HABILIDADES PROCEDIMENTALES DESARROLLADAS POR ESTUDIANTES BENEFICIARIOS DE UN PROGRAMA DE ACOMPAÑAMIENTO EN MATEMÁTICAS

ANA MILENA SANTAMARÍA BUENO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2017

HABILIDADES PROCEDIMENTALES DESARROLLADAS POR ESTUDIANTES BENEFICIARIOS DE UN PROGRAMA DE ACOMPAÑAMIENTO EN MATEMÁTICAS

ANA MILENA SANTAMARÍA BUENO

Trabajo de Grado para optar el título de
Magíster en Educación Matemática

Directora
SANDRA EVELY PARADA RICO
Doctora en Ciencias Especialidad Matemática Educativa

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2017

DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS

A Dios por darme la vida, la salud y la sabiduría para alcanzar la meta de ser magíster e investigadora.

A mis padres, Ana y Luis, por su incondicional apoyo y amor, por su invaluable ejemplo de responsabilidad y constancia que siempre estará en mi memoria, impulsándome a ser mejor ser humano.

A la profesora Sandra Evely Parada por su apoyo incondicional, su experiencia y su paciencia en la dirección de esta investigación. Su ejemplo y pasión como investigadora son inigualables y un modelo a seguir. ¡Gracias!

A Gerson Barajas por su inmensa paciencia y constante apoyo en este proceso. Por su valioso e incondicional amor y por iluminar mis días oscuros con su optimismo.

A los profesores y mis compañeros de la Maestría de la Escuela de Matemáticas por sus criticas constructivistas. También a los tutores y estudiantes beneficiarios de ASAE por su disposición y participación en el proyecto.

A la Vicerrectoría Académica y el Sistema de Excelencia Académica, por sus aportes en la realización de este trabajo.

Por último, a mis amigos, en especial los de Olimpiadas Regionales de Matemáticas, que de una u otra manera me brindaron su apoyo y motivación para continuar mi proceso de formación profesional.

ÍNDICE

Introducción 16
1. Fenomenología de la investigación 19
1.1. Antecedentes 19
1.1.1. Programas de tutorías y su impacto en los estudiantes 19
1.1.2. Educación Matemática y aprendizaje entre pares 23
1.1.3. Pensamiento Variacional y sus habilidades 26
1.1.4. Proceso procedimental en matemáticas 31
1.2. Contexto y problemática 35
2. Marco conceptual 42
2.1. Elementos teóricos sobre el aprendizaje según Vygotsky 44
2.1.1. Zona de Desarrollo Próximo 45
2.1.2. Andamiaje 47
2.2. Pensamiento matemático avanzado 49
2.2.1. Pensamiento Variacional 50
2.3. Procesos matemáticos 56
2.3.1. La Resolución de problemas 56
2.3.2. El Razonamiento 57
2.3.3. La Comunicación 58
2.3.4. La Modelación 59
2.3.5. Proceso procedimental 60
3. Proceso metodológico 72
3.1. Fase 1. Un acercamiento al programa y sus resultados 73
3.2. Fase 2. Instrumentos para la identificación de habilidades procedimentales 77
3.2.1. Prueba de competencias básicas de matemáticas 78
3.2.2. Reporte del curso de pre-cálculo 80

3.2.3. Formato de seguimiento por sesión 83

3.2.4. Prueba simulacro y examen final de Cálculo Diferencial 93

3.3. Fase 3. Selección de los casos de estudio. 95

3.4. Fase 4. Análisis de datos 96

3.5. Fase 5. Descripción de habilidades procedimentales 97

4. Procedimientos desarrollados por Camilo 98

4.1. Habilidades procedimentales en Camilo antes de iniciar su proceso tutorial 100

4.1.1. Habilidades en los Procedimientos Aritméticos 100

4.1.2. Habilidades en los Procedimientos Analíticos 106

4.2. Habilidades procedimentales en Camilo durante su proceso tutorial 115

4.2.1. Los procedimientos de Camilo en el trabajo con funciones 116

4.2.2. Los procedimientos de Camilo en el trabajo con límites 124

4.2.3. Los procedimientos de Camilo en el trabajo con derivadas y sus aplicaciones 128

4.2.4. Los procedimientos de Camilo al finalizar el proceso tutorial 136

4.3. Habilidades procedimentales en Camilo después del proceso tutorial 148

4.3.1. Procedimientos geométricos y métricos de Camilo en el examen final de escuela ..148

4.3.2. Procedimientos aritméticos de Camilo en el examen final de escuela 152

4.3.3. Procedimientos analíticos de Camilo en el examen final de escuela 155

4.4. Reflexiones generales sobre las habilidades procedimentales de Camilo durante el programa de acompañamiento 161

5. Procedimientos desarrollados por Alejandro 163

5.1. Habilidades procedimentales en Alejandro antes de iniciar su proceso tutorial 164

5.1.1. Habilidades en los Procedimientos Aritméticos 164

5.1.2 Habilidades en los Procedimientos Analíticos 167

5.2. El proceso procedimental de Alejandro durante las tutorías 172

5.2.1. Alejandro en el trabajo con funciones 173

5.2.2. Alejandro en el trabajo con límites 179

5.3. El proceso procedimental de Alejandro después de las tutorías 189

5.3.1. Procedimientos geométricos y métricos de Camilo en el examen final de escuela ..190

5.3.2. Procedimientos analíticos de Alejandro en el examen final de escuela 194

5.4. Reflexiones generales de las habilidades procedimentales de Alejandro durante el programa de acompañamiento 199

6. Conclusiones 201

6.1. Habilidades asociadas al proceso procedimental desarrolladas en estudiantes beneficiarios de un programa de acompañamiento y seguimiento. 201

6.1.1 Habilidades asociadas a los procedimientos aritméticos posibilitadas en ASAE 202

6.1.2. Habilidades asociadas a los procedimientos geométricos y métricos 204

6.1.3. Habilidades asociadas a los procedimientos analíticos 206

6.2. Reflexiones acerca del programa de acompañamiento y seguimiento relacionadas como zona de desarrollo próximo en cálculo diferencial 210

6.3. Perspectivas de investigación 212

Referencias Bibliográficas 214

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Estructura general del proyecto curricular de la UIS. 37

Ilustración 2. Esquema del marco conceptual. 43

Ilustración 3. Relación de los procesos matemáticos con el proceso procedimental 60

Ilustración 4 Proceso metodológico de la investigación 72

Ilustración 5. Aprobación de las asignaturas del ciclo de Cálculo, beneficiarios 2013-I. 75

Ilustración 6. Aprobación cálculo I: Beneficiarios de ASAE vs. no beneficiarios. 76

Ilustración 7. Esquema del desarrollo del programa de tutorías. 77

Ilustración 8. Hoja de procesos, Prueba diagnóstica. 79

Ilustración 9. Formato de Evaluación DIVEVA 81

Ilustración 10. Formato de seguimiento, parte cualitativa. 84

Ilustración 11. Formato de seguimiento: parte cuantitativa. 85

Ilustración 12. Frecuencia relativa de los descriptores del proceso de Razonamiento 87

Ilustración 13. Frecuencia relativa de los indicadores asociados al proceso procedimental. 88

Ilustración 14. Frecuencia relativa de los indicadores para el proceso de Comunicación 88

Ilustración 15. Frecuencia relativa de los indicadores para el proceso de Representación 88

Ilustración 16. Porcentaje de valoración de los tipos de procedimientos 89

Ilustración 17. Línea del tiempo caso de estudio: Camilo 98

Ilustración 18. Estructura de presentación de las habilidades procedimentales 99

Ilustración 19. Situación 1, prueba de competencias básicas de matemáticas inicial 101

Ilustración 20. Procedimiento de Camilo a la situación 1, Hoja de procesos. 101

Ilustración 21. Situación 2, prueba de competencias básicas de matemáticas inicial. 103

Ilustración 22. Procedimiento de Camilo a la situación 2, hoja de procesos. 103

Ilustración 23. Interpretación grafica de Camilo de la situación 1. 107

Ilustración 24. Procedimientos a la situación 1, hoja de procesos. 108

Ilustración 25. Situación 1. Prueba de competencias básicas de matemáticas final 112

Ilustración 26. Solución de Camilo a la situación del área máxima. 114

Ilustración 27. Ítem 1 del examen diagnóstico, elaborado por la tutora 118

Ilustración 28. Ítem 2 del examen diagnóstico, elaborado por la tutora 119

Ilustración 29. Ítem 3 del examen diagnóstico, elaborado por la tutora 120

Ilustración 30. Ejercicios 1 y 2, taller 10 elaborado por la tutora 131

Ilustración 31. Ejercicios 4, taller 13 elaborado por la tutora. 134

Ilustración 32. Punto 4.a, prueba simulacro ASAE. 136

Ilustración 33. Procedimiento geométrico de Camilo en el punto 4.a. 137

Ilustración 34. Punto 2, prueba simulacro ASAE. 139

Ilustración 35. Respuesta de Camilo al punto 2.b. prueba simulacro. 140

Ilustración 36. Procedimiento geométrico de Camilo en el punto 4.a. prueba simulacro 141

Ilustración 37. Enunciado ítem 5, prueba simulacro ASAE 141

Ilustración 38. Respuesta de Camilo al ítem 5, prueba simulacro 142

Ilustración 39. Primer punto prueba simulacro ASAE 143

Ilustración 40. Respuesta de Camilo al punto 1 de la prueba simulacro 143

Ilustración 41. Respuesta de Camilo al punto 2.a. prueba simulacro. 144

Ilustración 42. Respuesta y transcripción al punto 2.b. prueba simulacro de Camilo 145

Ilustración 43. Procedimiento de Camilo en el punto 4.a. prueba simulacro 147

Ilustración 44. Procedimientos geométricos y métricos de Camilo, ítem 1.aexamen de escuela.150

Ilustración 45. Procedimientos geométricos de Camilo en el ítem 2 del examen de escuela. 151

Ilustración 46. Procedimientos aritméticos de Camilo en el ítem 1.a del examen de escuela. 153

Ilustración 47. Procedimientos aritméticos de Camilo en el ítem 4.a del examen de escuela 154

Ilustración 48. Procedimientos aritméticos de Camilo en el ítem 4. del examen de escuela 154

Ilustración 49. Procedimientos aritméticos de Camilo en el ítem 1.a, del examen de escuela 155

Ilustración 50. Respuesta de Camilo al ítem 1.b. del examen de escuela 156

Ilustración 51. Solución de Camilo al ítem 3 del Examen de escuela 158

Ilustración 52. Línea del tiempo caso de estudio: Alejandro. 163

Ilustración 53. Preguntas complementarias 165

Ilustración 54. Procedimientos aritméticos de Alejandro, situación 1. 165

Ilustración 55. Situación de la prueba de egreso del curso de pre-cálculo 169

Ilustración 56. Respuesta al ítem b, prueba de egreso del curso de pre-cálculo 170

Ilustración 57. Respuesta de Alejandro a los ítems d), f) y g) de la prueba de egreso. 171

Ilustración 58. Respuesta de Alejandro al ítem j) de la prueba de egreso 171

Ilustración 59. Situación para la sesión sobre funciones. 174

Ilustración 60. Procedimiento de Alejandro para calcular las raíces de un polinomio 177

Ilustración 61. Respuesta de GeoGebra a la actividad 2b diseñada por el tutor 181

Ilustración 62. Actividad de reconocimiento planteada en la Actividad 4, pre-calculo 183

Ilustración 63. Alejandro graficando en GeoGebra $f(x) = 1/x$ 184

Ilustración 64. Procedimientos geométricos y métricos de Alejandro. Ítem 1.a, examen escuela192

Ilustración 65. Enunciado problema 3 examen final de escuela 193

Ilustración 66. Procedimiento geométrico de Alejandro al ítem 3 del examen de escuela. 193

Ilustración 67. Procedimientos analíticos de Alejandro, ítem 2.b, examen final de escuela. 194

Ilustración 68. Procedimientos analíticos de Alejandro, ítem 2.c, examen final 195

Ilustración 69. Procedimientos analíticos de Alejandro, problema 3, examen final 195

Ilustración 70. Problema 4 y procedimiento analítico de Alejando en el examen final 196

Ilustración 71. Enunciados problema 1 examen final de escuela 197

Ilustración 72. Procedimientos analíticos de Alejandro, problema 1.b, examen final 197

INDICE DE TABLAS

Tabla 1. Descriptores para la prueba de competencias básicas de matemáticas 55

Tabla 2. Definiciones para habilidad y habilidad matemática 65

Tabla 3. Descriptores de las habilidades a priori para el pensamiento variacional. 67

Tabla 4. Resultados porcentuales de los indicadores del formato de seguimiento. 91

Tabla 5. Información cuantitativa de los casos de estudio. 95

Tabla 6. Procedimientos analíticos y estándares: Asociación de descriptores. 110

Tabla 7. Habilidades y dificultades identificadas en Camilo antes del proceso tutorial. 114

Tabla 8. Descripción de la primera sesión de Camilo 116

Tabla 9. Debilidades: primera sesión de Camilo 117

Tabla 10. Debilidades: cuarta sesión de tutoría Camilo. 125

Tabla 11. Habilidades y dificultades en Camilo durante del proceso tutorial. 135

Tabla 12. Enunciado problema 1 examen final de escuela 148

Tabla 13. Enunciado problema 2 examen final de escuela 151

Tabla 14. Habilidades y dificultades identificadas en Camilo después del proceso tutorial 159

Tabla 15. Habilidades procedimentales y estándares: Asociación de descriptores 168

Tabla 16. Habilidades y dificultades identificadas en Alejandro antes del proceso tutorial. 172

Tabla 17. Habilidades y dificultades identificadas en Alejandro durante del proceso tutorial.188

Tabla 18. Habilidades y dificultades identificadas en Alejandro después del proceso tutorial198

TÍTULO:
HABILIDADES PROCEDIMENTALES DESARROLLADAS POR ESTUDIANTES BENEFICIARIOS DE UN PROGRAMA DE ACOMPAÑAMIENTO EN MATEMÁTICAS[*]

AUTOR: ANA MILENA SANTAMARÍA BUENO[**]

PALABRAS CLAVE: CÁLCULO DIFERENCIAL, PROCESO PROCEDIMENTAL, HABILIDADES PROCEDIMENTALES, TUTORÍA, ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO.

RESUMEN:
En este documento se presentan los resultados de una investigación de corte cualitativo, que surgió a partir del desarrollo de una alternativa curricular remedial para atender la problemática de deserción y reprobación de los estudiantes en la asignatura Cálculo I (Cálculo Diferencial) en la Universidad Industrial de Santander. La investigación se llevó a cabo en un programa de acompañamiento en matemáticas denominado programa ASAE (atención, seguimiento y acompañamiento a estudiantes), dirigido a estudiantes de primer semestre.

Esta investigación tuvo por objetivo identificar y describir habilidades asociadas al proceso procedimental que desarrollan estudiantes beneficiarios de un programa de acompañamiento y seguimiento en Cálculo Diferencial. Para ello se usaron elementos conceptuales como la Zona de Desarrollo Próximo y la Taxonomía de los procedimientos. Además, las habilidades relacionadas con el proceso procedimental surgieron de la categorización de los procedimientos realizada por el Ministerio de Educación Nacional y el reporte de un trabajo de investigación, precedente a este mismo contexto de estudio; a partir de los referentes se plantean cuatro tipos de procedimientos: i) aritméticos, ii) geométricos, iii) métricos y iv) analíticos.

El trabajo se realizó durante dos semestres académicos en el que se implementaron diversos instrumentos de recolección de datos en dos casos de estudio, como video-grabaciones, producciones escritas y reportes de seguimiento. En general, la evidencia señaló que los tutores posibilitan experiencias sobre nociones importantes del Cálculo como el cambio y la tendencia, así como la elaboración y ejercitación de procedimientos analíticos, usando las tecnologías digitales como herramienta mediadora.

A partir de los resultados encontrados en esta investigación se espera contribuir al desarrollo teórico de la Educación Matemática, a partir de la teorización de los aprendizajes de estudiantes en su paso por dicho programa y, particularmente, aportar al tratamiento de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje en Cálculo.

[*] Proyecto de grado
[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Dra. Sandra Evely Parada Rico

TITLE:

PROCEDURAL SKILLS DEVELOPED BY STUDENTS BENEFITING FROM AN ACCOMPANYING MATHEMATICS PROGRAM*

AUTHOR:

ANA MILENA SANTAMARÍA BUENO**

KEYWORDS: DIFERENTIAL CALCULUS, PROCEDURAL PROCESS, PROCEDURAL SKILLS, TUTORING ZONE OF PROXIMAL DEVELOPMENT.

ABSTRACT

This paper presents the results of a qualitative research that emerged from the development of a remedial curricular alternative to attend to the problem of desertion and reprobation of students in the subject Calculus I (Differential Calculus) in the Industrial University of Santander. The research was carried out in an accompaniment program in mathematics called the ASAE program (Attention, follow-up and accompaniment to students), for first semester students.

This research aimed to identify and describe skills associated with the procedural process developed by students who are beneficiaries of an accompaniment and follow - up program in Differential Calculus. Conceptual elements such as the Zone of Proximal Development and Taxonomy of procedures were used for this purpose. In addition, the skills related to the procedural process arose from the categorization of the procedures carried out by the Ministry of National Education and the report of a research work, precedent to this same context of study; from the referents four types of procedures are proposed: i) arithmetic, ii) geometric, iii) metric and iv) analytical.

The work was carried out during two academic semesters in which several instruments of data collection were implemented in two case studies, such as video-recordings, written productions and follow-up reports. In general, the evidence pointed out that tutors allow experiences on important notions of Calculus such as change and tendency, as well as the elaboration and exercise of analytical procedures, using digital technologies as a mediator tool.

From the results found in this research is expected to contribute to the theoretical development of Mathematics Education, based on the theorization of student learning in its passage through this program and, particularly, to contribute to the treatment of teaching and Learning in Calculus.

* Grade work.

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. PhD. Sandra Evely Parada Rico.

Introducción

Nuestro país día a día enfrenta nuevos desafíos educativos, uno de ellos apunta a incrementar la permanencia (que refiere a que los estudiantes no abandonen sus estudios) de los estudiantes en la educación superior. Según lo reporta el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en sus Estadísticas, la tasa de deserción del año 2013 por cohorte en programas universitarios fue del 44.9%, esta cifra justifica la necesidad de incrementar las estrategias para coadyuvar a los estudiantes a que terminen la carrera en los tiempos establecidos.

En esa dirección, la Universidad Industrial de Santander (UIS) ha realizado estudios desde la Vicerrectoría Académica, y ha identificado que los cursos de matemáticas son los de mayor reprobación. En particular, la asignatura de Cálculo Diferencial ha alcanzado los primeros puestos de reprobación y cancelación, convirtiéndose en una situación inquietante para la alta dirección de la universidad y para docentes de la Escuela de Matemáticas. Así, en 2012 la UIS después de la presentación de la estructura curricular propuesta por Parada (2016) y la investigación de Botello (2013) se implementó e institucionalizó el programa de Atención, Seguimiento y Acompañamiento a Estudiantes (ASAE), que junto con otras alternativas hace parte del Sistema de Excelencia Académica (SEA) de la universidad.

Actualmente, el programa ofrece apoyo a un porcentaje de estudiantes de primer nivel que desde su ingreso a la universidad son identificados en riesgo académico por el SEA. El apoyo inicia con un curso de precálculo para fortalecer su Pensamiento Variacional basándose en el desarrollo de los procesos matemáticos, y mediado por el uso de un *software* matemático interactivo. Posteriormente, ingresan a un programa de tutorías personalizadas en donde el estudiante cuenta con un tutor permanente a lo largo de todo el semestre.

La investigación que aquí se presenta es en gran parte cualitativa y se desarrolló desde el contexto del programa ASAE, ésta tuvo por objetivo identificar habilidades que estudiantes de primer nivel desarrollan como beneficiarios de un programa de acompañamiento y seguimiento en Cálculo Diferencial, esto desde el proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (MEN, 1998). El proceso antes mencionado para efectos de la investigación que aquí reportamos se llamará proceso procedimental. Así mismo las actividades tutoriales y el proceso de acompañamiento realizado por un profesor de matemáticas en formación se interpretarán desde la teoría de la Zona de Desarrollo Próximo (Vygotsky, 1979).

Para lograr la identificación y descripción de las habilidades relacionadas con el proceso procedimental se tuvo en cuenta la categorización realizada por el MEN (1998) y la taxonomía emergente de un trabajo precedente a este mismo contexto de estudio, la cual es reportada por Barajas (2015). La autora, plantea en dicha taxonomía una serie de habilidades las cuales nosotras tomamos como a priori para el análisis de los datos de dos casos de estudio, que corresponden a estudiantes beneficiarios del programa en el segundo semestre académico de 2015 y el primero de 2016.

En este documento presentamos el reporte final de la investigación, el cual está conformado por seis capítulos; en el primer capítulo se da a conocer los antecedentes relacionados a la problemática, posteriormente se presenta el contexto de la investigación, finalizando con la pregunta y el objetivo del trabajo. En el capítulo 2 se exponen los referentes teóricos que constituyen el marco conceptual base para la interpretación y explicación de los datos.

El proceso metodológico se presenta a detalle en el capítulo 3 con los respectivos instrumentos de recolección de información y el análisis cuantitativo de esa información. En los

capítulos 4 y 5 se describen las habilidades identificadas en los casos de estudio, Camilo y Alejandro respectivamente, después de su recorrido por el programa de acompañamiento y seguimiento, teniendo como categorías cada una de las principales etapas del programa. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones del estudio que dan respuesta a la pregunta de investigación.

1. Fenomenología de la investigación

Para dar a conocer el fenómeno de la investigación, presentamos en este capítulo dos grandes apartados: i) los antecedentes relacionados con los aspectos que intervienen en la investigación; como son: los programas de tutorías y su impacto en los estudiantes, la Educación Matemática y el aprendizaje entre pares, el Pensamiento Variacional y sus habilidades, por último, el proceso procedimental; ii), el contexto en el cual se desarrolló la investigación. Cerramos el capítulo con el planteamiento del problema.

1.1. Antecedentes

Para el desarrollo de la investigación que aquí reportamos, realizamos una revisión de la literatura en torno de algunos aspectos que fijaron la dirección de la misma. Los aspectos se han dividido en los siguientes cuatro sub-apartados:

i) Programas de tutorías y su impacto en los estudiantes.
ii) Educación Matemática y aprendizaje entre pares.
iii) Pensamiento Variacional y sus habilidades.
iv) Proceso procedimental en matemáticas.

1.1.1. Programas de tutorías y su impacto en los estudiantes

Los referentes más cercanos a la idea de tutoría académica en Latinoamérica se encuentran en Argentina donde el concepto de tutorías se enfoca a las tutorías entre pares, es decir, que son estudiantes de los últimos cursos de carreras los que median el proceso de aprendizaje de sus compañeros de nuevo ingreso a la universidad. En México el sistema tutorial

en la educación superior se viene realizando desde los inicios de la década de los años cuarenta, inicialmente en el posgrado (Mendiola y Romano, 2014), en el cual un profesor o colega de mayor experiencia acompaña procesos de formación o investigación.

En México, la tutoría es ampliamente reconocida por las Instituciones de la Región Centro-Occidente (RCO) de la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES). Tanto así que comparten sus experiencias y retroalimentan los procesos tutoriales cada dos años en su Encuentro Regional de Tutoría. En la emisión 2013 realizada en el Instituto Tecnológico Superior de Irapuato las instituciones presentaron sus prácticas en la acción y gestión tutorial.

Por ejemplo, Alcaraz, Figueroa y Cruz (2014) plantean tras la experiencia en el Centro Universitario del Sur de la Universidad de Guadalajara para las licenciaturas de Negocios Internacionales, Derecho y Psicología, que en efecto la experiencia de la tutoría ha sido muy satisfactoria dado que es una oportunidad para acompañar a los estudiantes en la planeación y conformación de su proyecto de vida como profesionales. De igual forma, se presentan algunos resultados cuantitativos en relación a la deserción escolar y la retención de alumnos proporcionados por la Coordinación de Control Escolar sobre la retención, deserción estudiantil y bajas en el primer año donde señalan que durante los ciclos escolares 2007 B al 2012 A, los índices de deserción han disminuido.

Otro reporte positivo sobre los programas tutoriales es de González, Velasco y González (2014), quienes realizan un estudio diagnóstico integral a los estudiantes del Instituto Tecnológico de Atitalaquia (ITAt) y plantean los principales problemas psicosociales y académicos que enfrenta la población de estudio. Después de la aplicación del programa institucional de tutorías a 150 estudiantes de los programas de ingeniería química, ingeniería

industrial e ingeniería mecatrónica, muestran el impacto obtenido en pro de la formación integral de los estudiantes. Resaltando que Cálculo Diferencial es una de las asignaturas atendidas, donde el porcentaje de estudiantes considerados en riesgo que lograron acreditar la asignatura fue del 61.2%.

En el ámbito nacional, un estudio para evaluar la percepción de la satisfacción de la acción tutorial fue realizado por Bohórquez, Ariza y Ocampo (2008). Este estudio de carácter exploratorio se realizó con 237 estudiantes de la facultad de psicología de la Universidad Católica de Colombia, quienes participaban constantemente en el proceso tutorial. La toma de datos se realizó a partir de dos instrumentos: un registro de aspectos positivos, negativos y a mejorar, incluyendo preguntas abiertas; y un registro de evaluación de las tutorías. Según los resultados obtenidos a partir de esta investigación, se encontró que los estudiantes valoraban positivamente la tutoría. Otro resultado, a partir del análisis estadístico, fue una correlación significativa entre la valoración individual y la nota final. Por último, los autores realizan una sugerencia sobre profundizar en la investigación del proceso de tutorías y su evaluación, combinando las tutorías presenciales y virtuales.

Al respecto consideramos importante esta última idea de continuar investigando, dado que hasta el momento encontramos que los trabajos sobre programas tutoriales en distintas asignaturas se limitan a cifras y aspectos cualitativos subjetivos como la apreciación por parte de los estudiantes. Haciendo necesario un estudio de mayor profundidad que reporte los aprendizajes logrados en los estudiantes beneficiarios específicamente en la asignatura en la que reciben el apoyo.

También cabe resaltar desde el panorama nacional, la investigación de Noreña (2012) quien indagó sobre la influencia de estudiantes monitores (tutores) en el aprendizaje de la Leyes

de Newton, en estudiantes de décimo grado de la Escuela Normal Superior María Escolástica de Salamina Caldas. Para ello se conformaron dos grupos, el de control y el intervenido, el último de ellos contó con la participación de dos monitores (estudiantes que cumplían con características previamente definidas). Luego se aplicó un pre-test y al finalizar la intervención se realizó un post-test a los dos grupos; los resultados fueron comparados mediante el programa SPSS utilizando la prueba de hipótesis como instrumento para evidenciar la influencia positiva de la intervención y la aplicación del modelo de aprendizaje cooperativo. La Zona de Desarrollo próximo planteado por Vygotsky fue tomada como marco teórico de la investigación para explicar el trabajo entre pares y su incidencia en el proceso académico.

En particular la Universidad Industrial de Santander ya ha desarrollado algunos proyectos de atención académica a los estudiantes, como: el Programa de Asesoría para el Mejoramiento del Rendimiento Académico (PAMRA) y el Modelo de Intervención Integral para Disminuir la deserción Académica en Estudiantes de I Nivel (MIDAS). Con relación al primer programa hay dos investigaciones, una de ellas reportada en el artículo de Miranda (2010) hecha sobre estudiantes de segundo semestre de enfermería que estaban inscritos a PAMRA; según los resultados presentados por el autor, el 100% de los estudiantes del grupo experimental (beneficiarios de PAMRA) aprobaron la asignatura con un promedio de 3,47 en su nota final. Además, el autor invita a los estudiantes a participar en estos grupos de asesoramiento en cada universidad e igualmente a fomentar su creación en aquellas universidades donde aún no existen.

Sumado a esto, el artículo de Cardozo (2011) también sobre PAMRA, informa que las tutorías entre pares juegan un rol importante en los logros de los estudiantes, desde un sentido humano, académico e integrado. Por ejemplo, plantea que se hace visible el aporte pedagógico y social hacia los estudiantes durante la tutoría, y añade que el trabajo entre pares mejora la calidad

universitaria, al crearse vínculos y fortalecer relaciones entre compañeros, que aportan al desarrollo social y cognitivo, "pasando de ser solo un "trabajo en grupo" a ser uno compartido, asumido de forma organizada por todos como responsables del éxito común" (Cardozo, 2011, p. 6). Por otro lado, los artículos de Botello y Parada (2013, 2014) documentan el trabajo realizado desde el programa ASAE como espacio de tutoría y aprendizaje entre pares, sin embargo, por ser del área de Educación Matemática se presentarán en el siguiente apartado como trabajo local.

1.1.2. Educación Matemática y aprendizaje entre pares

Un trabajo que valora el impacto de las tutorías ya específicamente en matemáticas y a su vez observa a los estudiantes es el estudio de Chávez y Vargas (2007) sobre el papel de la asesoría académica en los programas de tutorías, donde analizaron el proceso de aprendizaje de los 85 estudiantes que pertenecían al programa institucional de tutorías (PIT) del Instituto Tecnológico de Toluca en la materia de Matemáticas I. Dentro de los aspectos analizados, se encuentran: hábitos de estudio, estrategias de aprendizaje y resolución de problemas entre otros. La metodología implementada para realizar la investigación fue el seguimiento individual y entrevistas individuales a tutorados y asesores.

Entre los resultados obtenidos a partir de un análisis estadístico, se encontró que aquellos alumnos que tenían un buen hábito de estudio, pero escasas estrategias, tuvieron resultados limitados; un alumno que aplicaba buenas estrategias, pero no tenía hábitos de estudio no obtuvo buenos resultados. Por último, un estudiante que tenía más de dos estrategias y había desarrollado más de cuatro hábitos de estudio tenía mejores resultados (Chávez y Vargas, 2007). Las autoras consideraron dentro de su investigación la metodología de Polya para observar la resolución de problemas y además la sugieren para introducir al estudiante en la resolución de

problemas. Este último referente teórico podría complementar la interpretación de las habilidades relacionadas con el proceso de resolución de problemas que se encuentra implícito en los demás procesos como el proceso procedimental en el que nos enfocaremos dentro de esta investigación.

En general, las tutorías y aprendizaje entre compañeros afectan positivamente el rendimiento en matemáticas de los estudiantes, ya que como lo menciona Kunsch, Jitendra, y Sood (2007), las tutorías entre iguales en matemática son moderadamente eficaces en el mejoramiento del rendimiento académico y aún más eficaz para los estudiantes en riesgo de la básica primaria y el aprendizaje de contenidos de matemática computacional.

En relación al aprendizaje entre pares encontramos en la universidad de Lisboa el proyecto de investigación de César (2000) que ha sido implementado con estudiantes de 5° a 12° con el fin de promover las interacciones entre parejas de alumnos en el aula de matemáticas y mejorar su pleno desarrollo socio-cognitivo y alcanzar el éxito escolar. Los resultados aportan datos sobre el papel que las interacciones entre parejas pueden desempeñar en la comprensión de conocimientos. Su base es el conflicto socio-cognitivo que, a diferencia del conflicto cognitivo de Piaget, es concebido como el resultado de la confrontación entre esquemas de sujetos diferentes que se produce en el curso de la interacción social, y también incorpora la Zona de Desarrollo Próximo de Vygotsky, se puede concluir que cuando el conflicto es superado el par más competente también se beneficia de la interacción.

Maldonado, et al. (2009) realizaron un estudio sobre el acompañamiento en el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de pregrado de ingeniería de la Universidad Central de Bogotá; esto por la necesidad de sistematizar la experiencia de acompañamiento que se generaba en el departamento de matemáticas de la universidad. Este estudio se consideró de tipo longitudinal, ya que se hizo el seguimiento de un grupo, desde el primer semestre hasta la culminación de su

carrera en el área de matemáticas. Una de las conclusiones a la que llegan los autores es sobre la oportunidad que ofrece este espacio para mejorar las condiciones de comunicación y el monitoreo de la evolución del aprendizaje, al igual que la formación de una red académica en el interior de la universidad.

Nuevamente encontramos trabajos que dan una apreciación positiva de los programas de acompañamiento y trabajo entre pares en matemáticas en distintos niveles educativos, a partir de esto consideramos que el contexto de los programas de acompañamiento académico en matemáticas podría ser un buen espacio de investigación sobre los aprendizajes de los estudiantes beneficiarios. Estos aprendizajes vistos desde los procesos matemáticos.

Para finalizar y como habíamos mencionado anteriormente, a nivel local encontramos los reportes de Botello y Parada (2014) quienes presentan algunos resultados obtenidos de una investigación curricular, ampliamente explicada en Botello (2013), desarrollada en la Universidad Industrial de Santander con estudiantes de primer semestre que cursaban cálculo I (Cálculo Diferencial) y estudiantes de semestres superiores de Licenciatura en Matemáticas dentro de un programa de tutorías, actualmente ASAE. Las primeras reflexiones enfocadas al proceso de aprendizaje entre pares indican que los estudiantes beneficiarios tenían vacíos cognitivos y dificultades con las operaciones con números reales, ecuaciones lineales, manejo de funciones, procedimientos algebraicos, por mencionar algunos, y a su vez los estudiantes tutores tenían déficit en conocimientos matemáticos; dejando ver que en el trabajo entre pares se identifican las dificultades de ambas partes. Sumado a esto el artículo de Botello y Parada (2013) hace énfasis en que ASAE es un espacio que permite a los tutores aprender y reaprender los contenidos del cálculo diferencial, y en general es un espacio para formación inicial de profesores de matemáticas. Nuestra investigación no se interesa en esta última parte, pero si nos

da indicios positivos dado que si hay un impacto académico favorable en los tutores entonces también debe darse en los estudiantes que son beneficiarios.

Como se observó en los últimos dos apartados los estudios no son todos del área específica de matemáticas, sin embargo, concuerdan al concluir que las tutorías y el aprendizaje entre pares favorecen el aprendizaje en los estudiantes, y la percepción positiva que tienen aquellos que han sido beneficiarios. Dejando así entrever a las tutorías como un espacio rico en información sobre los aprendizajes de los estudiantes que a su vez conlleva a la necesidad de examinar en detalle los procesos cognitivos de los estudiantes tutorados al pasar por un programa que les brinda apoyo académico.

1.1.3. Pensamiento Variacional y sus habilidades

Este apartado puede ser dividido en los trabajos sobre el desarrollo del Pensamiento Variacional y los trabajos e ideas más relevantes sobre las dificultades y habilidades del aprendizaje del cálculo diferencial.

En relación al desarrollo del Pensamiento Variacional tenemos el trabajo de Vrancken, Engler, Giampieri y Müller (2014) donde parten de la transformación, a través del tiempo, en el que las funciones pasaron de ser modelos matemáticos que reflejan la variación y las relaciones entre las variables, a conceptos matemáticos abstractos, y proponen introducir la noción de función desde su aspecto más fundamental, la variación. Para ello, desarrollan una secuencia de seis actividades para favorecer el desarrollo del Pensamiento y el Lenguaje Variacional en estudiantes de primer año de Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional del Litoral en Argentina. Su hipótesis es que el estudio de procesos de variación permite construir de forma significativa la comprensión y el uso de las funciones. Los autores concluyen que a partir de las

situaciones planteadas se identificaron dificultades asociadas al concepto de función, por ejemplo, los estudiantes confunden este concepto con el de ecuación, debido al constante tratamiento algebraico. Por otro lado, se observó el surgimiento de argumentos variacionales, desde lo cualitativo y lo cuantitativo que llevan a la construcción de nociones fundamentales para el inicio del estudio del cálculo.

Cantoral y Farfán (1998) presentan un acercamiento didáctico novedoso a través de actividades, con el que buscan construir una base de significaciones para procesos y conceptos del análisis matemático. Identifican la importancia del desarrollo del Pensamiento y del Lenguaje Variacional ya que para iniciar el estudio del cálculo se necesita un lenguaje que permita hacer transferencias entre las representaciones del lenguaje algebraico y las del lenguaje gráfico. Proponen el planteamiento de situaciones problema en las aulas y no limitarse al aprendizaje de definiciones. En sus conclusiones consideran que las actividades expuestas favorecen la discusión y elaboración de propuestas de enseñanza que traten sobre el qué enseñar y no sólo sobre el cómo enseñar. Al respecto, esta postura apoya y va muy acorde a las ideas del programa de acompañamiento académico, dado que tanto el curso de precálculo como las sesiones de tutorías están basados en la resolución de problemas y en el desarrollo de procesos matemáticos.

En las asignaturas de cálculo diferencial los contenidos más relevantes son: límite, continuidad, derivada y sus aplicaciones, según planes de estudio de universidades nacionales como la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Universidad Nacional de Colombia y por supuesto la Universidad Industrial de Santander, por mencionar algunas. Ahora bien, los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje y uso de dichos contenidos; a continuación, revisamos algunos de los trabajos que dan cuenta de las dificultades en el aprendizaje del cálculo diferencial.

Artigue (1995) menciona que los estudios sobre las dificultades encontradas en la enseñanza tradicional y en particular la enseñanza universitaria tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo. Así, esta problemática se ha convertido en un generador potente para el desarrollo de investigaciones didácticas. Agrega además que la mayoría de las investigaciones didácticas de la enseñanza superior se han concentrado en el campo conceptual del cálculo, retomando el contenido de la obra "Advanced Mathematical Thinking" de Tall, (1991). Sumado a esto, Artigue (1998) agrupa las dificultades del aprendizaje del cálculo en tres categorías:

- Las dificultades ligadas a la complejidad de los objetos básicos del cálculo: los números reales, las funciones y las sucesiones, objetos que están siempre en fase de construcción cuando se empieza la enseñanza del cálculo.

- Las dificultades ligadas a la conceptualización, la formalización y dominio técnico de la noción de límite, que es la noción central del campo.

- Las dificultades ligadas a las rupturas necesarias con modos de pensamiento del funcionamiento algebraico.

Por ejemplo, una dificultad persistente sobre la noción de límite que la limita a procesos puramente algebraicos o la dificultad para relacionar los diferentes registros semióticos que permiten representar y trabajar con funciones. Y resalta la importancia de que se desarrolle la flexibilidad entre la función vista como un "proceso" y la función vista como una "entidad conceptual".

En particular, sobre el concepto de derivada, Rojas (2008) reporta algunos tipos de dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la derivada; entre ellos hay un tipo que denomina

tangencia local y que se relaciona con la idea de Euclides. En este tipo de dificultad se señala que al plantear la tangencia como el resultado de llevar al límite rectas secantes genera en los estudiantes dificultad porque para ellos la idea de tangencia a una curva es la de una recta que toca a la curva sin cortarla. Entonces para ellos si la recta es tangente a la curva en un punto pero la corta en otro punto automáticamente la recta pierde la propiedad de tangencia. Lo que marca la necesidad de hacer una separación entre las ideas de la geometría euclidiana y el cálculo diferencial.

También respecto al tema de la derivada se encuentra el artículo de Williner (2014), donde se reporta las habilidades matemáticas relacionadas con el tema de derivada en un grupo de estudiantes universitarios cuando trabaja con software *Mathematica.* Para el diseño de la investigación se tuvo en cuenta un test inicial y test final, un grupo control y de intervención y el desarrollo de un dispositivo de enseñanza cuidadosamente diseñado. Para el diseño de las actividades y el análisis, la autora retoma la tipología de las habilidades presentadas por Delgado Rubí (1998) centrándose en las habilidades *conceptuales* (aquellas que operan directamente con los conceptos). Sus resultados señalan una evolución favorable en las habilidades conceptuales *de interpretación geométrica de la derivada* y reconocimiento del concepto en otras ciencias u otros contextos (i.e. velocidad instantánea en Física, tasa de crecimiento instantánea en Biología, etc.) posibilitadas por el trabajo con el software.

La investigación presentada por Ramos, Herrera y Ramírez (2010), implementada con cerca de 240 estudiantes de nuevo ingreso de una institución de educación superior de la ciudad de Monterrey y alrededor de 6 profesores de la misma institución, presenta un análisis sobre los recursos de aprendizaje móvil para identificar el desarrollo de habilidades cognitivas en los estudiantes. Esta investigación enuncia una serie de habilidades cognitivas como: enfoque,

obtención y recuperación de información, organización, análisis, transformación, evaluación, solución de problemas, toma de decisiones, pensamiento crítico, pensamiento creativo; estas mismas habilidades son clasificadas en habilidades cognitivas básicas y habilidades cognitivas superiores. Los investigadores concluyen que el uso de los dispositivos móviles y los recursos implementados promovieron las habilidades cognitivas básicas, aunque no lograron promover las habilidades cognitivas superiores de pensamiento crítico, pensamiento creativo.

Por último, el MEN (1998) menciona que el desarrollo del Pensamiento Variacional debe darse desde los primeros años de la educación primaria con el fin de que los estudiantes al llegar a la universidad hayan alcanzados los estándares básicos en competencias en matemáticas propios del Pensamiento Variacional y que son establecidos por el MEN, 2006:

- Utilizar las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.
- Interpretar la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollar métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.
- Analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.
- Modelar situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas (p. 89).

Estos estándares fueron tenidos en cuenta por la coordinación del programa ASAE para la elaboración de uno de los instrumentos de evaluación usado en el curso de pre-cálculo, sobre este curso hablamos en la siguiente sección mientras que los estándares son referenciados dentro del marco conceptual que se explica en el siguiente capítulo.

El MEN relaciona las competencias en matemáticas con los procesos matemáticos al señalar que ser matemáticamente competente requiere ser diestro, eficaz y eficiente en el desarrollo de cada uno de esos procesos generales, en los cuales cada estudiante va pasando por distintos niveles de competencia (MEN, 2006, p.54). Por lo tanto, los estándares de competencias para el Pensamiento Variacional están relacionados con cada uno de los procesos matemáticos que el mismo describe, en particular, el proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos que denominamos proceso procedimental, del cual hablaremos en la siguiente subsección.

