

#### *Ejemplo 11.*

Hallar el determinante de  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 15 \\ 9 & 11 & 18 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  por el método del pivote.

Eligiendo  $a_{22}$  como el pivote tenemos

$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{(a_{22})^{3-2}} |\Delta| = \frac{1}{a_{22}} \left| \begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & \\ \hline a_{21} & a_{22} & \\ \hline a_{31} & a_{32} & \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{32} & a_{33} \end{array} \right|$$

$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{11} \left| \begin{array}{c|c|c} 4 & 8 & \\ \hline 9 & 11 & \\ \hline 9 & 11 & \\ \hline 3 & 1 & \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} 8 & 15 \\ \hline 11 & 18 \\ \hline 11 & 18 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \right| = \frac{1}{11} \left| \begin{array}{c|c} -28 & -21 \\ \hline -24 & 4 \end{array} \right| = \frac{1}{11}(-616) = -56$$

## 9.5 RANGO Y TRAZA DE UNA MATRIZ

El rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes. El valor máximo que puede tener el rango de una matriz es el menor de los números correspondientes al número de filas y columnas, es decir, si una matriz tiene dimensión  $3 \times 5$ , el valor máximo que puede alcanzar el rango de dicha matriz es 3 (pues  $3 = \text{mínimo}\{3,5\}$ ). También se puede definir como el orden del más grande determinante diferente de cero que se puede formar de una matriz. Un determinante cero es interpretado en términos del cero del campo numérico que se utiliza. Por lo tanto, una matriz con elementos de polinomios racionales se considera singular si su determinante es idéntico a cero, y no sólo si su determinante pasa a tener un valor cero para algunos valores aislados de  $s$  o  $z$ . Lo mismo se aplica para la determinación del rango de estas matrices.

El rango de un producto de dos o más matrices nunca es mayor que el rango más pequeño de las matrices que forman el producto. Por ejemplo, si  $r_A$  y  $r_B$  son los rangos de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , donde  $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$  que tiene rango  $r_C$  se cumple que  $0 \leq r_C \leq \text{mín}(r_A, r_B)$ . Si  $\mathbf{A}$  es una matriz  $n \times n$  y  $n$  es su rango, entonces esta matriz es llamada no-singular..

Siendo  $\mathbf{A}$  una matriz  $n \times n$ , entonces la traza de  $\mathbf{A}$ , denotada por  $Tr(\mathbf{A})$ , es la suma de los elementos que conforman la diagonal principal de  $\mathbf{A}$ ,

$$Tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son matrices cuadradas, entonces  $Tr(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = Tr(\mathbf{A}) + Tr(\mathbf{B})$ ,  $Tr(\mathbf{AB}) = Tr(\mathbf{BA})$  y  $Tr(\mathbf{AB}) \neq Tr(\mathbf{A})Tr(\mathbf{B})$ .

**Ejemplo 12.**

Hallar el rango y la traza de  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 15 \\ 9 & 11 & 18 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ .

Como  $|\mathbf{A}| = -56$  el rango de  $\mathbf{A}$   $r_{\mathbf{A}} = 3$  y se dice que  $\mathbf{A}$  es una matriz no singular.

Para la matriz  $\mathbf{B}$ ,  $|\mathbf{B}| = 0$  ya que la columna 2 es múltiplo de la columna 1 (-1), entonces  $r_{\mathbf{B}} < 3$ . Sacando el determinante una submatriz eliminando la fila 2 y la columna 1 es -26, entonces  $r_{\mathbf{B}} = 2$ .

$$Tr(\mathbf{A}) = 4 + 11 + 2 = 17$$

$$Tr(\mathbf{B}) = 1 + (-3) + 6 = 4$$

## 9.6 INVERSIÓN DE MATRICES

El inverso de un escalar  $a$  es  $1/a$  ( $a^{-1}$ ), esto satisface  $a(a^{-1}) = (a^{-1})a = 1$ . Si una matriz arbitraria  $\mathbf{A}$  tiene una análoga inversa  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ , entonces se cumple que  $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$ . Esto solo se cumple si y solo si  $\mathbf{A}$  es siempre una matriz cuadrada. Además el determinante de  $\mathbf{A}$  debe ser diferente de cero y también ser una matriz no-singular. Si esto se cumple  $\mathbf{A}$  tiene una inversa dada por

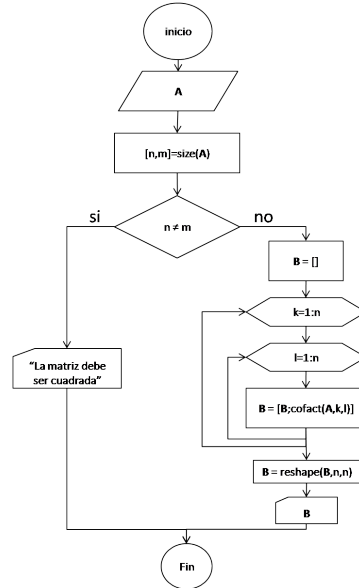
$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{C}^T}{|\mathbf{A}|}$$

donde  $\mathbf{C}$  es la matriz formada por los cofactores  $C_{ij}$ . La matriz  $\mathbf{C}^T$  es llamada la matriz adjunta,  $Adj(\mathbf{A})$ . Entonces la inversa de una matriz no-singular es

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{Adj(\mathbf{A})}{|\mathbf{A}|}$$

En la figura 9.3 se muestra el algoritmo para hallar el determinante

Figure 9.3: Algoritmo matriz adjunta



La inversa de un producto de matrices es el producto invertido de las inversas de cada una de estas matrices  $(\mathbf{ABC} \cdots \mathbf{W}) = \mathbf{W}^{-1} \cdots \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$ .

Una matriz involutiva es aquella que su inversa es igual a la matriz original  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$ . Cuando la inversa de una matriz es igual a la traspuesta de la misma,  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ , es llamada matriz ortogonal.

**Ejemplo 13.**

Hallar la inversa de  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 15 \\ 9 & 11 & 18 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Como  $|\mathbf{A}| = -56$ ,  $\mathbf{A}^{-1}$  existe.

Primero hallamos  $\mathbf{C}$  (matriz de cofactores)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 36 & -24 \\ -1 & -37 & 20 \\ -21 & 63 & -28 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -21 \\ 36 & -37 & 63 \\ -24 & 20 & -28 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -1 & -21 \\ 36 & -37 & 63 \\ -24 & 20 & -28 \end{bmatrix}}{-56}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.07 & 0.02 & 0.38 \\ 0.64 & 0.66 & -1.13 \\ 0.43 & 0.36 & 0.5 \end{bmatrix}$$

## 9.7 PARTICIÓN DE MATRICES

Cualquier matriz  $\mathbf{A}$  puede ser particionada o subdividida en submatrices más pequeñas. Si estas matrices se dividen de forma compatible, las submatrices pueden ser tratadas como si fueran escalares cuando se hacen operaciones de suma y multiplicación.

La partición de matrices pueden ser usadas para hallar una expresión para la inversa de una matriz no-singular  $\mathbf{A}$ . Si  $\mathbf{A}$  es subdividida en cuatro submatrices, además  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$  que también se tiene cuatro submatrices

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I} \circ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

La partición implica cuatro diferentes ecuaciones matriciales:

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_3 = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}_3\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_4\mathbf{B}_3 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_4 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}_3\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_4\mathbf{B}_4 = \mathbf{I}$$

Despejando las  $\mathbf{B}_n$ :

$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_4^{-1}\mathbf{A}_3)^{-1}$$

$$\mathbf{B}_2 = -\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2(\mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2)^{-1}$$

$$\mathbf{B}_3 = -\mathbf{A}_4^{-1}\mathbf{A}_3(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_4^{-1}\mathbf{A}_3)^{-1}$$

$$\mathbf{B}_4 = (\mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2)^{-1}$$

siendo la inversa de  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_4^{-1}\mathbf{A}_3)^{-1} & -\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2(\mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2)^{-1} \\ -\mathbf{A}_4^{-1}\mathbf{A}_3(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_4^{-1}\mathbf{A}_3)^{-1} & (\mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2)^{-1} \end{bmatrix}$$

Muchas identidades matriciales se pueden derivar a partir del orden inverso,  $\mathbf{B}\mathbf{A}=\mathbf{I}$  repitiendo el proceso anterior, y luego usando la singularidad de  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$  para igualar los diferentes términos. Una identidad, llamada el lema de la inversión de matrices, es particularmente útil. Una forma general es

$$(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_4^{-1}\mathbf{A}_3)^{-1} = \mathbf{A}_1^{-1} + \mathbf{A}_1^{-1}(\mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_3\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1^{-1}$$

Si los únicos elementos diferentes de cero en una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  son la diagonal principal, entonces  $\mathbf{A}$  se llama una matriz diagonal. También se escribe como  $\mathbf{A} = \text{diag} [ a_{11} \ a_{22} \ \cdots \ a_{nn} ]$ . Para este caso,  $|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$  y  $\mathbf{A}^{-1} = \text{diag} [ 1/a_{11} \ 1/a_{22} \ \cdots \ 1/a_{nn} ]$ . La matriz unitaria es un caso especial donde todos  $a_{ii} = 1$ .

Una matriz de bloque diagonal, o cuasidiagonal es una matriz cuadrada que se puede particionar de tal modo donde los únicos elementos diferentes de cero son los que pertenecen a la diagonal principal,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} = \text{diag} [ \mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2 \ \cdots \ \mathbf{A}_k ]$$

para este caso  $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_1||\mathbf{A}_2|\cdots|\mathbf{A}_k|$  y  $\mathbf{A}^{-1} = \text{diag} [ \mathbf{A}_1^{-1} \ \mathbf{A}_2^{-1} \ \cdots \ \mathbf{A}_k^{-1} ]$ , con la condición que  $\mathbf{A}^{-1}$  exista.

Una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos inferiores (superiores) de la diagonal principal igual a cero se denomina matriz triangular superior (triangular inferior). El determinante de una matriz triangular es el producto de sus elementos diagonales.

## 9.8 DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN DE MATRICES

Cuando una matriz  $\mathbf{A}$  tiene elementos que son función de una variable escalar, la diferenciación e integración de la matriz se hace elemento por elemento,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}a_{11}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dt}a_{n1}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nm}(t) \end{bmatrix} \text{ y } \int \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \int a_{11}(t)dt & \cdots & \int a_{1m}(t)dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int a_{n1}(t)dt & \cdots & \int a_{nm}(t)dt \end{bmatrix}$$

donde en la integración se considera que los elementos  $a_{ij}(t)$  son integrables como función de  $t$ .

Si los elementos de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son funciones de  $t$ , entonces

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d}{dt}\mathbf{A} + \frac{d}{dt}\mathbf{B}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B} + \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

Si  $k(t)$  es un escalar y es función de  $t$ , entonces

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}k(t)] = \frac{d\mathbf{A}}{dt}k(t) + \mathbf{A}\frac{dk(t)}{dt}$$

También tenemos que

$$\int_a^b \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B}dt = \mathbf{A}\mathbf{B}\Big|_a^b - \int_a^b \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt}dt$$

La derivada de  $\mathbf{A}^{-1}$  esta dada por

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1}\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^{-1}$$

Esta ecuación se puede derivar fácilmente al diferenciar  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$  con respecto a  $t$ . Ya que

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}\frac{d\mathbf{A}^{-1}}{dt}$$

y

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \frac{d}{dt}\mathbf{I} = 0$$

tenemos que

$$\mathbf{A}\frac{d\mathbf{A}^{-1}}{dt} = -\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^{-1}$$

o

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\frac{d\mathbf{A}^{-1}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}^{-1}}{dt} = -\mathbf{A}^{-1}\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^{-1}$$

que es el resulta deseado.

## 9.9 EL OPERADOR GRADIENTE

Si tenemos a  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  una función escalar con  $n$  variables  $x_i$ . La derivada parcial de  $f(\mathbf{x})$  (siendo  $\mathbf{x}$  un vector con los componentes  $x_i$ ),  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ , se podría utilizar frecuentemente. Una matriz con una sola fila o una sola columna se podrían utilizar para este propósito y ambos se conocen como el vector gradiente. Se utilizan diferentes símbolos para identificar el gradiente de  $f(\mathbf{x})$ ,  $\nabla f = \text{grad} \cdot f = df/d\mathbf{x}$ . el significado de estos símbolos es

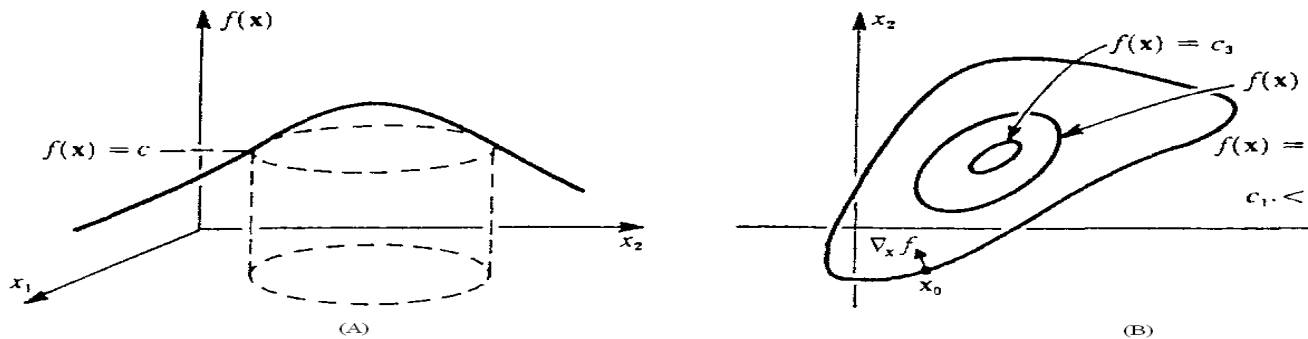
$$\nabla f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T$$

la única diferencia que hay entre las definiciones para vector fila y vector columna es la presencia o ausencia de la Transpuesta en diversas manipulaciones algebraicas.

La interpretación geométrica del gradiente también es útil. Para facilitar la visualización, el vector  $\mathbf{x}$  se limita a dos componentes. Entonces para cada punto  $\mathbf{x}$  tiene un valor predeterminado.

La ecuación  $f(\mathbf{x}) = c$ , siendo  $c$  una constante, especifica un lugar de puntos en el plano. En un punto dado,  $\nabla f$  es un vector normal a la curva  $f(\mathbf{x}) = c$ , y apunta en la dirección de los valores crecientes de  $f(\mathbf{x})$ . El gradiente define la dirección de aumento máximo de la función  $f(\mathbf{x})$

Figure 9.4: Gradiente



La derivada de una función escalar respecto vector es un vector, el vector gradiente. Si un vector con una función vectorial, es considerado, el gradiente de cada componente es un vector columna con la misma dimensión que  $\mathbf{x}$ . Si se hace la transpuesta a la función  $f(\mathbf{x})$  a un vector fila, entonces

$$\nabla f^T(\mathbf{x}) = [ \nabla f_1(\mathbf{x}) \quad \nabla f_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \nabla f_m(\mathbf{x}) ]$$

es una matriz  $n \times m$  cuyas columnas son gradientes. La transpuesta de esta matriz se escribe  $\nabla \mathbf{f}(x)$  o simplemente  $d\mathbf{f}/d\mathbf{x}$ . Esto es,  $d\mathbf{f}/d\mathbf{x} \doteq \partial f_i / \partial x_i$  y esta matriz  $m \times n$  es la Matriz Jacobiana.

Las segundas derivadas parciales de una función de un vector se plantean también en ocasiones. Donde  $f(\mathbf{x})$  es una función con valores escalares, la matriz con todas las segundas derivadas parciales, es llamada la matriz de Hesse.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Se hace difícil seguir estas definiciones a la segunda derivada de una función vectorial de la función vector con respecto a un vector. Esto requeriría una matriz tridimensional.

## 9.10 SERIE DE TAYLOR

La serie de Taylor de una función  $f(x)$  infinitamente derivable (real o compleja) definida en un intervalo abierto  $(a-r, a+r)$  se define como la siguiente suma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Donde  $n!$  es el factorial de  $n$  y  $f^{(n)}(a)$  indica la  $n$ -ésima derivada de  $f$  en el punto  $a$ .

Si esta serie converge para todo  $x$  perteneciente al intervalo  $(a-r, a+r)$  y la suma es igual a  $f(x)$ , entonces la función  $f(x)$  se llama analítica. Una función es analítica si y solo si se puede representar con una serie de potencias; los coeficientes de esa serie son necesariamente los determinados en la fórmula de la serie de Taylor.

Si  $a = 0$ , a la serie se le llama serie de Maclaurin. Esta representación tiene tres ventajas importantes:

- La derivación e integración de una de estas series se puede realizar término a término, que resultan operaciones sencillas.
- Se puede utilizar para calcular valores aproximados de la función.
- Es posible demostrar que, si es viable la transformación de una función a una serie de Taylor, es la óptima aproximación posible.

La serie de Taylor para una función exponencial es:

$$e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!}$$

La correspondiente función matricial se define como

$$e^{\mathbf{A}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}x)^n}{n!}$$

**Ejemplo 14.**

Hallar  $\frac{d}{dt} [e^{\mathbf{A}t}]$ .

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots$$

Derivando término por término

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} + \frac{2\mathbf{A}^2 t}{2!} + \frac{3\mathbf{A}^3 t^2}{3!} + \dots$$

$\mathbf{A}$  puede ser factorizado tanto a la derecha como a la izquierda

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} \left( \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots \right) = \left( \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots \right) \mathbf{A} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}$$

**Ejemplo 15.**

Hallar  $\int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau$ .

Integrando término por término

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau = \int_0^t \mathbf{I} d\tau + \int_0^t \mathbf{A}\tau d\tau + \int_0^t \frac{\mathbf{A}^2 \tau^2}{2!} d\tau + \int_0^t \frac{\mathbf{A}^3 \tau^3}{3!} d\tau + \dots = \mathbf{I}t + \frac{\mathbf{A}t^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^2 t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^4}{4!} + \dots$$

Entonces

$$\mathbf{A} \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau + \mathbf{I} = \mathbf{A} \left( \mathbf{I}t + \frac{\mathbf{A}t^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^2t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^3t^4}{4!} + \dots \right) + \mathbf{I} = e^{\mathbf{A}t}$$

o, si  $\mathbf{A}^{-1}$  existe

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau = \mathbf{A}^{-1} [e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}] = [e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}] \mathbf{A}^{-1}$$

## 9.11 VECTORIZACIÓN DE MATRICES

Hay veces en las que es mas conveniente tener un arreglo dentro de una sola columna que tener el arreglo tradicionalmente rectangular. Realizar este arreglo es llamado vectorización de una matriz. Las letras mayúsculas usadas para indicar matrices se mantiene, pero para indicar una columna vectorizada se encerrará esta letra en paréntesis.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \text{ vectorizando esta matriz } (\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{13} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

para ahorrar espacio se puede escribir la transpuesta

$$(\mathbf{A})^T = [ a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ \cdots \ a_{12} \ a_{22} \ a_{32} \ \cdots \ a_{13} \ a_{23} \ \cdots ]$$

. Las operaciones de vectorización y transposición no son commutativas,  $(\mathbf{A}^T) \neq (\mathbf{A})^T$ .

Una de las aplicaciones de la vectorización de matrices es en la solución de las ecuaciones de Lyapunov.

## Capítulo 10

# DESCRIPCIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS BAJO ESPACIO Y VARIABLES DE ESTADO

### 10.1 INTRODUCCIÓN

En la actualidad los sistemas de ingeniería tiene cada vez una mayor complejidad, debido principalmente a los requerimientos de las tareas y la elevada precisión que requieren determinados procesos. Los sistemas complejos pueden tener entradas y salidas múltiples y pueden variar en el tiempo. Debido a la necesidad de alcanzar los requerimientos cada vez más restrictivos en el desempeño de los sistemas de control, al aumento en la complejidad del sistema y a un acceso fácil a las computadoras de gran escala, aproximadamente desde 1960 se ha desarrollado La Teoría de control moderna, que es un nuevo enfoque del análisis y diseño de sistemas de control complejos. Este enfoque nuevo se basa en el concepto de estado. El concepto de estado por sí mismo no es nuevo, dado que ha existido durante largo tiempo en el campo de la dinámica clásica y en otros medios.

La Teoría de control moderna aplica a sistemas con entradas y salidas múltiples, que pueden ser lineales o no lineales mientras que la Teoría de control convencional ó clásica solo se aplica a sistemas lineales con una entrada y una salida invariantes en el tiempo. Así mismo la teoría de control moderna es esencialmente un enfoque en el dominio del tiempo, en contraste con la teoría de control convencional ó clásica que es un enfoque complejo en el dominio de la frecuencia.

La transformada de Laplace es usada para obtener modelos de función de transferencia que representan sistemas físicos lineales e invariantes en el tiempo descritos mediante ecuaciones

diferenciales ordinarias, donde la transformada de Laplace es usada para convertir las ecuaciones diferenciales que representan el sistema en una ecuación algebraica expresada en términos de la variable compleja  $s$ . Este método es atractivo porque proporciona un método práctico para diseñar y analizar sistemas, además permite utilizar diagramas de bloques para interconectar subsistemas, también es importante resaltar que este método nos muestra información clave en el dominio de la frecuencia[1].

En este capítulo se utiliza un método alternativo de modelado de sistemas utilizando un método en el dominio del tiempo. Al igual que antes, se considerarán sistemas físicos descritos por una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$ -ésimo. Utilizando un conjunto de variables (no único), conocido como variables de estado, se puede obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden. Se pueden agrupar estas ecuaciones de primer orden utilizando una notación matricial compacta en un modelo conocido como modelo en variables de estado. El modelo en variables de estado en el dominio del tiempo permite fácilmente calcular la solución y analizarla.[3]

Cabe resaltar que las técnicas en el *dominio del tiempo se usan para sistemas no lineales, variantes en el tiempo y multivariantes*. Un sistema de control *variante en el tiempo* es un sistema en el que uno o más de sus parámetros pueden variar en función del tiempo, por ejemplo la masa de un proyectil varía en función del tiempo a medida que se gasta el combustible durante el vuelo., Un *sistema multivariable* es un sistema con varias señales de entrada y salida. La solución de una formulación en el dominio del tiempo para un problema de sistemas de control, se facilita con la disponibilidad y fácil utilización de computadores digitales.

***El dominio en el tiempo es el dominio matemático que incorpora la respuesta y la descripción de un sistema en función del tiempo,  $t$ .***

Cabe resaltar que la teoría de control convencional se basa en la descripción de las ecuaciones de transferencia, la teoría de control moderna se basa en la descripción de las ecuaciones de un sistema en términos de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden. El uso de la notación matricial simplifica enormemente la representación matemática de los sistemas de ecuaciones. El incremento en la cantidad de variables de estado, de entradas y de salidas no aumenta la complejidad de las ecuaciones.

### 10.1.1 Definiciones básicas

Es importante tener en cuenta algunas definiciones:

***Sistemas:*** Conjunto de pares ordenados de funciones del tiempo que representan entradas y salidas.

**Estado:** El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (denominadas variables de estado) de modo que el conocimiento de estas variables en  $t = t_0$ , junto con el conocimiento de la entrada para  $t \geq t_0$ , determina por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo.

El concepto de estado de ningún modo está limitado a los sistemas físicos. Se puede aplicar a sistemas biológicos, económicos, sociales y otros.

**Variable de Estado:** Las variables de estado de un sistema dinámico son las que forman el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado del sistema dinámico.

Si se necesitan al menos  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , para describir por completo el comportamiento de un sistema dinámico (por lo cual una vez que se proporciona la entrada para  $t \geq t_0$  y se especifica el estado inicial en  $t = t_0$ , el estado futuro del sistema se determina por completo), tales  $n$  variables son un conjunto de variables de estado.

**Nota:** Las variables de estado no necesitan ser cantidades medibles u observables físicamente. Las variables que no representan cantidades físicas y aquellas que no son medibles ni observables pueden seleccionarse como variables de estado. Esta libertad al elegir las variables de estado es una ventaja de los métodos de espacio de estados. Sin embargo, en la práctica es conveniente elegir cantidades que se midan con facilidad para las variables de estado, si es posible, debido a que las leyes del control óptimo requerirán la realimentación de todas las variables de estado con una ponderación conveniente.

**Vector de Estado:** Si se necesitan  $n$  variables de estado para describir por completo el comportamiento de un sistema determinado, estas  $n$  variables de estado se consideran los  $n$  componentes de un vector  $x$ . Tal vector se denomina vector de estado. Por tanto un vector de estado es aquel que determina de manera única el estado del sistema  $x(t)$  para cualquier tiempo  $t \geq t_0$ , una vez que se obtiene el estado en  $t = t_0$  y se especifica la entrada  $u(t)$  para  $t \geq t_0$ .

**Espacio de estado:** Es el espacio  $n$ -dimensional, cuyos ejes de coordenadas son las variables de estado,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Un estado del sistema, sería un punto de este espacio de estado.

**Ecuaciones en el espacio de estados:** Se deben tener en cuenta tres tipos de variables involucradas en el modelado de los sistemas dinámicos, tales como, variables de entrada, variables de salida y variables de estado.

Permiten la descripción de sistemas dinámicos con dominio en el tiempo, representados por sistemas de Ecuaciones Diferenciales. *El dominio en el tiempo es el dominio matemático que incorpora la respuesta y descripción de un sistema en términos del tiempo.*

El sistema dinámico debe incorporar elementos que memoricen los valores de la entrada para  $t \geq t_1$ . Dado que los integradores de un sistema de control en tiempo continuo funcionan como dispositivos de memoria, las salidas de tales integradores se consideran las variables que definen el estado interno del sistema dinámico, Por tanto, las salidas de los integradores funcionan como variables de estado. *La cantidad de variables de estado necesarias para definir completamente la dinámica del sistema es igual a la cantidad de integradores que contiene el sistema.*

## 10.2 LAS VARIABLES DE ESTADO DE UN SISTEMA DINÁMICO

Para el diseño y análisis de los sistemas de control en el dominio del tiempo se utiliza el concepto de estado de un sistema el cual se define como “ *El estado de un sistema es un conjunto de variables tales que el conocimiento de estas variables y de las funciones de entrada, junto con las ecuaciones describen las dinámica, proporcionan la salida y el estado futuro del sistema* .[1]

Para un sistema dinámico, el estado de un sistema se describe en función de un conjunto de **variables de estado**  $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ . Estas variables son las que determinan el comportamiento futuro de un sistema cuando se conocen el estado presente de éste y las señales de excitación.

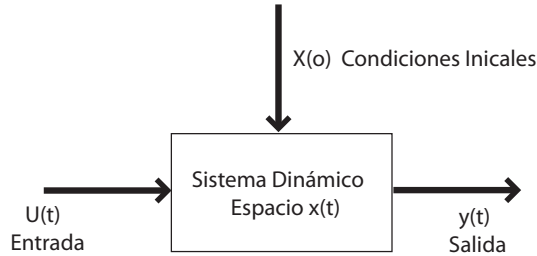
En la Figura 10.1 puede verse la representación de un sistema, en donde  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  representan las señales de salida y  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  representan las señales de entrada. Un conjunto de variables de estado  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  para el sistema que se muestra en la figura, en un conjunto tal que el conocimiento de los valores iniciales de las variables de estado  $[x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)]$ , en el tiempo inicial  $t_0$  y las señales de entrada  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  para  $t = t_0$  son suficientes para determinar los valores futuros de las salidas y de las variables de estado.[2]

Figure 10.1: Diagrama de Bloques del sistema



*Las variables de estado describen la respuesta futura de un sistema, conocido el estado el estado presente, las señales de excitación y las ecuaciones que describen la dinámica.* En la figura 10.2 podemos ver un ejemplo de un sistema dinámico.

Figure 10.2: Sistema dinámico



Las variables de estado de un sistema caracterizan el comportamiento dinámico de éste. El interés del ingeniero está principalmente en sistemas físicos donde las variables son voltajes, corrientes, velocidades, posiciones, presiones, temperaturas y variables físicas similares. Sin embargo, el concepto de estado de un sistema no está limitado al análisis de sistemas físicos, y es particularmente útil en análisis de sistemas biológicos, sociales y económicos. Para estos sistemas, el concepto de estado se extiende más allá del concepto de energía de un sistema físico, hasta el punto de vista más amplio de variables que describen el comportamiento futuro del sistema.

### 10.3 LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL ESTADO

Supongamos que un **sistema lineal** tiene entradas y salidas múltiples, también que existen  $r$  entradas definidas como  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  y  $m$  salidas definidas como  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ , además se definen las salidas de los integradores como variables de estado  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . Entonces el sistema queda definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= f_1(a_{11}x_1, a_{12}x_2, \dots, a_{1n}x_n; b_{11}u_1, b_{12}u_2, \dots, b_{1r}u_r; t) \\
 \dot{x}_2(t) &= f_2(a_{21}x_1, a_{22}x_2, \dots, a_{2n}x_n; b_{21}u_1, b_{22}u_2, \dots, b_{2r}u_r; t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n(t) &= f_n(a_{n1}x_1, a_{n2}x_2, \dots, a_{nn}x_n; b_{n1}u_1, b_{n2}u_2, \dots, b_{nr}u_r; t)
 \end{aligned}
 \tag{10.1}$$

Las salidas  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$  de obtienen mediante:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\
y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\
&\quad \vdots \\
y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)
\end{aligned} \tag{10.2}$$

Si definimos ;

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{10.3}$$

La matriz de columnas formadas por las variables de estado se denomina vector de estado, y se escribe tal como se muestra en la ecuación 10.3, donde la letra en **negrita** indica que es un vector.

$$f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(a_{11}x_1, a_{12}x_2, \dots, a_{1n}x_n; b_{11}u_1, b_{12}u_2, \dots, b_{1r}u_r; t) \\ f_2(a_{21}x_1, a_{22}x_2, \dots, a_{2n}x_n; b_{21}u_1, b_{22}u_2, \dots, b_{2r}u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(a_{n1}x_1, a_{n2}x_2, \dots, a_{nn}x_n; b_{n1}u_1, b_{n2}u_2, \dots, b_{nr}u_r; t) \end{bmatrix} \tag{10.4}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \tag{10.5}$$

$$g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix} \tag{10.6}$$

El vector de las señales de entrada esta definido como se muestra en la ecuación 11.7.

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

Entonces las ecuaciones 10.1 y 10.2 se convierten en:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (10.8)$$

$$y(t) = g(x, u, t) \quad (10.9)$$

En donde la ecuación 10.8 es la ecuación de estado ( ó Ecuación Diferencial de Estados) y la ecuación 10.9 es la ecuación de salida.

El estado de un sistema se describe por el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden escritas en función de las variables de estado ( $a_{11}x_1, a_{12}, x_2, \dots, a_{1n}x_n$ ) Ahora también podemos escribir la ecuación 10.8 ó la ecuación 10.1 para un **Sistema Lineal o para un sistema linealizado en un punto como:**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{1r}u_r \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{2r}u_r \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + b_{nr}u_r \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

Donde  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ , por tanto este conjunto de ecuaciones diferenciales simultaneas puede escribirse de forma matricial como se muestra en la ecuación 10.11.

$$\frac{dx}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & \dots & b_{2r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r \end{bmatrix} \quad (10.11)$$

Entonces el sistema puede representarse mediante la notación compacta de la ecuación diferencial de estados como se muestra en la ecuación 10.12 ;

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (10.12)$$

Donde  $\mathbf{A}$  es una matriz  $n \times n$  y  $\mathbf{B}$  es una matriz de  $n \times r$ . *La ecuación diferencial de estados relaciona la rapidez de cambio en el estado del sistema con el estado del sistema y las señales de entrada.* En general, las salidas de un sistema lineal pueden relacionarse con las variables de estado y con las señales de entrada por la ecuación 10.13, que se denomina ecuación de salida donde  $\mathbf{y}$  es el conjunto de señales de salida expresado en forma de vector columna.

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (10.13)$$

*La representación en el espacio de estados (o la representación en variables de estado) consta de la ecuación diferencial de estados y la ecuación de salida, Si las funciones vectoriales  $f$  y  $g$  no involucran el tiempo  $t$  explícitamente, el sistema se denomina sistema invariante con el tiempo.*

Donde ;

$\mathbf{A} = n \times n$ ; *Matriz de estados.*

$\mathbf{B} = n \times r$ ; *Matriz de entrada.*

$\mathbf{C} = m \times n$ ; *Matriz de salida.*

$\mathbf{D} = m \times r$ ; *Matriz de fuerzas disipativas..*

Tanto  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  son matrices Invariantes en el Tiempo lineal (LTI) o estacionario.

La función matricial exponencial se define como la ecuación 10.14 ;

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} + \dots, \quad (10.14)$$

que converge para todo  $t$  finito y cualquier  $\mathbf{A}$ , entonces se encuentra que la solución de la ecuación diferencial del vector de estado 10.12 es la que se muestra en la ecuación 10.15.

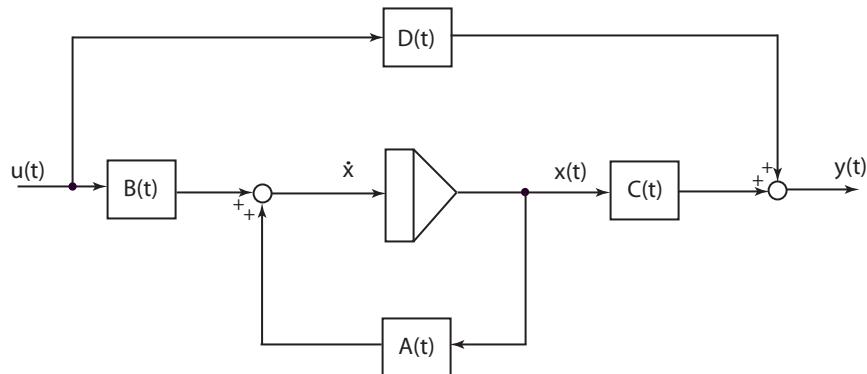
$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (10.15)$$

Donde  $x_0$  es la condición inicial.

Vemos que el estado del sistema es una superposición de una solución particular y una complementaria, Las complementaria esta dada por  $e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$  y depende de la condición inicial,  $x_0$  mientras que la solución particular viene dada por una convolución sobre la señal de entrada. Contiene toda la física de la interacción entre la señal de entrada y de la dinámica interna del sistema. La ecuación 10.15 puede ser sustituida en la ecuación 10.13 a fin de obtener una expresión analítica de  $\mathbf{y}(t)$ .<sup>1</sup>

La representación de espacio de estado de sistemas dinámicos de la ecuación 10.12 y 10.13 se ilustra en la Figura 10.3.

Figure 10.3: Diagrama de bloques del sistema de control lineal en tiempo continuo representado en el espacio de estados



<sup>1</sup>La solución de la ecuación diferencial del vector de estado se explicará en el capítulo 9.

### 10.3.1 Modelado de espacio de Estados según el tipo de sistema.

Este método de definido de variables de estado puede ser aplicado para sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas.,Se debe tener en cuenta que las variables de estado son el conjunto más pequeño de variables que pueden representar al sistema dinámico completo en un tiempo cualquiera. Las variables de estado deben ser linealmente independientes; una variable de estado no puede ser una combinación lineal de otras variables de estado. El número mínimo de variables de estado necesarias para representar un sistema dado es  $n$ , es normalmente igual al orden de la ecuación diferencial que define al sistema.

La formulación de las ecuaciones 10.12 y 10.13 depende de la variable temporal  $t$  ya que puede ser "continua" ( $t \in R$ ) o una discreta ( $t \in Z$ ), en éste último caso la variable temporal es generalmente indicada como  $k$ . Dependiendo de las consideraciones tomadas, la representación del modelo de espacios de estado puede tomar las siguientes formas tal como se muestra en la tabla 1.

Table 10.1: Modelado de espacio de estados según el tipo de Sistema

Tipo de sistema	Modelado de espacio de Estados
Continuo e invariante en el tiempo	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) ;$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$
Continuo y variante en el tiempo	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) ;$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$
Discreto e invariante en el tiempo	$\dot{\mathbf{x}}(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) ;$ $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$
Discreto y variante en el tiempo	$\dot{\mathbf{x}}(k + 1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) ;$ $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k)$
Transformada de Laplace continua e invariante en el tiempo	$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) ;$ $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$
Transformada Z discreta e invariante en el tiempo	$s\mathbf{X}(z) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z) ;$ $\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z)$

A continuación presentaremos algunos ejemplos en los cuales mostraremos como obtener la ecuación de estado y la ecuación de salida de un sistema para el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el mismo.

*Consideraciones: A,B,C,D son matrices Invariantes en el Tiempo lineal (LTI) para estos ejemplos , es decir este es el caso mas sencillo donde A,B,C,D son*

*constantes, por simplicidad consideraremos que la matriz  $D$  de fuerzas disipativas es igual a cero ( $D=0$ ).*

Para el ejemplo 1, consideraremos un sistema en el cual hay tres entradas  $u_1, u_2, u_3$  y tres salidas  $y_1, y_2, y_3$ , tal como se muestra en la figura 10.4.

Figure 10.4: Representación de un sistema con tres entradas y tres salidas



Las ecuaciones que se muestran a continuación describen la relación entre las salidas y entradas del sistema.

$$\ddot{y}_1 + a_1 y_1 + a_2(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + a_3(y_1 - y_3) = u_1(t)$$

$$\ddot{y}_2 + a_4(\dot{y}_2 - \dot{y}_1 + 2\dot{y}_3) + a_5(y_2 - y_1) = u_2(t)$$

$$\dot{y}_3 + a_6(y_3 - y_1) = u_3(t)$$

Se puede observar que en la ecuación  $u_2(t)$  el término  $\dot{y}_3$  puede ser eliminado usando la ecuación de  $u_3(t)$  ecuación.

Seleccionando  $x_1 = y_1$ ;  $x_2 = \dot{y}_1$ ;  $x_3 = \ddot{y}_1$ ;  $x_4 = y_2$ ;  $x_5 = \dot{y}_2$ ;  $x_6 = y_3$  como variables de estado, entonces las ecuaciones anteriores se puede reescribir como :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_4 = x_5$$

$$\dot{x}_3 = -a_1x_3 - a_2(x_2 + x_5) - a_3(x_1 - x_6) + u_1$$

$$\dot{x}_5 = -a_4(x_5 - x_2 + 2\dot{x}_6) - a_5(x_4 - x_1) + u_2$$

$$\dot{x}_6 = -a_6(x_6 - x_1) + u_3$$

Eliminando  $\dot{x}_6$  e introduciéndola en la ecuación de  $\dot{x}_5$  y representando en forma matricial las ecuaciones anteriores queda como la ecuación mostrada, que es la ecuación de estado.

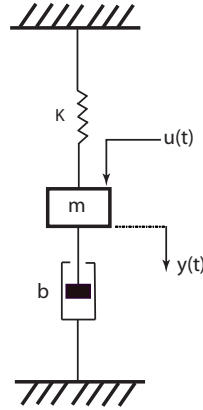
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 & 0 & -a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_5 - 2a_4a_6 & a_4 & 0 & -a_5 & -a_4 & 2a_4a_6 \\ a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2a_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

La ecuación 11.37 es la ecuación de salida del sistema.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad (10.16)$$

Para el ejemplo 2, Consideremos el sistema mecánico que aparece en la figura 5, Suponemos que el sistema es lineal. La fuerza externa  $u(t)$  es la entrada para el sistema, y el desplazamiento  $y(t)$  de la masa es la salida. El desplazamiento  $y(t)$  se mide a partir de la posición de equilibrio en ausencia de una fuerza externa. Este sistema tiene una sola entrada y una sola salida. [3]

Figure 10.5: Sistema Mecánico



Apartir de la Figura 10.5 la ecuación del sistema es:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

Como puede verse este sistema es de segundo orden, lo que significa que el sistema contiene dos integradores, definiremos las variables de estado como ;

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Entonces obtenemos:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-ky - b\dot{y}) + \frac{1}{m}u$$

reacomodando y sustituyendo términos tenemos :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

La ecuación de salida es

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1$$

En forma matricial estas ecuaciones pueden ser escritas como (Ecuación de estado):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

La ecuación de salida se escribe como ( Ecuación de salida ) ;

$$\mathbf{Y} = [ 1 \quad 0 ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Este par de ecuaciones están en la forma genérica como :

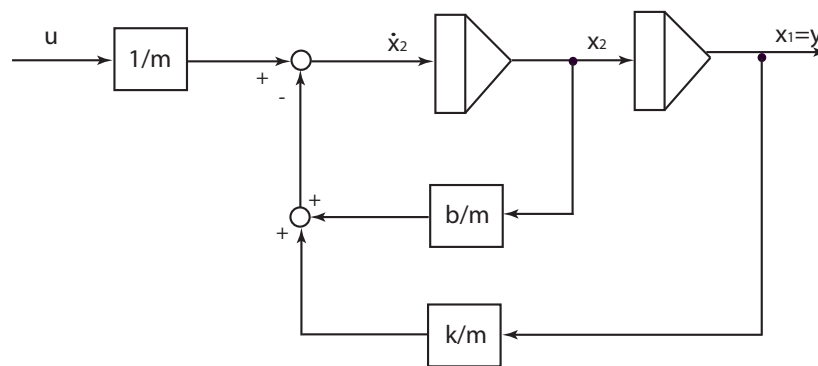
$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

En donde ;  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$  ;  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$  ;  $\mathbf{C} = [ 1 \ 0 ]$  ;  $\mathbf{D} = 0$

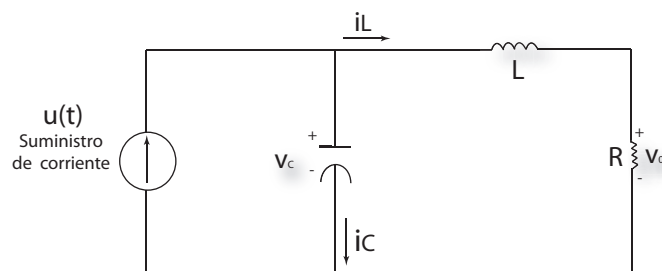
Además suponemos que el sistema es invariante en el tiempo por lo que las matrices A,B,C,D son constantes.,La representación dinámica en el espacio de estado del ejemplo anterior es tal como se ve en la figura 10.6;

Figure 10.6: Diagrama de bloques del sistema mecánico



El Ejemplo 3 , es otro ejemplo de caracterización de variables de estado de un circuito RCL , tal como se muestra en la figura 10.7.

Figure 10.7: Circuito RLC



El estado de este sistema puede describirse en función de un conjunto de variables de estado  $(x_1, x_2)$  donde  $x_1$  es el voltaje del condensador  $v_c(t)$  y  $x_2$  es igual a la corriente del inductor  $i_L(t)$  , estas variables con convenientes puesto que la energía almacenada puede escribirse mediante la ecuación 10.17 :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}Li_L^2 + \frac{1}{2}Cv_c^2 \quad (10.17)$$

Por lo tanto  $x_1(t_0)$  y  $x_2(t_0)$  representan la energía inicial total del sistema para cuando  $t = t_0$ , para un circuito RCL, el numero de variables de estado debe ser igual al numero de elementos independientes de almacenamiento de energía. Utilizando la ley de corrientes de Kirchhoff, obtenemos una E.D.P.O. escrita en forma general como se muestra en la ecuación 10.18 :

$$i_c = \frac{dv_c}{dt} = u(t) - i_L \quad (10.18)$$

La ley del voltaje de Kirchhoff para el lazo de la parte derecha de la figura 6 proporciona la ecuación que describe la relación del cambio de la corriente del inductor como se muestra en la ecuación 10.19 :

$$L \frac{di_L}{dt} = -Ri_L + v_c \quad (10.19)$$

Además, la salida de este sistema se representa por la ecuación algebraica lineal mostrada en la ecuación 10.20.

$$v_0 = Ri_L(t) \quad (10.20)$$

La ecuaciones 10.18 y 10.19 se pueden reescribir en términos de variables de estado  $x_1$  y  $x_2$  :

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t) \quad (10.21)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = +\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 \quad (10.22)$$

La señal de salida es :

$$y_1(t) = v_0(t) = R x_2$$

Por tanto , las matriz del sistema puede verse en las ecuación :

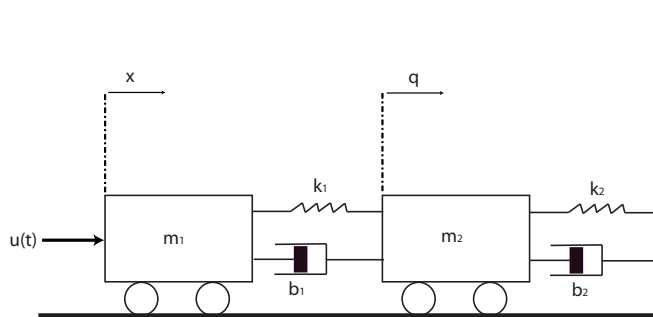
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

y las salidas tal como se muestra en las ecuaciones algebraicas ;

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ahora en el ejemplo 4 Consideremos el caso de dos carros con fricción despreciable en las ruedas se conectan como muestra en la figura 10.8 , una fuerza de entrada  $u(t)$  , la salida es la posición del carro 2, determinaremos una representación en el espacio de estados del sistema (en este caso nos piden determinar la matriz de estado del sistema).

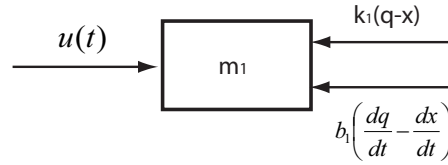
Figure 10.8: Sistema de dos masas , dos resortes , dos amortiguadores



El procedimiento como se ha llevado a cabo, es determinar las ecuaciones diferenciales dinámicas del sistema para después Determinar la ecuación diferencial de estado en forma matricial, entonces para esto debemos hacer el DLC ( diagrama de cuerpo libre para cada una de las masas.

EL DCL de la masa 1 es tal como se ilustra en la figura 10.9.

Figure 10.9: D.C.L. Masa 1

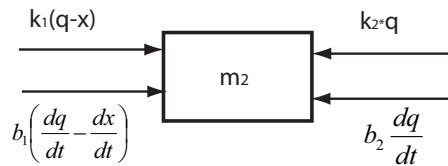


Y la ecuación que resulta al hacer el balance de fuerzas , es tal como se ilustra en la ecuación 10.23.

$$m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \left( \frac{dq}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) + k_1 (q - x) = u(t) \quad (10.23)$$

EL DCL de la masa 2 es tal como se ilustra en la figura 10.10.

Figure 10.10: D.C.L. Masa 2



La ecuación 10.24es la que resulta al hacer el balance de fuerzas sobre la masa 2.

$$m_2 \frac{d^2 q}{dt^2} + b_2 \frac{dq}{dt} + k_2 q - k_1 (q - x) - b_1 \left( \frac{dq}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) = 0 \quad (10.24)$$

Ahora definimos las variables de estado , y realizamos el debido remplazo en las ecuaciones 10.23 y 10.24, dando como resultado :

$$x_1 = x$$

$$x_2 = q$$

$$x_3 = \dot{x}_1 = \frac{dx}{dt}$$

$$x_4 = \dot{x}_2 = \frac{dq}{dt}$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{x}_1 = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k_1}{m_1}x_1 - \frac{k_1}{m_1}x_2 + \frac{b_1}{m_1}x_3 - \frac{b_1}{m_1}x_4 + \frac{u}{m_1}$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{x}_2 = \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{k_1}{m_2}x_1 + \frac{k_1-k_2}{m_2}x_2 - \frac{b_1}{m_2}x_3 + \frac{b_1-b_2}{m_2}x_4$$

Esta ecuación la podemos escribir en forma matricial , basando nos en la ecuación 10.12, lo que nos resulta en la ecuación 10.25

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} \\ -\frac{k_1}{m_2} & \frac{k_1-k_2}{m_2} & -\frac{b_1}{m_2} & \frac{b_1-b_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (10.25)$$

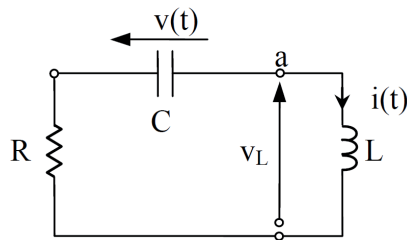
La ecuación algebraica de salida según 10.13, Para nuestro sistema queda, tal como se muestra en la ecuación 10.26.

$$y = [ 1 \ 0 \ 0 \ 0 ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (10.26)$$

## 10.4 SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS POR EL MÉTODO DE EULER

Ahora mostraremos la forma de calcular mediante solución numérica las ecuaciones de estado en el dominio del tiempo de un circuito RLC (ver figura 10.11) para un intervalo de tiempo dado.

Figure 10.11: Circuito R.L.C.



Formulando las ecuaciones de estado se obtiene ;

$$v + Ri + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

Con las condiciones iniciales:  $v(0)$  e  $i(0)$

Del modelo de ecuaciones de estado pueden obtenerse las ecuaciones diferenciales, de mayores órdenes, para cada una de las variables del circuito, por ejemplo para el voltaje en el condensador, se obtiene eliminando  $i$ :

$$v + RC \frac{dv}{dt} + LC \frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

Acomodando tenemos ;

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = 0$$

Con  $C = 1, R = \frac{2}{3}$ , y  $L = \frac{1}{3}$ ,  $v(0) = 1, i(0) = 0$  se tiene una ecuación diferencial de segundo grado sin excitaciones:

$$\ddot{v} + 2\dot{v} + 3v = 0$$

$$v(0) = 1, \dot{v}(0) = \frac{1}{C}i(0) = 0$$

Volviendo al problema de calcular soluciones numéricas en el dominio del tiempo, se desea obtener la solución  $v(t)$  para el intervalo desde  $t = 0$  hasta  $t = 6$ .

A partir de las ecuaciones de estado, con los valores de los parámetros, se tiene:

$$\frac{dv}{dt} = i$$

$$\frac{di}{dt} = -3v - 2i$$

Expresando matricialmente, se obtiene la matriz de estado  $\mathbf{A}$ .

$$\begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}$$

### 10.4.1 Método de Euler

A partir de la expresión de la serie de Taylor , para una variable escalar  $y$  se tiene :

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \frac{dy(t)}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \Delta t^2 + \dots$$

La relación anterior, puede generalizarse considerando  $y$  como un vector. Pueden calcularse aproximadamente, los valores en el instante siguiente ( $k + 1$ ) a partir de los valores en el instante  $K$ -ésimo, mediante:

$$v_{k+1} = v_k + \frac{dv(t_k)}{dt} \Delta t$$

$$i_{k+1} = i_k + \frac{di(t_k)}{dt} \Delta t$$

Este procedimiento se denomina esquema simple de Euler.

***Los valores de las derivadas se obtienen mediante la matriz de estado.***

A partir de de la ecuación de estado se determina el valor de las derivadas en un punto.

$$\begin{bmatrix} \frac{dv(0)}{dt} \\ \frac{di(0)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ i_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Sea  $\Delta t = 0,1$ , entonces lo valores en  $t = 0,1$  se obtiene mediante:

$$\begin{bmatrix} v(0,1) \\ i(0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(0) \\ i(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{dv(0)}{dt} \\ \frac{di(0)}{dt} \end{bmatrix} \Delta t$$

Para el siguiente punto, se efectúan los siguientes cálculos  $t = 0,2$ .

$$\begin{bmatrix} \frac{dv(0,1)}{dt} \\ \frac{di(0,1)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(0,1) \\ i(0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,3 \\ -2,4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v(0,2) \\ i(0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,3 \\ -2,4 \end{bmatrix} 0,1 = \begin{bmatrix} 0,97 \\ -0,54 \end{bmatrix}$$

Y así sucesivamente, hasta llegar al valor final  $t$  deseado.

La solución aproximada, por el esquema simple de Euler, puede ser suficiente en muchos casos. Existen numerosos métodos numéricos que dan mejores soluciones que el método de Euler, cuando las variables son funciones que tiene crecimientos o cambios muy grandes entre los intervalos en que se calculan los puntos.

En sistemas lineales se estudian métodos que permiten pasar de la representación de las variables de estado a Funciones de transferencia. Las funciones de transferencia modelan la representación de sistemas en el dominio de la frecuencia<sup>2</sup>.

Pueden obtenerse importantes propiedades del comportamiento del sistema en el espacio de estado. Esto se logra dibujando los valores de las variables de estado en términos del parámetro tiempo.

## 10.5 INTERCONECTIBILIDAD DE LOS SUBSISTEMAS

Supongamos que dos subsistema  $i$  y  $j$  han sido modelados en el espacio de estados como;

El subsistemas  $i$  esta definido como se ve en las ecuaciones 10.27 y 10.28.

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \quad (10.27)$$

$$y_i = \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{u}_i \quad (10.28)$$

---

<sup>2</sup>La relación entre variables de estado y ecuaciones de transferencia se estudiará en el capítulo 10.

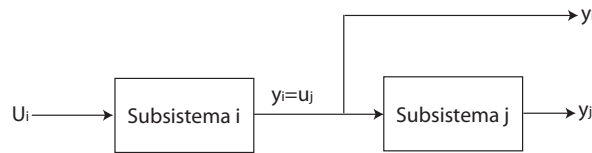
Mientras que el subsistema j esta definido mediante las ecuaciones 10.29 y 10.30. ;

$$\dot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{A}_j \mathbf{x}_j + \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j \quad (10.29)$$

$$y_j = \mathbf{C}_j \mathbf{x}_j + \mathbf{D}_j \mathbf{u}_j \quad (10.30)$$

Supongamos que la entrada del subsistema j es la salida del subsistema i, esto es  $u_j = y_i$  además  $y_i$  y  $y_j$  son ambas consideradas como salidas de la composición de sistemas.( ver figura 10.12 )

Figure 10.12: Interconectibilidad de los subsistemas



Ahora sustituyendo la ecuación 10.28 en las ecuaciones 10.29 y 10.30 nos queda que;

$$\dot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{A}_j \mathbf{x}_j + \mathbf{B}_j [\mathbf{C}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{u}_i] \quad (10.31)$$

$$y_j = \mathbf{C}_j \mathbf{x}_j + \mathbf{D}_j [\mathbf{C}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{u}_i] \quad (10.32)$$

La composición del vector de espacio del sistema ( subsistema 1 y 2 ) y el vector de salida son;

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} \quad (10.33)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_i \\ y_j \end{bmatrix} \quad (10.34)$$

*Nota: El número de variables de estado del sistema es la suma de las variables de los dos sistemas.*

Las ecuaciones 10.31 ,10.32 ,17.22 pueden ser escritas de tal forma que ellas satisfagan la ecuación de estado del sistema ( subsistema 1 y 2 ) y el vector de salida de dicho sistema, teniendo en cuenta el vector de espacio de estado del sistema (17.11) y el vector de salida del sistema (17.22), entonces queda:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & 0 \\ \mathbf{B}_j \mathbf{C}_i & \mathbf{A}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_j \mathbf{D}_i \end{bmatrix} \mathbf{u}_i \quad (10.35)$$

Donde la primera fila representa la ecuación 10.27 y la segunda fila representa la ecuación 10.31.

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i & 0 \\ \mathbf{D}_j \mathbf{C}_i & \mathbf{C}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i \\ \mathbf{D}_j \mathbf{D}_i \end{bmatrix} \mathbf{u}_i \quad (10.36)$$

Donde la primera fila representa la ecuación 10.28 y la segunda fila representa la ecuación 10.32.

Debe notarse que la parte de arriba de la partición derecha de la composición de matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{C}$  son ambas cero , esto es por que no hay parte del subsistema j dentro de i. La substitución aproximada puede ser extendida a varios sistemas interconectados.

Supongamos que tenemos cuatro subsistemas , donde hay dos grupos de entrada y cuatro grupos de salida definidos como.

$$u = [ u_1^T \quad u_3^T ]^T \text{ y } y = [ y_1^T \quad y_2^T \quad y_3^T \quad y_4^T ]^T$$

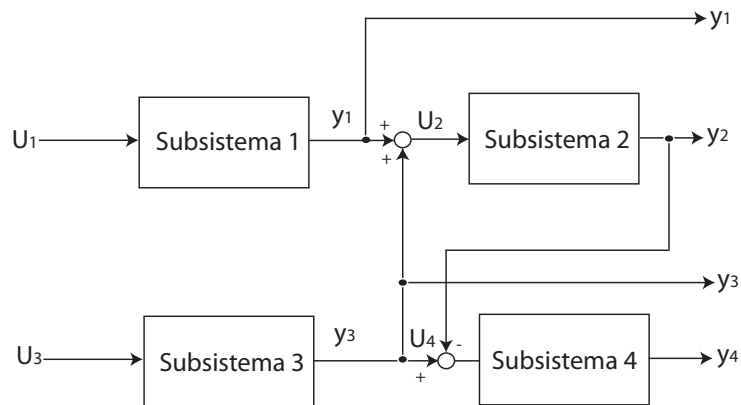
El vector de estado  $\mathbf{x}$  compuesto por  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$ , después de un tedioso proceso de substitución y arreglos, se encontró que el sistema compuesto puede ser descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 & B_2C_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 \\ -B_4D_2C_3 & -B_4C_2 & B_4C_3 - B_4D_2C_3 & A_4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_2D_1 & B_2D_3 \\ 0 & B_3 \\ -B_4D_2D_4 & B_4D_3 - B_4D_2D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_2C_2 & C_2 & D_2C_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 \\ -D_4D_2C_4 & -D_4C_2 & D_4C_2 - D_4D_2C_3 & C_4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ D_2D_1 & D_2D_3 \\ 0 & D_3 \\ -D_4D_2D_1 & D_4D_3 - D_4D_2D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Del sistema compuesto por los cuatro subsistemas se puede hacer la representación en el espacio del estado como se ilustra en la figura 10.13.

Figure 10.13: Interconexión de Cuatro Subsistemas



Algunas ventajas de la aplicación del método de espacios de estados, consiste en que la representación de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas es más sencilla, así como toda la dinámica del sistema, la cual se representa por ecuaciones diferenciales o de diferencia de primer orden, además, la simulación con métodos computacionales es más eficiente a consecuencia del desarrollo tecnológico, debido a estas ventajas algunas de las técnicas de control moderno se basan en este método.

## Capítulo 11

# ANÁLISIS DE LAS ECUACIONES DE ESTADO PARA SISTEMAS LINEALES EN TIEMPO CONTINUÓ

### 11.1 ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN LINEALES.

La ecuacion diferencial de primer orden es lineal si puede escribirse como:

$$\dot{x} = a(t)x(t) + b(t)u(t) \quad (11.1)$$

la cual se repasara antes de considerar el caso de una matriz de orden  $n$ th. Cuando la señal de salida  $u(t)$  es cero, la ecuacion diferencial para  $x$  se dice que es homogenea y en este caso

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x(t) \text{ or } \frac{dx}{x} = a(t)dt \quad (11.2)$$

Como la variable dependiente  $x$  y la variable independiente  $t$  se encuentra separados a ambos lados de la ecuacion y representan un diferencial entonces se pueden integrar

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \ln(x) \Big|_{x(t_0)}^{x(t)} = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \quad (11.3)$$

o

$$\ln x(t) - \ln x(t_0) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \quad (11.4)$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos

$$\ln x(t) - \ln x(t_0) = \ln [x(t)/x(t_0)] \quad (11.5)$$

y simplificando por medio de  $e^{\ln x} = x$  obtenemos

$$x(t) = x(t_0) e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \quad (11.6)$$

En un caso particular cuando  $a(t) = a$  es constante, la ecuación 11.6 se reduce a

$$x(t) = x(t_0) e^{(t-t_0)a} \quad (11.7)$$

Como era de esperarse, la condición inicial  $x(t_0)$  debe ser especificado antes de poder determinar una única solución  $x(t)$

Cuando se considera que la ecuación 11.1 es no-homogénea, una solución se puede obtener mediante la reducción de la ecuación a una que pueda ser fácilmente integrada. Es necesario hacer un paso extra primero. Considere

$$\frac{d}{dt} [k(t) x(t)] = k(t) \dot{x}(t) + \dot{k}(t) x(t) \quad (11.8)$$

Si la ecuación 11.1 es multiplicada por  $k(t)$  y reorganizada, el resultado es

$$k(t) \dot{x}(t) - k(t) a(t) x(t) = k(t) b(t) u(t) \quad (11.9)$$

En el lado izquierdo de la ecuacion se puede hacer un diferencial con tal que la funcion  $k(t)$  sea seleccionada para satisfacer  $\dot{k}(t) = -k(t)a(t)$ . Lo cual obliga a que  $k(t)$  represente una ecuacion homogenea de primer orden del tipo que acabamos de considerar, y su solucion es:

$$k(t) = k(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \quad (11.10)$$

Utilizando esta solucion, la ecuacion no-homogenea para  $x(t)$  se puede escribir en terminos de diferenciales

$$d[k(t)x(t)] = k(t)b(t)u(t)dt \quad (11.11)$$

Integrando a ambos lados y resolviendo para  $x(t)$

$$x(t) = \left[ \frac{k(t_0)}{k(t)} \right] x(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{k(\tau)}{k(t)} b(\tau) u(\tau) d\tau \quad (11.12)$$

Utilizando la solucion para  $k(t)$

$$x(t) = \left\{ e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \right\} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\int_{\tau}^t a(s) ds} b(\tau) u(\tau) d\tau \quad (11.13)$$

Si el coeficiente  $a$  es constante, se reduce a

$$x(t) = e^{(t-t_0)a} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)a} b(\tau) u(\tau) d\tau \quad (11.14)$$

Este resultado puede derivado directamente de la ecuacion 11.1 utilizando la transformada de Laplace y el teorema de convolucion. Con la condicion inicial de  $x(0)$

$$sx(s) - x(0) = ax(s) + \mathcal{L}[b(t)u(t)] \quad (11.15)$$

o

$$x(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{\mathcal{L}[b(t)u(t)]}{s-a} \quad (11.16)$$

Aplicando la inversa

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} = x(0)e^{at} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathcal{L}[b(t)u(t)]}{s-a}\right\} \quad (11.17)$$

Utilizando el teorema de convolucion  $\mathcal{L}^{-1}\{g_1(s)g_2(s)\} = \int_0^t g_1(t-\tau)g_2(\tau)d\tau$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathcal{L}[b(t)u(t)]}{s-a}\right\} = \int_0^t e^{(t-\tau)a}b(\tau)u(\tau)d\tau \quad (11.18)$$

Entonces

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)a}b(\tau)u(\tau)d\tau \quad (11.19)$$

La solucion para cualquier otra condicion inicial  $x(t_0)$

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)a}b(\tau)u(\tau)d\tau \quad \therefore \quad (11.20)$$

Comprabando la condicion inicial en la ecuacion 13 con  $t = t_0$

$$x(t_0) = \left\{e^{\int_{t_0}^{t_0} a(\tau)d\tau}\right\}x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0} e^{\int_{\tau}^{t_0} a(\varsigma)d\varsigma}b(\tau)u(\tau)d\tau \quad (11.21)$$

Donde  $a(t)$  es continuo,  $\int_{t_0}^{t_0} a(\tau)d\tau = 0$  por lo que  $e^{\int_{t_0}^{t_0} a(\tau)d\tau} = 1$

Igualmente  $\int_{t_0}^{t_0} e^{\int_{\tau}^{t_0} a(s)ds} b(\tau) u(\tau) d\tau = 0$

Por lo tanto  $x(t_0) = x(t_0)$

Comprobando la ecuacion diferencial

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \left[ \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right] e^{\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau} x(t_0) + \frac{d}{dt} \left[ \int_{t_0}^t e^{\int_{\tau}^{t_0} a(s)ds} b(\tau) u(\tau) d\tau \right] \quad (11.22)$$

Utilizando la formula general para derivar una integral

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{f(t)}^{g(t)} h(t, \tau) d\tau \right] = \int_{f(t)}^{g(t)} \frac{\partial h(t, \tau)}{\partial t} d\tau + h(t, g(t)) \frac{dg}{dt} - h(t, f(t)) \frac{df}{dt} \quad (11.23)$$

Aplicandola a la ecuacion diferencial

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right] = a(t) \quad (11.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \int_{t_0}^t e^{\int_{\tau}^{t_0} a(s)ds} b(\tau) u(\tau) d\tau \right] &= e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} b(t) u(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} \left[ e^{\int_{\tau}^{t_0} a(s)ds} \right] b(\tau) u(\tau) d\tau \\ &= b(t) u(t) + a(t) \int_{t_0}^t e^{\int_{\tau}^{t_0} a(s)ds} b(\tau) u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (11.25)$$

Por lo tanto

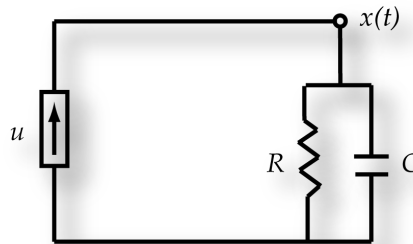
$$\dot{x} = a(t) \left[ \left\{ e^{\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau} \right\} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\int_{\tau}^{t_0} a(s)ds} b(\tau) u(\tau) d\tau \right] + b(t) u(t) \quad (11.26)$$

Cuando  $b$  es constante la ecuacion 11.14 indica que  $x(t)$  depende solo del intervalo de tiempo  $t - t_0$  y el tiempo de inicio  $t_0$  con frecuencia es replazado por 0 para simplificar. Cuando  $a$  y  $b$  son constantes, se dice que el sistema es invariante en el tiempo por que la respuesta de la señal de entrada es siempre la misma independientemente del tiempo de inicio.

### ***Ejemplo***

La señal de entrada del circuito de la figura 11.1. es una fuente de corriente ideal  $u(t)$ . Y la señal de salida es el voltaje en el condensad

Figure 11.1: Circuito R.C



$$u(t) = e^{t/RC} \frac{10 - e^{t_f/RC} x_0}{R \sinh(t_f/RC)}$$

y si  $x(0) = x_0$ , encontrar la salida  $x(t_f)$  cuando  $t = t_f$

La ecuacion de estado es:

$$\dot{x} = \frac{-x}{RC} + \frac{u}{C} \tag{11.27}$$

Utilizando la solucion general descrita en la ecuacion 11.14

$$x(t) = e^{-t/RC}x_0 + \frac{1}{C} \int_0^t e^{-(t-\tau)/RC} u(\tau) d\tau \quad (11.28)$$

Para efectos de simplicidad decimos

$$K = \frac{10 - e^{t_f/RC}x_0}{R \sin(t_f/RC)} \quad (11.29)$$

y por lo tanto

$$u = Ke^{t/RC} \quad (11.30)$$

Aplicandolo a la solucion general

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t/RC}x_0 + \frac{K}{C} \int_0^t e^{2\tau/RC} d\tau \\ &= e^{-t/RC}x_0 + \frac{K}{C} e^{-t/RC} \left\{ \frac{RC}{2} [e^{2\tau/RC} - 1] \right\} = e^{-t/RC}x_0 + KR \sinh\left(\frac{t}{RC}\right) \end{aligned} \quad (11.31)$$

Evaluando  $t = t_f$

$$x(t_f) = 10 \quad (11.32)$$

## 11.2 MATRIZ CON COEFICIENTES CONSTANTES

El conjunto de  $n$  ecuaciones de estado homogeneas

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} \quad \mathbf{x}(t_0), \mathbf{A} \text{ constante} \quad (11.33)$$

Tiene una solución que es completamente análoga al resultado escalar de la ecuación 11.7

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{x}(t_0) \quad (11.34)$$

Hay varios métodos para verificar que se trata de una solución a las ecuaciones de estado. Primero, las condiciones iniciales se deben satisfacer:

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{x}(t_0) = e^{[0]}\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) \quad (11.35)$$

Diferenciando ambos lados de la ecuación 11.34, es fácil verificar que  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ . Dado que la ecuación 11.34 satisface las condiciones iniciales y la ecuación diferencial, esta representa una única solución a la ecuación 11.33.

Considerando un conjunto de ecuaciones de estado no homogéneas, en el cual el sistema de la matriz  $\mathbf{A}$  sigue constante, pero  $\mathbf{B}(t)$  puede ser variable en el tiempo. Los componentes de  $\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$  se asumen continuos para garantizar una solución única.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(t_0) \quad (11.36)$$

La técnica utilizada en la solución de ecuaciones escalares es utilizada aquí pero con unas modificaciones dimensionales menores. Siendo  $\mathbf{K}(t)$  una matriz  $n \times n$ ; multiplicando la ecuación 11.36 por  $\mathbf{K}(t)$  y reorganizando

$$\mathbf{K}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (11.37)$$

Donde  $d[\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t)]/dt = \mathbf{K}\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{K}}\mathbf{x}$ , el lado izquierdo de la ecuación 11.37 puede escribirse como un diferencial siempre que  $\dot{\mathbf{K}} = -\mathbf{K}(t)\mathbf{A}$ . La matriz que se va a utilizar  $\mathbf{K}(t) = e^{-(t-t_0)\mathbf{A}}$ , y la ecuación diferencial puede escribirse

$$d[\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t)] = \mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) dt \quad (11.38)$$

Integrando

$$\mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{K}(t_0) \mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{K}(\tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (11.39)$$

La forma seleccionada para  $\mathbf{K}$  siempre va a tener inversa, entonces:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{K}^{-1}(t) \mathbf{K}(t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{K}^{-1}(t) \mathbf{K}(\tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (11.40)$$

o

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)\mathbf{A}} \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (11.41)$$

Esta ecuacion representa la solucion para cualquier ecuacion del sistema de la forma de la ecuacion 11.36. Note que la solucion esta compuesta por un solo termino dependiente de la condicion inicial y una integral que involucra a la salida.

### ***Ejemplo***

Encontrar la solucion al sistema lineal homogeneo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (11.42)$$

y apartir de ella, la solucion particular que satisface las condiciones iniciales  $y_1(0) = 3$  y  $y_2(0) = 0$

La ecuacion caracteristica es

$$\mathbf{det} [\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -4 \\ 1 & -3 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \quad (11.43)$$

Los eigenvalues son respectivamente  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = -2$ . Y los eigenvectors se obtienen de la siguiente ecuacion

$$(2 - \lambda) x_1 - 4x_2 = 0 \quad (11.44)$$

Con los eigenvectors encontrados se obtiene la solucion general

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} \quad (11.45)$$

Apartir de las condiciones iniciales se obtiene

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.46)$$

De donde  $c_1 = 1$  y  $c_2 = -1$ , por lo que la solucion particular es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^t - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} \quad (11.47)$$

### 11.3 SISTEMAS MODALES Y DESCOMPOSICION MODAL

Considerando la ecuacion 11.36 otra vez. Es necesario resaltar que la matriz  $\mathbf{A}$  es constante, pero  $\mathbf{B}(t)$  puede ser variable en el tiempo. Suponiendo que  $n$  eigenvectors  $\lambda_i$ , y  $n$  vectores independientes, ya sean eigenvectors o eigenvectors generalizados, que se han encontrado para la matriz  $\mathbf{A}$ . Estos vectores se denotaran por  $\xi_i$  para evitar la confusion con los vectores de estado  $\mathbf{x}$ . Como el conjunto  $\{\xi_i\}$  es linealmente independiente, que puede ser utilizado como

base para el espacio de estado  $\Sigma$ . En consecuencia en un tiempo dado  $t$ , el estado  $\mathbf{x}(t)$  se puede expresar

$$\mathbf{x}(t) = q_1(t) \xi_1 + q_2(t) \xi_2 + \dots + q_n(t) \xi_n \quad (11.48)$$

El tiempo de variación de  $\mathbf{x}$  está contenido en los coeficientes de expansión  $q_i$  de  $\mathbf{A}$ , y por lo tanto  $\xi_i$  son constantes. En cualquier tiempo  $t$  dado, el vector  $\mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \in \Sigma$  y por lo tanto, también se puede desarrollar como

$$\mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) = \beta_1(t) \xi_1 + \beta_2(t) \xi_2 + \dots + \beta_n(t) \xi_n \quad (11.49)$$

De hecho,  $\beta_i(t) = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \rangle$ , donde  $\{\mathbf{r}_i\}$  es el conjunto de vectores recíprocos

Utilizando la expansión anterior, la ecuación 11.36 quedaría

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) \xi_1 + \dot{q}_2(t) \xi_2 + \dots + \dot{q}_n(t) \xi_n &= q_1(t) \mathbf{A} \xi_1 + q_2(t) \mathbf{A} \xi_2 + \dots \\ &+ q_n(t) \mathbf{A} \xi_n + \beta_1(t) \xi_1 + \beta_2(t) \xi_2 + \dots + \beta_n(t) \xi_n \end{aligned} \quad (11.50)$$

Asumiendo por el momento que  $\mathbf{A}$  es normal para que todos los  $\xi_i$  eigenvectores sean más que eigenvectores generalizados. Entonces  $\mathbf{A} \xi_i = \lambda_i \xi_i$ , de modo que

$$(\dot{q}_1 - \lambda_1 q_1 - \beta_1) \xi_1 + (\dot{q}_2 - \lambda_2 q_2 - \beta_2) \xi_2 + \dots + (\dot{q}_n - \lambda_n q_n - \beta_n) \xi_n = 0 \quad (11.51)$$

Donde el conjunto  $\xi_i$  es linealmente independiente, lo cual requiere que

$$\dot{q}_i = \lambda_i q_i + \beta_i \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n \quad (11.52)$$

Lo cual demuestra que cuando  $\mathbf{A}$  es constante y tiene un conjunto total de eigenvectores, y el sistema es completamente describible por un conjunto de  $n$  ecuaciones escalares desacopladas

cuya solución es de la forma

$$q_i(t) = e^{(t-t_0)\lambda_i} q_i(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)\lambda_i} \mathbf{B}_i(\tau) d\tau \quad (11.53)$$

Desde luego,  $q_i(t_0) = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{x}(t_0) \rangle$ . El vector estado es de la forma

$$\mathbf{x}(t) = q_1(t) \xi_1 + q_2(t) \xi_2 + \dots + q_n(t) \xi_n \quad (11.54)$$

Los términos en esta suma son llamados sistemas modales. La respuesta general a este complicado sistema puede desglosarse en la suma de  $n$  simples respuestas modales.

La ecuación 11.48 también se puede escribir en términos de la matriz modal  $\mathbf{M} = [\xi_1 \dots \xi_n]$  donde  $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{q}$ , y como tal, representa un cambio de base. Utilizando esta notación, consideramos la ecuación 11.36 nuevamente:

$\dot{\mathbf{x}}$  se convierte en  $\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}$ , donde  $\mathbf{M}$  es constante

$\mathbf{A}\mathbf{x}$  se convierte en  $\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q}$  y  $\mathbf{B}\mathbf{u}$  se mantiene sin cambios

Por lo tanto

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (11.55)$$

o

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{J}\mathbf{q} + \mathbf{B}_n\mathbf{u} \quad (11.56)$$

Donde  $\mathbf{B}_n \triangleq \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$  y  $\mathbf{J}$  es la forma canónica de Jordan (o la matriz diagonal en muchos casos). Si el mismo cambio de base se utiliza en la ecuación de salida, entonces el sistema es descrito por el par de la ecuación de la forma normal

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}\mathbf{q} + \mathbf{B}_u \mathbf{u} \quad (11.57)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_n \mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (11.58)$$

Donde  $\mathbf{C}_n \triangleq \mathbf{C}\mathbf{M}$ . La solución para la ecuación 11.57 se puede escribir como

$$\mathbf{q}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{J}}\mathbf{q}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)\mathbf{J}}\mathbf{B}_n(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (11.59)$$

Basados en esto el vector estado original es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}\mathbf{q}(t) = \mathbf{M}e^{(t-t_0)\mathbf{J}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{M}e^{(t-\tau)\mathbf{J}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_n(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (11.60)$$

El procedimiento de la ecuación utiliza el hecho de que  $\mathbf{M}^{-1}$  es la matriz de trasposición de los vectores base, lo que significa que

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}(t_0) \quad (11.61)$$

Comparando las ecuaciones 11.60 y 11.41

$$e^{(t-t_0)\mathbf{A}} = \mathbf{M}e^{(t-\tau)\mathbf{J}}\mathbf{M}^{-1} \quad (11.62)$$

La descomposición modal es útil por la información que proporciona sobre las propiedades intrínsecas del sistema. Las propiedades de controlabilidad, observabilidad, estabilidad y detectabilidad son más fáciles de entender y evaluar. Las propiedades de la estabilidad de el sistema también se revelan más claramente. La descomposición modal proporciona una imagen geométrica simple para el movimiento del vector de estado en función del tiempo. Conservando sólo los modos dominantes, un sistema de orden superior se puede aproximar a un sistema de orden inferior.

Hay que tener en cuenta que la técnica de descomposición modal es útil sólo si  $\mathbf{A}$ , y por lo tanto  $\xi_i$ ,  $\lambda_i$  son constantes. Es la invariancia de las partes del vector  $\mathbf{x}$ , es decir, los términos  $\xi_i$ , que da los valores con el método. Si la matriz modal fue variante en el tiempo y tuvo que ser constantemente reevaluada, la mayoría de las ventajas de la descomposición modal se perderían.

### *Ejemplo*

Un sistema que es descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (11.63)$$

1. Encontrar el cambio de variables  $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{q}$  que desacopla el sistema
2. Encontrar las ecuaciones para desacoplar el sistema

Encontrando la matriz modal  $\mathbf{M}$ . Primero encontramos los eigenvalues

$$|A - I\lambda| = -(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) \quad (11.64)$$

$$\lambda_i = -1, -2, -3 \quad (11.65)$$

Encontrando la matriz adjunta

$$\text{Adj}[\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda] = \begin{bmatrix} (\lambda^2 + 4\lambda + 3) & -2(\lambda + 4) & -2 \\ 0 & (\lambda + 2)(\lambda + 4) & 2 + \lambda \\ 0 & -3(2 + \lambda) & \lambda(2 + \lambda) \end{bmatrix} \quad (11.66)$$

Ahora encontrando los eigenvectors

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \quad (11.67)$$

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (11.68)$$

$$\xi_3 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}^T \quad (11.69)$$

Con esto encontramos que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (11.70)$$

Ahora  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$ , por lo que es necesario encontrar  $\mathbf{M}^{-1}$

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (11.71)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \\ \left[ \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix} \\ \left[ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.72)$$

Las tres ecuaciones desacopladas son

$$\dot{q}_1 = -q_1 + \frac{1}{2}t + 2 \quad (11.73)$$

$$\dot{q}_2 = -2q_2 + 3t + 6 \quad (11.74)$$

$$\dot{q}_3 = -3q_3 + \frac{1}{2}t + 1 \quad (11.75)$$

## 11.4 TIEMPO VARIANTE

Las ecuaciones de estado homogéneas variantes en el tiempo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} \quad (11.76)$$

Son consideradas primero. Con el fin de que se considere como una ecuación de estado válida, se requiere que haya una solución única para todos los  $\mathbf{x}(t_0) \in \Sigma$ . Esto coloca a algunas restricciones sobre el tipo de variación de tiempo permitido en la matriz  $\mathbf{A}$ . Una condición suficiente para la existencia de soluciones únicas es exigir que todos los elementos de  $a_{ij}(t)$  de  $\mathbf{A}(t)$  sean continuos.

Donde  $n$  vectores  $\mathbf{x}_i(t_0)$  linealmente independientes iniciales se pueden encontrar, y cada uno define una solución única de la ecuación 11.76, llamado  $\mathbf{x}_i(t)$ ,  $t \geq t_0$ . Definiendo una matriz  $n \times n$   $\mathbf{U}(t_0)$  con columnas independientes formada por vectores de condición inicial  $\mathbf{x}_i(t_0)$ . Las  $n$  soluciones correspondientes a estas condiciones iniciales se utilizan como columnas en la formación de una matriz  $n \times n$   $\mathbf{U}(t) = [ \mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t) \quad \dots \quad \mathbf{x}_n(t) ]$ . Cualquier matriz  $\mathbf{U}(t)$  debe satisfacer

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{U}(t) \quad (11.77)$$

Es llamada la solución fundamental de la matriz, siempre que  $|\mathbf{U}(t_0)| \neq 0$ . Asumiendo que la solución fundamental de la matriz es válida, la solución a la ecuación 11.76 con un vector condición inicial arbitrario  $\mathbf{x}(t_0)$  es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t) \mathbf{U}^{-1}(t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (11.78)$$

Lo cual es fácil de verificar. Comprobando las condiciones iniciales

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{U}(t_0) \mathbf{U}^{-1}(t_0) \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{I}_n \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) \quad (11.79)$$

Ahora haciendo la comprobación para ver que esta solución sí satisface la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \dot{\mathbf{U}}(t) \mathbf{U}^{-1}(t_0) \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{A}(t) \mathbf{U}(t) \mathbf{U}^{-1}(t_0) \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) \quad (11.80)$$

Las condiciones iniciales y la ecuación diferencial se satisfacen, por lo que representa la única solución al problema homogéneo.

La ecuación no homogénea variable en el tiempo se resuelve de una manera análoga a los casos de un escalar y una matriz constante. Es decir, la ecuación se reduce a diferenciales exactos para que pueda ser integrada. Previamente a esto, hay que señalar que  $\mathbf{U}^{-1}(t)$  se puede demostrar que existe para todo  $t \geq t_0$  y que

$$\mathbf{U}(t) \mathbf{U}^{-1}(t) = \mathbf{I}_n \quad \text{por lo que} \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{U}(t) \mathbf{U}^{-1}(t)) = [0] \quad (11.81)$$

o

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U} \frac{d\mathbf{U}^{-1}}{dt} = [0] \quad \text{o} \quad \frac{d\mathbf{U}^{-1}}{dt} = -\mathbf{U}^{-1} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \mathbf{U}^{-1} \quad (11.82)$$

Por lo tanto

$$\frac{d\mathbf{U}^{-1}}{dt} = -\mathbf{U}^{-1}(t) \mathbf{A}(t) \quad (11.83)$$

Premultiplicando la version de la ecuacion 11.36 en tiempo variante por  $\mathbf{U}^{-1}(t)$ , luego multiplicando la ecuacion 11.83 por  $\mathbf{x}(t)$  y sumando los resultados

$$\mathbf{U}^{-1}(t) \dot{\mathbf{x}} + \frac{d\mathbf{U}^{-1}}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{U}^{-1}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \quad (11.84)$$

o

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{U}^{-1}(t) \mathbf{x}(t)] = \mathbf{U}^{-1}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \quad (11.85)$$

La solucion no homogenea se obtiene integrando ambos lados de la ecuacion de  $t_0$  a  $t$

$$\mathbf{U}^{-1}(t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{U}^{-1}(t_0) \mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{U}^{-1}(\tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (11.86)$$

o

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t) \mathbf{U}^{-1}(t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{U}(t) \mathbf{U}^{-1}(\tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (11.87)$$

El resultado otra vez toma la forma de un termino dependiente de un estado inicial y de una integral que envuelve la funcion de salida. De hecho, el primer termino es la misma solucion homogenea de la ecuacion 11.78.

## 11.5 MATRIZ DE TRANSICION

El resultado del sistema anterior es la definicion de una matriz importante que puede ser asociada a un sistema lineal, es decir, la *matriz de transicion*

$$\Phi(t, \tau) \triangleq \mathbf{U}(t) \mathbf{U}^{-1}(\tau) \quad (11.88)$$

Esta matriz  $n \times n$  es una transformación lineal o mapeo de  $\Sigma$  sobre sí mismo. Es decir, en ausencia de cualquier entrada  $\mathbf{u}(t)$ , dado el estado  $\mathbf{x}(\tau)$  en cualquier tiempo  $\tau$ , el estado en cualquier otro tiempo  $t$  está dado por la asignación

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, \tau) \mathbf{x}(\tau) \quad (11.89)$$

Con la condición para  $\mathbf{x}(\tau)$

$$\Phi(\tau, \tau) = \mathbf{I}_n \quad \text{Para cualquier } \tau \quad (11.90)$$

Derivando  $\Phi(t, \tau)$  con respecto a su primer argumento  $t$

$$\frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = \frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} \mathbf{U}^{-1}(\tau) = \mathbf{A}(t) \mathbf{U}(t) \mathbf{U}^{-1}(\tau) \quad (11.91)$$

o

$$\frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = \mathbf{A}(t) \Phi(t, \tau) \quad (11.92)$$

El conjunto de ecuaciones diferenciales (11.92), junto con las condiciones iniciales, ecuación 11.90, es a menudo considerada como la definición para  $\Phi(t, \tau)$ .

Otras dos propiedades importantes de la matriz de transición son las propiedades de semigrupos

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) \quad \text{para cualquier } t_0, t_1, t_2 \quad (11.93)$$

y la relación entre  $\Phi^{-1}$  y  $\Phi$

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t) \quad \text{para cualquier } t_0, t_1, t_2 \quad (11.94)$$

### Métodos de cálculo de la matriz de transición

Si la matriz  $\mathbf{A}$  es constante, entonces

$$\Phi(t, \tau) = e^{(t-\tau)\mathbf{A}} \quad (11.95)$$

Por lo tanto

1.  $\Phi(t, 0) = \mathcal{L}^{-1} \{ [\mathbf{I}s - \mathbf{A}]^{-1} \}$ .  $\Phi(t, \tau)$  se encuentra mediante la sustitución de  $t$  por  $t - \tau$ , donde  $\Phi(t, \tau) = \Phi(t - \tau, \tau)$  cuando  $\mathbf{A}$  es constante.
2.  $\Phi(t, \tau) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1}$ , cuando  $e^{\lambda_i(t-\tau)} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_i^{n-1}$  y, si se repiten algunos eigenvalues, los derivados de la expresión anterior con respecto a  $\lambda$  se debe utilizar.
3.  $\Phi(t, \tau) = \mathbf{M}e^{\mathbf{J}(t-\tau)}\mathbf{M}^{-1}$ , donde  $\mathbf{J}$  es la forma Jordan ( o la diagonal de la matriz  $\mathbf{A}$ ), y  $\mathbf{M}$  es la matriz modal.
4.  $\Phi(t, \tau) = \sum_{i=1} e^{\lambda_i(t-\tau)} \mathbf{Z}_i(\lambda)$
5.  $\Phi(t, \tau) \cong \mathbf{I} + \mathbf{A}(t - \tau) + \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 (t - \tau)^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 (t - \tau)^3 + \dots$ . Esta serie infinita se puede cortar después de un número finito de términos para obtener una aproximación a la matriz de transición.

### Ejemplo

Para la ecuación de estado y el vector de estado inicial que se ilustran en las ecuaciones 11.96 y 11.97, donde  $u(t)$  es un escalón unitario, encuentre la matriz de transición.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (11.96)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.97)$$

Como la ecuacion de estado es de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (11.98)$$

Primero es necesario encontrar los valores caracteristicos utilizando el  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 8 & (s+6) \end{bmatrix} \quad (11.99)$$

Por lo tanto  $s^2 + 6s + 8 = 0$  de donde  $s_1 = -2$  y  $s_2 = -4$ . Como cada termino de la matriz de transicion de estados es la suma de las respuestas generadas por los polos, se supondra que la matriz es de la forma:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} (K_1e^{-2t} + K_2e^{-4t}) & (K_3e^{-2t} + K_4e^{-4t}) \\ (K_5e^{-2t} + K_6e^{-4t}) & (K_7e^{-2t} + K_8e^{-4t}) \end{bmatrix} \quad (11.100)$$

Hallando los valores de las constantes

$$\Phi(0) = \mathbf{I} \quad (11.101)$$

$$K_1 + K_2 = 1 \quad (11.102)$$

$$K_3 + K_4 = 0 \quad (11.103)$$

$$K_5 + K_6 = 0 \quad (11.104)$$

$$K_7 + K_8 = 1 \quad (11.105)$$

y como

$$\dot{\Phi}(0) = \mathbf{A} \quad (11.106)$$

$$-2K_1 - 4K_2 = 0 \quad (11.107)$$

$$-2K_3 - 4K_4 = 1 \quad (11.108)$$

$$-2K_5 - 4K_6 = -8 \quad (11.109)$$

$$-2K_7 - 4K_8 = -6 \quad (11.110)$$

Por lo tanto

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} (2e^{-2t} - e^{-4t}) & (\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}) \\ (-4e^{-2t} + 4e^{-4t}) & (-e^{-2t} + 2e^{-4t}) \end{bmatrix} \quad (11.111)$$

La matriz de transición también se puede hallar por medio de la transformada de Laplace, utilizando el hecho de que  $\Phi(t)$  es el inverso de la transformada de Laplace de  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ . Por lo que es necesario encontrar primero  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  como se hizo en la ecuación 11.99.

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} (s+6) & 1 \\ -8 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 6s + 8} = \begin{bmatrix} \frac{s+6}{s^2+6s+8} & \frac{1}{s^2+6s+8} \\ \frac{-8}{s^2+6s+8} & \frac{s}{s^2+6s+8} \end{bmatrix} \quad (11.112)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+4}\right) & \left(\frac{1/2}{s+2} - \frac{1/2}{s+4}\right) \\ \left(\frac{-4}{s+2} + \frac{4}{s+4}\right) & \left(\frac{-1}{s+2} - \frac{2}{s+4}\right) \end{bmatrix} \quad (11.113)$$

Finalmente aplicando la transformada inversa de Laplace de cada termino  $\left(\frac{1}{s+a}\right) = e^{-at}$  se obtiene la matriz deseada

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} (2e^{-2t} - e^{-4t}) & \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}\right) \\ (-4e^{-2t} + 4e^{-4t}) & (-e^{-2t} + 2e^{-4t}) \end{bmatrix} \quad (11.114)$$

## Capítulo 12

# ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES Y DISCRETOS

### 12.1 REPRESENTACIÓN DE ECUACIONES DE ESTADO EN EL DOMINIO DISCRETO DEL TIEMPO

En los últimos años ha aumentado el uso de controladores digitales en sistemas de control, estos proporcionan un desempeño óptimo, la capacidad en la toma de decisiones y la flexibilidad en los programas de control son las principales ventajas de los sistemas de control digital. La tendencia actual de controlar los sistemas de forma digital y no analógica se debe a la disponibilidad de las computadoras y a las ventajas de trabajar con señales digitales en lugar de señales en tiempo continuo.

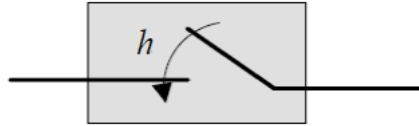
Para los sistemas lineales en tiempo discreto se tienen resultados análogos a los obtenidos en el capítulo 10 para los sistemas lineales en tiempo continuo. En donde las matrices y vectores que aparecen tienen una interpretación análoga a la de las matrices y vectores de las expresiones de este capítulo.

Actualmente el control de procesos moderno es control digital, por lo que las señales deben ser convertidas previamente para que puedan ser tratadas por el algoritmo de control de un computador. Dado que el computador opera en forma discreta (no continua), esta operación recibe el nombre de muestreo de señales.

El muestreo consiste en medir periódicamente el valor de la señal y asignarle un conjunto de valores. Este conjunto de valores es finito, por ejemplo, entre 0 y 1023, o 0 y 65535, etc. El

número asignado es siempre entero. El muestreador actúa como un interruptor interrumpiendo la línea que lleva la señal como lo muestra la figura 12.1.

Figure 12.1: Muestreador



Cada  $h$  segundos se cierra durante un tiempo muy breve dejando pasar la señal hacia el convertidor A/D. El tiempo que permanece cerrado es finito aunque en la práctica es tan pequeño que teóricamente se considera un punto.

Durante el muestreo las señales analógicas en tiempo continuo se reemplazan por una secuencia de números proporcionales al valor de la señal en el instante de muestreo. En lugar de muestreo se puede utilizar el concepto equivalente de discretización. veamos ahora algo de tipos de señales. Así, a partir del tipo de señal presente en el sistema, los sistemas se clasifican en:

- ***Señal en tiempo continuo:***

Es aquella que se define sobre un intervalo continuo de tiempo, la amplitud puede tener un intervalo continuo de valores o solamente un número finito de valores diferentes, el proceso de representar una variable por medio de un conjunto de valores distintos se denomina cuantificación y los valores resultantes se denominan valores cuantificados. La variable cuantificada solo cambia en un conjunto finito de valores distintos.

- ***Señal analógica:***

Es una señal definida en un intervalo continuo de tiempo cuya amplitud puede adoptar un intervalo continuo de valores.

- ***Señal en tiempo discreto:***

Es una señal definida solo en valores discretos de tiempo, (aquellos donde la variable independiente  $t$  esta cuantificada) en una señal en tiempo discreto, si la amplitud puede adoptar valores en un intervalo continuo, entonces la señal se denomina señal de datos muestreados

- *Señal Digital:*

Es una señal en tiempo discreto con amplitud cuantificada, dicha señal se puede representar mediante una secuencia de números, por ejemplo, en la forma de números binarios, en la práctica muchas señales digitales se obtienen mediante el muestreo de señales analógicas que después se cuantifican, la cuantificación es lo que hace que señales analógicas sean leídas como palabras binarias finitas

Estas series temporales denominadasa datos muestreados, se pueden transformar en el dominio S y despues en el dominio z, el dominio frecuencia compleja en términos de z tiene propiedades similares a las del dominio s de Laplace.

se puede usar la transformada z de una función de transferencia para analizar la estabilidad y la respuesta transitoria de un sistema.

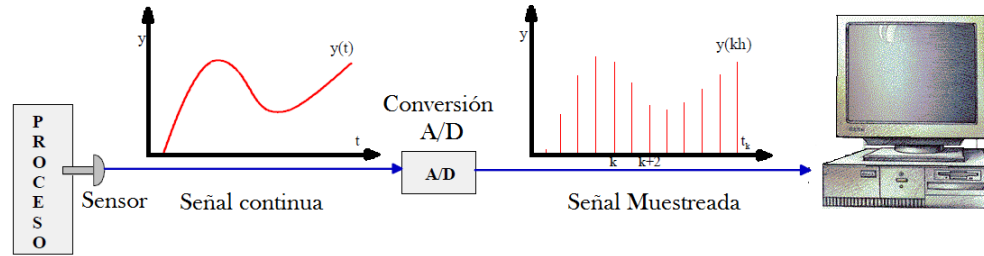
- *Muestreo de Señales*

Las señales continuas deben ser convertidas a señales discretas en el tiempo para que puedan ser leídas por un computador. Para ello se muestrean cada cierto intervalo de tiempo,  $h$ . Cuanto menor es el valor de  $h$ , mejor reproducirá la señal original pero más esfuerzo de cálculo requiere. Por el contrario, al aumentar el valor de  $h$ , se generan menos puntos pero puede perderse información de la señal, de tal forma que su reconstrucción sea errónea o imposible. La señal discreta de control, proporcionada por el algoritmo, debe ser convertida a una señal continua para actuar sobre los elementos finales de control, generalmente una válvula. Esta operación la realiza el mantenedor o dispositivo de retención. Desde el punto de vista matemático, discretizar una señal continua se consigue multiplicando la señal continua por la delta de Dirac. La delta de Dirac dada por:

$$\delta(t-kh)$$

Sólo tiene valores en los instantes en que  $t$  es igual a  $kh$ , donde  $k$  es un entero  $0, 1, 2$ , etc., que representa el instante de muestreo y  $h$  es el tiempo. Dato que para los demás valores la función vale cero, la señal resultante sólo presentará valores en los instantes de muestreo.

Figure 12.2: Conversión de señales



La transformada  $z$  representa un método operacional para resolver ecuaciones en diferencias lineales y sistemas lineales con datos discretos o digitales.

- *La transformada  $z$*

Como la salida de un muestreador ideal (definida como  $r^*(t)$ ) es una serie de impulsos con valores  $r^*(kt)$  se tiene entonces que:

$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \delta(t - kT) \quad (12.1)$$

para una señal para  $t > 0$ . Empleando la transformación de Laplace, tenemos que

$$\mathcal{L}[r^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) e^{-ksT} \quad (12.2)$$

Se tiene ahora una serie infinita que comprende factores de  $e^{sT}$  y sus potencias. Se define

$$z = e^{sT} \quad (12.3)$$

donde esta relación incluye una transformación conforme del plano  $s$  al plano  $z$ . Se define entonces la transformación, denominada transformada  $z$ , tal que

$$Z[r(t)] = Z[r * (t)] = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) z^{-k} \quad (12.4)$$

En general se define la transformada  $z$  de una función  $f(t)$  como

$$Z[f(t)] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} \quad (12.5)$$

**Ejemplo 1.**

Determinar la transformada  $z$  de  $f(t) = e^{-at}$  para  $t \geq 0$  tenemos

$$Z[e^{-at}] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (ze^{aT})^{-k}$$

Esta serie se puede escribir en forma cerrada como

$$F(z) = \frac{1}{1 - (ze^{aT})^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

Se puede demostrar en general que

$$Z\{e^{at} f(t)\} = F(e^{aT} z)$$

En la siguiente tabla se presentan algunas transformadas usadas normalmente

Table 12.1: Transformadas

$\mathbf{x}(t)$	$\mathbf{x}(s)$	$\mathbf{x}(z)$
$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t = kT, k \neq 0 \end{cases}$	<b>1</b>	<b>1</b>
$\delta(t - kT) = \begin{cases} 1 & t = kT \\ 0 & t \neq kT \end{cases}$	$e^{-kTs}$	$\mathbf{z}^{-k}$
<b>Escalón unitario</b> $u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
<b>t</b>	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{aT}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2-2z \cos \omega T+1}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-\cos \omega T)}{z^2-2z \cos \omega T+1}$
$e^{-aT} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{(ze^{-aT} \sin \omega T)}{z^2-2ze^{-aT} \cos \omega T+e^{-2aT}}$
$e^{-aT} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2-2ze^{-aT} \cos \omega T+e^{-2aT}}$

*Propiedades de las transformadas*

Table 12.3: Propiedades

	$\mathbf{x}(t)$	$\mathbf{x}(z)$
<b>1</b>	$kx(t)$	$\mathbf{kX}(z)$
<b>2</b>	$x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(z) + X_2(z)$
<b>3</b>	$x(t+T)$	$zX(z) - zx(0)$
<b>4</b>	$tx(t)$	$-Tz \frac{dX(z)}{dz}$
<b>5</b>	$e^{-at}x(t)$	$X(z e^{aT})$
<b>6</b>	$x(0)$ , <b>Valor inicial</b>	$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{X}(z)$ si el límite existe
<b>7</b>	$x(\infty)$ , <b>Valor final</b>	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \mathbf{X}(z)$

Independientemente de las razones para utilizar el modelo discreto, el objetivo es hacer de los valores obtenidos en el muestreo de las señales en los diferentes instantes una representación aceptablemente precisa de las correspondientes señales continuas.

Consideremos el sistema:

$$\dot{x} = A(t)X(t) + B(t)u(t) \quad (12.6)$$

con  $X(t_0)$  conocido

Asumimos que  $\{t_0, t_1, \dots, t_k, \dots\}$  es un conjunto de puntos discretos de tiempo suficientemente próximos entre sí de manera que, durante cualquier intervalo de  $[t_k, t_{k+1}]$  la entrada del vector  $u(t)$  puede aproximarse a  $u(t_k)$ . Tenga en cuenta que si las entradas se procesan a través de un zero-order hold<sup>1</sup>, como parte de un controlador digital, entonces son automáticamente constantes durante el intervalo de muestreo

La expresión más general de un sistema expresado en variables de estado es:

$$\dot{x} = A(t)X(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)X(t) + D(t)u(t)$$

La solución para  $X(t)$  es:

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (12.7)$$

y entonces podemos expresar la solución para  $t_{k+1}$  tomando  $x(t_k)$  como condición inicial

$$X(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)X(t_k) + \int_k^{k+1} \Phi(t_{k+1}, \tau)B(\tau)d\tau u(t_k) \quad (12.8)$$

---

<sup>1</sup>zero order hold: es un proceso matemático para la reconstrucción de una señal de tiempo discreto a una señal continua

Hay que tener en cuenta que la entrada  $u(\tau)$  ha sido sustituida por  $u(t_k)$  y sacado de la integral, debido a su comportamiento constante a tramos, si  $A(t)$  y/o  $B(t)$  son aproximadamente constantes en  $[t_k, t_{k+1}]$  también puede ser simplificada.

Por ejemplo si  $A$  es constante, entonces  $\Phi(t_{k+1}, t_k) = e^{AT}$ , donde  $T = t_{k+1} - t_k$  y  $A$  es  $A(t_k)$ . Si  $B$  es constante en  $[t_{k+1}, t_k]$ , entonces se puede quitar de la integral. Esto conduce a una aproximación de uso general para las ecuaciones de estado discreto,

$$X(k+1) = A_1 X(k) + B_1 u(k) \quad (12.9)$$

Dónde  $A_1$  y  $B_1$  se utilizan en el modelo discreto para distinguirlas de las matrices de modelo continuo  $A$  y  $B$ . Las relaciones son

$$A_1 = e^{AT} \quad \text{y} \quad B_1 = \int e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\tau B$$

Aunque estos resultados han sido mencionados como aproximaciones discretas, son exactos para el coeficiente constante de los sistemas cuyas entradas pasan a través de un Zero-order-hold, como es común en controladores digitales.

Una simplificación de análisis que se pueden hacer en el caso especial donde  $A(t_k)^{-1}$  existe al usar los resultados de la integración de la matriz exponencial analizada en el capítulo 6 de este seminario,

$$B_1 = [A_1(t_k) - I] A^{-1}(t_k) B(t_k)$$

Aunque las muestras de  $t_k$  suelen estar igualmente espaciadas esto no es necesario para la ecuación [3], la reevaluación de  $A_1$  y  $B_1$  serían necesarias en cada ciclo de la ecuación [4] en el caso de muestras variables

### ***Ejemplo 2.***

Considerar el sistema de segundo orden  $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u(t)$ , su función de transferencia es  $\frac{y(s)}{u(s)} = 1/[s^2 + 3s + 2] = 1/[(s+1)(s+2)]$  a partir de este modelo obtenga la aproximación del modelo de estado discreto, use  $T = t_{k+1} - t_k = 0.2$  segundos

Expresado en forma de ecuaciones de estado,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

con  $y(t) = x_1(t)$  donde A y B son constantes y se asume que  $u(t)$  será constante en tramos para cada periodo de muestreo T, las matrices discretas  $A_1$  y  $B_1$  se calculan como se dijo anteriormente, una serie truncada infinita se utiliza para la evaluación y se obtiene:

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 0.967141 & 0.148411 \\ -0.296821 & 0.521909 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0.016429 \\ 0.148411 \end{bmatrix} u(k)$$

La ecuación de muestreo de salida es

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(k)$$

Ahora calcularemos de otra forma el modelo discreto, la conversión del zero-order-hold da

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z \{G(s)/s\} = (0.01643z + 0.013452) / (z^2 - 1.48905z + 0.548811)$$

El denominador de esta función de transferencia es  $(z - e^{-T})(z - e^{-2T})$  donde  $T = 0.2$ , hay muchas maneras de escoger el modelo de estado de esta función de transferencia, la forma canónica se usa entonces porque el estado discreto  $x_1$  será la misma variable física que en el estado  $x_1$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.48905 & 1 \\ -0.548811 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01643 \\ 0.013452 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

Ambos resultados son válidos para el modelo, con la misma frecuencia de muestreo y las mismas suposiciones, pero es claramente que son diferentes, ambos modelos tienen las mismas entradas y salidas características aquellos descritos por la función de transferencia  $G(z)$ , sus componentes internos son diferentes porque se seleccionaron diferentes variables de estado, la frecuencia de muestreo utilizada en el desarrollo de un modelo discreto con frecuencia se fija por el sensor o el tiempo de ciclo de tratamiento, sin embargo, podemos elegir, el diseño del sistema o en el caso de la simulación digital, un orden aproximado de magnitud guía es útil.

Hay que tener en cuenta que el límite inferior teórico para el muestreo es de dos muestras por periodo, para una mejor respuesta con relación al muestreo cada caso debe ser analizado por separado.

## 12.2 COEFICIENTES CONSTANTES DISCRETOS DE ECUACIONES DE ESTADO

Si suponemos que  $A(k)$  es constante, consideramos primero el caso homogéneo

$$X(k+1) = Ax(k)$$

Asumimos la condición inicial  $x(0)$  conocida, de modo que  $x(1) = Ax(0)$ , usando esto en la ecuación diferencial tenemos  $x(2) = Ax(1) = A^2x(0)$ . Continuando con este proceso llegamos a que la solución general para un tiempo  $t_k$  expresada en términos de  $x(0)$

$$x(k) = A^k x(0) \tag{12.10}$$

Usando los métodos vistos en el capítulo 7 de este seminario podemos determinar  $A^k$  como una función general de  $k$ , tal que las multiplicaciones de matrices repetidas no son necesarias.

Consideremos ahora el caso no homogéneo, se da una secuencia de vectores  $u(0), u(1), u(2), \dots$  así como las condiciones iniciales, entonces

$$x(1) = Ax(0) + B(0)u(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + B(1)u(1) = A^2x(0) + AB(0)u(0) + B(1)u(1)$$

$$x(3) = Ax(2) + B(2)u(2) = A^3x(0) + A^2B(0)u(0) + AB(1)u(1) + B(2)u(2)$$

Para el caso general de  $t_k$  quedaría

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B(j) u(j) \tag{12.11}$$

Haciendo un pequeño cambio en los límites de la sumatoria esto quedaría

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=1}^k A^{k-j} B(j-1) u(j-1) \quad (12.12)$$

La estrecha analogía con sistemas de tiempo continuo se hacen mas evidente al usar la definición de matriz de transición para sistemas discretos. Siempre que A sea constante, la matriz de transición discreta es

$$\Phi(k, j) = A^{k-j}$$

donde

$$x(k) = \Phi(k, 0) x(0) + \sum_{j=1}^k \Phi(k, j) B(j-1) u(j-1) \quad (12.13)$$

y la única diferencia del resultado de continuo es la sustitución de la integral de convolución por una sumatoria discreta

### 12.3 DESCOMPOSICIÓN MODAL.

La matriz A del sistema se sigue considerando constante, sus eigenvalues  $\lambda_i$  y eigenvectores  $\xi_i$ . entonces si se hace el cambio de base  $x(k) = Mq(k)$ , donde  $M = [\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n]$  las ecuaciones de estado se reducen a

$$Mq(k+1) = AMq(k) + B(k) u(k)$$

expresado de otra forma

$$q(k+1) = Jq(k) + B_n(k) u(k) \quad (12.14)$$

y

$$y(k) = C(k)Mq(k) + D(k)u(k)$$

y expresada tambien de otra forma

$$y(k) = C_n(k)q(k) + D(k)u(k) \quad (12.15)$$

Donde  $J = M^{-1}AM$ ,  $B_n(k) = M^{-1}B(k)$ ,  $C_n = C(k)M$  así como en el caso continuo, las ecuaciones en  $q$  son casi desacopladas y tienen las mismas ventajas. Cuando  $A$  tiene todos los eigenvalores, entonces  $J$  será la matriz diagonal  $\Lambda$

Una ecuación típica de  $q_i$  componentes tiene la forma

$$q_i(k+1) = \lambda_i q_i(k) + \langle r_i, B(k)u(k) \rangle$$

La solución es

$$q_i(k) = \lambda_i^k q_i(0) + \sum_{j=1}^k \lambda_i^{k-j} \langle r_i, B(j-1)u(j-1) \rangle$$

de modo que

$$q(k) = \Lambda^k q(0) + \sum_{j=1}^k \Lambda^{k-j} M^{-1} B(j-1) u(j-1)$$

Usando  $x(k) = Mq(k)$  y  $q(0) = M^{-1}x(0)$  obtenemos

$$x(k) = M\Lambda^k M^{-1}x(0) + \sum_{j=1}^k M\Lambda^{k-j} M^{-1} B(j-1) u(j-1)$$

Esto demuestra una vez mas que  $A^k = M\Lambda^k M^{-1}$  y nos da la forma de calcular la matriz de transición

La técnica de descomposición modal da una visión geométrica de la estructura del sistema. El comportamiento de  $x(k)$  comparado con el índice de tiempo  $k$  puede ser representado como la suma vectorial de los eigenvalores  $\xi_i$  multiplicado por  $q_i(k)$

$$x(k) = Mq(k) = \xi_1 q_1(k) + \xi_2 q_2(k) + \dots + \xi_n q_n(k)$$

## 12.4 COEFICIENTES VARIABLES EN EL TIEMPO.

Cuando  $A(k)$  es una matriz variable en el tiempo, se hacen unas ligeras modificaciones a lo anterior, además de las potencias de  $A$ , los productos de  $A$  se evalúan sucesivamente en  $K$ . la solución para  $x(k)$  en un tiempo  $t(k)$  se convierte en

$$x(k) = A(k-1)A(k-2)\dots A(0)x(0) + \sum_{j=1}^k \left[ \prod_{p=j}^{k-1} A(p) \right] B(j-1)u(j-1) \quad (12.16)$$

en la ecuación anterior la notación  $\prod_{p=j}^{k-1} A(p)$  indica el producto  $A(k-1)A(k-2)\dots A(j+1)A(j)$ .

Se sabe que si  $j = k - 1$ , el producto solo es  $A(k - 1)$  y si  $j = k$  entonces  $\prod_{p=k}^{k-1} A(p) \triangleq I_n$ . La matriz de transición para tiempo variable esta dada por

$$\Phi(k, j) = \prod_{p=j}^{k-1} A(p) \quad (12.17)$$

Cuando se utiliza esta definición [11] para tiempo variable el resultado que se obtiene es el mismo de la ecuación [8], sin embargo la evaluación de la matriz de transición es mucho más complicado para el caso variable en el tiempo.

## 12.5 MATRIZ DE TRANSICIÓN DISCRETA

Las propiedades de la matriz de transición discreta conserva gran parte de las propiedades que tiene la matriz de tiempo continuo, en particular la matriz de transición  $\Phi(k, j)$  representa el mapeo del estado en el tiempo  $t_j$  en el estado de tiempo  $t_k$  proporcionando una entrada  $u$ . Se puede aplicar la propiedad de semigrupo, esto es

$$\Phi(k, m)\Phi(m, j) = \Phi(k, j)$$

para cualquier  $k, m, j$  que satisface  $j \leq m \leq k$ . También tiene la propiedad de identidad, esta es  $\Phi(k, k) = I_n$  para cualquier tiempo de índice  $k$ . Una gran diferencia de la matriz de transición discreta es que la inversa no necesariamente existe, cuando la inversa no existe entonces el tiempo invertido tiene la propiedad:

$$\Phi^{-1}(k, j) = \Phi(j, k)$$

La inversa existirá si el sistema discreto se deriva correctamente como una aproximación a un sistema continuo, entonces  $A(k) = \Phi(t_{k+1}, t_k)$  y  $\Phi(k, j) = \Phi(t_k, t_j)$  la matriz de transición discreta siempre es singular

## Problemas

1. Obtener la matriz de transición de estado del siguiente sistema en tiempo discreto y obtenga el estado  $x(k)$  y la salida  $y(k)$  cuando la entrada  $u(k) = 1$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

Suponiendo que el estado inicial es

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estado  $\Phi(k)$  es

$$\Phi(k) = A^k = Z^{-1} \left[ (zI - A)^{-1} z \right]$$

El siguiente paso es calcular  $(zI - A)^{-1}$

Existen métodos tanto analíticos de computo para el cálculo de  $(zI - A)^{-1}$  uno de ellos está basado en la expansión de la matriz adjunta y se puede expresar como

$$(zI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(zI - A)}{|zI - A|}$$

El determinante  $|zI - A|$  esta dado por

$$|zI - A| = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n$$

y la  $\text{adj}(zI - A)$  esta dado por

$$\text{adj}(zI - A) = Iz^{n-1} + B_1 z^{n-2} + B_2 z^{n-3} + \dots + B_{n-1}$$

donde

$$B_1 = A + a_1 I$$

$$B_2 = AB_1 + a_2 I$$

$\vdots$

$$B_{n-1} = AB_{n-2} + a_{n-1} I$$

$$B_n = AB_{n-1} + a_n I = 0$$

Las  $a_i$  las encontramos mediante el uso de las trazas<sup>2</sup> de la siguiente forma

$$a_1 = -\text{tr} A$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} \text{tr} AB_1$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} \text{tr} AB_2$$

$\vdots$

$$a_n = -\frac{1}{n} \text{tr} AB_{n-1}$$

Reemplazando y sustituyendo todas estas ecuaciones en la ecuación principal hallamos la matriz inversa de  $(zI - A)$

---

<sup>2</sup>La traza de una matriz de  $n \times n$  es la suma de los elementos diagonales

Entonces

$$(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z + 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{z+1}{(z+0.2)(z+0.8)} & \frac{1}{(z+0.2)(z+0.8)} \\ \frac{-0.16}{(z+0.2)(z+0.8)} & \frac{z}{(z+0.2)(z+0.8)} \end{bmatrix} =$$

$$(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{4}{3}}{z+0.2} + \frac{-\frac{1}{3}}{z+0.8} & \frac{\frac{5}{3}}{z+0.2} + \frac{-\frac{5}{3}}{z+0.8} \\ \frac{-\frac{0.8}{3}}{z+0.2} + \frac{\frac{0.8}{3}}{z+0.8} & \frac{-\frac{1}{3}}{z+0.2} + \frac{\frac{4}{3}}{z+0.8} \end{bmatrix}$$

Ahora si obtenemos la matriz de transición  $\Phi(k)$

$$\Phi(k) = Z^{-1} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \frac{z}{z+0.2} - \frac{1}{3} \frac{z}{z+0.8} & \frac{5}{3} \frac{z}{z+0.2} - \frac{5}{3} \frac{z}{z+0.8} \\ -\frac{0.8}{3} \frac{z}{z+0.2} + \frac{0.8}{3} \frac{z}{z+0.8} & -\frac{1}{3} \frac{z}{z+0.2} + \frac{4}{3} \frac{z}{z+0.8} \end{bmatrix}$$

esta ecuación da la matriz de transición de estado

Ahora calculamos  $x(k)$ , la transformada  $z$  de  $x(k)$  esta dada por

$$Z[x(k)] = X(z) = (zI - A)^{-1} zx(0) + (zI - A)^{-1} Bu(z) = (zI - A)^{-1} [zx(0) + Bu(z)]$$

Dado que

$$u(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Obtenemos

$$zx(0) + Bu(z) = \begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{z}{z-1} \\ \frac{z}{z-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z^2}{z-1} \\ \frac{-z^2+2z}{z-1} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$X(z) = (zI - A)^{-1} [zx(0) + Bu(z)] = \begin{pmatrix} \frac{(z^2+2)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)} \\ \frac{(-z^2+1.84z)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-17}{6} \frac{z}{z+0.2} + \frac{22}{9} \frac{z}{z+0.8} + \frac{25}{18} \frac{z}{z-1} \\ \frac{3.4}{6} \frac{z}{z+0.2} + \frac{-17.6}{9} \frac{z}{z+0.8} + \frac{7}{18} \frac{z}{z-1} \end{bmatrix}$$

El vector  $x(k)$  esta dado por

$$x(k) = z^{-1}[X(z)] = \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k - \frac{17.6}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix}$$

Y finalmente obtenemos la matriz de salida  $y(k)$

$$y(k) = Cx(k) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k - \frac{17.6}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix} = -\frac{17}{6}(-0.8)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18}$$

2. Para el sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

(a) Encontrar el cambio de variables  $x = Mq$  que desacopla el sistema, Si  $x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$  y si

$u(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$  encontrar  $x(t)$ , Se debe encontrar la matriz modal M,  $|A - I\lambda| = -(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)$  tal que los eigenvalues son  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = -3$

Entonces tenemos que

$$\text{Adj}[A - I\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 3 & -2(\lambda + 4) & -2 \\ 0 & (\lambda + 2)(\lambda + 4) & 2 + \lambda \\ 0 & -3(2 + \lambda) & \lambda(2 + \lambda) \end{bmatrix}$$

De esto los eigenvectores son  $\xi_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , y  $\xi_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

De este modo

$$x = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} q \text{ que es la transformación de desacoplamiento}$$

con  $M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  esto conduce a

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Las tres ecuaciones desacopladas y sus soluciones son:

$$\dot{q}_1 = -q_1 + \frac{1}{2}t + 2 \Rightarrow q_1(t) = e^{-t}q_1(0) + \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}(1 - e^t)$$

$$\dot{q}_2 = -2q_2 + 3t + 6 \Rightarrow q_2(t) = e^{-2t}q_2(0) + \frac{3}{2}t + \frac{9}{4}(1 - e^{-2t})$$

$$\dot{q}_3 = -3q_3 + \frac{1}{2}t + 1 \Rightarrow q_3(t) = e^{-3t}q_3(0) + \frac{1}{6}t + \frac{5}{18}(1 - e^{-3t})$$

Donde  $q(0) = M^{-1}x(0) = \begin{bmatrix} \frac{17}{2} \\ 34 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$  y  $x(t) = Mq(t)$ , la solución es:

$$x(t) = \begin{bmatrix} -14e^{-t} + \left(\frac{127}{4}\right)e^{-2t} - \left(\frac{58}{9}\right)e^{-3t} + \left(\frac{1}{6}\right)t - \frac{47}{36} \\ 7e^{-t} - \left(\frac{29}{9}\right)e^{-3t} + \left(\frac{1}{3}\right)t + \frac{11}{9} \\ -7e^{-t} + \left(\frac{29}{3}\right)e^{-3t} - \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

3. Considerar el sistema de tiempo discreto

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

Encontrar  $y(k)$  si  $x_1(0) = -1$ ,  $x_2(0) = 3$ . La entrada  $u_1(k)$  es obtenida del muestreo de la función rampa  $t$  en los instantes  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ , ...,  $t_k = k$ , y  $u_2(k)$  es obtenida del muestreo de  $e^{-t}$  en el mismo conjunto de tiempos discretos.