1.1.4. Proceso procedimental en matemáticas

Desde autores como Hiebert y Lefevre (1986) se habla del conocimiento conceptual y procedimental, planteándolos como dos grandes campos que organizan el conocimiento matemático; en los cuales se centraba en uno más que en otro la atención, según los intereses de los docentes. En particular definen el conocimiento conceptual como un conocimiento rico en relaciones, que puede pensarse como una membrana conectada de conocimientos, en donde las relaciones son muy importantes al igual que las piezas de información (Hiebert y Lefevre, 1986, p. 4). Proponiendo que una unidad de conocimiento no debe ser una pieza aislada de información.

Respecto al conocimiento procedimental se distinguen dos partes; una compuesta por el sistema de representación simbólica en matemáticas, y la segunda consiste en algoritmos o reglas para completar tareas matemáticas. A lo segundo Hiebert y Lefevre (1986) mencionan que consiste en:

> Reglas, algoritmos o procedimientos empleados para resolver una tarea. Existen instrucciones paso por paso que prescriben como concluir una tarea. […] Es la naturaleza secuencial de los procedimientos la que probablemente los diferencia de otras formas de conocimiento. (p. 6)

De igual modo, autores como Rittle-Jhonson, Siegler y Wagner (2001) también distinguen entre el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental. El conocimiento procedimental hace referencia a la capacidad de ejecutar secuencias de acción para resolver los problemas, y por lo tanto plantean que está ligado a los tipos de problemas específicos. Estos autores mencionan que para evaluar los conocimientos procedimentales suelen utilizar las tareas de rutina, como contar una fila de objetos o resolver cálculos aritméticos. Los autores enfocan su trabajo en el desarrollo del conocimiento conceptual y procedimental de fracciones en niños de quinto grado.

Por su carácter algorítmico y como menciona Rittle-Jhonson y Schneider (2012) que algunos problemas permiten el desarrollo del conocimiento procedimental, consideramos que esta interpretación se limita a lo memorístico. Cuestión que no va con el enfoque dado por el MEN (1998) al proceso de resolución de problemas, que lo plantea como eje central del currículo de matemáticas, además como lo menciona Polya al resolver un problema estamos encontrando un camino donde no se conocía uno con anterioridad, luego no se da de forma inmediata. Por lo tanto, los procedimientos no se deben limitar a lo memorístico y menos en situaciones que involucran la variación.

Referente a la limitación del conocimiento procedimental, Star (2004) habla de los procedimientos matemáticos, y plantea que a lo largo del plan de estudios de matemáticas de las escuelas en Estados Unidos, se espera que los estudiantes aprendan y utilicen procedimientos.

Sin embargo, los informes de evaluación de los Estados Unidos sobre el rendimiento en matemáticas dan fe que muchos estudiantes simplemente desarrollan el conocimiento memorístico de los procedimientos. Por lo tanto el autor propone que los estudiantes tengan un conocimiento de los procedimientos más flexible, es decir, que los estudiantes posean conocimiento de múltiples procedimientos de solución, y a su vez posean la capacidad de seleccionar los procedimientos adecuados para completar tipos particulares de problemas.

El trabajo de Star (2004) se enfoca en que los estudiantes de sexto grado tengan fluidez procedimental, esta última definida como "el conocimiento de los procedimientos, el conocimiento de cuándo y cómo usarlos apropiadamente, y la habilidad en el desempeño de forma flexible, precisa y eficiente" (Star, 2004, p. 3). Brindando una idea más interpretativa de "saber hacer" que no se limita únicamente a lo memorístico y a mecanizar la solución a diferentes tipos de problemas.

Otro referente sobre los procedimientos es Rico (1995) quien denota a los procedimientos como formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas, también propone que se pueden diferenciar niveles dentro de los procedimientos. El primer nivel son las *destrezas* que corresponden a la transformación de una expresión simbólica en otra expresión; el segundo corresponde a los *razonamientos* que concierne al establecimiento de relaciones entre conceptos; el último son las *estrategias* se dan sobre las estructuras conceptuales, es decir, sobre conceptos y sus relaciones. A su vez, según el campo de las matemáticas distingue entre destrezas aritméticas, métricas, geométricas y gráficas y de representación. Por su pertinencia y referente para el proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos establecido por el MEN (1998), lo acogemos como un referente teórico, y profundizamos sobre él en el marco conceptual.

Por último, Barajas (2015) logra la caracterización del proceso de elaboración comparación y ejercitación de procedimientos, específicamente para el Pensamiento Variacional, que mencionamos nuevamente en el siguiente capítulo sirviendo como referente para clasificar las habilidades asociadas a dicho proceso. La autora clasifica los procedimientos retomando la clasificación hecha por el MEN (1998) en cuatro grupos: aritmético, métrico, geométrico y analítico; y tiene en cuenta esta clasificación para indicar las dificultades observadas en los estudiantes respecto a este proceso.

Realizamos énfasis en lo que Barajas (2015) plantea sobre este proceso dado que en el desarrollo de la investigación es un referente principal para la construcción de los instrumentos que den cuenta de las habilidades de los estudiantes en relación al pensamiento variaicional. Nuevamente aclaramos que para efectos de la investigación, el proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos será entendido como proceso procedimental.

Observando el panorama general, se puede notar por un lado que los programas de seguimiento y acompañamiento no son analizados a profundidad desde los aprendizajes de los estudiantes, dado que algunos solo estudian la efectividad de los programas y su impacto a nivel general. Por otro lado, los trabajos que dan cuenta de los aprendizajes de los estudiantes en cálculo diferencial no están vinculados exactamente con programas de tutorías dirigidas por pares académicos.

En esta investigación, por el contrario, se proyecta el aprovechamiento de un programa de acompañamiento con un proceso de tutoría que cuenta con un seguimiento a los estudiantes en Cálculo Diferencial para dar cuenta de las habilidades del Proceso Procedimental que pueden desarrollar los estudiantes al ser parte de este tipo de programa.

1.2. Contexto y problemática

Desde la década de los noventa se ha evidenciado el interés por parte de algunos investigadores, como Tall (1991) y Dreyfus (1990) en profundizar en la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el Cálculo Diferencial e Integral. Al respecto, Davis (1988) y Artigue (1998) han indagado sobre los errores, dificultades y conocimientos en matemáticas de los estudiantes de los últimos años de secundaria y de los primeros cursos universitarios.

Referente a los conocimientos en matemáticas los documentos orientadores del currículo plantean que los estudiantes al terminar la formación preuniversitaria deben ser capaces de comprender relaciones y funciones, seleccionando y utilizando varias formar de representarlas, así como analizar el cambio en contextos diversos (NTCM, 2003. MEN, 1998, 2004). Sin embargo, algunos autores (Artige, 1998, Hit, 2005, Fiallo y Parada, 2014, Barajas, 2015) plantean que los estudiantes que ingresan a la educación superior no traen los conocimientos y habilidades necesarios de álgebra y pre-cálculo para afrontar, en particular, un curso de Cálculo Diferencial. Aludiendo a que a pesar de que estos documentos hacen énfasis en el desarrollo homogéneo de procesos y contenidos, la prioridad está en el aprendizaje de conceptos (Fiallo y Parada, 2014) perdiéndose así el equilibrio entre procesos y contenidos matemáticos.

Específicamente desde el proceso procedimental, Star (2004) menciona que éstos deberían ya ser dominados por los estudiantes preuniversitarios, sin embargo, los resultados en los exámenes muestran que el conocimiento de ellos es netamente memorístico. Al respecto, Barringer, Pohlman y Robinson (2010) mencionan que dicho manejo memorístico puede obstaculizar la compresión de los conceptos matemáticos y la capacidad de resolver problemas

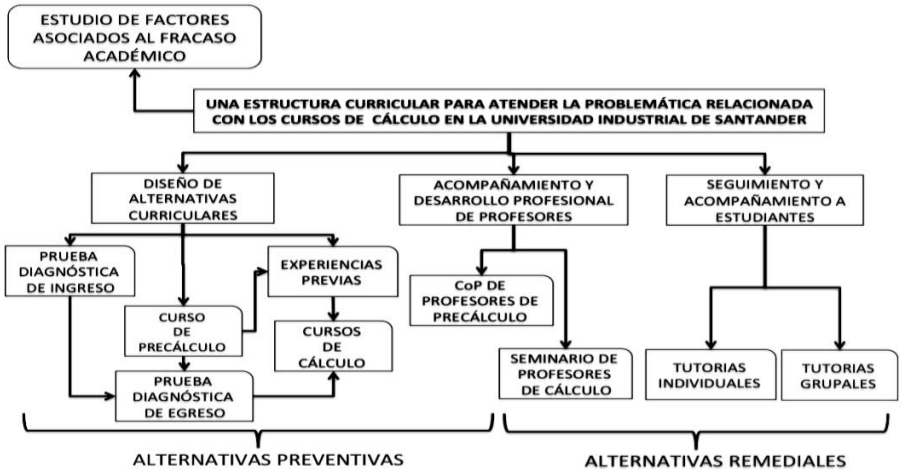
Al mirar localmente, la vicerrectoría académica de la UIS ha realizado estudios cuantitativos, evidenciando que los cursos de matemáticas son los de mayor reprobación, en particular el curso de Cálculo Diferencial. Barajas (2015) reporta que en los años 2012 y 2013 se ofrecieron en promedio 40 cursos de esta asignatura, cada uno de ellos con más o menos 40 estudiantes, con un porcentaje aproximado de reprobación entre 49 y 64%, convirtiéndose en un asunto preocupante para los directivos y profesores de la universidad. No obstante, la UIS cuenta con diferentes alternativas que atienden la problemática de los cursos de matemáticas en general.

El proyecto denominado *una estructura curricular para atender la problemática de cálculo I en la UIS*, expuesto por Parada (2016) contiene alternativas remediales y preventivas desarrolladas desde la Escuela de Matemáticas con apoyo del SEA. En la

***Ilustración* 1** se muestra un esquema de todo lo que comprende el proyecto, el cual se empezó a implementar parcialmente desde el 2012 y es precisamente desde la implementación de este proyecto y desde algunas de las actividades de las alternativas preventivas y remediales que se desprende el estudio que aquí reportamos.

A continuación, se describen los dos de los tres ejes fundamentalmente del proyecto, en los cuales se encuentran involucradas algunas de las actividades que se tendrán en cuenta en esta investigación:

Ilustración 1. Estructura general del proyecto curricular de la UIS. Fuente: Parada (2016)



i. **Diseño de alternativas curriculares**, actualmente en este eje se considera el diseño y la aplicación de una prueba diagnóstica denominada *Prueba de Competencias Básicas de Matemáticas* que permita conocer el desempeño del estudiante de nuevo ingreso, de las carreras de ingenierías y ciencias, a la universidad en la resolución de problemas de fenómenos variacionales. La prueba tiene una parte virtual en donde el estudiante selecciona la opción que considera correcta, y una parte escrita en donde a lo sumo se le plantean dos situaciones que el estudiante debe resolver explicitando sus procedimientos. la prueba se aplica al iniciar un curso de pre-cálculo y al finalizarlo se aplica una prueba de egreso para obtener un referente del impacto del curso.

El curso de pre-cálculo, que a la fecha se sigue implementando, es otra alternativa preventiva ofrecida a aquellos estudiantes que presentan los más bajos puntajes en la valoración de Matemáticas de la prueba nacional Saber 11. El propósito principal de este curso es potenciar habilidades del Pensamiento Variacional de los estudiantes. Según Moreno (2015), el trabajo en este curso se constituye en un espacio de enseñanza y aprendizaje que posibilita un proceso activo de resolución de problemas, que involucra los

procesos matemáticos definidos por los estándares de matemáticas del país MEN (2006), con una metodología fundamentada en la interacción entre pares y estudiantes-profesores. Los procesos se quieren potenciar con el apoyo de tecnologías digitales, las cuales son mediadoras para la producción de aprendizajes significativos alrededor de ideas como el cambio y la variación. El curso tiene una intensidad horaria de 4 horas diarias durante 15 días previos al inicio de las actividades académicas. Actualmente, los profesores al finalizar el curso realizan un informe cualitativo y cuantitativo de cada uno de sus estudiantes con la ayuda de un formato denominado DIPEVA (Dificultades en el Pensamiento Variacional) que contempla los cuatro estándares del Pensamiento Variacional señalados por el MEN para el grado undécimo.

ii. **Seguimiento y acompañamiento a Estudiantes**. Con el propósito de atender las necesidades específicas de los estudiantes de cálculo que presentan bajo rendimiento académico, se crea en 2012 el programa de "Atención, Seguimiento y Acompañamiento a Estudiantes" (ASAE), el cual contempla tutorías individuales y tutorías grupales bajo la premisa del trabajo entre pares dado que éstas son realizadas por profesores en formación. Esta línea se ha consolidado bajo la coordinación de educadores e investigadores matemáticos, además, Botello (2013) realizó la caracterización de ASAE. Aquí sus principales características aún vigentes:

- La atención tutorial se da a grupos de estudiantes (máximo tres estudiantes) en un periodo de tiempo de dos horas una vez a la semana durante todo el semestre.
- Los estudiantes beneficiarios son estudiantes de primer nivel de las carreras de ingenierías y ciencias, teniendo prioridad aquellos que tras la presentación de las

pruebas diagnóstico y su participación el curso de pre-cálculo han sido identificados con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

- Los estudiantes beneficiarios son asignados a un tutor para trabajar con él durante todo el semestre.
- Los tutores son estudiantes de Licenciatura en Matemáticas que se clasifican en dos tipos: los tutores-practicantes son estudiantes que están cursando la signatura de Didáctica del Cálculo, quienes no reciben remuneración económica y dan tutoría a tres estudiantes una vez a la semana. Los tutores-auxiliares son estudiantes que aprobaron la asignatura de didáctica del Cálculo, ellos reciben una remuneración económica por trabajan con cuatro grupos de tres estudiantes cada uno.
- Los alumnos-tutores realizan, tras cada tutoría, un reporte del desempeño de cada estudiante en el *Formato de seguimiento* para las tutorías de Cálculo I, relacionando fortalezas y dificultades del estudiante detectadas en la tutoría, además de las actividades tratadas y los objetivos trazados.
- Los tutores registran la asistencia de sus estudiantes para llevar un control y determinar cuáles estudiantes pueden perder el beneficio, y posteriormente asignar un nuevo estudiante.
- Los tutores diseñan talleres para trabajar en las sesiones de tutoría; de esta forma el programa se orienta en la resolución de problemas y el desarrollo de procesos matemáticos.

Después de la creación del SEA como política institucional en 2014 (Acuerdo del Consejo Superior No. 018 de 2014), el programa ASAE es institucionalizado en la UIS. Actualmente la coordinación de ASAE, desarrolla actividades para atender a estudiantes desde el

ingreso a la universidad (con la caracterización del pensamiento matemático y el curso de inducción a la formación matemática universitaria) y posteriormente posibilita el acompañamiento mediante tutorías para alumnos de primer nivel y para estudiantes repitentes de asignaturas de matemáticas. Por este motivo ASAE se constituye en un programa más amplio que abarca alternativas preventivas y remediales, construyendo así un espacio de aprendizaje completo a favor de la permanencia universitaria.

Cabe resaltar que desde el segundo semestre de 2013, ASAE en la parte tutorial hace parte de las alternativas propuestas en el convenio No. 901 que la UIS tiene con el Ministerio de Educación Nacional (MEN). Luego el programa tiene tanto un reconocimiento institucional como gubernamental, que es ratificado en el documento presentado por el MEN (2015) donde reconocen a ASAE como parte de los programas dirigidos a enfrentar la deserción en la institución.

En general, ASAE y todo el proyecto curricular se convirtió en un rico espacio de investigación que consolida una Comunidad de práctica de Educadores Matemáticos (Moreno, 2015), quienes a través de diferentes estudios han ido validando varias de las estrategias implementadas en el programa, e.g. Botello (2013), Suarez y Rojas (2013), Barajas (2015), Moreno (2015), Rueda (2016) y López (2015).

Por lo anterior este proyecto pretende contribuir a la teorización de los aprendizajes de los estudiantes en su paso por todo lo que constituye un programa de seguimiento y acompañamiento estructurado. A continuación, la pregunta y objetivo de la investigación.

Pregunta de investigación

¿Qué habilidades asociadas al proceso procedimental desarrollan estudiantes beneficiarios de un programa de acompañamiento y seguimiento en Cálculo Diferencial?

Objetivo:

Identificar y describir habilidades asociadas al proceso procedimental que desarrollan estudiantes beneficiarios de un programa de acompañamiento y seguimiento en Cálculo Diferencial.

2. Marco conceptual

Con el fin de poder describir las habilidades presentes en los estudiantes, beneficiarios del programa de acompañamiento académico, al momento de resolver situaciones propias del Cálculo Diferencial y dada la continua interacción de los estudiantes con un par académico más aventajado, decidimos profundizar sobre el Pensamiento Variacional y la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) de Vygotsky.

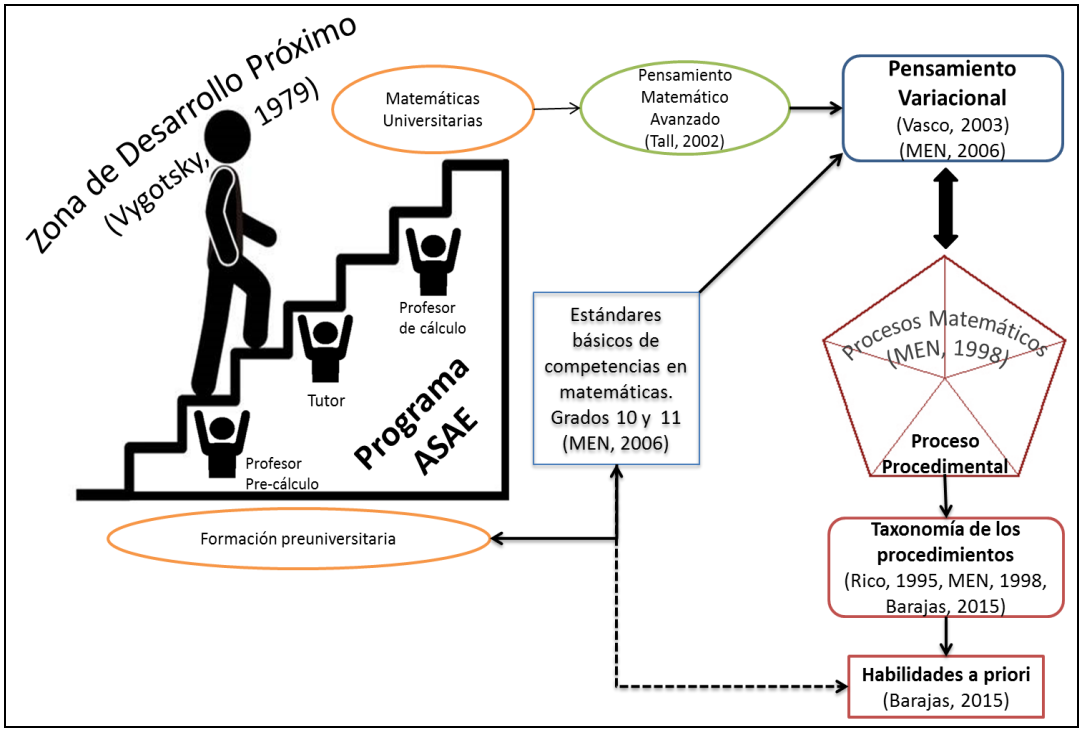
Es sabido que los estudiantes al terminar su educación media vocacional (formación preuniversitaria) e ingresar a la educación superior continúan un proceso de aprendizaje. En el caso de las matemáticas algunos autores (Tall, 2002, Dreyfus, 1991) consideran transitar del *pensamiento matemático elemental* al *pensamiento matemático avanzado* (PMA), en donde necesitarán la "ayuda" de otra persona (más capacitada) para superar los obstáculos, principalmente en estudiantes identificados en riesgo académico. Esto lo podemos interpretar como el pasar de un nivel de desarrollo real a uno nuevo. Por lo tanto, dentro del programa de acompañamiento académico en Cálculo Diferencial se evidencia una Zona de Desarrollo Próximo (Vygotsky, 1979).

Como habíamos mencionado anteriormente, el proceso de aprendizaje es sobre elementos del Cálculo Diferencial que se relaciona principalmente con el Pensamiento Variacional, en donde desde los documentos orientadores del currículo de matemáticas (MEN, 1998, 2004, 2006) se plantea lo que el estudiante debe ser capaz de realizar al finalizar el colegio, por medio de estándares básicos de competencias. Interpretándolo desde la teoría sobre la ZDP como el nivel de desarrollo real "esperado" para afrontar un curso de Cálculo Diferencial.

Así mismo, el Pensamiento Variacional se relaciona con los cinco procesos matemáticos, propuestos por el MEN: Resolución de problemas, Razonamiento, Comunicación, Modelación, y específicamente con el proceso Procedimental (elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos). Sobre los procedimientos algunos autores (Rico, 1995, MEN, 1998 y Barajas, 2015) los clasifican de acuerdo al campo de las matemáticas, obteniendo una taxonomía de los procedimientos (aritméticos, métricos, geométricos y analíticos). Además, alrededor de los tipos de procedimientos se han definido algunas habilidades a priori (Barajas, 2015) que se relacionan con los estándares dada su conexión con el Pensamiento Variacional.

En la Ilustración 2 se presenta un esquema que resume el marco conceptual con el que damos sustento al análisis de los datos y que, de alguna forma, orientó el diseño metodológico de la investigación.

Ilustración 2. Esquema del marco conceptual.



En lo que sigue de este capítulo describimos cada uno de los elementos conceptuales y su interpretación dentro de la investigación.

2.1. Elementos teóricos sobre el aprendizaje según Vygotsky

Vygotsky desde el campo de la psicología en los años 20, estuvo interesado en estudiar los procesos psicológicos superiores del ser humano, como por ejemplo el lenguaje que inicialmente no nos pertenecen, sino que pertenecen al grupo humano en el que nacemos, así, una de sus premisas es que estos procesos se originan en la vida social, es decir, en la interacción del sujeto con otros en la realización de actividades. El lenguaje como proceso es considerado fundamental ya que se convierte en una de las principales herramientas de aprendizaje, lo que nos lleva a confirmar que el dialogo continuo favorece la construcción de conocimiento.

En ese sentido al hablar de diálogo e interacción social para posibilitar el aprendizaje nos trae a colación el tipo de aprendizaje colaborativo, dado que son características esenciales presentes en este tipo de aprendizaje como lo plantean Guitert y Giménez (2000), en donde para ellos este aprendizaje se propone como un proceso social de construcción de conocimiento, en donde al establecer metas comunes se propicia

> … reciprocidad entre un conjunto de individuos que saben diferenciar y contrastar sus puntos de vista de tal manera que llegan a generar un proceso de construcción de conocimiento. Es un proceso en el que cada individuo aprende más de lo que aprendería por sí solo, fruto de la interacción de los integrantes del equipo (Guitert y Giménez, 2000, p. 114).

Teniendo en cuenta las ideas mencionadas hasta el momento, y con la caracterización del programa de acompañamiento y seguimiento ASAE, que es nuestro contexto de investigación,

decidimos analizar e interpretar las situaciones de enseñanza y aprendizaje que se evidencian en las actividades del programa (específicamente en el curso de pre-cálculo y las tutorías), desde los elementos teóricos relacionados con el aprendizaje colaborativo según Vygotsky. Uno de los elementos que mayor repercusión tiene en el análisis de las prácticas educativas es la denominada Zona de Desarrollo Próximo (ZDP); otros elementos a explicar a continuación son el andamiaje, y procesos de interiorización.

Antes de entrar en detalle con estos elementos, cabe resaltar que para algunos autores como Rodríguez (2013) la Teoría Sociocultural de Vygotsky tiene implicaciones trascendentales para la educación y la evaluación del desarrollo cognoscitivo. Esto porque las pruebas basadas en la ZDP representan una alternativa para superar las pruebas estandarizadas de inteligencia, que suelen poner atención a los conocimientos y aprendizajes ya realizados por el estudiante, proponiendo una alternativa para evaluar sus potencialidades, de esta forma los estudiantes a nivel escolar se benefician.

2.1.1. Zona de Desarrollo Próximo

La definición más usada y trabajada por los investigadores que proviene de la formulación original en la obra de Vigotsky es la siguiente:

> la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz. (Vigotsky, 1979, p. 133).

De la definición anterior entendemos que en el nivel de desarrollo real se encuentran los conocimientos necesarios para solucionar un problema, en nuestro caso conocimientos

matemáticos, y que además permiten con la ayuda de un experto resolver nuevos problemas con un grado de complejidad mayor. Además, Vigotsky plantea que lo que el aprendiz es capaz de hacer hoy en colaboración con otro será capaz de hacerlo por sí mismo mañana. La idea anterior nos hace pensar que la resolución de problemas propios del Cálculo Diferencial con ayuda del tutor influirá positivamente en el estudiante, en el momento de resolver individualmente situaciones similares.

Rodríguez (2013) menciona que la importancia de la Zona de Desarrollo Próximo consiste en que destaca la unidad y diferencia entre el desarrollo actual y el desarrollo potencial, enfatiza en el valor de la actividad de colaboración y de la comunicación en el proceso de enseñanza, así como el papel del profesor o educador como orientador y facilitador de ese proceso (p. 15). Luego como lo menciona Parra (2010), la ZDP se logrará gracias a la *mediación*, entendiéndola como el proceso en el cual participa un mediador (el tutor, el profesor) quién conduce los procesos de enseñanza y aprendizaje estableciendo una relación de ayuda con el aprendiz, para apoyarlo a organizar y desarrollar los procesos del pensamiento; en nuestro caso particular, a la elaboración y ejercitación de procedimientos matemáticos.

Con lo anterior podemos interpretar que la ZDP no se limita únicamente a lo que el estudiante puede o no hacer independientemente, sino a una estructura mayor y más allá del sujeto, como lo plantea Baquero (1997) al decir que “la ZDP obliga a pensar más que en una capacidad o característica de un sujeto, en las características de un sistema de interacción socialmente definido”. En esos términos la ZDP se puede entender como un "sistema social", y llevándolo al contexto local de la investigación entonces el programa de acompañamiento siendo un sistema social innato se puede interpretar desde este elemento teórico.

2.1.2. Andamiaje

Ahora bien, se plantea que para que el estudiante adquiera autonomía en el desarrollo de los problemas una de las cosas a tener en cuenta es que el apoyo, que brinda esa persona con mayor dominio, debe tener ciertas características; sin embargo, Vygotsky no lo planteó explícitamente, pero otros autores como Woods, Bruner y Ross en 1976 hicieron la formulación del andamiaje, que rápidamente se asoció con la ZDP según Baquero (1997).

> El termino andamiaje se entiende como una situación de interacción entre un sujeto experto, o más experimentado en un dominio, y otro novato, o menos experto, en la que el formato de la interacción tiene por objetivo que el sujeto menos experto se apropie gradualmente del saber experto (Baquero, 1997, p. 148).

De acuerdo a esto el andamiaje está inmerso en la ZDP y algunas recomendaciones para que la situación de interacción sea optima es que el novato participe desde el comienzo en la actividad que reconoce como compleja, sin importar que su participación inicial sea sobre aspectos particulares de la actividad. Por lo tanto, la idea de andamiaje hace referencia a que la actividad se resuelve "colaborativamente".

Haciendo la analogía con los andamios en construcción, el andamiaje debe poseer como características las siguientes:

a) A*justable*, de acuerdo con el nivel de competencia del sujeto menos experto y de los progresos que se produzcan;

b) T*emporal*, ya que un andamiaje que se torne crónico, no cumple con otorgar autonomía en el desempeño al sujeto menos experto.

c) El andamiaje debería ser *audible y visible*, es decir, desde un inicio al reconocer que trata de una actividad compleja, el novato debe ser consciente de que es asistido o auxiliado en la ejecución de la actividad. En otras palabras, debe conocer que los logros a los que accede son producto de una actividad intersubjetiva (Cazden, 1988, citado en Baquero, 1997).

De igual forma que los andamios, el andamiaje tiene cuatro funciones esenciales:

1) Brindar apoyo,
2) servir como herramienta,
3) ampliar el alcance del sujeto que de otro modo serían imposible,
4) usarse selectivamente cuando sea necesario.

Por último, el *proceso de interiorización* es entendido como el proceso de pasar de lo interpsiquico a lo intrapsiquico, es decir, de lo creado socialmente, el conocimiento colectivo al pensamiento y conocimiento autónomo del sujeto; en ultimas, este proceso conlleva a la apropiación de lo aprendido socialmente para actuar por sí mismo. Este proceso se puede identificar explícitamente en el trabajo que el estudiante está realizando desde que ingresa al curso de pre-cálculo y pasa, posteriormente, a las sesiones de tutoría y la actividad complementaria que el estudiante debe realizar después de ellas, propiciada inicialmente por el profesor de pre-cálculo y luego por el tutor.

Teniendo en cuenta las ideas mencionadas, y con la caracterización del programa de acompañamiento y seguimiento, como espacio de interacción continua entre profesores, tutores y estudiantes, decidimos analizar e interpretar las situaciones de aprendizaje que se evidencian en las sesiones de tutoría desde los elementos teóricos ya expuestos.

2.2. Pensamiento matemático avanzado

Hasta hace treinta años los problemas de investigación estaban muy centrados en los conceptos básicos de las matemáticas de la enseñanza primaria, es decir, como lo menciona Manson (1997), el término "educación matemática" se asocia principalmente con los niños y las matemáticas escolares. Sin embargo, para la época ya existían investigadores de nivel universitario interesados en la educación matemática universitaria. Es así, como en 1985, en el International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), se conformó un subgrupo de trabajo cuyo objetivo era profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el Cálculo Diferencial e Integral (Dreyfus, 1990, Tall, 1991). De allí se obtuvo como resultado una ampliación del campo de los problemas de investigación a cuestiones relacionadas con el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), propio de los currículos de los últimos años de educación media o preuniversitaria y los primeros cursos universitarios. Siendo estos últimos el principal contexto de nuestra investigación.

Cantoral (2008) plantea que algunas de las investigaciones en didáctica que se han ocupado de documentar las dificultades de los estudiantes cuando se enfrentan al estudio de las ideas del análisis matemático, asumen que el pensamiento matemático avanzado posee procesos del pensamiento sobre tópicos llamados "avanzados" en matemáticas, posteriores al álgebra básica, como: abstracción, generalización, prueba, visualización y razonamiento bajo hipótesis. Sumado a esto la gran mayoría de las investigaciones que se centran en tópicos del Cálculo, se ocupan de estudiar las nociones de número real, función, límite, continuidad, diferenciación, integración y ecuaciones diferenciales.

Algunos de los procesos del pensamiento matemático avanzado son retomados y adaptados por el MEN (1998) para el diseño curricular de la educación básica y media, ya que como plantean Azcárate, Camacho y Sierra (1999), la abstracción no es característica exclusiva de las matemáticas superiores, así como tampoco lo son los demás procesos cognitivos. Por otro lado, al interior del grupo de investigación en enseñanza del Cálculo (conformado al interior del grupo de Educación Matemática, EDUMAT-UIS) se ha ido investigando sobre algunos de estos procesos directamente relacionados con las nociones de aproximación, variación y cambio, propias de los temas de un curso de Cálculo Diferencial. Esta última cuestión nos lleva a revisar el Pensamiento Variacional que es descrito y trabajado a nivel nacional desde los niveles más inferiores de educación.

2.2.1. Pensamiento Variacional

Entre las posturas sobre el Pensamiento Variacional tenemos la de Cantoral y Farfán (2003, citados en Vrancken, et al. (2014)), quienes han venido trabajando sobre el Pensamiento y el Lenguaje Variacional (PyLV) y expresan que:

> El Pensamiento y Lenguaje Variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Hace énfasis en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales (p. 3).

En el ámbito nacional, Vasco (2006) considera como propósito importante en la matemática escolar el desarrollo de cinco tipos de pensamiento matemático: el numérico, el

espacial, el métrico, el estocástico y el variacional, a través de cinco procesos matemáticos básicos (formular y resolver problemas, comunicar, razonar, modelar procesos y fenómenos de la realidad, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos). Sobre el Pensamiento Variacional, el autor consideró necesario unos cambios, como por ejemplo pasar de las matemáticas estáticas a las dinámicas, y del pensamiento de verdades absolutas al Pensamiento Variacional, dado que desde su formación halla que las matemáticas refinadas que se tienen actualmente surgieron de los fenómenos de la realidad por medio de los procesos de matematización, y pese a esto el sistema educativo tiene una organización en donde los estudiantes parten de la matemática ya dada para interpretar los fenómenos.

Por lo anterior, Vasco plantea que el Pensamiento Variacional no debe confundirse con la memorización de fórmulas de áreas, volúmenes o de la física por su carácter estático. Al respecto consideramos que esto podría converger en la algoritmización del Cálculo al que se refiere Artigue (1998), como una de las dificultades en el aprendizaje del Cálculo Diferencial. Para el autor ya mencionado el Pensamiento Variacional:

> puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (Vasco, 2006, p. 6)

Concluyendo que dada la naturaleza de las magnitudes variables, este tipo de pensamiento necesita de los demás tipos de pensamiento matemático con el objetivo principal de la captación y modelación de la covariación entre cantidades de magnitud (Vasco, 2006). El objetivo coincide con la definición del *razonamiento covariacional* de Carlson, et al. (2003) ya que lo definen

como “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p. 124). Por otro lado, Vasco (2006) ratifica a la tecnología electrónica y los paquetes matemáticos como herramientas potentes en el desarrollo del Pensamiento Variacional.

No obstante, nos separamos un poco del propósito planteado por Vasco, ya que centra toda su atención en la modelación como enfoque principal para los problemas, y nosotras consientes del Cálculo Diferencial que abordan los estudiantes en la universidad, consideramos que se deben tener en cuenta otros tipos de problema además de los que implican la modelación. Porque de lo contrario no tendría sentido analizar un proceso completo de acompañamiento en Cálculo Diferencial, en donde hay involucrados diferentes procesos y contenidos.

Específicamente, en los Estándares Curriculares de Matemáticas se describe el Pensamiento Variacional en los siguientes términos:

> […] este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (MEN, 2006, p. 66).

De igual modo, se manifiesta que uno de los propósitos de cultivar el Pensamiento Variacional es construir, distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de las funciones, para el aprendizaje apropiado del cálculo numérico y algebraico y, más adelante, del Cálculo Diferencial e Integral. Entonces se ratifica que este tipo de pensamiento tiene un papel sobresaliente en la resolución de problemas, apoyados en el estudio de la variación y el cambio propios del Cálculo Diferencial.

Además de describir el Pensamiento Variacional, el MEN trabajó los años 2002 y 2003 con el apoyo del Instituto colombiano para a evaluación de la educación y la división de Evaluación y Estándares, en la elaboración de estándares básicos de competencias en matemáticas, teniendo como referente a los Lineamientos Curriculares de 1998.

Antes de continuar con los estándares, resaltamos que para el MEN (2006) la noción de competencia matemática hace referencia:

> […] al conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores (p. 49).

Observamos que ser competente matemáticamente se extiende más allá del aula de clase realizando acciones efectivas y a su vez reuniendo los tipos de pensamientos y procesos matemáticos; porque además, el desarrollo de las competencias es mediado por diferentes contextos, ambientes y situaciones de aprendizaje significativo de las matemáticas, en donde procesos generales como la comunicación y el razonamiento son esenciales para todos ellos.

Ahora bien, los estándares fueron definidos como un criterio claro y público que permite juzgar si un estudiante, una institución o el sistema educativo en su conjunto cumplen con unas expectativas comunes de calidad (MEN, 2006, p. 11). Sin embargo, con respeto a evaluar o juzgar un estudiante, se establece que un estándar no es un objetivo sino un mínimo de lo que el estudiante debe saber y ser capaz de hacer fuera del salón de clase ya como ciudadano.

En concreto, los estándares están contemplados para cada tipo de pensamiento y se definen para cada dos grados de la Educación Básica y Media. Por tal motivo, los estándares asociados al

Pensamiento Variacional que tendremos en cuenta por su proximidad con la educación superior son los propuestos para los grados decimo y undécimo:

- *Estándar 1.* Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.
- *Estándar 2.* Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollar métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.
- *Estándar 3.* Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.
- *Estándar 4.* Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas. (MEN, 2006, p. 89).

Estos estándares fueron tenidos en cuenta por la coordinación de ASAE la elaboración de la prueba de competencias básicas de matemáticas que presentan los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad, y para ello se elaboraron descriptores, ver Tabla 1, que detallan cada uno de los cuatro estándares para asociarlos a los ítems de dicha prueba, reportados por Botello y Parada (2015).

Hacemos énfasis en esta parte dado que uno de los instrumentos a analizar es la hoja de procesos de la prueba de competencias básicas de matemáticas y el formato de evaluación DIPEVA, que explicaremos a detalle en el capítulo siguiente. Además, estos estándares de competencias y sus descriptores pueden relacionarse con las habilidades asociadas al proceso procedimental, dado que en primer lugar hay una relación en el desarrollo de los tipos de

pensamiento con los tipos de procesos matemáticos (MEN, 1998, Vasco, 2003) y en segundo lugar porque las competencias involucran un conjunto de habilidades.

Tabla 1.

Descriptores para la prueba de competencias básicas de matemáticas

Estándares	**Descriptores**
Estándar 1	3. Reconoce características de los procesos infinitos utilizando diversas representaciones: gráficas, tablas o explicaciones verbales. 4. Utiliza aproximaciones numéricas o gráficas para deducir intuitivamente el límite de una función. 5. Aplica procedimientos aritméticos para resolver problemas que involucran procesos infinitos.
Estándar 2	1. Reconoce e interpreta situaciones que implican variación. 2. Interpreta la derivada como razón de cambio de cantidades variables y funciones en contextos matemáticos o no matemáticos. 3. Desarrolla o aplica métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. 4. Interpreta la derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente a la curva.
Estándar 3	1. Relaciona correctamente los diferentes registros de representación de una función en una situación problema. 2. Modela con propiedad una situación de cambio a través de una función. 3. Reconoce las pendientes de las rectas tangentes de funciones polinómicas o racionales, y las relaciona con el crecimiento o decrecimiento de las mismas.
Estándar 4	1. Modela situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas. 2. Interpreta la derivada como razón de cambio de cantidades variables y funciones trigonométricas en contextos matemáticos o no matemáticos. 3. Domina correctamente las razones y las identidades trigonométricas en contextos matemáticos o no matemáticos.

Nota: Adaptado de Botello y Parada (2015).

En el caso de los procesos matemáticos es importante precisar que, tanto para el MEN (2006) como para el grupo de investigadores al interior de la universidad, el gran proceso de resolución de problemas involucra todos los demás procesos, con el cual los estudiantes pueden: razonar, modelar, comunicar, y elaborar, comparar y ejercitar procedimientos. A continuación, expondremos cada uno de los procesos matemáticos con mayor énfasis en el proceso procedimental.

2.3. Procesos matemáticos

En toda actividad matemática están presentes algunos procesos generales: Resolución de problemas, razonamiento, modelación, comunicación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (MEN, 1998). Esta clasificación no es rígida, según los Estándares de Competencias Básicas en Matemáticas se espera que haya traslapes y relaciones entre los procesos, y como ya habíamos mencionado, el proceso de resolución de problemas involucra a todos los demás.

2.3.1. La Resolución de problemas

Como proceso es considerado un eje importante para la organización del currículo de matemáticas dado que una situación problema da inicio a la actividad matemática. Al resolver un problema se está comprometiendo a los estudiantes con una tarea, en donde no se conoce de antemano el método de solución (NCTM, 2003); como también lo plantea Polya al afirmar que al resolver un problema se debe encontrar la forma de salir de una dificultad, pero esa forma no es de manera inmediata.

Luego la resolución de problemas permite desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desarrollar una serie de estrategias de solución, encontrar resultados e interpretar su coherencia, así como también permite originar otros problemas.

2.3.2. El Razonamiento

El razonamiento matemático debe estar presente en todo el trabajo de los estudiantes. El MEN (1998) define razonar como la acción de ordenar las ideas en la mente para llegar a una conclusión. Entonces el razonamiento proporciona formas potentes de desarrollar y codificar conocimientos (NCTM, 2003). Además, el razonamiento en matemáticas según el MEN (1998, p. 77) tiene que ver con:

- El saber el cómo y el porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas, […], usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.

Como vemos, razonar permite entender las matemáticas y como hacer matemáticas implica descubrir, donde conjeturar es el principal camino para el descubrimiento (NCTM, 2003); por eso la importancia de que los estudiantes formulen y comprueben conjeturas para luego dar paso a la argumentación, que en ultimas converge en responder preguntas como ¿por qué funciona esto? Que al relacionarlo con el proceso procedimental significa justificar los

procedimientos utilizados para resolver un problema. Obteniendo de este modo una pequeña muestra de las relaciones entre procesos matemáticos.

2.3.3. La Comunicación

Según el MEN (1998) los estudiantes están comunicando matemáticas cuando trabajan en grupos cooperativos, cuando explican un algoritmo para resolver ecuaciones, y no solo eso, pues en general la comunicación es una necesidad de todos los seres humanos en todas las actividades que se realicen, que exige que seamos capaces de expresarnos de distintas maneras, de comprender, interpretar, unir y construir ideas y también de formular preguntas y argumentos válidos. Entonces como lo plantea Maciel (2003) "La comunicación matemática va más allá de resolver un problema, ésta involucra la escritura, la presentación y la argumentación de ideas" (p. 75). De allí que la comunicación sea considerada uno de los procesos más importantes en el aprendizaje de las matemáticas.

De igual forma para el NCTM (2003) la comunicación es fundamental en las matemáticas y en la educación matemática, porque es un camino para compartir y aclarar las ideas. Como proceso ayuda a dar significado y permanencia a las ideas y a hacerlas públicas. Por otro lado, A través de la comunicación los estudiantes vinculan sus nociones informales con el lenguaje de las matemáticas.

El programa de acompañamiento académico en Cálculo Diferencial no es la excepción, dado que los estudiantes necesitan comunicar sus ideas e inquietudes relacionadas, en particular, con los procedimientos para resolver situaciones que involucran conceptos como función, límites y derivada.