Primero encontramos la matriz de transición

$$A^k = \alpha_0 I + \alpha_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_1 & \frac{1}{8}\alpha_1 \\ \frac{1}{8}\alpha_1 & \alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_1 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos los eigenvalues

$|A - I\lambda| = \lambda^2 - \lambda + \frac{15}{64}$  las raíces de este polinomio son  $\lambda_1 = \frac{3}{8}$ ,  $\lambda_2 = \frac{5}{8}$  y resolviendo para  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{3}{8}\right)^k = \alpha_0 + \frac{3}{8}\alpha_1 \\ \left(\frac{5}{8}\right)^k = \alpha_0 + \left(\frac{5}{8}\right)\alpha_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 \left[ \left(\frac{5}{8}\right)^k - \left(\frac{3}{8}\right)^k \right] = \alpha_1 \\ \left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{3}{8}\right)^k - \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{8}\right)^k = \alpha_0 \end{array} \right.$$

Así

$$A^k = \Phi(k, 0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{5}{8}\right)^k + \left(\frac{3}{8}\right)^k \right] & \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{5}{8}\right)^k - \left(\frac{3}{8}\right)^k \right] \\ \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{5}{8}\right)^k - \left(\frac{3}{8}\right)^k \right] & \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{5}{8}\right)^k + \left(\frac{3}{8}\right)^k \right] \end{bmatrix}$$

Usando lo anterior y teniendo en cuenta que:

$\Phi(k, j) = A^{k-j}$  tenemos que

$$x(k) = \begin{bmatrix} \left(\frac{5}{8}\right)^k - 2\left(\frac{3}{8}\right)^k \\ \left(\frac{5}{8}\right)^k + 2\left(\frac{3}{8}\right)^k \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^k \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{5}{8}\right)^{k-j} + \left(\frac{3}{8}\right)^{k-j} \right] & \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{5}{8}\right)^{k-j} - \left(\frac{3}{8}\right)^{k-j} \right] \\ \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{5}{8}\right)^{k-j} - \left(\frac{3}{8}\right)^{k-j} \right] & \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{5}{8}\right)^{k-j} + \left(\frac{3}{8}\right)^{k-j} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j-1 \\ e^{1-j} \end{bmatrix}$$

La salida es

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} x(k)$$

4. Encontrar un modelo de tiempo discreto para el sistema mostrado en la figura, usar  $t_{k+1} - t_k = \Delta t = 1$  y aproxime  $u_1$  y  $u_2$  como funciones a tramos constantes

Las ecuaciones de estado de tiempo continuo son:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Y la matriz de transición es:

$$\Phi(t, 0) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{[sI - A]^{-1}\}, \quad \Phi(s) = \frac{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}}{s(s+1)}$$

O también puede ser

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ (1 - e^{-t}) & 1 \end{bmatrix}$$

El estado en el instante  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$  puede escribirse como:

$$x(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k) x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) d\tau \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t_k) \\ u_2(t_k) \end{bmatrix}$$

Pero

$$\Phi(t_{k+1}, t_k) = \Phi(t_{k+1} - t_k, 0) = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 1 - e^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.368 & 0 \\ 0.632 & 1 \end{bmatrix}$$

y también

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) d\tau = \begin{bmatrix} 1 - e^{-1} & 0 \\ e^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.632 & 0 \\ 0.368 & 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación de aproximación sería:

$$\begin{bmatrix} x_1(t_{k+1}) \\ x_2(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.368 & 0 \\ 0.632 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_k) \\ x_2(t_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.632K & 0 \\ 0.368K & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t_k) \\ u_2(t_k) \end{bmatrix}$$

# Capítulo 13

## ESTABILIDAD

### 13.1 INTRODUCCIÓN

La estabilidad de sistemas lineales invariantes en el tiempo con una sola entrada y una sola salida se puede basar en el análisis de la función de transferencia. Donde las condiciones de estabilidad están dadas por la posición de los polos. Para sistemas de tiempo continuo tenemos el plano complejo  $s$  donde el área estable es la mitad izquierda de este (Figura 13.1a). El interior del círculo de radio 1 (Figura 13.1b), centrado en el origen del plano  $z$ , es el área estable para sistemas de tiempo discreto.

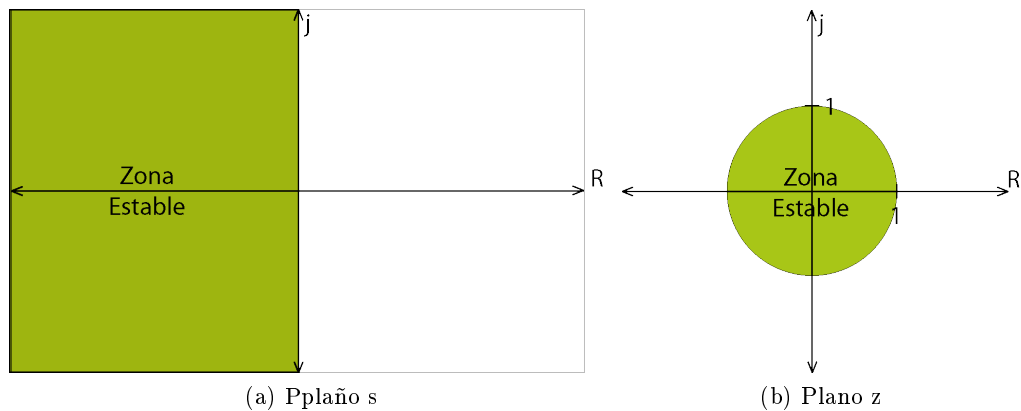
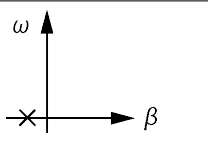
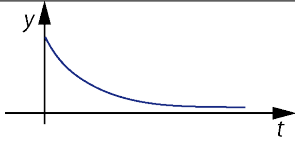
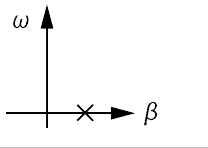
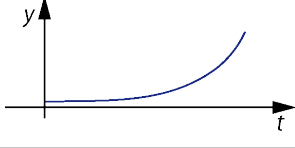
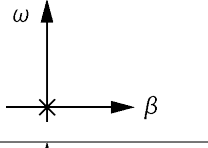
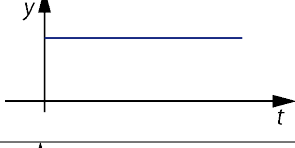
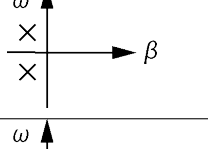
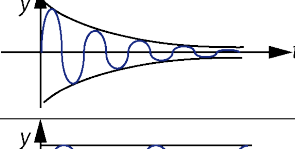
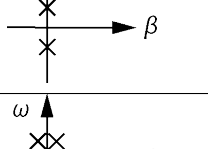
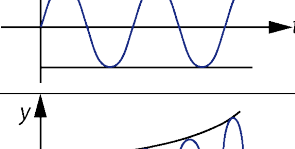
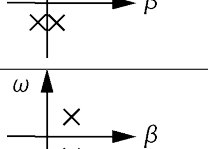
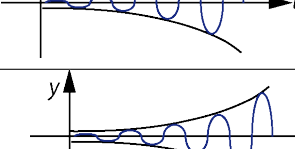
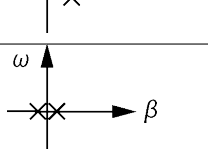
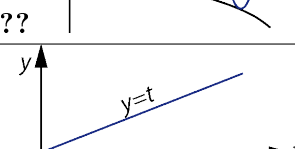
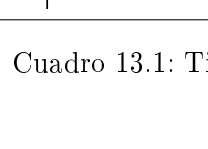
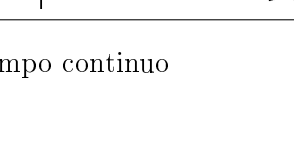
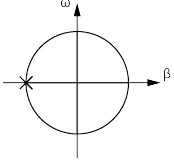
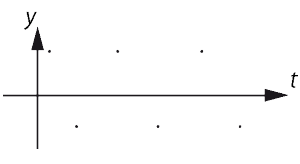
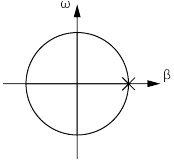
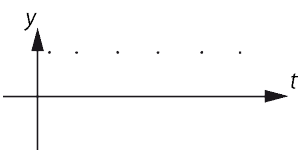
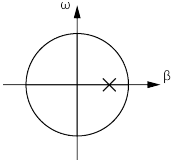
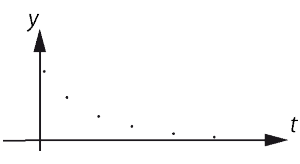
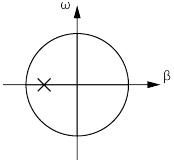
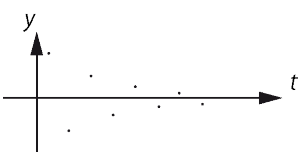
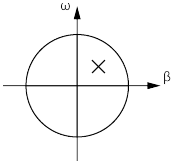
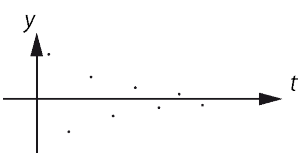
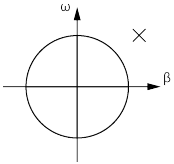
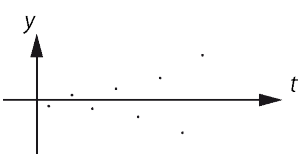
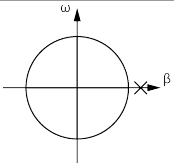
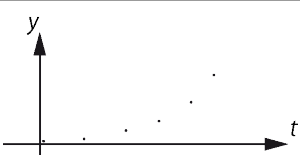
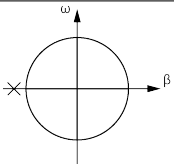
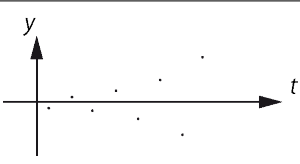


Figura 13.1: Zonas Estables

Una descripción detallada del comportamiento del sistema dependiendo de la ubicación de los polos para tiempo continuo y discreto se tienen en las Tablas 14.1 y 14.2, respectivamente.

Tipo de polo	Graf. Plano- $s$ ( $\lambda_i = \beta_i \pm i\omega_i$ )	Gráfica Respuesta	Nota
Real y Negativo			Asintóticamente Estable
Real y Positivo			Inestable
Zero			Marginalmente Estable
Conjugado complejo con parte real negativa			Asintóticamente Estable
Conjugado imaginario (multiplicidad $r = 1$ )			Marginalmente Estable
Conjugado imaginario (multiplicidad $r = 2$ )			Inestable
Conjugado complejo con parte real positiva			Inestable
Polos de multiplicidad $r = 2$ en el origen			Inestable

Cuadro 13.1: Tiempo continuo

Tipo de polo	Graf. Plano- $z$ ( $\lambda_i = \beta_i \pm i\omega_i$ )	Gráfica Respuesta	Nota
Real -1			Marginalmente Estable
Real 1			Marginalmente Estable
$0 < \text{Real} < 1$			Asintoticamente Estable
$-1 < \text{Real} < 0$			Asintoticamente Estable
Imaginario ( $r = \sqrt{\beta^2 + \omega^2} \leq 1$ )			Asintoticamente Estable
Imaginario ( $r = \sqrt{\beta^2 + \omega^2} > 1$ )			Inestable
Real $> 1$			Inestable
Real $< -1$			Inestable

Cuadro 13.2: Tiempo discreto

Extender estos conceptos de estabilidad a sistemas multivariados lineales o linealizados descritos en modelos de variables de estado es el objetivo de esta parte, en la cual varias definiciones de estabilidad se estudiarán.

Un sistema dado puede mostrar un comportamiento que se considera estable en una región del espacio de estados e inestable en otras regiones. Entonces, el estudio de la estabilidad debe dirigirse a los distintos puntos de equilibrio (a veces llamados puntos críticos) de un sistema y no al propio sistema. Esta distinción es en gran medida innecesaria para los sistemas lineales, pero en los sistemas no lineales sí se tiene en cuenta.

### *Ejemplo 1.*

Teniendo la siguiente Ecuación de Transferencia de un sistema. Determinar su estabilidad.

$$T(s) = \frac{1}{s + \alpha}$$

El sistema tiene un solo polo  $-\alpha$  y se dice que el sistema es asintóticamente estable (siendo  $\alpha$  un número real positivo diferente de 0).

## **13.2 PUNTOS DE EQUILIBRIO Y CONCEPTOS DE ESTABILIDAD**

Un análisis gráfico de la estabilidad es el primer paso para que el tratamiento matemático posterior sea más fácil. Considerando la posibilidad que la pelota es libre de rodar en la superficie que se muestra en la Figura 13.2. La pelota podía ser puesta y quedarse en los puntos A, B, C y G y en cualquier lugar entre los puntos D y F, como es E. Cada uno de estos puntos es un punto de equilibrio del sistema.

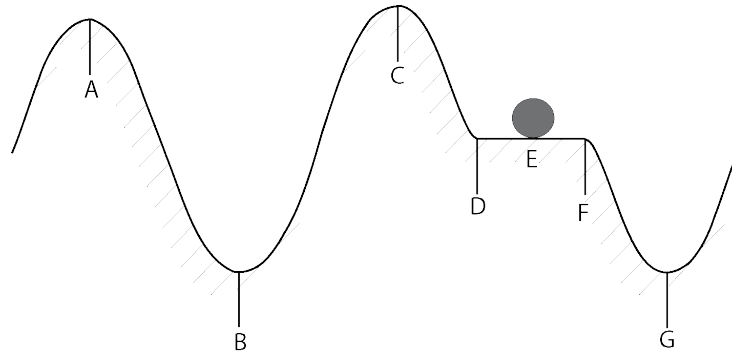


Figura 13.2: Análisis gráfico de estabilidad

En el espacio de estados, un punto de equilibrio para un sistema continuo en el tiempo es un punto en el que  $\dot{\mathbf{x}}$  es cero, en ausencia de las entradas y perturbaciones. Así, si el sistema se encuentra en ese estado, permanecerá allí. Para los sistemas en tiempo discreto, un punto de equilibrio es aquel para el cual  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k)$  en ausencia de todas las entradas de control o perturbaciones.

Una pequeña perturbación en los puntos A o C hará que el balón se aparte de estos puntos. Este comportamiento hace que A y C sean llamados puntos de equilibrio inestables. Después de las pequeñas perturbaciones fuera de B o G, el balón finalmente regresará a descansar en estos puntos. Entonces, B y G se denominan puntos de equilibrio estables. Si la bola se desplaza ligeramente desde el punto E, en ausencia de una velocidad inicial, se mantendrá en la nueva posición. Puntos como E se dice a veces que son neutramente estables.

Suponiendo que la forma de la superficie en la figura 13.2 cambia con el tiempo. En concreto, supongamos que el punto G se mueve verticalmente, de modo que la pendiente en ese punto es siempre cero, pero a veces la superficie cóncava hacia arriba (como se muestra) y, a veces cóncava hacia abajo. El punto G sigue siendo un punto de equilibrio, pero si es estable o no depende ahora de tiempo.

Hasta ahora sólo se ha considerado la estabilidad local, ya que las perturbaciones se supone que son pequeñas. Si la bola se desplazara suficientemente lejos del punto G, que no volvería a ese punto. La estabilidad por lo tanto depende del tamaño de la perturbación original y de la naturaleza de las perturbaciones que pueden estar actuando.

Un punto particular  $\mathbf{x}_e \in \Sigma$  es un punto de equilibrio de un sistema dinámico si el estado del sistema en  $t_0$  es  $\mathbf{x}_e$  y  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$  para todo  $t \geq t_0$  en ausencia de las entradas o perturbaciones. Para un sistema continuo en el tiempo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$  esto significa que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, 0, t) = 0$  para todo  $t \geq t_0$ . Para sistemas en tiempo discreto  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k)$  esto significa que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, 0, k) = \mathbf{x}_e$  para todo  $k > 0$ .

El origen del espacio de estado siempre es un punto de equilibrio para sistemas lineales, sin embargo no debe ser el único. En el caso del tiempo continuo, si la matriz  $\mathbf{A}$  del sistema tiene un *eigenvalue* cero, entonces hay una cantidad infinita de vectores (*eigenvectors*) que satisfacen  $\mathbf{A}\mathbf{x}_e = 0$ . En el caso del tiempo discreto un *eigenvalue* unitario 1 de  $\mathbf{A}$  nos dice que hay infinidad de vectores que satisfacen  $\mathbf{A}\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_e$ . Estos puntos corresponden en términos generales a los puntos entre D y F de la figura 2. Para sistemas lineales el único punto de equilibrio aislado es el origen.

### 13.3 DEFINICIONES DE ESTABILIDAD

Considerando el sistema de tiempo continuo con entrada cero,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, 0, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (13.1)$$

Existe una única solución a estas ecuaciones diferenciales, si es por lo menos continua por partes con respecto a  $t$  en algunas regiones del espacio producto  $\Sigma \times \tau$ , que contiene  $x_0, t_0$ . Además, la solución depende de sus argumentos en una manera continua. La solución suele escribirse como  $\Phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)$  que muestra sus argumentos de forma explícita, pero a menudo se refieren a ella simplemente como  $\mathbf{x}(t)$ . En el caso lineal,  $\Phi(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0$ .

Se supone que un punto de equilibrio para el sistema (Eq. 1) es o ha sido trasladado al origen. Para el caso de tiempo continuo entrada cero

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, 0, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

siendo el origen un punto de equilibrio, se aplica lo siguiente.

**Definición 1.** El origen es un punto de equilibrio estable si para cualquier valor dado  $\epsilon > 0$  existe un número  $\delta(\epsilon, t_0) > 0$  tal que si  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$ , entonces el movimiento resultante  $\mathbf{x}(t)$  satisface  $\|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon$  para todos los  $t > t_0$ .

Esta definición de estabilidad es a veces llamada estabilidad en el sentido de Lyapunov, abreviado como estable i.s.L. Si posee un sistema con este tipo de estabilidad, entonces se garantiza que el estado se puede mantener dentro de  $\epsilon$ , en teoría, del origen de la restricción de la perturbación inicial tiene que ser inferior a  $\delta$ . Hay que tener en cuenta que  $\delta \leq \epsilon$  no es necesariamente cierto.

**Definición 2.** El origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable si **(a)** es estable, y si, además, **(b)** existe un número  $\delta'(t_0) > 0$  tal que cada vez que  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta'(t_0)$  el movimiento resultante cumple  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$ .

La figura 13.3a ilustra estas definiciones para el espacio de estado bidimensional  $\Sigma_2$ . Las mismas ideas conceptualmente se aplican en las dimensiones superiores. Dos ejemplos de trayectorias posibles se muestran en la Figura 10.2a, uno para un sistema que es estable i.s.L. y el otro para un sistema asintóticamente estable. Una proyección sobre el espacio de los estados  $\Sigma_2$  se muestra en la Figura 13.3b. Una trayectoria que no es estable, se ha añadido a las dos originales.

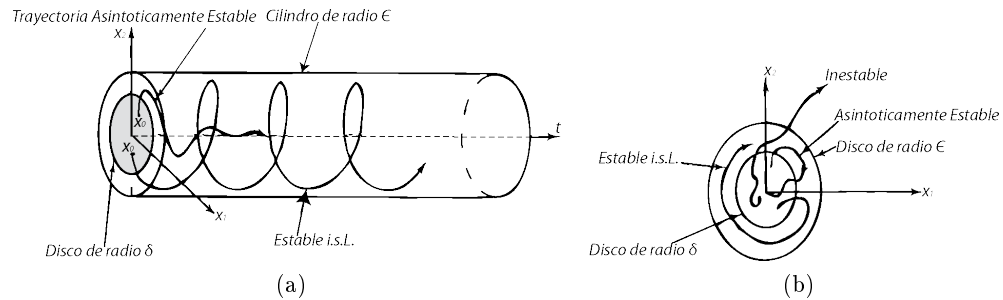


Figura 13.3: Trayectoria Asintóticamente estable

Las dos definiciones anteriores son las más básicas de estabilidad para sistemas no forzados en tiempo continuo. Si  $\delta$  y  $\delta'$  no son funciones de  $t_0$ , entonces el origen se dice que es uniformemente estable y uniformemente y asintóticamente estable, respectivamente. Si  $\delta'(t_0)$  en la segunda definición se puede hacer arbitrariamente grande - es decir, si todos los  $\mathbf{x}(t_0)$  convergen a 0-entonces el origen se dice que es globalmente asintóticamente estable o asintóticamente estable a lo largo.

Las definiciones de estabilidad para sistemas en tiempo discreto con entrada cero

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), 0, k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (13.2)$$

son iguales a las anteriores, siempre que el índice de tiempo discreto  $k$  se utilice en lugar de  $t$ . Como antes, se supone que las coordenadas se han elegido de modo que el origen es un estado de equilibrio.

Cuando las entradas  $\mathbf{u}(t)$  o  $\mathbf{u}(k)$  son distintas de cero, se consideran dos tipos adicionales de estabilidad.

**Definición 3.** (Estabilidad con entrada limitada y estado limitado.) Si hay una constante fija  $K$ , tal que  $\|\mathbf{u}\| \leq K$  para cada  $t$  (o  $k$ ), se dice que la entrada es limitada. Si por cada entrada limitada, y para condiciones iniciales arbitrarias  $\mathbf{x}(t_0)$ , existe un escalar  $0 < \delta(K, t_0, \mathbf{x}(t_0))$  tal que el estado resultante satisface  $\|\mathbf{x}\| \leq \delta$ , entonces el sistema tiene estabilidad con entrada limitada, estado limitado, abreviado como estabilidad BIBS (*bounded input, bounded state* en inglés).

Estas definiciones de estabilidad tratan con el comportamiento del vector de estado en relación a un estado de equilibrio. Con frecuencia, el principal interés radica en el comportamiento de salida del sistema.

**Definición 4.** (Estabilidad con entrada limitada y salida limitada) Siendo  $\mathbf{u}$  una entrada limitada con  $K_m$  como mínimo en la cota superior. Si existe un escalar  $\alpha$  tal que por cada  $t$  (o  $k$ ), la salida satisface  $\|\mathbf{y}\| \leq \alpha K_m$ , entonces el sistema tiene estabilidad con entrada limitada y salida limitada, abreviado como estabilidad BIBO (*bounded input, bounded output* en inglés).

## 13.4 ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES

Si consideramos el siguiente sistema lineal en tiempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (13.3)$$

El caso no forzados se trata en primer lugar. Con  $\mathbf{u}(t) = 0$ , el vector de estado está dado por

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (13.4)$$

La norma de  $\mathbf{x}(t)$  es una medida de la distancia del estado desde el origen:

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \|\Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|\mathbf{x}(t_0)\| \quad (13.5)$$

Supongamos que existe un número  $N(t_0)$ , posiblemente en función de  $t$ , de manera que

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq N(t_0) \quad (13.6)$$

para todo  $t \geq t_0$ .

Entonces, las condiciones de la definición 1 pueden ser satisfechas por cualquier  $\epsilon > 0$  dejando  $\delta(t_0, \epsilon) = \epsilon/N(t_0)$ . Se deduce de la ecuación 17.5 lo que la ecuación 17.6 es suficiente para asegurar que el origen es estable en el sentido de Lyapunov. Es fácil demostrar que esta condición también es necesaria. El origen es asintóticamente estable si y sólo si la ecuación 17.6 se mantiene, y si, además,  $\|\Phi(t, t_0)\| \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ . Hay que tener en cuenta que para un sistema lineal, la estabilidad asintótica no depende de  $\mathbf{x}(t_0)$ . Si un sistema lineal es asintóticamente estable, es globalmente asintóticamente estable.

Considerando los tipos de estabilidad que dependen de la entrada  $\mathbf{u}(t)$ . Para sistemas lineales de tiempo continuo, el vector de estado está dado por

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (13.7)$$

La estabilidad BIBS requiere que  $\mathbf{x}(t)$  siga siendo limitada para todas las entradas limitadas. Puesto que  $\mathbf{u}(t) = 0$  es limitada, es evidente que la estabilidad i.s.L. también es una condición necesaria para la estabilidad de BIBS. Al tomar la norma de ambos lados de la ecuación 17.7 y el uso de las propiedades de la norma, se encuentra que  $\|\mathbf{x}(t)\|$  sigue siendo limitada, y por lo tanto el origen tiene estabilidad BIBS, si la ecuación 17.6 se mantiene y si además existe un número  $N_1(t_0)$  tal que

$$\int_{t_0}^t \|\Phi(t, t_0)\mathbf{B}(\tau)\| d\tau \leq N_1(t_0) \quad (13.8)$$

para todo  $t \geq t_0$ .

Argumentos similares demuestran que un sistema lineal en tiempo discreto tiene estabilidad BIBS si la matriz de transición discreta satisface la ecuación 17.6 y si

$$\sum_{k=0}^{k_1} \|\Phi(k_1, k)\mathbf{B}(k-1)\| \leq N_1.$$

La estabilidad BIBO es investigada por considerar la salida de un sistema lineal

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (13.9)$$

La sustitución de la ecuación 17.7 en la ecuación 17.9 y con el estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  surgen a causa de la entrada limitada en el intervalo  $(-\infty, t_0)$  dando

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{t_0} \mathbf{W}(t, \tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (13.10)$$

Sólo se considera la entrada limitada, esto es,

$$\|\mathbf{u}(\tau)\| \leq K \quad (13.11)$$

para todo  $\tau$

La salida sigue siendo limitada si existe una constante  $M > 0$  tal que la respuesta al impulso o de la matriz de ponderación  $\mathbf{W}(t, \tau)$  satisface

$$\int_{-\infty}^t \|\mathbf{W}(t, \tau)\| d\tau \leq M \quad (13.12)$$

para todo  $t$

La ecuación 17.12 es la condición necesaria y suficiente para la estabilidad BIBO de los sistemas de tiempo continuo. El resultado análogo, con una sumatoria que sustituye a la integración, es válida para sistemas en tiempo discreto. La norma de la matriz  $\|\Phi(t, t_0)\|$  tiene un papel central en las condiciones de estabilidad. Esta norma se puede definir de varias maneras, incluyendo la definición del producto interno

$$\|\Phi(t, t_0)\|^2 = \max_{\mathbf{x}} \{ \langle \Phi(t, t_0)\mathbf{x}, \Phi(t, t_0)\mathbf{x} \rangle \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1 \} \quad (13.13)$$

Si se introduce la adjunta de  $\Phi(t, t_0)$  la ecuación 17.14 queda

$$\|\Phi(t, t_0)\|^2 = \max \text{ eigenvalue de } \bar{\Phi}^T(t, t_0)\Phi(t, t_0) \quad (13.14)$$

Si  $\Phi(t, t_0)$  es normal, entonces  $\bar{\Phi}^T(t, t_0)\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_0)\bar{\Phi}^T(t, t_0)$  y entonces

$$\|\Phi(t, t_0)\| = \max_i |\alpha_i| \quad (13.15)$$

donde  $\alpha_i$  es un eigenvalue de  $\Phi(t, t_0)$ . En todos los casos un límite inferior útil en la norma está dada por

$$\|\Phi(t, t_0)\|^2 \geq |\alpha_i|^2 \text{ para todo eigenvalue } \alpha_i \text{ de } \Phi(t, t_0) \quad (13.16)$$

## 13.5 SISTEMAS LINEALES CONSTANTES

Siempre que el sistema tiene una matriz  $\mathbf{A}$  constante, se tienen los siguientes resultados:

$$\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \text{ (tiempo continuo)} \quad (13.17)$$

$$\Phi(k, 0) = A^T \text{ (detiempo discreto)} \quad (13.18)$$

En virtud del teorema de Cayley-Hamilton, visto anteriormente, estos dos resultados se pueden expresar como polinomios en  $\mathbf{A}$ . Entonces por el teorema de Frobenius los valores propios  $\alpha_i$  de un  $\Phi$  se relacionan con los valores propios  $\lambda_i$  de  $\mathbf{A}$  por

$$\alpha_i = e^{\lambda_i(t-t_0)} \quad o \quad \alpha_i = \lambda_i^k$$

para tiempo continuo y tiempo discreto respectivamente. Es relativamente simple de expresar las anteriores condiciones de estabilidad en términos de los *eigenvalues* del sistema de la matriz  $\mathbf{A}$ . Dejando que estos valores propios sean  $\lambda_i = \beta_i \pm i\omega_i$ , las condiciones resultantes se resumen en la tabla 13.1.

### *Ejemplo 2.*

Estudiar la estabilidad del sistema en tiempo continuo y su aproximación en tiempo discreto:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ (1 - e^{-t}) & 1 \end{bmatrix}$$

Hallamos los eigenvalues de  $\mathbf{A}$

$$|\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_i| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 - \lambda_1 & 0 \\ 1 & -\lambda_2 \end{vmatrix} = (-1 - \lambda_1)(-\lambda_2) = (1 + \lambda_1)(\lambda_2) = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

De acuerdo con la ecuación  $\lambda_i = \beta_i \pm i\omega_i$ ,  $\beta_1 = -1$  y  $\beta_2 = 0$ . Si nos remitimos a la primera parte de la Tabla 13.1 se tiene que el sistema es estable i.s.L.

La ecuación diferencial aproximada en tiempo discreto es:

$$\begin{bmatrix} x_1(t_{k+1}) \\ x_2(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,368 & 0 \\ 0,632 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_k) \\ x_2(t_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,632K & 0 \\ 0,368K & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t_k) \\ u_2(t_k) \end{bmatrix}$$

Hallamos los eigenvalues de  $\mathbf{A}$

$$|\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_i| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0,368 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0,632 & 1 & 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,368 - \lambda_1 & 0 \\ 0,632 & 1 - \lambda_2 \end{vmatrix} = (0,368 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0,368 \\ \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

De acuerdo con la ecuación  $\lambda_i = \beta_i \pm i\omega_i$ ,  $\beta_1 = 0,368$  y  $\beta_2 = 1$ . Si nos remitimos a la segunda parte de la Tabla 13.1 se tiene que el sistema es estable i.s.L.

**Clasificación de los Puntos de Equilibrio:** Los puntos de equilibrio se pueden clasificar en varios tipos, más allá de etiquetarlos estable o inestable. Para ello es útil ampliar la respuesta a la condición inicial, utilizando los *eigenvectors* de  $\mathbf{A}$  como vectores de la base:

$$\mathbf{x}(t) = w_1(0)\exp(\lambda_1 t)\xi_1 + w_2(0)\exp(\lambda_2 t)\xi_2 + \cdots + w_n(0)\exp(\lambda_n t)\xi_n \quad (13.19)$$

donde  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{M}$  es la matriz modal.

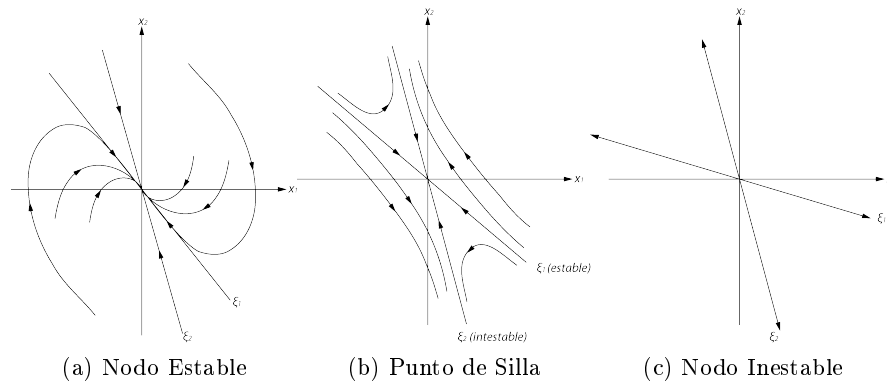


Figura 13.4: Clasificación de P.E.

La ecuación (17.19) se utiliza para discutir la respuesta de la condición inicial de un sistema de segundo orden. Los dos valores propios podrían ser reales o un par conjugado complejo. En el caso real, si ambos *eigenvalues* son estables, el punto de equilibrio es llamado nodo estable, y el marco de fase para diferentes condiciones iniciales se muestra en la Figura 13.4a. Si un *eigenvalue* es estable y el otro es inestable, el comportamiento es como se muestra en la figura 13.4b, y esto se llama un punto silla. Cuando ambos *eigenvalues* son inestables, resultan trayectorias como las de la figura 13.4c, y esto se llama un nodo inestable. Cuando los valores propios son complejos, la ecuación (17.19) puede ser reescrita como

$$\mathbf{x}(t) = \exp\{\beta t\} \{ [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)] \xi_R + [b \cos(\omega t) - a \sin(\omega t)] \xi_I \}$$

donde  $\xi_R$  y  $\xi_I$  son las partes reales e imaginarias de  $\xi$  y  $a, b$  son constantes reales que dependen de las condiciones iniciales. Si la parte real del eigenvalue,  $\beta$ , es negativo resulta el marco de fase de la figura 13.5a y es llamado foco estable. Si  $\beta > 0$ , resulta el foco inestable de la figura 13.5b. Si  $\beta = 0$  el punto de equilibrio es llamado un centro, y el marco de fase es mostrado en la figura 13.5c. Generalmente, visualizaciones gráficas de trayectorias son difíciles o imposibles en dimensiones superiores. Sin embargo, la ecuación (17.19) también es útil para conceptualizar la respuesta.

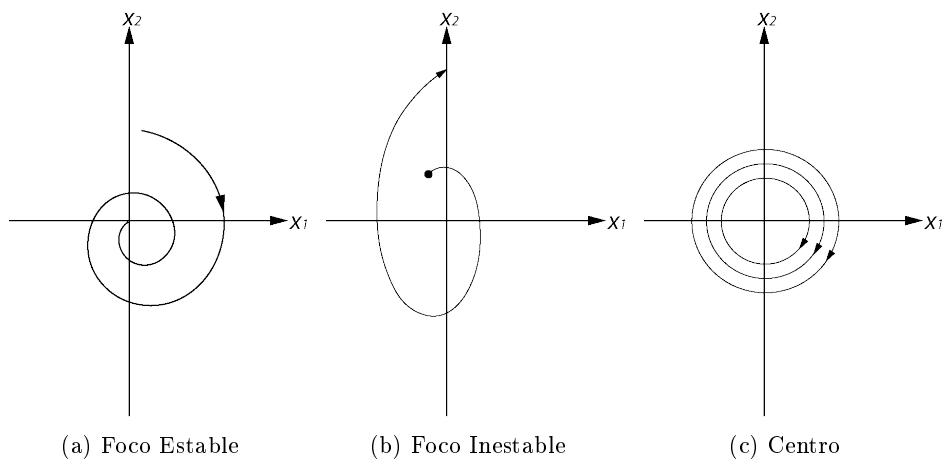


Figura 13.5: Clasificación de P.E.

## 13.6 EL MÉTODO DIRECTO DE LYAPUNOV

Como nos podemos dar cuenta los resultados generales de estabilidad para sistemas lineales están en términos de la matriz de transición  $\Phi(t, t_0)$ . esto significa que para tener una conclusión de la estabilidad del sistema debemos tener la solución de las ecuaciones diferenciales del sistema. Este método también conocido como Segundo Método de Lyapunov fue desarrollado en el siglo XIX y es una aproximación al análisis de la estabilidad. Para este método solo es necesario tener las ecuaciones diferenciales, mas no su solución. Este método se utiliza tanto para el análisis de sistemas lineales como de no-lineales, tiempo invariante y tiempo variable. La complicada matemática puede parecer demasiado para sistemas lineales. Sin embargo, para sistemas lineales de tiempo variable, se pueden obtener respuestas fiables que por otros métodos serian difíciles de encontrar. Incluso para los sistemas lineales constantes, este método provee una aproximación con información alternativa.

El método directo de Lyapunov puede ser considerado como un método de energía generalizado.

Este método utiliza la función de Lyapunov,  $V(\mathbf{x})$ . Esta función escalar de el estado puede ser considerada como una energía generalizada. En muchos casos la función de energía puede ser usada como función de Lyapunov. Cuando el sistema modelado es descrito matemáticamente, puede que no este claro que significa “energía”. Las condiciones para que  $V(\mathbf{x})$  sea considerada una función de Lyapunov son matemáticas mas no físicas.

Una función de un solo valor  $V(\mathbf{x})$  que es continua y tiene derivadas parciales continuas se dice que es definida positiva en alguna región  $\Omega$  sobre el origen del espacio de estado si (1)  $V(0) = 0$  y (2)  $V(\mathbf{x}) > 0$  para todos los  $\mathbf{x}$  distintos de cero en  $\Omega$ . Si la condición (2) es sosegada a  $V(\mathbf{x}) \geq 0$  para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$  se dice que es semi-definida positiva. Invirtiendo las desigualdades obtenemos las definiciones de función definida negativa y semi-definida negativa.

Considerando el siguiente sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{13.20}$$

Asumiendo que el origen es un punto de equilibrio, osea,  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . La estabilidad de este punto se puede determinar por medio de los siguientes teoremas.

**Teorema 1.** Si una función definida positiva  $V(\mathbf{x})$  se puede determinar de manera que  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  (semi-definida negativa), entonces el origen es estable i.s.L.

Una función que cumpla estos requisitos es llamada función de Lyapunov. La función de Lyapunov no es única, hay muchas diferentes funciones de Lyapunov que se pueden encontrar para un sistema dado. Del mismo modo, la incapacidad de encontrar una función de Lyapunov satisfactoria no significa que el sistema es inestable.

**Teorema 2.** Si una función definida positiva  $V(\mathbf{x})$  se puede determinar de manera que  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es definida negativa, entonces el origen es asintóticamente estable.

Estos dos teoremas se relacionan con la estabilidad local en el vecindario  $\Omega$  del origen.

**Teorema 3.** El origen es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable para el sistema (Eq. 17.20) si una función de Lyapunov  $V(\mathbf{x})$  se puede encontrar tal que (1)  $V(\mathbf{x}) > 0$  para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  y  $V(\mathbf{0}) = 0$ , (2)  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , y (3)  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  cuando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ .

En los dos anteriores teoremas el requisito de definida negativa en  $\dot{V}$  se puede bajar a semi-definida negativa, y la estabilidad asintótica todavía se puede concluir, si puede demostrarse que  $\dot{V}$  nunca es cero a lo largo de una trayectoria de solución.

Lamentablemente, los teoremas de Lyapunov no dan ninguna indicación de cómo una función de Lyapunov puede ser encontrada. No hay una única función de Lyapunov para un sistema dado. Algunas son mejores que otras. Podría suceder que un  $V_1(\mathbf{x})$  se puede encontrar que índice la estabilidad i.s.L.,  $V_2(\mathbf{x})$  puede indicar la estabilidad asintótica de estados iniciales muy cerca del origen, y  $V_3(\mathbf{x})$  puede indicar estabilidad asintótica de una región mucho más grande, o incluso la estabilidad asintótica global. La incapacidad de encontrar una función de Lyapunov adecuada no demuestra la inestabilidad. Si un sistema es estable en uno de los sentidos mencionados, se asegura que una función de Lyapunov existe. Sin embargo, se puede presentar mucha dificultad para encontrarla.

No hay un método universal mejor que otro para la búsqueda de funciones de Lyapunov. Una forma de  $V(\mathbf{x})$  se puede suponer, ya sea como una conjetura pura o tanteando por visión física y consideraciones como la energía. Luego  $\dot{V}(\mathbf{x})$  se puede probar, lo que nos llevaría a las ecuaciones del sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  en el proceso. Otro enfoque es asumir una forma para los derivados de  $V(\mathbf{x})$ , bien sea  $\dot{V}(\mathbf{x})$  o  $\nabla_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x})$ . Luego  $V(\mathbf{x})$  puede ser determinado mediante la integración y la prueba para ver si cumple las condiciones requeridas.

### ***Ejemplo 3.***

Considerando un sistema de segundo orden como el sistema masa resorte (Figura 6)

En este caso la posición  $y$  y la velocidad  $\dot{y}$  son las usadas como variables de estado  $\mathbf{x}$ .

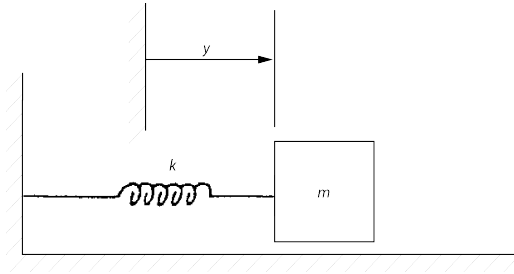


Figura 13.6: Sistema masa-resorte

La energía total (cinética mas potencial)

$$\mathcal{E} = \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{ky^2}{2}$$

La energía  $\mathcal{E}$  para este caso es una función cuadrática de las variables de estado. Así que  $\mathcal{E}(\mathbf{x}) > 0$  si  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  y  $\mathcal{E} = 0$  si y solo si  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Si la tasa de variación de la energía  $\dot{\mathcal{E}}$  es siempre negativa, excepto para, entonces  $\mathcal{E}$  decrecerá continuamente y eventualmente se aproximara a cero. Entonces, si  $\dot{\mathcal{E}} < 0$  para todo t, a excepción de  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , se puede concluir que para un t suficientemente grande  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ . Tenemos que el sistema será asintóticamente estable.

Si la tasa de variación de la energía nunca es positiva  $\dot{\mathcal{E}} \leq 0$ , entonces  $\mathcal{E}$  nunca se incrementara, pero no necesariamente se aproximara a cero. Se puede concluir que  $\mathcal{E}$  y por lo tanto  $\mathbf{x}$ , se mantienen limitadas en cierto sentido. Tenemos que el sistema será estable i.s.L.

La tarea de encontrar las funciones de Lyapunov adecuadas para sistemas lineales es mucho más de rutina. Una forma cuadrática puede ser utilizada,

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

donde  $\mathbf{P}$  es una matriz positiva definida, simétrica y real. Entonces la rata de cambio en el tiempo es  $\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x}$ . Usando la ecuación de estado para sistemas lineales,  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ , esta se convierte en

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T [\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \dot{\mathbf{P}}] \mathbf{x}$$

Si el sistema es asintóticamente estable,  $\dot{V}$  debe ser definida negativa, lo que requiere que la ecuación matricial

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{Q}$$

sea cierta para matrices definidas positivas  $\mathbf{Q}$ . Si  $\mathbf{A}$  es constante, entonces una matriz  $\mathbf{P}$  constante será suficiente, para que  $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$ . La ecuación que queda es también llamada ecuación de Lyapunov,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (13.21)$$

Una solución única  $\mathbf{P}$  existirá para cada  $\mathbf{Q}$ , siempre que no haya dos *eigenvalues* de  $\mathbf{A}$  que cumplan  $\lambda_i + \lambda_j = 0$ . Por lo tanto, para cualquier  $\mathbf{Q}$  arbitraria,  $\mathbf{P}$  se puede encontrar resolviendo  $n^2$  ecuaciones lineales (ya que  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$  sólo  $(n^2 + n)/2$  son realmente necesarios):

$$[\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{I}_n] (\mathbf{P}) = -(\mathbf{Q}) \quad (13.22)$$

donde  $(\mathbf{P})$  y  $(\mathbf{Q})$  son las columnas vectorizadas de  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$ . Una forma de uso de la ecuación (17.21) sería suponer una matriz simétrica definida positiva  $\mathbf{P}$  y luego comprobar si la  $\mathbf{Q}$  calculada es definida positiva. Si es así, se establece la estabilidad asintótica. Si  $\mathbf{Q}$  es sólo semi-definida positiva, entonces se tiene estabilidad i.s.L. Si  $\mathbf{Q}$  es definida negativa, se concluye la inestabilidad. Si  $\mathbf{Q}$  es indefinida, nada puede concluirse. Un resultado más potente se obtiene mediante el trabajo en la dirección inversa, es decir, comenzando con una matriz definida positiva  $\mathbf{Q}$  y usando la ecuación (17.21) se determina  $\mathbf{P}$ . Resulta que cualquier  $\mathbf{Q}$  simétrica definida positiva satisface y normalmente  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  es utilizado. Lo que lleva lo siguiente

**Teorema 4.** La matriz constante  $\mathbf{A}$  es asintóticamente estable si y solo si la solución  $\mathbf{P}$  de la ecuación (17.21) es definida positiva cuando  $\mathbf{Q}$  es definida positiva.

Este no es solo un caso especial del teorema 2 porque las condiciones suficientes y necesarias se dan. En vista de la relación uno-a-uno entre  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  establecido por la ecuación (17.21), puede parecer extraño que a partir de una arbitraria  $\mathbf{Q}$  definida positiva se obtiene una respuesta definitiva, mientras que a partir de una  $\mathbf{P}$  arbitraria definida positiva no se puede.

#### *Ejemplo 4*

Teniendo un sistema lineal con  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ , determinar su estabilidad

Seleccionando arbitrariamente a  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_2$ , resolvemos la ecuación 17.21:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y tenemos como resultado  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 \end{bmatrix}$  la cual es definida positiva, y de acuerdo con el teorema 4 este sistema es asintóticamente estable.

#### *Ejemplo 5*

Teniendo un sistema de tercer orden con la siguiente representación de variables de estado  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -18 & -27 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$  y  $y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}$ , determinar su estabilidad

Seleccionando arbitrariamente a  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_3$ , resolvemos la ecuación 17.22:

$$[\mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{I}_3] (\mathbf{P}) = -(\mathbf{Q})$$

$$\left[ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & -18 \\ 1 & 0 & -27 \\ 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -18 \\ 1 & 0 & -27 \\ 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{21} \\ P_{22} \\ P_{23} \\ P_{31} \\ P_{32} \\ P_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{array} \right] \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{21} \\ P_{22} \\ P_{23} \\ P_{31} \\ P_{32} \\ P_{33} \end{pmatrix} =$$

$$- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -27 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & -27 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -27 & 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -10 & 0 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -10 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -20 \end{array} \right] \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{21} \\ P_{22} \\ P_{23} \\ P_{31} \\ P_{32} \\ P_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones hallamos la matriz  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1,94841 & 1,297619 & 0,027777 \\ 1,297619 & 2,167769 & 0,066578 \\ 0,027777 & 0,066578 & 0,056657 \end{bmatrix}$$

Los menores principales son

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= P_{11} = 1,94841 \\ \Delta_2 &= P_{22}\Delta_1 - P_{12}^2 = 2,167769 * 1,94841 - 1,297619^2 = 2,53989 \\ \Delta_3 &= P_{33}\Delta_2 - P_{23}(P_{11}P_{23} - P_{12}P_{13}) + P_{13}(P_{12}P_{23} - P_{22}P_{13}) = 0,138395 \end{aligned}$$

Como los tres son positivos,  $\mathbf{P}$  es definida positiva y el sistema es asintóticamente estable.

Si se considera un sistema de tiempo variable,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{13.23}$$

Se supone que el origen es un punto de equilibrio,  $\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$  para todo  $t$ . Los teoremas de estabilidad anteriores siguen siendo básicamente lo que se necesita para concluir la estabilidad. Sin embargo, ahora la función de Lyapunov y su derivada temporal pueden ser funciones explícitas de tiempo, así como el estado. Las definiciones de positivo y negativo tienen que ser modificadas para reflejar que esta generalidad se agregó. Sólo el teorema 3 es generalizado.

**Teorema 5.** Si una función de un solo valor  $V(\mathbf{x})$  existe, es continua y tiene primeras derivadas parciales continuas y para la que

1.  $V(\mathbf{0}, t) = 0$  para todo  $t$ ;

2.  $V(\mathbf{x}, t) \geq \sigma(\|\mathbf{x}\|) > 0$  para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  y para todo  $t$ , donde  $\sigma(\cdot)$  es una función escalar continua, no-decreciente con  $\sigma(0) = 0$ ;
3.  $\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -\kappa(\|\mathbf{x}\|) < 0$  para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  y para todo  $t$ , donde  $\kappa(\cdot)$  es una función escalar continua, no-decreciente con  $\kappa(0) = 0$ ;
4.  $V(\mathbf{x}, t) \geq \nu(\|\mathbf{x}\|)$  para todo  $\mathbf{x}$  y para todo  $t$ , donde  $\nu(\cdot)$  es una función escalar continua, no-decreciente con  $\nu(0) = 0$ ;
5.  $\sigma(\|\mathbf{x}\|) \rightarrow \infty$  para  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$

entonces  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es uniforme globalmente asintóticamente estable.

Las funciones  $\sigma$ ,  $\kappa$ , y  $\nu$  son todas definidas positivas en el sentido anterior, en donde el tiempo no aparece explícitamente.  $V(\mathbf{x}, t)$  se dice que es definida positiva si  $V(\mathbf{0}, t) = 0$  y si  $V(\mathbf{x}, t)$  es siempre mayor que o igual a una función definida positiva invariante en el tiempo como  $\sigma$ . Las condiciones (1) y (2) simplemente requieren que  $V(\mathbf{x}, t)$  sea definida positiva. Del mismo modo, la condición (3) requiere  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  sea definida negativa. La condición (5) requiere  $V(\mathbf{x}, t)$  tienda a infinito cuando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ , como en el teorema 3, y en la condición (4) impide  $V(\mathbf{x}, t)$  tienda a infinito cuando  $\|\mathbf{x}\|$  es finito. La "uniformidad" en la conclusión indica que la estabilidad asintótica no depende de ningún momento inicial particular  $t_0$ .

Hay una serie de teoremas de inestabilidad, que son útiles para evitar búsquedas infructuosas de las funciones de Lyapunov para sistemas inestables.

**Teorema 6.** Si una función escalar  $V(\mathbf{x})$  es continua y tiene primeras derivadas parciales continuas y si

1.  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  es definida positiva en alguna región  $\Omega$  que contiene el origen;
2.  $V(\mathbf{0}, t) = 0$  para todo  $t$ ;
3.  $V(\mathbf{x}, t) > 0$  en algún punto arbitrario en  $\Omega$  cerca al origen;

entonces el origen es un punto de equilibrio inestable del sistema de la ecuación (17.23)

Estos teoremas de estabilidad de Lyapunov también puede ser utilizados para el análisis de estabilidad de sistemas en tiempo discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) \quad (13.24)$$

El origen se asume como punto de equilibrio, de modo que  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Los anteriores teoremas de estabilidad, la estabilidad asintótica, y estabilidad asintótica global aplica siempre que la derivada en el tiempo  $\dot{V}(\mathbf{x})$  se sustituya por el primer diferencial,  $\Delta V = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k))$ .

El método directo de Lyapunov para el análisis de estabilidad es un método general de aproximación, pero su uso exitoso requiere mucho ingenio.

Muchos sistemas de control pueden ser modelados como sistemas lineales con coeficientes de tiempo variables. Ejemplos de esto son aeronaves y naves espaciales cuya masa disminuye a medida que se quema el combustible, máquinas para procesamiento de papel, alambre, u otros materiales que obliga que la inercia cambie a medida que se enrolla un material de la bobina, manipuladores robóticas con diferentes tipos de cargas desconocidos, y aproximaciones lineales de sistemas no lineales cuyos coeficientes cambian a medida que se evalúan en diferentes puntos a lo largo de la trayectoria nominal.

Una técnica común usada es análisis de estabilidad llamando el método de coeficientes congelados, en el que todos los coeficientes que varían de tiempo son congelados y luego la estabilidad del sistema se analiza como si se tratara de un sistema de coeficientes constantes. Es casi un teorema de tradición oral que, si los *eigenvalues* (polos) están con seguridad en la región de estabilidad en todos los tiempos (o al menos una muestra representativa de ellos) y si los coeficientes y *eigenvalues* no están cambiando "demasiado rápido", entonces el sistema de tiempo variable se puede presumir estable. La evidencia empírica sugiere que cuando se utilizan con precaución, este método suele dar resultados correctos. Sin embargo, la base teórica para el teorema de tradición y de una definición precisa de "demasiado rápido" no se entienden bien. La dependencia total en la ubicación de *eigenvalue* o un polo puede ser engañosa para los sistemas de tiempo variable. El método directo de Lyapunov puede ser utilizado en beneficio de la toma de decisiones de estabilidad en estos casos.

## Capítulo 14

# CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD PARA SISTEMAS LINEALES

### 14.1 DEFINICIONES

Para la descripción de un sistema lineal ya sea en tiempo continuo o tiempo discreto, depende de las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$ . Dependiendo de la elección de las variables de estado, o de la elección base para el espacio de estados  $\Sigma$ , diferentes matrices pueden ser usadas para describir el mismo sistema. Un conjunto particular  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  es llamado una representación o realización de un sistema. Estas matrices pueden ser constantes, o dependientes del tiempo, tanto en tiempo continuo  $\{\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)\}$  o discreto  $\{\mathbf{A}(k), \mathbf{B}(k), \mathbf{C}(k), \mathbf{D}(k)\}$ . Los dos dominios de tiempo serán considerados simultáneamente, los tiempos de interés serán referidos como el conjunto de escalares  $\mathfrak{S}$ , donde  $\mathfrak{S}$  puede ser un intervalo continuo  $[t_0, t_f]$ , o un conjunto de puntos discretos  $[t_0, t_1, \dots, t_N]$ . En cualquier tiempo  $t \in \mathfrak{S}$ , las cuatro matrices del sistema son una representación de las transformaciones en el espacio de estados  $\Sigma$  n-dimensional, el espacio de entrada  $\mathcal{U}^r$  r-dimensionales, el espacio de salida  $\mathcal{Y}^m$  m-dimensional.

$$\mathbf{A} : \Sigma \rightarrow \Sigma$$

$$\mathbf{B} : \mathcal{U}^r \rightarrow \Sigma$$

$$\mathbf{C} : \Sigma \rightarrow \mathcal{Y}^m$$

$$\mathbf{D} : \mathcal{U}^r \rightarrow \mathcal{Y}^m$$

### 14.1.1 Controlabilidad

Controlabilidad es una propiedad del acoplamiento entre la entrada y el estado, y por lo tanto involucra las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ .

**Definición 1.** Se dice que un sistema lineal es controlable en  $t_0$  si es posible encontrar una función de entrada (o secuencia en tiempo discreto)  $\mathbf{u}(t)$ , definida sobre  $t \in \mathfrak{S}$ , que transferirá el estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  al origen en algún tiempo finito  $t_1 \in \mathfrak{S}$ ,  $t_1 > t_0$ . Es decir, existe una entrada  $\mathbf{u}_{[t_1, t_0]}$ , que da  $\mathbf{x}(t_1) = 0$  en un tiempo  $t_1 \in \mathfrak{S}$ . Si esto es cierto para todos los tiempos iniciales  $t_0$  y para todos los estados iniciales  $\mathbf{x}(t_0)$ , el sistema es completamente controlable.

Esta definición se conoce como Controlabilidad de Estado. Esta es la definición mas común.

La completa controlabilidad es obviamente una propiedad muy importante. Si un sistema no es completamente controlable, entonces para algunos estados iniciales no existiran entradas que puedan llevar el sistema al estado cero. En este caso no tendría sentido buscar un control óptimo. Un ejemplo de un sistema incontrolable es cuando la matriz  $\mathbf{B}$  es cero, porque en este caso la entrada esta desconectada del estado.

El completo significado de controlabilidad se dará mas adelante. Si existe un sistema lineal que es controlable, es posible diseñar un control de retroalimentación lineal de estado que le dará *eigenvalues* (polos) arbitrarios específicos de lazo cerrado. Por tanto, un sistema inestable puede ser estabilizado, un sistema lento puede acelerarse, la frecuencias naturales se puede cambiar, y así sucesivamente, si el sistema es controlable. La existencia de soluciones a ciertos problemas de control óptimo se puede asegurar si el sistema es controlable.

### 14.1.2 Obsevabilidad

Obsevabilidad es una propiedad del acoplamiento entre el estado y la salida, y por lo tanto involucra las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{C}$ .

**Definición 2.** Se dice que un sistema lineal es observable en  $t_0$  si  $\mathbf{x}(t_0)$  se puede determinar desde la función de salida  $\mathbf{y}_{[t_1, t_0]}$  (o secuencia de salida) para  $t_0 \in \mathfrak{S}$  y  $t_0 \leq t_1$ , donde  $t_1$  es algún tiempo finito que pertenece a  $\mathfrak{S}$ . Si esto es cierto para todo  $t_0$  y  $\mathbf{x}(t_0)$ , el sistema es completamente observable.

La observabilidad de un sistema es fundamental en la determinación del estado o la construcción de problemas.

### 14.1.3 Dependencia del Modelo

Controlabilidad y Observabilidad están definidas en términos del estado del sistema. Para un sistema físico dado hay diferentes maneras de seleccionar las variables de estado. Dos formas de estos modelos para sistemas una entrada, una salida son la forma canónica controlable y la forma canónica observable. Como es de esperar, el modelo de variables de estado siempre será controlable en el primer caso y siempre observable en el segundo. Es posible que un sistema físico dado tendrá un modelo de estado que es controlable, pero no observable y otro modelo de estado que es observable, pero no controlable. Estas propiedades son características del modelo  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  más que del sistema físico en sí. Sin embargo, si un modelo de variable de estado de orden  $n$  es a la vez controlable y observable, entonces todos los modelos de variables de estado posibles de orden  $n$  tienen estas propiedades. Si alguna de estas propiedades no se presenta en un modelo de variables de estado de orden  $n$ , entonces todos los modelos de variables de estado para este orden tendrán solo una de estas dos propiedades,

Sería preferible si el modelo del sistema fuera tanto controlable como observable. Si esto no se cumple, entonces las débiles condiciones de estabilizabilidad y detectibilidad pueden permitir el diseño del sistema de control aceptable. Es común que un diseñador de sistemas de control pueda determinar si el sistema es controlable u observable. Si el sistema no es observable, se puede cambiar instalando sensores adicionales. Si el sistema no es controlable, esto podría indicar que necesita actuadores de control adicionales.

Si el sistema no es completamente observable, entonces el estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  no se puede determinar de la salida, sin importar cuánto se observe la salida.

## 14.2 SISTEMAS DE TIEMPO INVARIABLE

### 14.2.1 Sistemas de Tiempo Invariante con Eigenvalues distintos

Controlabilidad y observabilidad de sistemas invariantes en el tiempo dependen solo de las matrices constantes  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ .  $\mathbf{D}$  no está incluida porque es una correspondencia directa desde el espacio de entrada al espacio de salida, sin afectar los estados internos. No se necesitan referencias para tener un intervalo  $[t_0, t_1]$  particular. Los  $n$  eigenvalues de  $\mathbf{A}$  se asumen distintos. Entonces la presentación de la forma Jordánica para sistemas de tiempo continuo es

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{q} + \mathbf{B}_n\mathbf{u}(t) \quad (14.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_n \mathbf{q}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \quad (14.2)$$

Para sistemas de tiempo discreto,

$$\mathbf{q}(k+1) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{q}(k) + \mathbf{B}_n \mathbf{u}(k) \quad (14.3)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_n \mathbf{q}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \quad (14.4)$$

Donde  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}_n = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}_n = \mathbf{C} \mathbf{M}$ , donde  $\mathbf{M}$  es la matriz modal. Si alguna de las filas de  $\mathbf{B}_n$  solo contiene elementos cero, el modo correspondiente  $q_i$  no es afectado por la entrada. Entonces  $\dot{q} = \lambda_i q_i$  o  $q_i(k+1) = \lambda_i q_i(k)$ . En este caso la solución homogénea para  $q_i$  se podría aproximar a cero cuando  $t$  (o  $k$ )  $\rightarrow \infty$ , pero no hay un tiempo finito en el que este componente de  $q$  sea cero. Por lo tanto no hay un tiempo finito en el que  $q$  y por lo tanto  $\mathbf{x}$  tiendan a cero.

### Criterio de Controlabilidad No. 1

El sistema de coeficientes constantes, para el que  $\mathbf{A}$  tiene eigenvalues distintos, es completamente controlable si y solo si no hay ninguna fila de ceros en  $\mathbf{B}_n = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}$ .

### *Ejemplo 1*

Un sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Determinar si el sistema es controlable

Hallamos los *eigenvalues* de  $\mathbf{A}$

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 - \lambda_1 & -2 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 - \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\lambda_3 = -3$$

Como todos los eigenvalues son distintos ahora analizamos  $\mathbf{B}_n$  teniendo como matriz modal

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

La inversa de M es  $\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1,5 & 0,5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1,5 & 0,5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 2 \\ 3 & 6 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

Como  $\mathbf{B}_n$  no tiene ninguna fila 0 entonces el sistema es completamente controlable.

### *Ejemplo 2*

Un sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5/6 & -13/6 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

Determinar si es controlable.

Hallamos los *eigenvalues* de  $\mathbf{A}$

$$\begin{vmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 5/6 & -13/6 & -1/3 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,5 - \lambda_1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_2 & 0 \\ 5/6 & -13/6 & -1/3 - \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 0,5 \\ \lambda_3 &= 0,3333 \end{aligned}$$

Como todos los eigenvalues son distintos ahora analizamos  $\mathbf{B}_n$  teniendo como matriz modal

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La inversa de M es  $\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como  $\mathbf{B}_n$  tiene su tercera fila en 0 entonces el sistema no es completamente controlable.

Las ecuaciones 17.2 y 17.4 muestran que la salida  $\mathbf{y}$  no influenciara por el  $i$ -ésimo sistema modal  $q_i$ , si la columna  $i$  de  $\mathbf{C}_n$  contiene sólo elementos cero. si esto es cierto, entonces el  $q_i(t_0)$  puede tomar cualquier valor arbitrario sin influir en  $\mathbf{y}$ . En este caso no hay posibilidad de determinar  $\mathbf{q}(t_0)$  o  $\mathbf{x}(t_0)$ .

### Criterio de Observabilidad No. 1

El sistema de coeficientes constantes, para el que  $\mathbf{A}$  tiene eigenvalues distintos, es completamente observable si y solo si no hay ninguna columna de ceros en  $\mathbf{C}_n = \mathbf{C}\mathbf{M}$ .

### Ejemplo 3

Un sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

y

$$y(t) = [ 4 \quad 1 ] \mathbf{x}(t)$$

Determinar si es observable.

Hallamos los *eigenvalues* de  $\mathbf{A}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\lambda_1 & 0 \\ 8 & -2 & 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 8 & -2 - \lambda_2 \end{vmatrix} = (-\lambda_1)(2 - \lambda_2) - 8 = 0$$

$$\lambda_1 = -4$$

$$\lambda_2 = 2$$

Como todos los eigenvalues son distintos ahora analizamos  $\mathbf{C}_n$  teniendo como matriz modal  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ .

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{C}\mathbf{M} = [ 4 \quad 1 ] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = [ 0 \quad 6 ]$$

Como  $\mathbf{C}_n$  tiene su primer columna en 0 entonces el sistema no es completamente observable.

### Ejemplo 4

Un sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5/6 & -13/6 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Determinar si es observable.

En el ejemplo 2 ya se demostró que  $A$  tiene eigenvalues diferentes y teniendo la matriz modal

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ analizamos } \mathbf{C}_n$$

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{CM} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como  $\mathbf{C}_n$  no tiene columnas en 0 entonces el sistema es completamente observable.

El criterio de completa controlabilidad y observabilidad son útiles debido a la percepción geométrica que dan. También hacen posible hablar de sistemas individuales modales como controlables o incontrolables. Sin embargo, este criterio no es el mas útil porque esta restringido al caso de *eigenvalues* distintos (no solo una forma Jordánica diagonal). Se muestra que cada modo debe tener una conexión directa a la entrada o junto a otro modo como una conexión directa de control. Esto significa que filas ceros se pueden presentar en  $\mathbf{B}_n$ , siempre que no sean la última fila asociada con un bloque Jordánico dado. Un resultado similar con respecto a observabilidad tenemos si la primera columna asociada con cada bloque Jordánico es diferente de cero.

La aplicación de este criterio requiere la determinación de la Forma normal Jordánica, que requiere encontrar la matriz modal  $\mathbf{M}$  y su inversa.

## 14.2.2 Sistemas de Tiempo Invariante con Eigenvalues arbitrarios

### Criterio de Controlabilidad No. 2

Un sistema lineal de coeficientes constantes con la representación  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  es completamente controlable si y solo si la matriz  $n \times rn$

$$\mathbf{P} \triangleq [ B \mid AB \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} ] \quad (14.5)$$

tiene rango  $n$ . La forma para esta condición es idéntica tanto para tiempo continuo como para tiempo discreto. Esta condición es un poco mejor de lo necesario. Si  $\mathbf{A}$  tiene un eigenvalue cero, entonces ciertas condiciones iniciales (los alineados con el *eigenvector* correspondiente) puede conducir a cero en un intervalo de tiempo sin que el rango de  $\mathbf{P}$  sea completo. Cuando se modifica la definición de controlabilidad a la habilidad de manejar cualquier estado de condición inicial a otro estado en un tiempo finito, entonces el rango completo de  $\mathbf{P}$  es suficiente y necesario.

### *Ejemplo 5*

La dinámica lateral de un avión, de un conjunto particular de condiciones de vuelo, los vectores de estado y control en cantidades de perturbación

$$\mathbf{x} = [ p \quad r \quad \beta \quad \varphi ]^T \text{ y } \mathbf{u} = [ \delta_a \quad \delta_r ]$$

donde  $p$  y  $r$  son las tasas incrementales nominal y guiñada,  $\beta$  es un ángulo de deslizamiento lateral incremental, y  $\varphi$  es un ángulo de inclinación incremental. El control son los cambios incrementales en el ángulo del alerón  $\delta_a$  y en el ángulo del timón  $\delta_r$ . En un conjunto consistente de unidades de este modelo linealizado tiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -0,7 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -0,7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 20 & 2,8 \\ 0 & 3,13 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

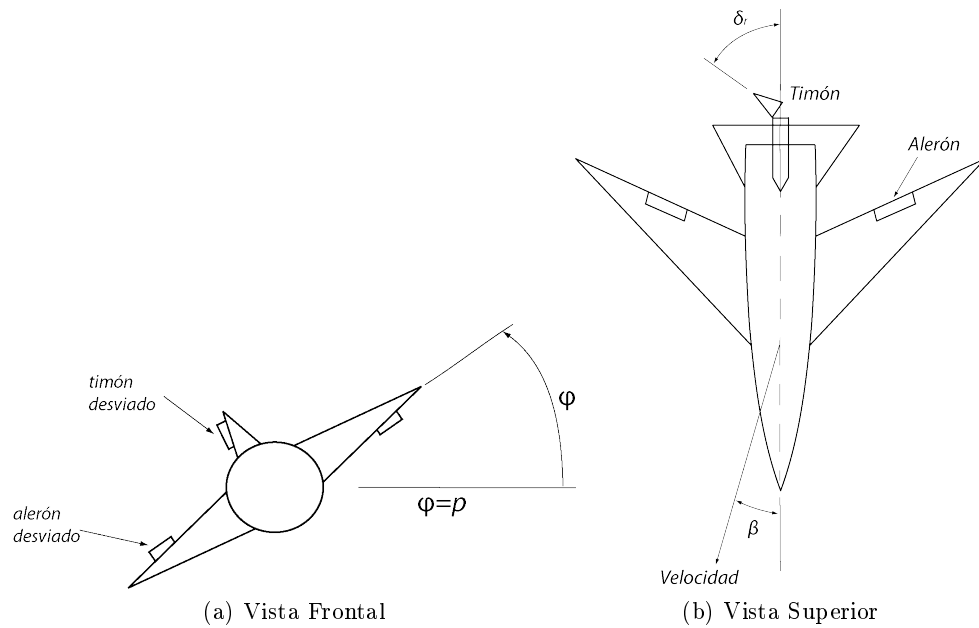


Figura 14.1: Avion

Suponiendo que un mal funcionamiento evita la manipulación de la entrada de  $\delta_r$ .

¿Es posible controlar el avión usando sólo  $\delta_a$ ?

¿Es el avión controlable con sólo  $\delta_r$ ?

Comprobar que se puede controlar con las dos entradas operando.

Cuando  $\delta_a$  es la única entrada, sólo la primera columna de la matriz  $\mathbf{B}$  se debe utilizar en el chequeo de controlabilidad. La Matriz  $\mathbf{P}$  es

$$\mathbf{P} = [ B \mid AB \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} ] = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} 20 & -200 & 2000 & -20 \times 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -200 & 2 \times 10^3 \end{array} \right]$$

y el rango de esta matriz es  $2 < n$ . Por lo que es no controlable.

Con  $\delta_r$  como única entrada, la segunda columna de  $\mathbf{B}$  es usada para hallar otra matriz  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = [ B \mid AB \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} ] = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} 2,8 & -28 & 248,7 & -2443,18 \\ -3,13 & 2,191 & 26,636 & -58,08 \\ 0 & 3,13 & -4,382 & -23,57 \\ 0 & 2,8 & -28 & 248,7 \end{array} \right]$$

El rango es ahora 4, y el sistema es completamente controlable. El índice de controlabilidad (el número de particiones en  $\mathbf{P}$  que se requieren antes de lograr el rango completo) es de 4.

### Criterio de Observabilidad No. 2

Un sistema lineal de coeficientes constantes es completamente observable si y solo si la matriz  $\mathbf{Q}$  (Eq. 17.6) tiene rango  $n$ :

$$\mathbf{Q} \triangleq [ \bar{\mathbf{C}}^T \mid \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{C}}^T \mid \bar{\mathbf{A}}^{2T} \bar{\mathbf{C}}^T \mid \bar{\mathbf{A}}^{2T} \bar{\mathbf{C}}^T \dots \mid \bar{\mathbf{A}}^{(n-1)T} \bar{\mathbf{C}}^T ] \quad (14.6)$$

La forma para esta condición es idéntica tanto para tiempo continuo como para tiempo discreto.

### Ejemplo 6

Si en Ejemplo 5 la única salida medida es la tasa nominal  $p$  (proporcionado por un giróscopo), ¿es el sistema observable?

La matriz de salida es  $\mathbf{C} = [ 1 \ 0 \ 0 \ 0 ]$  calculamos la matriz  $\mathbf{Q}$ ,

$$\mathbf{Q} = [ \bar{\mathbf{C}}^T \mid \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{C}}^T \mid \bar{\mathbf{A}}^{2T} \bar{\mathbf{C}}^T \mid \bar{\mathbf{A}}^{2T} \bar{\mathbf{C}}^T \dots \mid \bar{\mathbf{A}}^{(n-1)T} \bar{\mathbf{C}}^T ] = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} 1 & -10 & 100 & -1000 \\ 0 & 0 & 10 & -114 \\ 0 & -10 & 107 & -984,9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

y el rango de esta matriz es  $3 < n$ . Por lo que es no observable. La medición de la tasa nominal permite el cambio de ángulo de inclinación que debe controlarse, pero nunca permitirá determinar el ángulo de inclinación en sí, porque su valor inicial se desconoce. De hecho, Si se mide una o todas las variables a excepción de  $\varphi$  el sistema se mantiene inobservable.

Cualquier medio para medir  $\varphi$  se requiere para obtener un sistema observable.

Si  $\varphi$  es la única medición, entonces  $\mathbf{C} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$  y calculamos la nueva matriz  $\mathbf{Q}$ ,

$$\mathbf{Q} = [ \bar{C}^T \mid \bar{A}^T \bar{C}^T \mid \bar{A}^{2T} \bar{C}^T \mid \bar{A}^{2T} \bar{C}^T \dots \mid \bar{A}^{(n-1)T} \bar{C}^T ] = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & -10 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & 107 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

la cual tiene rango 4 por lo que el sistema es observable.

## 14.3 SISTEMAS DE TIEMPO VARIABLE

### 14.3.1 Controlabilidad de Sistemas en Tiempo Continuo

Si un sistema de tiempo continuo con  $\{\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)\}$  como representación se considera. Para una función de entrada  $\mathbf{u}(t)$ , la solución para el estado a un tiempo fijo  $t_1$  es

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

El vector definido por  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1) - \Phi(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0)$  es un vector constante en  $\Sigma$  para cualquier tiempo fijo  $t_1$ . Definiendo la transformación lineal

$$\mathcal{A}_c(\mathbf{u}) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

La transformación  $\mathcal{A}_c$  traza funciones en  $\mathcal{U}$  en vectores en  $\Sigma$ . El interrogante de completa controlabilidad en  $[t_1, t_0]$  se reduce a hallar si  $\mathcal{A}_c(\mathbf{u}) = \mathbf{x}_1$  tiene una solución  $\mathbf{u}(t)$  para un

$\mathbf{x}_1 \in \Sigma$  arbitrario. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de tal solución es que el espacio nulo de  $\mathcal{A}_c^*$  sólo contiene elemento cero  $\mathcal{N}(\mathcal{A}_c^*) = \{0\}$ . Este es el requisito para que sea completamente controlable en  $[t_1, t_0]$ , pero se puede tener de una forma as útil. Desde  $\mathcal{A}_c^* : \Sigma \rightarrow \mathcal{U}$ , el rango de  $\mathcal{A}_c^*$  es una función de espacio de infinitas dimensiones. El siguiente enunciado permite el uso de una transformación de dimensión finita.

**Enunciado 1.** El espacio nulo de  $\mathcal{A}_c^*$  es el mismo del espacio nulo de  $\mathcal{A}_c\mathcal{A}_c^*$ . Esto es,  $\mathcal{N}(\mathcal{A}_c^*) = \mathcal{N}(\mathcal{A}_c\mathcal{A}_c^*)$

Para utilizar este enunciado en el desarrollo del criterio de controlabilidad completa, una expresión para la transformación  $\mathcal{A}_c\mathcal{A}_c^*$  se debe encontrar:

$$\mathcal{A}_c(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

entonces

$$\langle \mathbf{v}, \mathcal{A}_c(\mathbf{u}) \rangle = \langle \mathcal{A}_c^*(\mathbf{v}), \mathbf{u} \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \bar{\mathbf{v}}^T \Phi(t_1, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

de modo que  $\mathcal{A}_c^*(\mathbf{v}) = \bar{\mathbf{B}}^T(t) \bar{\Phi}^T(t_1, t) \mathbf{v}$ . Entonces

$$\mathcal{A}_c\mathcal{A}_c^*(\mathbf{v}) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \mathbf{B}(\tau) \bar{\mathbf{B}}^T(\tau) \bar{\Phi}^T(t_1, \tau) d\tau \mathbf{v}$$

La transformación  $\mathcal{A}_c\mathcal{A}_c^*$  es solo una matriz  $n \times n$ , redefinida como  $\mathbf{G}(t_1, t_0)$ ,

$$\mathbf{G}(t_1, t_0) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \mathbf{B}(\tau) \bar{\mathbf{B}}^T(\tau) \bar{\Phi}^T(t_1, \tau) d\tau \quad (14.7)$$

El espacio nulo de  $\mathcal{A}_c\mathcal{A}_c^*$  sólo contendrá el elemento cero si y sólo si  $\mathbf{G}(t_1, t_0)$  no tiene a cero como un *eigenvalue*.

### Criterio de Controlabilidad No. 3

El sistema descrito por  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$  es completamente controlable en el intervalo  $[t_1, t_0]$  si alguna de las siguientes condiciones equivalentes se cumple:

1. La matriz  $\mathbf{G}(t_1, t_0)$  es definida positiva.
2.  $\mathbf{G}(t_1, t_0)$  no tiene *eigenvalue* cero.
3.  $|\mathbf{G}(t_1, t_0)| \neq 0$ .

Este criterio de controlabilidad para tiempo variable se puede reducir al criterio No. 2 cuando las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son constantes. Gracias a la forma cuadrática de la integral de  $\mathbf{G}$ , tenemos que  $\mathbf{G}$  es siempre por lo menos semi-definida positiva. Por lo tanto, que  $\mathbf{G}$  tenga rango máximo y que sea definida positiva son condiciones equivalentes. Si  $\mathbf{G}$  tiene rango máximo, entonces  $\mathbf{P}$  deberá tener rango máximo. Para probar esto del teorema de Cayley-Hamilton tenemos

$$\begin{aligned} \Phi(t_1, \tau)\mathbf{B} &= \alpha_0(\tau)\mathbf{B} + \alpha_1(\tau)\mathbf{A}\mathbf{B} + \cdots + \alpha_{n-1}(\tau)\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \\ &= [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \alpha_0\mathbf{I}_r \\ \alpha_1\mathbf{I}_r \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}\mathbf{I}_r \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{S}(\tau) \end{aligned}$$

Ya que  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y por lo tanto  $\mathbf{P}$  son constantes,

$$\mathbf{G}(t_1, t_0) = \mathbf{P} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{S}(\tau)\bar{\mathbf{S}}^T(\tau)d\tau\bar{\mathbf{P}}^T = \mathbf{P}\mathbf{R}\bar{\mathbf{P}}^T$$

De acuerdo a esta ecuación tenemos que  $\text{rang}(\mathbf{G}) \leq \min\{\text{rang}(\mathbf{P}), \text{rang}(\mathbf{R})\}$ .

Por lo tanto,  $\{\mathbf{G}$  es definida positiva $\} \Rightarrow \{\text{rang}(\mathbf{G}) = n\} \Rightarrow \{\text{rang}(\mathbf{P}) = n\}$ . La implicación inversa también es verdadera. Asumiendo que  $\text{rang}(\mathbf{P}) = n$ , entonces  $\mathbf{P}^T$  tiene  $n$  columnas independientes. Donde, por el teorema de Cayley-Hamilton, para cualquier  $m \geq n$ ,  $\mathbf{A}^m$  puede ser expresada como una combinación lineal de mas bajo nivel  $\mathbf{A}^j$ ,  $j < n$ ,  $\mathbf{A}^m$ , la matriz

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}^T \\ \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{A}}^T \\ \bar{\mathbf{B}}^T (\bar{\mathbf{A}}^T)^2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{B}}^T (\bar{\mathbf{A}}^T)^m \\ \vdots \end{bmatrix}$$

todavía tiene  $n$  columnas linealmente independientes, aun si  $m \rightarrow \infty$ . Esto continua siendo cierto cuando grupos de filas se ponderan por varios niveles de  $(t_1 - t_0)$  y sumados, entonces  $\bar{\mathbf{B}}^T \bar{\Phi}^T(t_1, t_0)$  también tiene  $n$  columnas independientes y rango máximo  $n$ . Este es el operador  $\mathcal{A}_c^*$ . Por lo que  $\mathcal{A}_c^* \mathbf{w} = \mathbf{0}$  si y solo si  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ . Es decir  $\mathcal{N}(\mathcal{A}_c^*) = \{0\}$ . Del enunciado 1

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}_c^*) = \mathcal{N}(\mathcal{A}_c \mathcal{A}_c^*)$$

La conclusión es que si  $\mathbf{G}(t_1, t_0) = \mathcal{A}_c \mathcal{A}_c^*$  sólo tiene el vector cero en su espacio nulo, lo que significa  $\text{rang}(\mathbf{G}) = n$  si  $\text{rang}(\mathbf{P}) = n$ .

### 14.3.2 Observabilidad de Sistemas en Tiempo Continuo

La forma general para la salida  $\mathbf{y}(t)$  es

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{C}(t) \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t)$$

Si la entrada  $\mathbf{u}(t)$  se asume conocida, entonces los dos términos que la contienen se pueden combinar por lo que la función  $\mathbf{y}(t)$  se modifica a una función  $\mathbf{y}_1(t)$ . Además se puede considerar solo la solución no forzada. En cualquiera de los dos casos para la observabilidad completa se requiere un conocimiento de  $\mathbf{y}(t)$  (o  $\mathbf{y}_1(t)$ ), esto sera suficiente para la determinación de  $\mathbf{x}(t_0)$ . Definiendo la transformación lineal  $\mathcal{A}_0(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{C}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0)$ , el requisito de observabilidad completa es que una única  $\mathbf{x}(t_0)$  se puede asociar a cada función de salida  $\mathbf{y}_1(t)$ . Esto requiere que  $\mathcal{N}(\mathcal{A}_0) = \{0\}$ . Modificando un poco el enunciado 1, se puede demostrar que  $\mathcal{N}(\mathcal{A}_0^* \mathcal{A}_0) = \mathcal{N}(\mathcal{A}_0)$ . Para encontrar la transformación adjunta, se considera

$$\langle \mathbf{w}(t), \mathcal{A}_0(\mathbf{x}(t_0)) \rangle = \langle \mathcal{A}_0^* \mathbf{w}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \bar{\mathbf{w}}^T(\tau) \mathbf{C}(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau \mathbf{x}(t_0)$$

Entonces

$$\mathcal{A}_0^*(\mathbf{w}) = \int_{t_0}^{t_1} \bar{\Phi}^T(\tau, t_0) \bar{\mathbf{C}}^T(\tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau$$

y

$$\mathcal{A}_0^* \mathcal{A}_0(\mathbf{x}(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} \bar{\Phi}^T(\tau, t_0) \bar{\mathbf{C}}^T(\tau) \mathbf{C}(\tau) \mathbf{w}(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau \mathbf{x}(t_0)$$

La transformación  $\mathcal{A}_0^* \mathcal{A}_0 : \Sigma \rightarrow \Sigma$  es solo una matriz  $n \times n$ , redefiniendola como  $\mathbf{H}(t_1, t_0)$ ,

$$\mathbf{H}(t_1, t_0) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \bar{\Phi}^T(\tau, t_0) \bar{\mathbf{C}}^T(\tau) \mathbf{C}(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau$$

### Criterio de Observabilidad No. 3

El sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

es completamente observable en  $t_0$  si existe algún tiempo  $t_1$  finito para el que cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes se cumple:

1. La matriz  $\mathbf{H}(t_1, t_0)$  es definida positiva.
2.  $\mathbf{H}(t_1, t_0)$  no tiene a cero como *eigenvalue*.
3.  $|\mathbf{H}(t_1, t_0)| \neq 0$ .

### 14.3.3 Sistemas en Tiempo Discreto

Las formas del criterio 3 de controlabilidad y observabilidad correspondientes para sistemas discretos se obtienen de la misma forma. Sin embargo, donde los espacios de entrada y salida tienen secuencias en lugar de funciones como sus elementos, el producto interno adecuado es una sumatoria en lugar de la integral:

$$\langle \mathbf{w}(k), \mathbf{y}(k) \rangle = \sum_{k=0}^N \bar{\mathbf{w}}^T(k) \mathbf{y}(k)$$

#### Criterio de Controlabilidad y Observabilidad No. 3, Sistemas Discretos

El sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

es completamente controlable en  $k = 0$  si y solo si para algún índice de tiempo finito  $N$  la matriz  $n \times n$

$$\sum_{k=0}^N \Phi(N, k) \mathbf{B}(k) \bar{\mathbf{B}}^T(k) \bar{\Phi}^T(N, k)$$

es definida positiva (o no tiene a cero como eigenvalue, o su determinante es diferente de cero).

Este sistema es completamente observable en  $k = 0$  si y solo si existe un índice de tiempo finito  $N$  para el que la matriz  $n \times n$

$$\sum_{k=0}^N \bar{\Phi}^T(k, 0) \bar{\mathbf{B}}^T(k) \mathbf{B}(k) \Phi(k, 0)$$

es definida positiva (o no tiene a cero como eigenvalue, o su determinante es diferente de cero).

## 14.4 FORMAS CANÓNICAS DE KALMAN

Cualquier vector  $\mathbf{x}(t_0)$  que pertenece al subespacio generado por las columnas de  $\mathbf{P}$  puede ser llevado a cero, es decir, estos estados son controlables. Si las columnas de  $\mathbf{P}$  cubren todo el espacio de estados  $n$ -dimensional, entonces el sistema es controlable. Cuando  $\text{rang}(\mathbf{P}) = r_{\mathbf{P}} < n$ , el espacio de estado se puede descomponer en dos subespacios ortogonales,  $\Sigma = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ , donde  $\Sigma_1$  es el subespacio generado por las columnas de  $\mathbf{P}$ .  $\Sigma_1$  es llamado el subespacio controlable. Teniendo un conjunto de vectores base para  $\Sigma_1$  que consiste en  $r_{\mathbf{P}}$  vectores ortogonales que pertenecen a  $\Sigma_1$  y los vectores restantes ortogonales  $r_{\mathbf{P}} - n$  a estos. Estos vectores forman las columnas de una matriz de transformación  $\mathbf{T} = [ \mathbf{T}_1 \mid \mathbf{T}_2 ]$ . Las ecuaciones de estado original se transforman a la forma canónica controlable de Kalman dejando  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{w}$ . Entonces, el conjunto de bases ortogonales  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ , de manera que

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{w} + \mathbf{T}^T \mathbf{B} \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{w} + \mathbf{D} \mathbf{u}$$

Particionando estas ecuaciones de acuerdo a las dimensiones de  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ ,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}_1 \\ \dot{\mathbf{w}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^T \mathbf{A} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_1^T \mathbf{A} \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_2^T \mathbf{A} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2^T \mathbf{A} \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^T \mathbf{B} \\ \mathbf{T}_2^T \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

y

$$\mathbf{y} = [ \mathbf{C} \mathbf{T}_1 \mid \mathbf{C} \mathbf{T}_2 ] \mathbf{w} + \mathbf{D} \mathbf{u}$$

Como las columnas de  $\mathbf{T}_2$  se seleccionan ortogonales a todas las columnas de  $\mathbf{P}$  (esto incluye las columnas de  $\mathbf{B}$ ), está claro que  $\mathbf{T}_2^T \mathbf{B} = [\mathbf{0}]$ . Las variables de control no tienen entrada directa a los estados  $\mathbf{w}_2$ . Además, el término  $\mathbf{T}_2^T \mathbf{A} \mathbf{T}_1 = [\mathbf{0}]$ , para que los estados  $\mathbf{w}_2$  no se acoplan a los estados  $\mathbf{w}_1$ . La descomposición canónica controlable Kalman es, entonces

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}_1 \\ \dot{\mathbf{w}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^T \mathbf{A} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_1^T \mathbf{A} \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2^T \mathbf{A} \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^T \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

y

$$\mathbf{y} = [ CT_1 \mid CT_2 ] \mathbf{w} + \mathbf{D}u$$

Las variables de estado  $\mathbf{w}_2$  no están conectadas con la entrada, ni tampoco directa ni indirectamente a través del acoplamiento  $\mathbf{w}_1$ . Por lo que son incontrolables.

### *Ejemplo 7*

Un modelo de variables de estado tiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 9 & 6 & 10 \\ -7 & -7 & -9 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Evaluar la matriz de controlabilidad  $\mathbf{P}$  y usarla para encontrar la Forma canónica controlable de Kalman

$$\mathbf{P} = [ B \mid AB \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} ] = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} -2/3 & 1/3 & 4/3 & -5/3 & -8/3 & 19/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 & 7/3 & 4/3 & -23/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & -2/3 & 4/3 & 4/3 \end{array} \right]$$

Hallamos  $\mathbf{T}$  mediante la descomposición  $\mathbf{QR}$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{TR}$  mediante el procedimiento de Gram-Schmidt

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{p}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{t}_k, \mathbf{p}_i \rangle}{\langle \mathbf{t}_k, \mathbf{t}_k \rangle} \mathbf{t}_k$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} -0,816497 & 0 \\ 0,408248 & -0,707107 \\ 0,408248 & 0,707107 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0,57735 \\ 0,57735 \\ 0,57735 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 0,816496 & -0,408248 & -1,63299 & 2,04124 & 3,265986 & -7,75671 \\ 0 & 0,707107 & 0 & -2,12132 & 0 & 6,36396 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

De esto tenemos que el rango de  $\mathbf{P}$  es 2, por lo que el sistema es incontrolable. Las dos columnas de  $\mathbf{T}_1$  son una base ortogonal del subespacio controlable. Un tercer vector base ortogonal se encuentra para  $\mathbf{y}$  y forma la columna de  $\mathbf{T}_2$ . Teniendo  $\mathbf{T}$  la forma canónica controlable de Kalman nos da

$$\dot{\mathbf{w}} = \left[ \begin{array}{cc|c} -2 & 1,73204 & -5,65684 \\ 0 & -3 & -19,5959 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array} \right] \mathbf{w} + \left[ \begin{array}{cc} 0,816495 & -0,408247 \\ 0 & -707107 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \mathbf{u}$$

y

$$\mathbf{y} = \left[ \begin{array}{cc|c} 1,224756 & 0,707107 & 5,19615 \\ 0 & 1,41421 & 3,46410 \end{array} \right] \mathbf{w}$$

El tercer componente de  $\mathbf{w}$  es incontrolable.

Una analogía exacta de la forma canónica observable de Kalman se puede hallar seleccionando un conjunto base orto-normal de las columnas de  $\mathbf{Q}$  (formando las columnas de la matriz  $\mathbf{V}_1$ ) y si es necesario, aumentar los vectores que forman las columnas de  $\mathbf{V}_2$ . Entonces la transformación  $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{v}$  conduce a la forma deseada

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_1 \\ \dot{\mathbf{v}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \mathbf{A} \mathbf{V}_1 & | & [\mathbf{0}] \\ \hline \mathbf{V}_2^T \mathbf{A} \mathbf{V}_1 & | & \mathbf{V}_2^T \mathbf{A} \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{V}_2^T \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

y

$$\mathbf{y} = [ \mathbf{C} \mathbf{V}_1 \mid [\mathbf{0}] ] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{D} \mathbf{u}$$

El hecho de que por la construcción  $\mathbf{V}_2^T \mathbf{C}^T = [\mathbf{0}]$  y que  $\mathbf{V}_1^T \mathbf{A} \mathbf{V}_2 = [\mathbf{0}]$  se han utilizado para llegar a llamarlo forma canónica observable de Kalman de ecuaciones de estado. Tenga en cuenta que los estados  $\mathbf{v}_2$  no contribuyen directamente a la salida  $\mathbf{y}$ . Información sobre  $\mathbf{v}_2$  tampoco está disponible en forma indirecta en  $\mathbf{y}$  a través de las variables  $\mathbf{v}_1$  porque  $\mathbf{v}_2$  no tiene ningún efecto sobre los estados  $\mathbf{v}_1$ .

### Ejemplo 8

Un modelo de variables de estado tiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 9 & 6 & 10 \\ -7 & -7 & -9 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/3 & 4/3 \\ 4/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Evaluar la matriz de observabilidad  $\mathbf{Q}$  y usarla para encontrar la Forma canónica observable de Kalman

$$\mathbf{Q} = [ \bar{\mathbf{C}}^T \mid \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{C}}^T \mid \bar{\mathbf{A}}^{2T} \bar{\mathbf{C}}^T \mid \bar{\mathbf{A}}^{3T} \bar{\mathbf{C}}^T \dots \mid \bar{\mathbf{A}}^{(n-1)T} \bar{\mathbf{C}}^T ] = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 3 & 0 & -6 & -6 & 12 \\ 2 & 3 & -3 & -6 & 3 & 12 \\ 3 & 6 & -3 & -12 & -3 & 24 \end{array} \right]$$

Hallamos  $\mathbf{T}$  mediante la descomposición  $\mathbf{QR}$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{VR}$  mediante el procedimiento de Gram-Schmidt

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{q}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{q}_i \rangle}{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle} \mathbf{v}_k$$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 0,26726 & 0,771517 \\ 0,53452 & -0,617213 \\ 0,801784 & 0,154303 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} -0,57735 \\ -0,57735 \\ 0,57735 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 3,741657 & 7,21605 & -4,0089 & -14,43211 & -2,40535 & 28,86421 \\ 0 & 1,38873 & 1,38873 & -2,77746 & -6,94365 & 5,55492 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

De esto tenemos que el rango de  $\mathbf{Q}$  es 2, por lo que el sistema es incontrolable. Las dos columnas de  $\mathbf{V}_1$  son una base ortogonal del subespacio controlable. Un tercer vector base ortogonal se encuentra para y forma la columna de  $\mathbf{V}_2$ . Teniendo  $\mathbf{V}$  la forma canónica observable de Kalman nos da

$$\dot{\mathbf{v}} = \left[ \begin{array}{cc|c} -1,07143 & 0,371154 & 0 \\ -4,82499 & -3,92857 & 0 \\ -19,4422 & -3,74171 & 5 \end{array} \right] \mathbf{v} + \left[ \begin{array}{cc} 0,26726 & 0,80178 \\ -0,66865 & 0,87439 \\ -1,3472 & -0,76980 \end{array} \right] \mathbf{u}$$

y

$$\mathbf{y} = \left[ \begin{array}{cc|c} 3,74165 & 0 & 0 \\ 7,21604 & 1,38873 & 0 \end{array} \right] \mathbf{v}$$

El tercer componente de  $\mathbf{v}$  es incontrolable.

## 14.5 ESTABILIZABILIDAD Y DETECTABILIDAD

En general las propiedades de controlabilidad y observabilidad y estabilidad son independientes. Ninguna de estas propiedades implica ninguna de las otras. Estas propiedades son útiles cuando un sistema no puede ser completamente controlable o completamente observable.

**Definición 3.** Se dice que un sistema lineal es estabilizable si todos sus modos son inestables, y si alguno es controlable.

Si un sistema es estable este es estabilizable. Si un sistema es completamente controlable, este es estabilizable. En el caso general, el subsistema definido por los modos o estados en  $\mathbf{w}_2$  debe ser estable para que el sistema sea estabilizable. Para un sistema lineal constante el requerimiento es que todos los *eigenvalues* de  $\mathbf{T}_2^T \mathbf{A} \mathbf{T}_2$  deben estar en la región estable, esto es la parte izquierda en el plano- $s$  (tiempo continuo) y el interior del círculo de radio 1 (tiempo discreto). La importancia de la estabilizabilidad es que a pesar de que algunos modos no pueden ser controlados por la opción de entrada o retroalimentación, si son estables (mejor aún asintóticamente estable), estos modos se quedarán delimitados (o mejor aún tienden a cero). Este comportamiento modal a menudo pueden ser tolerados en el sistema global de control.

**Definición 4.** Se dice que un sistema lineal es detectable si todos sus modos son inestables, y si alguno es observable.

Si un sistema es estable este es detectable. Si un sistema es observable, este es detectable. En el caso general, la condición se cumple si el subsistema descrito por los modos  $\mathbf{v}_2$  son estables. En el caso lineal constante, el requerimiento es que todos los *eigenvalues* de  $\mathbf{V}_2^T \mathbf{A} \mathbf{V}_2$  estén en la región estable. La importancia de la detectabilidad es que si ciertos modos son inestables y por lo tanto sujeto a un crecimiento sin límites, al menos este comportamiento no deseado será evidente a partir de las señales de salida  $\mathbf{y}$ . No “modos ocultos”, tales como los contenidos en  $\mathbf{v}_2$  permite que crezca en secreto en una forma inestable.

## Capítulo 15

# RELACIÓN ENTRE VARIABLES DE ESTADO Y ECUACIONES DE TRANSFERENCIA DE LOS SISTEMAS

### 15.1 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE ECUACIONES DE ESTADO

La teoría clásica de control se aplica con cierto grado de facilidad cuando tenemos sistemas físicos con una entrada y una salida, pero cuando los sistemas tienen múltiples entradas y/o múltiples salidas se vuelve extensivo, un arreglo matricial de elementos de función de transferencia  $H_{ij}$  puede ser usado para relacionar las  $j$ th entradas a las  $i$ th salidas. El objetivo de este capítulo consiste en estudiar la relación entre la matriz de función de transferencia y el modelo de variables de estado para el mismo sistema. El tratamiento para sistemas de tiempo continuo o tiempo discreto es parecido solo con diferencias menores en la notación [1].

Para un modelo de variables de estado dado hay una única matriz de función de transferencia. La descripción más general de espacio de estados lineales, sistemas constantes con  $r$  entradas  $\mathbf{u}(t)$ ,  $m$  salidas  $\mathbf{y}(t)$ , y  $n$  variables de estado  $\mathbf{x}(t)$  esta dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (15.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (15.2)$$

Donde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  son matrices constantes de dimensiones  $n \times n$ ,  $n \times r$ ,  $m \times n$ , y  $m \times r$ , respectivamente. Aplicando la transformada de Laplace para las ecuaciones (17.1) y (17.2) tenemos ;

$$s\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s)$$

Como es usual cuando se trata de funciones de transferencia la condición inicial  $\mathbf{x}(t=0)$  se ignora., resolviendo para  $x(s)$  queda ;

$$\mathbf{x}(s) = [s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

Este resultado nos conduce la ecuación (17.3) ., la relación entradas-salidas para las variables transformadas es:

$$\mathbf{y}(s) = \left\{ \mathbf{C} [s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right\} \mathbf{u}(s) \quad (15.3)$$

La matriz  $m \times r$  que multiplica a  $\mathbf{u}(s)$  es la matriz de transferencia  $\mathbf{H}(s)$ ,

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C} [s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (15.4)$$

Un elemento  $H_{ij}(s)$  de  $\mathbf{H}(s)$  es la función de transferencia que relaciona la  $j$ th componente de la entrada  $u_j$  con la  $i$ th componente de salida  $y_i$ ,  $H_{ij} = \frac{y_i(s)}{u_j(s)}$  con todas las señales de entrada igual a cero excepto  $u_j$  también siendo todas las condiciones iniciales cero.

Es conveniente definir  $\Delta(s) = |s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}|$ , entonces  $[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{Adj[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]}{\Delta(s)}$  y la matriz de transferencia puede reescribirse como

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{C} Adj [s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}] \mathbf{B} + \mathbf{D} \Delta(s)}{\Delta(s)} \quad (15.5)$$

Cada elemento de la matriz adjunta es un polinomio en  $s$  de menor grado que o igual a  $n - 1$ .  $\Delta(s)$  es un polinomio en  $s$  de grado  $n$ th, cada elemento  $H_{ij}(s)$  es una relación de polinomios en  $s$ , con el grado del denominador al menos tan grande como el grado de el numerador, entonces  $\mathbf{H}$  es llamada matriz de relación propia, Si  $\mathbf{D} = [0]$ , entonces cada elemento en el numerador en  $\mathbf{H}(s)$  será de grado menor que el denominador, en este caso  $\mathbf{H}(s)$  es una *matriz de relación propia estricta (mas polos que zeros)*, esto puede verse en la ecuación (17.5).

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{H}(s) \quad (15.6)$$

La ecuación (17.4) indica que la *matriz de función de transferencia propia* puede ser escrita como la suma de *matriz de transferencia de relación propia estricta* mas una matriz constante  $\mathbf{D}$ .

Cuando una descripción de variables de estado de un sistema es dado , la única correspondiente matriz de función de transferencia es dado por l Ec (17.4) y (17.5). El proceso inverso no es único. Si la matriz  $\mathbf{H}(s)$  o ( $\mathbf{H}(z)$ ) es dado , inmediatamente la matriz  $\mathbf{D}$  es obtenida por la Ec (17.6) , sin embargo, la determinación de  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$  para el conocimiento de  $\mathbf{H}$  no es único para el proceso [1].

A continuación mostraremos dos ejemplos para la aplicación de este concepto.

### 15.1.1 Obtención de una Función de transferencia a partir de un sistema con una entrada y una salida (SISO)

En el ejemplo (1) , el sistema con una sola entrada y una sola salida ( SISO) es descrito en forma de variables de estado como ;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [ 1 \ 0 \ 0 ], \mathbf{D} = [0]$$

Aplicando  $[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{Adj[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]}{\Delta(s)}$  , tenemos ,

$$[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+5 & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & -1 \\ 0 & 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

Ahora;

$Adj [s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}] = \mathbf{C}^T$  Matriz adjunta o matriz transpuesta de cofactores .

Hallando los Menores tenemos;

$$M_{11} = \begin{vmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+2 \end{vmatrix} = (s+2)^2 ; M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & s+2 \end{vmatrix} = 0 ; M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & s+2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{vmatrix} = -(s+2) ; M_{22} = \begin{vmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s+2 \end{vmatrix} = (s+5)(s+2) ;$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & s+2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ s+2 & -1 \end{vmatrix} = 1 ; M_{32} = \begin{vmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(s+5) ;$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} s+5 & -1 \\ 0 & s+2 \end{vmatrix} = (s+5)(s+2)$$

Entonces la matriz de cofactores queda definida por  $C_{pq} = (-1)^{p+q}M_{pq}$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \times (s+2)^2 = (s+2)^2$$

$$C_{12} = 0$$

$$C_{13} = 0$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \times -(s+2) = s+2$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \times (s+5)(s+2) = (s+5)(s+2)$$

$$C_{23} = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \times 1 = 1$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \times -(s+5) = (s+5)$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \times (s+5)(s+2) = (s+5)(s+2)$$

Por tanto la matriz de cofactores es ;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (s+2)^2 & 0 & 0 \\ s+2 & (s+5)(s+2) & 0 \\ 1 & (s+5) & (s+5)(s+2) \end{bmatrix}$$

Y la matriz traspuesta de cofactores es ;

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} (s+2)^2 & s+2 & 1 \\ 0 & (s+5)(s+2) & (s+5) \\ 0 & 0 & (s+5)(s+2) \end{bmatrix}$$

$$[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} (s+2)^2 & s+2 & 1 \\ 0 & (s+5)(s+2) & (s+5) \\ 0 & 0 & (s+5)(s+2) \end{bmatrix}}{(s+5)(s+2)^2}$$

De la Ec 17.4 y aplicando la ley asociativa para la multiplicación de matrices tenemos;

$$[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} = \frac{\begin{bmatrix} (s+2)^2 & s+2 & 1 \\ 0 & (s+5)(s+2) & (s+5) \\ 0 & 0 & (s+5)(s+2) \end{bmatrix}}{(s+5)(s+2)^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} = \frac{\begin{bmatrix} 0 + s + 2 + 1 \\ 0 + (s+5)(s+2) + s + 5 \\ 0 + 0 + (s+5)(s+2) \end{bmatrix}}{(s+5)(s+2)^2} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 \\ (s+5)(s+2) + s + 5 \\ (s+5)(s+2) \end{bmatrix}}{(s+5)(s+2)^2}$$

Una matriz fila postmultiplicada por una matriz columna es un escalar entonces <sup>1</sup>;

$$\mathbf{C} [s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} = [1 \ 0 \ 0] \frac{\begin{bmatrix} s+3 \\ (s+5)(s+2) + s + 5 \\ (s+5)(s+2) \end{bmatrix}}{(s+5)(s+2)^2} = \frac{s+3}{(s+5)(s+2)^2}$$

Luego la Ec de transferencia es ;

$$H(s) = \frac{s+3}{(s+2)^2(s+5)}$$

---

<sup>1</sup>Las Operaciones Algebraicas con matrices se explicó en el capítulo 4 “Fundamentos de álgebra matricial”

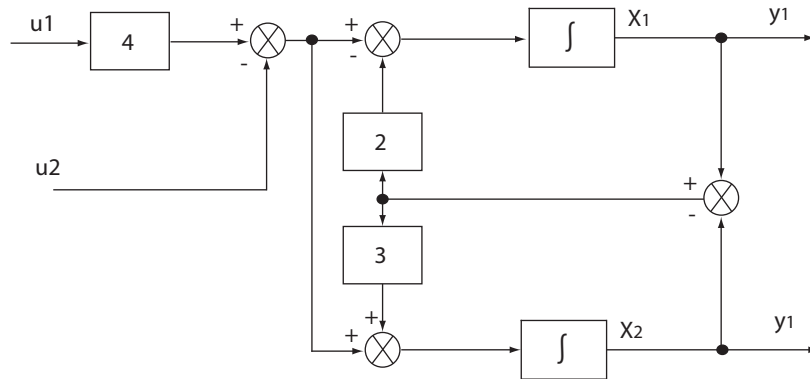
### 15.1.2 Obtención de una matriz de transferencia a partir de un sistema con dos entradas y dos salidas (MIMO);

En el ejemplo (2) , Consideremos un sistema , en el cual las ecuaciones de entrada y salida están determinadas por ( ver Figura 15.1 ) ;

$$\dot{y}_1 + 2(y_1 - y_2) = 4u_1 - u_2 \quad (15.7)$$

$$\dot{y}_2 + 3(y_2 - y_1) = 4u_1 - u_2 \quad (15.8)$$

Figure 15.1: Representación en diagramas de bloques



Las ecuaciones (15.7) y (15.8) pueden ser representadas en el espacio de estado,<sup>2</sup> escribiéndolas entonces en forma matricial compacta, la ecuación de estado y la ecuación de salida son ;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

El vector de estado tiene dimensión 2. La matriz de transferencia puede ser obtenida directamente de las Ec (15.7) y (15.8) por la transformada de Laplace y una matriz inversa , o

<sup>2</sup>Algunos ejemplos para el análisis de sistemas de control en espacio de estados se ilustrarán en el capítulo 9.

aplicando la Ec (17.4) , mediante la cual con el conocimiento de las matrices  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ , obtenemos la matriz  $H(s)$ .

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{s} & \frac{-1}{s} \\ \frac{4}{s} & \frac{-1}{s} \end{bmatrix}$$

## 15.2 ECUACIÓN DE ESTADO DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA (REALIZACIÓN)

Esta discusión es restringida a sistemas SISO , descritos por la función de transferencia,

$$\frac{Y(s)}{u(s)} = T(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

o una función en el dominio de  $Z$

$$\frac{Y(s)}{u(s)} = T(s) = \frac{\beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

Al procedimiento de encontrar una representación de variables de estado a partir de una función de transferencia o matriz de transferencia es llamado *Realización*, en particular hay cuatro categorías de modelos de variables de estado, estas son, la realización directa ( Forma canónica controlable y Forma canónica observable) , realización en cascada ( serie ) y realización en paralelo, cabe resaltar que estas son las cuatro categorías de realización generales pero también se pueden trabajar simultáneamente según sea conveniente como en forma análoga a los circuitos eléctricos.

Dentro de cada una de estas categorías sigue habiendo una cierta libertad de elección , por ejemplo , como los factores se agrupan en forma de cascada en forma diferente , en realidad las posibilidades son infinitas porque si cualquier vector de estado  $\mathbf{x}$  es valido entonces también lo es para cualquier transformación de  $\mathbf{Sx}$  [1].

### 15.2.1 Realización directa .

Son llamadas así porque deriva directamente de la expansión polinomial que forma la función de transferencia. Las dos mayores realizaciones son ;

#### (a) Forma canónica controlable

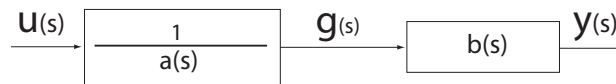
La forma canónica controlable es obtenida por un fraccionamiento artificial del polinomio del denominador de la función de transferencia llamado  $a(s)$ , y el polinomio del numerador llamado  $b(s)$  como se muestra en la figura 15.2. Una variable intermedia  $x(s)$  que es exactamente la misma variable de estado que representa al primer bloque de la figura 15.2,, así que una vez que el estado es seleccionado como  $x_1 = g$ ,  $x_2 = \dot{g}, \dots, x_n = g^{(n-1)}$ , el bloque de  $g$  a la salida  $y$  en la figura 15.2 indica que  $y(t)$  es una combinación lineal de  $g$  y es derivado de  $y(t) = \beta_0 g + \beta_1 \dot{g} + \beta_2 \ddot{g} + \dots + \beta_m g^{(m)}$ , cuando la definición de estado es usado, cada termino de  $g$  excepto el pasado ( $\frac{d^n g}{dt^n}$ ) es simplemente remplazado por la apropiada variable de estado. El  $n$ th orden derivado de  $g$  es ahora  $\dot{x}_n$  y estado es una combinación de todos los estados y coeficientes  $a_i$ .

Agrupando términos da la ecuación de estado de salida para la forma canónica controlable queda ;

$$y(t) = [ \beta_0 - a_0\beta_n \quad \beta_1 - a_1\beta_n \quad \beta_2 - a_2\beta_n \quad \dots \quad \beta_{n-1} - a_{n-1}\beta_n ] \mathbf{x}(t) + \beta_n u(t)$$

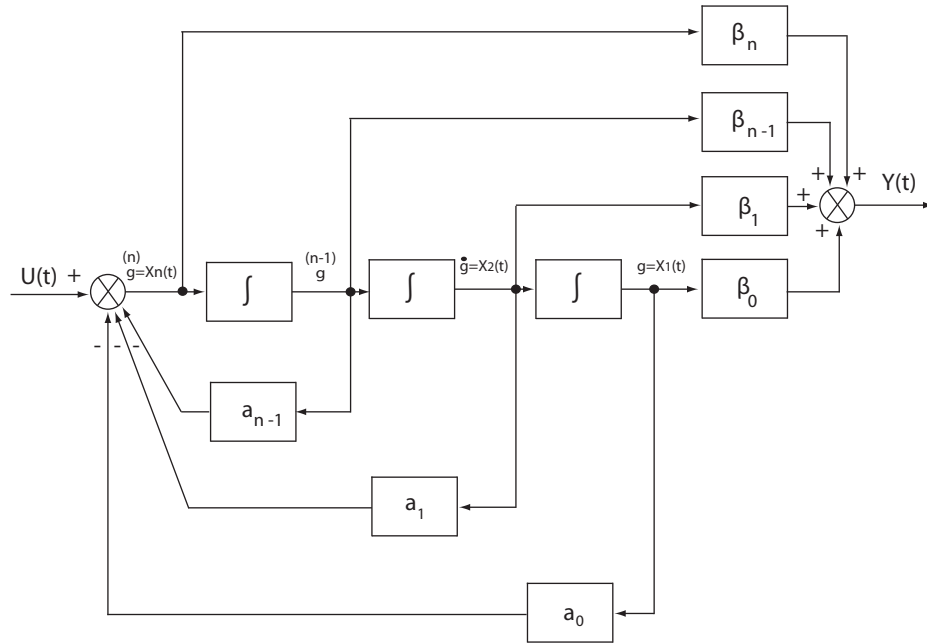
Cuando  $m \leq n$ ,  $\beta_n = 0$  toma una forma aparentemente sencilla

Figure 15.2: Representación



El diagrama que simula la forma canónica controlable esta dada en la figura 15.3.

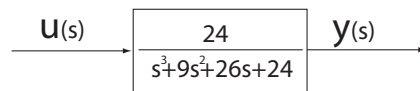
Figure 15.3: Diagrama de bloques de la forma canónica controlable



Consideremos la función de transferencia ( Ver Figura 15.4 ) con un termino constante en el numerador, encontrar  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  es decir la representación de espacio de estados [2].

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{24}{(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)}$$

Figure 15.4: Función de transferencia



$$(s^3 + 9s^2 + 26s)Y(s) = 24U(s) \tag{15.9}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la Ec (17.7) , y asumiendo cero las condiciones iniciales.

$$\ddot{y} + 9\dot{y} + 26y = 24u \quad (15.10)$$

Ahora seleccionamos las variables de estado

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y}$$

Las ecuaciones de espacio combinadas y ecuaciones de salidas son ;

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -24x_1 - 26x_2 - 9x_3 + 24u$$

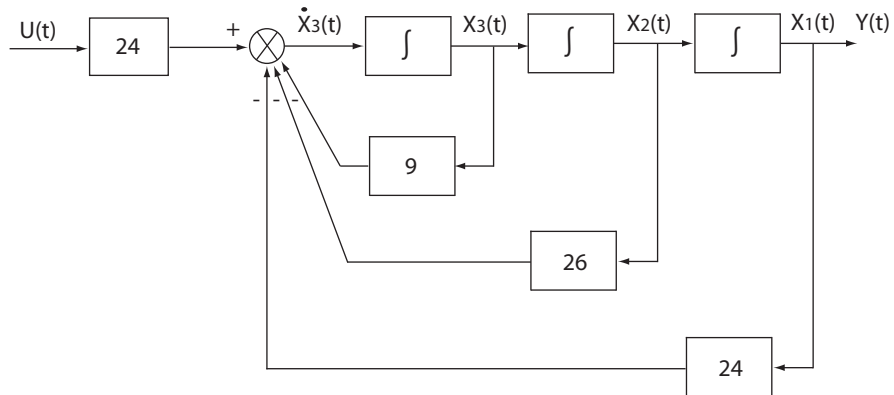
En forma de vector de estado,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

El diagrama de bloques se ilustra en la figura 15.5

Figure 15.5: Diagrama de bloques equivalente



La función de transferencia del ejemplo anterior tiene un término constante en el numerador . Si la función de transferencia tiene un polinomio en  $s$  en el numerador de grado menor que el denominador como se ve en la Figura (15.6a), el numerador y el denominador pueden ser manejados separadamente como se muestra en la figura (15.6b) , el primero es el denominador que puede tratarse como el ejemplo anterior, por lo tanto la variable  $x_1(s)$  es la salida y el resto de variables de estado son variables internas de el primer bloque, como se muestra en la figura (15.6b). La segunda función de transferencia con solo el numerador es [2];

$$Y(s) = (b_2s^2 + b_1s + b_0)X_1(s)$$

Donde, después de tomar la transformada inversa de Laplace con condiciones iniciales igual a 0,

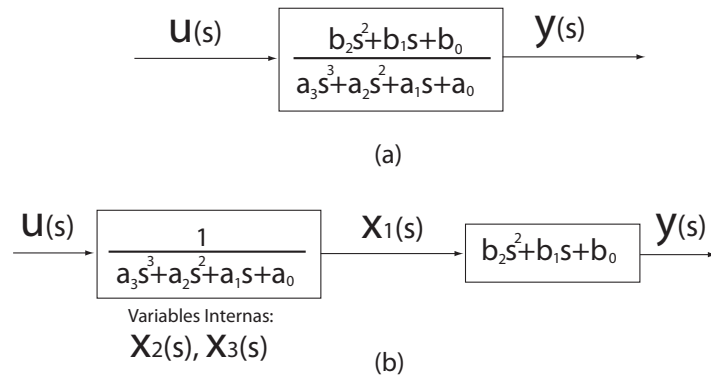
$$y(t) = b_2 \frac{d^2x_1}{dt^2} + b_1 \frac{dx_1}{dt} + b_0x_1$$

Pero las derivadas terminan siendo definiciones de las variables de estado obtenidas en el primer bloque, por lo tanto reescribiendo los términos , conformamos las ecuaciones de salida.

$$y(t) = b_0x_1 + b_1x_2 + b_2x_3$$

Entonces, el segundo bloque simplemente es combinación lineal de variables de estado desarrollado en el prime bloque.

Figure 15.6: Descomponiendo una función de transferencia



En el siguiente ejemplo se encontrará una representación de espacio de estado de la función de transferencia que se muestra en la figura 15.6 , como puede verse este problema difiere al del ejemplo anterior en que el numerador tiene un polinomio en  $s$  en vez de un solo termino constante [2].

**Paso 1:** Separamos el sistema en dos bloques en cascada ( seguidos ) como se ve en la figura (16.6b). El primer bloque contiene el denominador , y el segundo bloque el numerador.

**Paso 2:** Encontramos las ecuaciones de estado para el bloque que contiene el denominador, podemos ver que la solución para el primer bloque fue la desarrollada en el ejemplo anterior, por tanto las ecuaciones de estado son las mismas excepto la de la matriz de entrada  $\mathbf{B}$ , entonces la ecuación de estado es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

**Paso 3:** Se introduce en el segundo bloque de la figura (14.6b) los valores de  $b_2 = 1$ ,  $b_1 = 7$ ,  $b_0 = 2$ ,

$$Y(s) = (b_2s^2 + b_1s + b_0)X_1(s) = (s^2 + 7s + 2)X_1(s)$$

Tomando la transformada inversa de Laplace con condiciones iniciales cero,

$$y = \ddot{x}_1 + 7\dot{x}_1 + 2x_1$$

Pero

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = x_3$$

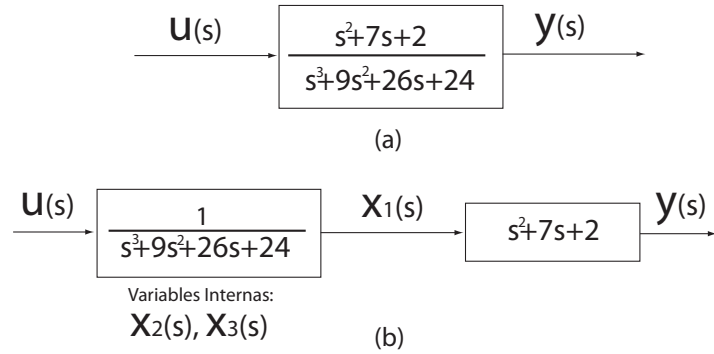
Por lo tanto la ecuaciones de salida es una combinación lineal de variables de estado

$$y = b_2x_3 + b_1x_2 + b_0x_1 = x_3 + 7x_2 + 2x_1$$

Por tanto el bloque de la figura (15.7b) recoge el estado y genera la ecuación de salida Ec (15.11)

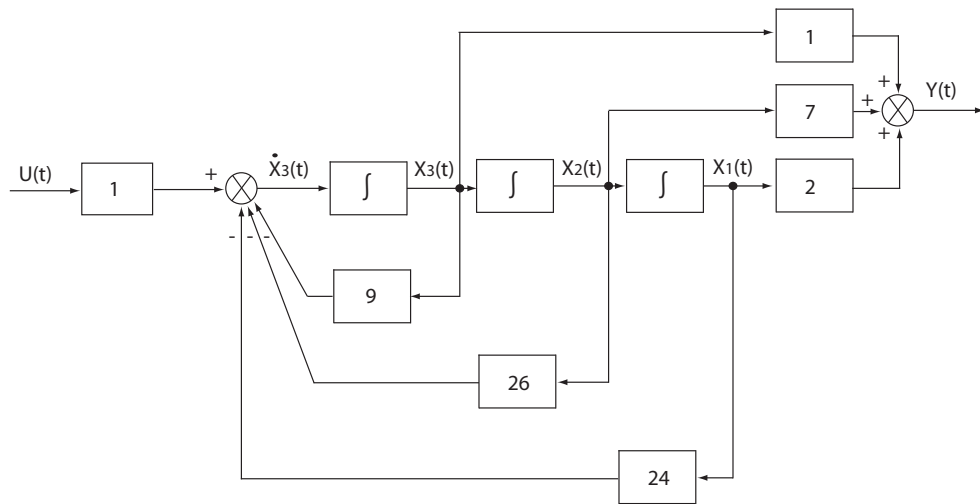
$$y = [ b_0 \quad b_1 \quad b_2 ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [ 2 \quad 7 \quad 1 ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (15.11)$$

Figure 15.7: Función de transferencia



El diagrama de bloques se ilustra en la figura 15.8

Figure 15.8: Representación en diagrama de bloques



**NOTA:** Ahora vamos a considerar una función de transferencia en común para los cuatro casos, la realización directa ( Forma canónica controlable y Forma canónica observable) , realización en cascada ( serie ) y realización en paralelo, mediante la cual hallaremos la realización para cada uno de los mismos , es decir consideraremos 4 casos posibles para la obtención de la representación de las ecuaciones de estado a partir de la función de transferencia descrita por la Ec (15.12) comenzaremos en primera instancia hallando la realización para la forma canónica controlable de la función de transferencia descrita por [1];

$$T(s) = \frac{s + 3}{s^3 + 9s^2 + 24s + 20} \quad (15.12)$$

Expresada en forma de factores queda

$$T(s) = \frac{s + 3}{(s + 2)^2(s + 5)} \quad (15.13)$$

y usando una expansión de fracciones parciales y hallado los factores del numerador tenemos ;

$$T(s) = \frac{\frac{2}{9}}{s + 2} + \frac{\frac{1}{3}}{(s + 2)^2} + \frac{-\frac{2}{9}}{s + 5} \quad (15.14)$$

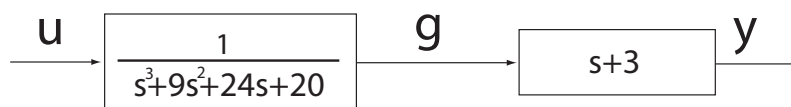
La Ec (15.12),(15.13),(15.14) son iguales luego se puede representar de cualquier de estas formas

$$T(s) = \frac{s+3}{s^3+9s^2+24s+20} = \frac{s+3}{(s+2)^2(s+5)} = \frac{\frac{2}{9}}{s+2} + \frac{\frac{1}{3}}{(s+2)^2} + \frac{-\frac{2}{9}}{s+5}$$

( *Caso 1* )

Ahora una forma de obtener el espacio de estado se mostrará ( realización directa , forma canónica controlable ), el numerador de la función de transferencia es separado como se muestra en la figura 15.9.

Figure 15.9: Representación de la función de transferencia



La relación entre  $g$  y la salida  $y$  depende solo del numerador de  $T(s)$ , es decir

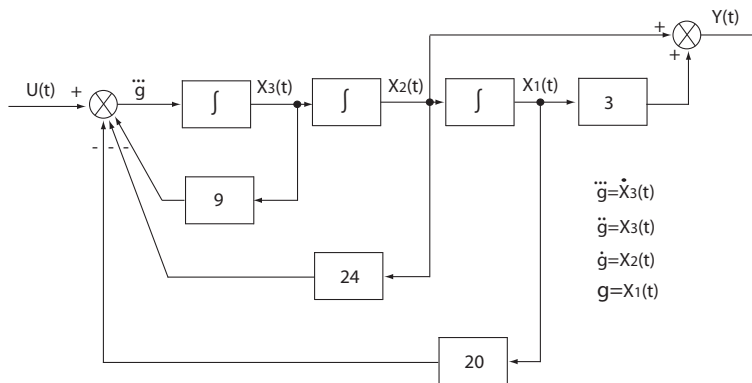
$$y = \dot{g} + 3g$$

Utilizando el método mostrado en los ejemplos anteriores, la representación de la forma canónica controlable del espacio de estado es ( ver figura 15.10 );

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & -24 & -9 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$y = [ 3 \quad 1 \quad 0 ] \mathbf{x} + [0] \mathbf{u}$$

Figure 15.10: Representación de la ecuación de transferencia en variables de estado

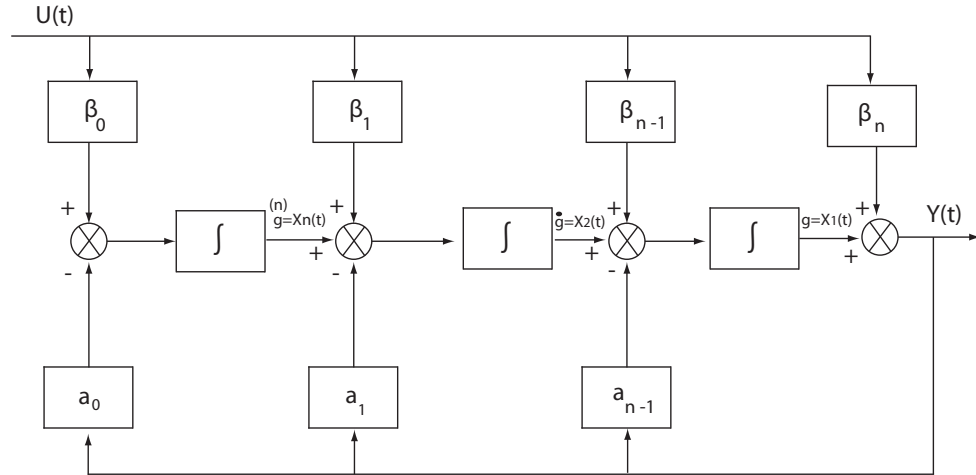


En el siguiente ejemplo [caso(2)] se mostrará la representación de una función de transferencia en el espacio de estado en forma canónica observable

**(b) Forma canónica observable**

El diagrama de bloques de la forma canónica controlable se ilustra en la figura 15.11

Figure 15.11: Diagrama de bloques de la forma canónica controlable



( Caso 2 )

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la Ec (15.12) , y asumiendo cero las condiciones iniciales , el sistema lineal queda descrito por ;

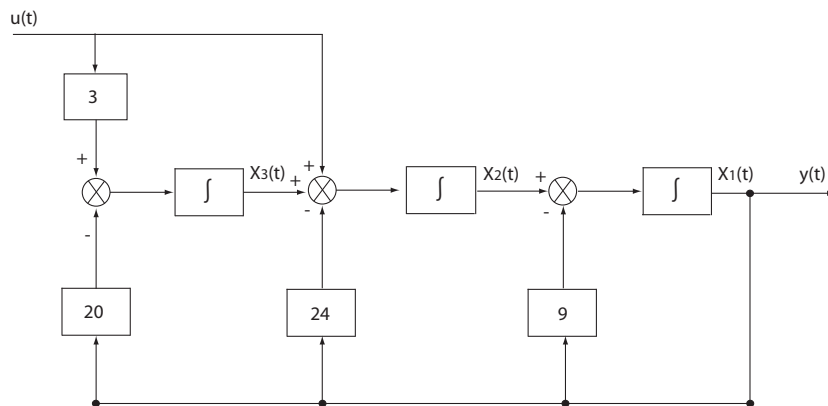
$$\ddot{y} = -9\dot{y} - 24y + \dot{u} + 3u$$

o

$$y = \int \left\{ -9y + \int [-24y + u + \int (-20y + 3u) dt] dt' \right\} dt''$$

Ahora representando la ecuación anterior como se muestra en la figura 15.12 tenemos ;

Figure 15.12: Representación de la ecuación



Usando la figura 15.12 , la forma canónica observable de las ecuaciones de estado es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 0 \\ -24 & 0 & 1 \\ -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

y

$$y = [ 1 \ 0 \ 0 ] \mathbf{x}$$

### 15.2.2 Realización cascada.

Son llamadas así porque ellas se derivan de la forma de la función de transferencia escritas como un producto de simples términos de factores, esta función puede ser representada por una serie de bloques en cascada en el diagrama de bloques.

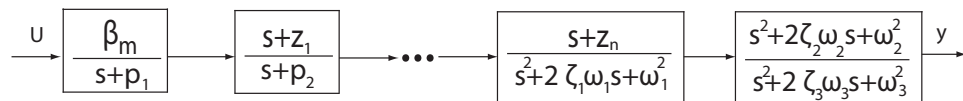
La función de transferencia en el dominio de  $s$  puede ser escrita en factores como se muestra en la Ec (15.15) . Si todos los polos son distintos y  $m = n$  la expansión de fracciones parciales queda como se muestra en la Ec (15.16) , Si  $m \leq n$ ,  $b_0 = 0$ , por la dinámica del sistema  $m$  nunca puede exceder a  $n$  [1].

$$T(s) = \frac{\beta_m(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \quad (15.15)$$

$$T(s) = b_0 + \frac{b_1}{s+p_1} + \frac{b_2}{s+p_2} + \dots + \frac{b_n}{s+p_n} \quad (15.16)$$

En algunos casos los sistemas pueden ser representados por una serie ( cascada ) de simples bloques como vemos en la figura 15.13.

Figure 15.13: Diagrama de bloques de realización en cascada (Representación del sistema en series)



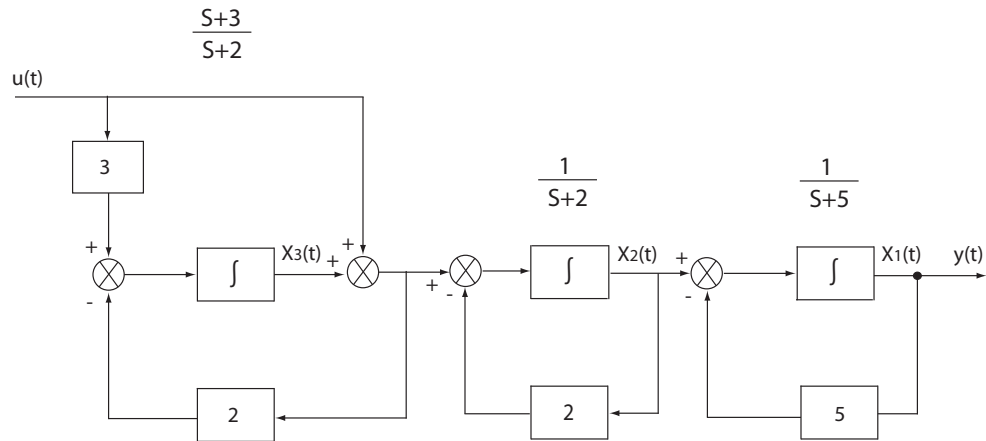
( Caso 3 )

Ahora usando los factores obtenidos en la Ec (15.13) , los diagramas de bloques son obtenidos como se muestra en la figura 15.14, entonces una posible realización en cascada es ;

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}, y$$

$$y = [ 1 \ 0 \ 0 ] \mathbf{x} + [0] \mathbf{u}$$

Figure 15.14: Representación de la ecuación de transferencia

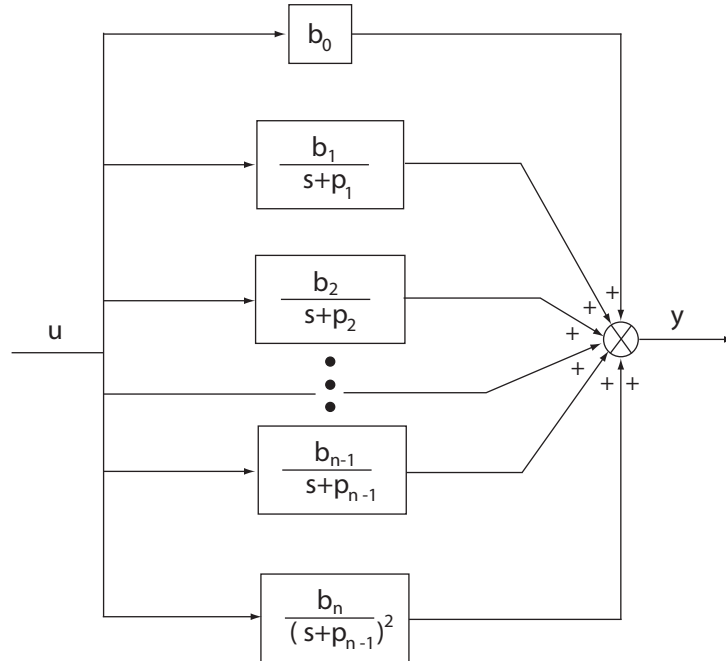


### 15.2.3 Realización en paralelo .

Son llamadas así porque ellas se derivan de la forma de la función de transferencia escritas como una suma de términos de fracciones parciales , que aparecen como bloques en paralelo en un diagrama de bloques.

Cuando la función de transferencia se expresa por la expansión de fracciones parciales se puede representar como una conexión de simples términos en paralelo como se ve en la figura 15.15.

Figure 15.15: Representación del sistema en paralelo



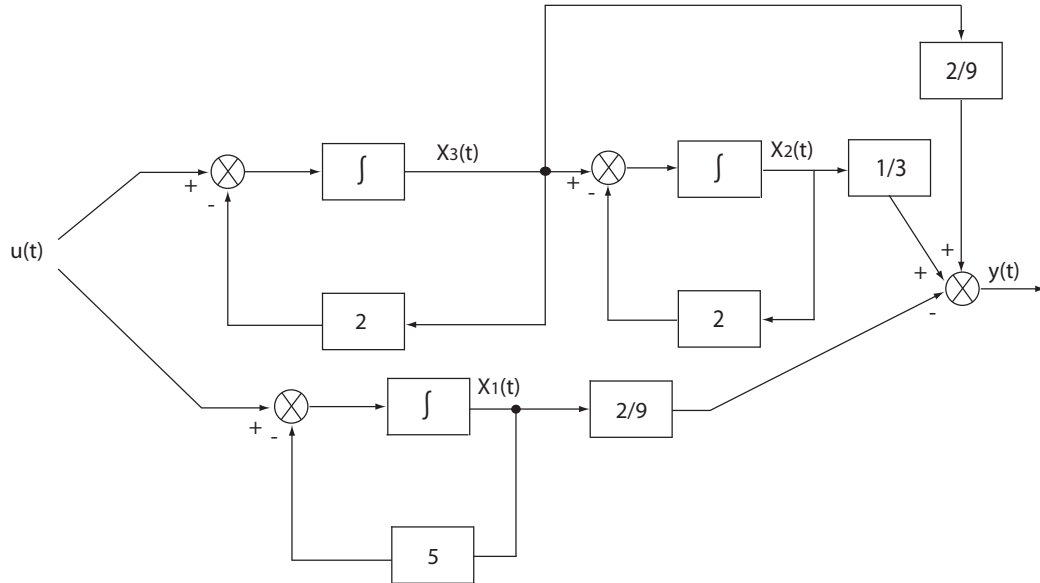
( Caso 4 )

Ahora usando la expansión parcial Ec(15.14) , el diagrama de la figura 15.16 es obtenido ,además de la figura 15.15 la realización paralela es ;

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad y$$

$$y = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

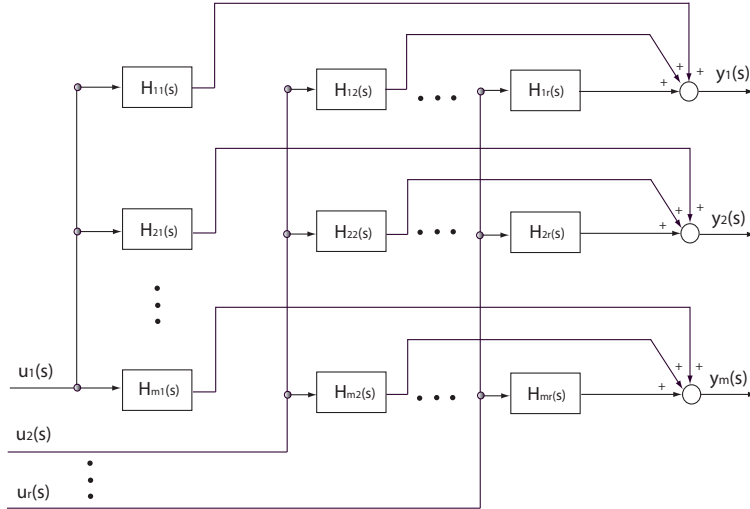
Figure 15.16: Representación en diagrama de bloques



### 15.3 ECUACIONES DE ESTADO DE MATRICES DE TRANSFERENCIA :REALIZACIÓN

Si el par de ecuaciones (17.1) (17.2) pueden ser encontradas teniendo una matriz de transferencia específica  $\mathbf{H}(s)$ , entonces estas ecuaciones son llamadas un *realización* de  $\mathbf{H}(s)$ . Por brevedad es común referirse a las matrices  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  como la Realización de  $\mathbf{H}(s)$  [1].

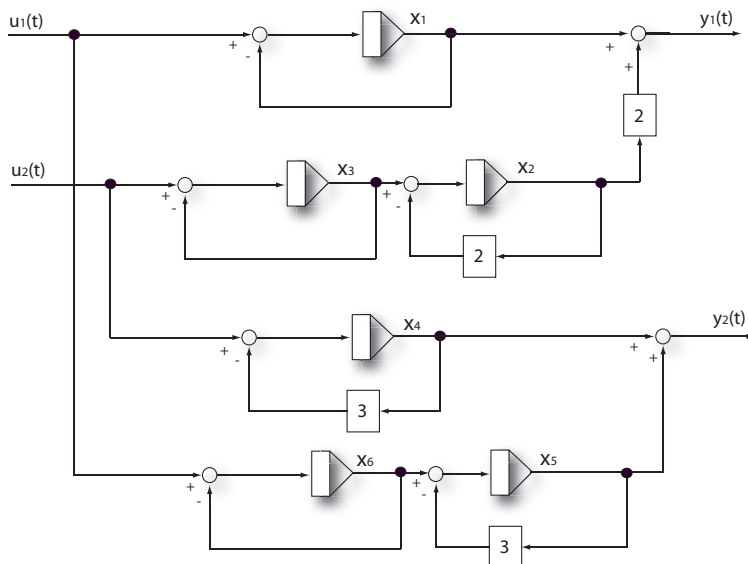
Figure 15.17: Diagrama de bloques de  $\mathbf{H}(s)$



Ahora Consideremos un sistema con dos entradas y dos salidas , cuya matriz de transferencia es ;

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix} \quad (15.17)$$

Figure 15.18: Realización del ejemplo



Usando como referencia el diagrama sugerido en la Figura 15.17 , cuatro funciones de transferencia escalares son mostradas en la Ec (15.17)., Usando las variables de estado  $x_1$  hasta  $x_6$  como se define en la figura 15.18 . Una realización de  $\mathbf{H}(s)$  es dada por,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La aplicación de la Ec (17.4) muestra que la representación de estado del sistema se sexto orden tiene una matriz de transferencia entradas-salidas específica.

Este método solo presenta rendimiento para la realización de algunas matrices de transferencia, la realización de  $\mathbf{H}(s)$  no es única, si una realización de  $\mathbf{H}(s)$  de *nth - orden* puede ser encontrada entonces hay infinitos números de realizaciones de *nth - orden*.

Las expresiones estudiadas permiten transformar la terna  $(\mathbf{A}; \mathbf{B}; \mathbf{C})$  en otra forma de representación, de manera que se siga representando el mismo sistema dinámico. Desde un punto de vista del espacio de estados ello es equivalente a que el vector de estados se puede representar en distintas bases. Debe resaltarse, sin embargo, que el vector de estados es un objeto abstracto, sin ninguna referencia, en principio, con magnitudes físicas medibles. Es decir, no existe una base "natural" para representar a  $\mathbf{X}$ . Ello hace que según la naturaleza del problema a tratar se adopten unas bases para el vector de estado que hagan que la forma que toma en ellas la terna  $(\mathbf{A}; \mathbf{B}; \mathbf{C})$  sea lo mas cómoda posible para la resolución del problema en cuestión. En ello reside una de las grandes ventajas del uso de la descripción interna, ya que esta permite escoger la forma de representación de la terna  $(\mathbf{A}; \mathbf{B}; \mathbf{C})$  mas cómoda en cada caso. Aunque se pueden concebir múltiples formas para la terna  $(\mathbf{A}; \mathbf{B}; \mathbf{C})$  existen dos especialmente interesantes para las aplicaciones practicas a problemas de control. Son estas: La forma canónica de control y la forma canónica de observación las cuales se mostraron anteriormente. Cada una de ellas esta relacionada con los problemas de control y de observación.

## 15.4 CONCEPTO DE IMPLICACIÓN Y IRREDUCTIBILIDAD EN LA REALIZACIÓN

Los métodos que se mostraron anteriormente en los cuales se obtiene el modelo de variables de estado de sistemas en tiempo continuo o tiempo discreto de una función de matriz de transferencia son métodos que ignoran la relación que existe entre los varios elementos  $H_{ij}$ , cuando estas consideraciones son olvidadas, el resultado de las ecuaciones de estado será de un alto orden, Por tanto el espacio de estado será de una dimensión alta la cual es innecesaria.

Sea  $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1\}$  una realización de  $\mathbf{H}(s)$ , donde  $\mathbf{A}_1$  es una matriz  $n \times n$ .  $\mathbf{M}$  será alguna matriz constante no singular  $n \times n$  y define un nuevo vector de estado  $x_2$  por la transformación. (cambio de base en el espacio de estado  $\Sigma$ )  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{M}\mathbf{x}_2$ . Ahora

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{u}, \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{u}$$

Convirtiendo

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_1\mathbf{M}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{u}, \mathbf{y} = \mathbf{C}_1\mathbf{M}\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_1\mathbf{u}$$

Definiendo

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{M}, \mathbf{B}_2 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_1, \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_1\mathbf{M}, \text{ y } \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1$$

da

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u}, \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2\mathbf{u}$$

Entonces

$$\mathbf{C}_2 [s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2]^{-1} \mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_2 = \mathbf{C}_1\mathbf{M} [s\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_1 = \mathbf{C}_1 [s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]^{-1} \mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_1$$

$$\mathbf{C}_2 [s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2]^{-1} \mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_2 = \mathbf{C}_1 [s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]^{-1} \mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_1$$

Por tanto  $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1\}$  y  $\{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2, \mathbf{D}_2\}$  son dos diferentes realizaciones. La Ec (17.6) indica que  $\mathbf{D}$  es determinado solo por  $\mathbf{H}(s)$ , la elección de la base del vector para  $\Sigma$  no influye en  $\mathbf{D}$ . Por tanto  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2$

**Definición 1:** De todas las posibles realizaciones de  $\mathbf{H}(s)$ ,  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  se dice que es una realización mínima si el espacio de estado asociado tiene la mas pequeña posible  $\dim \Sigma$ .

**Una mínima realización es completamente controlable y completamente observable.**

Una realización irreducible es un sistema de mínima dimensión, el cual es capaz de reproducir las relaciones entre las entradas y las salidas, esto asume que el sistema inicialmente esta relajado, es decir que las condiciones iniciales son cero. Por esta razón a un sistema y su realización irreducible se le llama estado equivalente cero.

Usualmente el solo conocimiento del sistema es la información la cual es obtenida acerca de las mediciones de las entradas y las salidas. Las funciones y matrices de transferencia pueden ser determinadas experimentalmente de esas mediciones. La realización irreducible no causa pérdida de información en este caso porque no fue encontrada mediante la estructura interna del sistema, no se afirma que una realización irreducible es la mejor descripción de la estructura interna de un sistema.

La descripción incompleta de una matriz de transferencia es otra razón por la que se prefieren las técnicas de espacio de estado.

Algunos modelos de variables de estado pueden ser descompuestos en cuatro subsistemas los cuales con (1) completamente controlable y completamente observable (2) completamente controlable pero no observable (3) completamente observable pero no controlable y (4) no controlable ni observable, el subsistema que es completamente controlable y completamente observable se denomina realización irreducible de  $\mathbf{H}(s)$  como ya se menciono anteriormente.

Entonces la tarea resulta a determinar si la representación de las ecuaciones de estado cumplen con los criterios de controlabilidad y observabilidad tal como se menciono en el capítulo 15.

La Controlabilidad y observabilidad de sistemas invariantes en el tiempo dependen solo de las matrices constantes A, B, C. no se tiene en cuenta las condiciones iniciales. Los n eigenvalues de A se asumen distintos. Entonces la presentación de la forma Jordánica es<sup>3</sup> ;

Para un sistema Continuo e invariante en el tiempo

$$\dot{\mathbf{q}} = \Lambda \mathbf{q} + \mathbf{B}_n \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_n \mathbf{q}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$$

Para un sistema Discreto e invariante en el tiempo

$$\dot{\mathbf{q}}(k + 1) = \Lambda \mathbf{q}(k) + \mathbf{B}_n \mathbf{u}(k)$$

---

<sup>3</sup>Sistemas de Tiempo Invariable , controlabilidad y observabilidad “ Capitulo 14 ”

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_n \mathbf{q}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k)$$

Donde ;

$$\Lambda = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}$$

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{C} \mathbf{M}$$

## Capítulo 16

# DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL CON REALIMENTACIÓN LINEAL

### 16.1 ESTADO CON REALIMENTACION Y SEÑAL DE SALIDA CON REALIMENTACION

Se asumira aqui que el sistema de lazo abierto, a menudo llamado planta, se describira en variables de estado. El cual sera aplicado igualmente para sistemas en tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \quad (16.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u \quad (16.2)$$

o para sistemas en tiempo discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k) \quad (16.3)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u \quad (16.4)$$

El sistema de matrices  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  tienen diferente significado en los dos casos, y obviamente la ubicación de los polos es diferente entre el plano  $s$  y el plano  $Z$ . Sin embargo, si  $s_1$  es una posición de polo en el plano  $s$ , entonces su imagen  $z_1 = e^{s_1 T}$  heredará las mismas características en el plano  $Z$ . En cualquier evento, tendrán el mismo los métodos y procedimientos a desarrollar para ambos tipos de sistemas en términos del sistema de cuatro matrices.

Asumiendo que la planta, y por lo tanto estas cuatro matrices, se especifican y no puede ser alteradas por el diseñador para mejorar el rendimiento. Se supondrá siempre que el vector estado  $\mathbf{x}$  es  $n \times 1$ , vector entrada  $\mathbf{u}$  es  $r \times 1$  y el vector salida  $\mathbf{y}$  es  $m \times 1$ , en consecuencia  $\mathbf{A}$  es  $n \times n$ ,  $\mathbf{B}$  es  $n \times r$ ,  $\mathbf{C}$  es  $m \times n$ , y  $\mathbf{D}$  es  $m \times r$ . Si el rendimiento del sistema debe ser modificado, debe ser realizado por alguna forma manipulando la señal de salida del sistema de lazo abierto, dos posibilidades usadas comúnmente para sistemas en tiempo continuo son las mostradas en las figuras 15.1 y 15.2. Estos arreglos se conocen como realimentación de la variable de estado y realimentación a la señal de salida, respectivamente.

Las matrices de ganancia  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{K}'$  son  $r \times n$  y  $r \times m$ , y se asumen constantes. Las señales externas  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v}'$  son vectores  $p \times 1$  aunque por lo general  $\mathbf{v}$  tendrá el mismo número de componentes que  $\mathbf{u}$ , por lo que  $r = p$ . Las matrices  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}'$  en la mayoría de los casos son de dimensión  $r \times p$  pero son más comunes matrices constantes cuadradas  $r \times r$ .

Es necesario argumentar que la realimentación de variables de estado es solo para intereses académicos, por definición, las señales de salida son las únicas señales que son accesibles.

Figure 16.1: Sistema con realimentación de variables de estado

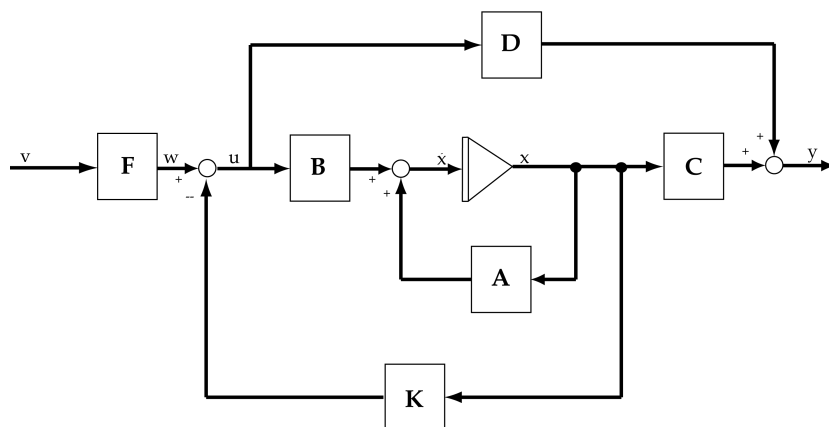
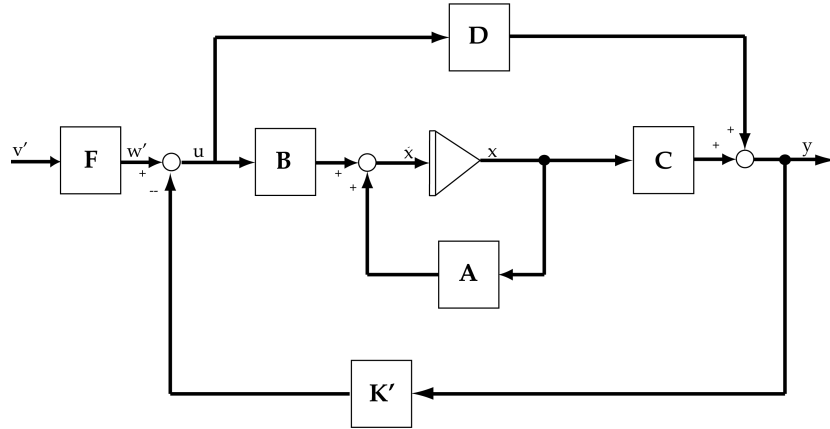


Figure 16.2: Sistema con realimentacion de la señal de salida



Las ecuaciones que describen el sistema de realimentación de estado son:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}\mathbf{v}(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (16.5)$$

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{F}\mathbf{v}(k) - \mathbf{K}\mathbf{x}(k) \quad (16.6)$$

De la combinación

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} - \mathbf{BK}]\mathbf{x} + [\mathbf{BF}]\mathbf{v} \quad (16.7)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A} - \mathbf{BK}]\mathbf{x}(k) + [\mathbf{BF}]\mathbf{v}(k) \quad (16.8)$$

y

$$\mathbf{y} = [\mathbf{C} - \mathbf{DK}]\mathbf{x} + [\mathbf{DF}]\mathbf{v} \quad (16.9)$$

$$\mathbf{y}(k) = [\mathbf{C} - \mathbf{DK}]\mathbf{x}(k) + [\mathbf{DF}]\mathbf{v}(k) \quad (16.10)$$

La estabilidad se determina  $[\mathbf{A} - \mathbf{BK}]$

La controlabilidad dependen del par  $\{[\mathbf{A} - \mathbf{BK}], \mathbf{BF}\}$

Y la obsevabilidad depende del par  $\{[\mathbf{A} - \mathbf{BK}], [\mathbf{C} - \mathbf{DK}]\}$

Las ecuaciones que describen el sistema de realimentación en la señal de salida en tiempo continuo son:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}'\mathbf{v}'(t) - \mathbf{K}'\mathbf{x}(t) \quad (16.11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{F}'\mathbf{v}' - \mathbf{D}\mathbf{K}'\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(t) &= [\mathbf{I}_m + \mathbf{D}\mathbf{K}']^{-1} \{\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{F}'\mathbf{v}'\} \end{aligned} \quad (16.12)$$

Utilizando este tenemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \left\{ \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}' [\mathbf{I}_m + \mathbf{D}\mathbf{K}']^{-1} \mathbf{C} \right\} \mathbf{x} + \mathbf{B} \left\{ \mathbf{F}' - \mathbf{K}' [\mathbf{I}_m + \mathbf{D}\mathbf{K}']^{-1} \mathbf{D}\mathbf{F}' \right\} \mathbf{v}' \quad (16.13)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \left\{ \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}' [\mathbf{I}_m + \mathbf{D}\mathbf{K}']^{-1} \mathbf{C} \right\} \mathbf{x} + \mathbf{B} [\mathbf{I}_m + \mathbf{D}\mathbf{K}']^{-1} \mathbf{F}'\mathbf{v}' \quad (16.14)$$

La estabilidad se determina  $\left\{ \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}' [\mathbf{I}_m + \mathbf{D}\mathbf{K}']^{-1} \mathbf{C} \right\}$

La controlabilidad  $\mathbf{B} \{ \mathbf{I}_r + \mathbf{K}'\mathbf{D} \}^{-1} \mathbf{F}'$

Y la obsevabilidad  $[\mathbf{I}_m + \mathbf{D}\mathbf{K}']^{-1} \mathbf{C}$

Para sistemas en tiempo discreto se aplica la misma clase de resultados.

## 16.2 EFECTO DE LA REALIMENTACIÓN SOBRE LAS PROPIEDADES DEL SISTEMA

### 16.2.1 Controlabilidad

La matriz de controlabilidad de sistema de lazo abierto  $\mathbf{P} = \left[ \mathbf{B} \ : \ \mathbf{AB} \ : \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ : \ \dots \ : \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \right]$ ; ahora aplicando realimentación de estado la matriz de controlabilidad cambia a:

$$\bar{\mathbf{P}} = \left[ \mathbf{BF} \ : \ (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{BF} \ : \ (\mathbf{A}^2 - \mathbf{BK})\mathbf{BF} \ : \ \dots \ : \ (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{n-1}\mathbf{BF} \right] \quad (16.15)$$

Si la matriz  $\mathbf{F}$  satisface  $\text{rango}(\mathbf{F}) = r$ , entonces  $\mathbf{F}$  no afecta el rango de  $\bar{\mathbf{P}}$ . Físicamente, esto significa que hay muchas componentes de entrada independientes  $\mathbf{v}$  después de adicionar la realimentación como los había en la entrada  $\mathbf{u}$  sin la realimentación. Asumiendo que esto es verdad, y dejando  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ , por conveniencia, una serie de operaciones elementales en la columna puede ser usado para reducir  $\bar{\mathbf{P}}$  a  $\mathbf{P}$ . Por ejemplo, las columnas de  $\mathbf{BK}\mathbf{B}$  son combinaciones lineales de las columnas de  $\mathbf{B}$ . Con operaciones elementales se puede reducir esto, así como todos los demás términos adicionales en  $\bar{\mathbf{P}}$ , a  $\mathbf{0}$ . Por lo tanto,  $\text{rango}(\bar{\mathbf{P}}) = \text{rango}(\mathbf{P})$  para cualquier matriz de ganancia  $\mathbf{K}$ . En consecuencia la realimentación de estado no altera la controlabilidad de un sistema de lazo abierto.

Ya que  $\bar{\mathbf{P}}$  y  $\mathbf{P}$  tienen el mismo rango para cualquier  $\mathbf{K}$ , incluyendo el caso especial  $\mathbf{K} = \mathbf{K}' [\mathbf{I}_m + \mathbf{D}\mathbf{K}']^{-1} \mathbf{C}$ , La controlabilidad del sistema no se altera cuando la realimentación a la salida se utiliza. Esto supone que  $\mathbf{I}_r + \mathbf{K}'\mathbf{D}$  es no singular y el  $\text{rango}(\mathbf{F}') = r$ .

### 16.2.2 Observabilidad

La matriz de observabilidad de un sistema de lazo abierto es

$\mathbf{Q} = \left[ \bar{\mathbf{C}}^T \ : \ \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{C}}^T \ : \ \dots \ : \ (\bar{\mathbf{A}}^{n-1})^T \bar{\mathbf{C}}^T \right]$ . Es obvio que cuando se usa la realimentación de estado, la observabilidad se pierde si  $\mathbf{C} = \mathbf{D}\mathbf{K}$ . Este conjunto de ecuaciones lineales simultáneas tiene una solución  $\mathbf{K}$  si el  $\text{rango}(\mathbf{D}) = \text{rango}(\mathbf{D} \ : \ \mathbf{C})$ . Cuando la realimentación de salida es utilizada, la observabilidad de un sistema de lazo abierto y cerrado es el mismo

Asumiendo que  $\mathbf{D} = (0)$ , la matriz de observabilidad con realimentación a las salida es

$$\bar{\mathbf{Q}} = \left[ \bar{\mathbf{C}}^T : (\bar{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{BK}'\mathbf{C}})^T \bar{\mathbf{C}}^T : \dots : (\bar{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{BK}'\mathbf{C}})^{n-1T} \bar{\mathbf{C}}^T \right] \quad (16.16)$$

Una serie de operaciones elementales en la columna, precisamente como los usados en  $\bar{\mathbf{P}}$ , se pueden utilizar para reducir  $\bar{\mathbf{Q}}$  a  $\mathbf{Q}$ . Esto demuestra que el rango ( $\bar{\mathbf{Q}}$ ) = rango ( $\mathbf{Q}$ ). La observabilidad se conserva cuando la realimentación de salida es utilizada, a pesar de  $\mathbf{K}'$ . La razón por la cual la observabilidad del sistema es invariante para la realimentación de salida y no para la realimentación de estado es la presencia de la matriz  $\mathbf{C}$  en los términos  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}'\mathbf{C}$ . Es decir, se puede demostrar que las columnas de  $\bar{\mathbf{C}}^T \overline{\mathbf{K}'\mathbf{B}^T} \bar{\mathbf{C}}^T$  se relacionan linealmente con las columnas de  $\bar{\mathbf{C}}^T$ , mientras que para las columnas de  $\overline{\mathbf{K}'\mathbf{B}^T} \bar{\mathbf{C}}^T$  no es necesario.

### 16.2.3 Estabilidad

La estabilidad para sistemas constantes depende totalmente de la ubicación de los eigenvalues en el plano complejo. Los eigenvalues de un sistema de lazo cerrado son diferentes de un sistema de lazo abierto tanto para realimentación de estado como para realimentación de salida. Esto significa que la estabilidad de un sistema de lazo cerrado no es necesariamente la misma que un sistema de lazo abierto.

### 16.2.4 Polos y Ceros

Los polos y los zeros son conceptos de la función de transferencia. Los polos son los valores de la variable compleja  $s$  (o  $z$  en el caso de tiempo discreto) para que uno o más elementos de la matriz función transferencia tengan magnitud sin límites. En el caso de una entrada única y una salida única, la función de transferencia es una función escalar, una relación de polinomios. Los valores de  $s$  para que el denominador sea cero, son los polos. En el caso de la matriz de función transferencia, nada de sorprendente sucede con las definiciones de los polos, porque si el denominador común desaparece, todos los términos de la matriz de función de transferencia aumentan sin límites a menos que la raíz del denominador se cancele. Por lo tanto los polos son los mismos que los valores propios del sistema, excepto en el caso inusual de la cancelación. En realidad, los polos serán siempre valores propios, pero todos los valores propios no puede ser polos debido a la cancelación, en términos generales, los polos y los valores propios son los mismos.

En el caso de una única entrada y una única salida, los ceros son los valores de  $s$  (o de  $z$ ) para que el numerador de la función de transferencia sea cero. Con dicho valor de  $s$ , entradas

$u$  distintas de cero causaran que la salida del sistema sea cero. Cuando son consideradas multiples entradas y multiples salidas del sistema, la generalización del concepto de cero es algo más complicado. El caso más fácil de generalizar es en la que el número de entradas y salidas son iguales, la matriz de función transferencia es cuadrada.

### 16.3 ASIGNACIÓN DE LOS POLOS USANDO REALIMENTACIÓN DE ESTADO

La ecuación 16.8 indica que los valores propios de un sistema de lazo cerrado con realimentación de estado son raíces de:

$$\Delta'(\lambda) \triangleq [\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}] = 0 \quad (16.17)$$

Se ha demostrado que si el sistema de lazo abierto es completamente controlable, entonces cualquier conjunto de valores propios de un sistema de lazo cerrado  $\Gamma = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  deseado se puede conseguir con una matriz constante  $\mathbf{K}$  de realimentación de estado.

Un metodo directo y simple de encontrar los valores desconocidos de la matriz de ganancia cuando se tienen los valores propios es expandir la ecuación 16.17 e igualar con el polinomio característico, luego de igualar se puede encontrar una expresión o el mas simple de los casos, directamente los valores para los elementos de  $\mathbf{K}$ .

#### *Ejemplo 1.*

Sabiendo que  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , y asumiendo que los valores propios de sistema lazo cerrado  $\lambda_{1,2} = -3, -4$ . Esto significa que el polinomio característico es.

$$(\lambda + 3)(\lambda + 4) = \lambda^2 + 7\lambda + 12$$

Expandiendo el determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ K_1 & \lambda - 3 + K_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (K_2 - 3)\lambda + 2K_1$$

Igualando los terminos constantes obtenemos  $2K_1 = 12$ , e igualando los terminos de primer orden obtenemos  $K_2 - 3 = 7$ ; por lo tanto  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \end{bmatrix}$ .

Este metodo funciona muy bien para problemas de orden inferior. Generalizando para sistemas de orden  $n$ -th

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (16.18)$$

Para esta forma especial de las matrices A y B, el determinante de la ecuación 16.17 sera:

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ K_1 + a_0 & K_2 + a_1 & K_3 + a_2 & \cdots & \{ \lambda + K_n + a_{n-1} \} \end{vmatrix} = \lambda^n + (K_n + a_{n-1})\lambda^{n-1} + \cdots + (K_2 + a_1)\lambda + K_1 + a_0 \quad (16.19)$$

Igualando esta expresi3n con el polinomio caracteristico, se obtiene una ecuaci3n para cada componente de la matriz de ganancia

$$K_i = c_{i-1} - a_{i-1} \quad (16.20)$$

Donde  $c_i$  es el coeficiente de  $\lambda^i$  en el polinomio caracteristico del lazo cerrado. Esta forma ampliada hace m1s evidente que el del polinomio del lazo cerrado se diferencia del polinomio de lazo abierto, el m1s grande son los beneficios de votos requerido. Este procedimiento se aplica a la forma can3nica controlable, para el ejemplo 1. la ecuaci3n 16.20 no se puede aplicar directamente debido a q no se encuentra en la forma canonica. Sin embargo, para cualquier

entrada única de un sistema controlable existe una transformación  $\mathbf{T}$  no singular, el cual mapea el vector estado  $\mathbf{x}$  en un nuevo vector  $\mathbf{x}'$  de tal manera como para dar las ecuaciones de estado  $\mathbf{x}'$  en la forma canónica controlable. Para múltiples entradas la forma canónica es más complicada, no hay una fórmula general para la forma canónica controlable en el caso de múltiples entradas.

Sea  $\mathbf{x}' = \mathbf{T}\mathbf{x}$ , y luego las matrices correspondientes  $\mathbf{A}'$  y  $\mathbf{B}'$  para este nuevo estado son  $\mathbf{A}' = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$  y  $\mathbf{B}' = \mathbf{T}\mathbf{B}$ , la ecuación 16.20 se puede utilizar para encontrar las ganancias de realimentación  $\mathbf{K}'$  que son apropiadas para el nuevo vector estado. Luego igualando las señales de realimentación  $\mathbf{K}'\mathbf{x}' = \mathbf{K}\mathbf{x}$  y utilizando  $\mathbf{x}' = \mathbf{T}\mathbf{x}$  se obtiene  $\mathbf{K} = \mathbf{K}'\mathbf{T}$ .

***Ejemplo 2.***

El sistema del ejemplo 1. se puede transformar a la forma canónica controlable utilizando

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.21)$$

Obtenemos  $\mathbf{A}'$  y  $\mathbf{B}'$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (16.22)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{T}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16.23)$$

de la última fila de  $\mathbf{A}'$ ,  $a_0 = 0$  y  $a_1 = -3$ , ahora de la ecuación 16.20 encontramos  $\mathbf{K}'_1$  y  $\mathbf{K}'_2$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}'_1 &= c_0 - a_0 = 12 - 0 = 12 \\ \mathbf{K}'_2 &= c_1 - a_1 = 7 + 3 = 10 \end{aligned} \quad (16.24)$$

Como se vio anteriormente  $\mathbf{K} = \mathbf{K}'\mathbf{T}$ , por lo tanto:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}'\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 12 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \end{bmatrix} \quad (16.25)$$

Y como era de esperarse es la misma respuesta encontrada en el ejemplo 1.

Cuando hay multiples entradas o cuando las ecuaciones de estado no estan en la forma canonica controlable, los métodos anteriores no pueden proporcionar la mejor forma para la determinación de las matrices de ganancia de realimentación. Un método que funciona para cualquier orden, cualquier número de entradas, y cualquier otra forma arbitraria de ecuaciones de estado se desarrollara ahora. El problema consiste en determinar una matriz de ganancias  $\mathbf{K}$  tal que como en la ecuación 16.20 satisfice para cada  $n$  valores de  $\lambda_i \in \Gamma$ .

Si la ecuación 16.17 es verdadera, entonces por lo menos debe existir un vector no cero  $\psi_i$  tal que.

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \psi_i = 0 \quad (16.26)$$

Reorganizando la ecuación

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \psi_i = \lambda_i \psi_i \quad (16.27)$$

Esto deja claro que  $\psi_i$  es un vector propio de la matriz  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  del sistema de lazo cerrado y esta asociado con el valor propio (polo)  $\lambda_i$  del lazo cerrado. Reescribiendo la ecuación 16.26 de otra manera se obtiene:

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \psi_i = -\mathbf{BK} \psi_i \quad (16.28)$$

o

$$\begin{bmatrix} (\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i \\ \mathbf{K} \psi_i \end{bmatrix} = [0] \quad (16.29)$$

En este punto el vector  $\boldsymbol{\psi}_i$  y la matriz  $\mathbf{K}$  son ambas desconocidas. Por lo tanto, nada se pierde, y la simplicidad de la notación se obtiene mediante la definición de un vector desconocido  $(n+r) \times 1$  como

$$\boldsymbol{\xi}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_i \\ \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_i \end{bmatrix} \quad (16.30)$$

La determinación de  $\mathbf{K}$  consiste en dos pasos generales. Primero, un número suficiente de vectores solución  $\boldsymbol{\xi}_i$  es encontrada. Entonces la estructura interna entre los componentes de estos vectores, según lo expresado por la ecuación 16.30, es usada para encontrar  $\mathbf{K}$ .

Si el sistema de lazo abierto descrito por la pareja  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$  es controlable, como se conoce anteriormente que la matriz de coeficientes  $n \times (n+r)$  en la ecuación homogénea  $n$  tiene un rango completo para cualquier valor de  $\lambda_i$ .

### *Ejemplo 3.*

Teniendo  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , encontrar los vectores solución  $\boldsymbol{\xi}_i$  para  $\lambda_i = -3$  y  $\lambda_i = -4$ .

La controlabilidad de este sistema es fácil de verificar. Donde  $r = 1$ , en este caso no habrá un único  $\boldsymbol{\xi}_i$  para cada  $\lambda_i$ . Con  $\lambda_1 = -3$ , de la ecuación 16.29 se obtiene.

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 = 0 \quad (16.31)$$

Seleccionando arbitrariamente  $\xi_2 = 1$  obtenemos  $\xi_1 = -\frac{2}{3}$  y  $\xi_3 = 6$ . Recordando de la ecuación 16.30 como se definió  $\boldsymbol{\xi}_i$ , entonces es obvio que

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \left[ -\frac{2}{3} \quad 1 \quad 6 \right]^T \quad \text{es equivalente a} \quad \mathbf{K} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = 6 \quad (16.32)$$

Similarmente, con  $\lambda_2 = -4$  la ecuación homogénea 16.29 tiene solución

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \left[ -\frac{1}{2} \quad 1 \quad 7 \right]^T \quad \text{es equivalente a} \quad \mathbf{K} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 7 \quad (16.33)$$

Tomando ambas ecuaciones se obtiene

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \end{bmatrix} \quad (16.34)$$

Es necesario recordar que los vectores propios para dos diferentes valores propios deben ser independientes como se puede observar aquí. La matriz  $2 \times 2$  que multiplica a  $\mathbf{K}$  tiene columnas independientes y por lo tanto es no singular.

$$\mathbf{K} = \frac{\begin{bmatrix} 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}}{\left(-\frac{1}{6}\right)} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \end{bmatrix} \quad (16.35)$$

Dejando el máximo orden de  $r$  una solución de vectores linealmente independientes de la ecuación 16.29 de un valor propio dado, forma la columna  $(n+r)$ ésima de una matriz  $\mathbf{U}(\lambda_i)$ . La matriz  $\mathbf{U}$  se divide cuando se hace la sustitución  $\mathbf{f}_i = \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_i$ .

$$\mathbf{U}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_1 & \boldsymbol{\psi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\psi}_r \\ \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{f}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}(\lambda_i) \\ - - - \\ \mathcal{F}(\lambda_i) \end{bmatrix} \quad (16.36)$$

Todas estas relaciones para  $n$  valores propios se pueden escribir.

$$\mathbf{K} \left[ \boldsymbol{\Psi}(\lambda_1) \quad \boldsymbol{\Psi}(\lambda_2) \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Psi}(\lambda_n) \right] = \left[ \mathcal{F}(\lambda_1) \quad \mathcal{F}(\lambda_2) \quad \cdots \quad \mathcal{F}(\lambda_n) \right] \quad (16.37)$$

La ecuación 16.37 no se puede solucionar directamente para  $\mathbf{K}$  si  $r > 1$ , por que representa una ecuación con inconsistencias. Como siempre, si el sistema es controlable, una matriz no singular  $n \times n$  de  $\psi_j(\lambda_i)$  se puede encontrar seleccionando  $n$  columnas linealmente independientes a ambos lados de la ecuación 16.37 y eliminando las columnas restantes. En este proceso de selección, una columna se seleccionara para cada valor propio  $\lambda_i$ . Seleccionando  $n$  columnas del lado izquierdo se forma la matriz  $\mathbf{G}$  y las correspondientes columnas del lado derecho forma la matriz  $\mathbf{J}$ , cuando esto este hecho el resultado  $\mathbf{KG} = \mathbf{J}$  puede solucionar la matriz de ganancia  $\mathbf{K}$  para la realimentación.

$$\mathbf{K} = \mathbf{JG}^{-1} \quad (16.38)$$

La libertad en la selección arbitraria de un subconjunto de  $n$  columnas, esta sujeto solo a la condición que una columna sea elejida para cada cada  $\lambda_i$  y que  $\mathbf{G}^{-1}$  exista, es lo que conduce a la multiplicidad de posibles matrices de ganancia en el caso de multiples entradas. En realidad, cualquier combinación lineal de columnas puede ser seleccionada de las  $r$  columnas encontradas para cada  $\lambda_i$ .