2.3.4. La Modelación

Los Lineamientos Curriculares en Matemáticas destacan que al hablar de actividad matemática en la escuela, los estudiantes aprenden "haciendo matemáticas" y esto conlleva a la resolución de problemas de la vida cotidiana, haciéndose necesario el proceso de modelación. Para Vasco (2006) la modelación asociada al Pensamiento Variacional es:

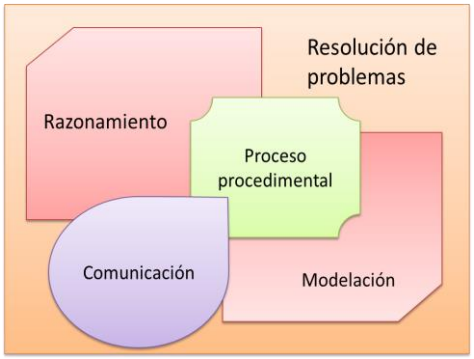
> […] es el arte de producir modelos matemáticos que simulen la dinámica de ciertos subprocesos que ocurren en la realidad. Se trata de un proceso de detección, formulación y proyección de regularidades por medio de la creación de un artefacto mental, un sistema con sus componentes, transformaciones y relaciones, cuyas variables covarían en forma que simulen las regularidades de la covariación de los fenómenos o procesos que se intenta modelar (p. 10).

Sumado a esto la modelación de una situación simplifica y selecciona una manera de representarla matemáticamente, gráficamente o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos y así lograr resolver los problemas relacionados con la situación (MEN, 2006). Por lo tanto, este proceso podemos considerarlo como el paso inicial para la elaboración e implementación de procedimientos para solucionar un problema, ya que con un buen modelo de la situación el estudiante podrá buscar diferentes caminos de solución, como ocurre muy a menudo en las situaciones de optimización y razón de cambio.

Con las descripciones de los procesos matemáticos identificamos las relaciones que tienen entre si y cómo se complementan, en particular, la relación de cada uno con el proceso procedimental. Encontrando en general que el proceso de resolución de problemas incluye a los demás procesos, y que tanto el proceso de razonamiento como el de modelación influyen en la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Una vez ejecutados los

procedimientos se dará lugar a la comunicación de los resultados, así como su interpretación para concluir con la solución a una situación. La Ilustración 3 esquematiza esas relaciones.

Ilustración 3. Relación de los procesos matemáticos con el proceso procedimental



2.3.5. Proceso procedimental

Para el MEN (1998) el aprendizaje de los procedimientos es importante en el currículo de matemáticas, dado que los procedimientos facilitan la aplicación de las matemáticas en la vida cotidiana. Como proceso implica comprometer a los estudiantes en la construcción y ejecución segura y rápida de procedimientos mecánicos o de rutina (MEN, 2006), sin dejar de lado la comprensión que permita elegir el procedimiento adecuado o realizar adaptaciones. Con respeto a la compresión, autores como Star (2004) proponen que los estudiantes tengan un conocimiento de los procedimientos más flexible, es decir, que los sujetos posean conocimiento de múltiples procedimientos de solución, y a su vez posean la capacidad de seleccionar los procedimientos adecuados para completar tipos particulares de problemas.

A su vez el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA) de la OCDE, al proponer lo que denominan como *capacidades matemáticas* plantea a la *Utilización de operaciones y lenguaje técnico, formal y simbólico* como una de estas capacidades y dada su descripción, como sigue a continuación, la relacionamos con el proceso procedimental:

> Comporta descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico; comprender sus relaciones con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico/formal; hacer uso de expresiones y asertos que contengan símbolos y fórmulas; emplear variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos. (OCDE, 2006, p. 102).

Un referente importante ya mencionado en los antecedentes es Rico (1995), quien entiende por procedimientos a las formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas, y a su vez propone que dentro del campo de los procedimientos se pueden diferenciar 3 niveles que dependen de los niveles de conocimiento (hechos, conceptos y estructuras conceptuales):

- Las *destrezas* consisten en transformar una expresión simbólica desde una forma dada hasta otra forma, y para ello hay que ejecutar una secuencia de reglas sobre manipulación de símbolos. Las destrezas se ejecutan procesando hechos.
- Los *razonamientos* se presentan al procesar relaciones entre conceptos.
- Las *estrategias* se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones. Las estrategias operan dentro de una estructura conceptual y supone cualquier tipo de procedimiento que puede ejecutarse teniendo en cuenta la relación y conceptos implicados. (Rico, 1995, p. 16).

Como podemos notar cada uno de estos niveles se asocia con un nivel de conocimiento que es ascendente. Las destrezas son a su vez clasificadas por el autor dependiendo del campo de las matemáticas, es decir que las clasifica en: aritméticas, métricas, geométricas, gráficas y de representación.

Este referente teórico es retomado por el MEN (1998) en la descripción de los tipos de procedimientos, pero a su vez define a los procedimientos como “las actuaciones, destrezas,

estrategias, métodos, técnicas, usos y aplicaciones diversas que un alumno realiza para resolver problemas de manera cada más hábil e independiente, con prontitud y precisión" (p. 103).

Además, el MEN (2006) menciona que mecanismos cognitivos involucrados en los algoritmos como la *alternación de momentos*, y la *reflexión*, permiten analizar la contribución de la ejecución de procedimientos rutinarios en el desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento matemático. Es decir, con el mecanismo de alternación de momentos se debe tener control de cual tipo de conocimiento prima, si el conceptual o el procedimental lo que implica la interpretación de los resultados; con el mecanismo de reflexión sobre qué procedimientos y algoritmos conducen al reconocimiento de patrones y regularidades, esto exige en el estudiante explicar y entender los conceptos sobre los cuales un procedimiento se apoya, y la lógica que lo sustenta, además de saber cuándo aplicarlo de manera fiable y eficaz.

Como podemos observar el proceso procedimental definido hasta el momento no se limita únicamente a lo algorítmico y memorístico, por eso a los procedimientos los seguiremos entendiendo como los presenta el MEN (1998).

Anteriormente habíamos mencionado que el trabajo de Barajas (2015) está enfocado en el proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos visto desde los fenómenos de cambio y variación. Para la autora dicho proceso:

> Implica la capacidad del estudiante para transformar procedimientos fijando su atención en las ideas centrales del cálculo diferencial (cambio y variación) y estableciendo relaciones entre ejes temáticos (patrones y regularidades; procesos algebraicos, y análisis de funciones) para efectuar nuevos procedimientos específicos que respondan al fenómeno variacional que subyacen en el problema (p. 44).

Sin embargo, a partir de lo que hemos expuesto sobre el proceso procedimental decidimos interpretarlo *como la creación y uso de procedimientos para aplicar y comunicar ideas matemáticas y a su vez resolver situaciones en contextos matemáticos y no matemáticos.* Además de acogernos a la clasificación de los procedimientos expuesta por Barajas (2015), que se presenta a continuación, dado que complementa los tipos de procedimientos ya elaborados por Rico (1995) y el MEN (1998).

a) Taxonomía de los procedimientos

Como habíamos mencionado anteriormente, Rico (1995) ha clasificado las destrezas en cinco tipos de acuerdo al campo de las matemáticas; mientras que el MEN (1998) teniendo como referente conceptual al anterior autor ha distinguido cuatro tipos de procedimientos, que Barajas (2015) ha retomado y complementado para plantear una clasificación de los procedimientos en cuatro tipos: aritmético, geométrico, métrico y analítico, generando así una taxonomía de los procedimientos, en donde reconoce que dentro de cada uno de ellos hay procedimientos algorítmicos y no algorítmico:

- **Procedimientos Aritméticos**

Relacionados con el dominio del número y la estructura del sistema de numeración decimal; de las operaciones en diversos contextos; de sus propiedades y de las relaciones entre ellas.

- **Procedimientos Métricos**

Implica la construcción de conceptos de cada magnitud, procesos de conservación, unidades de medida, estimación de magnitudes y de rangos, selección y uso de unidades de medida y de patrones, sistemas monetarios y sistema métrico decimal.

- **Procedimientos Geométricos**

Comprende atributos y propiedades de figuras y objetos 2D y 3D y su ubicación en el plano o el espacio; las nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad; los diseños y construcciones utilizando representaciones de cuerpos y figuras geométricas; las representaciones verbales y gráficas de recorridos y el reconocimiento de ángulos y polígonos, su clasificación y propiedades.

- **Procedimientos Analíticos**

Tienen que ver con "álgebra", "funciones" y "cálculo diferencial e integral"; con el reconocimiento de regularidades y patrones, la caracterización de la variación, la identificación de variables, la descripción de fenómenos de cambio y dependencia en contextos aritméticos y geométricos.

b) ***Habilidades a priori del proceso procedimental***

Antes de definir las habilidades asociadas a los tipos de procedimientos, es pertinente revisar de manera general que significa *habilidad.* Según el RAE habilidad es la *capacidad y disposición para algo o cada una de las cosas que una persona ejecuta con gracia y destreza*. Además, capacidad, competencia, destreza y experiencia aparecen como sinónimos del término habilidad, no obstante, dentro del campo de la educación debemos ser cuidadosos porque varios términos pueden no significar lo mismo. Entonces revisamos algunas definiciones sobre *habilidad* y *habilidad matemática* propias de la Psicología y la Educación Matemática resumidas en la Tabla 2.

Tabla 2.

Definiciones para habilidad y habilidad matemática.

Cañedo (2008)	**Rodríguez, Carnelli, Formica, (2005)**	**Falsetti, Favieri, Scorzo y Williner (2009)**
Habilidad	**Habilidad Matemática**	**Habilidad Matemática**
Sistema de acciones dominadas por el sujeto que responde a un objetivo. Es la capacidad adquirida por el hombre, de utilizar creadoramente sus conocimientos y hábitos tanto en el proceso de actividad teórica como práctica" (p.21)	Forman parte de la actividad matemática y pueden identificarse entre las entidades actuativas de Godino (1998) que hacen referencia a las acciones de un sujeto frente a situaciones o tareas.	Es la capacidad de efectuar o realizar una tarea matemática eficientemente o de actuar adecuadamente frente a una situación, en la que la Matemática esté involucrada, comprendiendo más de una operación intelectual. (p. 3)

En cada una de las definiciones podemos relacionar a las habilidades con acciones, pero particularmente caracterizadas por ser ejecutadas con eficiencia para alcanzar un objetivo, lo que implica que dichas acciones sean dominadas por el estudiante. En nuestro caso el objetivo es la resolución de problemas propios del Cálculo Diferencial. Sin embargo, autores como Golbach, Pérez y Rodríguez (2006, citado en Williner, 2014) no diferencian entre habilidades y procedimientos, conceptos fundamentales dentro de nuestra investigación, y por lo tanto no coincidimos con su posición, considerando a las habilidades diferentes de los procedimientos, como bien lo plantea Williner (2014) tras su análisis comparativo de varios autores sobre estos términos:

> […] discernimos entre procedimiento y habilidad vinculados con la Matemática. Por una parte, el procedimiento es la acción o tarea que debemos realizar para lograr un objetivo o fin en el cual la Matemática está involucrada. En tanto que una habilidad matemática es la facultad personal de efectuar el procedimiento eficientemente, es decir, la capacidad de realizar acciones correctamente en relación al logro del objetivo planteado. (p. 104).

Sumado a esto como ya habíamos mencionado sobre la competencia matemática como *conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, […] relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad*, y de igual forma para Falsetti, Favieri, Scorzo y Williner (2009) comprende una combinación de destrezas cognitivas y prácticas, conocimiento para *lograr una acción efectiva en un contexto particular.*

Para efectos del estudio que aquí se reporta, asumiremos la habilidad asociada con las *competencias de las que se habla en el MEN (2006) y éstas a su vez enfocadas en los procedimientos (como ya se mencionó alusivos al proceso de elaborar, comparar y ejercitar procedimientos (MEN, 1998).* Entonces, podemos decir que la formación por competencias en matemáticas sugiere lograr por medio de un conjunto de conocimientos, destrezas y actitudes la efectividad o acción efectiva en las diferentes experiencias matemáticas vividas, lo que implica tener habilidades (dominar y efectuar eficientemente los procedimientos).

Ahora bien, para cada tipo de procedimiento Barajas (2015) propone unas habilidades a priori asociadas al Pensamiento Variacional; las cuales usaremos literalmente para nuestra investigación (ver Tabla 3). Allí las habilidades se definen por medio de descriptores: “expresiones verbales escritas, relacionadas con la habilidad y que tiene como fin contribuir a describir las actuaciones de los estudiantes en las diferentes tareas variacionales” (p. 45).

Además, retomando los procedimientos analíticos planteados en el MEN (1998), decidimos complementar este procedimiento con los *procedimientos de rutina* como *transformar*, y así proponer dos descriptores de las habilidades asociadas a este procedimiento:

- ✓ Transforma expresiones algebraicas desde una forma hasta otra. (F_{11})
- ✓ Transforma un objeto matemático para obtener un nuevo objeto (F_{14}).

Tabla 3.

Descriptores de las habilidades a priori para el Pensamiento Variacional.

Procedimiento	*Descriptores*
Aritmético	• Realiza con los números reales, operaciones básicas y superiores. (F_2) • Usa diferentes notaciones de los números reales y establece relaciones para decidir sobre su uso en una situación dada. (F_3) • Establece relaciones que involucran números naturales y utiliza propiedades de los números para justificarlas. (F_1)
Métrico	• Emplea correctamente los aparatos de medida más comunes de las magnitudes longitud, tiempo, amplitud, capacidad, peso y superficie. (F_{10}) • Domina el sistema métrico decimal para seleccionar unidades apropiadas. (F_9)
Geométrico	• Realiza representaciones en el plano. (F_4) • Emplea un procedimiento de tipo gráfico que supone expresar una imagen visual de un concepto o relación variacional. (F_5) • Modela fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.
Analítico	• Determina las variables de una situación. (F_{12}) • Establece correctamente la interdependencia de las magnitudes variables. (F_{13}) • Representa situaciones de cambio a través de las expresiones algebraicas, las gráficas y las tablas. (F_8) • Traduce de una a otra de las distintas representaciones de una función. • Relaciona las expresiones algebraicas y gráfica empleando sus propiedades. (F_6) • Determina procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales. (F_7)

Además, dada la relevancia que tiene la interpretación simbólica en la ejecución de los diferentes procedimientos no solo en Cálculo Diferencial, y que es denotada por la OCDE (2006) a través de la capacidad de *Utilización de operaciones y lenguaje técnico, formal y simbólico,* nos parece pertinente considerar dos descriptores asociados a la habilidad para usar y manejar notaciones y símbolos matemáticos:

- ✓ Entiende y maneja la notación establecida para los objetos matemáticos de estudio. (F_{15})
- ✓ Da significado y usa correctamente los símbolos matemáticos usados en la resolución de problemas. (F_{16})

La abreviatura alfa-numérica al final de cada descriptor, en la Tabla 3, hace referencia al código con el que se identifica dentro de un instrumento de seguimiento que diseñamos y mencionamos en el capítulo de proceso metodológico (ver 3.2.3).

A su vez para el análisis de los datos consideraremos las *habilidades de control* expuestas por Barajas (2015) para este proceso, dado que según la autora el desarrollo de ellas implica "reconocer, entender, juzgar y usar procedimientos en una variedad de contextos y situaciones en los que la Matemática juega un papel importante" (p. 48):

- Reconocer cuando un procedimiento es apropiado.
- Verificar los pasos de un procedimiento y justificarlos (por ejemplo, usando modelos o analíticamente).
- Ejecutar procedimientos fiable y eficientemente,
- Generar nuevos procedimientos y ampliar o modificar los ya conocidos.

- Acceder a los algoritmos de la memoria a largo plazo y llevar a cabo una serie de acciones mentales mientras se trabaja a través de soluciones de varios pasos.
- Tener en cuenta que los algoritmos implican que tiene un orden en el que los pasos deben ser completados.
- Recordar y seguir la secuencia correcta para resolver el problema.
- Seleccionar los procedimientos apropiados para problemas concretos y modificarlos cuando las condiciones lo justifican.

De igual modo, rescatamos algunos de los descriptores resultantes de las dificultades reportadas por Barajas en sus conclusiones y que son más particulares de acuerdo a un objeto matemático. Pero que tenemos en cuenta para, de alguna forma, identificar si las dificultades que los estudiantes de nuevo ingreso afrontan son superadas en su paso por el programa de acompañamiento y seguimiento en Cálculo Diferencial. A continuación, algunas de ellas asociadas nuevamente a la taxonomía de los procedimientos.

Descriptores para los procedimientos de tipo aritmético:

- Utilizar las propiedades asociativa, conmutativa de la suma y propiedad distributiva de la multiplicación para simplificar los cálculos con números racionales tanto en su expresión fraccionaria y decimal.
- Emplear correctamente las razones y las identidades trigonométricas en contextos matemáticos o no matemáticos.

Descriptores para los procedimientos de tipo métrico:

- Identificar relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.

- Realizar comparaciones y estimaciones por medio de referentes de media.

Descriptores para los procedimientos de tipo analítico:

- Distinguir cómo se relacionan las magnitudes en el problema particular, por ende, reflexionar frente a lo que cambia, frente a lo que se conserva.
- Usar tablas para observar el cambio y la interdependencia de las magnitudes variables del problema.
- Emplear tablas de valores para observar patrones o regularidades que permitan establecer procesos de generalización.
- Establecer conexiones entre las representaciones de las funciones y asociar la información proporcionada por éstas con los esquemas mentales sobre funciones para la resolución de problemas.
- Utilizar aproximaciones numéricas o gráficas de la función para deducir intuitivamente el límite de una función.

Con lo anterior podemos relacionar las habilidades con los estándares básicos de competencia en matemáticas y sus descriptores presentados en la sección anterior, logrando de ese modo ampliar o especificar mejor la lista de habilidades a priori para un mejor análisis de los resultados que nos permitirán dar cuenta de las habilidades de los estudiantes en relación al proceso procedimental.

Realizamos énfasis en lo que los autores plantean sobre el proceso procedimental y sus habilidades a priori, dado que en una parte inicial fueron usados para el diseño de algunos instrumentos (Formato de seguimiento individual, prueba simulacro), así como para la interpretación de algunos ya existentes dentro del programan de acompañamiento y seguimiento

(Prueba de competencias básicas de matemáticas, Formato de evaluación DIPEVA); los instrumentos se presentan en el apartado 3.2.

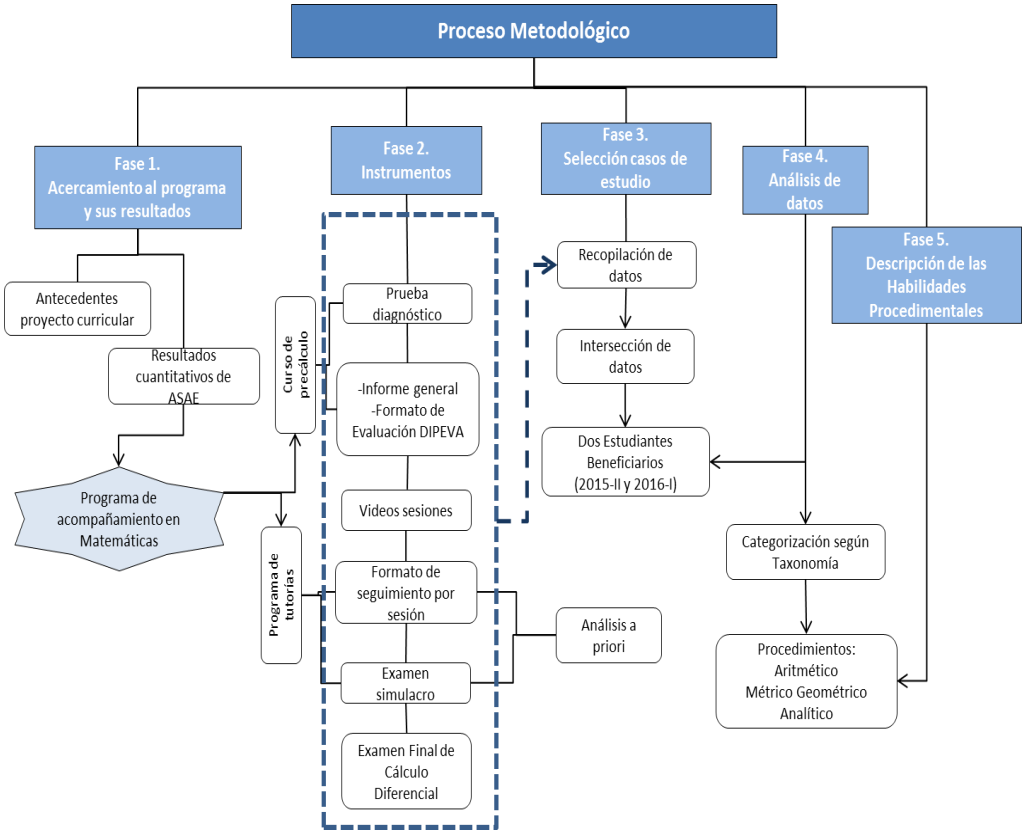
En general, para la identificación de las habilidades asociadas al proceso procedimental de estudiantes beneficiarios, algunos elementos conceptuales tendrán un mayor énfasis en algunas de las actividades realizadas por los casos de estudio (y coordinadas por el programa de acompañamiento y seguimiento). Es decir, los datos emergentes de las pruebas escritas serán analizadas siguiendo la taxonomía de los procedimientos y sus habilidades a priori para (en su respectivo caso) establecer lo que consideramos desde la teoría de Vygotsky como el nivel de desarrollo real del estudiante. Por otra parte, los datos obtenidos de las sesiones tutoriales serán interpretados a partir de los elementos teóricos del aprendizaje de Vygotsky, para identificar cuales habilidades son posibilitadas dentro de la gran Zona de Desarrollo Próximo, que representa el espacio de las tutorías dirigidas por un par académico más aventajado.

Finalmente, asumimos que un estudiante está desarrollando su proceso procedimental dentro del Pensamiento Variacional, si tiene la capacidad de resolver situaciones de variación y cambio propias de un curso de Cálculo Diferencial empleando algunas de las habilidades descritas.

3. Proceso metodológico

Para cumplir el objetivo de la investigación se usó una metodología mayormente cualitativa, que nos permitió indagar sobre las habilidades desarrolladas por los estudiantes en su paso por el programa de acompañamiento y seguimiento en Cálculo Diferencial, coordinado por el programa ASAE. A continuación, explicamos el camino que se siguió en esta investigación, además, describimos los instrumentos diseñados para recolectar y sistematizar los datos. Dado que tuvimos en cuenta datos cuantitativos presentaremos esos hallazgos en este capítulo, mientras que la parte cualitativa la presentamos en el siguiente capítulo cuando especificamos los casos de estudio. El proceso metodológico se organizó en cinco fases, y el esquema de la Ilustración 4 lo resume, a continuación lo describimos.

Ilustración 4. Proceso metodológico de la investigación



3.1. Fase 1. Un acercamiento al programa y sus resultados

Como habíamos mencionado en el apartado del contexto y problemática, la estructura curricular (

***Ilustración* 1**) se convirtió en un rico espacio para la reflexión y la investigación, por lo tanto, se exploraron los trabajos enmarcados por este proyecto, encontrando diferentes reportes de investigación ubicados en cada uno de los ejes fundamentales de la estructura:

i. Respecto al eje de Acompañamiento y desarrollo profesional de profesores está el trabajo de Moreno (2015) quien caracterizó los significados negociados en una comunidad de práctica (CoP) de educadores matemáticos que participaron en el curso de pre-cálculo, donde se evidenció que la interacción de los integrantes de la CoP promueve la confrontación entre diferentes concepciones propias de los objetos matemáticos del Cálculo Diferencial; así como, que los profesores de la CoP han negociado su rol protagónico en la clase para darle participación a los estudiantes durante los espacios de socialización de las actividades.

También se cuenta con el trabajo en curso de Sully Moreno (una compañera del programa de Maestría), donde a partir de las reflexiones realizadas en el programa ASAE, se determinan y explican los significados negociados (para concretar posibles aprendizajes) desarrollados por profesores de matemáticas en formación. En este trabajo, se observan algunos sujetos quienes además de haber realizado prácticas tempranas mediante tutorías académicas han transitado por las diferentes modalidades en las cuales se puede participar en esta CoP. La autora resalta que estos espacios son un apoyo para poder desarrollar las prácticas profesionales y mejorar la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles

educativos. Además, de posibilitar el desarrollo del pensamiento reflexivo en el profesor, lo que permite que evalúe sus prácticas para mejorarlas.

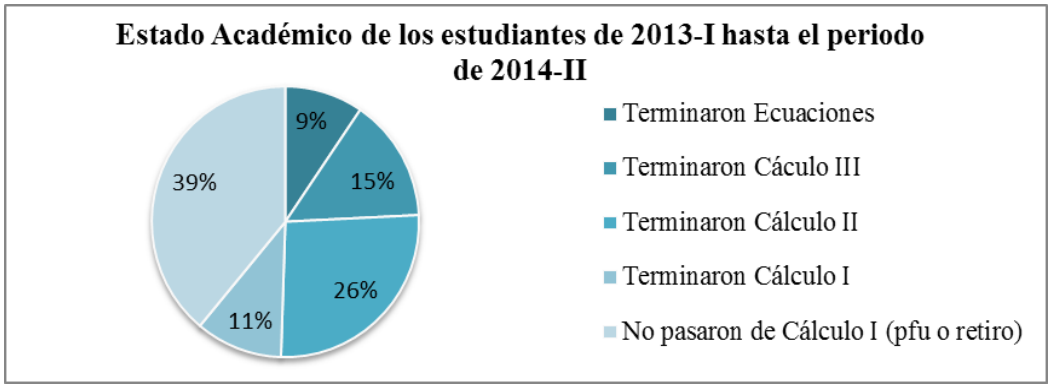
ii. En relación al eje de Acompañamiento y seguimiento a estudiantes, se tiene el reporte de Botello (2013) quien logra dos objetivos: i) caracterizar los aprendizajes que emergen en los profesores en formación dentro de un programa de seguimiento y acompañamiento académico en el que ellos fungen como tutores; ii) consolidar la identidad y las políticas de las tutorías académicas como espacio de formación docente y de acompañamiento académico a estudiantes de Cálculo Diferencial. Creando el programa de tutorías ASAE.

iii. En torno al eje de Diseño de alternativas curriculares se encuentra el trabajo de Barajas (2015) donde se reporta, a partir de la prueba de competencias básicas de matemáticas, las dificultades de los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad centrándose precisamente en el proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Además, plantea una taxonomía de los procedimientos y habilidades a priori relacionadas al proceso procedimental. Dentro de este eje a su vez está el trabajo de investigación de Rueda (2016) quien definió y caracterizó habilidades cognitivas asociadas a los procesos de representación de fenómenos de variación, posibilitadas por el uso de GeoGebra y las actividades que se realizan en el curso laboratorio de pre-cálculo, dirigido a los estudiantes de primer ingreso a las carreras de Ingenierías y Ciencias de la universidad.

Una vez explorados los distintos trabajos, encontramos que no hay una investigación que reporte los aprendizajes de los estudiantes beneficiarios de primer nivel. Y para examinar la riqueza del programa de acompañamiento a estudiantes, pasamos a revisar los resultados cuantitativos; inicialmente tenemos el seguimiento a los estudiantes beneficiarios de 2013-I en su

ciclo completo de cálculo, la Ilustración 5 muestra el resumen del estado académico de los estudiantes beneficiarios reportado hasta 2014-II.

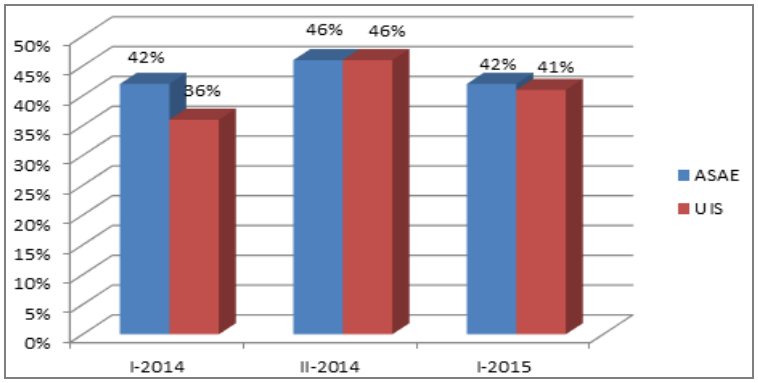
Ilustración 5. Aprobación de las asignaturas del ciclo de Cálculo, beneficiarios 2013-I.



A partir de la Ilustración 5 podemos ver que del total de beneficiarios de ese año (104 estudiantes) solo el 9% ha terminado su ciclo de cálculos, aspecto que plantea la existencia de dificultades en las siguientes asignaturas a Cálculo Diferencial. Por otro lado, el 39% de los estudiantes no aprobaron la asignatura de cálculo I después de cuatro semestres, algunos por retitos voluntarios y otros por retiro forzado debido al bajo rendimiento en diferentes periodos. Este último porcentaje se asemeja a los porcentajes de deserción en la universidad y a nivel nacional, recordemos que en nuestro país es del 44.9%, luego somos un reflejo del panorama nacional.

Los siguientes datos son reportados por el SEA al Consejo Superior (Ilustración 6), en donde se compararon las cifras de aprobación de los estudiantes beneficiarios de las tutorías con las cifras de aprobación de los demás estudiantes que cursaron Calculo I en los periodos de 2014-I a 2015-II, y como se puede observar en la Ilustración 6 las cifras son similares o superiores a favor del programa de acompañamiento.

Ilustración 6. Aprobación cálculo I: Beneficiarios de ASAE vs. no beneficiarios.



Fuente: Informe del SEA ante el Consejo Superior de diciembre de 2015.

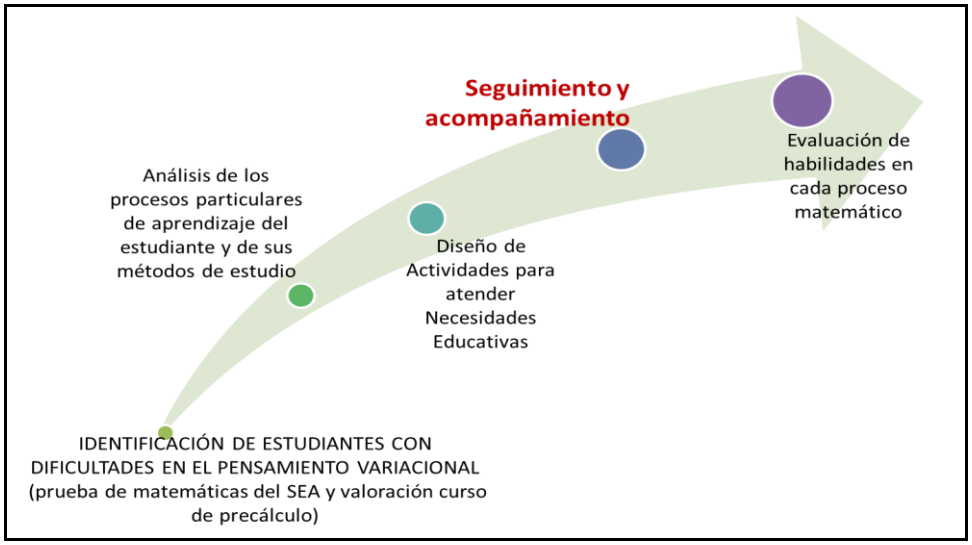
Dichos resultados, nos llevaron a reafirmar la idea que además de las políticas institucionales, las metodologías planteadas y el apoyo de la comunidad académica están contrarrestando la problemática inicial; no obstante, hace falta valorar el espacio con mayor profundidad y analizar cualitativamente lo que se ha logrado en los estudiantes.

Por todo lo anterior, identificamos al programa de acompañamiento y seguimiento como un espacio rico en información, y pertinente para identificar las habilidades que desarrollan los estudiantes identificados con riesgo de reprobación.

3.2. Fase 2. Instrumentos para la identificación de habilidades procedimentales

Teniendo en cuenta el esquema del desarrollo del programa ASAE, que se muestra en la Ilustración 7, se pudo hacer un reconocimiento de los instrumentos que brindan información sobre los estudiantes con relación a su desempeño en Cálculo Diferencial. El primero de ellos es la prueba de competencias básicas de matemáticas, seguido por el reporte del curso de pre-cálculo; ya dentro de las tutorías está el formato de seguimiento por sesión y la evaluación que los tutores realizan para preparar y evaluar a los estudiantes antes del examen final, este último aplicado por la Escuela de Matemáticas-UIS a todos los estudiantes que cursan la asignatura de Calculo Diferencial.

Ilustración 7. Esquema del desarrollo del programa de tutorías.

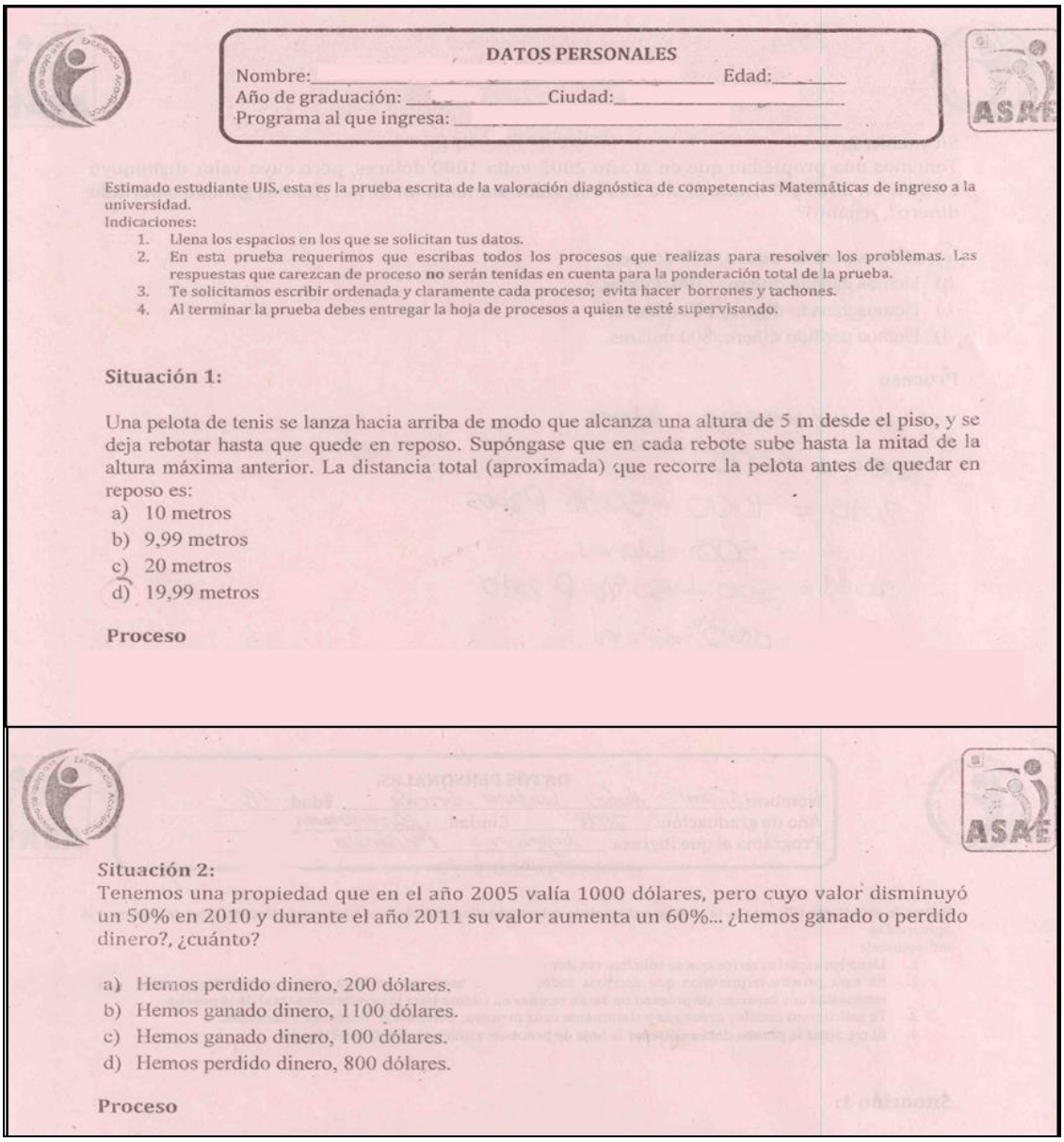


A continuación, se examina cada instrumento y se menciona específicamente que partes se tuvieron en cuenta para alcanzar el objetivo del trabajo.

3.2.1. Prueba de competencias básicas de matemáticas

En el segundo semestre de 2015, la coordinación del programa diseñó la *prueba de competencias básicas de matemáticas* con 13 problemas, cada uno asociado a un indicador que pretendían dar cuenta de los cuatro estándares del Pensamiento Variacional, propuestos por el MEN (2006) para el grado once. Los problemas eran de selección múltiple con única respuesta, sin embargo, once de ellos se respondían en la plataforma virtual de la universidad y los dos restantes se contestaban en una hoja de procesos (ver Ilustración 8). Lo anterior implicaba que los estudiantes no solo debían escoger la opción que consideraban correcta, sino también debían explicitar cada uno de los procedimientos que justifican la elección de una de las cuatro opciones.

Ilustración 8. Hoja de procesos, Prueba diagnóstica.



DATOS PERSONALES

Nombre:_____ Edad:_____
Año de graduación: _____Ciudad:_____
Programa al que ingresa: _____

Estimado estudiante UIS, esta es la prueba escrita de la valoración diagnóstica de competencias Matemáticas de ingreso a la universidad.
Indicaciones:

1. Llena los espacios en los que se solicitan tus datos.
2. En esta prueba requerimos que escribas todos los procesos que realizas para resolver los problemas. Las respuestas que carezcan de proceso **no** serán tenidas en cuenta para la ponderación total de la prueba.
3. Te solicitamos escribir ordenada y claramente cada proceso; evita hacer borrones y tachones.
4. Al terminar la prueba debes entregar la hoja de procesos a quien te esté supervisando.

Situación 1:

Una pelota de tenis se lanza hacia arriba de modo que alcanza una altura de 5 m desde el piso, y se deja rebotar hasta que quede en reposo. Supóngase que en cada rebote sube hasta la mitad de la altura máxima anterior. La distancia total (aproximada) que recorre la pelota antes de quedar en reposo es:

a) 10 metros
b) 9,99 metros
c) 20 metros
d) 19,99 metros

Proceso

Situación 2:

Tenemos una propiedad que en el año 2005 valía 1000 dólares, pero cuyo valor disminuyó un 50% en 2010 y durante el año 2011 su valor aumenta un 60%... ¿hemos ganado o perdido dinero?, ¿cuánto?

a) Hemos perdido dinero, 200 dólares.
b) Hemos ganado dinero, 1100 dólares.
c) Hemos ganado dinero, 100 dólares.
d) Hemos perdido dinero, 800 dólares.

Proceso

Nota: tomado de la documentación de la coordinación del Programa ASAE.

Dado que estamos interesados en los procedimientos de los estudiantes en la resolución de problemas, decidimos analizar únicamente las hojas de procesos, ya que las opciones escogidas en la plataforma no dan evidencia de qué tipo de procedimientos desarrollaron los estudiantes. Esta misma idea la aplicamos a la prueba de egreso del curso de pre-cálculo que tuvo 12 problemas y uno de ellos se desarrolló en la hoja de procesos.

Además, como lo plantea Valery (2000), en el lenguaje escrito por el hecho de tener que remplazar las palabras por signos gráficos y dirigirse a una persona ausente, exige un trabajo consciente y analítico, es decir, un alto nivel de abstracción. Por esto consideramos que las hojas de procesos pueden darnos información tanto de los conocimientos en matemáticas de los estudiantes, como de sus procedimientos en la solución de una situación.

Aclaramos que esas hojas de procesos fueron calificadas por los profesores del curso de pre-cálculo, siguiendo unas indicaciones diseñadas por la coordinación del programa dado que, para esa versión de la prueba, cada opción de respuesta tenía una puntuación diferente y una valoración para los procesos ejecutados. En resumen, contamos con tres situaciones para analizar e identificar habilidades y dificultades de los estudiantes antes de comenzar su proceso de acompañamiento.

3.2.2. Reporte del curso de pre-cálculo

Dado que el curso de pre-cálculo pretende valorar y posibilitar el desarrollo del Pensamiento Variacional y de los procesos matemáticos asociados a la variación en estudiantes que acaban de terminar el grado once. Entonces, al igual que las pruebas diagnósticas, El curso es valorado por medio de los indicadores asociados a los cuatro estándares en matemáticas para el Pensamiento Variacional propuestos por el MEN (2006).

Además, desde el trabajo de Barajas (2015), el curso cuenta con un *Formato de Evaluación DIPEVA* (Dificultades en el Pensamiento Variacional), que se diseñó como un instrumento para obtener una visión general de la superación de las dificultades de los estudiantes. Para tener esa visión general del avance se hacen tres registros: i) las calificaciones obtenidas en cada punto de la prueba de competencias básicas de matemáticas. ii) la valoración

de cada indicador de acuerdo al criterio del profesor del curso, iii) las calificaciones de la prueba de egreso del curso de pre-cálculo. En esta ocasión la calificación se hizo usando una escala numérica de cero a uno (0-1), usando decimales, donde cero correspondía a la menor puntuación de un indicador, mientras que uno era la mayor y mejor puntuación. A continuación, la

Ilustración 9 muestra el *Formato de Evaluación DIPEVA.*

Por otro lado, los profesores de cada grupo complementan este *Formato de Evaluación* con un informe cualitativo del desempeño de cada estudiante durante el curso de precálculo, este informe es libre, es decir, que los profesores pueden incluir aspectos actitudinales de los estudiantes además de los aprendizajes evidenciados en cada uno de ellos.

Por su estructura organizada para la evaluación y la consideración de los Estándares para el Pensamiento Variacional, que se relacionan estrechamente con las habilidades a priori para el proceso procedimental, decidimos considerar el *formato de evaluación* y el informe como instrumentos complementarios en la creación del perfil del caso de estudio en este proceso matemático, antes de iniciar el curso de Cálculo Diferencial y su paso por el programa de tutorías.

Ilustración 9. Formato de Evaluación DIVEVA

FORMATO DE EVALUACIÓN

DATOS GENERALES

Nombre del Estudiante:	**0**
Carrera:	**0**
Código:	**0**

		VALORACIÓN DEL ESTUDIANTE		
ID	**INDICADORES**	**EN LA PRUEBA DIAGNÓSTICA INICIAL**	**DURANTE EL DESARROLLO DEL CURSO**	**EN LA PRUEBA DIAGNÓSTICA FINAL**
		Calificación de 0-1	Calificación de 0-1	Calificación de 0-1
P4	Relaciona correctamente los diferentes registros de representación de una función en una situación problema.			
P1	Modela con propiedad una situación de cambio a través de una función.			
P5	Reconoce las pendientes de las rectas tangentes de funciones polinómicas o racionales, y las relaciona con el crecimiento o decrecimiento de las mismas.			
Hoja de procesos. Situación 2	Reconoce e interpreta situaciones que implican variación.			
P11	Interpreta la derivada como razón de cambio de cantidades variables y funciones en contextos matemáticos o no matemáticos.			
P2	Desarrolla o aplica métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.			
P7	Interpreta la derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente a la curva.			
P8	Modela situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas.			
P3	Interpreta la derivada como razón de cambio de cantidades variables y funciones trigonométricas en contextos matemáticos o no matemáticos.			
P9	Domina correctamente las razones y las identidades trigonométricas en contextos matemáticos o no matemáticos.			
P1	Reconoce características de los procesos infinitos utilizando diversas representaciones: gráficas, tablas o explicaciones verbales.			
P6	Utiliza aproximaciones numéricas o gráficas para deducir intuitivamente el límite de una función.			
Hoja de procesos. Situación 1	Aplica procedimientos aritméticos para resolver problemas que involucran procesos infinitos.			

Nota: Fuente Coordinación del Programa ASAE.

3.2.3. Formato de seguimiento por sesión

Inicialmente, los tutores cuentan con la información básica de los estudiantes asignados recurriendo al informe de las pruebas diagnósticas o con la aplicación de una prueba inicial diseñada a su criterio, una vez obtenida la información el tutor pasa al diseño del taller para trabajarlo en la sesión de tutoría. Sumado a esto, los tutores deben llevar un seguimiento de cada uno de sus estudiantes, para esto desde 2012 y tras la investigación de Botello (2013) se diseñó un *Formato de seguimiento* con el claro objetivo de brindar información sobre el desempeño en la tutoría de cada uno de sus estudiantes, identificando fortalezas o dificultades, describiendo cómo se manejaron las dificultades, al igual que conocer los objetivos de las actividades que elaboraban para sus sesiones de tutorías. Desde ese momento los formatos de seguimiento y las actividades diseñadas se recopilan en una carpeta del Dropbox. Aclaramos que las guías o talleres son valoradas previamente por la coordinación antes de que se apliquen en las tutorías.

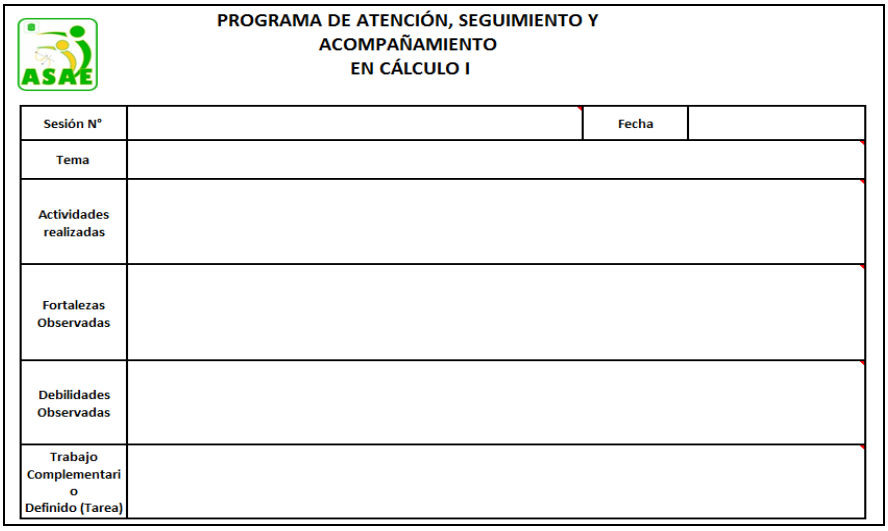
Posteriormente, Barajas (2015) tiene en cuenta este formato como una primera fuente de exploración para su trabajo, y además reportó el Formato DIPEVA como un instrumento de recolección de datos, del formato de evaluación del curso de pre-cálculo anteriormente descrito se desprendió otro formato, que se aplicó a 37 estudiantes-tutorados atendidos por 17 alumnos-tutores en el segundo semestre de 2012. Con este último instrumento se distinguieron las dificultades reportadas en los formatos de seguimiento a partir de los seis procesos matemáticos definidos por el MEN (2006).

Nosotras consideramos todo lo anterior para fusionarlo en un solo formato de seguimiento individual que nos permitió tener información cualitativa y cuantitativa del desempeño de los estudiantes, este instrumento se comenzó a implementar desde el primer semestre de 2015.

a) Adaptación del Formato de seguimiento individual por sesión

El rediseño del instrumento cuenta con una parte cualitativa donde los tutores describen la actividad realizada, las fortalezas y debilidades, así como el trabajo complementario a la sesión, ver Ilustración 10. Esta parte es muy similar a la ya existente, el cambio fue ubicarla en un documento de Excel para tener un solo archivo con la segunda parte.

Ilustración 10. Formato de seguimiento, parte cualitativa.



PROGRAMA DE ATENCIÓN, SEGUIMIENTO Y ACOMPAÑAMIENTO EN CÁLCULO I

Sesión N°		Fecha	
Tema			
Actividades realizadas			
Fortalezas Observadas			
Debilidades Observadas			
Trabajo Complementario Definido (Tarea)			

Con la intención de tener información más objetiva se diseñó la segunda parte con un carácter cuantitativo, donde el tutor valora específicamente los descriptores de las habilidades asociados a cuatro de los procesos matemáticos: representación, razonamiento y argumentación, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, y comunicación.

Los descriptores fueron adaptados a partir de los trabajos de Suarez y Rojas (2014) para el proceso de comunicación, el de Barajas (2015) para el proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, el de Rueda (2016) para el de representación, y lo descrito en el MEN (1998) para el proceso de razonamiento y argumentación. La Ilustración 11 representa la segunda parte de este instrumento.

Ilustración 11. Formato de seguimiento: parte cuantitativa.

PROCESO	Cód. Indicador	Descriptores En la sesión puede quizás no trabajar todos los indicadores, luego no es necesario calificarlos todos	Calificación	Observaciones
REPRESENTACIÓN	R_1	Construye representaciones de los objetos matemáticos		
	R_2	Da significado a las diferentes representaciones del objeto matemático		
	R_3	Reconoce los variantes e invariantes del objeto matemático		
	R_4	Relaciona y conecta las diferentes representaciones de un mismo objeto matemático		
	R_5	Describe o modela fenomenos de variación del mundo real usando funciones y relaciones		
RAZONAR Y ARGUMENTAR	RyA_1	Plantea hipotesis producto de la exploración, analisis y generalización de relaciones, propiedades y regularidades del objeto matemático		
	RyA_2	Plantea argumentos para explicar, verificar, justificar o validar la veracidad de una afirmación planteada		
	RyA_3	Verifica las soluciones para determinar si es correcta		
	RyA_4	Evalua argumentos y demostraciones matemáticas		
	RyA_5	Entiende y usa la definición del objeto matematico trabajado		
	RyA_6	Comprende y elabora demostraciones matemáticas		
	RyA_7	Justifica las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento del problema		
	RyA_8	Encuentra contraejemplos, usar hechos conocidos propiedades y relaciones para explicar otros hechos.		
ELABORACIÓN, COMPARACIÓN Y EJERCITACIÓN DE PROCEDIMIENTOS	F_1	Domina el campo de los números reales y sus operaciones		
	F_2	Realiza correctamente cálculos utilizando diferentes procesos e instrumentos		
	F_3	Usa diferentes notaciones de los números reales y establece relaciones para decidir sobre su uso en una situación dada.		
	F_4	Usa atributos y propiedades de figuras y objetos 2D o 3D para solucionar problemas		
	F_5	Emplea procedimientos de tipo gráfico para expresar una imagen visual de un concepto o relación varacional		
	F_6	Relaciona las expresiones algebraicas y gráfica empleando sus propiedades.		
	F_7	Determina procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales		
	F_8	Modela situaciones de cambio a través de las funciones, graficas y tablas		
	F_9	Domina el sistema métrico decimal para seleccionar unidades apropiadas		
	F_10	Calcula magnitudes utilizando diferentes procesos e instrumentos apropiados para la resolución del problema		
	F_11	Transforma expresiones algebraicas desde una forma hasta otra		
	F_12	Determina las variables de una situación		
	F_13	Establece correctamente la interdependencia de las magnitudes variables.		
	F_14	Transforma un objeto matemático para obtener un nuevo objeto		
	F_15	Entiende y maneja la notaciones establecidas para los objetos matemáticos de estudio		
	F_16	Da significado y usa correctamente los simbolos matemáticos usados en la resolucion de problemas		
COMUNICACIÓN	C_1	Lee y entiende el enunciado de un problema o ejercicio		
	C_2	Da sentido a la estructura de un problema		
	C_3	Plantea el problema en su propio lenguaje		
	C_4	Lee y entiende demostraciones o definiciones		
	C_5	Lee y entiende graficos, mapas o esquemas matemáticos		
	C_6	Explica la descripción del procedimiento u objeto de conocimiento con palabras claras o ejemplos		
	C_7	Usa adecuadamente el lenguaje para defender una idea, proceso o resultados		
	C_8	Analiza y evalua las estrategias y el pensamiento matemático propio y de los demás		
	C_9	Manifiesta dudas y expresarlas abiertamente		

Además, esta segunda parte cuenta con una columna de observaciones dado que, al ser descriptores generales para los diferentes procesos ubicados dentro del Cálculo diferencial, se hizo necesaria una casilla para que los tutores tuvieran la oportunidad de hacer aclaraciones sobre el tema o algo más específico sobre ese descriptor. Inicialmente, estábamos considerando mirar las habilidades de los estudiantes en todos los procesos matemáticos por eso la revisión de diferentes referentes y descriptores para cada uno de los procesos, pero luego de su primera aplicación, análisis y triangulación con los demás instrumentos, ya descritos, descartamos tres de los procesos para concentrarnos en el proceso procedimental.

Por último, el formato cuenta con una hoja de Cálculo denominada *reporte final de notas del instrumento* que promedia las calificaciones de cada uno de los descriptores después de haber sido valorado en las diferentes sesiones. Desde el comienzo tuvimos presente que no todos los descriptores serían calificados en cada una de las sesiones, dado que los talleres diseñados por los tutores no estaban en función del formato, sino de las necesidades de los estudiantes.

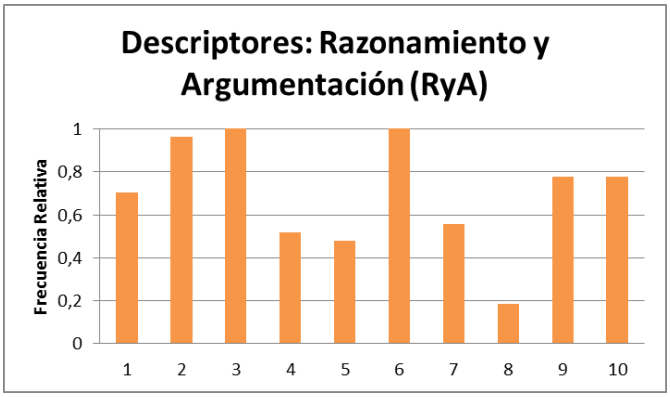
Tras la elaboración del primer instrumento y la socialización del mismo con otros investigadores que se encuentran o encontraban estudiando alrededor de otras alternativas de la estructura curricular, y formaban parte del *Seminario Enseñanza del Cálculo*, se pasó a su socialización con los tutores del periodo 2015-I para orientarlos en la implementación del *Formato de seguimiento individual* como instrumento piloto.

b) Acercamiento a los procedimientos matemáticos dentro de un programa de tutorías de cálculo I

Después de aplicar el *formato de seguimiento* en el periodo 2015-I donde 226 estudiantes fueron beneficiarios, se pasó a consolidar el reporte de notas sobre los descriptores evaluados.

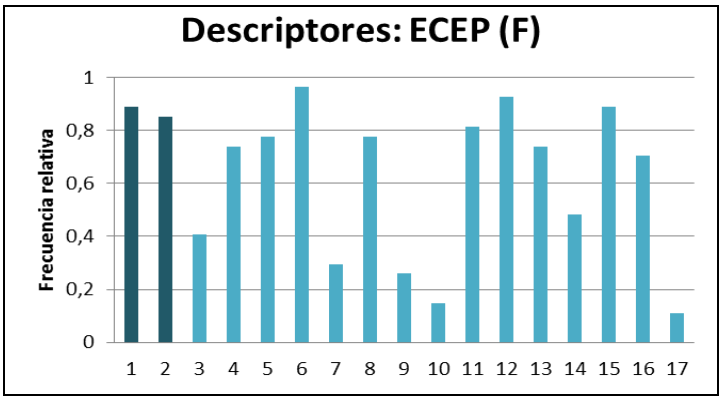
Para ello se recopiló la información de 27 estudiantes consignada en la pestaña *reporte final de notas del instrumento*. El criterio de selección de la muestra era que los estudiantes debían asistir como mínimo al 80% de las sesiones realizadas. Con esta información pudimos observar que los descriptores asociados al proceso de razonamiento y argumentación son poco trabajados en las sesiones. Por ejemplo, en la Ilustración 12, descriptores como *identifica y usa diversas formas de razonamiento y métodos de demostración* (número 8) fue poco valorado por los tutores dentro de sus sesiones, y al revisar algunos de los talleres se identificó la baja presencia de ejercicios relacionados con demostraciones formales.

Ilustración 12. Frecuencia relativa de los descriptores del proceso de Razonamiento



Sin embargo, el proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (proceso procedimental) es uno de los más abordados, (Ilustración 13). Como caso particular, los descriptores para procedimientos métricos son muy poco valorados por los tutores en todos los estudiantes, dado que por ejemplo, los talleres no abordan situaciones donde sea necesario realizar procedimientos de tipo métrico; no obstante, los descriptores asociados a los procedimientos aritméticos son de los más trabajados a lo largo de las sesiones sin importar el tutor, debido nuevamente al diseño de los talleres que dan prioridad a los ejercicios (según algunos tutores).

Ilustración 13. Frecuencia relativa de los indicadores asociados al proceso procedimental.



Finalmente, el proceso de comunicación es también uno de los más valorados en cada uno de los estudiantes y en las sesiones como se observa en la Ilustración 14. Aunque los tutores no acostumbran a valorar si el estudiante usa adecuadamente el lenguaje para defender una idea, proceso o resultado, ya que según algunos tutores no se da un diálogo extenso para decidir si el estudiante está defendiendo apropiadamente la idea, y además el taller se crea en función de las necesidades de los estudiantes y no pensado en los descriptores, de ahí principalmente que no todos ellos sean evaluados en una misma sesión.

Ilustración 14. Frecuencia relativa de los indicadores para el proceso de Comunicación

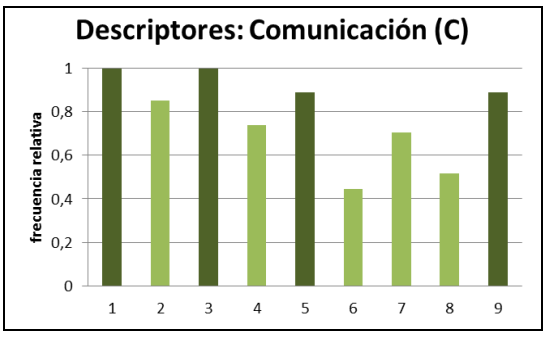
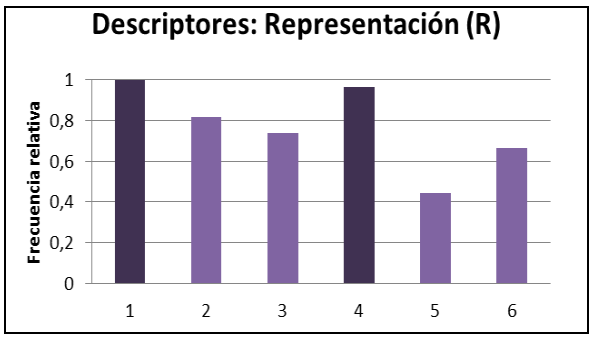


Ilustración 15. Frecuencia relativa de los indicadores para el proceso de Representación

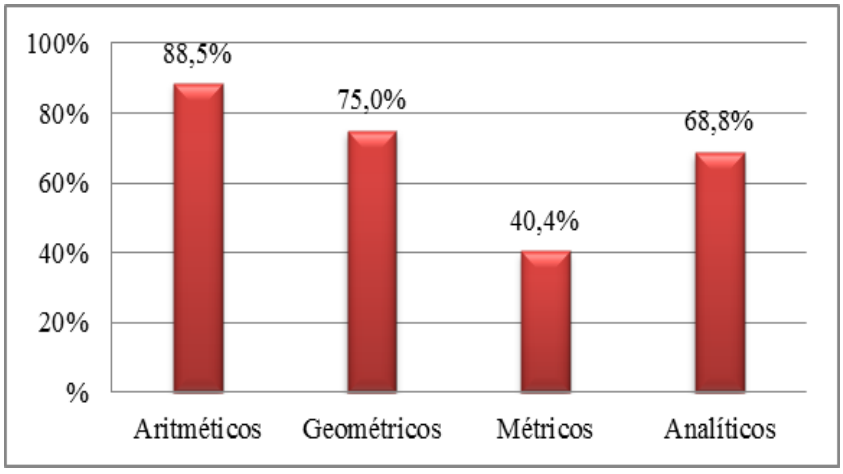


Después de su implementación y análisis de la información y algunas entrevistas con los tutores reafirmamos nuestra posición de estudiar el proceso procedimental y continuamos con la implementación del formato en el semestre 2015-II.

c) Acercamiento al Proceso Procedimental dentro del programa de tutorías

A partir del análisis cuantitativo realizado a una muestra de 26 estudiantes en el segundo semestre de 2015 y reportado en Santamaría y Parada (2016), se identificó de manera general, como se observa en la Ilustración 16, que los procedimientos de tipo numérico son los más trabajados con un promedio del 88,5%, y al observar particularmente las sesiones se encontró que son valorados al trabajar contenidos como funciones y limites; mientras que los procedimientos métricos son los menos valorados por los tutores con un porcentaje promedio del 40,4%. Los talleres quizás no incluyen situaciones en las que se deban usar instrumentos específicos para medir, no hay espacio para la exploración física, aunque algunos de los tutores usan software de geometría dinámica para simular situaciones.

Ilustración 16. Porcentaje de valoración de los tipos de procedimientos



En relación a su desempeño durante las sesiones se agruparon las calificaciones en tres subgrupos (2 a 2,9; 3 a 3,9; 4 a 5) como se muestra en la Tabla 4, y más o menos la mitad de los indicadores (2, 4, 5, 11, 12, 13 y 16) son valorados con una calificación inferior a 3 luego suponemos que algunos de los estudiantes continúan teniendo dificultades, es decir, que en términos de habilidad las acciones aun no son dominadas y coordinadas. Por otra parte, se observó en general una valoración sobresaliente de los estudiantes ya que para el 87.5% de los indicadores el porcentaje en el subgrupo *3 a 3,9* es superior a los otros dos subgrupos.

Observando los tipos de procedimientos encontramos que: los procedimientos aritméticos (indicadores 1, 2, 3, Tabla 4) tienen una valoración buena, dado que el subgrupo de 2 a 2,9 cuentas con porcentajes de 0%, 8% y 0% para cada uno de sus indicadores, luego en la parte aritmética los estudiantes son valorados sin dificultad. Lo mismo ocurre con los indicadores (9, 10) asociados a los procedimientos métricos donde los estudiantes son valorados con nota superior a 3.0, aunque como ya hemos mencionado son los menos valorados por los tutores.

En relación a los procedimientos geométricos observamos que en los dos indicadores asociados a este tipo de procedimientos (4, 5 de la Tabla 4) se registran estudiantes por debajo de la calificación 3.0 y en ambos un alto porcentaje en el subgrupo 3.0 a 3.9 (71.4% y 77.8% respectivamente), luego es de esperar que algunos estudiantes al terminar su proceso por el programa continúan con dificultades en la representación y dominio de propiedades geométricas.

Tabla 4. Resultados porcentuales de los indicadores del formato de seguimiento.

Indicador	Porcentaje de valoración %	Subgrupos de valoración	Porcentaje de estudiantes %
1. Domina el campo de los números reales y sus operaciones.	100	**2 a 2,9**	0
		3 a 3,9	50
		4 a 5	50
2. Realiza correctamente cálculos utilizando diferentes procesos e instrumentos.	96,2	**2 a 2,9**	8
		3 a 3,9	52
		4 a 5	40
3. Usa diferentes notaciones de los números reales y establece relaciones para decidir sobre su uso en una situación dada.	69,2	**2 a 2,9**	0
		3 a 3,9	61,1
		4 a 5	38,9
4. Usa atributos y propiedades de figuras y objetos 2D o 3D para solucionar problemas.	80,8	**2 a 2,9**	9,5
		3 a 3,9	71,4
		4 a 5	19,1
5. Emplea procedimientos de tipo gráfico para expresar una imagen visual de un concepto o relación variacional.	69,2	**2 a 2,9**	5,6
		3 a 3,9	77,8
		4 a 5	16,6
6. Relaciona las expresiones algebraicas y gráfica empleando sus propiedades.	76,9	**2 a 2,9**	0
		3 a 3,9	80
		4 a 5	20
7. Determina procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.	53,8	**2 a 2,9**	0
		3 a 3,9	78,6
		4 a 5	21,4
8. Modela situaciones de cambio a través de las funciones, gráficas y tablas.	65,4	**2 a 2,9**	0
		3 a 3,9	70,6
		4 a 5	29,4
9. Maneja el sistema métrico decimal para seleccionar unidades apropiadas.	42,3	**2 a 2,9**	0
		3 a 3,9	63,6
		4 a 5	36,4
10. Calcula magnitudes utilizando diferentes procesos e instrumentos apropiados para la resolución del problema.	38,5	**2 a 2,9**	0
		3 a 3,9	50
		4 a 5	50
11. Transforma expresiones algebraicas desde una forma hasta otra.	73,1	**2 a 2,9**	10,5
		3 a 3,9	68,4
		4 a 5	21,1
12. Determina las variables de una situación.	76,9	**2 a 2,9**	5
		3 a 3,9	65
		4 a 5	30
13. Establece correctamente la interdependencia de las magnitudes variables.	65,4	**2 a 2,9**	5,9
		3 a 3,9	76,5
		4 a 5	17,6
14. Transforma un objeto matemático para obtener un nuevo objeto.	69,2	**2 a 2,9**	0
		3 a 3,9	66,7
		4 a 5	33,3
15. Entiende y maneja las notaciones establecidas para los objetos matemáticos de estudio.	73,1	**2 a 2,9**	0
		3 a 3,9	63,2
		4 a 5	36,8
16. Da significado y usa correctamente los símbolos matemáticos usados en la resolución de problemas.	80,8	**2 a 2,9**	4,8
		3 a 3,9	57,1
		4 a 5	38,1

Para finalizar, en general los procedimientos analíticos de los estudiantes son sobresalientes; al finalizar el programa de acompañamiento en promedio más del 90% de los estudiantes tiene una valoración superior a 3.0, sin perder de vista que algunos estudiantes continúan teniendo dificultades en este tipo de procedimientos esenciales en el Cálculo y su ciclo. En conclusión, los resultados cuantitativos señalan que el programa considera que un alto porcentaje de los estudiantes, inicialmente en riesgo académico, tienen habilidades para abordar y aprobar un curso de Cálculo Diferencial.

d) Entrevista a Tutores y video-grabaciones de las sesiones

Para el segundo período académico de 2015 realizamos entrevistas a un grupo de tutores sobre el desempeño académico de algunos de sus estudiantes durante las tutorías, con el fin de complementar la información registrada en los formatos de seguimiento. Entrevistamos a los tutores quienes tenían estudiantes con asistencia continua, es decir, estudiantes que no faltaron a las sesiones del primer mes de tutorías y que además habían participado en el curso de pre-cálculo, con la intención de ir identificando los posibles casos de estudio al finalizar el semestre. En total se realizaron tres entrevistas a cada tutor, una cada cinco sesiones las cuales fueron grabadas. Posteriormente, y con la selección del primer caso de estudio que mencionamos en la sección 3.3, procedimos a realizar la respectiva trascripción de las entrevistas realizadas a una tutora auxiliar para tomar episodios que fueron usados como instrumento complementario en la identificación de las habilidades procedimentales y de las experiencias posibilitadas en el primer caso de estudio durante el proceso tutorial (sección 4.2).

Para el primer semestre de 2016 se hicieron video-grabaciones de las sesiones de tutorías de tres grupos dirigidos por tutores auxiliares. Las sesiones sobre funciones y limites fueron filmadas mediante una cámara instalada en el espacio donde se desarrollan las tutorías. Las

video-grabaciones se fueron enfocando en los estudiantes con asistencia constante y participación activa, aunque las interacciones de los compañeros también hacen parte del material recogido. Al finalizar el semestre se seleccionó el segundo caso de estudio y sus respectivas video-grabaciones se transcribieron para tomar episodios de algunas sesiones. Los episodios son presentados mediante trascripciones en el apartado 5.2.

3.2.4. Prueba simulacro y examen final de Cálculo Diferencial

Una vez obtenido el instrumento para recolectar información a lo largo del semestre y tras su aplicación en el primer y segundo semestre de 2015, decidimos elaborar un segundo instrumento el cual consistió en una prueba simulacro del examen final de Cálculo Diferencial, que fue elaborada teniendo en cuenta los contenidos evaluados por la Escuela de Matemáticas y algunos indicadores del formato de seguimiento. Al diseñar este instrumento ya teníamos definido que el proceso a investigar sería el proceso procedimental.

En el segundo semestre de 2015 se invitó a los 107 estudiantes que finalizaron el proceso para la aplicación de la prueba simulacro, al finalizar el calendario de clases del 2015-II, de este total 55 presentaron la prueba.

Para el análisis de la información recolectada se decidió tomar una muestra de estudiantes que cumpliera con dos criterios: el primero haber presentado la prueba simulacro y el segundo contar con el formato de seguimiento individual debidamente diligenciado con al menos el 80% de las sesiones (en total se realizan 15 sesiones). El tamaño de la muestra fue de 26 estudiantes; a partir de esta muestra se realizó un análisis cuantitativo de los indicadores asociados a las habilidades del proceso procedimental que fue presentado anteriormente en esta fase 2.

Aclaramos que todos los estudiantes que cursan la asignatura de Cálculo Diferencial deben presentar el examen final de la Escuela de Matemáticas que previamente es diseñado por el coordinador de la asignatura, aunque es calificado por el respectivo profesor de cada curso. Para ese entonces, el examen representaba el 30% de la nota final de la asignatura.

a) Segundo acercamiento a las habilidades procedimentales en Cálculo Diferencial

Respecto a la prueba simulacro que presentaron al final de las sesiones tutoriales, el 69,2% de los estudiantes empleó sin dificultad procedimientos de tipo gráfico para expresar una imagen visual de los conceptos (indicador F_5 del formato de seguimiento) de función par e impar para refutar un enunciado, y el 73,1% de los estudiantes no presentaron mayor dificultad para realizar correctamente cálculos, como también para transforma expresiones algebraicas desde una forma hasta otra en el proceso de hallar el límite de una función.

Sin embargo, se observó que los estudiantes tuvieron dificultades en la situación de optimización y razón de cambio, que se reflejó principalmente por la dificultad para modelar la situación de cambio a través de las funciones (F_8) y establecer correctamente la interdependencia de las magnitudes variables (F_{13}), que desde la teoría del Razonamiento Covariacional de Carlson (2002) se puede categorizar que los estudiantes solo realizaron actividades mentales de tipo 1 y 2, sin embargo la actividad mental 3 sobre cuantificación del cambio no se reflejó en los resultados de la mayoría de los estudiantes. Esto último a la luz de los porcentajes del formato de seguimiento no concuerda, porque ninguno de los estudiantes valorados en el indicador F_8 están en el subgrupo de calificación de 2 a 2,9, es decir, que no hay dificultad en ellos según los tutores, al registrar la valoración en el formato de seguimiento; sin embargo, si observamos el promedio de notas para ese indicador es 3,5 luego no hay una apreciación sobresaliente en este indicador para los procedimientos analíticos.

3.3. Fase 3. Selección de los casos de estudio.

Para el desarrollo de esta fase se inició con la revisión de la información de cada estudiante, que había sido parte de la muestra de 2015-II. Al interceptar la información se encontró que de los 55 estudiantes que presentaron la prueba simulacro: 26 tenían registro en un 80% del *formato de seguimiento individual* y, de estos, 6 tenían registro de la prueba de competencias básicas de matemáticas, pero solo dos habían participado en el curso de pre-cálculo y contaban con las hojas de procesos descritas en la sección 3.2.1 que forman parte de la prueba de competencias básicas de matemáticas.

De acuerdo a la información disponible de los estudiantes de segundo semestre de 2015, la Tabla 5 presenta el caso de estudio seleccionado con un resumen de su información en términos cuantitativos. Además, después del seguimiento a los casos de estudio preseleccionados para el primer semestre de 2016, se seleccionó el segundo caso de estudio por su participación en el curso de pre-cálculo y asistencia constante a las sesiones tutoriales.

Tabla 5.
Información cuantitativa de los casos de estudio.

Casos de estudio	**Pruebas Competencias Básicas de Matemáticas**	**Prueba de egreso del curso de pre-cálculo**	**Formato de Seguimiento**	**Prueba Simulacro**	**Examen final**
	Calificación	**Calificación**	**No. Tutorías**	**Calificación**	**Calificación**
Camilo	3	3,8	14	2,7	3,1
Alejandro	2,8	4,2	14	NP	2,9

Estos casos de estudio son diferentes de forma cuantitativa, sin embargo, Camilo y Alejandro tuvieron tutores auxiliares, además, a pesar de ser de semestre diferentes, son del mismo programa de ingeniería mecánica y tuvieron el mismo profesor de Cálculo Diferencial. Por consiguiente, consideramos que en ambos casos algunas variables permanecen constantes.

3.4. Fase 4. Análisis de datos

Los datos recolectados para identificar las habilidades procedimentales en los casos de estudio, beneficiarios de un programa de acompañamiento y seguimiento, corresponden al periodo académico de 2015-II y 2016-I. Y su análisis se realizó de la siguiente forma:

Se consideró el orden cronológico en que cada uno de los casos de estudio fue transitando por el programa y los registros en cada uno de los instrumentos descritos en la Fase 2. Es decir, el primer análisis se hizo sobre las hojas de procesos de las pruebas diagnóstico, el Formato de Evaluación y el reporte del curso de pre-cálculo hecho por el profesor, conformado así el apartado *antes del proceso tutorial*; mientras que el formato de seguimiento por sesión y la prueba simulacro constituyen el apartado *el proceso tutorial*, y en el apartado *después del proceso tutorial* consideraremos el Examen Final de Cálculo Diferencial.

Además, el análisis en cada etapa cuenta con una categorización hecha a partir de la *Taxonomía de los procedimientos* de Ba rajas (2015), donde se trianguló la información de cada caso de estudio con las habilidades a priori asociadas a los tipos de procedimientos, los elementos de la ZDP (para la caracterización de las sesiones de trabajo grupal como un espacio propicio para el desarrollo de habilidades) y la interpretación de la investigadora.

3.5. Fase 5. Descripción de habilidades procedimentales

Finalmente, se espera que lo expuesto para los casos de Camilo y Alejandro den evidencias que permitan responder al objetivo de nuestra investigación:

- Identificar y describir habilidades asociadas al proceso procedimental que desarrollan estudiantes beneficiarios de un programa de acompañamiento y seguimiento en Cálculo Diferencial.

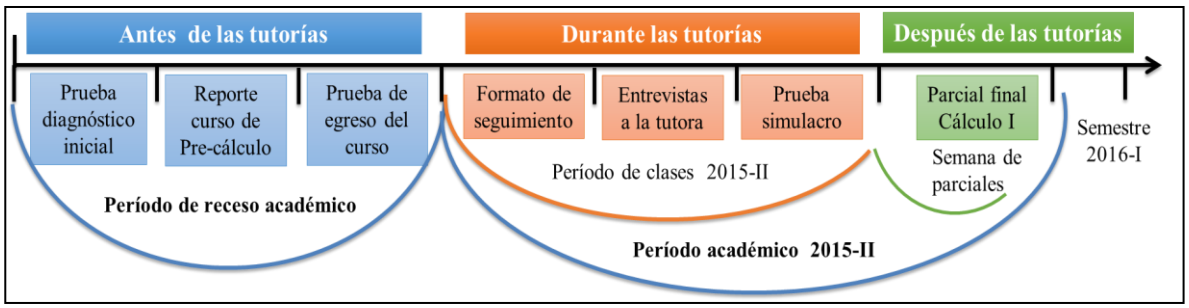
En los siguientes dos capítulos presentaremos a cada uno de los casos de estudio. Cada caso cuenta con las etapas del programa de acompañamiento y seguimiento como secciones, y dentro de ellas el análisis de los diferentes instrumentos recuperados se subdivide en categorías según los tipos de procedimientos.

4. Procedimientos desarrollados por Camilo

Como mencionamos en el capítulo anterior, Camilo representa a los estudiantes beneficiarios del programa de acompañamiento ya que participó del curso de pre-cálculo y tutorías, además, él realizó la mayoría de actividades en las cuales se aplicaron los instrumentos de recolección de datos descritos en el capítulo anterior. Es importante aclarar que no es nuestro interés etiquetar a los estudiantes como "buenos" o "malos" en Cálculo Diferencial, sino identificar y reportar las habilidades desarrolladas en el programa de acompañamiento académico en cuanto al proceso procedimental.

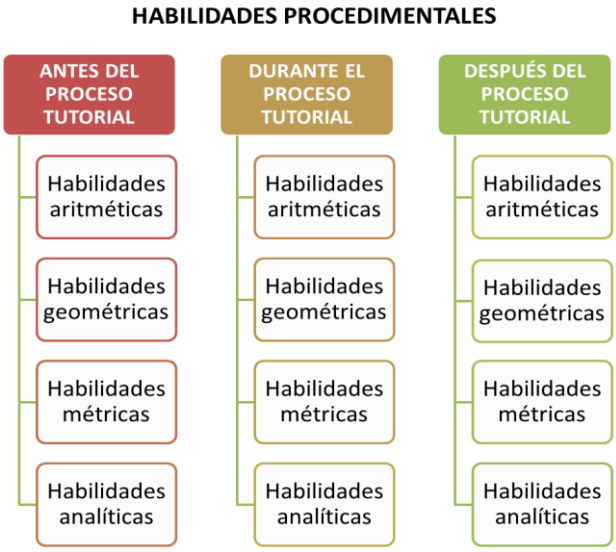
Ahora bien, el orden cronológico mostrado en la Ilustración 17 es usado para organizar la presentación del análisis de las habilidades procedimentales de Camilo, evidenciadas en cada uno de los instrumentos mencionados en esa línea del tiempo. Es decir, que las pruebas diagnóstico y el reporte del curso de pre-cálculo serán considerados como el *antes del proceso tutorial*; mientras que el formato de seguimiento *por sesión* y la prueba simulacro serán presentados en el apartado *el proceso tutorial*, y en el apartado *después del proceso tutorial* consideraremos el examen final de Cálculo Diferencial.

Ilustración 17. Línea del tiempo caso de estudio: Camilo



A su vez, la estructura de cada sección corresponde a la categorización de los procedimientos basada en la Taxonomía de los procedimientos, para dar cuenta de las habilidades, como se muestra en la Ilustración 18.

Ilustración 18. Estructura de presentación de las habilidades procedimentales



Camilo es un estudiante de 18 años egresado del año 2014 de una institución educativa oficial; ingresó en el período 2015-II a la UIS al programa de Ingeniería Mecánica. Él en una primera entrevista nos dejó saber que, cuando se inscribió a la UIS, esa carrera siempre fue su primera opción, aunque en el periodo 2015-I no pasó, entonces para la segunda vez por "temor a no pasar" se inscribió a Matemáticas como segunda opción. Sin embargo, en esa segunda ocasión su puntaje de la prueba Saber 11 le alcanzó para entrar a Ingeniería Mecánica. Cursó y aprobó en su primer semestre la asignatura de Cálculo diferencial (Cálculo I) con una nota final de 4.0 y actualmente la asignatura de Cálculo Integral (Cálculo II) ya la aprobó.

4.1. Habilidades procedimentales en Camilo antes de iniciar su proceso tutorial

Como habíamos mencionado en el apartado 0 del Proceso Metodológico, la prueba de competencias básicas en matemáticas examina presaberes del Cálculo Diferencial, y un análisis de respuestas a esta prueba fue ampliamente reportada en la investigación de Barajas (2015), la autora se centró precisamente en el proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

La prueba que se aplicó antes de iniciar el semestre 2015-II (semana proceso de matrícula), constó de 13 reactivos; once se contestaron en la plataforma virtual de la Universidad y dos se desarrollaron en una hoja de procesos. Dicha hoja de procesos es el primer instrumento a analizar para el caso de Camilo. En términos cualitativos el nivel de competencia de él fue categorizado como "medio". Después de su paso por el curso de pre-cálculo presentó la prueba de egreso de este curso, y en esta segunda ocasión el nivel de clasificación fue "medio alto".

En los apartados siguientes describiremos las habilidades de dos de las cuatro categorías de la taxonomía de los procedimientos aritméticos y analíticos (descritos en el apartado 2.3.5) indicando el respectivo instrumento que analizamos.

4.1.1. Habilidades en los Procedimientos Aritméticos

Recordamos que los procedimientos aritméticos están relacionados con el dominio del número y la estructura del sistema de numeración decimal; de las operaciones en diversos contextos; de sus propiedades y de las relaciones entre ellas (Rico, 1995). Y para comenzar la identificación de las habilidades con los números en el caso de Camilo, presentamos el

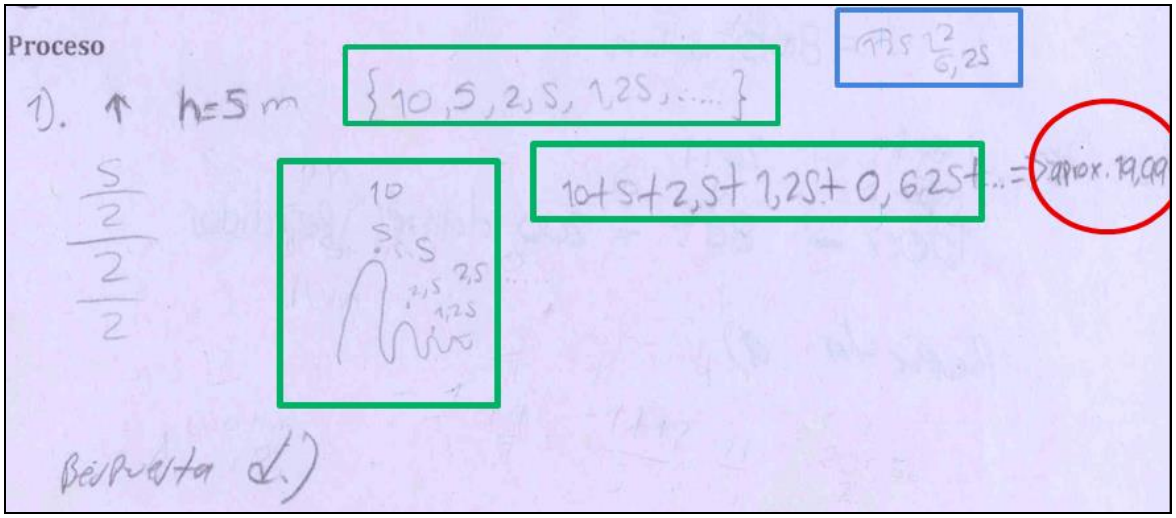
planteamiento del problema de la pelota de tenis, que es la primera situación de la hoja de procesos de la prueba de competencias básicas de matemáticas:

Ilustración 19. Situación 1, prueba de competencias básicas de matemáticas inicial

> *Una pelota de tenis se lanza hacia arriba de modo que alcanza una altura de 5 m desde el piso, y se deja rebotar hasta que quede en reposo. Supóngase que en cada rebote sube hasta la mitad de la altura máxima anterior. La distancia total (aproximada) que recorre la pelota antes de quedar en reposo es:*
>
> *a) 10 metros b) 9,99 metros c) 20 metros d) 19,99 metros*

En la situación 1, Ilustración 19, Camilo no obtuvo la calificación máxima dado que su respuesta no fue la correcta (seleccionó la opción *d. 19.99 metros* y la respuesta era *c) 20 metros*). Como resultado previo, según Barajas (2015), en este problema el 90% de los estudiantes de 2014-II emplearon la expresión decimal para realizar los cálculos del problema. A continuación, en la Ilustración 20 presentamos la solución de Camilo quien también usó los números en representación decimal.

Ilustración 20. Procedimiento de Camilo a la situación 1, Hoja de procesos.



Los recuadros verdes muestran el uso de los números decimales para calcular la distancia total. Además, en el recuadro donde hace una representación gráfica de la situación, Camilo

mostró cierta habilidad para sumar números decimales ya que el primer número en cada rebote es la suma de la distancia al subir y bajar en ese rebote y el segundo número, sobre el rebote, corresponde a la distancia en uno de los sentidos del rebote (ya sea el de ida o el de vuelta). Luego Camilo hizo correctamente la suma en cada rebote.

Además, al observar el recuadro azul de la Ilustración 20 tenemos otra evidencia de dominar las operaciones con números decimales, en este caso la división donde usa la distancia del cuarto rebote para calcular la distancia del quinto rebote. Por lo anterior podemos decir que domina los números decimales y sus operaciones básicas a lápiz y papel (F_2. Tabla 3). No obstante, Camilo presentó dificultad para calcular la suma de todos los términos en parte por no haber seleccionado la notación más adecuada de los números (este aspecto se revisará en los procedimientos analíticos en el apartado 4.1.2.).