#### *Ejemplo 4.*

Considerando la misma matriz  $\mathbf{A}$  de los ejemplos anteriores; sin embargo, ahora tenemos dos entradas, con  $\mathbf{B} = \mathbf{I}_2$ . Encontrar la matriz de ganancia de realimentación que producen los valores propios del lazo cerrado,  $\lambda_{1,2} = -3, -5$

Con  $\lambda_1 = -3$ , la ecuación 16.29 resulta

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.39)$$

Llamando  $\xi_1 = \alpha$  y  $\xi_2 = \beta$  conduce a una solución  $\boldsymbol{\xi}_1 = [\alpha \ \beta \ 3\alpha + 2\beta \ 6\beta]^T$ . Es posible encontrar dos y solo dos vectores independientes especificando los distintos valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . Lo que se ha encontrado hasta el momento se puede escribir como

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha + 2\beta \\ 6\beta \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (16.40)$$

El espacio extra se ha dejado intencionalmente como recordatorio que con  $\lambda_2 = -5$  se encontrará la otra ecuación. Con  $\lambda_2 = -5$ , haciendo el mismo procedimiento se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (16.41)$$

Llamando  $\xi_1 = \gamma$  y  $\xi_2 = \delta$  conduce a una solución  $\boldsymbol{\xi}_2 = [\gamma \quad \delta \quad 5\gamma + 2\delta \quad 8\delta]^T$ . Lo que significa que

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} \cdot & \gamma \\ \cdot & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & 5\gamma + 2\delta \\ \cdot & 8\delta \end{bmatrix} \quad (16.42)$$

Tomando ambas ecuaciones para determinar  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha + 2\beta & 5\gamma + 2\delta \\ 6\beta & 8\delta \end{bmatrix} \quad (16.43)$$

Cualquier valor de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  dará una matriz de ganancia válida siempre y cuando exista la inversa. Tanto para simplicidad de cálculos como para obtener un conjunto ortogonal de vectores propios, se selecciono  $\alpha = \delta = 1$  y  $\beta = \gamma = 0$ . Luego, por inspección, la solución a la ecuación es:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad (16.44)$$

Donde un sistema de múltiples entradas permite un infinito número de elecciones para la matriz de ganancia de realimentación, el diseñador debe hacer las selecciones. Conociendo que  $\boldsymbol{\psi}_i$  son los vectores propios del lazo cerrado pueden ayudar a guiar a la elección de las columnas que se deben conservar. En realidad, cualquier combinación lineal de columnas de una partición determinada de  $\boldsymbol{\Psi}$  se puede utilizar siempre y cuando la misma combinación lineal de columnas  $\mathbf{f}_i$  sea utilizada. A menudo es útil para tratar de hacer  $\mathbf{G}$  lo más ortogonal

posible entre los modos de el sistema de lazo cerrado. Esta ortogonalidad por lo general mejora la sensibilidad del sistema a las variaciones de parámetros.

Una complicación final debe resolverse antes de estudiar completamente el método general de asignación de polos. Suponiendo que se desea que  $\lambda_i$  sea una raíz de orden  $p$ th de la ecuación característica. Si  $r$ , la dimensión del espacio nulo o, equivalente, el rango de  $\Psi$ , es mayor o igual que  $p$ , entonces el procedimiento anterior será suficiente. Si  $r < p$ , entonces no es posible especificar los vectores propios  $p$ . Todavía es posible alcanzar los deseados valores propios  $p$ . Los vectores de tal exceso de valores propios repetidos serán ahora vectores propios generalizados. Siendo  $\psi_i$  un vector propio el cual ha sido encontrado utilizando este procedimiento y siendo  $\psi_g$  un vector propio generalizado. Recordando lo visto anteriormente que se cumple

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \psi_g = \lambda \psi_g + \psi_i \quad (16.45)$$

reorganizando la ecuación

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK}) \psi_g = -\psi_i \quad (16.46)$$

o

$$\begin{bmatrix} (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_g \\ \mathbf{K} \psi_g \end{bmatrix} = -\psi_i \quad (16.47)$$

La ecuación 16.47 reemplaza a la ecuación 16.29 por el primer vector propio generalizado. Si mas de un vector propio generalizado es requerido, la segunda y las siguientes selecciones pueden satisfacer la ecuación. Los vectores propios generalizados en la discusión en la ubicación de polos solamente por que conocemos que ellos aportan un conjunto necesario de vectores independiente.

**Ejemplo 5.**

Considerando el sistema del ejemplo 1. Encontrar la matriz de ganancia que se obtiene de los valores propios  $\lambda = -1$ . Aplicando la ecuación 16.29

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (16.48)$$

Todas las soluciones no triviales son proporcionales a

$$\boldsymbol{\xi} = [ -2 \quad 1 \quad 4 ]^T \quad (16.49)$$

Obviamente solo un valor propio  $\boldsymbol{\psi} = [ -2 \quad 1 ]$  se seleccionara para este espacio unidimensional, entonces un vector propio generalizado es necesario y se encuentra con la ecuación 16.47

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_g = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (16.50)$$

Seleccionando  $\xi_2 = 1$  obtenemos  $\xi_1 = -4$  y  $\xi_3 = 3$  de manera que una solución es  $\boldsymbol{\xi}_g = [ -4 \quad 1 \quad 3 ]^T$ . Por lo tanto las dos ecuaciones para encontrar  $\mathbf{K}$  son

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [ 4 \quad 3 ] \quad (16.51)$$

de la cual obtenemos que  $\mathbf{K} = [ 0.5 \quad 5 ]$

**16.3.1 Resumen del algoritmo para la ubicación de los polos (Asignación de valores propios y vectores propios)**

Dado  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y el conjunto deseado de valores propios, realizar los siguientes pasos

**I.** Para cada  $\lambda_i$

1. Realizar  $\left[ \left( \lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A} : \mathbf{B} \right) \right]$
2. Encontrar el espacio nulo  $\mathbf{U}$  al encontrar todas las soluciones independientes de la ecuación 16.29
3. Dividir  $\mathbf{U}$ , utilizando las  $n$  filas superiores como la matriz  $n \times r$   $\Psi(\lambda_i)$ .
4. Utilizar las  $r$  filas restantes como la matriz  $r \times r$   $\mathbf{F}(\lambda_i)$ .

**II.** Forma las matrices compuestas  $\mathbf{\Omega} = [ \Psi(\lambda_1) \quad \Psi(\lambda_2) \quad \cdots \quad \Psi(\lambda_n) ]$ ;  $n \times nr$ , el rango de  $n$  es controlable y  $\mathbf{\Lambda} = [ \mathcal{F}(\lambda_1) \quad \mathcal{F}(\lambda_2) \quad \cdots \quad \mathcal{F}(\lambda_n) ]$ ;  $r \times nr$ . La ecuación 16.37 se puede escribir como  $\mathbf{K}\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Lambda}$

**III.** Seleccionar  $n$  columnas linealmente independientes de  $\mathbf{\Omega}$  para formar  $\mathbf{G}$  una matriz  $n \times n$ . Una columna (o cualquier combinación lineal de columnas) se selecciona para cada división  $\Psi(\lambda_i)$ .

**IV.** Utilizar el mismo número de columnas en el paso III para formar  $\mathbf{J}$  una matriz  $r \times n$  de  $\mathbf{\Lambda}$ .

**V.** Resolver  $\mathbf{K}\mathbf{G} = \mathbf{J}$  de la matriz de ganancia  $\mathbf{K}$ .

**Ejemplo 6.**

Un modelo de la dinámica lateral de un avión en un conjunto particular de condiciones de vuelo. Una aproximación discreta de este sistema es obtenida el método, con  $T = 0.2$

La matriz de transición discreta

$$\begin{bmatrix} 1.3533533E-01 & 9.8391518E-02 & -7.2121400E-01 & 0 \\ 0 & 7.1751231E-01 & 1.4726298 & 0 \\ 0 & -1.6362552E-01 & 0 & 0 \\ 8.6466469E-02 & 7.8584068E-03 & -1.0389241E-01 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.52)$$

La matriz de entrada  $\mathbf{B}$

$$\begin{bmatrix} 1.7293293 & 2.1750930E - 01 \\ 0 & -5.5092329E - 01 \\ 0 & 5.5393357E - 02 \\ 2.2706707E - 01 & 3.0423844E - 02 \end{bmatrix} \quad (16.53)$$

Diseñar un controlador con realimentación de estado que proporcionará el lazo cerrado, los polos en el plano  $Z$  corresponden a los del plano  $s$ ,  $s = -2, -5, -8$  y  $-10$ , aplicando  $z = e^{Ts}$  encontramos los polos en el plano  $Z$ .

$$\lambda_i = 0.6703, 0.3679, 0.2019 \text{ y } 0.1353 \quad (16.54)$$

Resolviendo la ecuación 16.29 para cada  $\lambda_i$

$$\begin{aligned}
U(\lambda_1) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4.4247019E-01 \\ 0 & 3.5991812E-01 \\ 4.7545883 & 1.0787997E-02 \\ \hline 3.0937374E-01 & 8.4780902E-04 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
U(\lambda_2) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7.5502163E-01 \\ 0 & 1.9485569E-01 \\ 1.8517032E-01 & 5.8909208E-03 \\ \hline 1.3450530E-01 & 8.7471344E-02 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
U(\lambda_3) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7.2149646E-01 \\ 0 & 1.2148339E-01 \\ 1.1934122E-01 & 3.6517035E-03 \\ \hline 3.8512699E-02 & 1.1616344E-01 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
U(\lambda_4) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6.9379878E-01 \\ 0 & 9.9803299E-02 \\ 1.0003469E-1 & 2.9885261E-03 \\ \hline 0 & 1.2362902E-01 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{16.55}
\end{aligned}$$

las partes sobre las líneas de partición son  $\Psi(\lambda_i)$  y la parte inferior son los  $F(\lambda_i)$ . Con el fin de encontrar la ganancia adecuada, algunas combinaciones de columnas (1 o 2) y (3 o 4) y (5 o 6) y (7 o 8) son elegidas. Por ejemplo, si las columnas 1, 4, 6, y 7 son usadas las ecuaciones 16.37 y 16.43 dan:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 8.2435042E-02 & 2.4582298E-01 & -5.2851838E-01 & 8.2406455E-01 \\ 0 & -1.5015275 & 6.8607545E-01 & 0 \end{bmatrix} \tag{16.56}$$

Los valores propios del lazo cerrado son:

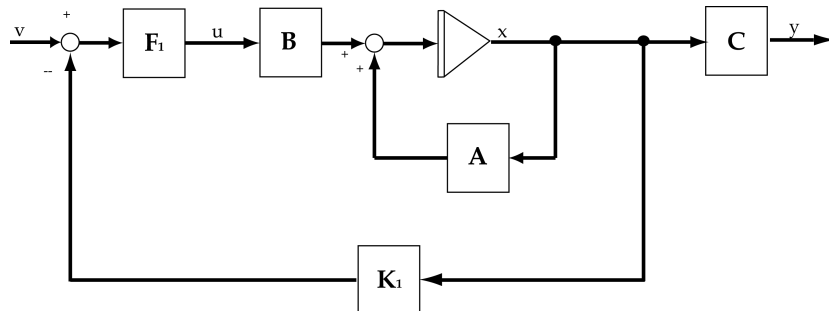
Parte Real	Parte Imaginaria
$1.3529983E - 01$	0
$2.0190017E - 01$	0
$3.6790001E - 01$	0
$6.7029989E - 01$	0

Si las columnas 2, 4, 5, y 7 se obtendria las siguiente alternativa de matriz de ganancia.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1.9954935E - 01 & 1.6860582E - 01 & -2.6471341E - 01 & 1.9948014 \\ 0 & -8.8968951E - 01 & -1.6846579 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.57)$$

El resultado de las matrices de ganancia  $\mathbf{K}$  y los vectores propios son totalmente distintos aunque los valores propios seran los mismos. Ahora asumiendo que la matriz de ganancia  $\mathbf{K}$  es factorizada en  $\mathbf{K} = \mathbf{F}_1 \mathbf{K}_1$ , y se ubican en el diagrama de planta como se muestra en la figura 16.3. No hay ningún cambio en la ecuación característica y por lo tanto en los polos tampoco. El numerador de la función de transferencia puede difererir sustancialmente. Si  $\mathbf{F}_1$  es solo un escalar, entonces sólo las ganancias de los elementos de la función de transferencia cambian. Si  $\mathbf{F}_1$  es una matriz  $r \times r$ , la función de transferencia puede tener una apariencia muy modificada. Aunque las funciones de  $s$  (o  $z$ ) que aparecen en los elementos del numerador puede parecer totalmente diferente, los ceros de la función de transferencia permanecen sin cambios.

Figure 16.3: Diagrama de planta con la matriz de ganancia  $\mathbf{K}$



### 16.3.2 Formula de Ackermann

Considerando el sistema obtenido mediante la ecuación 1, que puede reescribirse como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (16.58)$$

Suponemos que el sistema es completamente controlable, también suponemos que los polos deseados están en  $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$ .

El uso de un control mediante la realimentación de estado

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (16.59)$$

Modifica la ecuación del sistema a

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \quad (16.60)$$

Definiendo

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} \quad (16.61)$$

La ecuación característica deseada es

$$\begin{aligned} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} &= s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}} = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) \\ &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \end{aligned} \quad (16.62)$$

Dado que el teorema de Cayley -Hamilton plantea que  $\tilde{\mathbf{A}}$  satisface su propia ecuación característica, tenemos que

$$\phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \tilde{\mathbf{A}}^n + \alpha_{n-1}\tilde{\mathbf{A}}^{n-1} + \cdots + \alpha_1\tilde{\mathbf{A}} + \alpha_0\mathbf{I} = 0 \quad (16.63)$$

Emplearemos esta ecuación para obtener la formula de Akermann. Para simplificar la obtención, consideraremos el caso en el que  $n = 3$

Considerando la siguientes identidades:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ \mathbf{A} &= \mathbf{A} - \mathbf{BK} \\ \tilde{\mathbf{A}}^2 &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\mathbf{A} \\ \tilde{\mathbf{A}}^3 &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^3 = \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABK}\mathbf{A} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2 \end{aligned} \quad (16.64)$$

Multiplicando las ecuaciones anteriores en orden por  $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$  (en donde  $\alpha_0 = 1$ ), respectivamente y arreglando los resultados, obtenemos

$$\begin{aligned} &\alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2\tilde{\mathbf{A}} + \alpha_1\tilde{\mathbf{A}}^2 + \tilde{\mathbf{A}}^3 \\ &= \alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) + \alpha_1(\mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\mathbf{A}) + \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABK}\mathbf{A} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ &= \alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2\mathbf{A} + \alpha_1\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 - \alpha_2\mathbf{BK} - \alpha_1\mathbf{ABK} - \alpha_1\mathbf{BK}\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABK}\mathbf{A} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2 \end{aligned}$$

Remitiendonos a las ecuación 16.63 tenemos

$$\alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_1 \tilde{\mathbf{A}}^2 + \tilde{\mathbf{A}}^3 = \phi(\tilde{\mathbf{A}}) = 0 \quad (16.65)$$

Asimismo tenemos que

$$\alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{A} + \alpha_1 \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 = \phi(\mathbf{A}) \neq 0 \quad (16.66)$$

Sustituyendo las dos ultimas ecuaciones en la ecuación 16.64

$$\phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \phi(\mathbf{A}) - \alpha_2 \mathbf{BK} - \alpha_1 \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2 - \alpha_1 \mathbf{ABK} - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^2 \mathbf{BK} \quad (16.67)$$

Dado que  $\phi(\tilde{\mathbf{A}}) = 0$ , obtenemos

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{B}(\alpha_2 \mathbf{K} + \alpha_1 \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2) + \mathbf{AB}(\alpha_1 \mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}) + \mathbf{A}^2 \mathbf{BK} \quad (16.68)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \mathbf{K} + \alpha_1 \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1 \mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (16.69)$$

Puesto que el sistema es de estado completamente controlable, la inversa de la matriz de controlabilidad

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (16.70)$$

existe. Premultiplicando ambos miembro de la ecuación 16.69 por la inversa de la matriz de controlabilidad, obtenemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \vdots & \mathbf{AB} & \vdots & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \phi(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (16.71)$$

Premultiplicando ambos miembros de esta ultima ecuación por  $[0 \ 0 \ 1]$ , obtenemos

$$[0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \vdots & \mathbf{AB} & \vdots & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \phi(\mathbf{A}) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = \mathbf{K} \quad (16.72)$$

Que puede escribirse como

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \vdots & \mathbf{AB} & \vdots & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \phi(\mathbf{A}) \quad (16.73)$$

Esta ultima ecuación produce la matriz de ganancias de realimentación del estado  $\mathbf{K}$  deseada

Para un entero positivo arbitrario  $n$ , tenemos que

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} B & AB & \vdots & \dots & \vdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} \phi(\mathbf{A}) \quad (16.74)$$

**Ejemplo 7.**

Considerando el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (16.75)$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16.76)$$

Usando el control mediante la realimentación del estado  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$  se quiere que los polos en lazo cerrado estén en  $s = -2 \pm 4j$  y  $s = -10$ . Determinar la matriz de ganancias de realimentación de estado  $\mathbf{K}$

Primero se necesita verificar la controlabilidad del sistema

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix} \quad (16.77)$$

por lo tanto el rango = 3, así que el sistema es completamente controlable y es posible la ubicación arbitraria de los polos.

La ecuación característica del sistema es

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 5 & s+6 \end{vmatrix} \\ &= s^3 + 6s^2 + 5s + 1 \end{aligned} \quad (16.78)$$

Por tanto

$$a_1 = 6 \quad a_2 = 5 \quad a_3 = 1 \quad (16.79)$$

La ecuación característica deseada es

$$(s + 2 - 4j)(s + 2 + 4j)(s + 10) = s^3 + 14s^2 + 60s + 200 \quad (16.80)$$

Así

$$\alpha_1 = 14 \quad \alpha_2 = 60 \quad \alpha_3 = 200 \quad (16.81)$$

Ahora

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} B & AB & \vdots & \dots & \vdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} \phi(\mathbf{A}) \quad (16.82)$$

Dado que

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 + 14\mathbf{A}^2 + 60\mathbf{A} + 200 \quad (16.83)$$

$$\phi(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^3 + 14 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^2 + 60 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + 200 \quad (16.84)$$

$$\phi(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix} \quad (16.85)$$

y

$$\begin{bmatrix} B & AB & \vdots & \dots & \vdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix} \quad (16.86)$$

Obtenemos

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix} \quad (16.87)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \end{bmatrix} \quad (16.88)$$

## 16.4 APLICACIÓN DE ASIGNACIÓN DE POLOS USANDO REALIMENTACIÓN DE ESTADO

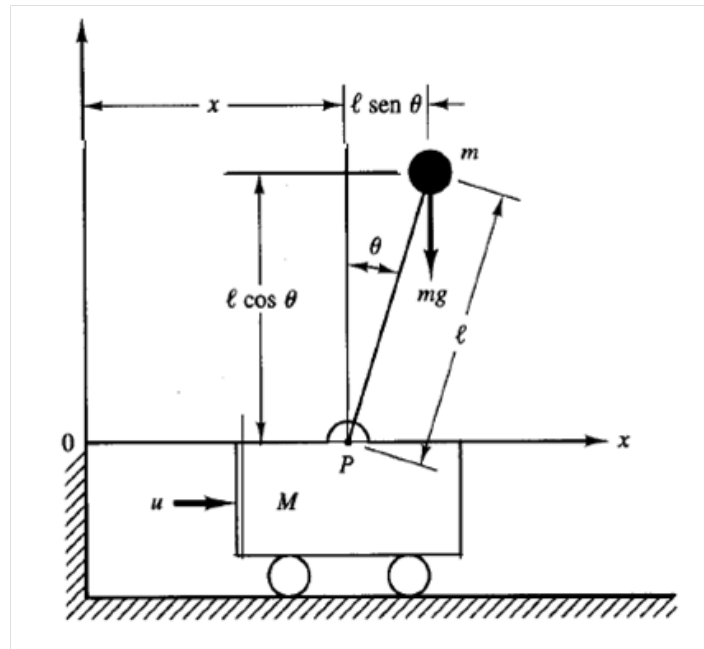
Cosiderando el sistema del péndulo invertido de la Figura 16.4, en el que un péndulo se monta en un carro controlado con un motor.

Se desea conservar el péndulo perpendicular ante la presencia de perturbaciones. El péndulo inclinado regresa a la posición vertical cuando se aplica al carro una fuerza de control  $\mathbf{u}$  apropiada. Al final de cada proceso de control, se pretende regresar el carro a  $x = 0$ , la posición de referencia.

Diseñar un sistema de control tal que, dadas cualesquiera condiciones iniciales, el pendulo regrese a la posición vertical y el carro regrese a la posición de referencia rápidamente. Suponga lo valores numericos siguientes para  $M$ ,  $m$  y  $l$ .

$$M = 2Kg \quad m = 0.1Kg \quad l = 0.5m$$

Figure 16.4: Péndulo invertido



### Modelo matemático

$$(M + m) \ddot{x} + ml\ddot{\theta} = \mu$$

$$(I + ml^2) \ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$$

En donde  $I$  es el momento de inercia de la barra del péndulo con respecto a su centro de gravedad. Dado que en este sistema la masa se concentra en la parte superior de la barra, el centro de gravedad es el centro del péndulo

$$(M + m) \ddot{x} + ml\ddot{\theta} = \mu$$

$$ml^2 + ml\ddot{x} = mgl\theta$$

Eliminando  $\ddot{x}$

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - \mu$$

Eliminando  $\ddot{\theta}$

$$M\ddot{x} = \mu - mg\theta$$

Obteniendo la función transferencia de la planta

$$\frac{\theta(s)}{-\mu(s)} = \frac{1}{Mls^2 + (M+m)g}$$

Sustituyendo los valores numericos

$$\frac{\theta(s)}{-\mu(s)} = \frac{1}{2*0.5s^2 + (2+0.1)9.81} = \frac{1}{s^2 - 20.601} = \frac{1}{s^2 - (4.539)^2}$$

Tiene dos polos  $s_{1,2} = \pm 4.539$

Definiendo las variables de estado

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$x_3 = x$$

$$x_4 = \dot{x}$$

Ahora la salida del sistema

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Apartir de la definición de las variables de estado y las ecuaciones del modelo matemático

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\ddot{\theta} = \dot{x}_2 = \frac{M+m}{Ml} g x_1 - \frac{1}{Ml} \mu$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\ddot{x} = \dot{x}_4 = -\frac{m}{M} g x_1 + \frac{1}{M} \mu$$

En términos de ecuaciones matriciales

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M} g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} [ u ]$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores numericos

$$\frac{M+m}{Ml}g = 20.601 \quad \frac{m}{M}g = 0.4905 \quad \frac{1}{Ml} = 1 \quad \frac{1}{M} = 0.5$$

Las ecuaciones matriciales se pueden escribir como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

En donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se usara el esquema de control mediante la realimentación de estado

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

Verificando si el sistema es controlable

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20.601 \\ -1 & 0 & -20.601 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.4905 \\ 0.5 & 0 & 0.4905 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que el rango es 4, el sistema es completamente controlable

La ecuación característica del sistema

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -20.601 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0.4905 & 0 & 0 & s \end{vmatrix} \\ &= s^4 - 20.601s^2 \\ &= s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 20.601 \quad a_3 = 0 \quad a_4 = 0$$

A continuación se deben seleccionar las ubicaciones de los polos

$$u_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{3}j \quad u_{3,4} = -10$$

La ecuación característica deseada se convierte

$$\begin{aligned} (s - u_1)(s - u_2)(s - u_3)(s - u_4) &= (s + 2 - 2\sqrt{3}j)(s + 2 + 2\sqrt{3}j)(s + 10)(s + 10) \\ &= (s^2 + 4s + 16)(s^2 + 20s + 100) \\ &= s^4 + 24s^3 + 19s^2 + 70s + 1600 \\ &= s^4 + \alpha_1s^3 + \alpha_2s^2 + \alpha_3s + \alpha_4 = 0 \end{aligned}$$

Determinando la matriz de ganancia

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \alpha_4 - a_4 & \vdots & \alpha_3 - a_3 & \vdots & \alpha_2 - a_2 & \vdots & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}$$

Determinando primero  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{W}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -20.601 & 0 & 1 \\ -20.601 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -9.81 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -9.81 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Ahora

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{0.5}{9.81} & 0 & -\frac{1}{9.81} & 0 \\ 0 & -\frac{0.5}{9.81} & 0 & -\frac{1}{9.81} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 1600 - 0 & \vdots & 720 - 0 & \vdots & 196 + 20.601 & \vdots & 24 - 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{0.5}{9.81} & 0 & -\frac{1}{9.81} & 0 \\ 0 & -\frac{0.5}{9.81} & 0 & -\frac{1}{9.81} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -298.1504 & -60.6972 & -163.0989 & -73.3945 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La señal de control  $\mathbf{u}$  se obtiene mediante

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -298.1504x_1 + 60.6972x_2 + 163.0989x_3 + 73.3945x_4$$

## 16.5 ASIGNACIÓN DE LOS POLOS USANDO REALIMENTACIÓN DE SALIDA

La señal de realimentación considerada en esta sección es formada por premultiplicación de la salida  $y$  por una matriz  $r \times m$  constante llamada  $\mathbf{K}'$ . Si  $\mathbf{D}$  no se cero, un vector salida modificado  $\mathbf{y}' = \mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{u}$  se puede formar. Luego una matriz de ganancia modificada  $\mathbf{K}^*$  se puede utilizar con  $\mathbf{y}'$ ; se puede mostrar que  $\mathbf{K}^*$  y  $\mathbf{K}'$  están relacionados por

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}' [\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{K}']^{-1} \quad \text{o} \quad \mathbf{K}' = [\mathbf{I} - \mathbf{D} - \mathbf{K}^*]^{-1} \mathbf{K}^* \quad (16.89)$$

Si  $\mathbf{D} = 0$ , estas dos ganancias son las mismas. Cuando  $\mathbf{D}$  es distinto de cero es más sencillo primero determinar  $\mathbf{K}^*$  (que es equivalente a asumir  $\mathbf{D} = 0$ ) y luego si calcular  $\mathbf{K}'$  utilizando la ecuación 16.89. Mediante la introducción de  $\mathbf{K}^*$  en la ecuación 16.13, es evidente que cuando la realimentación de salida es utilizada, los valores propios son las raíces de

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}^*\mathbf{C}| = 0 \quad (16.90)$$

Siguiendo los mismo argumentos de la sección anterior, esta implica la existencia de uno o más vectores  $\boldsymbol{\psi}$  diferentes de cero que satisfacen

$$\begin{bmatrix} (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) : \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \mathbf{K}^*\mathbf{C}\boldsymbol{\psi}_g \end{bmatrix} = 0 \quad (16.91)$$

Salvo por la presencia de  $\mathbf{C}$ , esta es la misma ecuación 16.29. Un vector es definido

$$\xi = \begin{bmatrix} \psi \\ \mathbf{K}^* \mathbf{C} \psi \end{bmatrix} \quad (16.92)$$

Todas las soluciones no triviales para  $\xi$  hay que encontrar para cada  $\lambda_i$ . Luego  $\mathbf{U}(\lambda_i)$ ,  $\Psi(\lambda_i)$  y  $\Omega$  se forman como en el algoritmo anterior, sin cambios. Los  $n$  componentes de la parte superior de cada columna  $\xi_i$ , ahora en  $\mathbf{U}(\lambda_i)$ , son los vectores propios. Asimismo, los componentes inferiores  $r$  forman parte inferior de la partición de  $\mathbf{U}(\lambda_i)$ . Estos son utilizados para formar  $\mathbf{F}'(\lambda_i)$ . El sentido de la partición inferior de las columnas es diferente ahora por la aparición de  $\mathbf{C}$ . Específicamente,  $\mathbf{f}_i = \mathbf{K}^* \mathbf{C} \psi_i$ , que es utilizada para formar  $\Lambda'$ . Una operación extra es requerida debido a la presencia de la matriz  $\mathbf{C}$ , definiendo  $\Omega' = \mathbf{C}\Omega$ . La ecuación equivalente a la ecuación 16.37 es  $\mathbf{K}^* \Omega' = \Lambda'$ , ahora  $\Omega'$  es una matriz  $m \times nr$ . Por lo tanto, a lo sumo  $m$  columnas linealmente independientes de  $\Omega'$  pueden ser seleccionadas en el paso III del algoritmo para formar  $\mathbf{G}'$ . Las columnas correspondientes de  $\Lambda'$  son usadas para formar  $\mathbf{J}'$ . La solución para  $\mathbf{K}^*$  se encuentra de la misma forma que en el paso V de la sección anterior  $\mathbf{K}^* = \mathbf{J}(\mathbf{G}')^{-1}$ . Finalmente si  $\mathbf{D}$  es diferente de cero, la señal de realimentación es

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}^* (\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{u}) + \mathbf{F}'\mathbf{v}' \quad (16.93)$$

Combinando los dos términos de  $\mathbf{u}$  obtenemos

$$\mathbf{u} = -[\mathbf{I} - \mathbf{K}^* \mathbf{D}]^{-1} \mathbf{K}^* \mathbf{y} + [\mathbf{I} - \mathbf{K}^* \mathbf{D}]^{-1} \mathbf{F}'\mathbf{v}' \quad (16.94)$$

La matriz de realimentación de salida, con la que se comenzó en la ecuación 16.89

$$\mathbf{K}' = [\mathbf{I} - \mathbf{K}^* \mathbf{D}]^{-1} \mathbf{K}^* \quad (16.95)$$

**Ejemplo 8.**

Especificar una matriz  $\mathbf{K}'$  de realimentación de salida de tal modo que el sistema sea controlable y observable

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1], \quad \mathbf{D} = [0] \quad (16.96)$$

tendra  $\lambda_1 = 5$  como valor propio, aplicando la ecuación 16.91

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xi = 0 \quad (16.97)$$

Nombrando  $\xi_1 = \alpha$  y  $\xi_2 = \beta$  como constantes arbitrarias permite que los dos ultimos componentes sean encontrados como  $\xi_3 = 5\alpha + \beta$  y  $\xi_4 = -3\alpha + \beta$ , en otras palabras

$$\mathbf{K}^* \mathbf{C} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\alpha + \beta \\ -3\alpha + \beta \end{bmatrix} \quad (16.98)$$

Con lo cual se encontraran dos ecuaciones independientes; por ejemplo, si  $\alpha = 1, \beta = 0$  obtenemos una y con  $\alpha = 0, \beta = 1$  obtenemos otra, de esta manera podemos escribir

$$\mathbf{K}^* \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.99)$$

pero esto no es particularmente útil, ya que  $\mathbf{C}$  no se puede invertir para encontrar  $\mathbf{K}^*$ . Lo que hay que hacer es volver a la ecuación 16.98 y combinar  $\mathbf{C}$  con los valores hasta ahora conocidos de  $\alpha$  y  $\beta$ , que es  $\mathbf{K}^* \{\alpha + \beta\} = \begin{bmatrix} 5\alpha + \beta \\ -3\alpha + \beta \end{bmatrix}$ . Ahora el escalar  $\alpha + \beta$  puede pasar a dividir para obtener  $\mathbf{K}^*$

$$\mathbf{K}^* = \frac{\begin{bmatrix} 5\alpha + \beta \\ -3\alpha + \beta \end{bmatrix}}{\alpha + \beta} \quad (16.100)$$

Un numero de infinito de opciones validas para  $\alpha$  y  $\beta$  son posibles, tales como  $\alpha = \frac{1}{4} \beta = \frac{3}{4}$ , obteniendo  $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}' = [ 2 \ 0 ]^T$ , o con  $\alpha = \frac{1}{2} \beta = \frac{1}{2}$ , obtenemos  $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}' = [ \frac{7}{2} \ -1 ]^T$ , la cuestión es si la elección de  $\alpha$  y  $\beta$  pueden ser usados para afectar los valores propios. La realimentación de salida no es capaz de cambiar la posición de todos los  $n$  valores propios, peor aún los valores propios que no son reasignables puede ser inestables y por lo tanto inaceptables.

## 16.6 RECONSTRUCCIÓN DE ESTADO CON LAS SALIDAS DISPONIBLES

En gran cantidad de sistemas todos los componentes del vector estado no son directamente validas como señales de salida. Por ejemplo, un radar puede hacer el seguimiento de la posición (estado) de un vehiculo y se desea conocer las velocidades, aceleraciones, o otros estados. Algunas veces el conocimiento de los valores de los estados es deseado, para una evaluación de rendimiento. En muchos problemas de sistema de control la razón para esperar al conocimiento de los estados es para la formación de las señales de realimentación. Como se mostro anteriormente, si todos los estados se utilizaran para la realimentación, seria posible un completo control sobre todos los valores propios, asumiendo que el sistema es controlable. Varios enfoques para el problema de la medición de los estados pueden ser considerados; primero, podría ser posible utilizar sensores adicionales para proporcionar las mediciones, pero generalmente es la opción mas costosa. Segundo, haciendo alguna diferenciación específica de las medidas de los estados puede proporcionar un estimado de los estados no medidos. Esta opción no da funcionamiento suficientemente preciso, especialmente en el caso de datos ruidosos. La tercera opción es usar el pleno conocimiento de los modelos matematicos del sistema de manera sistemática en un intento de estimar o reconstruir los estados; esta tercera opción se va a desarrollar, el algoritmo resultante es llamado *observador*. Hay observadores en tiempo continuo y observadores en tiempo discreto.

### 16.6.1 Observador en tiempo continuo total

Considerando el sistema de tiempo continuo descrito por la ecuación 16.1. Por simplicidad se ahora se asumira que  $\mathbf{D} = [0]$ . Si esto no es verdad, entonces una salida equivalente  $\mathbf{y}' = \mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{u}$  se puede utilizar en lugar de  $\mathbf{y}$ . Se desea conseguir una buena estimación del estado  $\mathbf{x}(t)$ , obteniendo el conocimiento de la salida  $\mathbf{y}(t)$ , la entrada  $\mathbf{u}(t)$ , y el sistema de matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ , lo cual hace referencia al problema de la reconstrucción de estado. Si  $C$  es cuadrada y no singular, entonces (en general, este resultado no trivial se aplicará).

Si la entrada depende de  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{u}$  y el estado es una buena aproximación a  $\mathbf{x}(t)$ . La forma del observador es

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_c \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L} \mathbf{y} + \mathbf{z} \quad (16.101)$$

Donde  $\hat{\mathbf{x}}$  es un vector aproximación  $n \times 1$  a  $\mathbf{x}$ .  $\mathbf{A}_c$  y  $\mathbf{L}$  son matrices  $n \times n$  y  $n \times m$  respectivamente y  $\mathbf{z}$  es un vector  $n \times 1$ . Definiendo  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$  y utilizando la ecuación 16.1

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{A}_c \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L} \mathbf{y} + \mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{z} \quad (16.102)$$

mediante la selección de  $\mathbf{z} = \mathbf{B} \mathbf{u}$  y  $\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x}$ , se reduce la anterior ecuación a

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}) \mathbf{x} - \mathbf{A}_c \hat{\mathbf{x}} \quad (16.103)$$

seleccionando  $\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_c \mathbf{e} \quad (16.104)$$

Si todos los valores propios de  $\mathbf{A}_c$  tienen partes reales negativas, entonces resulta una ecuación asintóticamente estable. Lo cual indica que  $\mathbf{e}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ , o  $\hat{\mathbf{x}}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t)$  como  $t \rightarrow \infty$ . Si el sistema originalmente utilizado (ecuación 16.1) es completamente observable, entonces siempre es posible encontrar  $\mathbf{L}$  que permite llegar a una serie de valores propios deseados para  $\mathbf{A}_c$ . Por lo que es posible controlar la velocidad a la que  $\hat{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}$ .

Comparando la matriz  $n \times n$   $\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}$  de la ecuación 16.104 con la matriz  $n \times n$   $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}$  de la ecuación 16.8, ambas tienen una matriz  $n \times n$   $\mathbf{A}$  que es conocida, modificada por un término que está parcialmente seleccionable por el diseñador. El orden de los términos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  y de las ganancias seleccionables  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{L}$  son reservados, por lo que la comparación no es exacta. En capítulos anteriores se desarrollaron métodos para determinar  $\mathbf{K}$  que dan  $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}$  un conjunto específico de valores propios. Una matriz cuadrada y su traspuesta tienen el mismo determinante y por lo tanto los mismos valores propios. Por consiguiente, si  $\mathbf{L}$  se pueden seleccionar para obligar a los valores propios a tener un valor específico,

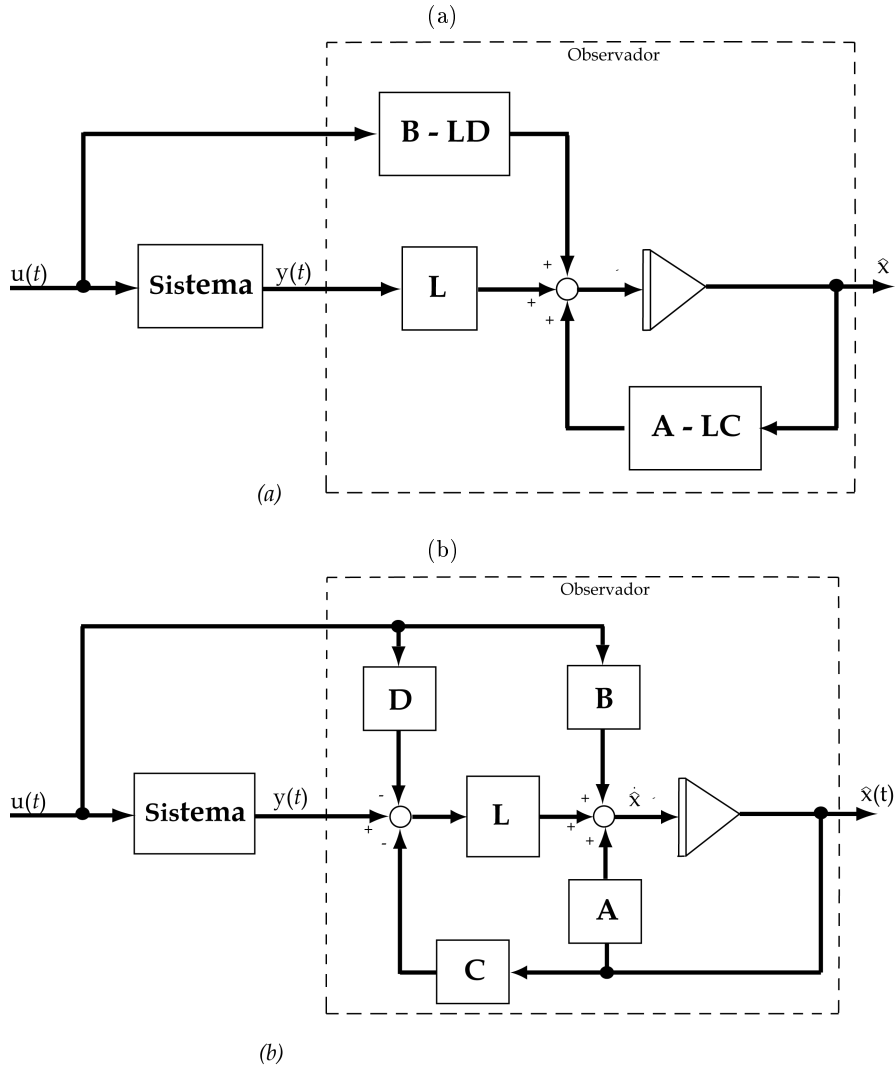
$$\mathbf{A}_c^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{L}^T \quad (16.105)$$

entonces  $\mathbf{A}$  tiene los mismos valores deseables. Los metodos presentados anteriormente para la ubicación de polos se pueden aplicar al sistema sin cambio alguno al problema del observador. Reemplazando  $\mathbf{A}$  por  $\mathbf{A}^T$  y  $\mathbf{B}$  por  $\mathbf{C}^T$ , y se encuentra  $\mathbf{L}^T$  (en lugar de  $\mathbf{K}$ ) por cualquiera de los algoritmos de ubicación de polos visto. El requerimiento de que el sistema  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$  debia ser controlable ahora se convierte en un requisito de observabilidad para  $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$ . La ecuación fundamental 16.29 se repite aqui con cambios notacionales apropiados para el problema del observador.

$$\left[ \lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \quad \vdots \quad \mathbf{C}^T \right] \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (16.106)$$

La ecuación 16.106 es usada para determinar la matriz de ganancia del observador  $\mathbf{L}$ . Como antes, habrá momentos en el que se seran necesarios los vectores propios generalizados para obtener multiples polos. En la figura 16.5 se puede ver el funcionamiento del observador. La parte (a) es directamente de la ecuación 16.101 y la parte (b) se obtiene mediante la manipulación de los bloques de matrices.

Figure 16.5: Funcionamiento del observador



**Ejemplo 9.**

Diseñar un observador para el sistema del Ejemplo 1. si solo  $x_1$  puede ser medido. Ubique ambos valores propios del observador en  $\lambda = -8$ . Esto hará que el error de  $\mathbf{e}(t)$  tienda a cero rápidamente, independientemente de cualquier error en la estimación inicial de  $\hat{\mathbf{x}}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = [ 1 \quad 0 ]$$

Utilizando estas dos matrices en  $\begin{bmatrix} -8\mathbf{I} - \mathbf{A}^T & \vdots & \mathbf{C}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi} = 0$  se obtienen los componentes de las ecuaciones  $8\xi_1 = \xi_3$  y  $2\xi_1 = -11\xi_2$ . Seleccionando arbitrariamente  $\xi_1 = 1$  encontramos  $\xi_2 = -\frac{2}{11}$  y  $\xi_3 = 8$ . Los dos primeros componentes de  $\boldsymbol{\xi}$  forman el vector propio  $\boldsymbol{\psi}$ . Es necesario un vector propio generalizado para encontrar la segunda columna independiente.

$$\begin{bmatrix} -8\mathbf{I} - \mathbf{A}^T & \vdots & \mathbf{C}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_g = -\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{2}{11} \end{bmatrix} \quad (16.107)$$

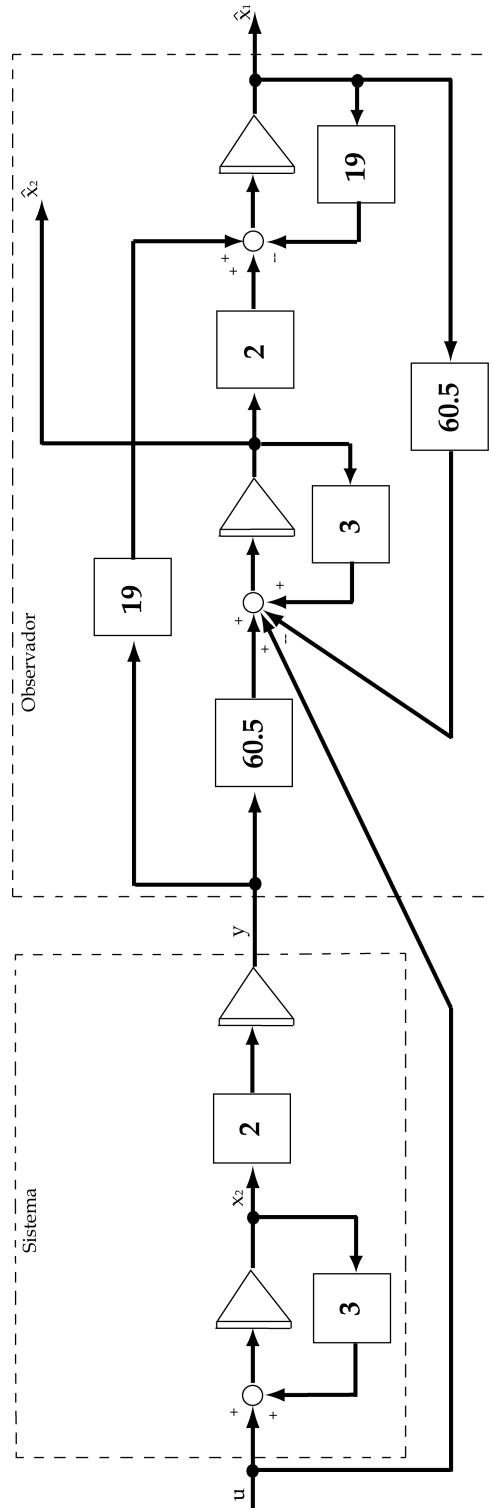
Resolviendo la ecuación encontramos  $\boldsymbol{\xi}_g = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{24}{121} & 7 \end{bmatrix}^T$ . Las columnas  $\boldsymbol{\xi}$  y  $\boldsymbol{\xi}_g$  de la matriz  $\mathbf{U}(-8)$ . Particionado la obtenemos

$$\mathbf{L}^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{-11} \\ -\frac{2}{11} & -\frac{24}{121} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \end{bmatrix} \quad (16.108)$$

La solución es  $\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} 19 & 60.5 \end{bmatrix}$ . Como un control, la matriz  $A_c = \begin{bmatrix} -19 & 2 \\ -60.5 & 3 \end{bmatrix}$  se comprueba que  $(\lambda + 8)^2$  como su polinomio característico.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}_c \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L} \mathbf{y} + \mathbf{z} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \begin{bmatrix} -19 & 2 \\ -60.5 & 3 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 19 \\ 60.5 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (16.109)$$

Figure 16.6: Representación grafica del ejemplo 9



### 16.6.2 Observador en tiempo discreto total

Para el sistema en tiempo discreto de la ecuación 16.3 una posible forma para el observador es:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}_c \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{L}\mathbf{y}(k) + \mathbf{z}(k) \quad (16.110)$$

Teniendo en cuenta que esto implica que la estimación se ha calculado en el paso  $k+1$ , se basa en datos medidos de una muestra anterior, llamada,  $y(k)$ . Este tiempo de retardo puede ser forzado por los diseñadores del sistema para dar tiempo a la demora en el algoritmo computacional. Si el tiempo de la muestra entre  $k$  y  $k+1$  es grande, este retraso puede ser indeseable.

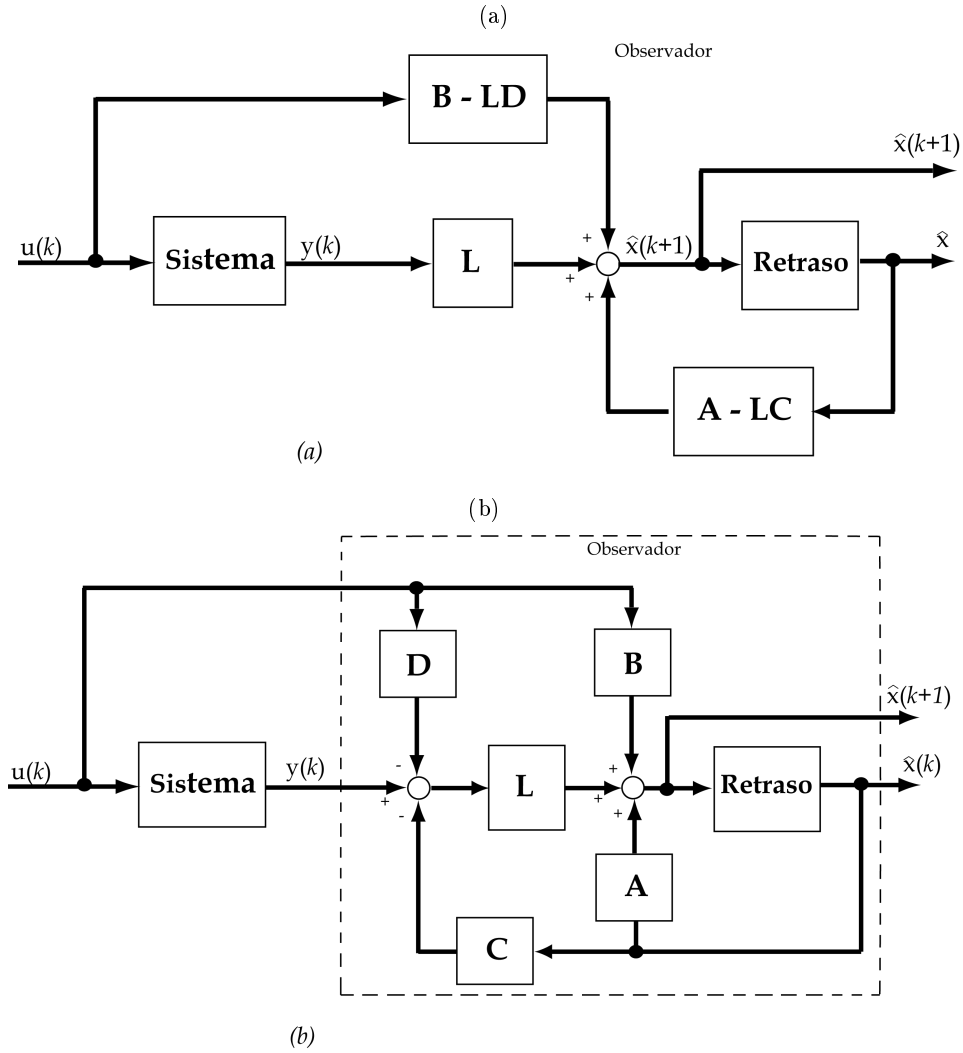
La estimación del error del observador  $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$  satisface la ecuación diferencial homogénea

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(k) = \mathbf{A}_c \mathbf{e}(k) \quad (16.111)$$

Siempre que  $\mathbf{z}(k)$  es seleccionado para cancelar todos los términos  $\mathbf{u}$  que entran en la ecuación de error a través de  $\mathbf{L}\mathbf{y}$ . Este requisito se cumple cuando  $\mathbf{z} = (\mathbf{B} - \mathbf{L}\mathbf{D})\mathbf{u}(k)$ , igual que en el caso de tiempo continuo, el error  $\mathbf{e}(k)$  decaerá a cero si  $\mathbf{A}_c$  es estable. Esto significa que todos los valores propios deben estar dentro de un círculo unitario. La tasa de decaimiento depende de la localización los valores propios.

La figura 16.7a ilustra el observador descrito en la ecuación 16.110 y la figura 16.7b muestra la diferencia entre la  $\mathbf{y}$  real y la precedida  $\mathbf{y}$ , obtenida por  $\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u}$ .

Figure 16.7: Observador en tiempo discreto total



**Ejemplo 10.**

Diseñar un observador total con valores propios  $z = 0.1 \pm 0.2j$  para un sistema discreto con  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{D} = [0]$  y  $\mathbf{C} = [0 \ 1]$ .

Para este caso la ecuación 16.106 se convierte, con  $z = 0.1 + 0.2j$  en

$$\begin{bmatrix} -0.4 + 0.2j & -0.2 & 1 \\ -1 & -0.4 + 0.2j & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (16.112)$$

Seleccionando  $\xi_2 = 1$  se obtiene  $\xi_1 = -0.4 + 0.2j$  y  $\xi_3 = 0.28 + 0.06j$ . Con el conjugado de  $z$  obtenemos el conjugado de  $\xi$ , por lo tanto

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} -0.4 + 0.2j & -0.4 - 0.2j \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [ 0.28 + 0.06j \quad 0.28 - 0.06j ] \quad (16.113)$$

Esto se puede expresar con valores puramente reales:

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [ 0.28 \quad 0.06 ] \quad (16.114)$$

Donde

$$\mathbf{L}^T = [ 0.3 \quad 0.4 ] \quad (16.115)$$

La matriz de observación del sistema es y su representación se ve en la figura 16.8

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -0.3 & 1 \\ -0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (16.116)$$



Una segunda forma del observador en tiempo discreto total se puede postular como

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}_c \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{L} \mathbf{y}(k+1) + \mathbf{z}(k) \quad (16.117)$$

Usando las ecuaciones de estado para eliminar el termino  $\mathbf{y}(k+1)$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}_c \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{L} \{ \mathbf{C} \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k+1) \} + \mathbf{z}(k) \\ &= \mathbf{A}_c \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{L} \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{L} \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}(k) + \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{u}(k+1) + \mathbf{z}(k) \end{aligned} \quad (16.118)$$

La ecuación de error es

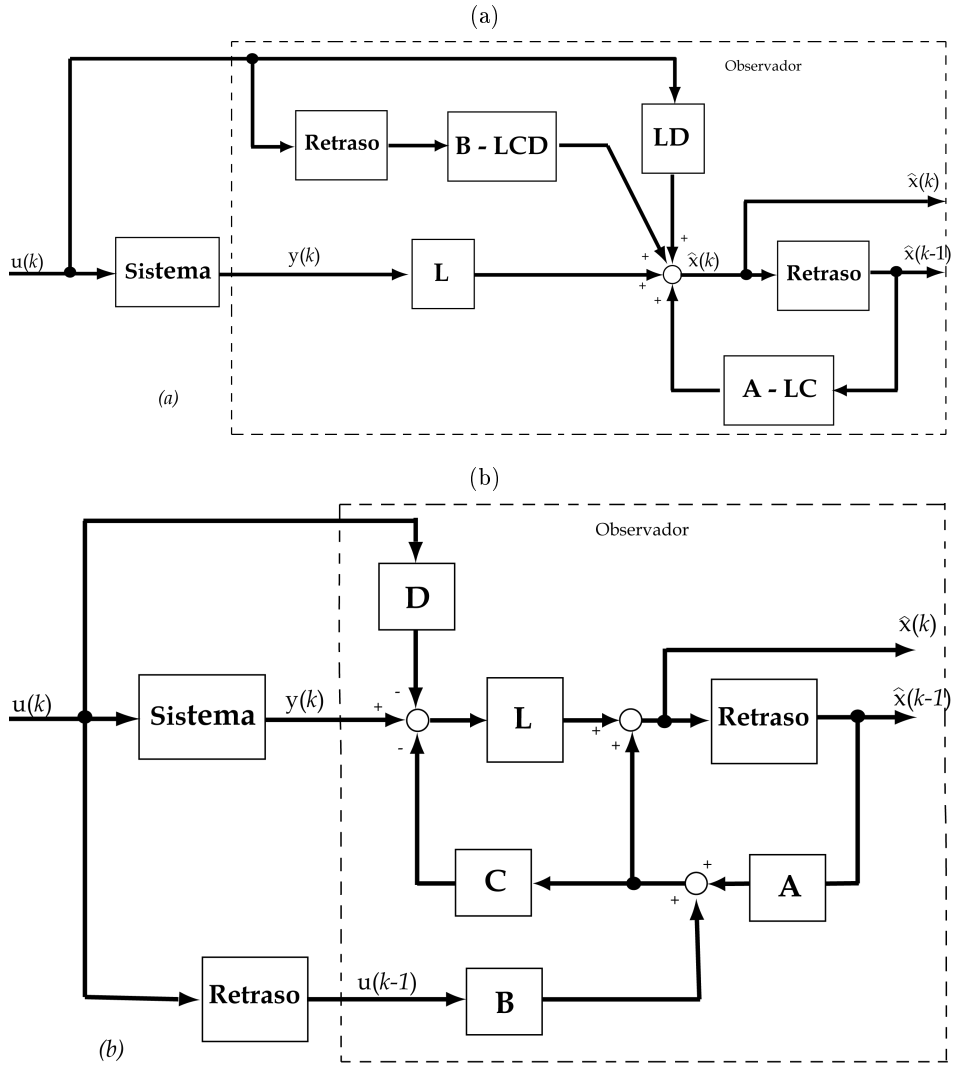
$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C} \mathbf{A}) \mathbf{x}(k) - \mathbf{A}_c \hat{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{B} - \mathbf{L} \mathbf{C} \mathbf{B}) \mathbf{u}(k) - \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{u}(k+1) - \mathbf{z}(k) \quad (16.119)$$

Como antes, la salida  $\mathbf{z}(k)$  del observador es seleccionada para cancelar todos los terminos de  $\mathbf{u}$ , así  $\mathbf{z}(k) = (\mathbf{B} - \mathbf{L} \mathbf{C} \mathbf{B}) \mathbf{u}(k) - \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{u}(k+1)$ . La matriz de observación queda:

$$\mathbf{A}_c = (\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C} \mathbf{A}) = (\mathbf{I} - \mathbf{L} \mathbf{C}) \mathbf{A} \quad (16.120)$$

de modo que la ecuación de error es otra vez una simple ecuación homogénea y su respuesta decaerá a cero si todos los valores propios de  $\mathbf{A}_c$  son estables. Sin embargo, si se obliga a los valores propios de  $\mathbf{A}_c$  a posiciones estables preespecificadas por elección de la ganancia  $\mathbf{L}$ . La pregunta ahora es si la matriz  $\mathbf{A}$  del sistema original se puede multiplicar por el factor  $(\mathbf{I} - \mathbf{L} \mathbf{C})$  para forzar el resultado  $\mathbf{A}_c$ , a tener valores propios arbitrarios. La respuesta a este interrogante es afirmativa si el sistema  $\mathbf{A}$  es no singular, como se puede ver mediante la definición de una nueva matriz de ganancia  $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \mathbf{A}$ . Esto permite que la ecuación 16.120 se pueda escribir en una forma que oculte el problema de los productos y obligue a la ecuación a aparecer como una más en el capítulo,  $\mathbf{A}_c = (\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}')$ . La figura 16.9 dos arreglos para este observador.

Figure 16.9: Arreglos para el observador



**Ejemplo 11.**

Usando el mismo sistema y valores propios del ejemplo 10, pero utilizando  $y(k+1)$  como entrada.

Primero se calcula  $C' = CA = [0 \ 1]$  y luego se resuelve



## Capítulo 17

# INTRODUCCIÓN AL CONTROL ÓPTIMO

### 17.1 CONCEPTOS DE CONTROL ÓPTIMO

Un sistema de control óptimo es aquel cuyo diseño optimiza el valor de una función que se denomina índice de desempeño o función de costo que depende de las variables del sistema, esta función puede incluir aspectos como por ejemplo la medida del error de seguimiento, la medida del esfuerzo de control, el error final y cualquier otra característica que se considere importante en el diseño

El objetivo es determinar los valores de un conjunto de parámetros que para dicho controlador minimice alguna medida de desviación del comportamiento ideal y que además verifique ciertas restricciones, dicha medida de desempeño nos dice cuanto se parece el comportamiento real al comportamiento deseado, que viene dado por la señal de referencia.

En la ingeniería del control moderno es de suma importancia el diseño de sistemas de control óptimo, el propósito de este es realizar un sistema con componentes prácticos que proporcionen un comportamiento deseado.

Los sistemas que vamos a considerar son descritos en forma variable de estado en la forma que se muestra en la ecuación

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (17.1)$$

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \quad (17.2)$$

Se supone que todos los estados de salida están medidos, es decir,  $y(x) = x(t)$ . Si este no es el caso, el estado de un sistema lineal observable puede ser estimado mediante el uso de un observador o un filtro de Kalman. Existen a veces limitaciones en los valores permisibles de las variables de estado. Sin embargo, sólo trataremos el control con acondicionamientos variables.

El comportamiento de un sistema puede representarse por medidas integrales de comportamiento de esta forma se debe tener en cuenta para el diseño de un sistema minimizar un índice de comportamiento como la integral de cuadrado del error. Los sistemas que se ajustan para proporcionar un índice mínimo de comportamiento se conocen como sistemas de control óptimos.

En la mayoría de los casos, el comportamiento del sistema se hace óptimo al escoger el vector de control  $u(k)$  de tal forma que el índice de desempeño se minimice (o maximice, dependiendo de la naturaleza del índice de desempeño seleccionado). La selección de un índice de desempeño apropiado es importante porque determina la naturaleza del sistema de control óptimo resultante. Es decir, que el sistema resultante sea lineal, no lineal, estacionario o variante en el tiempo, dependerá de la forma del índice de desempeño. Por lo tanto este se selecciona en base a los requisitos que el sistema debe cumplir y se debe tener en cuenta para el análisis del sistema resultante. La selección de un índice de desempeño implica una evaluación del desempeño del sistema y un problema matemático.

Un planteamiento matemático del problema de control óptimo consiste en:

- Ecuaciones del sistema
- Clase de vectores en el problema
- Restricciones del problema
- Índice de desempeño
- Parámetros del sistema

Excepto en algunos casos, el problema de control óptimo puede ser muy complicado para obtener una solución analítica por lo que se tiene que obtener una solución por computador.

Generalmente para problemas de control óptimo cuando tenemos la condición inicial  $x(0)$ , lo que se hace es encontrar un vector de control  $u(k)$  que transfiera al estado a la región deseada

del espacio de estados para el cual el índice de desempeño se minimiza. En algunos casos por condiciones físicas y el estado deseado del sistema el índice de desempeño y restricciones hacen imposible aplicar un control óptimo. Las posibilidades de que exista o no un vector de control óptimo dependen también de características del sistema como lo son la controlabilidad y la observabilidad.

Consideremos el sistema de control definido por

$$x(k+1) = \mathbf{G}x(k) + \mathbf{H}u(k) \quad (17.3)$$

donde

$x(k)$  es el vector de estado (vector  $n$ )

$u(k)$  es el vector de control (vector  $r$ )

$G$  es una matriz de  $n \times n$

$H$  es una matriz de  $n \times r$

Se desea determinar una ley para el vector de control  $u(k)$  tal que un índice de desempeño cuadrático se minimice. Un típico índice de desempeño cuadrático es

$$J = \frac{1}{2}x(N) \mathbf{S}x(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x(k) \mathbf{Q}x(k) + u(k) \mathbf{R}u(k)] \quad (17.4)$$

Donde las matrices  $S$  y  $Q$  son matrices hermíticas (matrices cuadradas de elementos complejos que es igual a su transpuesta conjugada) definidas positivas o semidefinidas positivas y  $R$  es una matriz hermítica definida positiva, el primer término del lado derecho está relacionado con la importancia del estado final, el primer término dentro de los corchetes está relacionado con la importancia relativa del error durante el proceso de control y el segundo está relacionado

con el gasto de energía de la señal de control. Suponemos que el vector de control  $u(k)$  no está restringido

La ley de control óptimo está dada por:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}(k)x(k) \quad (17.5)$$

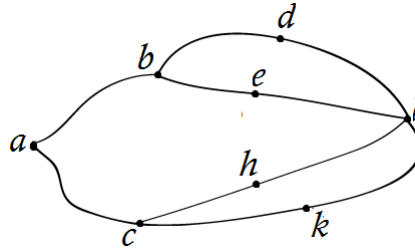
Donde  $\mathbf{K}(k)$  es una matriz de  $r \times n$  variante en el tiempo. Si  $N = \infty$ , entonces  $\mathbf{K}(k)$  es una matriz constante de  $r \times n$ . El diseño de sistemas de control basado en dicho índice de desempeño cuadrático depende de obtener la matriz  $\mathbf{K}(k)$ . La característica principal de esta ley de control óptimo basada en un índice de desempeño cuadrático es que es una función lineal del vector de estados  $x(k)$ . Esta realimentación de estado requiere que todos los estados estén disponibles para realimentarse, siendo así es conveniente representar el sistema en términos de variables de estado medibles si no se pueden estimar y se utilizarían variables de estado estimadas u observadas para generar señales de control óptimo. Cuando utilizamos un control óptimo cuadrático el sistema diseñado será asintóticamente estable, excepto en algunos casos especiales. Hay diferentes enfoques para resolver problemas de control óptimo cuadrático uno de ellos puede ser la técnica de minimización empleando multiplicadores de Lagrange, en el caso estacionario se puede usar el método de Lyapunov. También es importante recalcar que cuando un sistema de control óptimo se diseña en el espacio de estados se deben verificar las características de respuesta en frecuencia, en algunos casos es necesario una compensación específica para efectos de ruido de no obtenerse buenos resultados se modificaría el índice de desempeño.

## 17.2 PROGRAMACIÓN DINÁMICA

### 17.2.1 Introducción general al principio de optimalidad

Programación dinámica es un medio eficaz para la toma de decisiones secuenciales. Su base es el  $\mathfrak{R}$ . El principio de optimalidad de Bellman dice "Una acción de control óptima tiene la propiedad de que, independientemente del estado inicial y la decisión inicial, las decisiones restantes deben constituir una acción óptima con respecto al estado resultante de la primera decisión." Una "decisión" es una opción de control en un momento determinado y la "acción de control" es la secuencia de control (o función)

Figure 17.1: Trayectorias alternativas para ir de  $a$  hasta  $l$



Consideremos los nodos de la figura 17.1 como los estados, en sentido general. Una decisión es la elección de trayectorias alternativas dejando un nodo dado. El objetivo es pasar de un estado  $a$  otro  $l$  con un costo mínimo. Un costo es asociado a cada segmento de la gráfica lineal. Definimos  $J_{ab}$  como el costo entre  $a$  y  $b$ .  $J_{bd}$  es el costo entre  $b$  y  $d$ , etc. Para la trayectoria  $a, b, d, l$  el costo total es  $J = J_{ab} + J_{bd} + J_{dl}$  y la trayectoria óptima (acción de control) se define por

$$\min J = \min [J_{ab} + J_{bd} + J_{dl}, J_{ab} + J_{be} + J_{el}, J_{ac} + J_{ch} + J_{hl}, J_{ac} + J_{ck} + J_{kl}] \quad (17.6)$$

Si el estado inicial es  $a$  y si la decisión inicial es ir a  $b$ , entonces el camino de  $b$  a  $l$  se debe seleccionar de manera óptima si la ruta global de  $a$  a  $l$  debe ser óptima. La decisión final es ir a  $c$ , entonces el camino de  $c$  a  $l$  se debe seleccionar de manera óptima.

Sea  $g_b$  y  $g_c$  el costo mínimo para  $b$  y  $c$  respectivamente, para  $l$ . Entonces  $g_b = \min [J_{bd} + J_{dl}, J_{be} + J_{el}]$  y  $g_c = \min [J_{ch} + J_{hl}, J_{ck} + J_{kl}]$ . El principio de optimalidad permite que la ecuación (17.6) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$g_a \triangleq \min J = \min [J_{ab} + g_b, J_{ac} + g_c] \quad (17.7)$$

la característica mas importante es que la cantidad que debe reducirse constará de dos partes:

1. La parte que se le atribuye a la decisión actual como  $J_{ab}$  y  $J_{ac}$
2. La parte que representa el valor mínimo de todas las funciones de costo, comenzando con el estado que resulta de la primera decisión

El principio de optimalidad sustituye el elegir entre todas las alternativas por una secuencia de decisiones de menos alternativas. La programación dinámica nos permite concentrarnos en una secuencia de decisiones actuales en lugar de estar preocupados por todas las decisiones de forma simultánea. Dividir los costos en dos partes, energía y característica, es normal, pero estas partes no necesariamente aparecen como una suma. Veamos un simple ejemplo del método

**Ejemplo 1.**

Dados  $N$  números  $x_1, x_2, \dots, x_n$  encontrar el más pequeño

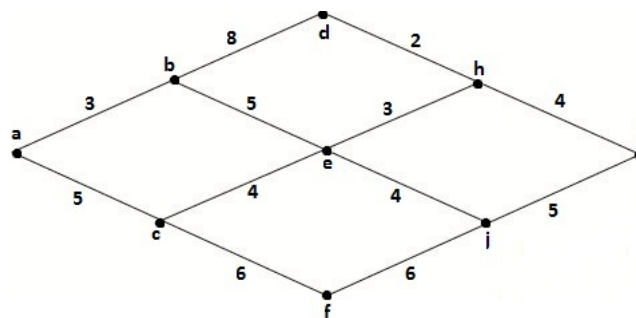
En lugar de considerar todos los  $N$  números simultaneamente, definimos  $g_k$  como el mínimo de  $x_k$  hasta  $x_n$ . Entonces  $g_n = x_n$ ,  $g_{N-1} = \min \{x_{N-1}, g_N\}$ ,  $g_{N-2} = \min \{x_{N-2}, g_{N-1}\}, \dots$ ,  $g_k = \min \{x_k, g_{k+1}\}$ . Al continuar eligiendo entre dos alternativas finalmente lleva a  $g_1 = \min \{x_1, g_2\} = \min \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$

El resultado deseado  $g_1$  no tiene que ser único, ya que más de un número puede tener el mismo valor, el más pequeño. La naturaleza recursiva de la fórmula  $g_k = \min \{x_k, g_{k+1}\}$  es típico de todas las soluciones de programación dinámica discreta.

**Ejemplo 2.**

Usar la programación dinámica para encontrar la trayectoria de mínimo costo entre el nodo  $a$  y el nodo  $l$  de la figura 17.2 los segmentos de línea sólo puede ser atravesada de izquierda a derecha, los costos del trayecto se muestran al lado de cada segmento

Figure 17.2: Trayectorias del ejemplo



Definimos  $g_k$  como el costo mínimo de un nodo general  $k$  a  $l$ . Obviamente  $g_l = 0$ . Como solo hay un camino admisible de  $h$  a  $l$ ,  $g_h = 4$ . De la misma forma  $g_j = 5$ ,  $g_d = 2 + g_h = 6$ ,  $g_f = 6 + g_j = 11$ . El primer punto donde deber ser tomada una decisión es en el nodo  $e$ .  $g_e = \min \{3 + g_h, 4 + g_j\} = \min \{3 + 4, 4 + 5\} = 7$ . La mejor trayectoria de  $e$  a  $l$  es la que atraviesa a  $h$ . Encontramos que  $g_b = \min \{8 + g_d, 5 + g_e\} = 12$ ,  $g_c = \min \{4 + g_e, 6 + g_f\} = 11$  y  $g_a = \min \{3 + g_b, 5 + g_c\} = 15$ . El costo mínimo es 15 y es el de la trayectoria que atraviesa  $a, b, e, h, l$ .

El procedimiento que se hizo anteriormente responde las preguntas: si la decisión pasada hace que la trayectoria hace que pase por el punto  $k$ , cual es la mejor decisión para tomar, a partir de ese punto?

### 17.2.2 Aplicación del control optimo en tiempo discreto

Para hacer la transición desde el caso más simple a uno general se hacen las siguientes analogías, el grafico del problema anterior es una representación de los posibles estados (los nodos), en tiempo discreto puntos  $t_k$ . El punto  $a$  es en  $t_0$ ,  $b$  y  $c$  en  $t_1$ ,  $\dots$ ,  $l$  en  $t_4$ . La elección de las posibles direcciones, hacia arriba o abajo de "e", es análoga a la del conjunto de controles admisibles. La selección de un control  $u(k)$  es análoga a la selección de una dirección de salida de un nodo dado  $x(k)$ . Los segmentos de línea conectados a los nodos juegan el mismo papel que la ecuación diferencial

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

ya que ambos determinan el siguiente nodo  $x(k+1)$

#### *Ejemplo 3*

Consideremos el siguiente sistema escalar  $x(k+1) = x(k) + u(k)$  con las siguientes condiciones de frontera  $x(0) = 0$  y  $x(3) = 3$ , encontrar  $u(0)$ ,  $u(1)$  y  $u(2)$  de tal forma que mimimicen  $J = \sum_{k=0}^2 \{u(k)^2 + \Delta t_k^2\}$  este criterio de desempeño es la suma de tres hipotenusas en el plano  $tx$ . Esta es una forma del problema de mínima distancia y la secuencia optima de puntos  $x(k)$  que se sitúan sobre una línea recta en el plano  $tx$ . Verificar este resultado servirá para ilustrar el procedimiento de la programación dinámica.

Sea  $g(x(k))$  el costo mínimo de  $x(k)$  al punto terminal. puesto que  $x(3)$  es el punto final,  $g(x(3)) = 0$ , entonces

$$\begin{aligned}
g(x(2)) &= \min_{u(2)} \{ \text{costo de } x(2) \text{ hasta el punto terminal} \} \\
&= \min_{u(2)} \left\{ u(2)^2 + \Delta t_2^2 + g(x(3)) \right\}
\end{aligned} \tag{17.8}$$

Esta minimización no esta restringida ya que  $x(3)$  debe ser igual a 3. Usando  $x(3) = x(2) + u(2)$  se encuentra que  $u(2) = 3 - x(2)$ . Para cualquier  $x(2)$ , existe un unico  $u(2)$ . Esto es analogo a la decisión en los puntos  $h$  y  $j$  del ejemplo anterior.

Por conveniencia, sea  $\Delta t_k = 1$ . Entonces  $g(x(2)) = [3 - x(2)]^2 + 1$ . Retrocediendo un estado,  $g(x(1)) = \min_{u(1)} \left\{ u(1)^2 + 1 + g(x(2)) \right\}$ . Usando  $x(2) = x(1) + u(1)$  induce a

$$g(x(1)) = \min_{u(1)} \left\{ u(1)^2 + 2 + [3 - x(1) - u(1)]^2 \right\} \tag{17.9}$$

No hay restricciones en  $u(1)$ , por lo que la minimización se puede lograr por  $\frac{\partial}{\partial u(1)} \left\{ u(1)^2 + 2 + [3 - x(1) - u(1)]^2 \right\} = 0$  esto da  $u(1) = [3 - x(1)] / 2$  y entonces

$$g(x(1)) = \left[ 3 - x(1) - \frac{3 - x(1)}{2} \right]^2 + 2 + \left[ \frac{3 - x(1)}{2} \right] \tag{17.10}$$

Esto se utiliza junto con  $x(1) = x(0) + u(0)$  en  $g(x(0)) = \min_{u(0)} \left\{ u(0)^2 + 1 + g(x(1)) \right\}$ . Al miminizar nuevamente tenemos  $u(0) = [3 - x(0)] / 3$ . Ya que  $x(0) = 0$  esta dada por  $u(0) = 1$ , de la ecuación diferencial se obtiene  $x(1) = 1$ . Esto se usa en la expresión calculada anteriormente para dar  $u(1) = 1$ . Entonces  $x(2) = x(1) + u(1) = 2$  y  $u(2) = 3 - x(2) = 1$ . Finalmente  $x(3) = x(2) + u(2) = 3$ , tenga en cuenta que la secuencia  $x(0), x(1), x(2), x(3)$  esta sobre una linea recta en el espacio  $tx$  como se esperaba

Difinimos  $g(x(k))$  como el mínimo costo del proceso, iniciando en  $t_k, x(k)$ . Obviamente  $g(x(N)) = S(x(N))$ . Entonces el pricipio de optimalidad es

$$g(x(N-1)) = \min_{u(N-1)} \{ L(x(N-1), u(N-1)) + g(x(N)) \} \tag{17.11}$$

La ecuación  $x(k+1) = f(x(k), u(k))$  se utiliza para eliminar  $x(n)$ . La minimización con respecto a  $u(N-1)$  se lleva a cabo mediante el desarrollo del gradiente con respecto a  $u(N-1)$  igual a cero (si no hay restricciones  $u$ ), o por un cálculo por computador. En cualquier caso la  $u(N-1)$  óptima debe ser obtenida para cada  $x(N-1)$  posible. Además  $g(x(N-1))$  de ser almacenadas para la siguiente etapa, esto continua etapa por etapa esto es

$$\mathbf{g}(x(k)) = \min_{u(k)} \{ \mathbf{L}(x(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{g}(x(k+1)) \} = \quad (17.12)$$

$$\min_{u(k)} \{ \mathbf{L}(x(k), u(k)) + \mathbf{g}(f(x(k), \mathbf{u}(k))) \}$$

La ecuación anterior es muy útil y da un resultado general. Es la clave para la solución de muchos problemas de control óptimo en tiempo discreto. Esta ecuación diferencial no lineal tiene la condición de frontera  $\mathbf{g}(x(N)) = \mathbf{S}(x(N))$ . La solución a la ecuación anterior da la solución al control óptimo en cada etapa así como la trayectoria óptima. La solución a esta puede tener un enfoque computacional, esto es, una red discretizada de posibles  $x(k)$  y  $u(k)$  los valores se determina en cada instante. El resultado del paso hacia atrás en el tiempo a través de esta red consiste en una tabla de  $u^*(k)$  óptima para cada valor de  $x(k)$ . Esto es más útil para funciones de costo cuadrático.

### 17.2.3 Programación dinámica enfocada al control óptimo en tiempo continuo

La programación dinámica se aplica de manera similar a los sistemas de tiempo continuo. El costo de operación del sistema en términos generales tiempo y estado  $t, x(t)$  están definidos como

$$\mathbf{g}(x(t), t_f - t) \triangleq \min_{u(t)} \left\{ \mathbf{S}(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} \mathbf{L}(x(t), \mathbf{u}(t), t) dt \right\} \quad (17.13)$$

esta integral se puede expresar de la siguiente forma

$$\mathbf{g}(x(t), t_f - t) \triangleq \min_{u(t)} \left\{ \mathbf{S}(x(t_f), t_f) + \int_{t+\delta t}^{t_f} \mathbf{L}(x(t), \mathbf{u}(t), t) dt + \int_t^{t+\delta t} \mathbf{L}(x(t), \mathbf{u}(t), t) dt \right\} \quad (17.14)$$

El principio de optimalidad dice que si el costo es mínimo, entonces el costo de  $t + \delta t$ ,  $x(t + \delta t)$  también debe ser mínimo. Los dos primeros términos en el lado derecho de la ecuación anterior por lo tanto debe ser igual a  $g(x(t + \delta t), t_f - t - \delta t)$  para que

$$g(x(t), t_f - t) = \min_{u(t)} \left\{ g(x(t + \delta t), t_f - t - \delta t) + \int_t^{t+\delta t} L(x(t), u(t), t) dt \right\} \quad (17.15)$$

para un  $\delta t$  muy pequeño

$$\int_t^{t+\delta t} \mathbf{L}(x(t), \mathbf{u}(t), t) dt \cong \mathbf{L}(x(t), \mathbf{u}(t), t) \delta t \text{ y } x(t + \delta t) \cong x(t) + \dot{x} \delta t \quad (17.16)$$

La expansión en series de Taylor da

$$g(x(t + \delta t), t_f - t - \delta t) \cong g(x(t), t_f - t) + [\nabla_x g]^T \dot{x} \delta t - \frac{\partial g}{\partial t_r} \delta t \quad (17.17)$$

donde  $t_r \triangleq t_f - t$  que es el tiempo que queda. usando esto en la ecuación (17.15) tenemos

$$g(x(t), t_r) = \min_{u(t)} \left\{ g(x(t), t_r) + [\nabla_x g]^T \dot{x} \delta t - \frac{\partial g}{\partial t_r} \delta t + L \delta t \right\} \quad (17.18)$$

Por definición  $g(x(t), t_r)$  es una función exclusiva del estado actual y el tiempo restante (y no una función de  $u(t)$ ) por lo tanto la ecuación (17.18) conduce a la ecuación diferencial parcial de *Hamilton-Jacobi-Bellman* (H.J.B)

$$\frac{\partial g}{\partial t_r} = \min_{u(t)} \left\{ L(x(t), u(t), t) + [\nabla_x g]^T \dot{x} \right\} \quad (17.19)$$

La condición de frontera es  $g(x(t), t_r) |_{t_r=0} = S(x(t_f), t_f)$ . La ecuación (17.19) es la contraparte en tiempo continuo de la ecuación (17.12). Es la clave más importante para resolver los problemas de tiempo continuo de control óptimo. Ya sea que se puede resolver o no y con qué nivel de dificultad, depende de la clase de sistema, función de costo, controles admisibles y las limitaciones del estado. El control óptimo es el que minimiza el lado derecho de la ecuación (17.19). Si no hay restricciones a  $u(t)$ , es decir, el conjunto admisible  $U$  es todo el espacio  $U^r$ , entonces se puede minimizar mediante la diferenciación con respecto a  $u(t)$  y hacer el vector resultante del gradiente cero. Esto nos da la condición necesaria para la optimalidad

$$\frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u} \nabla_x g = 0 \quad (17.20)$$

Si el sistema es lineal,  $\dot{x} = Ax + Bu$  y  $\frac{\partial f}{\partial u} = B^T(t)$ . Si la función de pérdida  $L$  es de segundo grado, entonces  $\frac{\partial L}{\partial u} = 2Ru(t)$  de manera que hace óptima  $u(t)$  para la versión continua del problema LQ que viene dada por

$$u^*(t) = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \nabla_x g(x(t), t_r) \quad (17.21)$$

#### ***Ejemplo 4.***

- Determinar la ley de control óptimo para el sistema

$$\dot{x} = u$$

con el índice

$$J = \int_0^{t_1} (x^2 + u^2) dt$$

entonces tenemos que el hamiltoniano es

$$H = x^2 + u^2 + \frac{\partial V}{\partial x} u$$

se minimiza esta hamiltoniano

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

lo que da

$$u^* = -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x}$$

se forma la hamiltoniana mínima

$$H^* = x^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2$$

llegamos a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\frac{\partial V}{\partial t} + x^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 = 0$$

con la condición de frontera

$$V(x(t_1), t_1) = 0$$

Una forma de resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman es asumir una solución, y comprobar si satisface la ecuación y las condiciones de frontera. Supongamos una solución de la forma

$$V(x, t) = k(t) x^2$$

en donde  $k(t)$  es una función a ser determinada, tenemos entonces:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2k(t) x$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \dot{k} x^2$$

Por tanto la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman se convierte en

$$\dot{k} x^2 + x^2 - \frac{1}{4} (4k^2 x^2) = 0$$

esto es

$$\dot{k} + 1 - k^2 = 0$$

de  $V(t_1) = 0$  se tiene que  $k(t_1) = 0$  la solución es

$$k(t) = \tanh(t_1 - t)$$

y por lo tanto

$$u^* = -\tanh(t_1 - t) x(t)$$

## 17.3 LQ y LQR

### 17.3.1 Lq en tiempo discreto

Considerar el sistema  $x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k)$  con  $x(0)$  conocido. El objetivo es encontrar la secuencia de control  $u(k)$  que minimice la función cuadrática de costos para el regulador de tiempo finito

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}(N)^T \mathbf{M} \mathbf{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{x^T(k) \mathbf{Q} x(k) + u^T(k) \mathbf{R} u(k)\} \quad (17.22)$$

$\mathbf{M}$  y  $\mathbf{Q}$  son matrices simétricas semidefinidas positivas de  $n \times n$  y  $\mathbf{R}$  es una matriz simétrica de  $r \times r$  definida positiva. No hay restricciones en  $u(k)$ . Sea  $g[x(k)] = \min$  costo de  $k$ ,  $x(k)$  para  $N$ ,  $x(N)$ , tenemos entonces

$$g[x(k)] = \min_{u(k)} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} x(k) + \frac{1}{2} u^T(k) \mathbf{R} u(k) + \mathbf{g}[x(k+1)] \right\} \quad (17.23)$$

Las condiciones de frontera son  $\mathbf{g}[x(N)] = \frac{1}{2} \mathbf{x}(N)^T \mathbf{M} \mathbf{x}(N)$ , Esta ecuación se resuelve asumiendo la solución

$$\mathbf{g}[x(k)] = \frac{1}{2} \mathbf{x}(k)^T \mathbf{P}(N-k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{x}(k)^T \mathbf{V}(N-k) + Z(N-k) \quad (17.24)$$

Donde  $P$  es una matriz de  $n \times n$ ,  $V$  es un vector de  $n \times 1$  y  $Z$  es un escalar. Ellos serán seleccionados en la ecuación (17.24) de tal forma que cumpla con la ecuación (17.23) y esta ecuación quedaría:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} x(k)^T \mathbf{P}(N-k) x(k) + x(k)^T \mathbf{V}(N-k) + Z(N-k) = \\ & \min_{u(k)} \left\{ \frac{1}{2} x^T(k) \mathbf{Q} x(k) + \frac{1}{2} u^T(k) \mathbf{R} u(k) + \frac{1}{2} x(k+1)^T \mathbf{P}(N-k-1) x(k+1) \right\} \end{aligned}$$

$$+x(k+1)^T V(N-k-1) + Z(N-k-1) \} \quad (17.25)$$

Sustituyendo  $x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k)$  y reagrupando, el lado derecho de la ecuación (17.25) quedaria:

$$\begin{aligned} &= \min_{u(k)} \left\{ \frac{1}{2} x(k)^T [\mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(N-k-1) \mathbf{A}] x(k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} u(k)^T [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(N-k-1) \mathbf{B}] u(k) \right. \\ &\quad \left. + u(k)^T [\mathbf{B}^T V(N-k-1) + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(N-k-1) \mathbf{A}x(k)] \right. \\ &\quad \left. + x(k)^T \mathbf{A}^T V(N-k-1) + Z(N-k-1) \right\} \end{aligned} \quad (17.26)$$

Ya que no hay restricciones en  $u(k)$  la minimización de  $u(k)$  se encuentra solucionando  $\partial \{ \} / \partial u(k) = 0$  el resultado de esto es

$$\begin{aligned} u^*(k) &= - [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(N-k-1) \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}^T [V(N-k-1) + \mathbf{P}(N-k-1) \mathbf{A}x(k)] \quad (17.27) \\ &= \mathbf{F}_c(k) V(N-k-1) - \mathbf{G}(k) x(k) \end{aligned}$$

El problema sigue siendo encontrar las matrices de las ganancias de la retroalimentación y alimentación adelante  $\mathbf{G}(k)$  y  $\mathbf{F}_c(k)$  y la entrada externa  $V(k)$ . Reorganizando y simplificando la parte derecha de la ecuación (17.26) tenemos:

$$= \frac{1}{2} x(k)^T [\mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(N-k-1) \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P}(N-k-1) \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(N-k-1) \mathbf{A}] x(k)$$

$$\begin{aligned}
& +x(k)^T [\mathbf{A}^T V(N-k-1) - \mathbf{A}^T \mathbf{P}(N-k-1) \mathbf{B} \mathbf{U} \mathbf{B}^T V(N-k-1)] \\
& + \left[ Z(N-k-1) - \frac{1}{2} V(N-k-1)^T \mathbf{B} \mathbf{U} \mathbf{B}^T V(N-k-1) \right]
\end{aligned}$$

Donde  $U \triangleq [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(N-k-1) \mathbf{B}]^{-1}$  Igualando la parte izquierda con la derecha, la forma asumida para  $g[x(k)]$  puede ser obligada a ser una solución para todos los  $x(k)$  exigiendo que los términos cuadráticos, los términos lineales y los términos que no involucren a  $x$  todos igualados individualmente:

$$\mathbf{P}(N-k) = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(N-k-1) \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P}(N-k-1) \mathbf{B} \mathbf{U} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(N-k-1) \mathbf{A} \quad (17.28)$$

$$V(N-k) = \mathbf{A}^T V(N-k-1) - \mathbf{A}^T \mathbf{P}(N-k-1) \mathbf{B} \mathbf{U} \mathbf{B}^T V(N-k-1) \quad (17.29)$$

$$Z(N-k) = Z(N-k-1) - \frac{1}{2} V(N-k-1)^T \mathbf{B} \mathbf{U} \mathbf{B}^T V(N-k-1) \quad (17.30)$$

Las condiciones de frontera son  $\mathbf{P}(N-N) = \mathbf{M}$ ,  $V(N-N) = 0$ ,  $Z(N-N) = 0$ . Una solución con ayuda de un software facilmente da  $\mathbf{P}(N-k)$ , normalmente se resuelve primero la ecuación (17.28) Entonces su solución  $\mathbf{P}(N-k)$  se utiliza como una matriz de coeficientes conocidos mientras se resuelve (17.29) para  $V(N-k)$ . Entonces  $V$  actua como una función de forzado en (17.30) de hecho (17.30)no tiene que ser resuelta si el único interes es el de encontrar el control óptimo.  $Z(N-k)$  solo se necesita si  $J_{min}$  debe calcularse. Para la función de costo considerada aqui, (17.29) es una ecuación homogenea con condiciones iniciales nulas, así  $V(N-k)$  es cero para todas las etapas. Por lo tanto (17.29) no es necesario. El resultado de la ecuación (17.28) es el principal, si definimos  $k' = N-k$  un índice de ejecución tiempo atrás y sea  $\mathbf{P}(N-k) = \mathbf{M}(k')$ . La introducción de dos nuevas variables intermedias  $K$  y  $P_1$  permiten que la ecuación (17.28) se sustituya por

$$\mathbf{M}(k') = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1(k'-1) \mathbf{A} + \mathbf{Q} \quad (17.31)$$

$$\mathbf{K}(k') = \mathbf{M}(k') \mathbf{B} [\mathbf{B}^T \mathbf{M}(k') \mathbf{B} + \mathbf{R}]^{-1} \quad (17.32)$$

$$\mathbf{P}_1(k') = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k') \mathbf{B}^T] \mathbf{M}(k') \quad (17.33)$$

La condición inicial en (17.31) es  $\mathbf{M}(0) = \mathbf{M}$ . El control óptimo de retroalimentación viene dado por

$$\mathbf{u}^*(k) = -\mathbf{K}^T(k' - 1) \mathbf{A}x(k) \quad (17.34)$$

de tal forma que la matriz de ganancia de retroalimentación es  $\mathbf{G}(k) = \mathbf{K}^T(k' - 1) \mathbf{A}$ .

La secuencia de control óptimo puede ser encontrada para el mismo sistema lineal pero con una función de costo mas general

$$J = \frac{1}{2} [\mathbf{x}(N) - x_d]^T \mathbf{M} [\mathbf{x}(N) - x_d] \quad (17.35)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ [\mathbf{x}(k) - \eta(k)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{x}(k) - \eta(k)] + \mathbf{u}(k)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \right\}$$

Esta función de costo intenta hacer que  $x(k)$  siga la secuencia de  $\eta(k)$ . La expansión de los términos cuadráticos de  $J$  muestra que hay cuatro condiciones adicionales debido a  $x_d(k)$  y a  $\eta(k)$  cambiando así las ecuaciones (17.29) y (17.30) por

$$\mathbf{V}(N - k) = \mathbf{A}^T \mathbf{V}(N - k - 1) - \mathbf{A}^T \mathbf{P}(N - k - 1) \mathbf{B} \mathbf{U} \mathbf{B}^T \mathbf{V}(N - k - 1) - \mathbf{Q} \eta(k) \quad (17.36)$$

$$Z(N-k) = Z(N-k-1) - \frac{1}{2}V^T(N-k-1)\mathbf{B}\mathbf{U}\mathbf{B}^T V(N-k-1) + \frac{1}{2}\eta(k)^T \mathbf{Q}\eta(k) \quad (17.37)$$

La ley de control es

$$u^*(k) = -K^T(k-1)\mathbf{A}x(k) - \mathbf{U}(k-1)\mathbf{B}^T V(k-1) \quad (17.38)$$

La ganancia de retroalimentación es

$$G(k) = [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T P(N-k-1)\mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(N-k-1)\mathbf{A} \quad (17.39)$$

y la ganancia de alimentación adelante es

$$F_c(k) = -[R + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(N-k-1)\mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}^T \quad (17.40)$$

### 17.3.2 Lq en tiempo continuo

Consideremos el sistema lineal  $\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$ . En el control óptimo se pretende minimizar el criterio de desempeño cuadrático. No hay restricciones a  $u(t)$  y se fija un  $t_f$

$$\frac{\partial g}{\partial t_r} = \min_{u(t)} \left\{ [\mathbf{x}(t) - \eta(t)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{x}(t) - \eta(t)] + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t) + (\nabla_x g)^T [\mathbf{A}x + \mathbf{B}u] \right\}$$

con condiciones de frontera

$$g[x(t), t_r] |_{t_r=0} = [x(t_f) - x_d]^T M [x(t_f) - x_d]$$

ya que  $u(t)$  no está restringido, tomando la derivada con respecto a  $u(t)$  igual a cero da  $u^*(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}\mathbf{B}^T \nabla_x g[x(t), t]$ , la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman se reduce a

$$\frac{\partial g}{\partial t_r} = [\mathbf{x}(t) - \eta(t)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{x}(t) - \eta(t)] + (\nabla_x g)^T \mathbf{A}x(t) - \frac{1}{4} (\nabla_x g)^T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \nabla_x g$$

Esta ecuación diferencial parcial no lineal puede ser resuelta asumiendo una solución  $g[x(t), t_r] = x^T(t) \mathbf{P}(t_r) x(t) + x^T(t) V(t_r) + Z(t_r)$ , donde  $\mathbf{P}$  es una matriz desconocida de  $n \times n$ ,  $V$  es un vector desconocido de  $n \times 1$  y  $Z$  es un escalar desconocido. Diferenciando las respuestas asumidas y tratando a  $x(t)$  y a  $t$  como variables independientes tenemos

$$\frac{\partial g}{\partial t_r} = x^T(t) \frac{d\mathbf{P}}{dt_r} x(t) + x^T(t) \frac{dV}{dt_r} + \frac{dZ}{dt_r} \text{ y } \nabla_x g = 2\mathbf{P}(t_r) x(t) + V(t_r)$$

Usando esto en la ecuación HJB tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(t) \frac{d\mathbf{P}}{dt_r} x(t) + \mathbf{x}^T(t) \frac{dV}{dt_r} + \frac{dZ}{dt_r} &= \mathbf{x}^T \{ \mathbf{Q} + 2\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{P}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \} \mathbf{x} \\ + \mathbf{x}^T \{ -2\mathbf{Q}\eta + \mathbf{A}^T V - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T V \} &+ \{ \eta^T \mathbf{Q}\eta - \frac{1}{4} V^T \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T V \} \end{aligned}$$

Para que la forma asumida para ser realmente una solución para todo  $x(t)$ , los términos cuadráticos en  $x$ , los términos lineales y los términos no involucrados con  $x$  deben ser igualados individualmente, entonces

$$\frac{dZ}{dt_r} = \eta(t)^T \mathbf{Q}\eta(t) - \frac{1}{4} V^T(t_r) \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T V(t_r) \quad (17.41)$$

$$\frac{dV}{dt_r} = -2\mathbf{Q}\eta(t) + \mathbf{A}^T V(t_r) - \mathbf{P}(t_r) \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T V(t_r) \quad (17.42)$$

Cada matriz que participan en los términos cuadráticos es simétrica, excepto  $\mathbf{x}^T \{2\mathbf{P}\mathbf{A}\} x$ , que se puede escribir como  $\mathbf{x}^T \{ \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \} x + x^T \{ \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \} \mathbf{x}$  el segundo término es siempre cero ya que el matrix es antisimétrica, Todos los términos de la ecuación cuadrática H.J.B. se pueden combinar en la forma  $\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x} = 0$ , se puede concluir que  $\mathbf{P} = 0$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt_r} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (17.43)$$

Las condiciones de frontera son  $P(t_r = 0) = M$ ,  $V(t_r = 0) = -2Mx_d$  y  $Z(t_r = 0) = x_d^T M x_d$   
La ecuación anterior es conocida como ecuación diferencial matricial de Riccati, el resultado

de esta se puede usar al resolver la ecuación (17.41) y así integrarse la ecuación (17.40), el sistema de retroalimentación se representa en las siguientes figuras

Figure 17.3: Realimentación control óptimo

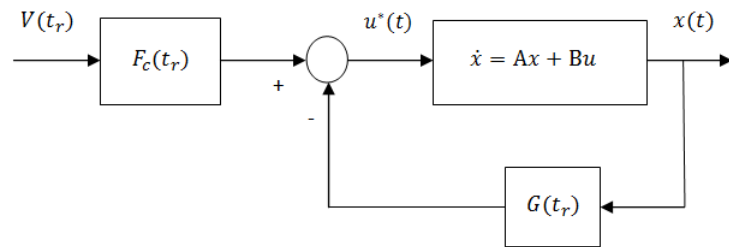
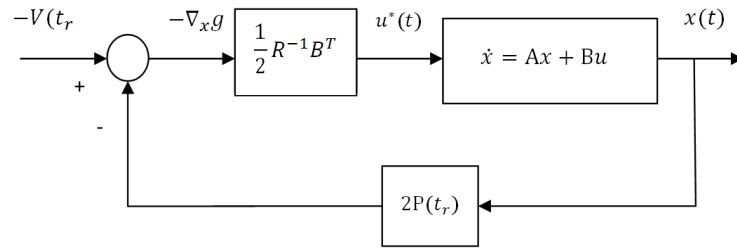


Figure 17.4: Realimentacion control óptimo



La equivalencia se establece mediante el uso de las relaciones  $G(t_r) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t_r)$  y  $F_c(t_r) = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T$ . La forma de la ecuación matricial de Riccati que se encuentra con mayor frecuencia en la literatura de control es

$$-\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q} \quad (17.44)$$

La forma alternativa expresada en términos del tiempo restante,  $t_r$ , tiene un cambio de signo en el término derivativo, ya que  $d\{\}/dt_r = -d\{\}/dt$ . Esta ecuación diferencial no lineal se puede transformar en un par de ecuaciones diferenciales lineales, de forma análoga al tratamiento de la ecuación de Riccati en tiempo discreto.

Sea  $\mathbf{P} = \mathbf{E}\mathbf{F}^{-1}$ , ya que  $\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}$ ,  $d\{\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\}/dt = 0$  o

$\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}d\{\mathbf{F}^{-1}\}/dt = 0$  o  $d\{\mathbf{F}^{-1}\}/dt = -\mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$  usando la ecuación (17.44) y posmultiplicando por  $\mathbf{F}$  tenemos

$$-\left(\dot{\mathbf{E}} - \mathbf{E}\mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}}\right) = \mathbf{E}\dot{\mathbf{F}}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{F} + \mathbf{A}^T\mathbf{E} - \mathbf{E}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{E} + \mathbf{Q}\mathbf{F}$$

Si los términos lineales en E y F son equivalentes, es decir

$$-\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{A}^T\mathbf{E} + \mathbf{Q}\mathbf{F}$$

Entonces los términos no lineales restantes dan

$$\mathbf{E}\mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{E}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{F} - \mathbf{E}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{E}$$

cuando este es premultiplicado por  $[\mathbf{E}\mathbf{F}^{-1}]^{-1}$  se encuentra la segunda ecuación lineal

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{A}\mathbf{F} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{E}$$

Las dos ecuaciones anteriores se pueden escribir de forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{F} \\ \dot{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ E \end{bmatrix} \quad (17.45)$$

La matriz de  $2n \times 2n$  de coeficientes del lado derecho de la ecuación anterior se conoce como el Hamiltoniano  $H$ . Su forma diferente no debe confundirse con la versión de tiempo discreto. Sin embargo, es similar al caso discreto, este  $H$  también tiene sus valores propios tienen lugar en parejas estables e inestables. Es decir, si  $\lambda$  es un valor propio de  $\mathbf{H}$ , entonces también lo es  $-\lambda$ . La ecuación anterior (17.45) tiene una solución en términos de matriz exponencial, esto es

$$\begin{bmatrix} F(t) \\ E(t) \end{bmatrix} = \exp\{(t - t_0) H\} \begin{bmatrix} F(t_0) \\ E(t_0) \end{bmatrix} \quad (17.46)$$

Para cualquier par  $t, t_0$ . Ya que las condiciones iniciales en  $\mathbf{P}$  por lo tanto en  $\mathbf{E}$  y en  $\mathbf{F}$  se dan para  $t_f$  y no para  $t_0$  la ecuación (17.46) no se puede usar, existen dos métodos posibles modificaciones, es sustituir  $t_0$  por  $t_f$ . El primer método invierte a la variable tiempo-restante  $t_r$  y cambia el signo a los términos derivativos. Ya que  $t = t_f$  implica  $t_r = 0$  esto es

$$\begin{bmatrix} F(t_r) \\ E(t_r) \end{bmatrix} = \exp\{-t, H\} \begin{bmatrix} F(t_r = 0) \\ E(t_r = 0) \end{bmatrix} \quad (17.47)$$

El otro método evalúa la ecuación (17.46) con el tiempo general  $t$  remplazado por el tiempo final  $t_f$  y el tiempo inicial remplazado por el tiempo actual  $t$ , esto da

$$\begin{bmatrix} F(t_f) \\ E(t_f) \end{bmatrix} = \exp\{(t_f - t) H\} \begin{bmatrix} F(t) \\ E(t) \end{bmatrix} \quad (17.48)$$

Invirtiendo la matriz exponencial, que solo cambia el signo del exponente para resolver los valores actuales en la ecuación (17.46) con  $t_0$  remplazado por  $t_f$ . Ya que  $\mathbf{P}(t = t_f)$  entonces decimos que  $\mathbf{E}(t = t_f) \equiv \mathbf{E}(t_r = 0) = \mathbf{M}$  y  $\mathbf{F}(t_r = 0) = \mathbf{I}$  Esta relación de transformación similitud entre  $H$  y su forma de Jordan  $J = \text{Diag}[J_s J_u]$  es  $H = T J T^{-1}$  donde como antes  $J_s$  y  $J_u$  contienen los bloques estables e inestables

$$\text{donde } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

es la matriz modal de eigenvectores para  $H$ , con las primeras  $n$  columnas que son asociadas a los eigenvectores estables.

$$\text{Sea } \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

ya que  $\exp\{-t_r H\} = T \text{Diag}[\exp\{-t_r J_s\} \exp\{-t_r J_u\}] T^{-1}$ , la solución de  $\mathbf{P}$  en el tiempo  $t$  dado es

$$\mathbf{P}(t_r) = [T_{21} \exp\{-t_r J_s\} V_{11} + T_{22} \exp\{-t_r J_u\} V_{21}] \quad (17.49)$$

$$+ (T_{21} \exp\{-t_r J_s\} V_{12} + T_{22} \exp\{-t_r J_u\} V_{22}) M]^*$$

$$[T_{11} \exp\{-t_r J_s\} V_{11} + T_{12} \exp\{-t_r J_u\} V_{21}]$$

$$+ (T_{11} \exp\{-t_r J_s\} V_{12} + T_{12} \exp\{-t_r J_u\} V_{22}) M]^{-1}$$

Una vez  $\mathbf{P}(t_r)$  es determinado la ley de control viene dada por

$$u^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \left\{ \mathbf{P}(t_r) \mathbf{x}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{V}(t_r) \right\} \quad (17.50)$$

### 17.3.3 Lqr

El objetivo principal consiste en regular el estado de un modelo lineal en espacio de estados para que llegue a cero, mientras se mantenga bajo el costo debido al esfuerzo de control. La ley de control óptimo resulta ser una de realimentación de estados en la que la ganancia de realimentación se obtiene de una ecuación algebraica de Riccati.

Sea un sistema dinámico lineal descrito por

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \quad (17.51)$$

Se trata de mantener a este sistema en un estado lo más cercano al de reposo  $x = 0$ . El costo correspondiente a las desviaciones del estado de reposo se expresa por

$$J_1 = \int_0^{t_1} x^T \mathbf{Q} x dt + x^T(t_1) \mathbf{S} x(t_1) \quad (17.52)$$

Por otra parte, el costo de la aplicación de una señal de control  $u$  viene dado por

$$J_2 = \int_0^{t_1} \mathbf{u}^T \mathbf{R} u dt \quad (17.53)$$

Las matrices  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{S}$  son matrices semidefinidas positivas, y la matriz  $\mathbf{R}$  es definida positiva. El problema consiste en determinar la señal  $u$  que debe aplicarse en cada instante para que el costo total  $J_1 + J_2$  sea mínimo. Es decir, se trata de minimizar el funcional

$$J = \int_0^{t_1} [x^T \mathbf{Q}x + \mathbf{u}^T \mathbf{R}u] dt + x^T(t_1) \mathbf{S}x(t_1) \quad (17.54)$$

Se supone que  $t_1$  está fijado de antemano, y que el estado final es libre.  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  son matrices simétricas que representan los costos de la desviación del estado y del esfuerzo de control respectivamente. En la mayoría de las aplicaciones serán matrices diagonales, por lo que la funcionales  $J_1$  y  $J_2$  adoptarán normalmente la forma:

$$J_1 = \int_0^{t_1} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \cdots + q_n x_n^2) dt$$

$$J_2 = \int_0^{t_1} (r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2 + \cdots + r_m u_m^2) dt$$

para un sistema con  $n$  variables de estado y  $m$  señales de entrada.

Si el sistema posee una sola entrada, entonces la matriz  $\mathbf{R}$  se convierte en un escalar, por último, pueden existir términos de control terminal, que deberán ser de la forma:

$$\mathbf{x}^T(t_1) \mathbf{S}x(t_1)$$

siendo  $\mathbf{S}$  una matriz simétrica. La hamiltoniana correspondiente a este problema es

$$H = x^T \mathbf{Q}x + \mathbf{u}^T \mathbf{R}u + \frac{\partial V^T}{\partial x} (\mathbf{A}x + \mathbf{B}u) \quad (17.55)$$

haciendo  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$  obtenemos:

$$\mathbf{B}^T \frac{\partial V}{\partial x} + 2\mathbf{R}u = 0 \quad (17.56)$$

por lo tanto  $u^*(x, t)$  esta dado por

$$u^* = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \frac{\partial V}{\partial x} \quad (17.57)$$

Llevando este valor de  $u^*$  a la hamiltoniana se tiene la hamiltoniana minimizada que resulta ser,

$$H^* = x^T \mathbf{Q}x + \frac{\partial V^T}{\partial x} \mathbf{A}x - \frac{1}{4} \frac{\partial V^T}{\partial x} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \frac{\partial V}{\partial x} \quad (17.58)$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman correspondiente es

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{A}x - \frac{1}{4} \frac{\partial V^T}{\partial x} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \frac{\partial V}{\partial x} + x^T \mathbf{Q}x = 0 \quad (17.59)$$

con la condición de frontera

$$V(x, t_1) = \mathbf{x}^T \mathbf{S}x \quad (17.60)$$

Para la integración de (17.59) es razonable adoptar una función de la forma:

$$V(x, t) = x^T \mathbf{P}(t)x \quad (17.61)$$

siendo  $\mathbf{P}(t)$  una matriz real simétrica. Llevando (17.61) a la ecuación de Hamilton- Jacobi- Bellman (17.59) se tiene:

$$\mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}}x + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A}x - x^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}x + x^T \mathbf{Q}x = 0$$

factorizando

$$\mathbf{x}^T \left( \dot{\mathbf{P}} + 2\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} \right) \mathbf{x} = 0 \quad (17.62)$$

La matriz entre paréntesis no es simétrica, puesto que  $\mathbf{P}\mathbf{A}$  no lo es. Se sabe que toda matriz  $\mathbf{M}$  puede escribirse:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_s + \mathbf{M}_a \quad (17.63)$$

en donde  $\mathbf{M}_s$  es simétrica (es decir,  $\mathbf{M}_s = \mathbf{M}_s^T$ ) y  $\mathbf{M}_a$  es antisimétrica (es decir,  $\mathbf{M}_a = -\mathbf{M}_a^T$ ). Para demostrar (17.63) basta sumar y restar  $\mathbf{M}^T/2$  a  $\mathbf{M}$ , con lo que se tiene

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{M}}{2} + \frac{\mathbf{M}^T}{2} + \frac{\mathbf{M}}{2} - \frac{\mathbf{M}^T}{2}$$

y comprobar que  $\mathbf{M}_s = \frac{\mathbf{M}}{2} + \frac{\mathbf{M}^T}{2}$  es simétrica y  $\mathbf{M}_a = \frac{\mathbf{M}}{2} - \frac{\mathbf{M}^T}{2}$  antisimétrica de la ecuación (17.63) se tiene que

$$x^T \mathbf{M}x = x^T \mathbf{M}_s x + x^T \mathbf{M}_a x \quad (17.64)$$

pero como la ecuación anterior da un escalar (17.64) y también

$$x^T \mathbf{M}_a x = x^T \mathbf{M}_a^T x = -x^T \mathbf{M}_a x$$

se tendrá entonces

$$x^T \mathbf{M}x = x^T \mathbf{M}_s x$$

Lo que equivale a decir que la matriz  $M$  asociada a una forma cuadrática puede escogerse simétrica. Además, sabemos que la parte simétrica de una matriz  $\mathbf{M}$  viene dada por:

$$\mathbf{M}_s = \frac{\mathbf{M} + \mathbf{M}^T}{2}$$

Por tanto, toda forma cuadrática  $x^T \mathbf{M} x$  puede escribirse:

$$x^T \mathbf{M}_s x = x^T \frac{\mathbf{M} + \mathbf{M}^T}{2} x$$

Aplicando estas consideraciones a (17.62), para el caso  $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{A}$ , se llega a la siguiente ecuación:

$$\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (17.65)$$

$$\mathbf{P}(t_1) = \mathbf{S}$$

que recibe la denominación de ecuación de Riccati. La resolución de esta ecuación permite obtener  $\mathbf{P}(t)$ , o lo que es igual

$$V(x, t) = x^T \mathbf{P}(t) x$$

La ecuación (17.65) es simétrica, como también lo es la matriz  $\mathbf{S}$  que define las condiciones de frontera, por lo que también lo será la solución  $\mathbf{P}(t)$ . Esta simetría sirve para simplificar el cálculo de  $\mathbf{P}(t)$ . En efecto, a primera vista puede parecer que la expresión (17.65) representa un conjunto de  $n^2$  ecuaciones diferenciales, ya que  $\mathbf{P}(t)$  es una matriz  $n \times n$ . Sin embargo, debido a la simetría de  $\mathbf{P}(t)$  el número de ecuaciones es en realidad de  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Otra propiedad importante de  $\mathbf{P}(t)$  es su carácter definido positivo. Ello se debe a que para todo  $u(t) \neq 0$  el valor de  $J$  (el costo del proceso) debe ser positivo, y por tanto así debe ser  $V(x, t) = x^T \mathbf{P}(t) x$ , lo que impone el carácter definido positivo de  $\mathbf{P}(t)$ .

Una vez determinado  $V(x, t)$  se procede a determinar la ley de control óptimo, que resulta ser:

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \frac{\partial V}{\partial x} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} x \quad (17.66)$$

El resultado es una ley de control lineal, que se ha obtenido a partir de la imposición de un criterio de mínima varianza en las variables de estado y en el esfuerzo de control. Para encontrar la solución de la ecuación de Riccati será necesario imponer condiciones de frontera en  $\mathbf{P}$ , que se obtendrán de los términos de control terminal:

- Si  $J$  posee términos de control terminal, entonces  $\mathbf{P}(T) = \mathbf{S}$ .
- Si no existen dichos términos, entonces  $\mathbf{P}(T) = 0$ .

Un caso especialmente interesante es aquel en que  $t_1$  tienda a  $\infty$ . Entonces se dice que el problema tiene horizonte infinito. En tal caso, la matriz  $P$  se convierte en constante. En efecto, para cualquier par de instantes iniciales  $t_{1a}$  y  $t_{1b}$ , los valores tomados por  $V(x, t_{1a})$  y  $V(x, t_{1b})$  son iguales. Esto último es evidente ya que tanto el sistema como el índice de desempeño son invariantes en el tiempo y por consiguiente una traslación finita en la escala de tiempos no debe afectar al problema (nos va a costar tanto llegar al infinito desde ahora que desde dentro de media hora). Por tanto, la matriz  $P$  es constante. La matriz  $P$  puede determinarse resolviendo la siguiente ecuación

$$\mathbf{A}^T P + P \mathbf{A} - P \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T P + \mathbf{Q} = 0 \quad (17.67)$$

la cual se obtiene de la expresión (17.65), haciendo  $\dot{\mathbf{P}} = 0$ . Esta ecuación recibe la denominación de ecuación de *Riccati degenerada*. La solución de la ecuación (17.67) no es única ya que es una ecuación del segundo grado en  $\mathbf{P}$ . Sin embargo, si se impone la condición de que  $\mathbf{P}$  sea definida positiva, entonces la solución es única. Tendremos, por tanto, una regulación mediante realimentación de variables de estado, con una ley de control lineal y constante en el tiempo.