El tener habilidades aritméticas respecto a los números decimales no es de extrañar porque según el MEN (1998) los estudiantes desde cuarto grado comienzan el estudio de los números decimales y lo profundizan hasta séptimo grado. Aunque Abrate, Pochulu y Vargas (2006) menciona que los estudiantes que ingresan a la universidad tienen dificultades para realizar operaciones aritméticas con estos números, además, de establecer equivalencias entre expresiones decimales periódicas y fraccionarias.

En la situación 2 de la hoja de procesos, Ilustración 21, Camilo obtuvo la máxima calificación según los criterios de evaluación de la coordinación del programa. Y enuncia la siguiente situación:

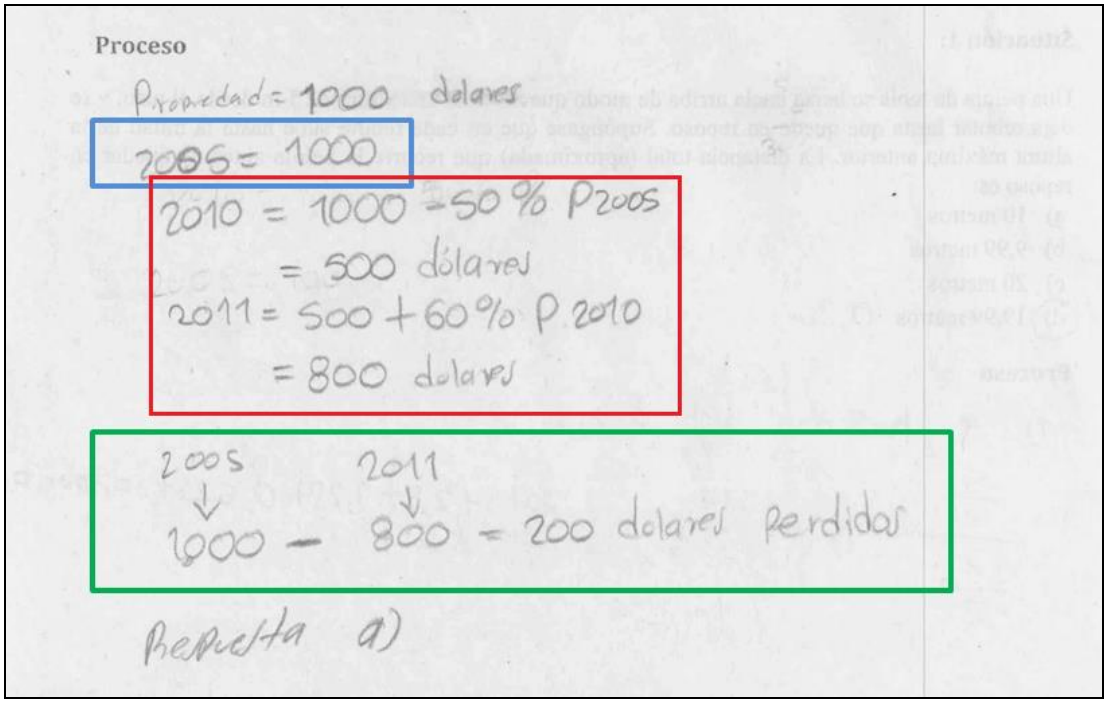
Ilustración 21. Situación 2, prueba de competencias básicas de matemáticas inicial.

Tenemos una propiedad que en el año 2005 valía 1000 dólares, pero cuyo valor disminuyó un 50% en 2010 y durante el año 2011 su valor aumenta un 60%, ¿hemos ganado o perdido dinero?, ¿cuánto?

a) Hemos perdido dinero, 200 dólares. *b) hemos ganado dinero, 1100 dólares*
c) Hemos ganado dinero, 100 dólares. *d) hemos perdido dinero, 800 dólares*

A pesar de que la situación 2, Ilustración 21, pensada para evaluar la capacidad del estudiante para *reconocer e interpretar situaciones que implican variación* (descriptor 1 para el *estándar 2*, Tabla 3), tiene una fuerte relación con habilidades interpretativas si lo observamos desde el proceso de comunicación. Y evidentemente el estudiante debe desarrollar procedimientos aritméticos.

Ilustración 22. Procedimiento de Camilo a la situación 2, hoja de procesos.



En la solución de Camilo (ver Ilustración 22), observamos que hace una relación entre el año y el valor de la propiedad en ese año, aunque no usa el símbolo matemático apropiado dado

que, por ejemplo, como se ve en el recuadro azul, señala que "2005=1000" esto matemáticamente es contradictorio por el significado del símbolo *igual* "=". Recordemos que, desde la lógica, como lo plantea Kenny (1997) la igualdad matemática señala identidad de significado, no identidad de pensamiento. Luego las diferentes expresiones que aparecen a los lados de una igualdad verdadera, corresponden a diferentes nociones y aspecto, pero no a diferentes objetos. Esto último fue lo que hizo Camilo al igualar dos objetos diferentes: el año y el valor de la propiedad.

Este uso errado del símbolo *igual* se repite en cada uno de los procedimientos y sumado a eso Camilo, nuevamente, hizo un uso inadecuado de la notación matemática dado que, además de igualar objetos diferentes, en la parte derecha de cada expresión (recuadro rojo, Ilustración 22), planteó la operación de sustracción entre dos cantidades diferentes, dólares y porcentajes, además no especificó que representaba "P2005". No obstante, desde la mirada docente y no investigativa puede pasar desapercibida la notación como errónea ya que como profesores tendemos a valorar sólo la solución pasando por alto estos detalles sin hacer correcciones (desde la educación media) y provocar que trasciendan hasta la educación superior, donde puede consolidarse como obstáculos epistemológicos (en términos de Brousseau).

A pesar de que Camilo hizo un uso inadecuado de la notación desde el inicio de su solución, en la parte final (recuadro verde de la Ilustración 22) si usa una notación apropiada para señalar el valor de la propiedad asociada al año, y denotó con las unidades especificadas del enunciado, en este caso de dólares.

Con esta situación identificamos en Camilo dos aspectos, en primer lugar, tiene dificultad para usar correctamente los símbolos matemáticos por los errores vistos ya que el estudiante realiza una práctica, acción o argumentación que no es válida desde el punto de vista de la

institución matemática escolar (Godino, y Font, 2003). En segundo lugar, el estudiante calcula correctamente el tanto por ciento de una cantidad, aunque no los dejo explícitos en la hoja de procesos (los borró una vez realizados). Pero en cada parte, interpretada de su estructura de solución, sus respuestas coinciden con un buen cálculo o el cálculo esperado, mostrando nuevamente habilidad para realizar cálculos básicos (F_2).

Esto último no debería sorprender en un estudiante que ha finalizado la educación media ya que es una de las cosas que se espera sepa hacer al finalizar el colegio (MEN, 1998, NCTM, 2003). Sin embargo, como lo reporta Liern (2012) este tipo de problemas tiene un grado mayor de dificultad, a comparación de otros problemas sobre el cálculo de porcentajes, dado que cuando se les pregunta a los estudiantes si al final han salido beneficiados o no, es sorprendente la cantidad de estudiantes que creen que hubo una ganancia neta del 10%, cuando en realidad lo que hubo es una pérdida del 20% (Liern, 2012, p. 3).

Entonces el estudiante hace una buena interpretación del texto que le permite plantear un procedimiento para luego aplicar sus conocimientos sobre porcentajes. Sin embargo, la explicación registrada en la hoja de procesos no es apropiada por el mal uso de los símbolos matemáticos y no matemáticos que imposibilita la lectura fluida, es decir, los registrado no está ni en lenguaje matemático o no matemático, y de este modo la descripción de su procedimiento no es inteligible a otra persona (NCTM, 2013). Evidenciando la conexión que existe entre los distintos procesos matemáticos como son el de comunicación y el de representación; el primero relacionado con las acciones de interpretar la situación y explicar por escrito la solución, el segundo relacionado con la construcción de una representación algebraica para la situación.

4.1.2. Habilidades en los Procedimientos Analíticos

Una vez más, los procedimientos analíticos se relacionan con el reconocimiento de regularidades y patrones, la caracterización de la variación, la identificación de variables, la descripción de fenómenos de cambio que dependen de contextos aritméticos y geométricos. Las habilidades de este tipo se analizan desde la prueba de competencias básicas de matemáticas inicial y la malla DIPEVA aplicada en curso de pre-cálculo.

a) Habilidades en la prueba de competencias básicas de matemáticas inicial

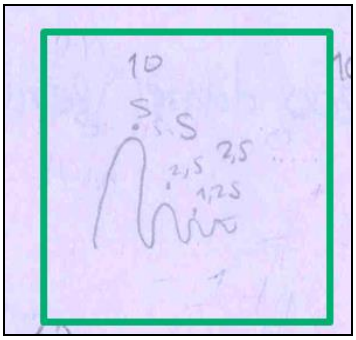
Nuevamente retomamos la situación de la pelota de tenis; como ya habíamos mencionado para poderla resolver los estudiantes deben interpretar la variación de un fenómeno físico para identificar como se relacionan las magnitudes (rebotes y distancia en cada rebote). En esta situación Barajas (2015) reporta que los estudiantes no asociaron que la altura máxima alcanzada por la pelota se recorría tanto subiendo como bajando en cada rebote. También menciona que el 38% de la muestra seleccionó la opción 9,99 metros y el 23% la opción 10 metros por la representación errónea de considerar la distancia en un solo sentido.

En el mismo reporte, los estudiantes que lograron o no hacer la correcta interpretación o representación del patrón, tuvieron una dificultad adicional al tratar de cuantificar la situación ya que no lograron identificar la tendencia de la sucesión que se formaba al sumar las distancias asociadas a cada rebote. Como lo manifiestan García, Serrano y Díaz (2002) la tendencia exige una visualización de tipo numérico de los procesos infinitos de aproximación como un todo, luego entendemos un porqué de la dificultad en los estudiantes.

Ahora bien, analizamos los procedimientos analíticos realizados por Camilo a esta situación. Comenzamos identificando que entendió el cambio que se produce en la variable distancia. A

diferencia del porcentaje de estudiantes mencionado por Barajas (2015), él si comprendió que debía tener en cuenta tanto la distancia de subida como la de bajada, como se puede observar en el recuadro verde (Ilustración 23) donde hizo una representación gráfica de la situación y señaló la distancia recorrida en cada una de los tres primeros rebotes.

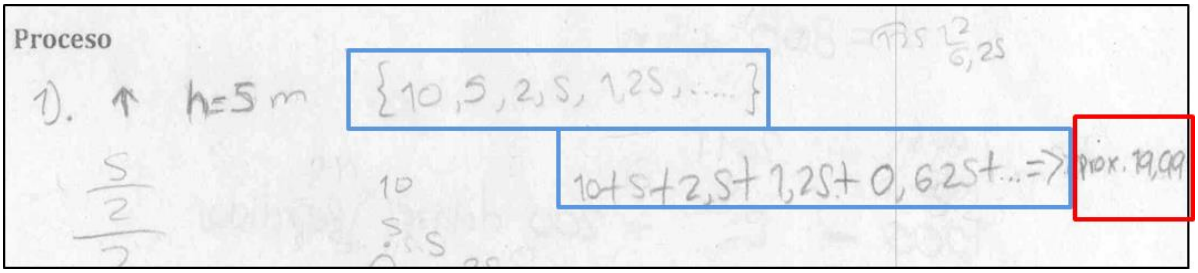
Ilustración 23. Interpretación grafica de Camilo de la situación 1.



Con una correcta interpretación y representación de la situación, Camilo planteó el conjunto de las distancias en cada rebote y la suma de los términos que modelan los rebotes de la pelota (Ilustración 24). Aquí es importante mencionar que Camilo comprendió que la situación planteada involucra procesos infinitos como se evidencia en la construcción del conjunto de distancias y su notación con puntos suspensivos (recuadro azul, Ilustración 24).

A pesar de que Camilo señaló que la suma se "*aprox 19,99",* infiriendo una situación en el infinito, su respuesta fue errada. Consideramos que tuvo dificultad para analizar correctamente la convergencia de la suma (recuadro rojo, Ilustración 24), de acuerdo a la taxonomía de los procedimientos se plantea que no tuvo habilidad para determinar procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales (F_7).

Ilustración 24. Procedimientos a la situación 1, hoja de procesos.



De igual forma si relacionamos lo anterior con los estándares y sus descriptores asociados a la prueba de competencias básicas de matemáticas, identificamos que la situación 1 responde al Estándar 4, descriptor 3: *Aplica procedimientos aritméticos para resolver problemas que involucran procesos infinitos.* Luego Camilo tiene dificultad para utilizar las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos. Y como lo explica Barajas (2015):

> Esto es consecuente de la dificultad para emplear un sistema numérico adecuado para representar el cambio y la variación del fenómeno, de manera que permita identificar una regularidad que lleve a una generalización y a la vez a analizar una tendencia en los datos. (p. 81).

b) Habilidades identificadas durante el curso de pre-cálculo

Como ya habíamos mencionado Camilo participó en el curso de pre-cálculo, por lo tanto, fue evaluado por el profesor del curso mediante el formato de evaluación DIPEVA, y como anteriormente habíamos acordado relacionar los descriptores de este formato con los descriptores asociados a las habilidades del proceso procedimental, decidimos revisarlo para identificar las habilidades asociadas a los procedimientos analíticos reportadas por el profesor.

Recordamos al lector que cada hoja de evaluación del formato DIPEVA cuenta con cuatro columnas y en tres de ellas se hacen registros numéricos donde uno (1) es la valoración

más alta y cero (0) la más baja. En la primera columna están los descriptores de los estándares, en la segunda se registra la calificación a cada descriptor producto de la prueba de competencias básicas de matemáticas inicial, la tercera registra la valoración que el profesor del curso de pre-cálculo otorga a cada descriptor, según el desempeño del estudiante en el desarrollo de las actividades durante las tres semanas del curso, y la cuarta columna tiene las calificaciones a cada descriptor de la prueba de competencias básicas de matemáticas final.

No obstante, para el análisis tuvimos en cuenta únicamente la valoración emitida por el profesor, y desistimos de las otras dos valoraciones ya que como los estudiantes contestan las pruebas en la plataforma virtual seleccionando una respuesta a cada situaciones sin registro de los procedimientos, entonces consideramos que esas respuestas carecerían de información sobre las habilidades de los estudiantes y por eso analizamos los problemas de las hojas de procesos que si tenían registro escrito.

A continuación, presentamos la Tabla 6 que relaciona los descriptores de las habilidades procedimentales con los descriptores asociados a los cuatro estándares para los grados 10 y 11 en el Pensamiento Variacional (MEN 2006) con la calificación otorgada por la profesora de pre-cálculo.

Como podemos ver en la Tabla 6, la profesora ratifica con la valoración de 0,3 la dificultad de Camilo para resolver problemas que involucran los procesos al infinito, que anteriormente ya habíamos reportado con la situación de la pelota de tenis, Ilustraciones 18 y 23. Además, las valoraciones a los tres primeros descriptores de la Tabla 6 ratifican que Camilo procede adecuadamente en situaciones que implican variación logrando hacer representaciones de situaciones como el de la pelota e interpretando adecuadamente con es el caso de la situación 2, Ilustración 21.

Tabla 6. Procedimientos analíticos y estándares: Asociación de descriptores.

Descriptores de habilidades Procedimientos analíticos	**Descriptores estándares básicos de competencias matemáticas Pensamiento Variacional**	**Apreciación del profesor**
Traduce de una a otra de las distintas representaciones de una función.	Relaciona correctamente los diferentes registros de representación de una función en una situación problema.	0,9
Representa situaciones de cambio a través de las funciones, las gráficas y las tablas.	Modela con propiedad una situación de cambio a través de una función.	0,8
Determina las variables de una situación. Establece correctamente la interdependencia de las magnitudes variables.	Reconoce e interpreta situaciones que implican variación.	0,8
Transforma un objeto matemático para obtener un nuevo objeto	Desarrolla o aplica métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.	0,6
Transforma expresiones algebraicas desde una forma hasta otra	Domina correctamente las razones y las identidades trigonométricas en contextos matemáticos o no matemáticos.	0,7
Determina procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.	Reconoce características de los procesos infinitos utilizando diversas representaciones: gráficas, tablas o explicaciones verbales.	0,7
	Aplica procedimientos aritméticos para resolver problemas que involucran procesos infinitos.	0,3

Ahora bien, para complementar lo dicho anteriormente sobre Camilo e ir determinando que es capaz de hacer por sí solo, es decir, en términos de Vygotsky determinar cuál es su Nivel de Desarrollo Real, miremos que reportó la profesora de pre-cálculo sobre el desempeño de este estudiante:

> … No presentó dificultades con las funciones y sus distintas representaciones, como tampoco en la ejecución de procedimientos algebraicos. Sin embargo, en la noción de límite hubo dificultad y, como todos los estudiantes, en el proceso de modelación. En las últimas clases mejoró su participación, además, fue de los pocos alumnos que afrontó la pregunta de cómo se relacionan las variables, de una manera numérica y no solo cualitativa, entonces ayudó a los demás estudiantes a buscar esas relaciones y salir de lo descriptivo. Su avance fue positivo y significativo. (Tomado del informe final del curso de pre-cálculo 2015-II)

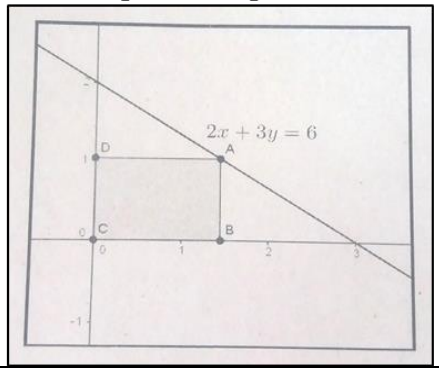
Con este reporte escrito identificamos en Camilo dificultades en el manejo de límites, como producto de su dificultad en los procesos infinitos. Además, él deja entrever que la habilidad para representar situaciones de cambio no está totalmente desarrollada a pesar de poder determinar las variables de una situación y establecer correctamente su interdependencia. Para ahondar sobre ese procedimiento entrevistamos a Camilo y nos especificó que su dificultad estuvo en representar algunas funciones, como parte entera piso y modelar con ellas las situaciones que se planteaban en el curso de pre-cálculo, así como calcular e interpretar las derivadas, esto último porque era nuevo y desconocido para él.

c) Habilidades identificadas en la prueba egreso del curso de pre-cálculo

Para finalizar esta etapa, analizamos la hoja de procesos que acompaña la prueba de egreso del curso de pre-cálculo de Camilo. Esta hoja de procesos contó con una sola situación y uno de los propósitos de ésta era que se los estudiantes al resolverla utilizaran principalmente procedimientos analíticos. A continuación, el enunciado de la situación:

Ilustración 25. Situación 1. Prueba de competencias básicas de matemáticas final

Situación 1. *Encuentre las dimensiones de la región rectángulo sombreado, de modo que su área sea máxima.*



Esta situación,

Ilustración 25, fue diferente a las trabajadas en las anteriores versiones de la prueba de egreso del curso, sin embargo, fue planteada para evaluar el estándar 2: *Interpreta la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva, y desarrolla métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemático,* y el descriptor asociado es reconoce e interpreta situaciones que implican variación. Entonces este estándar se relaciona ampliamente con los descriptores asociados a los procedimientos analíticos como

- ✓ Determinar las variables de una situación.
- ✓ Modela situaciones de cambio a través de funciones, gráficas y tablas.
- ✓ Transformar un objeto para obtener un nuevo objeto.

Ahora bien, los estudiantes del curso de pre-cálculo habían trabajado el problema clásico planteado por Fermat (que consiste en determinar la manera de subdividir un segmento de longitud *b* en dos segmentos de modo que el producto fuera máximo) con la mediación de GeoGebra. Dicho problema dentro del curso de pre-cálculo se trabajó bajo la idea de encontrar el

área máxima de un rectángulo cuyo perímetro es fijo y el cual es ampliamente descrito en Fiallo y Parada (2014). Se planteó de esta forma ya que según estos autores la intención es desarrollar una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de variación y cambio, partiendo de lo que el estudiante sabe y proponiendo actividades que involucran las ideas fundamentales del Cálculo.

Por medio de la exploración de las actividades planteadas en GeoGebra y la mediación del profesor los estudiantes lograron concluir que las dimensiones del rectángulo debían ser iguales, es decir, que el rectángulo es específicamente un cuadrado.

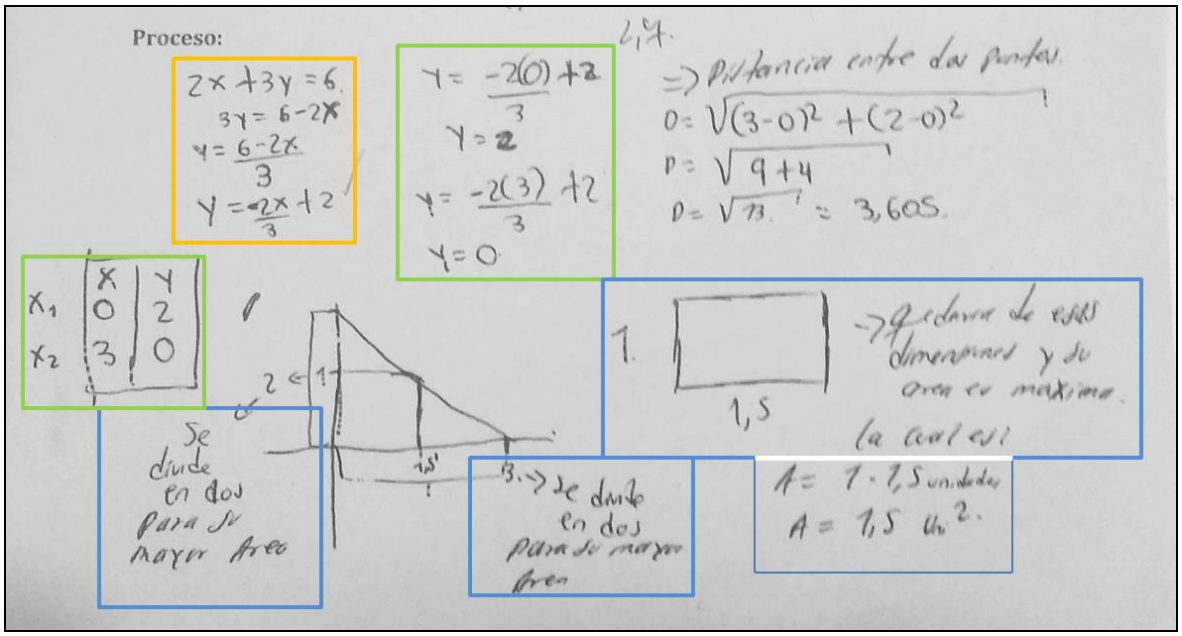
No obstante, en la situación planteada, en la segunda hoja de procesos, contiene una restricción sobre el rectángulo dado que uno de sus vértices pertenece a la recta $2x + 3x = 6$, lo que impide que el rectángulo tenga todos sus lados iguales.

Teniendo en cuenta todo lo mencionado sobre la situación del área máxima, lo primero que podemos observar en la solución de Camilo es que no generalizó lo visto en clase concluyendo que el rectángulo bebía ser un cuadrado, como varios de sus compañeros. Por el contrario, Camilo usa la restricción de la recta para definir los límites o extremos de las dimensiones del rectángulo (recuadros verdes, Ilustración 26), y para esto él inicialmente transformó la expresión algebraica dejándola despejada para *y* (Recuadro naranja, Ilustración 26), Consideramos aquí, que con el uso de GeoGebra como herramienta para la exploración de la situación se logró simular la situación con las condiciones dadas y explorar para cuales dimensiones el rectángulo tenia área máxima (los estudiantes en esta última situación tuvieron la posibilidad de hacer uso de GeoGebra, por decisión de la coordinación del programa).

Consideramos que esa misma exploración le permitió a Camilo concluir que para obtener la mayor área las dimensiones extremas de los lados del rectángulo deben dividirse en dos partes

iguales (Recuadro azul, Ilustración 26). Por último, él concluye que las dimensiones eran 1 y 1,5 y representa el rectángulo con esas dimensiones y muestra el área obtenida a partir de ellas.

Ilustración 26. Solución de Camilo a la situación del área máxima.



Aclaramos que no es evidente o explicito que el estudiante haya modelado la función del área por medio de una expresión algebraica, una gráfica o una tabla. Pero si es claro que reconoce que la situación implica variación y por lo tanto reconoció las variables de la situación.

De la información analizada sobre Camilo, antes de iniciar las tutorías, se identificaron las habilidades presentadas en la Tabla 7.

Tabla 7. Habilidades y dificultades identificadas en Camilo antes del proceso tutorial.

	Procedimientos aritméticos	**Procedimientos analíticos**
Habilidades	• Realiza correctamente cálculos con números decimales a lápiz y papel.	• Determina las variables de una situación. • Modela situaciones de cambio a través de gráficas, tablas.

Dificultades	• Da significado y usar correctamente los símbolos matemáticos usados en la resolución de problemas. específicamente el símbolo "="	• Determina procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales. • Utiliza aproximaciones numéricas para deducir intuitivamente el límite de una función.

A continuación, damos cuenta de los resultados del análisis del desempeño de Camilo en las tutorías a partir de dos instrumentos principalmente: seguimientos de tutoría (complementado con episodios de entrevista hecha a la tutora) y la prueba simulacro.

4.2. Habilidades procedimentales en Camilo durante su proceso tutorial

En la sección anterior mostramos algunas de las habilidades y dificultades de Camilo dentro del proceso procedimental, identificadas en tres instrumentos, que nos dieron un punto de partida para examinar su proceso de aprendizaje dentro del proceso tutorial. En esta sección presentamos resultados del análisis de algunas de las sesiones de tutoría interpretadas como una ZDP, descrita en el marco conceptual (sección 2.1.1), y que se evidencian en los formatos de seguimiento, los cuales nos brindaran la información sobre los aprendizajes de Camilo. A su vez, hacemos una triangulación de los datos con entrevistas a la tutora para describir las habilidades procedimentales del estudiante.

Resaltamos que la tutora que acompañó a Camilo durante el semestre 2015-II, es una estudiante de Licenciatura en Matemáticas que está finalizando su proceso de formación. Ella participó como tutora practicante en el período 2014-I cuando cursó la asignatura de didáctica del Cálculo, después de ese período continuó dentro del programa como tutora auxiliar hasta el semestre 2015-II.

Finalizamos esta sección con el análisis de la prueba simulacro, diseñada y aplicada por la coordinación de ASAE y la investigadora, para ser consecuentes con el orden estipulado en la

línea del tiempo (Ilustración 17). Recordamos que Camilo asistió a 14 sesiones de tutoría durante el semestre 2015-II dirigidas siempre por la misma tutora auxiliar.

4.2.1. Los procedimientos de Camilo en el trabajo con funciones

Por la similitud de la temática trabajada en diferentes sesiones, decidimos agrupar las tres primeras sesiones en este apartado donde el tema central fue funciones. Es claro que estamos revisando el proceso procedimental de Camilo, sin embargo, no podemos dejar de lado la metodología del curso de Cálculo I (Cálculo Diferencial) que sigue una línea de contenidos que a su vez permean las actividades de las sesiones tutoriales.

En la primera sesión la tutora aplicó un examen diagnóstico, como acostumbran varios de los tutores, y en el formato de seguimiento describe la actividad como se muestra en la Tabla 8.

Tabla 8. Descripción de la primera sesión de Camilo.

Tema	**Conocimientos básicos.**
Actividades realizadas	Se realizó un taller diagnóstico para poder valorar con más precisión los conocimientos con los cuales ellos entran a la universidad; en ellos se trabajó con le ecuación de la recta, simplificación de expresiones con un grado de dificultad medio, gráfica de funciones y el dominio de alguna de ellas, resaltando las dificultades presentadas.

Nota: adaptado del Formato de seguimiento individual

Con la descripción de la Tabla 8 podemos notar que la tutora se interesa por identificar el nivel de desarrollo real de su estudiante para poder diseñar actividades que atiendan las necesidades del estudiante (ratificando la realización de una de las primeras etapas del desarrollo del programa de tutorías expuesta en la Ilustración 7). La tutora da un primer paso en el proceso

de mediación, el cual es descrito en la teoría de la ZDP. En dicha mediación, el diseño de actividades adaptadas a las necesidades del estudiante busca orientar el proceso de aprendizaje del estudiante, y como lo menciona Parra (2010) el profesor (tutora) establece una relación de ayuda con el aprendiz. Además, como lo plantea Rodríguez (2013) la actividad de diagnóstico casi siempre se orienta, a la búsqueda organizada y consciente, de conocimientos acerca de determinado individuo para actuar consecuentemente y de esta manera poder intervenir con mayor eficiencia y eficacia.

A partir de esta actividad la tutora reporta las siguientes debilidades:

Tabla 9. Debilidades: primera sesión de Camilo. *Fuente*: Formato de seguimiento individual.

Debilidades Observadas	No identifica el dominio ni el rango de una función, no tiene claro el concepto de éstos. No grafica funciones y presenta cierta apatía ante la sugerencia de la tutora por hacer una tabla de los valores que va tomando y cada vez que se reemplaza un valor en la variable x.

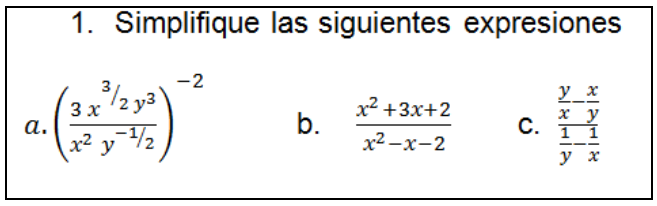
A partir de lo reportado en la Tabla 9 vimos dificultades en dos aspectos, el conceptual y el procedimental; lo conceptual hace referencia a las definiciones de dominio y recorrido de una función, y lo procedimental a los procedimientos analíticos como la representación de funciones, en esta parte la tutora escribe en el formato que Camilo "*presenta cierta apatía ante la sugerencia de la tutora por hacer una tabla de los valores…"* y en la entrevista con la tutora se le pregunta por el comportamiento de Camilo para hacer referencia al término "apatía", a lo que ella responde:

> Tutora: La apatía a graficar estaba relacionado con usar la tabulación como estrategia, porque él decía que para qué la tabulación, que haciendo un bosquejo de la gráfica ya podía ver eso (haciendo referencia al dominio y el recorrido de una

> función). Pero muchas veces nosotros necesitamos la tabla para hacer la gráfica más precisa, y así poder identificar el dominio y el recorrido. […] Después Camilo las terminaba haciendo mas no por gusto sino porque yo se lo estaba pidiendo. (Episodio 1)

Con la respuesta de la tutora podemos ver la dificultad inicial de Camilo para emplear diferentes tipos de representación, y específicamente emplear apropiadamente los procedimientos de tipo grafico para expresar una imagen visual de un concepto, en este caso el de dominio y recorrido de una función. Y por esta razón el descriptor F_5 fue valorado con una nota de 1. Además, se evidencia la intervención de la tutora en repetidas ocasiones luego no hay un nivel alto de comprensión de las situaciones, además con la "apatía", Camilo mostró una mínima disposición para la solución de la tarea luego en términos de Rodríguez (2013) podríamos decir que hubo una ZDP estrecha ya que no hubo un avance amplio en su aprendizaje, sino que por el contrario se dieron pequeños pasos.

Ilustración 27. Ítem 1 del examen diagnóstico, elaborado por la tutora



Ahora al observar los descriptores de la malla del formato, asociados a las habilidades procedimentales, notamos que en los procedimientos aritméticos Camilo tuvo un desempeño normal pero no preciso, a pesar de haber realizado la prueba sin calculadora. Sin embargo, en la simplificación de una expresión algebraica, Ilustración 27, la tutora menciona lo siguiente:

> Las propiedades de la potenciación, o sea si las sabia pero a la hora de solucionarlas no. Ejemplo, sabía que aquí había la distribución (Señalando el ejercicio *a* de la Ilustración 27) para el numerador y para el denominador, pero entonces a la hora de manejar el negativo (Señala el exponente fuera del paréntesis de la expresión *a*, Ilustración 27) entonces ahí lo manejaba como si fuera una potencia positiva. (Episodio 2)

Con la narración anterior podemos identificar la debilidad para operar con números negativos lo que influiría negativamente en la transformación de expresiones algebraicas desde una forma hasta otra (F_{11}), es decir, que tener errores en los procedimientos aritméticos propicia errores en los procedimientos analíticos. A pesar de que, en particular, Camilo tenga claridad sobre las propiedades de la potenciación. En general Camilo resolvió apropiadamente, según la tutora, la simplificación de expresiones algebraicas, no obstante, en la retroalimentación de dicho examen se "desempolvaron los casos de factorización", de ahí que la tutora haya considerado una valoración de 3 en el descriptor F_{11}.

Respecto a los procedimientos geométricos la tutora dio valoraciones de 1 a los descriptores asociados con este procedimiento (F_4 y F_5) y al revisar el examen diagnóstico y con la entrevista a la tutora determinamos que la dificultad fue particularmente no usar correctamente la propiedad de paralelismo entre rectas en el siguiente ítem del examen diagnóstico, Ilustración 28, dado que confundía la definición de paralelismo con la de perpendicular, entonces fue necesario aclarar las dos definiciones al final del examen diagnóstico.

Ilustración 28. Ítem 2 del examen diagnóstico, elaborado por la tutora

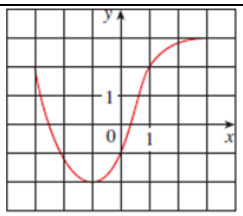
2. Encuentre una ecuación para la recta que pasa por el punto (2,-5) y
a. Tiene pendiente -3
b. Es paralela al eje x
c. Es paralela al eje y
d. Es paralela a la recta 2x-4y=3

Por lo tanto, no tuvo la habilidad de usar la propiedad de un objeto en dos dimensiones para dar respuesta al enunciado. Acerca del concepto de paralelismo algunos autores como García y López (2008) afirman que muchas de las limitaciones que los estudiantes manifiestan sobre su comprensión acerca de temas de geometría se deben al tipo de enseñanza que han tenido en la educación básica y media, donde lamentablemente se da el último espacio en el año escolar, a pesar de tener estrategias como la del MEN (2000) para la Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas.

Referente a los procesos analíticos se identificó que la baja calificación al descriptor de *Relaciona las expresiones algebraicas y gráfica empleando sus propiedades* (F6) se asocia directamente con el ítem de la Ilustración 29 del examen.

Ilustración 29. Ítem 3 del examen diagnóstico, elaborado por la tutora

3. La grafica de una función *f* se da a la derecha
a. Exprese el valor de *f*(-1)
b. Estime el valor de *f*(2)
c. ¿Para qué valores de x es *f*(x)=2?
d. Estime los valores de x tales que *f*(x)=0
e. Exprese el dominio y rango de *f*



Es claro que en este punto la interpretación grafica juega un papel importante en la solución de esta situación, además los estudiantes no están familiarizados con este tipo de puntos porque la dirección en que usualmente se plantean es en el sentido contrario. Es decir, dada la expresión algebraica hacer la representación gráfica de la función.

Una vez que la tutora tiene un panorama general del nivel de desarrollo real de Camilo otorga herramientas de apoyo como videos académicos sobre funciones y nuevos ejercicios, que lo invitan a realizar un proceso de interiorización para que lo estudiado con la tutora y en la clase de Cálculo Diferencial se convierta en un conocimiento propio del sujeto. En la siguiente sesión la tutora trae un taller diseñado para *"acabar con las dificultades que presentaban los estudiantes sobre los temas discutidos en la sesión anterior*" (tomado del formato de seguimiento, sesión 2, recuadro Actividades realizadas). Además, la tutora resalta que el estudiante llegó con muchas dudas acerca de funciones, es decir, traía varias preguntas para el encuentro, con estos aspectos la ZDP como situación de interacción estaba cumpliendo con la recomendación de que el estudiante beneficiario participe activamente desde el comienzo en la actividad y que acepte la complejidad de las situaciones que está intentando resolver.

Las principales preguntas giraban en torno a identificar si una gráfica correspondía a la gráfica de una función o no, sin embargo, estas dudas no se trabajaron por medio del taller que había diseñado la tutora sino con ejercicios propios del libro guía (*Cálculo, trascendentes tempranas* de Zill). Al respecto la tutora menciona lo siguiente:

> Eso lo miramos fue del libro, para saber si algo era función o no era función, porque yo les decía: bueno dada la gráfica, procuraran que si trazaban líneas verticales solamente la cortaran en un punto. entonces él me ponía ejemplos y me decía si yo pongo esta gráfica ¿esto es función, esto no es función? Entonces hay si tuve que recalcarle mucho lo que era y lo que no era función. (Episodio 3)

Con la narración anterior observamos que la tutora tuvo que intervenir en varias ocasiones durante el trabajo de estas situaciones. Ahora bien, Rodríguez (2013) plantea cuatro niveles de ayuda dentro de una ZDP: 1° Nivel: alerta, 2° Nivel: verbalización, 3° Nivel:

demostración, 4° Nivel: Elaboración conjunta hasta dejarlo solo (p. 330). Entonces el nivel de ayuda proporcionada por la tutora estuvo en la parte de demostración, ya que no solo recordaba a sus estudiantes la definición de función, sino que a la vez mostraba como determinar si las gráficas correspondían a funciones, para que Camilo posteriormente pudiera decidir por sí solo. Con esto último también observamos una de las características del andamiaje: la temporalidad, dado que el andamiaje se crea y se usa pensando en que luego será retirado, porque el objetivo es que el estudiante sea autónomo a la hora de abordar las situaciones. Entonces la demostración de la estrategia por parte de la tutora fue retirándose poco a poco para que fuera el estudiante quien la desarrollara.

Para esta segunda sesión en el formato de seguimiento se menciona que Camilo tiene claro los conceptos de dominio y recorrido de una función, aspecto que en la sesión anterior tenía dificultad, pero seguía presentando problemas para aplicar lo que comprendía. Esta dificultad más allá de lo procedimental se ubica en el proceso de razonamiento ya que Camilo tuvo problemas para usar definiciones de un objeto matemático trabajado, es por eso que la tutora lo valoró con calificación de 2 sobre 5. Profundizando en este aspecto la tutora narra:

> Investigadora: Si Camilo sabía las definiciones de dominio y recorrido, entonces ¿en qué radicaba la dificultad del estudiante para hallar estos elementos cuando le dabas una función?
>
> Tutora: Mmm, él sabía cuál dependía del eje *"x"* y cuál del eje *"y"* ¿si? Pero entonces muchas veces la mirar el punto de inicio no lo miraba en el eje que era, como en la parábola. Para la parábola entonces en vez de decir que si cortaba en -2 en el eje *"y"* y en 1 en el eje *"x"* (haciendo referencia a las coordenadas del vértice de una parábola que abre hacia arriba) entonces él decía que el recorrido iba desde 1

> hasta infinito mas no desde el punto -2. […] él enredaba las definiciones, entonces yo lo que le hacía era decirle tapa los ejes, haz que este eje no exista entonces solo va a existir el eje *"y"* ¿dónde corta al eje (la coordenada del vértice de la parábola)? Entonces así él ya las podía ver mejor. (Episodio 4)

Con el episodio 4 podemos ver nuevamente como la tutora interviene para corregir al estudiante y darle estrategias que le permitan abordar estas situaciones en particular y que le permitieron a Camilo superar las dificultades. No obstante, es evidente que quizás los mismos tutores no hagan uso de un lenguaje adecuado al momento de explicar a sus estudiantes, como se nota en la pregunta que la tutora plantea "¿dónde corta al eje *"y"*?". Ahora bien, sin querer justificarlos, si recalcamos que son profesores en formación luego este tipo de errores pueden darse en el contexto de las tutorías.

Ya superadas las dificultades relacionadas con el dominio y el recorrido de funciones, en la sesión 3 se estudiaron la composición de funciones y la función inversa, alrededor de esta temática la principal dificultad estuvo en no saber las definiciones de función inversa, función inyectiva y sobreinyectiva, aspecto que no profundizaremos por estar relacionada con el conocimiento conceptual. Una vez dadas las definiciones en la sesión y realizar ejemplos si hubo dificultades sobre el proceso procedimental que se encuentran enmarcadas en el descriptor F_{14}: transformar un objeto matemático para obtener un nuevo objeto. En este caso, la composición de una función que estuvo estrechamente relacionada con dar significado a los símbolos matemáticos ya que como lo menciona la tutora *el estudiante desconocía cuál era la función que actuaba primero,* es decir interpretar la notación de la composición de funciones. Además, la tutora resalta que Camilo es muy visual luego la estrategia que ella usó para solucionar dudas sobre funciones inversas fue por medio de la elaboración de gráficas y que eso se convirtió en

estrategia propia de Camilo. Además, dado que los estudiantes querían seguir profundizando y corrigiendo sus errores la tutora creo un grupo en la red social Facebook en donde los estudiantes interactuaban después de las sesiones y entre ellos mismo se compartían enlaces de videos y páginas sobre la temática mostrando así una lata disposición para solucionar las tareas generando que la ZDP sea más amplia.

Para concluir respecto al tema de funciones Camilo podemos decir que se observaron varios aspectos en los que él mejoró, especialmente en su actitud hacia la tutora, porque ya aceptaba sugerencias por parte de ella, además ayudaba a sus compañeros en la resolución de los ejercicios, es decir, adquirió confianza ante el grupo y la tutora. Confianza, que según Corredor, Pérez y Arbeláez (2009) es una de las primeras condiciones de la mediación porque la interacción se ha de realizar con base en la confianza, el respeto y la aceptación docente-estudiantes (p.24). Referente al aspecto académico se logró evidenciar habilidad en la trasformación de expresiones algebraicas y en la realización de cálculos básicos. Por otro lado, él pudo avanzar en el empleo de procedimientos de tipo grafico para expresar una imagen visual de un concepto como el de dominio y recorrido, además de ir dando un correcto significado a los símbolos y notaciones propias del tema para la resolución de ejercicios. Luego las intervenciones y mediaciones de la tutora han permitido que pase a un nuevo nivel de desarrollo real, es decir, va subiendo escalones.

4.2.2. Los procedimientos de Camilo en el trabajo con límites

Recordamos que en la primera sesión el estudiante presentó un examen diagnóstico elaborado por la tutora sobre los contenidos básicos; de acuerdo al reporte de esa sesión se identificaron dificultades en procedimientos analíticos como traducir de una a otra de las

distintas representaciones de una función, y relacionar las expresiones algebraicas y gráfica empleando sus propiedades. Por otro lado, se resaltó el dominio en los procedimientos de tipo aritmético y en transformar expresiones algebraicas en el ejercicio de simplificar algunas expresiones. En este reporte agruparemos las sesiones asociadas al trabajo con limites, sesiones 4, 5 y 6, para corrobora algunas dificultades y habilidades procedimentales de Camilo identificadas en la etapa anterior.

Inicialmente la tutora manifiesta dentro del formato de seguimiento las siguientes dificultades:

Tabla 10. Debilidades: cuarta sesión de tutoría Camilo. Fuente: Formato de seguimiento individual

Debilidades Observadas	No tenía noción de límite, por ello no podía analizar el límite de una función, ni mirar los valores a los cuales me acerco por derecha y por izquierda en un punto dado. No preparó la clase.

Según la Tabla 10, Camilo tuvo dificultades en la forma básica de determinar el límite de funciones, su noción no era clara, y la tutora lo atribuyó a que el estudiante "no preparó clase", entendemos esto con el hecho que el estudiante no repasó los talleres de la clase y por ende no preparó preguntas. Ahora bien, en el episodio 5 la tutora manifiesta lo siguiente sobre el inicio de la sesión:

> Camilo tenía tarea para esa sesión que correspondía a la parte conceptual, entonces que miraran sobre los límites, algo sobre la definición formal de límite. Entonces él no lo miro, no miro eso, sino que paso de una vez a hacer los ejercicios sin mirar la parte conceptual y por eso yo digo que no preparó, porque cuando llegué, pregunté ¿qué entendieron sobre los límites? (Episodio 5)

Acerca del episodio 5 podemos notar que la mediación dentro de la ZDP exige al tutor la motivación y la implicación de los estudiantes, es decir, como lo plantea Corredor, Pérez y Arbeláez (2009), es importante que en el proceso de mediación se motive al estudiante a que se haga protagonista de su aprendizaje y que se comprometa en todas las actividades que para tal fin se propongan, en ultimas lograr la autonomía del estudiante para que el mismo se apropie de las metas de aprendizaje que se están buscando. Aunque en esta parte inicial de la sesión Camilo no estuvo completamente comprometido.

El episodio 5 es retomado por la tutora con lo escrito en el *trabajo complementario* ya que le pide a Camilo repasar los talleres trabajados y realizar nuevos ejercicios. En este punto desde la teoría de Vygotsky, la tutora está propiciando en el estudiante el proceso intrapsiquico porque debe hacer una interiorización de lo trabajado en la sesión como proceso interpsiquico, este último realizado con la tutora al depender de ella en la solución de los problemas, por eso este último proceso se realiza a nivel social. Recordemos que para Vygotsky la interacción social constituye el medio principal de desarrollo intelectual, y la tutoría como espacio de interacción entre pares académicos es un tipo de interacción social.

Sobre la notación y el uso de los símbolos matemáticos, la tutora insistió a Camilo en la escritura apropiada de los límites, al respecto ella menciona lo siguiente:

> Ya a la hora de resolver los límites yo les insistía mucho en que cada paso debíamos ir poniendo límites. Y ellos me preguntaban: pero ¿Por qué? Yo les decía deben ponerlo porque no significa lo mismo, es decir no se ha evaluado. Y yo les decía la única forma que desaparezca el símbolo de limite es cuando ya lo hayamos evaluado, del resto siempre tiene que ponerlo. (Episodio 6)

En el episodio 6 evidenciamos la intervención de la tutora para corregir y enfatizar en el correcto uso de los símbolos matemáticos asociados a un concepto, que no se restringió únicamente al tema de límites, y que fue llevando a Camilo a ser consciente de la necesidad de escribir correctamente. La tutora dentro de la sesión está evaluando continuamente al estudiante con el fin de corregir junto a él los errores. le está exigiendo que se exprese adecuadamente para darse a entender en el momento de preguntar o responder a los puntos del taller o del libro.

Ya en la siguiente sesión la tutora evidencia que el estudiante trabajó independientemente porque planteó dudas nuevamente sobre los límites, ratificando que aún se encuentra en una zona de desarrollo próximo acerca de la solución de problemas sobre dicho tema. Específicamente Camilo no comprendía cómo aplicar correctamente la definición formal de límite y lo pudo hacer con ayuda de la tutora, quien utilizó el software GeoGebra como herramienta de mediación para representar algunas funciones y verificar el límite en cada caso. Consideramos que esta herramienta de mediación es válida ya que, en términos generales, como lo afirman Tall y Vinner (1981), no siempre es lógica pura lo que nos da una idea, interpretando así, que en una parte inicial es necesaria la intuición y posteriormente si debe darse un proceso para llegar a lo formal, que es siempre el objetivo de las matemáticas avanzadas.

Ya en la última sesión sobre límites, la tutora nuevamente utiliza GeoGebra como herramienta para visualizar los límites de distintas funciones, creando en ese sentido un andamiaje en donde el tutor controla los elementos de la tarea y posibilita su desarrollo. Puntualmente ya no presenta dificultad en determinar los límites de las funciones una vez representados gráficamente por lo que podemos suponer que eso explica porque la tutora asignó una nota de 4,0 al indicador F_5: emplea procedimientos de tipo gráfico para expresar una imagen visual de un concepto o relación variacional.

No obstante, la tutora reporta que el estudiante no recordaba las gráficas de algunas funciones como logarítmicas, exponenciales y trigonométricas, además de su dominio y recorrido entonces podemos entender porque valoró el indicador F_6 con un 3,0. Referente a esto Camilo, en la entrevista, menciona que en el colegio estudiaron "funciones sencillas" y que por eso se le hace difícil representar nuevas funciones que para él son "de un nivel mayor".

Con el ejemplo anterior evidenciamos algunos de los elementos teóricos de la ZDP en el desarrollo de habilidades relacionadas con procedimientos analíticos. No obstante, en varias de las sesiones posteriores a estas se identificó que la principal herramienta de mediación de la tutora, además de los ejemplos, fue el uso de GeoGebra, tanto para la exploración de gráficas como para el diseño de actividades sobre la exploración de nuevos temas.

Otro aspecto relevante fue que el espacio de la ZDP se extendió fuera de las sesiones de tutorías ya que la tutora reporta, en los formatos de seguimiento, que algunas de las actividades complementarias fueron socializadas por medio aplicaciones de mensajería instantánea Whatsapp en la que el estudiante hacia llegar las inquietudes al tutor, y en otras ocasiones el estudiante trabajaba independientemente fuera de la tutoría identificando de este modo la realización del proceso de internalización. Respecto a las habilidades del proceso procedimental la tutora reporta en las últimas sesiones sobre límites que superó varias de sus dificultades en el manejo y cálculo de límites.

4.2.3. Los procedimientos de Camilo en el trabajo con derivadas y sus aplicaciones

En el aprendizaje del Cálculo y particularmente sobre la noción de derivada de una función existen dos caminos extremos, uno muy enfocado en la parte operativa o mecánica y el otro extremo enfocado en el contenido formal, como lo mencionan Cuevas, Rodríguez y

González (2014). Por ejemplo, si en la educación media superior se aborda la noción de derivada el tipo de enseñanza más usual, desde la propia experiencia, es plantear modelos algorítmicos de resolución de situaciones para que luego los estudiantes los reproduzcan entonces como lo mencionan Cuevas, Moreno y Pluvinage (2005) el significado de los conceptos no está presente y por lo tanto la aplicación de la derivada se limita a la transformación de expresiones algebraicas mediante las reglas de derivación.

Otro problema en el aprendizaje del concepto de derivada recae en la organización de los programas de estudio porque según Ímaz y Moreno (2010) la estructura de funciones, límites y por ultimo aplicaciones de la derivada no es consecuente con el desarrollo histórico del concepto. Por tal motivo estos autores y otros como Cuevas y colaboradores proponen la reestructuración curricular más coherente con el desarrollo histórico.

En nuestro contexto, el programa de la asignatura de Cálculo I está organizada en la forma tradicional, a pesar de que recientemente se han hecho y ejecutado propuestas de reestructuración como el curso de pre-cálculo, con el uso de tecnologías y el trabajo activo de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas (Fiallo y Parada, 2014). Las tutorías de Cálculo I ofrecidas por el programa ASAE (contexto de nuestro estudio) siguen una metodología basada en la resolución de problemas y en la atención particular de las dificultades de los estudiantes beneficiarios, no obstante, éstas siguen la programación del curso tal como la plantea la universidad. Por ello, se evidencia en varias de las sesiones de tutoría sobre el concepto de derivada, reportadas por la tutora, actividades de ejercitación de las reglas de derivación para distintos tipos de funciones. Por este mismo motivo agrupamos las últimas siete sesiones con el fin de no ser repetitivos y así reportar las habilidades de Camilo en el trabajo con derivadas y sus aplicaciones.

Iniciaremos, presentado resultados del análisis de las tres primeras sesiones sobre derivadas (tratadas por la tutora desde un enfoque algorítmico) guiadas por un taller. Según la tutora, las actividades se realizaron teniendo en cuenta que los estudiantes han estudiado las secciones que tienen que ver con:

- La derivada como función.
- Derivadas de funciones polinómicas, exponenciales y reglas del producto y cociente.
- Derivadas trigonométricas y regla de la cadena.

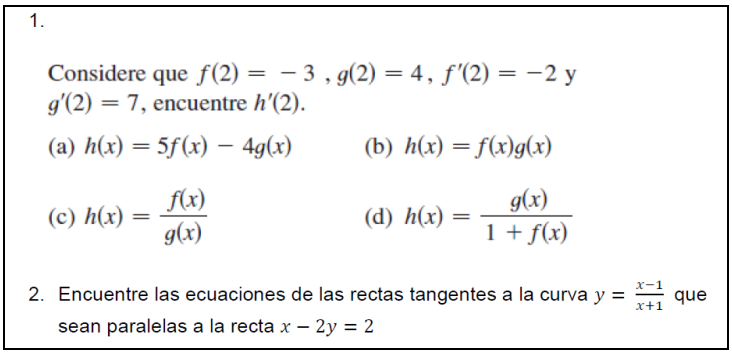
En cada una de las sesiones, según menciona la tutora "el estudiante ha leído el tema con anticipación", luego desde nuestro punto de vista evidenciamos que la interacción continua con la tutora ha logrado que el estudiante se responsabilice de su proceso de aprendizaje y que poco a poco el andamiaje construido por ellas sea retirado, a su vez, Camilo es consciente de que es una actividad que se desarrolla colaborativamente y por lo tanto ambas partes deben aportar en la construcción del conocimiento. Además, la tutora menciona:

> Inicialmente empezamos a realizar ejercicios con las operaciones de la derivada, es decir, la derivada normal y después mirar lo de las operaciones, lo de la suma… Eso Camilo lo adelanto muy bien. Eso lo memorizó muy bien… lo que fue la regla del producto y el cociente. (Episodio 7)

Recordemos que los procedimientos involucran métodos y técnicas, luego lo memorístico y lo algorítmico es también esencial dentro del proceso procedimental, y este aspecto según el episodio 7 es dominado por Camilo. A pesar de esto, Star (2004) propone que los estudiantes tengan un conocimiento de los procedimientos más flexible, es decir, que no se limite a los

ejercicios particulares sin una interpretación por parte del estudiante. Esta propuesta es adaptada parcialmente por la tutora ya que mezcla ejercicios de mecanización de algoritmos, pero a su vez propone situaciones donde Camilo tuvo que interpretar la derivada como el valor de la pendiente de la recta tangente a una curva, como por ejemplo en los ejercicios 1 y 2 del taller 10, Ilustración 30.

Ilustración 30. Ejercicios 1 y 2, taller 10 elaborado por la tutora



1.

Considere que $f(2) = -3$, $g(2) = 4$, $f'(2) = -2$ y $g'(2) = 7$, encuentre $h'(2)$.

(a) $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$ (b) $h(x) = f(x)g(x)$

(c) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (d) $h(x) = \frac{g(x)}{1 + f(x)}$

2. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \frac{x-1}{x+1}$ que sean paralelas a la recta $x - 2y = 2$

Con el ejercicio 2, Ilustración 30, la tutora nuevamente reforzó las nociones algebraicas de paralelismo y perpendicularidad, poco dominadas por Camilo en el momento de ingresar a las tutorías, pero ya en el trabajo con derivadas. Por otro lado, respecto a la regla de la cadena se posibilita la siguiente reflexión:

> Tutora: …Camilo pensaba que siempre tenía que hacerlo en el mismo orden. Entonces, él me preguntaba qué si era lo mismo hacer la derivada del de adentro y luego la de afuera, a hacer primero la de afuera y luego la de adentro.
>
> Investigadora: ¿Cuál fue tu respuesta a la inquietud?
>
> Tutora: Que tenía que tener mucho cuidado depende de los signos que estuviesen dentro. Pero que … si se podía. Porque su dificultad siempre estuvo en los signos. (Episodio 8)

Luego en estas sesiones los errores más frecuentes de Camilo, según la tutora, fueron de tipo numérico; como el que se menciona en el episodio 8 sobre el manejo de los signos en la regla de la cadena. Además, en el formato de seguimiento se plantea que tuvo dificultades para resolver raíces de funciones cuadráticas. A pesar de ser errores "mínimos", superados en la educación básica, los cuales se pueden llegar a despreciar a medida que se avanza en los temas, si es necesario que los tutores no los pasen por alto y consideren realizar actividades de refuerzo, para evitar que más adelante esos pequeños errores se convierten en obstáculos epistemológicos desde la mirada de Brousseau.

Acerca de las aplicaciones de la derivada, estudiadas en las últimas sesiones, la tutora orientó las sesiones semanales en la resolución de situaciones problema sobre la derivada como razón de cambio, aplicación de la primera derivada y problemas de optimización. Dichos problemas fueron seleccionados del libro guía para Cálculo I Trascendentes tempranas de Zill y Wright (2011). Aquí, la principal dificultad que la tutora percibió en Camilo fue la interpretación de los enunciados. Recordemos que, en este punto del curso los estudiantes no se limitan a resolver ejercicios puntuales que requieren únicamente la aplicación de algoritmos, sino que deben interpretar situaciones que implican variación para modelarlas a través de una función; lo que hace necesario identificar las variables del problema y establecer correctamente la interdependencia de esas magnitudes variables tanto cualitativa como cuantitativamente (Ramos y Jiménez, 2014). Al respecto sobre estas sesiones en entrevista se manifiesta que:

> Tutora: en la optimización y razón de cambio la dificultad, por ejemplo, en algunas situaciones estaba en usar los volúmenes de figuras geométricas, Camilo no se los sabía, entonces se confundía y no podía avanzar en el problema. Además, a veces le

tocaba leer el problema y leerlo porque no lo interpretaba bien, o sea no veía el camino de hacerlo.

Investigadora: ¿Camilo realizaba alguna representación de la situación?

Tutora: siempre hacia un dibujito. Si le decían un cilindro, él dibujaba el cilindro; o si le decían un cubo, él dibujaba el cubo, y trataba como de representar lo que le estaba diciendo el problema… trataba de imaginarse que estaba pasando. (Episodio 9)

Según lo reportado en el episodio 9, identificamos que hubo un trabajo continuo sobre situaciones que involucraban figuras geométricas para repasar las fórmulas de los volúmenes más usuales. Camilo no recordaba las fórmulas y por consiguiente no podía usarlas con efectividad en la conclusión de procedimientos geométricos. Además, identificamos cierta dificultad en la interpretación de los enunciados escritos sobre situaciones que implican variación.

Sobre esta última cuestión mencionamos que en un principio habíamos considerado analizar dos procesos matemáticos, el proceso procedimental y el de comunicación. Sin embargo, por la complejidad de la información a analizar decidimos estudiar únicamente el primer proceso. A pesar de esta decisión no podemos separar los procesos matemáticos, como ya habíamos mencionado (en el apartado 2.3 del marco teórico), porque como acabamos de ver en el episodio 9 la interpretación como habilidad propia del proceso de comunicación permite comprender y dar sentido a la estructura de un problema (Hernández, Delgado y Fernández, 2001, Montenegro, 1999) lo que influye en la elaboración y aplicación de procedimientos necesarios en la solución de una situación.

Sin restar importancia a los subtemas de aplicaciones de la derivada, finalizamos mostrando que en los talleres se trabajaron problemas de aplicación de la primera y segunda

derivada para graficar funciones o para determinar las constantes de funciones específicas como la de la parábola, Ilustración 31.

Ilustración 31. Ejercicios 4, taller 13 elaborado por la tutora.

Halle una parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pase por el punto $(1, 4)$ y cuyas rectas tangentes en $x = -1$ y $x = 5$ tengan pendientes 6 y -2 respectivamente.

Referente al ejercicio 4, Ilustración 31, la tutora menciona a groso modo la forma en la cual Camilo abordaba este tipo de situaciones.

> Tutora: lo primero que hizo fue una parábola, y él tenía muy presente que si *a* era positiva entonces eso es una parábola que abre hacia arriba. Estos problemas eran muy claros para Camilo, porque él tenía claro que era una recta tangente, que quiere decir que su pendiente sea por ejemplo 6, entonces eso si lo trataba de abordar muy bien y yo no intervenía. (Episodio 10)

A partir del episodio 10 podemos notar habilidades de Camilo referidas a procedimientos analíticos y a su vez un conocimiento conceptual que favorece directamente en la elaboración de dichos procedimientos. Aquí, por ejemplo, transformar objetos como la derivación no se limita a lo algorítmico, sino que también hay una reflexión que exige al estudiante entender los conceptos sobre los cuales un procedimiento se apoya MEN (2006) y así seleccionar el más adecuado. A su vez notamos que en la parte final del proceso tutorial el nivel de ayuda de la tutora están la alerta (Nivel 1) y a su vez la calidad de la tarea está en un nivel de eficacia media máxima (Rodríguez, 2013).

En general, Camilo tuvo avances desde lo académico y lo social ya que no solo solucionaba dudas con la tutora y sus compañeros dentro de las sesiones, sino que también aprendió a escuchar y trabajar en grupo, así como ser más abierto a las recomendaciones de la tutora. En general, al terminar el acompañamiento de la tutora, identificamos las habilidades referenciadas en la Tabla 11.

Tabla 11. Habilidades y dificultades en Camilo durante del proceso tutorial.

	Aritméticos	**Geométricos**	**Analíticos**
Habilidades	• Realiza cálculos con números decimales a lápiz y papel.	• Realiza representaciones en el plano de figuras de 2D o 3D • Emplea procedimientos de tipo grafico para expresar la imagen visual de un concepto como el de límite.	• Determina las variables de una situación. • Utilizar aproximaciones numéricas para deducir intuitivamente el límite de una función. • Transforma objetos matemáticos para obtener un nuevo objeto como la composición de funciones y la derivación.
Dificultades	• Realiza cálculos con números negativos en operaciones como multiplicación y potenciación	• Usa propiedades de las figuras como paralelismo y perpendicularidad. • Recuerda las formulas sobre volúmenes y propiedades de figuras geométricas para modelar las situaciones de cambio.	• Modela situaciones de cambio a través de funciones (interpretación de los enunciados).

4.2.4. Los procedimientos de Camilo al finalizar el proceso tutorial

Para el semestre 2015-II la coordinación de ASAE junto con la investigadora diseñaron un examen que se denominó *prueba simulacro* con el fin de obtener información adicional independiente de las valoraciones de los tutores. En términos de la teoría de la ZDP el fin de esta prueba fue identificar y describir el nuevo nivel de desarrollo alcanzado, en otras palabras, la zona de desarrollo real del estudiante al finalizar su paso por un programa de acompañamiento. A continuación, analizamos cada uno de los puntos de la prueba simulacro organizándolos de acuerdo al tipo de procedimiento de mayor fuerza en cada uno, por este motivo tendremos en mayor medida procedimientos analíticos y aritméticos, seguidos de procedimientos geométricos y métricos.

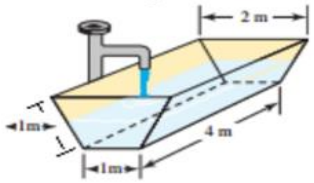
Procedimientos geométricos de Camilo en la prueba simulacro

En el punto 4 presentado en la Ilustración 32, el objetivo era determinar la rapidez con que sube el nivel del agua en una determinada profundidad de un canalón con extremos verticales en forma de trapecios isósceles. Se espera que el estudiante elabore procedimientos de los cuatro tipos. Inicialmente debe representar el volumen de la figura tridimensional y posterior a eso determinar las variables de la situación y establecer la interdependencia de las variables profundidad y base mayor del trapecio. Esta última acción requiere de la elaboración de figuras auxiliares para usar propiedades como la semejanza, y finalmente modelar la expresión del volumen en función de la profundidad del agua. Lo que viene después será analizado dentro de los procedimientos analíticos de esta prueba.

Ilustración 32. Punto 4.a, prueba simulacro ASAE

4. Analiza y resuelve:

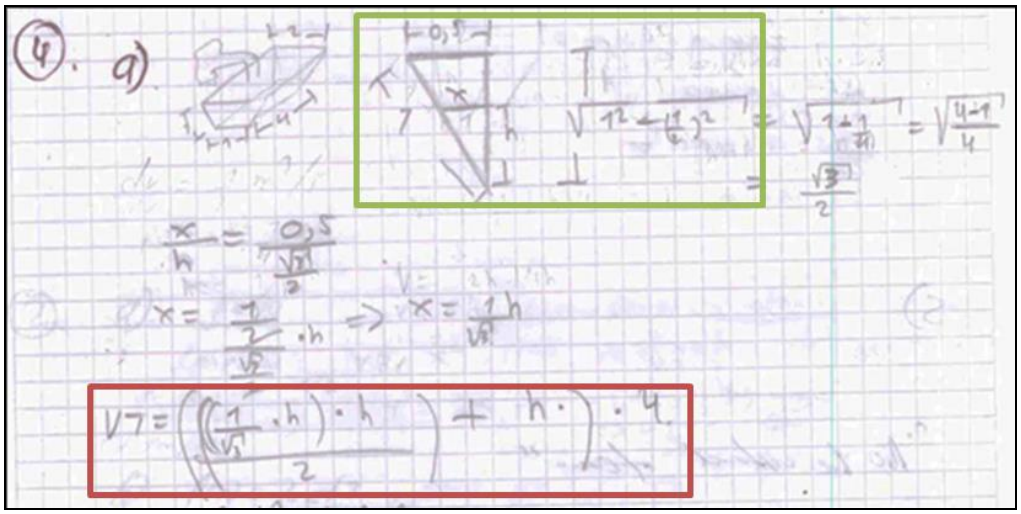
a. Un canalón de agua con extremos verticales en forma de trapezoides isósceles tiene las dimensiones mostradas en la figura. Si se bombea a razón constante de $\frac{1}{2}\ m^3/s$, ¿con qué rapidez sube el nivel del agua cuando la profundidad del canalón es de $\frac{1}{4}\ m$?



En el procedimiento realizado por Camilo se evidencia su intento por relacionar las dos variables que son la base mayor del trapecio y la altura del agua y para ello realiza una construcción auxiliar de dos triángulos semejantes y solapados, (Recuadro verde, Ilustración 33) que son una sección del trapecio. A su vez, utilizó la propiedad de los triángulos rectángulos, es decir, el teorema de Pitágoras para calcular el valor del cateto del triángulo más grande con dimensiones numéricas. Hasta este punto podemos evidenciar, desde la *taxonomía de los procedimientos*, que las acciones de Camilo para usar atributos y propiedades de figuras de dos dimensiones (triángulos) fueron realizadas eficientemente por el estudiante.

Una vez calculado el valor del cateto y teniendo en cuenta que los triángulos son semejantes, Camilo procedió a establecer una proporción entre los catetos de los triángulos rectángulos. Logrando determinar la interdependencia cuantitativamente de las variables *x* y *h* (nivel el agua).

Ilustración 33. Procedimiento geométrico de Camilo en el punto 4.a.



No obstante, a la hora de modelar la función en términos de la variable altura el estudiante recae en un error ya que, primero, no tiene en cuenta que la variable *x* no representa la base mayor del trapecio respecto a un nivel de agua determinado, dado que Camilo sólo consideró un triángulo (pero la figura del trapecio está formada por dos de esos triángulos rectángulos y un cuadrado de lado $1\ m$). En segundo lugar, el estudiante no plantea correctamente el volumen de la figura tridimensional (recuadro rojo, Ilustración 33), principalmente porque la expresión del área del trapecio no es formulada correctamente. Recordemos que durante las sesiones de tutoría (episodio 9) se reportó que Camilo no recordaba algunas fórmulas de volúmenes de figuras geométricas, entonces aquí nuevamente se repite y en figuras planas.

A partir del procedimiento geométrico ejecutado por Camilo como primera acción para resolver la situación de variación, encontramos que recurrió a representaciones pictóricas que le ayudaran a interpretar el cambio en el volumen del agua. Sin embargo, la acción de calcular el volumen de la figura, en términos de Vigotsky, no forma parte de su nivel de desarrollo real ya que por sí solo no lo logró, debido quizás a un desconocimiento de las propiedades de figuras geométricas en caso del trapecio.

Procedimientos aritméticos de Camilo en la prueba simulacro

Referente al segundo punto de la actividad (ver Ilustración 34) el objetivo era analizar cada uno de los enunciados y determinar si eran falsos o verdaderos, y posteriormente justificarlos.

Ilustración 34. Punto 2, prueba simulacro ASAE.

2. Determina si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Si es verdadero, justifica tu respuesta. Si es falso, explica por qué o da un ejemplo que refute el enunciado. Respuesta sin justificar NO tiene valor.

a. Si una función $y = f(x)$ es par, entonces $y' = f'(x)$ es par.

b. La función $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ es continua en el intervalo $(2, \infty)$.

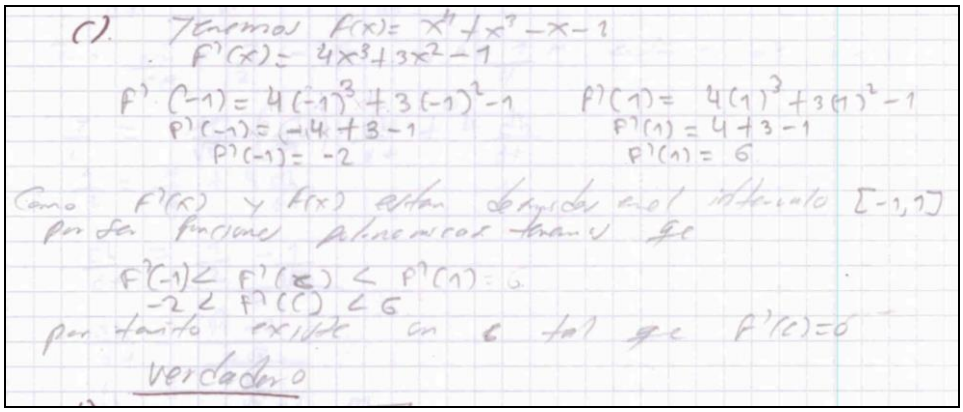
c. Dada la función $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ en el intervalo $[-1, 1]$, existe un número c tal que $|c| < 1$ y $f'(c) = 0$.

En el ítem 2.c. la afirmación es verdadera y el principal objeto matemático es la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto por medio del teorema del valor intermedio, lo que implica verificar las condiciones del teorema. Este punto fue contestado correctamente por el 16% de los estudiantes que presentaron el simulacro y dentro de ese grupo se encuentra Camilo. A continuación, la respuesta de Camilo y sus procedimientos aritméticos.

Como se observa en la Ilustración 35, Camilo después de interpretar el Teorema del valor intermedio a la situación procede a derivar la función y evaluar precisamente en los valores extremos del intervalo. En esta parte se evidencia que Camilo domina los métodos de derivación de polinomios, y a su vez realiza sin problema operaciones básicas que involucran números negativos (recodemos que en la Tabla 11 reportamos que en general durante las sesiones de tutoría tenia errores al operar con números negativos). Entonces desde la taxonomía de los procedimientos y sus habilidades nos sugiere (Barajas, 2015) un avance en la realización de operaciones básicas con números enteros. De igual forma, Camilo tuvo control de las

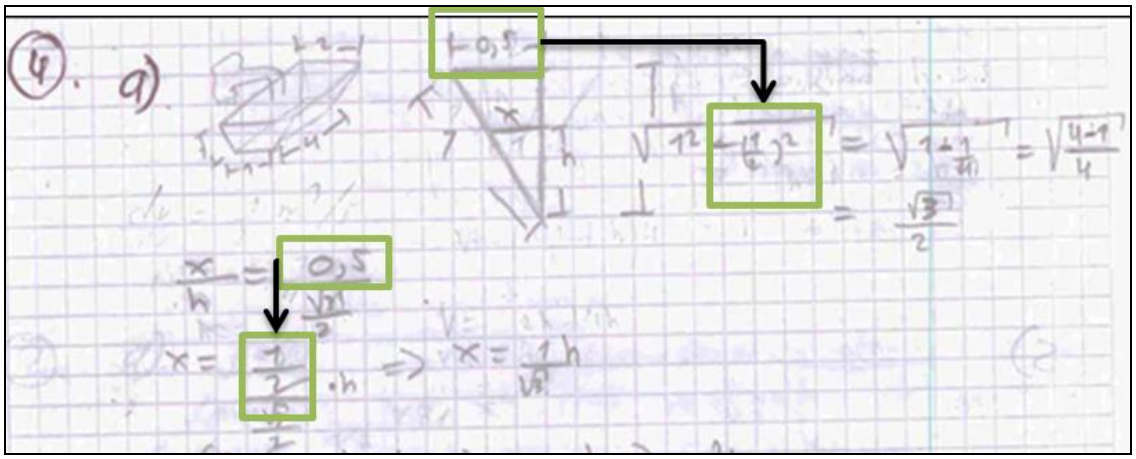
condiciones necesarias para la validez del teorema como lo es la continuidad de la función en el intervalo dado. Por lo tanto, resaltamos la importancia de tener un equilibrio entre el conocimiento procedimental y conceptual, es decir, no solo memorizar conceptos y algoritmos sino reflexionar sobre ellos para saber aplicarlos en las situaciones que lo requieran.

Ilustración 35. Respuesta de Camilo al punto 2.b. prueba simulacro



Retomando nuevamente el punto 4 (Ilustración 32), notamos que Camilo pasa de una representación decimal a una racional para resolver la raíz y calcular la altura total del canal. Y nuevamente cuando establece la proporción pasa de la notación decimal a la racional para determinar el valor de x en función h, como se observa en los recuadros verdes de la Ilustración 36. Lo cual nos sugiere que Camilo es capaz de usar diferentes representaciones de los números decimales para decidir sobre cual usar en la solución de la situación (Barajas, 2015).

Ilustración 36. Procedimiento geométrico de Camilo en el punto 4.a. prueba simulacro



Ahora bien, usar diferentes notaciones de los números reales y decidir sobre su uso en una situación dada es muy apropiada para diferentes contextos, más allá de un curso de Cálculo diferencial, ya que facilita la realización de operaciones e interpretación de resultados numéricos (NCTM, 2003). Dentro del contexto del curso de cálculo I, esta estrategia es particularmente necesaria en el examen de escuela que prohíbe el uso de calculadora.

Por último, en relación a linealización y diferenciales, como subtema de la aplicación de la derivada, se propuso una situación donde los estudiantes debían encontrar una aproximación al error máximo, Ilustración 37. Con el cual pretendíamos revisar desde lo aritmético las habilidades para operar con números decimales.

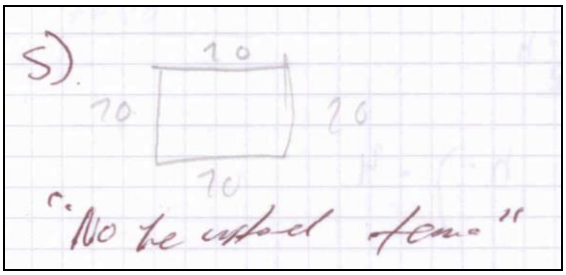
Ilustración 37. Enunciado ítem 5, prueba simulacro ASAE

> **5.** El lado de un cuadrado mide 10 *cm* con un error posible de 0,3 *cm*. Usa diferenciales para encontrar una aproximación al error máximo en el área. Encuentre el error relativo aproximado y el error porcentual.

No obstante, más de la mitad de los estudiantes que presentaron el simulacro no contestaron este punto. Algunos mencionaron, por escrito en el examen o verbalmente, que ellos

no habían estudiado en clase con el profesor ese tema. Un caso de esta evidencia es precisamente Camilo quien de forma escrita manifestó no haber visto el tema, Ilustración 38.

Ilustración 38. Respuesta de Camilo al ítem 5, prueba simulacro

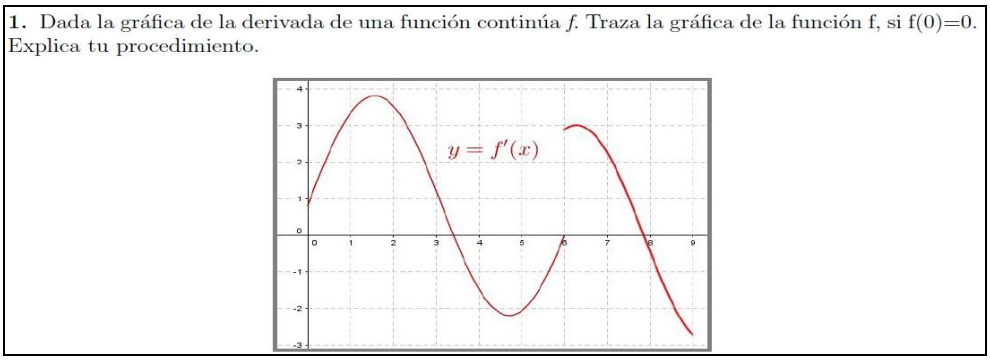


A pesar de no estar directamente interesadas en la presentación de contenidos, si consideramos al profesor como otro mediador en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes, y según Corredor, Arbeláez y Pérez (2009), se le exige una coherencia de contenidos en el diseño de experiencias de aprendizaje como lo es la evaluación. Entonces es preocupante que algunos de los temas no sean abordados por todos los profesores y luego sean evaluados en el examen final de escuela. Recordamos que los estudiantes presentaron la prueba simulacro el último día de clases de ese semestre y enseguida salieron a una semana de receso, posterior a ella entraron a semana de exámenes. Así que suponemos que una de sus opciones fue estudiar el tema por su cuenta.

Procedimientos analíticos de Camilo en la prueba simulacro

En el primer punto se debía interpretar la gráfica de la función *f'* para trazar la gráfica de la función *f* (ver Ilustración 39), en donde Camilo hizo una incorrecta interpretación del enunciado y trata de trazar la gráfica de la función derivada de *f',* es decir la segunda derivada *f'',* en lugar de trazar el bosquejo de la función inicial, Ilustración 40 Ilustración 39. En este error recayeron 3 de los 55 estudiantes que presentaron la prueba simulacro.

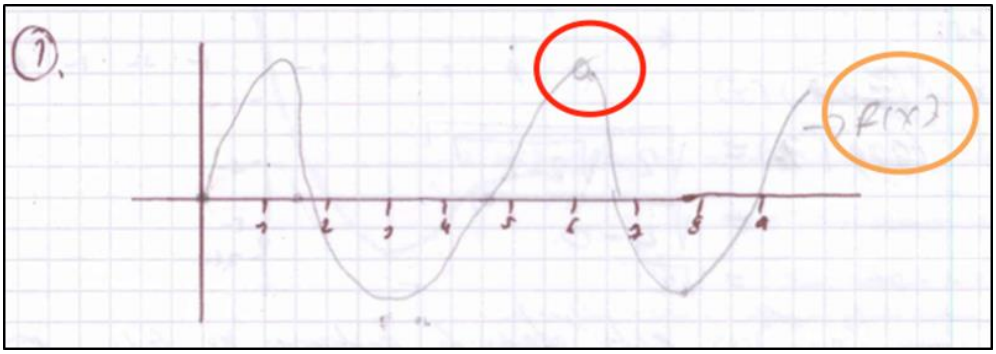
Ilustración 39. Primer punto prueba simulacro ASAE



Aunque su respuesta no era la solicitada, Camilo hizo una buena interpretación de algunos de los puntos críticos de *f'* para trazar aproximadamente la gráfica de la derivada, pero nuevamente se evidencia dificultad en la lectura e interpretación del enunciado porque el estudiante traza la gráfica y la denota como *f(x)* como se puede ver en la Ilustración 40 en el ovalo naranja. Además, en contorno rojo resaltamos que no tuvo en cuenta que la función *f* a trazar debía ser continua. No es de extrañar dado que en una sesión tutorial cuando trabajaron sobre continuidad la tutora registró que Camilo no verificaba que se cumplieran las tres propiedades para analizar que una función fuera continúa, él solo hallaba los límites de las funciones. Por último, se pedía que explicara, pero no se evidencio registro escrito por parte de Camilo.

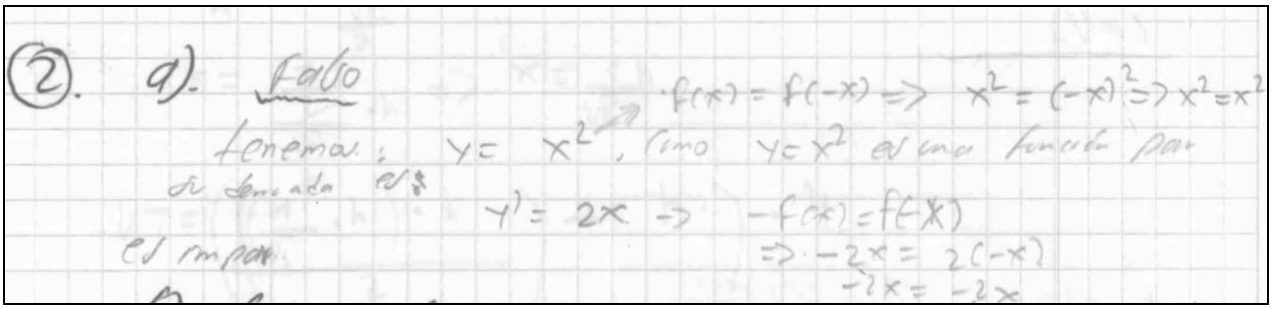
Por lo anteriormente expuesto y retomando la taxonomía de los procedimientos y sus habilidades, tenemos que la acción de Camilo para transformar un objeto matemático con el fin de obtener un nuevo objeto, en este saso a través de la interpretación de una representación gráfica, no es realizada eficazmente. Entonces consideramos que su nivel de desarrollo real no es suficiente para que Camilo resolviera la situación.

Ilustración 40. Respuesta de Camilo al punto 1 de la prueba simulacro



En el ítem 2*a*. el enunciado es falso (Ilustración 34), y para ello los estudiantes podían usar un contraejemplo. El 60% de los estudiantes que contestaron correctamente el ítem escogieron, al igual que Camilo, la función $f(x) = x^2$ como contraejemplo. En particular, Camilo usó la definición de *función par* para mostrar que era de este tipo, luego derivó $f(x)$ y mostro que era impar usando la definición correspondiente, como se observa en la Ilustración 41.

Ilustración 41. Respuesta de Camilo al punto 2.a. prueba simulacro.



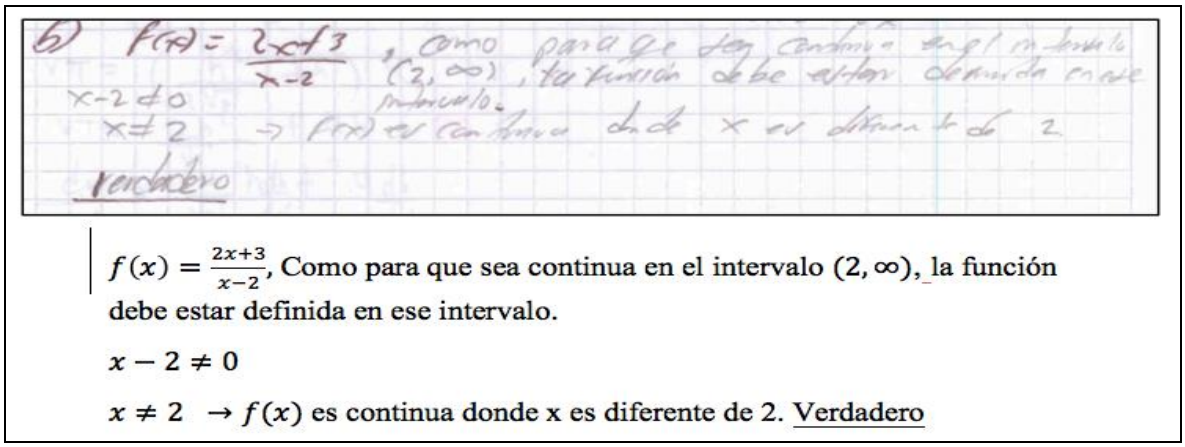
Respecto a su solución, Ilustración 41, podemos decir que su procedimiento analítico fue ejecutado con efectividad mostrando habilidad para relacionar expresiones algebraicas empleando sus propiedades (Barajas, 2015) y si miramos el proceso de razonamiento tenemos que encuentra contraejemplos usando propiedades y hechos conocidos para explicar otros hechos (MEN, 1998). Además, se evidencia un cambio notable en la organización de la respuesta y en el uso apropiado de los símbolos matemáticos para mostrar implicaciones. Recordemos que anteriormente usaba inapropiadamente el símbolo igual "=" para mencionar una implicación o

relación entre elementos diferentes, ahora usa el símbolo *entonces "→"* e indica verbalmente las partes de su procedimiento. Entonces reconocemos que, en su nuevo nivel de desarrollo real (NDR), los procedimientos dominados por Camilo son comunicados satisfactoriamente.