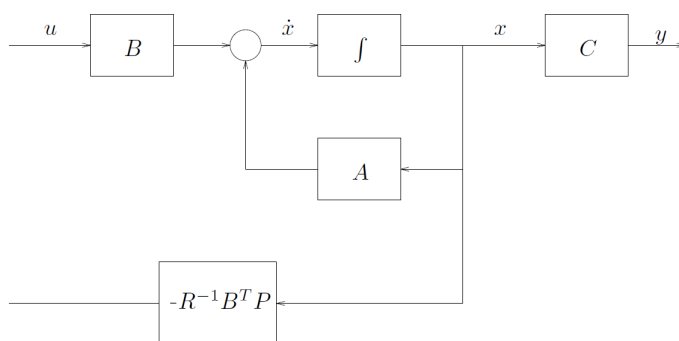
$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_c \mathbf{x}$$

siendo

$$\mathbf{K}_c = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \quad (17.68)$$

Debe observarse en las expresiones anteriores que la ley de control óptimo que se ha determinado es una ley de control lineal. Este es un resultado que ya se había obtenido, a partir de otros supuestos, al estudiar el control de sistemas lineales para su estabilización. La estructura que se obtiene aquí, que es la que se representa en la figura 17.5

Figure 17.5: Diagrama de bloques



es la misma que se encontró allí. Esta identidad de estructuras constituye uno de los puntos más sobresalientes de la teoría del control moderno. Una propiedad que tiene el sistema de control representado en la figura es que es estable. En efecto, el sistema en lazo cerrado que resulta de aplicar la ley de control (17.66) viene dado por:

$$\dot{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_c) x \quad (17.69)$$

ecuación que rige la evolución del estado en lazo cerrado. Es fácil ver que la función

$$V(x) = x^T \mathbf{P} x \quad (17.70)$$

es una función de Liapunov para este sistema. En efecto, en primer lugar se tiene que puesto que  $P$  es definida positiva,  $V(x)$  lo será a su vez. Por otra parte se tiene que

$$\frac{dV}{dt} = (\dot{x}^T \mathbf{P} x + x^T \mathbf{P} \dot{x}) \quad (17.71)$$

teniendo presente las expresiones (17.69) y (17.67) se tiene

$$\frac{dV}{dt} = -x^T (\mathbf{Q} + \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}) x \quad (17.72)$$

es decir  $dV/dt < 0$  para todo  $x$ , es decir  $V(x)$  cumple las propiedades que definen una función de Liapunov y por lo tanto, el sistema es estable. Puesto que  $\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$  es definida no negativa entonces para que  $dV/dt < 0$  la matriz  $\mathbf{Q}$  tiene que ser definida positiva. Es decir, si  $\mathbf{Q}$  es definida positiva entonces la estabilidad asintótica está garantizada. La aplicación del anterior resultado requiere algunas matizaciones. En particular, conviene resaltar el hecho de que se requiere que  $\mathbf{Q}$  sea definida positiva. Consideremos el sistema

$$\dot{x} = x + u$$

con el índice de desempeño

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^2 dt \quad (17.73)$$

En este índice de desempeño conviene observar que no existen términos en  $x$  (en tal caso es evidente que  $Q = 0$  por lo que  $Q$  no es definida positiva, sino definida no negativa). Es decir que se pondera únicamente el costo de actuación y no el costo de comportamiento. Este tipo de situación no es común en las aplicaciones. No obstante y a los efectos formales que aquí interesan, vamos a continuar analizando este ejemplo. La solución óptima existe y es obviamente  $u^* = 0$ . Lo cual quiere decir que en un sistema en el que lo único que se penaliza es el costo de actuación y no se establecen especificaciones respecto al desempeño, lo mejor es no hacer nada. Pero siguiendo con los aspectos formales sucede que aplicando esa señal (o ley) de control el sistema en lazo cerrado resulta ser

$$\dot{x} = x$$

que es inestable. Esta inestabilidad es debida a que la trayectoria inestable  $e^t$  no contribuye al índice de funcionamiento. Es decir, no se manifiesta en (17.73). Se puede decir que los estados inestables no son observados por el índice de funcionamiento. Ello es debido aunque el sistema es controlable, no es ni observable ni detectable, ya que el modo inestable  $e^t$  no es observable. Conviene recordar que un sistema se dice detectable si los modos inestables son observables. Si todas las trayectorias, o al menos las inestables, son detectadas en la parte  $x^T\mathbf{Q}x$  del

integrando del índice de funcionamiento, entonces la estabilidad asintótica del sistema de control óptimo realimentado queda a garantizar, ya que si algunas de estas variables de estado no convergen a cero el costo óptimo  $J^*$  sería infinito. Todas las trayectorias del sistema se detectarían en  $x^T \mathbf{Q}x$  si  $Q$  es definida positiva. Por tanto el caracter definido positivo de  $\mathbf{Q}$  es una condición suficiente para la estabilidad asintótica del regulador óptimo. Es posible, sin embargo, encontrar una condición menos restrictiva. Supongamos que  $\mathbf{Q}$  es simplemente definida no negativa (lo que no es extraño en la práctica, como se verá en el último ejemplo de esta sección). La propiedad de estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado se conservaría si todas las trayectorias se detectan en la parte  $x^T \mathbf{Q}x$  del integrando del índice de desempeño. Este recibimiento se cumple si el par  $(A, D)$  es completamente observable, en donde  $D$  es cualquier matriz tal que  $\mathbf{D}^T \mathbf{D} = \mathbf{Q}$ .

Para que el sistema sea estable se requiere que  $\dot{V} \leq 0$ , estando  $\dot{V}$  dado por la ecuación (17.72). Supóngase que  $\dot{V}$  es idénticamente nulo a lo largo de una trayectoria que se inicia en un estado inicial no nulo  $x(0)$ . Entonces  $x^T \mathbf{Q}x$  y  $x^T \mathbf{PBR}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}x$  son idénticamente nulos y  $-\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}x$ , el control óptimo para el sistema en lazo cerrado, es también idénticamente nulo. Por consiguiente, las trayectorias del sistema en lazo cerrado son las mismas que las del sistema en lazo abierto, que están dadas por

$$x(t) = e^{\mathbf{A}t} x(0)$$

ahora

$$x^T \mathbf{Q}x = x^T(0) e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A}t} x(0) = x^T(0) e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{D}^T \mathbf{D} e^{\mathbf{A}t} x(0)$$

debe ser idénticamente nulo. Esto contradice la hipótesis de que el par  $(A, D)$  es completamente observable, ya que la observabilidad de  $(A, D)$  implica que  $D e^{\mathbf{A}t} x(0)$  para algún  $t \in [0, \infty)$  si y sólo si  $x(0) = 0$ . En consecuencia es imposible tener  $\dot{V}$  idénticamente nulo a lo largo de una trayectoria que se inicie en un estado no nulo. Con ello queda garantizada la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado para este caso. Se define la salida sintética como

$$y = \mathbf{D}x \tag{17.74}$$

La observabilidad del par  $(A, D)$  implica que el sistema dado por las ecuaciones

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{D}x$$

es completamente observable.

***Ejemplo 5.***

- Sea el sistema definido por la ecuación  $\dot{x} = u$  y la función de desempeño a minimizar

$$J = \int_0^{t_1} (x^2 + u^2) dt$$

Entonces tenemos que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} = [0] \quad \mathbf{B} = \mathbf{Q} = \mathbf{R} = [1]$$

Por lo que la ecuación de Riccati que debe resolverse es

$$\dot{\mathbf{P}} + 1 - \mathbf{P}^2 = 0 \quad \mathbf{P}(t_1) = 0$$

Esta ecuación diferencial puede resolverse por separación de variables. Su solución es

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1 - e^{-2(t_1-t)}}{1 + e^{-2(t_1-t)}}$$

por lo que la ley de control óptimo resulta ser

$$u^* = -\mathbf{P}(t)x(t)$$

- Ahora vamos a determinar los coeficientes de la ley de control para el siguiente sistema

$$\dot{x} = -3x + u$$

la función de desempeño es

$$J = \int_0^{\infty} (x^2 + 0.1u^2) dt$$

Entonces tenemos que:

$$\mathbf{A} = -3 \quad \mathbf{B} = 1 \quad \mathbf{Q} = 1 \quad \mathbf{R} = 0.1$$

La ecuación de Riccati es

$$-6P - 10P^2 + 1 = 0$$

tenemos entonces que  $P = 0.1359$  entonces  $K_c = \frac{-P}{0.1} = -1.359$  por lo tanto  $u = -1.359x$

- Determinar los coeficientes de la ley de Control para el sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

si

$$J = \int_0^{\infty} (x_1^2 + u^2) dt$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2p_{12} & -2p_{22} \\ p_{11} - p_{12} & p_{12} - p_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} -2p_{12} & p_{11} - p_{12} \\ -2p_{22} & p_{12} - p_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4p_{12}^2 & 4p_{12}p_{22} \\ 4p_{12}p_{22} & 4p_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación de Riccati

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA} - \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$$

da lugar a las siguientes ecuaciones

$$-2p_{12} - 2p_{12} - 4p_{12}^2 + 1 = 0 \quad (17.75)$$

$$-2p_{22} + p_{11} - p_{12} - 4p_{12}p_{22} = 0 \quad (17.76)$$

$$2(p_{12} - p_{22}) - 4p_{22}^2 = 0 \quad (17.77)$$

de la ecuación (17.75) tenemos que:

$$4p_{12}^2 + 4p_{12} - 1 = 0$$

cuya única solución positiva es  $p_{12} = 0.20710$

llevada a (17.77) tenemos que:

$$4p_{22}^2 + 2p_{22} - 2p_{12} = 0$$

cuya única solución positiva es  $p_{22} = 0.15311$

eliminando  $p_{11}$  de (17.76) tenemos que:

$$p_{11} = 4p_{12}p_{22} + 2p_{22} + p_{12} = 0.64016$$

de esta forma

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.64016 & 0.20710 \\ 0.20710 & 0.15311 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_c = R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = [ 0.41420 \quad 0.30622 ]$$

$$u = - [ 0.41420 \quad 0.30622 ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Sea el sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

minizar el índice de desempeño

$$J = \int_0^{\infty} (x_1^2 + u^2) dt$$

En este caso tenemos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = [2]$$

La matriz  $\mathbf{D}$  es tal que  $\mathbf{D}^T\mathbf{D} = \mathbf{Q}$  entonces

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Enseguida podemos ver que  $(\mathbf{A}, \mathbf{D})$  es completamente observable. En consecuencia el sistema óptimo en lazo cerrado será asintóticamente estable. En efecto, resolviendo la correspondiente ecuación de Riccati

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

de modo que la ley de control óptimo viene dada por

$$u^*(t) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -x_1 - 2\sqrt{2}x_2$$

se puede comprobar que efectivamente da lugar a un sistema estable.

## 17.4 ECUACIÓN DE RICCATI

Normalmente es usada una simplificación de la solución de LQ y es hacer  $t_1 \rightarrow \infty$  esto es equivalente a hacer la derivada  $\dot{P}$  cero,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (17.78)$$

La ecuación anterior es la ecuación algebraica de Riccati, esta tiene diferentes formas de resolver, utilizando la simetría conocida de  $\mathbf{P}$  producirá  $\frac{n(n+1)}{2}$  ecuaciones cuadráticas acopladas. Bajo la hipótesis de que  $\mathbf{R}$  es definida positiva y que  $\mathbf{Q}$  es semidefinida por lo menos positiva, se sabe que existe una única solución definida positiva para  $\mathbf{P}$  siempre que el sistema  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$  sea estabilizable y  $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$  es detectable donde  $\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{Q}$ . A es la condición mas fuerte que a veces se presenta, es decir: o A es asintóticamente estable o  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$  es controlable y  $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$  es observable.

Cuando  $t_1 \rightarrow \infty$ ,  $\exp\{-t_1 J_s\} \rightarrow \infty$  y  $\exp\{-t_1 J_u\} \rightarrow 0$  entonces el resultado general es

$$P_{\infty} = [T_{21} \exp\{-t_r J_s\} V_{11} + T_{21} \exp\{t_r J_s\} V_{12} M] * [T_{12} \exp\{-t_r J_s\} V_{11} + T_{11} \exp\{-t_r J_s\} V_{12} M]^{-1} \quad (17.79)$$

que se reduce a

$$P_{\infty} = T_{21} T_{11}^{-1} \quad (17.80)$$

Es de interés señalar que si la ecuación (17.46) se trata de una forma similar pero con  $t_1 \rightarrow \infty$ , se comprueba que una solución en "estado estable" para  $P$  viene dado por  $P_{ss} = T_{22} T_{12}^{-1}$ .

### **Ejemplo 6.**

Analizar la ecuación algebraica de Riccati para cada uno de los siguientes sistemas con  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  y  $\mathbf{R} = 1$

1.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Este sistema está en la forma canónica de Kalman, que muestra que son inestables, y el modo inestable es incontrolable; por lo tanto no es estabilizable, ignoramos esto, encontramos los eigenvalues de  $H$  que son  $\pm 2$  y  $\pm 3.16227$ . Encontramos los eigenvectores asociados a los eigenvalues estables  $\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & -0.16228 \\ -1 & -0.13962 \end{bmatrix} \quad \text{Es evidente que } T_{11} \text{ es singular y que el método de la ecuación}$$

(17.80) falla, Si se intenta el método de integración, también falla porque no resuelve una matriz constante.

2.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  Ahora el modo incontrolable es estable, por lo tanto, este sistema es estabilizable, utilizando los eigenvalues y los eigenvectores de  $H$ , encontramos que  $\mathbf{P}_\infty = \begin{bmatrix} 0.16228 & 0.031462 \\ 0.031462 & 0.26547 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{G}_\infty = [ 0.16228 \quad 0.031435 ]$ , y en lazo cerrado los eigenvalues son  $\lambda = -2, -3.16228$  tenga en cuenta que el modo incontrolable tiene su eigenvalue sin cambios con respecto al valor de lazo abierto de  $\lambda = -2$ .

3.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , la matriz del Hamiltoniano es  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ,

se encuentran los eigenvalues  $\lambda = -1, 1, -3$  y  $3$ . Los eigenvectores son  $\xi_{\lambda=-1} = [ -1 \quad 0 \quad -1 \quad -0.25 ]^T$ ,  $\xi_{\lambda=-3} = [ 0.375 \quad -1 \quad 0.125 \quad -0.145833 ]^T$ , estos se usan en la ecuación (17.80) para encontrar  $P_\infty$ . Ya que este sistema es estabilizable, se debe tener una única solución definida positiva para  $P_\infty$ , usamos la solución de la ecuación algebraica de Riccati  $A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Para el término 1,1  $P_{11}^2 = 1$ ,  $P$  debe ser definido positivo, por lo tanto  $P_{11} = 1$ . Para el término 1,2 o 2,1  $p_{11} - 3p_{12} - p_{12}p_{11} = 0$ , por lo tanto  $w_{12} = 0.25$ . Para el término 2,2,  $2p_{12} - 6p_{22} - p_{12}^2 + 1 = 0$  tenemos que  $p_{22} = 0.23958$ . De esta forma la matriz de ganancia es  $K_\infty = [ 1 \quad 0.25 ]$  y en lazo cerrado los eigenvalues son  $\lambda = -1$  y  $-3$ .

El método del eigenvector de la ecuación (17.80) resuelve la mayoría de los problemas de ecuación algebraica de Riccati para los que se sabe que tienen solución única.

### ***Ejemplo 7.***

Para el sistema dado

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + u$$

determinar el control óptimo  $u$  que minimice el índice de desempeño

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt$$

con

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 1$$

Del sistema dado podemos ver que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R^{-1} = 1$$

$$[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de manera que el sistema dado es completamente controlable

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

entonces

$$\mathbf{PB} = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^T \mathbf{P} = [p_{21} \quad p_{22}]$$

Aplicando la ecuación de Riccati tenemos

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -p_{12} & p_{11} \\ -p_{22} & p_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_{21} & -p_{22} \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}p_{21} & p_{12}p_{22} \\ p_{22}p_{21} & p_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

que producen las siguientes ecuaciones algebraicas

$$-p_{12} - p_{21} - p_{12}p_{21} + 1 = 0$$

$$p_{11} - p_{22} - p_{12}p_{22} = 0$$

$$-p_{22} + p_{11} - p_{22}p_{21} = 0$$

$$p_{21} + p_{12} - p_{22}^2 + 1 = 0$$

Las dos ecuaciones del medio implican que  $p_{12} = p_{21}$  por lo que  $P$  es en realidad simétrica, la primera ecuación da

$$p_{21}^2 + 2p_{21} - 1 = 0$$

que tiene como solución

$$p_{21} = p_{12} = 1 \pm \sqrt{2} \tag{17.81}$$

La última ecuación y una de las del medio proporcionan

$$p_{22} = \pm \sqrt{2p_{21} + 1} \tag{17.82}$$

$$p_{11} = p_{22}(1 + p_{21}) \quad (17.83)$$

se puede determinar el signo correcto en las ecuaciones (17.81) y (17.82) partiendo del requerimiento de que el sistema controlado sea estable. Consideremos ahora la ecuación

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P x(t) = -kx(t); k = R^{-1}B^T P$$

Entonces la matriz de ganancia de retroalimentación óptima es

$$K = R^{-1}B^T P = [ p_{21} \quad p_{22} ]$$

de manera que  $u = -p_{21}x_1 - p_{22}x_2$ . Al sustituir por  $u$  en la ecuación de la planta se obtiene

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_{21}x_1 - p_{22}x_2$$

entonces

$$\ddot{x}_2 + p_{22}\dot{x}_2 + (1 + p_{21})x_2 = 0$$

vemos que la ecuación característica del sistema controlado es

$$\lambda^2 + p_{22}\lambda + (1 + p_{21}) = 0 \quad (17.84)$$

y para la estabilidad

$$1 + p_{21} > 0 \text{ o bien } p_{21} > -1 \text{ y } p_{22} > 0$$

Los signos apropiados para las ecuaciones (17.81) y (17.82) están determinados, es decir,  $p_{21} = -1 + \sqrt{2} = 0.4142$  y  $p_{22} = \sqrt{(2p_{21} + 1)} = 1.3522$  de igual manera a partir de la ecuación (17.83), si  $p_{11} = 1.9123$  de aquí que

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.9123 & 0.4142 \\ 0.4142 & 1.3522 \end{bmatrix}$$

Observe que en la ecuación (17.84) los valores propios del sistema controlado son

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{p_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{p_{22}^2}{4} - 1 - p_{21}} = -0.6761 + j0.9783, -0.6761 - j0.9783$$

## 17.5 PRINCIPIO DEL MÍNIMO DE PONTRYAGINADO

En 1956, los matemáticos rusos Pontryagin, Boltianskii y Gamkrelidze estudiaron el problema de la optimización dinámica para el caso en que la región de señales de control admisibles  $U$  estuviese acotada, y establecieron el famoso principio del mínimo (en el trabajo original del máximo) al que se ha unido el nombre del primero de estos tres autores. El principio del mínimo de Pontryagin constituye una generalización de los resultados alcanzados con ayuda del cálculo variacional para resolver el problema del control óptimo. Se puede definir un espacio de funciones admisibles  $U(t)$  para las señales de control  $u(t)$ . Al mismo tiempo las señales  $u(t)$  de control admisibles pueden presentar discontinuidades en un número finito de puntos; con ello se abre la posibilidad de estudiar el control por conmutación, que tanto interés tiene en determinadas aplicaciones prácticas.

Consideraremos de nuevo la ecuación  $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$  y tenemos  $x(0)$  conocido, las señales de control admisibles deben pertenecer a un conjunto cerrado  $U$ , es decir  $u(t) \in U$ , el estado y el instante o tiempo al final del proceso están definidos por un conjunto de pares  $(x(t_1), t_1) \in \mathfrak{B}$ . la función de desempeño a optimizar tiene la forma

$$J = \int_0^{t_1} \mathbf{L}(x, u) dt + \mathbf{S}(x(t_1), t_1) \quad (17.85)$$

Definimos también una la función hamiltoniana de la siguiente forma

$$H(x, u, \lambda) = L(x, u) + \lambda f(x, u) \quad (17.86)$$

El principio del mínimo de Pontryagin permite establecer las condiciones necesarias para que una señal de control admisible dé lugar a un control óptimo. Sea  $u(t)$  una señal de control admisible y  $x(t)$  la trayectoria correspondiente, de manera que  $x(t)$  esté definida por

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (17.87)$$

$$x(0) = 0 \quad (17.88)$$

Por otra parte, definimos las ecuaciones adjuntas o de coestado:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial x}\lambda - \frac{\partial L}{\partial x} \quad (17.89)$$

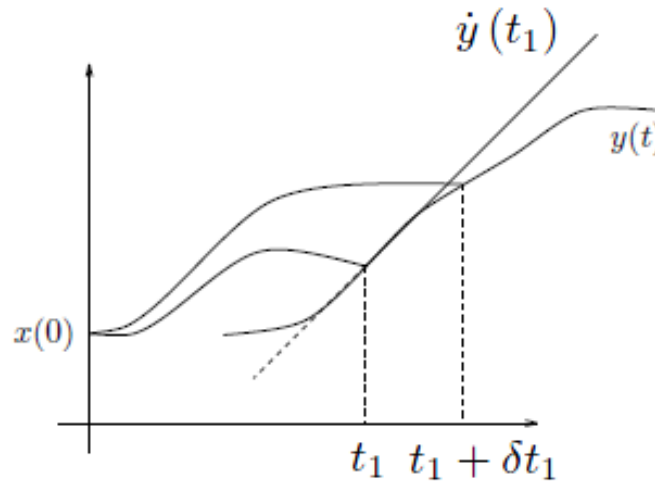
Las condiciones finales del sistema vienen dadas por una ecuación del tipo:

$$\lambda(t_1) \Delta x^f - H(t_1) \delta t_1 = \frac{\partial S}{\partial x} \Delta x^f + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t_1 \quad (17.90)$$

donde  $\Delta x^f = \dot{y}(t_1) \delta t_1$

$y$  es el estado final y  $t_1$  es el instante final estos están ligados a una expresión analítica de la forma

Figure 17.6: Relación del estado final y el instante



$$x(t)|_{t_1} = y(t)|_{t_1}$$

Con todo lo que se definió se puede enunciar el principio del mínimo de Pontryagin

### 17.5.1 Principio del mínimo de Pontryagin

Supuesto que existe un vector adjunto  $\lambda(t)$  tal que satisfaga las ecuaciones adjuntas (17.89) y las condiciones finales (17.90) para todo vector  $(\Delta x^f, \delta t_1)$  tangente a  $\mathfrak{B}$  en el punto  $(x(t_1), t_1)$ , entonces la condición necesaria para la existencia de un mínimo es que en todo punto  $t \in (0, t_1)$  la función hamiltoniana  $H(x, u, \lambda)$  alcance su mínimo con relación a  $u$ .

De acuerdo con el principio de Pontryagin la elección del control óptimo  $u^*$  es muy simple: en cada instante de tiempo,  $u$  debe seleccionarse de manera que garantice el mínimo posible de la hamiltoniana  $H$ , teniendo en cuenta las restricciones (limitaciones) impuestas sobre los valores admisibles de  $u$ . La función hamiltoniana permite evaluar variaciones del criterio  $J$  debido a variaciones admisibles e infinitesimales de la señal de control  $\delta u(t)$ . La variación del hamiltoniano  $H$  debida a una variación  $\delta u$  se denota por  $\delta H$  y se escribe

$$\delta H = \left( \frac{\partial L}{\partial u} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta u \quad (17.91)$$

Sea una trayectoria nominal (o de referencia)  $x(t)$  de un sistema dinámico, generada por una señal de mando  $u(t)$ . La variación del criterio  $\delta J$  debida a una variación admisible  $\delta u$  de la señal de control óptimo  $u^*$  (que determinará una variación de la trayectoria  $\delta x$ ) viene dada por

$$\delta J = \int_0^{t_1} \delta H(t) dt \quad (17.92)$$

en el supuesto de que se cumplan las ecuaciones adjuntas (17.89) y las condiciones finales (17.90).

Recuérdese que la variación de  $H$  que se considera en la expresión (17.92) es exclusivamente la debida a  $u$ . Es decir, la expresión (17.92) se puede escribir

$$\delta J = J(u) - J(u^*) = \int_0^{t_1} H(x^*, u, \lambda) - H(x^*, u^*, \lambda) dt \quad (17.93)$$

Aparentemente no hay nada de extraordinario en lo anterior, de hecho, la ecuación adjunta y las condiciones de transversalidad prefiguran el resultado alcanzado. Sin embargo es interesante resaltar el interés de la expresión (17.92), ya que permite evaluar el efecto sobre  $\delta J$  de una variación local de  $\delta u$ . Esta interpretación conduce al teorema del mínimo de Pontryagin. Para enunciar ese teorema se parte del hecho de que toda trayectoria óptima está caracterizada por la condición

$$\delta J \geq 0 \quad \forall \delta u(t) \quad (17.94)$$

que, de acuerdo lo anterior, se convierte en que la condición necesaria para el mínimo es

$$\int_0^{t_1} \delta H(t) dt \geq 0 \quad (17.95)$$

para toda variación infinitesimal admisible  $\delta u(t)$ . Considérese variaciones  $\delta u(t)$  tales que,

$$\delta u(t) = \delta u \tau - \epsilon < t < t_1$$

$$\delta u(t) = 0 \text{ para el resto}$$

de manera que se cumpla:

$$* u(t) + \delta u(t) \in U$$

$$* x(t) + \delta x(t) \text{ corta a } \mathfrak{B}$$

La condición de mínimo de la expresión (17.95) se convierte en

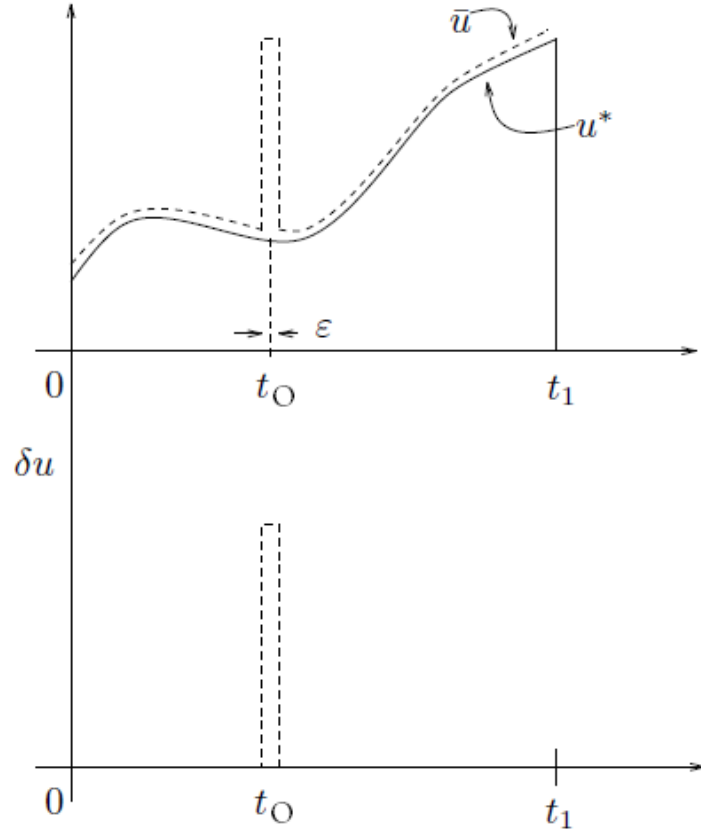
$$\delta H(t) \geq 0$$

para todo  $0 < t < t_1$ . En efecto, para demostrar la expresión anterior se procede por contradicción. Supóngase que existe un valor de  $\bar{u}$  y uno del tiempo  $t_o$  tales que

$$H(x^*(t_o), u^*(t_o), \lambda(t_o)) > H(x^*(t_o), \bar{u}, \lambda(t_o)) \quad (17.96)$$

es decir, que  $H(\bar{u})$  en  $t_o$  es menor que  $H(u^*)$  óptima. Entonces es posible concebir una señal  $\bar{u}(t)$  tal que coincide con  $u^*(t)$  para todo valor de  $t$  excepto en un pequeño entorno de  $t_o$  en el que toma el valor  $\bar{u}(t_o) = \bar{u}$  como lo muestra en la figura 17.7

Figure 17.7: Relación de  $\bar{u}$  con  $u^*$



Puesto que  $H$  es continua con relación a  $x$  y  $\lambda$  (en la medida en que lo son  $L$  y  $f$ ) se tendrá que en un entorno de  $t_o$  se podrá determinar un valor de  $\epsilon'$  tal que

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) - H(x^*(t), \bar{u}(t), \lambda(t)) < \epsilon' \quad (17.97)$$

para todo  $t$  tal que  $t - t_o < \epsilon$  de lo anterior se desprende

$$\delta J = J(\bar{u}(t)) - J(u^*(t)) \quad (17.98)$$

$$= \int_0^{t_1} (H(x^*(t), \bar{u}(t), \lambda(t)) - H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t))) dt < \epsilon \epsilon'$$

Haciendo  $\epsilon$  arbitrario y pequeño

$$\delta J < 0 \tag{17.99}$$

en contradicción con lo supuesto. Es decir, en el caso en que para un valor  $u$  y un tiempo  $t_0$  se cumpla la expresión (17.96) puede suceder (17.99). Para que no suceda (17.99) es necesario que (17.96) no suceda. Luego tiene que cumplirse, como establece el teorema que se trataba de demostrar. De hecho el principio del mínimo de Pontryagin no hace sino generalizar los resultados alcanzados en el apartado anterior para el caso en que  $u^*(t)$  se encuentre en los límites de  $U$  y no en el interior de esta región. Es decir, el principio del mínimo de Pontryagin generaliza al caso en que  $u$  esta acotada el resultado demostrado anteriormente según el cual la determinación de la señal de control  $u^*$  que minimiza al funcional  $J$  es equivalente a la determinación de la señal  $u^*$  que minimice la función hamiltoniana  $H$ . El interés del principio del mínimo, reside en que el problema inicial de minimizar un funcional  $J$  se transforma en una infinidad (para cada valor de  $t \in (0, t_1)$ ), de problemas de minimización de un escalar  $H$ .

Hemos determinado  $u^*(t)$  que minimiza a  $H$  se hace resolviendo la ecuación algébrica

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

Esta ecuación permite determinar el mínimo de  $H$  en el caso en que  $u^*$  se encuentre en el interior de  $U$ , lo que siempre sucede en el caso de que  $u$  no esté acotada. En el caso en que  $u$  esté acotada, la determinación del mínimo de  $H$  debe hacerse por otro tipo de consideraciones y no con ayuda de la ecuación anterior. La demostración rigurosa de que  $u^*$  debe elegirse de manera que minimice  $H$  es la contribución básica de Pontryagin a la teoría del control óptimo. Para determinar  $u^*$  la hamiltoniana se minimiza en cada punto del tiempo a lo largo de la trayectoria óptima por elección de los valores de  $u$  óptimos. Así, para cualquier valor  $t \in [t_0, t_1]$  sucede que o existe una solución interior en la cual

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0$$

en donde  $n$  es una normal dirigida hacia el exterior sobre el contorno de  $U$ . En la figura 17.8 se representan gráficamente estas dos posibilidades, para el caso en que la dimensión de  $u$  sea 1.

Figure 17.8: Solución de Contorno

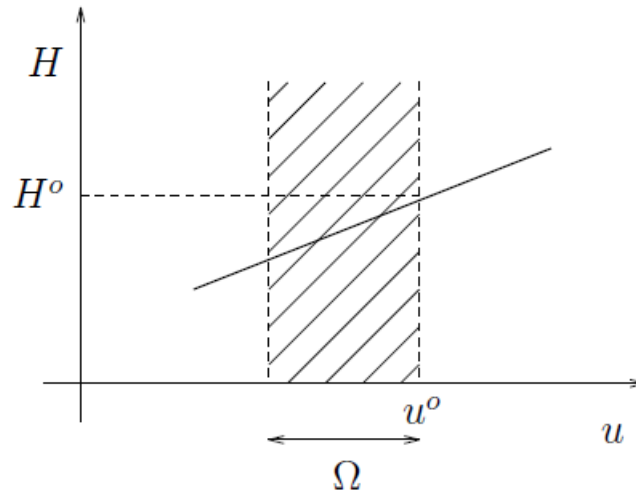
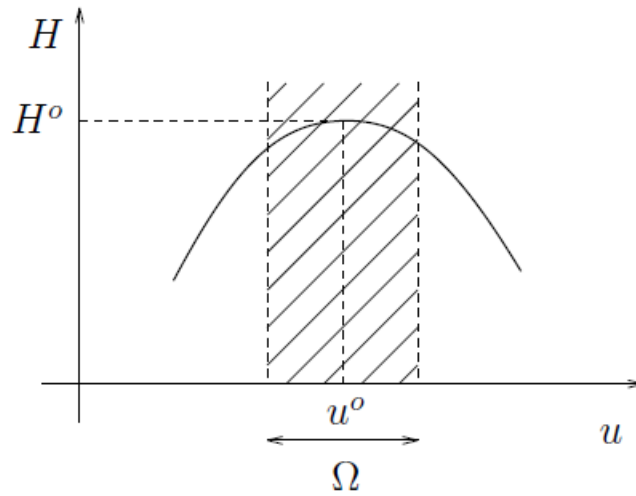


Figure 17.9: Solución de interior

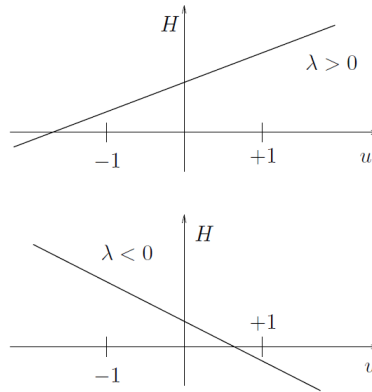


En la figura 17.9 se considera la forma de  $H$ , en función de  $u$ , para un instante genérico de tiempo  $t$ .

**Ejemplo 8.**

- Sea el sistema

Figure 17.10: Valores de  $\lambda$



$$\dot{x} = -2x + u$$

con el índice

$$\int_0^{t_1} x^2 dt$$

y con la restricción  $|u| \leq 1$ . Se forma la hamiltoniana

$$H = x^2 + \lambda(u - 2x)$$

Para optimizar la hamiltoniana se observa que la dependencia de esta función de  $u$  se limita al término  $\lambda u$ . Por tanto, teniendo presentes las restricciones sobre  $u$ , es claro el valor óptimo de  $u$  será  $u = +1$  si  $\lambda < 0$  y  $u = -1$  si  $\lambda > 0$  como lo muestra en la figura 17.10

Si se emplea la función ‘sgn (se lee ‘signo) se escribe,

$$u^* = -sgn(\lambda)$$

La hamiltoniana óptima será

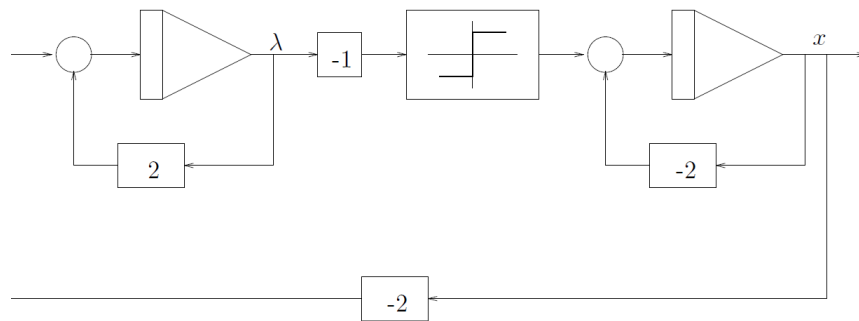
$$H = x^2 - \lambda sgn(\lambda) - 2x\lambda$$

La ecuación adjunta es

$$\dot{\lambda} = -2x + 2\lambda$$

El conjunto se puede mecanizar interpretar mediante un diagrama como lo ilustra la figura 17.11

Figure 17.11: Diagrama de bloques



Observe que puesto que  $S = 0$ , la condición de frontera es  $\lambda(t_1) = 0$

- Sea el sistema con ecuaciones de estado

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + u$$

El objetivo es minimizar el criterio de funcionamiento

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (x_1^2 + u^2) dt$$

Con señales de control admisibles tales que

$$|u(t)| \leq 1 \forall t \in [0, t_1]$$

Para resolver el problema:

1. Formamos la hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 (u - x_1)$$

2. Se minimiza  $H$  con relación a todos los valores de  $u$  admisibles, para determinar  $u^* = u^*(x, \lambda, t)$ . En este caso se separan los términos en  $u$  de  $H$

$$\frac{1}{2}u^2 + \lambda_2 u$$

Si la señal de control no está saturada, el mínimo se obtiene haciendo

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

entonces

$$u^* = -\lambda_2$$

por tanto, si  $|\lambda_2(t)| < 1$  entonces se adopta  $u^* = -\lambda_2$  ya que con ello se está en la zona no saturada de  $u$ . Si  $|\lambda_2(t)| > 1$  entonces, el valor que minimiza  $H$  será

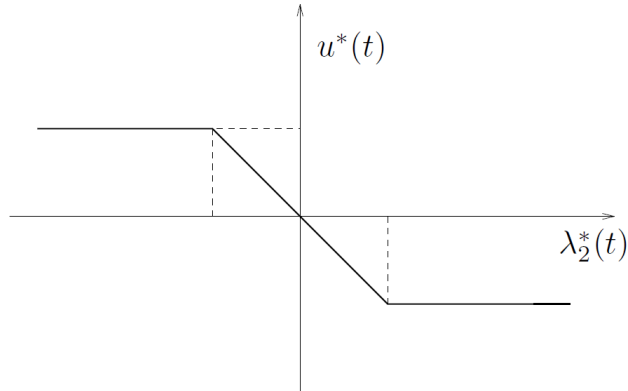
$$u^* = -\text{sgn}(\lambda_2)$$

Por lo tanto  $u^*$  tiene la forma que se indica en la figura 17.12

Para determinar  $\lambda_2(t)$  se resuelven las ecuaciones

$$\dot{x}_1 = x_2$$

Figure 17.12: Valores de  $u^*$



$$\dot{x}_2 = -x_2 - \lambda_2$$

$$\dot{\lambda}_1 = -x_1$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1$$

con las condiciones de frontera que correspondan

## 17.6 MÉTODO LQG

En sistemas dinámicos lineales con perturbaciones aleatorias gaussianas y criterio de optimización cuadrático se puede demostrar que el regulador óptimo se obtiene separando los problemas de estimación y control, resolviendo cada uno de ellos separadamente, y conectándolos en serie. Es decir, a partir de las señales de salida y por medio de un filtro de Kalman se obtienen las estimaciones de los estados, y a partir de estas estimaciones y con ayuda de la ley de control, obtenida prescindiendo del carácter estocástico del sistema, se determina la señal de acción sobre el mismo. La estructura de control así obtenida recibe la denominación de control LQG (lineal cuadrático y gaussiano), la cual requiere que se adopten modelos estocásticos para el ruido de los sensores y del proceso, y que se defina un criterio cuadrático como criterio de funcionamiento. Lo que se plantea en ese caso es un problema de control óptimo estocástico.

Sea un sistema dinámico lineal (con  $n$  estados,  $m$  entradas y  $l$  salidas):

$$\dot{x} = Ax + Bu + w$$

$$y = Cx + v$$

donde:

$x$  es el vector de estados ( $n \times 1$ )

$u$  es el vector de entradas ( $m \times 1$ )

$y$  es el vector de salidas ( $l \times 1$ )

$A$  matriz de ( $n \times n$ )

$B$  matriz de ( $n \times m$ )

$C$  matriz de ( $l \times n$ )

$w, v$  Señales aleatorias de ruido blanco gaussiano con media nula y mutuamente independientes que satisfacen:

$$E [w(t) w^T(t - \tau)] = Q_0 \delta(\tau)$$

$$E [v(t) v^T(t - \tau)] = R_0 \delta(\tau)$$

$$E [w(t) v^T(t - \tau)] = 0$$

donde:

$$Q_0 = Q_0^T \geq 0, R_0 = R_0^T \geq 0$$

El objetivo es determinar la señal de control  $u$  de forma que la siguiente funcional sea mínima:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q_c x + u^T R_c u) dt \tag{17.100}$$

con:

$$Q_c = Q_c^T \geq 0, R_c = R_c^T \geq 0$$

El teorema de separación establece que el óptimo global se tiene dividiendo el problema en dos subproblemas:

- Un problema de control óptimo, del que se obtiene la regulación por realimentación de variables de estado:

$$u = -K_c \hat{x}$$

siendo

$$K_c = R_c^{-1} B^T P_c$$

$p_c$  se determina a partir de la ecuación de Riccati:

$$A^T P_c + P_c A - P_c B R_c^{-1} B^T P_c + Q_c = 0$$

- Un problema de filtrado óptimo, mediante el filtro de Kalman:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + B\hat{u} + K_0(y - C\hat{x})$$

donde:

$$K_0 = P_0 C^T R_0^{-1}$$

y  $P_0$  se obtiene de

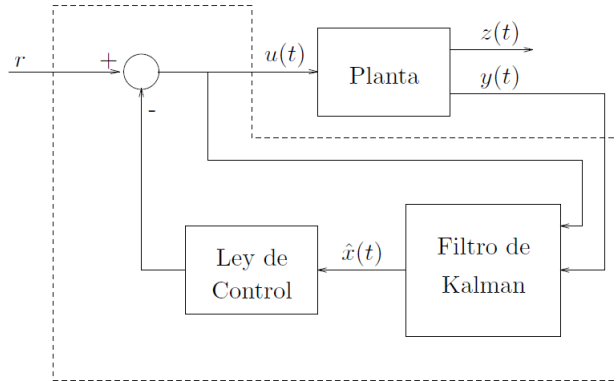
$$A P_0 + P_0 A^T + Q_0 - P_0 C^T R_0^{-1} C P_0 = 0$$

El problema que descompuesto en dos partes:

1. Resolución del problema del control, prescindiendo en el sistema de perturbaciones, para obtener la Ley de control  $K_c$ .
2. Filtrado de Kalman para obtener  $\hat{x}$ .

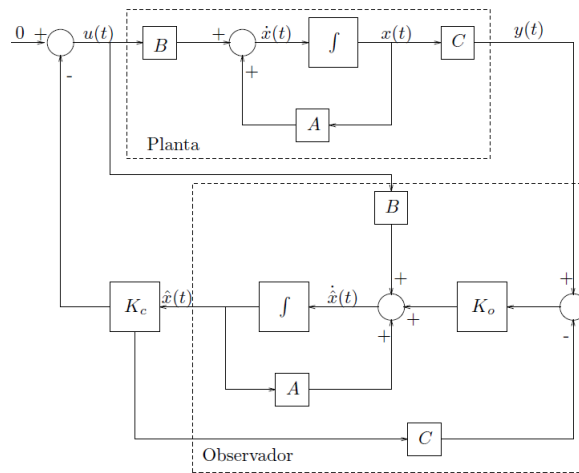
El esquema de regulación que se obtiene uniendo estos dos problemas aparece en la figura 17.13

Figure 17.13: Regulación de Kalman



y el compensador resultante es el que se muestra en la figura 17.14

Figure 17.14: Observador



## 17.7 FILTRO DE KALMAN

Para poder implementar un regulador mediante una ley de control de la forma  $u = f(x)$  es necesario conocer en cada instante el valor de todas las variables de estado. Para estudiar la estimación del estado se adopta la misma estructura que se adopta para un observador, y que aquí recibe la denominación de *filtro de Kalman*. Para el estudio de este filtro se parte de un modelo del sistema, cuyo estado se va a estimar, mediante un sistema dinámico con perturbaciones de la forma: siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \quad (17.101)$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t)$$

donde  $w(t)$  y  $v(t)$  son variables aleatorias correspondientes a un ruido blanco o ruido gaussiano, y presentarán, por tanto, las siguientes propiedades:

$$E[w_i(t)] = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

$$E[v_i(t)] = 0 \text{ con } i = 1, 2, \dots, m$$

Es decir, su media es nula para cada instante de tiempo:

$$E[w_i(t)w_j(t-\tau)] = q_{ij}\delta(\tau) \text{ con } i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$E[v_i(t)v_j(t-\tau)] = r_{ij}\delta(\tau) \text{ con } i, j = 1, 2, \dots, m$$

siendo  $\delta(\tau)$  la función delta de Dirac. Es decir,

$$E[w(t)w^T(t-\tau)] = Q\delta(\tau)$$

$$E[v(t)v^T(t-\tau)] = R\delta(t)$$

Cada señal únicamente está correlacionada consigo mismo en el instante de producirse. Esto implica un espectro de frecuencias plano, donde no hay ninguna predominante, y cuya amplitud nos da la covarianza de la señal.

Las variables  $v(t)$  y  $w(t)$  representan lo siguiente:

- $w(t)$  : el sistema nunca queda perfectamente modelado, por lo que el estado alcanzado en cada instante por el modelo matemático difiere del existente en el sistema real. Con  $w(t)$  se representan las desviaciones en la evolución de los dos sistemas (el real y el modelo matemático). Estas variables también son una representación de las perturbaciones que pueden aparecer en las distintas partes del sistema real.

- $v(t)$  : modela los errores que aparecen al medir la variable de salida del sistema. Estos errores, en general, pueden ser cuantificados de manera mas exacta que los anteriores.

Para la evaluación de los estados estimados  $\hat{x}$  se adopta la misma estructura que para un observador, es decir:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + K_0(y - C\hat{x}) \quad (17.102)$$

donde:

$\hat{x}$  es la estimación del vector de estado

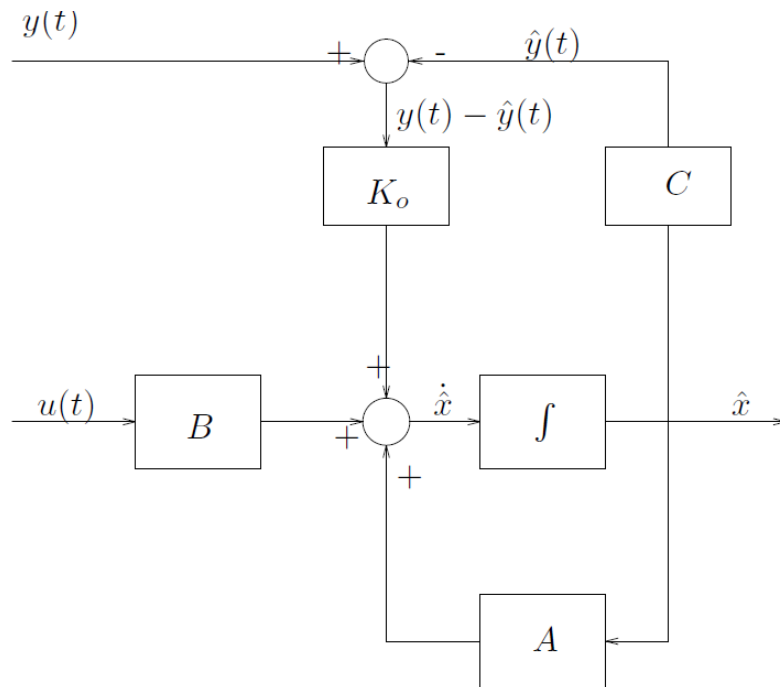
$u$  es la señal de entrada del sistema

$y$  es la salida del sistema

$k_0$  es el vector de ganancias del filtro de Kalman

La siguiente figura 17.15 muestra la estructura correspondiente.

Figure 17.15: Diagrama de las variables estimadas



Con la expresión anterior a partir de la estimación del estado  $\hat{x}$ , de la señal de entrada  $u$  y del error en la variable de salida  $y - C\hat{x}$  generamos evolución de las estimaciones.

Sea

$$P(t) = E \left[ (\hat{x} - x) (\hat{x} - x)^T \right] = E \left[ \tilde{x} \tilde{x}^T \right]$$

La matriz de covarianza del error de estimación  $\tilde{x} = \hat{x} - x$ .

El objetivo es encontrar los valores de  $K_0$  que minimicen la discrepancia entre los estados reales  $x$  y los estados estimados  $\hat{x}$ . Esta discrepancia se mide por el valor cuadrático medio del error:

$$J = E \left[ \tilde{x}^T \tilde{x} \right] = \text{tr} P(t) \quad (17.103)$$

restando la expresión (17.101) y (17.102) y recordando que  $\tilde{x} = \hat{x} - x$ , se tiene que la evolución del error  $\tilde{x}$  viene dada por la ecuación:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_0 \mathbf{C}) \tilde{x} + w + \mathbf{K}_0 v \quad (17.104)$$

A partir de las características de los ruidos  $v$  y  $w$  se tiene que el ruido blanco que actúa sobre el sistema lineal anterior posee la covarianza:

$$E \left[ (w(t) - K_0 v(t)) (w(\tau) - K_0 v(\tau))^T \right] = (\mathbf{Q} + \mathbf{K}_0 \mathbf{R} \mathbf{K}_0^T) \delta(t - \tau) \quad (17.105)$$

La covarianza  $P(t)$  del error  $\tilde{x}$  viene dada por:

$$\frac{d}{dt} P(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_0 \mathbf{C}) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) (\mathbf{A} - \mathbf{K}_0 \mathbf{C})^T + \mathbf{Q} + \mathbf{K}_0 \mathbf{R} \mathbf{K}_0^T \quad (17.106)$$

por otra parte

$$(\mathbf{K}_0 - \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{R} (\mathbf{K}_0^T - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}) = \mathbf{K}_0 \mathbf{R} \mathbf{K}_0^T - \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}$$

Por tanto, sumando y restando a  $PC^TR^{-1}CP$  a la ecuación (17.106) teniendo en cuenta esta última expresión, tenemos:

$$\frac{d}{dt}P(t) = \mathbf{A}P(t) + P(t)\mathbf{A}^T - \mathbf{P}C^T\mathbf{R}^{-1}C\mathbf{P} + \mathbf{Q} + (\mathbf{K}_0 - \mathbf{P}C^T\mathbf{R}^{-1})\mathbf{R}(\mathbf{K}_0^T - \mathbf{R}^{-1}C\mathbf{P}) \quad (17.107)$$

El problema del estimador óptimo puede enunciarse diciendo que se trata de determinar  $\mathbf{K}_0$  de modo que se minimice (17.103), estando  $P(t)$  sujeto a

$$\mathbf{K}_0(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1} \quad (17.108)$$

Es decir, el criterio a optimizar viene dado por (17.103), las ecuaciones de evolución del sistema por (17.108) y la señal a optimizar es  $\mathbf{K}_0(t)$ . Al formar la función de Hamilton del correspondiente problema de control óptimo se tiene que el único término en esta función que depende de  $\mathbf{K}_0(t)$  es  $(\mathbf{K}_0 - \mathbf{P}C^T\mathbf{R}^{-1})\mathbf{R}(\mathbf{K}_0^T - \mathbf{R}^{-1}C\mathbf{P})$ , por lo que es claro que el  $\mathbf{K}_0(t)$  óptimo vendrá dado por (17.108) llevando este valor de  $\mathbf{K}_0$  a (17.108) se tiene que  $\mathbf{P}(t)$  satisface la ecuación diferencial:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}C\mathbf{P}(t) \quad (17.109)$$

con las condiciones iniciales  $P(t_0) = P_0$

Al igual que se hacía en el caso del LQR consideraremos horizonte de tiempo infinito, con lo cual, lo que se pretenderá es minimizar en valor medio la diferencia entre los estados reales y los estimados, y no hacer mínimo dicho valor en un intervalo de tiempo determinado, que es lo que se persigue con el anterior planteamiento. En consecuencia, al hacer esta consideración, la variable tiempo desaparece de las ecuaciones que proporcionan los parámetros del *filtro de Kalman* y se tiene que  $K_0$  toma el valor constante dado por:

$$K_0 = \mathbf{P}C^T\mathbf{R}^{-1} \quad (17.110)$$

donde el único parámetro desconocido es la matriz  $P$ , que se halla resolviendo la ecuación de Riccati para la observación

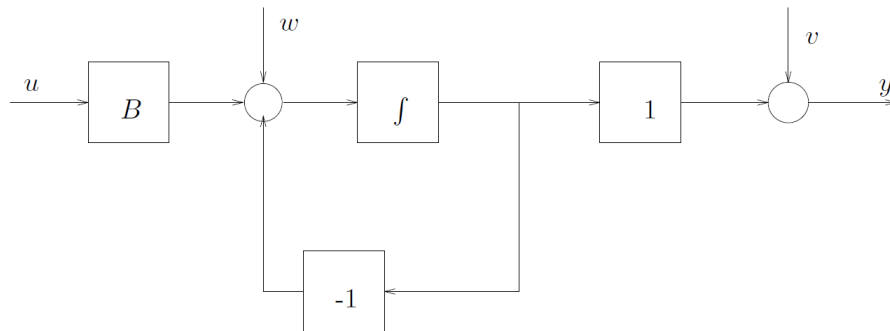
$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P} = 0 \quad (17.111)$$

La matriz  $\mathbf{K}_0$  recibe la denominación de *ganancia de Kalman*.

Para la determinación del filtro de Kalman se ha partido de la estructura representada en la figura del filtro de Kalman, que es la de un observador clásico, y se ha ajustado  $\mathbf{K}_0$  para que el error de estimación sea el mínimo con una norma cuadrática. Sin embargo, se puede demostrar que en realidad esa es la estructura que produce las mejores estimaciones de todos los posibles estimadores. Esta demostración es muy compleja, por lo que no se incluye en un curso introductorio como éste. Se trata de un resultado de la misma naturaleza que el que se ha visto al estudiar el problema lineal cuadrático, en donde si se ha demostrado que la ley de control lineal era la óptima, y no se han ajustado simple los valores de  $k$  para que lo fuera, que es en realidad lo que hemos hecho en el caso del filtro de Kalman.

### ***Ejemplo 9.***

Figure 17.16: Diagrama del ejemplo



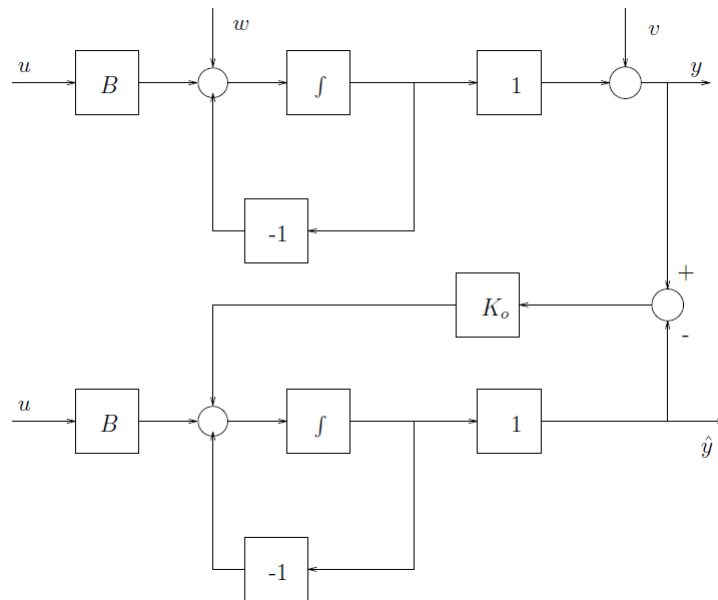
Sea el sistema dinámico de dimensión 1 que se muestra en la figura 17.16 y en el que  $A = -1$ . Se trata, por tanto, de un sistema de primer orden al que se asocian un ruido de modelado  $w$  y un ruido de lectura  $v$ . La salida de este sistema es la señal  $z$ . Se trata de reconstruir el estado  $x$  a partir de la señal  $z$ . Para ello se adopta la estructura de un filtro de Kalman, tal como se indica en la otra figura(). La determinación del filtro de Kalman se reduce, en último extremo, a la determinación de la constante  $K$  de modo que el valor cuadrático medio del error de estimación sea mínimo. Supongamos que las intensidades de los ruidos de modelado y medida vienen dadas por

$$\Phi_{ww} = Q\delta(\tau) = 3\delta(\tau)$$

$$\Phi_{vv} = R\delta(\tau) = \delta(\tau)$$

El valor de  $K_0$  en la figura 17.17 viene dado por la expresión (17.110). Para determinar el valor de  $P$  se requiere resolver la ecuación (17.109). Los parámetros necesarios para escribir esta ecuación, en el problema que nos ocupan, son

Figure 17.17: Diagrama de bloques



$$A = -1; C = 1; Q = 3; R = 1$$

Con los valores de estos parámetros la expresión (17.109) toma la forma

$$\frac{dp}{dt} = -2p - p^2 + 3$$

que en el caso de un proceso estacionario, en el que el valor cuadrático medio del error sea constante, se tiene que  $\frac{dp}{dt} = 0$ , y  $p$  es igual a constante. En tal caso se tiene que la ecuación que satisface  $p$  es la (17.111) es decir,

$$p^2 + 2p - 3 = 0$$

Resolviendo esta ecuación en  $p$  se obtiene

$$p = 1$$

Lo que llevado a (17.110) conduce a

$$K_0 = 1$$

## Capítulo 18

# BIBLIOGRAFIA

- [1] BROGAN L. William. Modern control theory. Third edition. Prentice Hall , 1991. 639 p
- [2] CHEN Chi - Tsong. Linear System Theory and Desing. Oxford University Press. Third edition, 1999. 331 p.
- [3] DORF. Richard C. y BISHOP. Robert H., Modern control systems. Eleventh edition. Pearson Prentice Hall, 2008. 992 p
- [4] EGELBERG Sholomo. A mathematical introduction to control theory. Second edition. Imperial college press. 2005. 370 p
- [5] FADALI, Sam M. Digital control engineering. Analysis and desing. Elsevier Inc, 2009. 526 p
- [6] GREENBERG,Michael D. Advance engineering mathematics.Second edition. Prentice Hall, 1998. 1315 p
- [7] GROSSMAN, Stanley I. Algebra Lineal. Sexta edición, Mc Graw Hill, 2006
- [8] KARNOPP C. Dean, Margols C. Donald, Rosenberg Donald. System Dynamics: Modeling And Simulation Of Mechatronic Systems. Jhon Wiley & Sons, Inc. 505 p.
- [9] KATSUHIKO Ogata. Ingeniería de Control Moderna. Tercera edicion. Pearson Education, 1998. 987p.
- [10] KATSUHIKO Ogata. Dinamica de Sistemas. Prentice Hall Hispanoamerica, S.A, 1987. 608 p.
- [11] KATSUHIKO Ogata. Sistemas de control en tiempo discreto. Segunda edición. Prentice Hall, 1996. 745 p

- [12] KOU, Benjamin C. Automatic Control Systems, Prentice-Hall International Inc., Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1995
- [13] KREYSZIG Erwin. Matemáticas Avanzadas, volumen I. Tercera edición. Limusa Wiley, 2003. 853 p.
- [14] LARMINAT, Philippe. Analysis and control of linear systems. First edition. ISTE Ltd, 2007. 560 p
- [15] MANDAL, Ajit K. Introduction to control engineering. Modeling, analysis and design. New age international limited publishers, 2006. 633 p
- [16] NISE Norman S. Control Systems Engineering. Four edition. Jhon Wiley & Sons, Inc, 2004. 970 p.
- [17] NGUYEN Hung. Basic control theory. First edition. 2005. 171 p
- [18] POWELL David, Franklin F. Gene. Feedback control of dynamic systems. Third Edition. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. 790 p.
- [19] W. J. Rugh, Linear System Theory. 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996.