El enunciado del ítem 2.b. (de la Ilustración 34) es verdadero, luego los estudiantes debían usar argumentos válidos para demostrar la afirmación. En general, el 58% de los estudiantes que presentaron el examen contestaron correctamente, y sus estrategias de argumentación se dividieron en dos grupos, una gran parte de ellos exploraron la variación de *x para identificar el valor en el cual* la función era indefinida y la otra parte optó por hallar el dominio de la función. Ahora bien, para analizar mejor la respuesta de Camilo, Ilustración 42, hacemos una transcripción textual de lo plasmado en su hoja, que se adjunta en la ilustración.

Con lo consignado en la Ilustración 42 podemos identificar que Camilo se encuentra en el grupo de estudiantes que evaluó la función e identificó el valor de x en la que ésta no está definida. Entonces recurriendo a las habilidades comunicativas Camilo tuvo la capacidad de interpretar el concepto de continuidad para explicar porque la afirmación es verdadera por medio de razones relevantes (Rigo, Rojano y Pluvinage, 2011, MEN, 1998). A su vez el estudiante usó de mecanismos cognitivos de alternancia de momentos ya que identificó que en este punto primaba más el conocimiento conceptual (de continuidad) que el procedimental. Entonces, el nivel de lo procedimental se enfoca en al análisis de la función, en cuanto a sus propiedades (valores en los que está definida la función e intervalos de continuidad).

Ilustración 42. Respuesta y transcripción al punto 2.b. prueba simulacro por parte de Camilo



b) $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$, como para que sea continua en el intervalo $(2, \infty)$, la función debe estar definida en ese intervalo.

$x - 2 \neq 0$

$x \neq 2 \rightarrow f(x)$ es continua donde x es diferente de 2. Verdadero

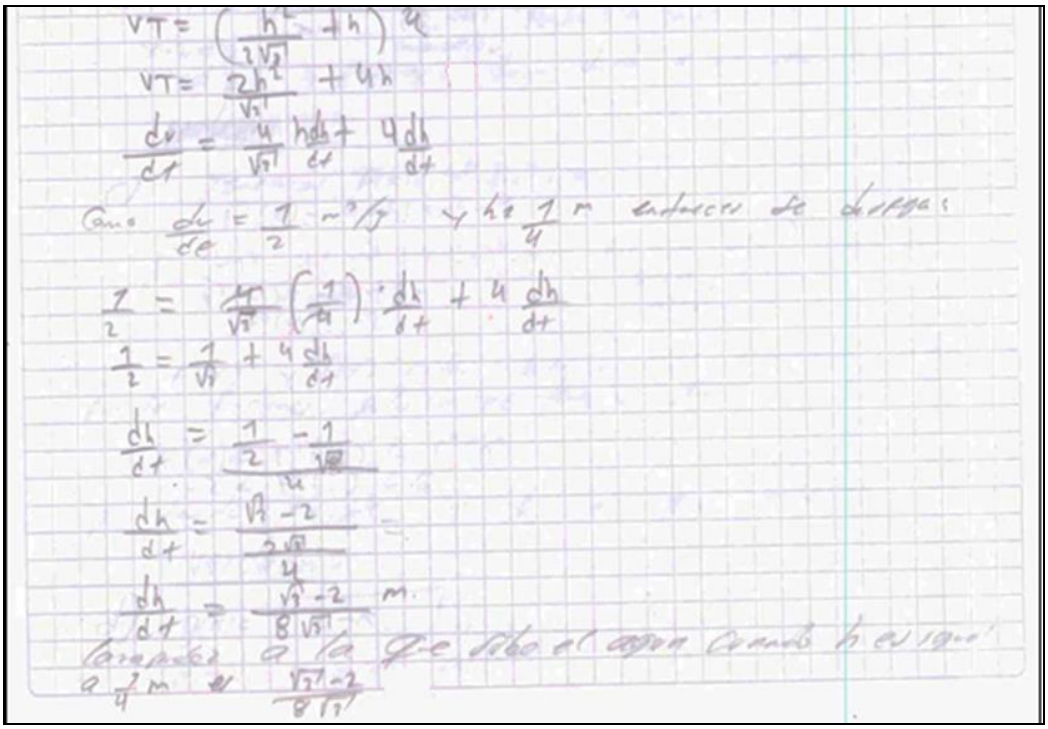
En el punto 4.a. de la Ilustración 32, como ya habíamos mencionado el objetivo era determinar la rapidez con que sube el nivel del agua en una determinada profundidad de un canalón con extremos verticales en forma de trapecios isósceles. Una vez expresada la función del volumen en términos de la profundidad del agua, el procedimiento consiste en derivar la función respecto al tiempo y reemplazar por la información dada para finalmente calcular.

En los procedimientos geométricos, Ilustración 33, Camilo no planteó correctamente la función del volumen, pero el proceso procedimental de derivación lo efectuó bien (como se muestra en la, Ilustración 43, en el cual él explica textualmente su razonamiento). En términos del MEN (2006), aquí Camilo estaría aplicando métodos para hallar las derivadas de algunas funciones y en términos de habilidades a priori transforma un objeto matemático para obtener un nuevo objeto (MEN,1998).

Cuando mencionamos que Camilo explicita sus razonamientos nos referimos a la parte en donde menciona cuales son los datos proporcionados por el enunciado y cómo va a proceder con ellos para hallar la razón de cambio solicitada. Posterior a ello, la trasformación de expresiones algebraicas es realizada con eficiencia, en donde a su vez muestra habilidades para realizar operaciones como resta y división con números reales. Ahora bien, desde los procedimientos

métricos podemos inferir que Camilo usó la derivada como un procedimiento para calcular la magnitud de velocidad instantánea.

Ilustración 43. Procedimiento de Camilo en el punto 4.a. prueba simulacro



La prueba simulacro nos permitió valorar la acción independiente de Camilo, después del acompañamiento de la tutora, identificando que procedimientos aritméticos con números racionales, procedimientos analíticos como la derivación de funciones y la determinación de variables en una situación, y procedimientos geométricos como la realización de representación pictóricas en la interpretación la variación, forman parte del nivel de desarrollo real de Camilo. Además, el examen fue la última ayuda proporcionada por el programa para que los estudiantes reconocieran si su NDR les permite resolver por sí solos los problemas a los que se deben enfrentar al finalizar un curso de cálculo I.

4.3. Habilidades procedimentales en Camilo después del proceso tutorial

Tras finalizar las clases del semestre académico el programa de tutorías también finaliza, y todos los estudiantes de la UIS tienen dos semanas de exámenes finales, durante esas semanas la Escuela de Matemáticas diseña el último examen de cálculo I (bajo el liderazgo del profesor coordinador del curso) y programa la fecha de su aplicación. A continuación, analizaremos los procesos expresados por Camilo en el desarrollo de este último examen para en términos de la teoría de la ZDP determinar el nuevo nivel de desarrollo alcanzado luego de su paso por todo el programa de atención y seguimiento.

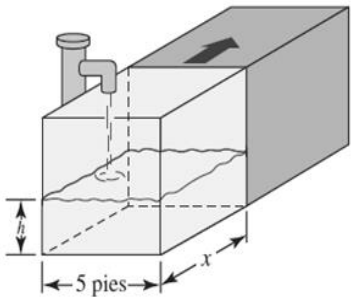
Nuevamente analizamos cada uno de los puntos del examen final, organizándolos de acuerdo al tipo de procedimiento presentes en la solución, además, tendremos en mayor medida procedimientos analíticos y aritméticos, seguidos de procedimientos geométricos y métricos con los cuales comenzaremos.

4.3.1. Procedimientos geométricos y métricos de Camilo en el examen final de escuela

El primer punto del examen, Tabla 12, evalúa la comprensión de la derivada como razón de cambio que implica inicialmente la interpretación de los elementos del enunciado para luego modelar la situación de cambio a través de una expresión algebraica, esta acción requiere de determinar las magnitudes, es decir, las variables y las constantes. A su vez es necesario hacer conversión de unidades porque algunas están dadas en pulgadas y otras en pies. Por lo tanto, el estudiante debe elaborar y realizar procedimientos de los cuatro tipos planteados en la taxonomía del marco conceptual.

Tabla 12.
Enunciado problema 1 examen final de escuela

Como se muestra en la figura, un tanque rectangular de agua de 5 pies de ancho está dividido en dos tanques por medio de una separación que se mueve en la dirección indicada a razón de $1\ pulg/min$ cuando al tanque frontal se bombea agua a razón de $1\ pie^3/min$.



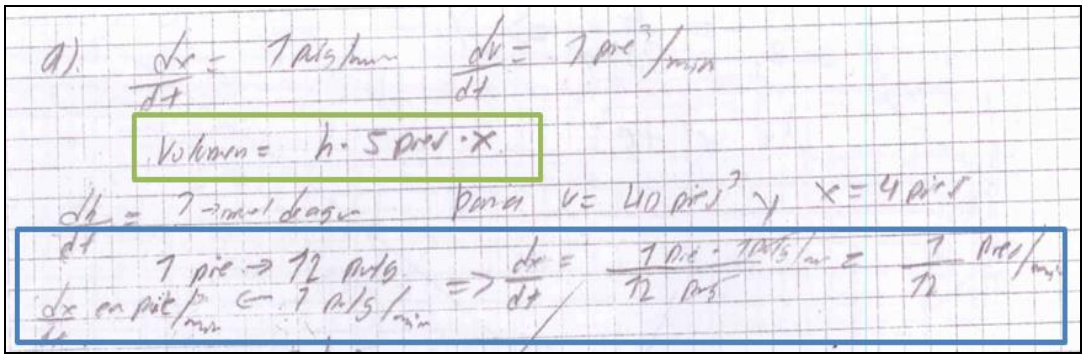
(a) ¿A qué razón cambia el nivel del agua cuando el volumen de agua en el tanque frontal es de $40\ pies^3$ y $x = 4$ pies?

(b) En ese instante, el nivel del agua ¿sube o baja?

Ahora bien, en la respuesta de Camilo a la pregunta (a) (ver Ilustración 44) podemos observar que identifica y representa a cada una de las razones de cambio con la notación apropiadamente, y a su vez determina las magnitudes variables y la constante para expresar el volumen del tanque en función de ellas: $Volumen = h \cdot 5pies \cdot x$ (recuadro verde, Ilustración 44). Entonces desde la taxonomía de los procedimientos Camilo está usando la propiedad física del volumen de una figura de tres dimensiones para expresar simbólicamente la variación del volumen del agua.

La fórmula del volumen para esta figura es más básica que la propuesta para la figura del enunciado 4.a. de la Ilustración 32, luego preveíamos que el estudiante no tuviera inconvenientes en la interpretación de la situación para deducir la fórmula del volumen.

Ilustración 44. Procedimientos geométricos y métricos de Camilo en el ítem 1.a examen de escuela.

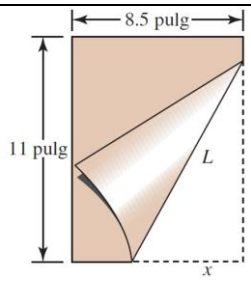


Posteriormente, Camilo convierte unidades y establece una proporcionalidad directa entre pulgadas y pies, para unificar las unidades de medida expuestas en el problema, entonces él determina que la variable "x" cambia respecto al tiempo a razón de $1/12\ pies/min$ (recuadro azul, Ilustración 44) que es equivalente a $1\ pulg/min$. Este procedimiento métrico de conversión de unidades no se evidenció en el proceso tutorial luego es una habilidad que el estudiante desarrolló fuera del contexto del programa de acompañamiento y seguimiento, quizás fue mediada por el mismo profesor de Cálculo I, ya que este último es también un mediador en el proceso de aprendizaje del estudiante (Corredor, Arbeláez y Pérez, 2009).

El segundo ítem del examen (Tabla 13) también requería de habilidades asociadas a los procedimientos geométricos, ya que para poder establecer la interdependencia de las variables *x* y *L* era necesario, a partir del dibujo de la situación, encontrar una expresión que las relacionara. Posteriormente establecida la función se procedería a ralizar procedimientos analíticos para encontrar el valor de *x* que hace que la longitud *L* sea mínima.

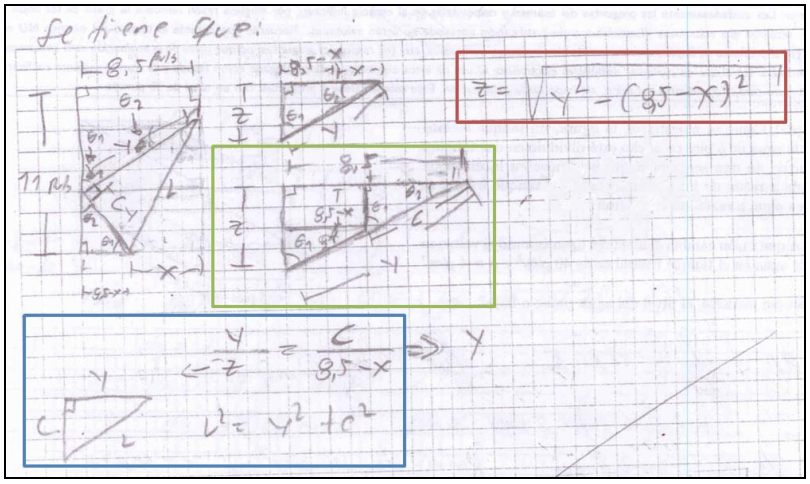
Tabla 13.
Enunciado problema 2 examen final de escuela

Una esquina de una hoja de papel de 8.5 pulg × 11 pulg se dobla sobre el otro borde del papel como se muestra en la figura. Encuentre el ancho *x* del doblez de modo que la longitud *L* del pliegue sea mínima.



Camilo comienza su solución (Ilustración 45) dibujando nuevamente la hora de papel para agregar información extra que no estaba explicita en el dibujo inicial como por ejemplo que el doblez del papel corresponde a un triángulo rectángulo (marca de ángulo recto) y denota los lados del triángulo como *L, Y* y *C*. Además, hace construcciones auxiliares para mostrar que la figura queda subdividida en triángulos rectángulos, donde por la notación de los ángulos inferimos que Camilo estableció que esta pareja de triángulos era semejante (recado verde, Ilustración 45).

Ilustración 45. Procedimientos geométricos de Camilo en el ítem 2 del examen de escuela.



Acerca de las representaciones de situaciones, el NCTM (2003) reconoce que son procedimientos de comunicación e importantes herramientas de pensamiento, y plantean que en

todos los niveles de educación se capacite a los estudiantes en su creación y utilización con el fin de registrar y comunicar ideas matemáticas (como en el caso de Camilo) y, de igual modo, interpretar los fenómenos.

Aquí, Camilo decide representar los triangulo semejantes uno sobre el otro quizás para establecer con mayor facilidad la proporcionalidad que se observa en el recuadro azul, de la Ilustración 45. Sin embargo, se evidencian dos cosas que limitaron que el estudiante expresara apropiadamente la función L en términos de x:

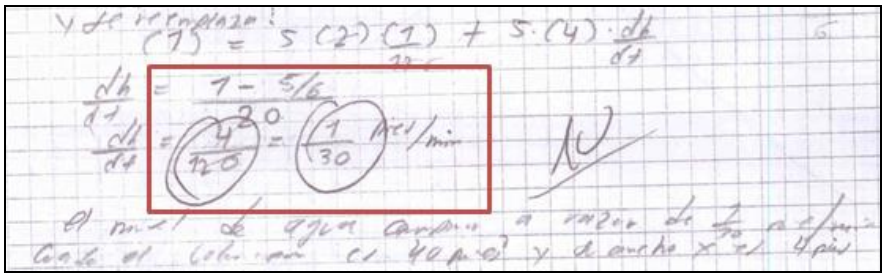
i) establece una variable Z y usa el teorema de Pitágoras para calcularla en términos de x, pero la expresión no es correcta (recuadro rojo, Ilustración 45) ya que el otro cateto no tiene esa dimensión de $8{,}5 - x$ (sino que es 8,5 pulg.), este error lo comete a pesar de tenerlo bien en la representación gráfica.

ii) establece una variable llamada *C* para denominar nuevamente la variable *x* sin percatarse que se está refiriendo a la misma magnitud. Por lo tanto, a pesar de tener una expresión que relaciona a *L* con *C* (teorema de Pitágoras, recuadro azul, Ilustración 45) no la establece en términos de x, esto en términos de Piaget (citado en Richmond, 2000) podría denotarse como irreversibilidad (una limitación en las tareas de conservación).

4.3.2. Procedimientos aritméticos de Camilo en el examen final de escuela

Retomando el ítem 1.a. de la Tabla 12, encontramos que Camilo en la acción de determinar la razón con que cambia el nivel del agua recae en el error de operar la unidad con la fracción (ver recuadro rojo, Ilustración 46), pues tomó al 6 como denominador de 1 y 5 arbitrariamente por lo cual obtuvo 4/120, donde en realidad era 1/120 para el valor de la razón de cambio del nivel del agua.

Ilustración 46. Procedimientos aritméticos de Camilo en el ítem 1.a del examen de escuela.

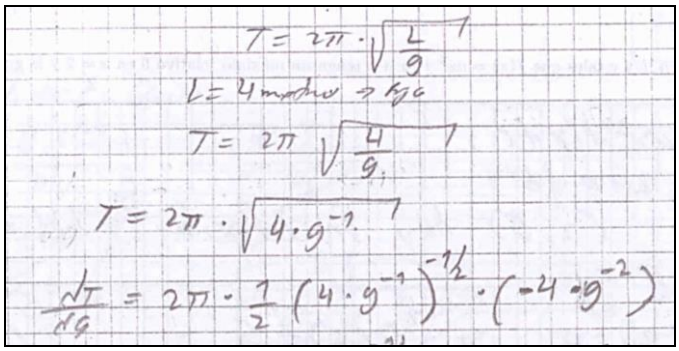


Este error no había sido considerado en las anteriores etapas del programa de acompañamiento ya que Camilo siempre se caracterizó por su habilidad para operar con números decimales y fraccionarios, así que atribuimos el procedimiento erróneo a la presión bajo la cual estaba él en ese momento y que desde las habilidades de control significa que el estudiante no Verificar los pasos de un procedimiento (Barajas, 2015). Sin embargo, como veremos más adelante (Ilustración 48) con el ítem 4, nuevamente los nervios o la falta de concentración hicieron que Camilo no realizara operaciones correctamente hasta el final. El ítem 4 se enuncia a continuación:

> *El periodo (en segundos) de un péndulo simple de longitud L es* $T = 2\pi\sqrt{L/g}$*, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Dado que L es fijo a 4 metros, encuentre una aproximación al cambio en el periodo si el péndulo se mueve a una altitud donde* $g = 9{,}75\ m/s^2$.

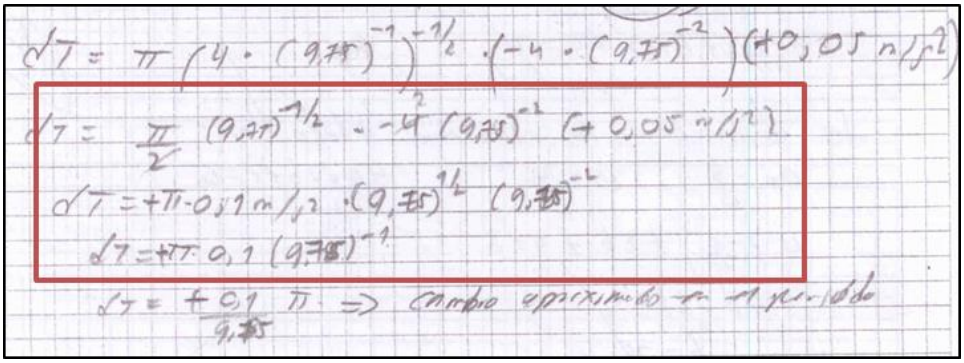
Camilo en su solución (Ilustración 47) inicialmente decide utilizar una notación diferente para la gravedad g con ayuda de las propiedades de la potenciación, pero no continuó generando expresiones equivalentes de $\sqrt{g^{-1}}$ usando propiedades de la potenciación, que a nuestro juicio le simplificaría la realización de procedimientos analíticos como la derivación y de igual modo la realización de nuevos cálculos como veremos a continuación.

Ilustración 47. Procedimientos aritméticos de Camilo en el ítem 4.a del examen de escuela



Desde la taxonomía de los procedimientos los aritméticos se relacionan con el cálculo a lápiz y papel (Rico, 1995) de operaciones básicas, así que como habilidad exige el dominio de los algoritmos y los conjuntos numéricos. Sin embargo, en la Ilustración 48 podemos observar nuevamente lo que ya habíamos mencionado acerca de sus errores al operar con números negativos (después de reemplazar la variable gravedad (*g*) por una magnitud fija). Además, había sido evidenciado por la tutora en la entrevista (episodio 2), donde ella comenta que las dificultades estaban en tener en cuenta los signos. Por lo tanto, consideramos que las operaciones con números negativo forma aun parte de nivel de desarrollo potencial. No obstante, evidenciamos en Camilo la habilidad para realizar operaciones con números decimales positivos que hemos identificado desde el comienzo de su paso por el programa de acompañamiento.

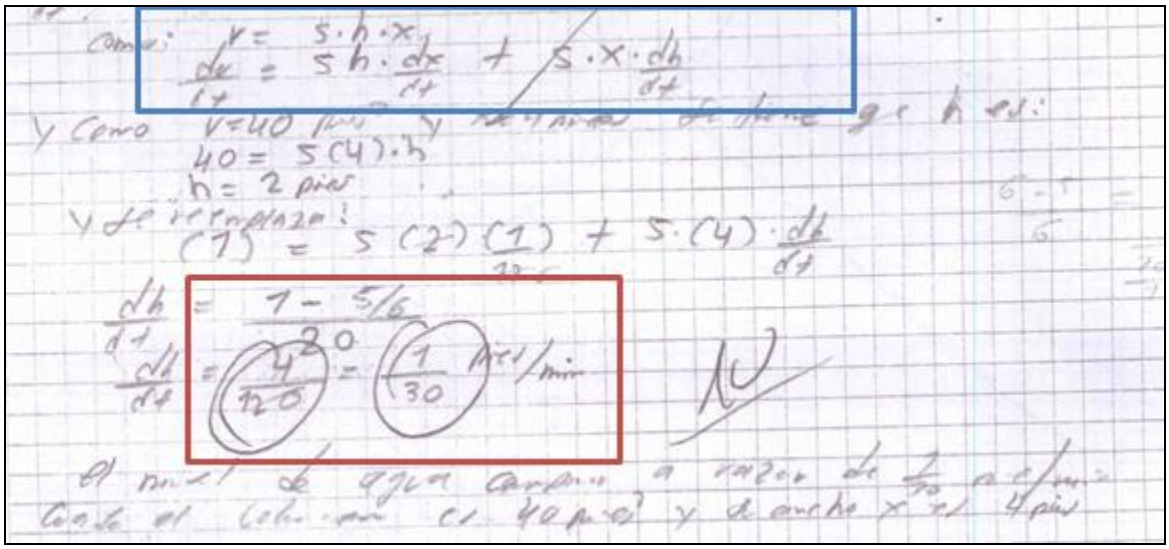
Ilustración 48. Procedimientos aritméticos de Camilo en el ítem 4. del examen de escuela



4.3.3. Procedimientos analíticos de Camilo en el examen final de escuela

Retomando el ítem 1, Tabla 12, encontramos que Camilo retoma la expresión que representa el volumen del tanque y deriva respecto al tiempo como se observa en el recuadro azul, Ilustración 49. Lo interesante en esta parte es que Camilo enuncia los valores de las variables en un determinado instante y a partir de ellas deduce el valor de la altura *h*, es decir, que elabora un procedimiento para hallar el valor de una de las variables necesarias para continuar con el siguiente paso. Una vez identificados todos los valores procedió a sustituir y además comunicó su siguiente acción y procedió a solucionar la ecuación en donde la incógnita es la razón de cambio del nivel del agua. Sin embargo, como se vio en las habilidades aritméticas Camilo erró y la respuesta no fue correcta.

Ilustración 49. Procedimientos aritméticos de Camilo en el ítem 1.a, del examen de escuela

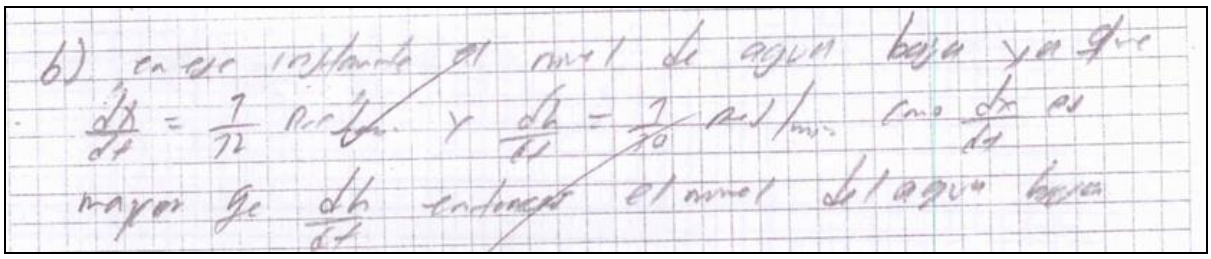


La mayoría de los procedimientos fueron ejecutados apropiadamente mostrando un avance en el procedimiento analítico para la modelación de esa situación, recordando que al iniciar su proceso presentaba dificultad en generar expresiones algebraicas a partir del

enunciado; es decir, que desde la teoría de Vygotsky lo que el estudiante realizó con ayuda del tutor más adelante lo pudo hacer por sí solo.

Referente a la pregunta (b), Tabla 12, debe interpretar la información obtenida en el punto anterior, en donde recordemos que la razón de cambio calculada por el estudiante fue 1/30 pies/min y el estudiante hace una comparación de las razones de cambio de la profundidad y el nivel del agua y argumenta que *como dx/dt es mayor que dh/dt entonces el nivel del agua baja* (Ilustración 50), lo cual es incorrecto porque independientemente de esta relación de mayor o menor lo que debe importar es que la razón de cambio del nivel de agua es positiva luego los valores van aumentando a una razón más pequeña que la de la otra variable pero ambas con pendiente positiva. Entonces en este punto no interpretó correctamente el signo de la razón de cambio para asociarlo con el valor de la pendiente de la tangente a la función (MEN, 2006). En las dificultades que tuvo notamos que los obstáculos que las provocaron son conocimiento previamente adquirido y no falta de conocimientos (Brousseau, 1989).

Ilustración 50. Respuesta de Camilo al ítem 1.b. del examen de escuela



Cabe resaltar que la respuesta dada por Camilo (Ilustración 50) fue calificada como correcta por el profesor que revisó el examen, según lo visto en el instrumento y la calificación. Entonces notamos que no solo los estudiantes pueden recaer en errores en la interpretación de la derivada como razón de cambio de algunas situaciones sino también los profesores que enseñan Cálculo Diferencial, además, si no hay una realimentación adecuada después del examen los

estudiantes continuarán asumiendo que su conocimiento es válido a pesar de estar equivocado y el profesor no será consciente de su error, que quizás cometió en ese momento por la acumulación de trabajo.

Por ultimo en esta parte, presentamos el ítem 3 del examen de escuela que enuncia lo siguiente:

Encuentre los valores de a, b, c, *tales que* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *tenga un máximo relativo 6 en* $x = 2$ *y la gráfica de* f *tenga intersección* y *igual a 4.*

Donde conceptualmente evalúa la aplicación de la primera derivada en la determinación de las contantes de funciones polinómicas, entonces para dar solución a ella es necesario la realización de procedimientos analíticos después de una interpretación correcta y adecuada de la información del enunciado.

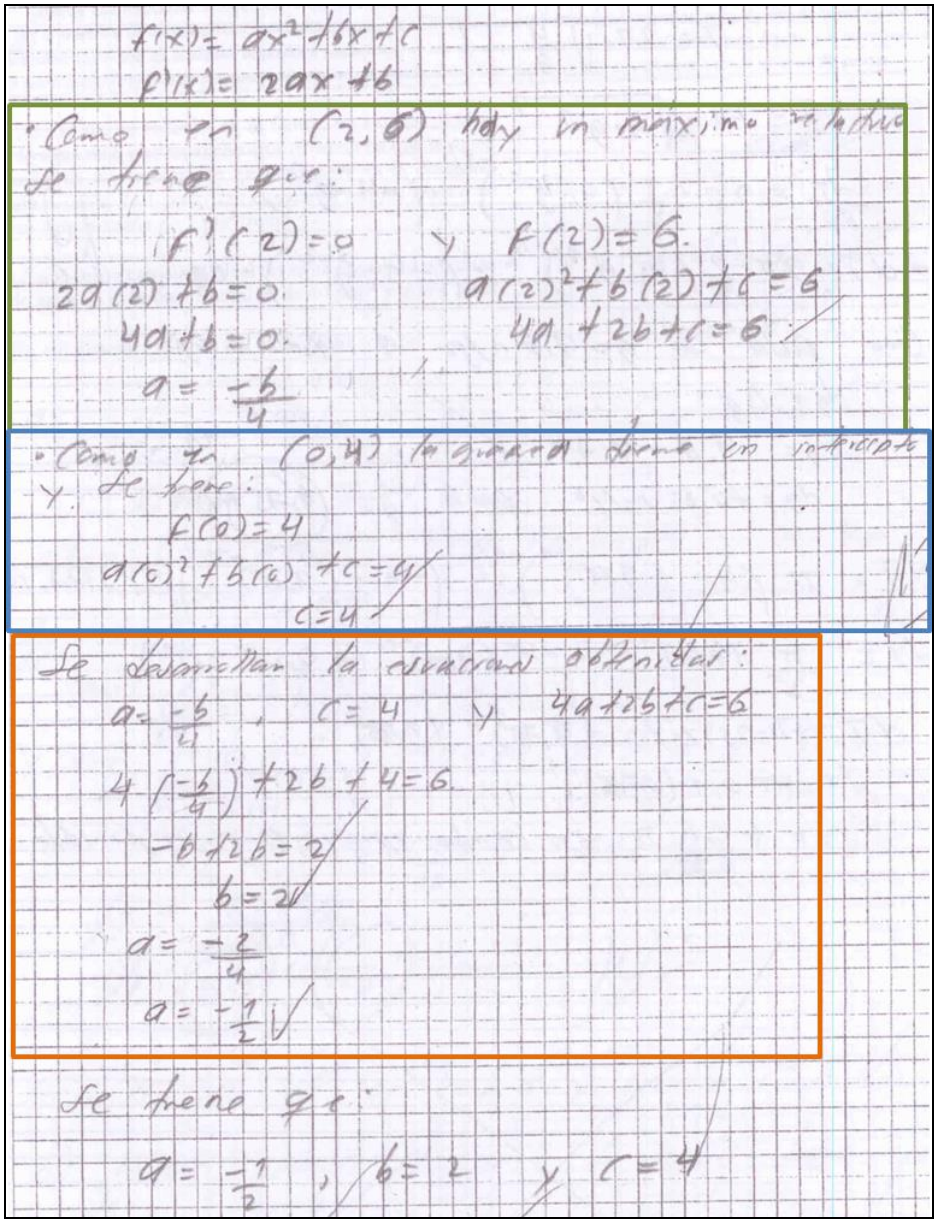
De acuerdo a la solución de Camilo (Ilustración 51Posterior a los primeros procedimientos Camilo analiza las propiedades graficas de la función para traducirlas en la expresión algebraica, recuadro azul Ilustración 51, y obtener el valor de la constante *c*. Finalmente realiza un procedimiento algebraico (recuadro naranja, Ilustración 51) transformando la expresión (de la derecha en el recuadro verde) para obtener los valores de las constantes restantes. Aquí notamos un dominio para realizar operaciones básicas y un dominio para exponer la solución y concluir con la respuesta.

Ilustración 51) ratificamos que domina los procesos de derivación y a su vez relaciona las expresiones algebraicas empleando sus propiedades, como se ve en la interpretación del máximo relativo, recuadro verde Ilustración 51, ya que reconoce que a la derivada como el valor de la pendiente de una tangente que en este caso es cero y a su vez relacionó el registro verbal con la

representación algebraica de la función, así logra dar estructura al problema y poder hallar los valores de las contantes.

Posterior a los primeros procedimientos Camilo analiza las propiedades graficas de la función para traducirlas en la expresión algebraica, recuadro azul Ilustración 51, y obtener el valor de la constante *c*. Finalmente realiza un procedimiento algebraico (recuadro naranja, Ilustración 51) transformando la expresión (de la derecha en el recuadro verde) para obtener los valores de las constantes restantes. Aquí notamos un dominio para realizar operaciones básicas y un dominio para exponer la solución y concluir con la respuesta.

Ilustración 51. Solución de Camilo al ítem 3 del Examen de escuela



De la información analizada sobre Camilo en los últimos dos instrumentos, es decir, después del proceso tutorial, identificamos las habilidades presentadas en la Tabla 14.

Tabla 14.
Habilidades y dificultades identificadas en Camilo después del proceso tutorial

	Procedimientos aritméticos	**Procedimientos geométricos**	**Procedimientos analíticos**
Habilidades	• Realiza cálculos con números decimales a lápiz y papel. • Usa la notación de los números más adecuada. • Usa apropiadamente símbolos y notaciones en la solución de problemas.	• Realiza representaciones en el plano de figuras de 2D o 3D • Emplea procedimientos de tipo grafico para expresar la imagen visual de un concepto como el de límite.	• Determina las variables de una situación. • Transforma objetos matemáticos para obtener un nuevo objeto como la composición de funciones y la derivación. • Relaciona expresiones algebraicas y gráficas empleando sus propiedades • Transforma expresiones algebraicas.
Dificultades	• Realiza cálculos con números negativos en operaciones como multiplicación. • Opera números fraccionarios.	• Recuerda la fórmula de área del trapecio y propiedades de figuras geométricas como el teorema de Pitágoras para modelar las situaciones de cambio.	• Establece la interdependencia de las magnitudes variables • Interpretación del signo en la derivada como razón de cambio.

A continuación, presentamos conclusiones generales sobre el caso de Camilo, a partir de los resultados reportados en las tres etapas de participación de Camilo como beneficiario de un programa de acompañamiento y seguimiento en Cálculo Diferencial y estudiante de dicha asignatura.

4.4. Reflexiones generales sobre las habilidades procedimentales de Camilo durante el programa de acompañamiento

Las pruebas iniciales permitieron identificar que Camilo tenía habilidades para realizar operaciones básicas con los números decimales; habilidades que fueron reforzadas con los talleres y el trabajo continuo de la tutora, a su vez, ella intervino con alertas y demostraciones escritas para orientar la realización de operación con números negativos dado que Camilo poseía dificultades en esa parte, pero que fueron superadas posteriormente, como se evidenció en la prueba simulacro. Sin embargo, en el examen final de escuela él recayó al no tener en cuenta el signo negativo, que atribuimos a la presión que ejerce este último examen en los estudiantes.

Sobre los procedimientos geométricos, la prueba diagnóstica elaborada por la tutora permitió identificar parte del nivel de desarrollo real de Camilo y posterior a ella reforzar conceptos como los de perpendicularidad y paralelismo, contribuyendo al buen uso de atributos y propiedades de figuras geométricas. En las sesiones finales se posibilitó examinar diferentes representaciones de figuras planas y sólidos según los enunciados, en donde la tutora tuvo que elaborar andamiajes para ayudar a Camilo en el cálculo de volúmenes y áreas, ya que no recordaba algunas fórmulas. Este trabajo sirvió para que Camilo realizara representaciones adecuadas de figuras de dos o tres dimensiones expresadas verbalmente.

Acerca de los procedimientos analíticos los talleres y las tareas extras asignadas y mediadas por la tutora contribuyeron significativamente a que Camilo transformara expresiones algebraicas y objetos como las funciones con el fin de obtener la función inversa, el límite de una función o la derivada, esto principalmente desde lo algorítmico. Y a su vez mejoró en el manejo de la notación y símbolos matemáticos.

Además, cabe resaltar que el uso de GeoGebra en la exploración de los límites de algunas funciones, ofreció a Camilo la oportunidad de relacionar distintas formas de representación de una función, como son la algebraica y la gráfica, teniendo en cuenta que la representación tabular ya había sido trabajada al inicio de las sesiones cuando la tutora creó andamiajes para que Camilo lograra hallar el dominio y el recorrido de funciones.

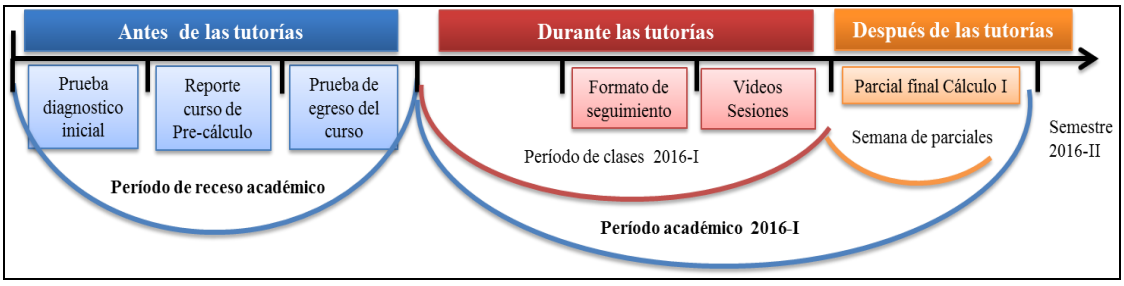
Las situaciones planteadas para el estudio de las aplicaciones de la deriva y las recomendaciones de la tutora para una lectura pausada de los enunciados ayudaron a Camilo en la modelación de situaciones de cambio, ya que como se evidenció en su trabajo individual él logró reconocer las variables y relacionar algunas de ellas. Sin embargo, se le dificultó establecer de ella la expresión algebraica principal, quizás por su misma dificultad para recordar o deducir las fórmulas de volúmenes o áreas.

5. Procedimientos desarrollados por Alejandro

En el capítulo 3 mencionamos que Alejandro era otro de nuestros casos de estudio – estudiante beneficiario del programa de acompañamiento (contexto de nuestro estudio) – y que, al igual que Camilo, cuenta con información de cada una de las actividades del programa: curso de pre-cálculo y tutorías. Además, para el caso de Alejandro se cuenta con video-grabaciones de algunas de las sesiones tutoriales.

En la Ilustración 52 se presenta el orden cronológico de la participación de Alejandro en el programa de acompañamiento y de cada uno de los instrumentos para la recolección datos para el análisis e identificación de sus habilidades procedimentales. Es decir, que la prueba de competencias básicas de matemáticas, el reporte del curso de pre-cálculo y la prueba de egreso del curso de pre-cálculo serán considerados como el *antes del proceso tutorial* donde observamos al proceso procedimental como un producto; mientras que el formato de seguimiento por sesión y algunas video-grabaciones estarán dentro del *proceso tutorial* para analizar el proceso procedimental en acción. Finalizamos con el *después del proceso tutorial* donde consideraremos el examen final de Cálculo Diferencial para concluir con apreciación del Nivel de Desarrollo Real de Alejandro.

Ilustración 52. Línea del tiempo caso de estudio: Alejandro.



Alejandro es un joven de 17 años de edad, que entró a la UIS al programa de ingeniería mecánica en el primer periodo académico de 2016. Él es egresado de una institución educativa privada de Bucaramanga en el año 2015. Cursó y aprobó en su primer semestre la asignatura de Cálculo I con una nota final de 3,7. Actualmente se encuentra cursando la asignatura de Cálculo II.

5.1. Habilidades procedimentales en Alejandro antes de iniciar su proceso tutorial

La prueba de competencias básicas en matemáticas que se aplicó para el primer periodo de 2016 constó con 11 puntos que se contestaron en la plataforma virtual de la Universidad y una situación que se desarrolló en una hoja de procesos. La situación fue presentada en la ilustración 21. En términos cuantitativos la calificación promedio de Alejandro en esta prueba fue de 2.8, en donde obtuvo la calificación máxima en 4 de los 12 puntos, luego a primera vista tuvo un desempeño deficiente. Después de su paso por el curso de pre-cálculo presentó la prueba de egreso del curso, en esta ocasión su puntuación promedio fue de 3,8.

A continuación, describiremos las habilidades de dos de los cuatro tipos de la taxonomía de los procedimientos: aritméticos y analíticos (descritos en el apartado 2.3.5) indicando el respectivo instrumento que analizamos.

5.1.1. Habilidades en los Procedimientos Aritméticos

Para identificar las habilidades de tipo aritmético analizamos la situación del valor de la propiedad (ilustración 21) que ya fue presentada en el apartado 4.1.1. Sin embargo, para este periodo académico se pidió a los estudiantes contestar tres preguntas (Ilustración 53), con el fin

de obtener un mejor acercamiento a los razonamientos de los estudiantes. Desde nuestro punto de vista puede hacer la justificación de los procedimientos más explícita.

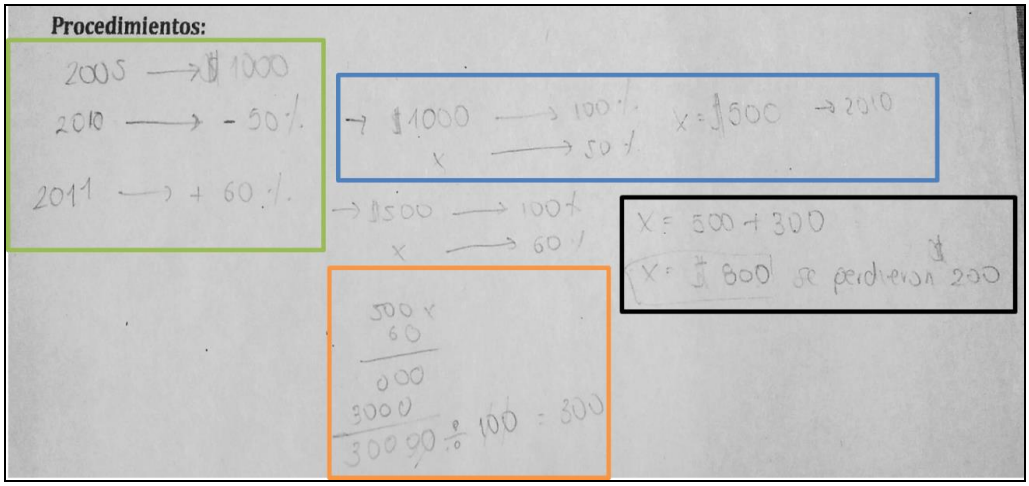
Ilustración 53. Preguntas complementarias

Responde a las siguientes preguntas al respaldo de la hoja:

1. Expresa con tus palabras tu interpretación de la situación.
2. Explica con tus palabras tus razonamientos.
3. Justifica tu respuesta.

Además, las preguntas extra para la situación permitieron observar las habilidades comunicativas de Alejandro para interpretar el enunciado, explicar su respuesta y justificar sus procedimientos. Comenzamos presentando su interpretación del problema: e*n la situación podemos observar que la propiedad que tenía un precio inicial tuvo una baja y luego un realce en su valor.* (Respuesta textual de Alejandro a la pregunta 1 de la Ilustración 53). Seguimos con sus procedimientos matemáticos en la Ilustración 54.

Ilustración 54. Procedimientos aritméticos de Alejandro, situación 1



La explicación del problema con sus propias palabras permite ver que Alejandro reconoció los términos de la situación y que es capaz de asociarlos con otros términos. Ahora bien los procedimientos de Alejandro (ver Ilustración 54) comienzan con la representación del

año y la información sobre el valor de la propiedad asociada a ese año (recuadro verde, Ilustración 54), es decir, que comunicó de forma diferente la interpretación de la situación haciendo un buen manejo de la notación matemática o en términos de Pólya (1989) identificó cada uno de los elementos que comprenden el enunciado de la situación, luego en término de las habilidades procedimentales está determinado las variables de la situación.

Con lo inicialmente planteado, Alejandro calculó el valor correspondiente para el año 2010; planteando lo que él denominó una regla de tres (cuarta proporcional), del cual deduce que el valor es $500. En esta parte del recuadro azul (Ilustración 54) las operaciones aritméticas no son explicitas quizás por la sencillez de calcular el 50% de $1000, pero a su vez muestra que tiene diferentes formas de interpretar lo anterior y por eso puede deducir sin operaciones aritméticas la solución. Sin embargo, cuando Alejandro plantea la segunda proporcionalidad hace explícitos las operaciones entre números naturales (ver recuadro naranja, Ilustración 54). Además, él utilizó el resultado anterior (cuarta proporcional) para calcular el valor de la propiedad para el año 2011. Con lo anterior podemos inferir que Alejandro, desde los procedimientos aritméticos, domina operaciones básicas con naturales y tiene en cuenta la linealidad de los acontecimientos, como menciona Liern (2012) para poder dar la respuesta correcta.

Desde la parte interpretativa observamos que Alejandro entiende lo que significa el 60% de un número y principalmente como proceder cuando se le indica que ese valor aumentó en un cierto porcentaje. Finalmente, el estudiante deduce que se perdieron $200 a pesar de no realizar una operación explicita en la hoja de proceso (recuadro negro, Ilustración 54). No obstante, con la respuesta a la pregunta 2 complementa la respuesta dada en los procedimientos aritméticos,

afirmando lo siguiente: *El porcentaje que tuvo a lo último no alcanzo a ser superior a la inicial, por lo tanto, hubo una pérdida de 200 dólares sobre el valor inicial.*

Por otro lado, a la pregunta 3 responde lo siguiente: *lo que hice para dar con la respuesta fueron reglas de tres y al final sumé y resté al valor agregado para saber a qué equivalía al porcentaje que me daban allí*. Entonces Alejandro se limitó a explicar su procedimiento más que a justificarlo (intención de la pregunta), ya que como lo plantea Duval (1993) la explicación tiene una intención descriptiva de un fenómeno, resultado o comportamiento. Por lo tanto, podemos decir que Alejandro no comprendió la pregunta, esto puede deberse a que, en la educación media, no se promueve en los estudiantes escribir por qué sus procedimientos y respuestas son correctos como lo mencionan Fiallo y Gutiérrez (2007) al revisar los tipos de demostración de los estudiantes de grado decimo en la región.

5.1.2 Habilidades en los Procedimientos Analíticos

Las habilidades de este tipo de procedimientos se analizan desde el formato de evaluación DIPEVA del curso de pre-cálculo y la hoja de procesos de la prueba de egreso de este curso, que involucró una sola situación con varias preguntas. Sin embargo, dada la conexión y similitud entre algunas de las preguntas solo reportaremos las más representativas.

a) Habilidades identificadas durante el curso de pre-cálculo

En la sección 4.1.2.b explicamos la estructura del formato DIPEVA y la justificación del porque considerar únicamente la valoración hecha por el profesor del curso de pre-cálculo. Sin embargo, si aclaramos que a diferencia del periodo 2015-II, en esta ocasión la valoración más alta fue 5 mientras que la baja fue cero. A continuación, presentamos la Tabla 15 que relaciona los descriptores de las habilidades procedimentales con los descriptores asociados a los cuatro

estándares para los grados 10 y 11 en el Pensamiento Variacional (MEN 2006) con la calificación otorgada por la profesora del curso.

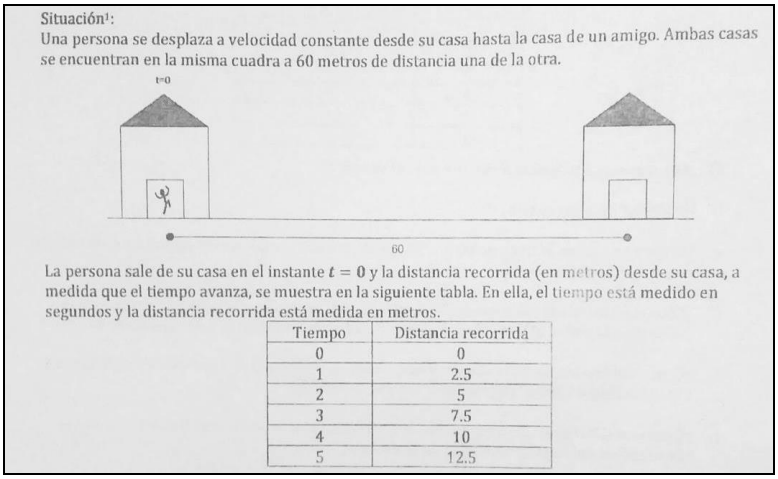
Tabla 15.
Habilidades procedimentales y estándares: Asociación de descriptores

Descriptores de habilidades Procedimientos analíticos	**Descriptores estándares de competencias matemáticas Pensamiento Variacional**	**Apreciación del profesor**
Traduce de una a otra de las distintas representaciones de una función.	Relaciona correctamente los diferentes registros de representación de una función en una situación problema.	4
Representa situaciones de cambio a través de las funciones, las gráficas y las tablas.	Modela con propiedad una situación de cambio a través de una función.	4
Determina las variables de una situación. Establece correctamente la interdependencia de las magnitudes variables.	Reconoce e interpreta situaciones que implican variación.	4
Transforma un objeto matemático para obtener un nuevo objeto.	Desarrolla o aplica métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.	4
	Interpreta la derivada como razón de cambio de cantidades variables y funciones en contextos matemáticos o no matemáticos.	3
Transforma expresiones algebraicas desde una forma hasta otra.	Domina correctamente las razones y las identidades trigonométricas en contextos matemáticos o no matemáticos.	4
Determina procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.	Reconoce características de los procesos infinitos utilizando diversas representaciones: gráficas, tablas o explicaciones verbales.	4
	Utiliza aproximaciones numéricas o gráficas para deducir intuitivamente el límite de una función.	4

Con lo reportado en la Tabla 15 notamos que Alejandro no reportó mayores dificultades en su paso por el curso de pre-cálculo, aunque tampoco significó que dominara completamente las acciones para resolver situaciones de variación. Lo que si nos llamó la atención fue su baja nota en *la interpretación de la derivada como razón de cambio de cantidades variables y funciones en contextos matemáticos o no matemáticos.* Además, la profesora del curso reportó que Alejandro tuvo dificultad para interpretar la derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente a la curva. Todo lo anterior nos hizo suponer que dominaba algoritmos y recordaba fórmulas, pero se le dificultaba hacer una interpretación de los resultados obtenidos dentro del contexto del problema. Ahora bien, examinemos sus respuestas a la situación de la prueba de egreso del curso.

La situación de la hoja de procesos para la prueba de egreso, que se presenta en la Ilustración 55, plantea un fenómeno de variación, donde las magnitudes son el tiempo, la distancia y la velocidad. Posterior a ella, se plantean varios ítems, pero nosotras tendremos en cuenta solo los más representativos.

Ilustración 55. Situación de la prueba de egreso del curso de pre-cálculo



Situación[1]:

Una persona se desplaza a velocidad constante desde su casa hasta la casa de un amigo. Ambas casas se encuentran en la misma cuadra a 60 metros de distancia una de la otra.

t=0

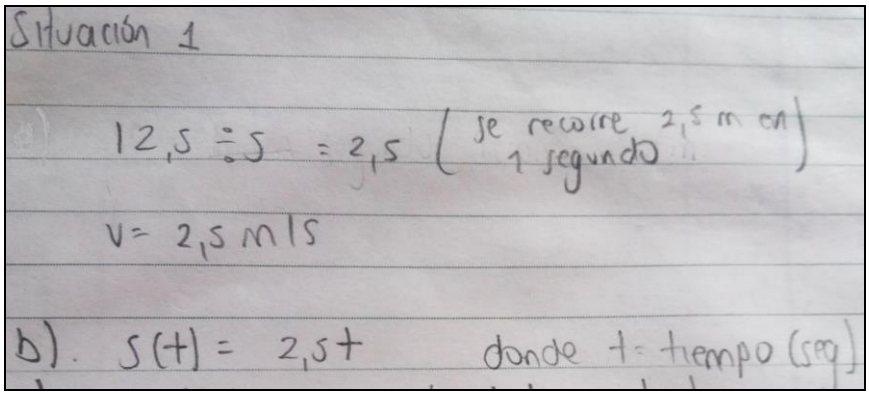
60

La persona sale de su casa en el instante $t = 0$ y la distancia recorrida (en metros) desde su casa, a medida que el tiempo avanza, se muestra en la siguiente tabla. En ella, el tiempo está medido en segundos y la distancia recorrida está medida en metros.

Tiempo	Distancia recorrida
0	0
1	2.5
2	5
3	7.5
4	10
5	12.5

Uno de los primeros ítems plantea lo siguiente: *b) Si **s** es la distancia recorrida por la persona, expresa **s** en términos de **t**.* Entonces la misma situación y este ítem ayudan al estudiante a identificar las variables de la situación, además, pide al estudiante explícitamente que establezca la interdependencia de las variables. En el procedimiento de Alejandro (Ilustración 56) se observa que él hace uso de la tabla de *tiempo vs distancia recorrida* (ver Ilustración 55) al seleccionar una pareja para cuantificar el cambio (Ramos y Jiménez, 2014) y poder dar una expresión algebraica que relacione estas dos variables.

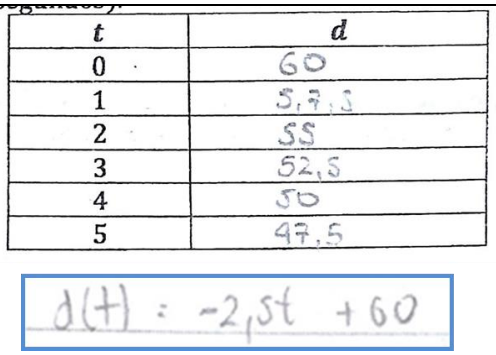
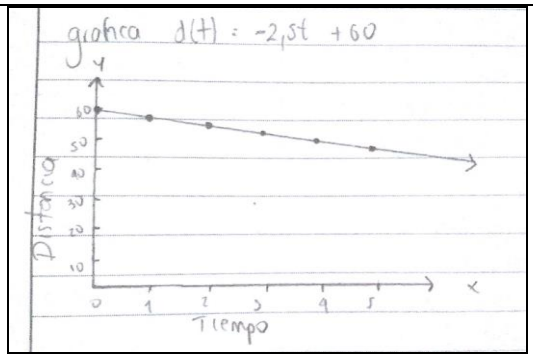
Ilustración 56. Respuesta al ítem b, prueba de egreso del curso de pre-cálculo



En la Ilustración 57, después de mencionar que ***d*** representa la distancia que le falta por recorrer para llegar a la casa de su amigo y modelar la variación de la distancia respecto al tiempo a través de una tabla (Ilustración 57.a) similar a la de la situación inicial, se le pregunta: *e) ¿Con qué rapidez cambia **d** con respecto al tiempo **t**?* a lo que Alejandro responde: *observando la tabla, **d** cambia 2,5m por segundo, empezando en 60 y terminando en 0. La velocidad de **d** es 2,5m/s.* Notamos con su respuesta que él no interpretó el signo (negativo) de la velocidad sin asociarlo con el decrecimiento de la distancia en función del tiempo; esto a pesar de que modeló la función por medio de una expresión algebraica (recuadro azul, Ilustración 57.a) y la graficó en el plano (Ilustración 57.b). Con lo anterior, se puedo evidenciar la dificultad

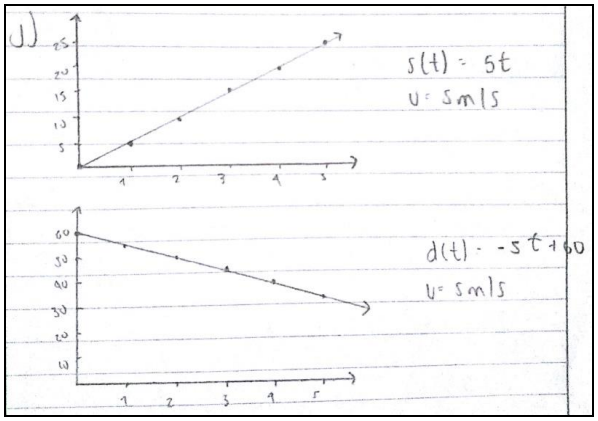
identificada por la profesora del curso de pre-cálculo, ya que ella mencionó que Alejandro no interpretaba la derivada como razón de cambio.

Ilustración 57. Respuesta de Alejandro a los ítems d), f) y g) de la prueba de egreso.

	
a. Representación tabular y algebraica	b. Representación en el plano cartesiano

Para finalizar, el reporte de resultados en base a esta prueba de egreso, mencionamos que cuando se le preguntó *¿cómo cambiarían las gráficas dibujadas en el inciso g) si la persona se traslada a una velocidad de 5m/s?* Alejandro se limitó a hacer las gráficas de las funciones (Ilustración 58) teniendo en cuenta la nueva velocidad, pero no comunicó por escrito como cambian en comparación a las gráficas iniciales, luego nuevamente evidenciamos una dificultad interpretativa la razón de cambio y gráficamente de la interpretación de la pendiente de las gráficas.

Ilustración 58. Respuesta de Alejandro al ítem j) de la prueba de egreso



De la información analizada sobre Alejandro, antes del proceso tutorial, se identificaron las habilidades presentadas en la Tabla 16.

Tabla 16.
Habilidades y dificultades identificadas en Alejandro antes del proceso tutorial.

	Procedimientos aritméticos	**Procedimientos analíticos**
Habilidades	• Realiza cálculos con números naturales a lápiz y papel. • Calcula un porcentaje de un número o cantidad.	• Determina las variables de una situación. • Modela situaciones de cambio relacionadas con el campo de la física a través de gráficas, tablas y expresiones algebraicas. • Establece la interdependencia de magnitudes variables.
Dificultades		• Interpreta la derivada como razón de cambio de cantidades variables o funciones. Así como la pendiente de la recta tangente en un punto a la curva

A continuación, damos cuenta de los resultados del análisis del desempeño de Alejandro en las tutorías a partir de dos instrumentos principalmente: seguimientos de tutoría y videograbaciones de algunas sesiones tutoriales.

5.2. El proceso procedimental de Alejandro durante las tutorías

Como mencionamos en el marco conceptual (sección 2.1.1) el programa de acompañamiento y seguimiento (contexto de la investigación) siendo un sistema social innato se puede interpretar, desde el elemento teórico de la Zona de Desarrollo Próximo (Vigotsky, 1979),

como el espacio en el cual se pueden identificar los andamiajes que posibilita el tutor para que el estudiante logre resolver las situaciones que por sí solo no sería capaz de hacer, y que a su vez favorezca el aprendizaje del Cálculo Diferencial y el desarrollo de habilidades procedimentales.

Resaltamos que el tutor que acompañó a Alejandro durante el semestre 2016-I, es un estudiante de Licenciatura en Matemáticas que en estos momentos ya finalizó su proceso de formación. Él participó como tutor practicante en el período 2014-II cuando cursó la asignatura de didáctica del Cálculo, después de ese período continuó dentro del programa como tutor auxiliar hasta el semestre 2016-I cuando ya culminó sus estudios.

Para este caso de estudio, las sesiones tutoriales sobre funciones y límites fueron video-grabadas, posteriormente se transcribieron y algunos episodios son referenciados en este apartado como evidencia de las experiencias posibilitadas por el tutor en la elaboración de procedimientos. A su vez estos complementan lo reportado por el tutor en los formatos de seguimiento. Como dato adicional, los formatos de seguimiento para el primer periodo académico de 2016 fueron agregados a la plataforma de la universidad donde se encuentran todos los programas que forman parte del SEA.

5.2.1. Alejandro en el trabajo con funciones

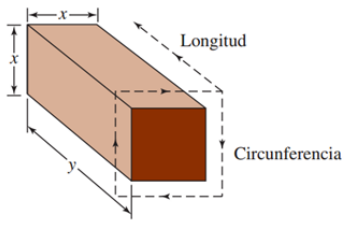
Para la sesión en que el grupo de tutoría de Alejandro trabajó sobre la modelación mediante funciones, el tutor había identificado en su estudiante dificultades para hallar el dominio de funciones cuando debía resolver desigualdades, además cuando trabajaron sobre función compuesta el tutor tuvo que intervenir para aclarar que el domino de una composición no es la intersección de los dominios de las funciones que se proponen para hacer la composición.

También el tutor reportó que Alejandro mecanizaba algunos procedimientos para calcular la inversa de una función sin prestar atención a evaluar las condiciones que garantizan la existencia de la función inversa dada una función. Respecto a esto último, antes del proceso tutorial ya habíamos identificado que el estudiante no interpretaba adecuadamente los resultados obtenidos al realizar correctamente un algoritmo o procedimiento analítico de transformación de expresiones u objetos matemáticos (MEN, 1998). Por otro lado, Alejandro no presentó problemas para realizar operaciones básicas con números reales ni con la factorización de expresiones.

Retomando la sesión sobre modelación con funciones, el tutor planteó un taller que involucraba problemas de la sección 1.7 del libro guía, que para este periodo continúo siendo trascendentes tempranas 4ta ed. (Zill y Wright, 2011). Uno de los problemas trabajados fue el de la Ilustración 59.

Ilustración 59. Situación para la sesión sobre funciones. Fuente Zill y Wright, 2011, p. 60

Las regulaciones del servicio postal en estados unidos para el envió de paquetes postales estipulan que la longitud más el perímetro de un extremo no debe exceder 108 pulg. Exprese el volumen del paquete como una función del ancho x mostrado en la siguiente figura.



Después de la lectura individual del problema anterior (Ilustración 59) y un tiempo prudencial para su interpretación, el tutor nota que sus estudiantes no comienzan a resolver la situación, entonces decide intervenir por medio de preguntas, que en términos de Rodríguez

(2013) significaría verbalización (nivel 2 de ayuda). A continuación, la transcripción de la conversación:

Tutor: ¿Qué ocurre con el problema?

Alejandro: el problema tiene una restricción porque dice que la longitud más el perímetro de un extremo de un paquete no debe exceder 108 pulgadas. Pero hay dice 108 pulgadas, no me está diciendo 108 pulgadas cubicas.

Tutor: Entonces esas 108 pulgadas ¿a qué hacen referencia?

Alejandro: Se refieren a una dimensión. A un perímetro por decirlo así.

Tutor: si, a un perímetro.

Alejandro: ¿si se le puede hallar a la figura?

Tutor: ¡Si! Sí se abre la figura.

Alejandro: ah! Entonces si se puede hacer.

Tutor: sigamos pensado que más variables aparecen, ¿qué es lo que nos están pidiendo?

Alejandro: Nos piden hallar el volumen en función de x. (episodio 11)

Ya con la conversación anterior Alejandro retoma junto con sus compañeros el trabajo de resolver la situación. Notamos que el obstáculo estaba en que Alejandro concebía que la situación no se podía resolver, ya que se pedía el volumen del paquete, pero la restricción no es directamente sobre el volumen sino sobre una magnitud de distancia, en particular el perímetro del paquete. Gracias a la intervención del tutor el estudiante supera su obstáculo y asumió nuevamente el desafío de resolver la situación. Al respecto, Hernández (1999) menciona que la Zona de Desarrollo Próximo dentro de un contexto educativo precisa de la presentación de una actividad con un nivel de complejidad intermedia para el estudiante, que permita el uso de su

nivel de desarrollo real pero a su vez se posibilite un nivel de desarrollo próximo mediado por el tutor (en nuestro caso).

En su solución, Alejandro usa atributos de la figura de la Ilustración 59 para plantear el volumen de la función obteniendo $V = y \times x^2$ e interpreta que como debe ser en función x, la clave está en la restricción. En este punto con ayuda del tutor describen la figura para crear una expresión algebraica que represente la restricción. Sin embargo, en el primer intento Alejandro plantea que $y + 4x = 108$, pero uno de sus compañeros le indica que no debe exceder a 108 lo cual significa que la expresión debe ser $y + 4x \leq 108$. Vemos así el trabajo colaborativo de todos que su vez ayuda a Alejandro a corregir sus errores. Aprovechando la desigualdad el tutor genera una nueva discusión:

Tutor: Esta desigualdad ¿a qué afecta: al dominio o al recorrido de la función?

Alejandro: mmm yo creo que al dominio

Tutor: ¿Por qué?

Alejandro: mmm espere analizo. (Revisa sus apuntes)

Alejandro: digo que al dominio porque la restricción esta sobre las *x*, no sobre el recorrido porque ahi no me dice que el volumen debe ser tanto.

Tutor: ok, ¿Qué pasaría si "*x*" fuera 100? ¿Cuánto valdría *y* para que se la restricción?

Alejandro: pues "*y*" sería…

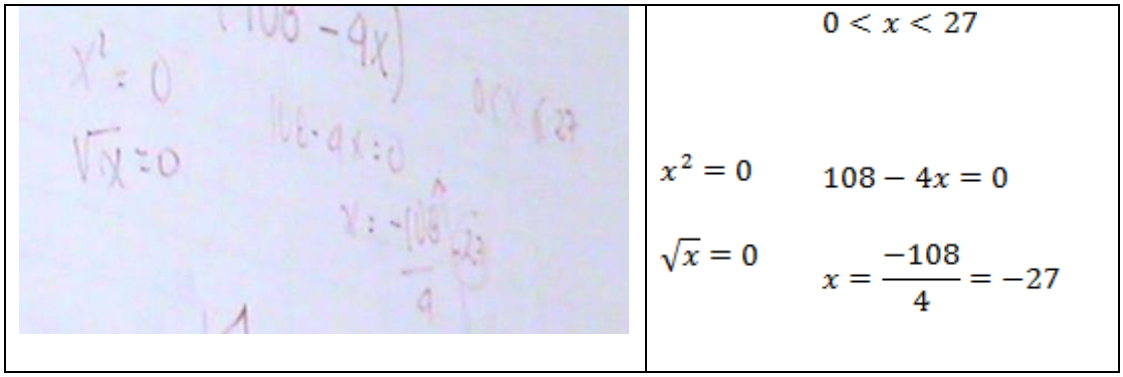
Javier: tendría que ser negativa. (otro estudiante beneficiario)

Alejandro: ah sí, sería negativa. Pero no hay distancias negativas en este contexto.

Tutor: entonces si "*x*" no puede tomar el valor de 100, ¿cuáles si puede tomar? (episodio 12)

En este punto de la discusión los estudiantes no responden y se ven confundidos ya que solo coinciden que el valor mínimo es cero pero no saben cuál debe ser el máximo, entonces el tutor retoma la expresión del volumen y pregunta cómo quedaría en función del ancho que es *x*. Alejandro pasa al tablero para escribir la expresión $V(x) = x^2 \cdot (108 - 4x)$, y el tutor le pregunta que si con eso termina el ejercicio a lo que Alejandro contesta que no, porque falta la restricción sobre x que proviene de la desigualdad y posterior a eso escribe que $0 < x < 27$ y explica que hasta 27 por con 27 el volumen es cero, pero no sabe la razón de mayor que cero. Entonces el tutor interviene mencionando que el volumen no puede ser negativo y eso pasa cuando se toman valores mayores a 27 pero si puede ser cero, y pregunta ¿para qué valores de *x* el volumen es cero? Con esta intervención Alejandro menciona que es necesario sacar raíces y hace el procedimiento como se ve en la Ilustración 60 (con su correspondiente transcripción).

Ilustración 60. Procedimiento de Alejandro para calcular las raíces de un polinomio



Al terminar se ve sorprendido por el resultado de -27 y el tutor pregunta a los compañeros si están de acuerdo, aquí podemos ver que Alejandro se equivocó en el despeje al no tener en cuenta el signo negativo de la constante *-4*. Pero al ver la alerta que emite el tutor repasa su procedimiento y reconoce el erro y acepta que fue muy bobo. Finalizan la sesión retomando que el volumen puede ser cero luego replantean el dominio de la función así $0 \leq x \leq 27$. Por lo tanto, se evidencia como dentro de la ZDP la mediación proporcionada por un sujeto más experto permite que las acciones del menos experto sean corregidas en el proceso de aprendizaje.

Con la actividad anterior se evidencia lo planteado por el tutor en el formato de seguimiento al manifestar que: *Las observaciones realizadas fueron acerca de las condiciones y restricciones del problema, cómo entenderlas y la importancia de la información suministrada al momento definir el dominio de la función, y también para relacionar las variables involucradas en la situación.*

Durante el desarrollo de la sesión identificamos que Alejandro usa apropiadamente las razones trigonométricas y opera correctamente con ellas, es decir, como él mismo lo menciona: *una constante opera al seno de eso (el valor de "x") no lo que está dentro,* luego reconoce que es incorrecto multiplicar el valor de un ángulo por una constante que multiplica a la razón trigonométrica. A su vez, el tutor aprovechó este dominio conceptual para recomendar a sus estudiantes beneficiarios la importancia de usar paréntesis en la escritura de expresiones algebraicas que involucran razones trigonométricas y así evitar cálculos errados. Con lo anterior notamos la intención del tutor para que sus estudiantes interpreten y usen correctamente las notaciones matemáticas y lenguaje algebraico, necesarios en la resolución de problemas que involucran fenómenos variacionales.

5.2.2. Alejandro en el trabajo con límites

Para el estudio de límites de funciones y continuidad, el tutor no inició usualmente con un taller elaborado a partir de ejercicios del libro guía sino con actividades de exploración, dicha sesión la resume de la siguiente forma: *En la tutoría se trabajarán los conceptos de aproximación y tendencia, el desarrollo de la tutoría estará apoyado por el uso de GeoGebra, donde se prepararon unos archivos con el propósito de respaldar el estudio de la tendencia.*

De la descripción anterior consideramos valioso la iniciativa del tutor por introducir el estudio de los límites de forma exploratoria e intuitiva. Recodamos que *la conceptualización y formalización de la noción de limite* es uno de los grupos que reúne algunas de las dificultades de los estudiantes en el Cálculo Diferencial, según Artigue (1995), y que además estas dificultades se deben a que el concepto de límite es uno de los primeros en el que las matemáticas no están restringidas a un sistema finito (Cornu, 1991).

Como ya habíamos mencionado el tutor preparó unas actividades diseñadas en GeoGebra donde inicialmente Alejandro exploró las nociones de aproximación y tendencia en la recta, posterior a eso, él trabajó en una nueva actividad que planteaba lo siguiente:

> *Abre el archivo* ***Act_2.ggb*** *seleccione el deslizador y use la tecla → varias veces y analice lo siguiente:*
> *a. ¿A qué valor tiende la sucesión de puntos sobre el Eje Y cuando la sucesión de puntos en el Eje X tiende a 8 por izquierda?* ***Justifique***
> *b. la ecuación de la función presentada en GeoGebra es* $g(x) = \frac{x^2-64}{x-8}$ *¿A que es igual* $g(8)$*?*

Después de la exploración y al responder el ítem a. se da la siguiente discusión entre Alejandro y el tutor:

Alejandro: Los valores en *y* tienden a estar muy cercanos, ahí se puede observar que tiende a 16.

Tutor: ¿Por qué?

Alejandro: Porque viendo cómo se comporta la gráfica no lo pasa (señalando el valor de 16). Entonces *x* cuando tiende a 8 de izquierda a derecha, el valor en *y* es 16.

Tutor: ok. Y tiende a un valor el cual es 16, ¿de qué forma estamos haciendo la tendencia en el eje "x"?

Alejandro: De izquierda a derecha.

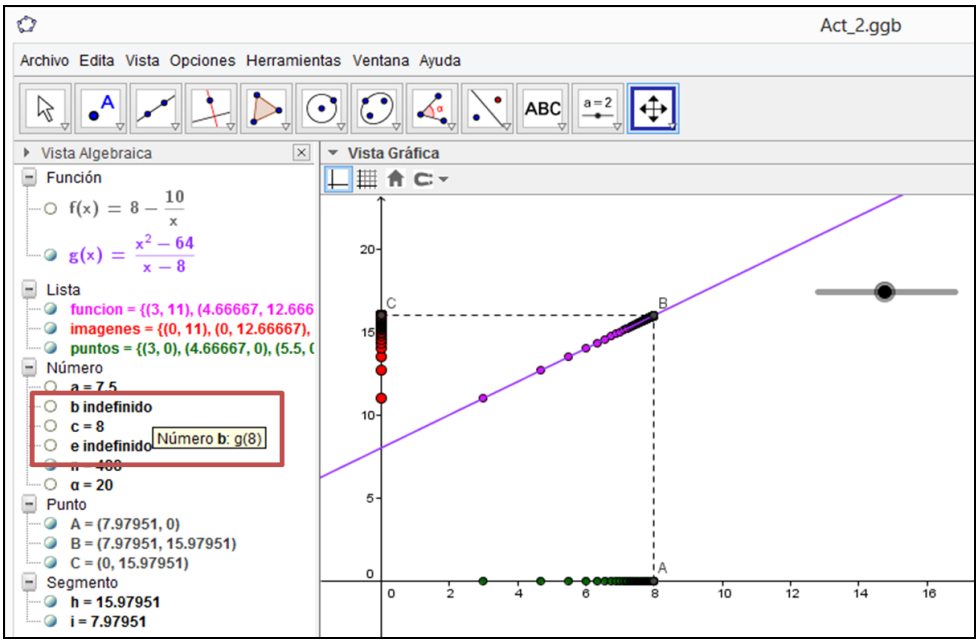
Tutor: es decir, por izquierda. (episodio 13)

Con lo anterior podemos dar cuenta de cómo el tutor usa a GeoGebra como un andamiaje en la construcción de nuevos conceptos, concordando con lo planteado por NCTM (2003) al mencionar que las calculadoras y los computadores son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacer matemáticas. Además, al solicitar la justificación se está promoviendo la compresión matemática ya que este es el fin de la demostración, que se hace más efectivo con el uso de un Sistema de Geometría dinámica, como lo plantea Fiallo (2011), a su vez consideramos que cuando se comprende matemáticamente, la elección de procedimientos en la solución de problemas es más acertado. Por otro lado, el tutor corrigió las expresiones de Alejandro o dio a conocer una nueva forma de decirlo promoviendo, desde lo procedimental, el manejo de las notaciones y el lenguaje establecido para el límite.

Referente al ítem b. sobre la actividad en GeoGebra (Act_2.ggb), Alejandro respondió inmediatamente que $g(8)$ es igual a 16. Dada esta respuesta el tutor solicita a Alejandro que use a GeoGebra para averiguar el valor de $g(8)$ y el software le indicó (como se observa en la

Ilustración 61) que el valor es indefinido por lo que el estudiante rápidamente reconoce que dio esa repuesta pensando en el límite pero que evidentemente al evaluar en 8 se obtiene $^0/_0$. Notamos con lo anterior que Alejandro no interpretó con calma el enunciado, dando una respuesta acelerada sin realizar el procedimiento analítico de transformar la expresión algebraica que le daban, que posteriormente hizo al notar la equivocación.

Ilustración 61. Respuesta de GeoGebra a la actividad 2b diseñada por el tutor para la noción de limite.



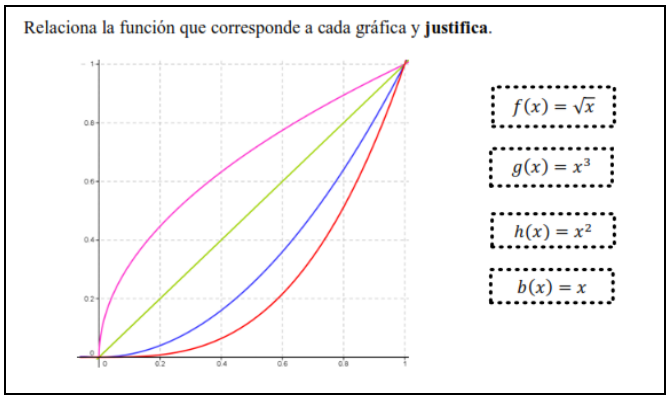
En general, respecto al trabajo inicial con límites la dificultad estuvo en que Alejandro elaboraba un procedimiento que involucraba la representación gráfica de la función pero no recordaba con exactitud la gráfica, entonces él no podía continuar con su procedimiento. Acerca de esto, el tutor se apoyó en GeoGebra para mostrar las gráficas de aquellas funciones que Alejandro no recordaba y también en algunos casos las relacionó con funciones más conocidas en busca de reforzar el procedimiento de relacionar las representaciones algebraicas y graficas de funciones. A su vez, el tutor le indicó a Alejandro que cuando él no conozca la gráfica de la función lo que puede hacer para evaluar su límite es dar valores a "x" dentro la función que sean

cercanos al valor que indica el límite. Con esto último, identificamos que el tutor invita al estudiante a usar otra forma de representación de la función y su vez una nueva estrategia para hallar el límite de una función.

En el uso de GeoGebra para explorar algunas funciones identificamos ciertas dificultades en los procedimientos aritméticos ya que al comparar las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt[4]{x}$ no pudo explicar por qué en el intervalo [0, 1] $g(x)$ es mayor que $f(x)$, es decir, que no domina las propiedades de los números y sus operaciones. Además, tuvo que recurrir a la calculadora para evaluar $g(1/2)$, luego consideramos que hay dificultad para realizar estimaciones en este tipo de operación. Recordemos que el NCTM (2003) plantea que los estudiantes en la educación media deben ser capacitados en calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables, entonces nos parece inquietante que en la educación superior no se domine completamente.

Sumado a esto, en el curso de pre-cálculo la actividad 4 sobre *interdependencia de variables* finaliza con una tarea de reconocimiento en la que se pide relacionar la representación gráfica de cuatro funciones con su representación algebraica (Ver Ilustración 62), entonces ya se había posibilitado una actividad para reforzar la comparación de funciones por medio de lo que Rueda (2016) denomina como reconocimiento pro asociación. Sin embargo, este el autor evidenció que al tratar de diferenciar entre las funciones $h(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ existe mayor dificultad, y los estudiantes recurren a procedimientos como la asignación de valores específicos a la variable para lograr determinar cuál representación gráfica corresponde a cada una de las funciones.

Ilustración 62. Actividad de reconocimiento planteada en la Actividad 4, pre-calculo



En otro episodio, Alejandro y el tutor retoman la discusión de como analizar el límite de una función a partir de su gráfica, pero en esta ocasión cuando el valor al que tiende "*x*" no pertenece al dominio. Específicamente analizan $\lim_{x \to o} \frac{1}{x}$ y se da la siguiente conversación:

Tutor: ¿Cero pertenece al domino de esta función?

Alejandro: No.

Tutor: pero nos interesa ver qué sucede cerca de cero, entonces analizamos que sucede con la función cuando, por ejemplo, x tiende a cero por derecha. Entonces ¿qué sucede con la tendencia en "y"?

Alejandro: tiene un valor muy alto en "y", muy grande.

Tutor: pero, ¿si tiende a algún valor?

Alejandro: Si.

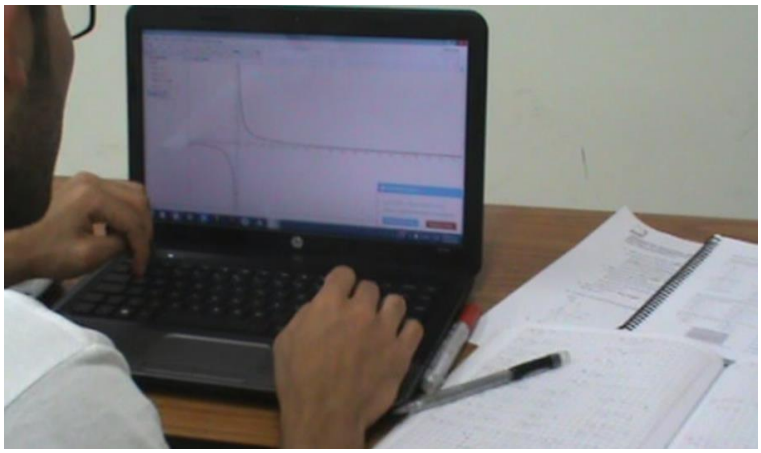
Tutor: ¿Cómo sabemos que tiende a un valor muy grande?

Alejandro: al reemplazar. Si yo remplazo uno sobre un valor cercano a cero, como 0,00001 obtengo un valor muy grande.

Tutor: ¿Y si es más cercano a cero? Hagamos la gráfica en GeoGebra.

(Alejandro introduce $1/x$ en la barra de entrada del software y obtiene la gráfica de la función, como se observa en la Ilustración 63.) (episodio 14)

Ilustración 63. Alejandro graficando en GeoGebra $f(x) = 1/x$



En la discusión anterior observamos que Alejandro considera que el límite lateral de la función va a tender a un valor específico; con esto interpretamos que verbalmente y con una representación estática de la función $f(x) = 1/x$ el estudiante no reconoce un proceso infinito. Así que el tutor invita a Alejandro a graficar la función en GeoGebra y trabajando colaborativamente realizan construcciones auxiliares para tener registro de los valores en la hoja de cálculo que tiene software, dado que como lo mencionan García, Serrano y Díaz (2002) la tendencia exige una visualización de tipo numérico de los procesos infinitos de aproximación como un todo.

En esta actividad el *pensamiento didáctico* y *orquestal* (definido por Parada y Pluvinage, 2014) del tutor jugó un papel importante, ya que el dominio de contenidos didácticos y la integración de diferentes instrumentos le permitió al tutor articular a GeoGebra como una herramienta útil para representar los contenidos del Cálculo, lo que permite involucrar y posibilitar en el estudiante otras formas de representación de la función.

Una vez terminadas las construcciones auxiliares y ajustadas algunas propiedades (como la reducción del incremento de la coordenada en *x*) para observar el comportamiento de la función en valores de *x* cercanos a cero, el tutor retomo la discusión anterior sobre el limite lateral. En la primera parte el tutor le resalta a Alejandro (cuando deslizan el punto sobre la función) que en la tabla hay valores de $x = 0$ donde la función está definida y las imágenes son diferentes, entonces Alejandro lo atribuye a que GeoGebra "tiene un margen de error" ya que si fuera verdad no sería función, y por eso esos resultados. Por este motivo el tutor cambia las cifras de redondeo para visualizar mejor el comportamiento de la función, en este punto al observar el movimiento y los valores en la tabla Alejandro reconoció que *cuando x toma valores muy cercaos a cero por derecha, la función tiende a infinito.* Con lo anterior notamos como las representaciones dinámicas permiten al estudiante una nueva interpretación, exploración y justificación de un problema matemático (Fiallo, 2010). No obstante, observemos la discusión final sobre este problema:

Tutor: Entonces ¿el límite existe?

Alejandro: No. Porque los limites por izquierda y derecha son diferentes.

Tutor: mmm ¿El límite cuando "x" tiende a cero por derecha existe? O ¿el límite cuando "x" tiende a cero por izquierda existe?

Alejandro: Si. Porque nosotros al aumentar las cifras significativas (las cifras decimales de GeoGebra) el valor de "*y"* tiende a infinito o menos infinito.

Tutor: ¿cómo sé que está tendiendo a infinito?

Alejandro: por los números tan grandes que me dan.

Tutor: recuerdas el ejercicio anterior, ¿a qué valor tendía?

Alejandro: a 16.

Tutor: ok. 16 es un número y sabemos quién es: 16. ¿Cómo se quién es infinito?

Alejandro: es un número muy grande.

Tutor: pero ¿es un número?

Alejandro: No, pero no sé cómo decirle. Es lo que nosotros no podemos darle un valor. Es inalcanzable.

Tutor: bueno, que ocurre con los valores en *y* cuando los valores en x son más cercanos a cero, ¿son más cercanos?

Alejandro: No, son más lejanos. Por ejemplo, de 0, 002 a 0,004 *y* aumenta 250 unidades.

Tutor: entonces ¿hay tendencia a un valor?

Alejandro: no.

Tutor: retomemos, el límite cuando x tiende a cero por derecha no existe porque las imágenes no están tendiendo a un número, a un valor especifico. En este caso son cada vez más grandes y dispersas.

Alejandro: ah entonces el límite abarca dos cosas: que en un punto tanto el de la derecha como el de la izquierda sean el mismo, y que las imágenes deben estar juntas unas de otras tendiendo a un valor como tal.

Tutor: ok, como comentario final, cuando x tiende a cero por derecha si hay una tendencia a infinito, pero otra cosa es que el límite exista porque la tendencia debe ser a un valor que yo conozca. (episodio 15)

Con el episodio anterior identificamos que Alejandro reconocía solo una parte para la existencia del límite de una función, es decir, cuando los limites laterales fueran iguales. Sin

embargo, él interpretaba el infinito como un número, lo cual lo llevo a pensar que el limite por derecha si existía, pero gracias a la intervención del tutor y el uso de GeoGebra (como herramienta mediadora) se pudo corregir la interpretación inicial de Alejandro. Además, *durante la actividad se observó que la noción de tendencia ha favorecido entender el límite como lo que sucede cerca del punto y no en el punto*, como lo menciona el tutor en el formato de seguimiento.

En la sesión posterior sobre límites, se dio prioridad a la ejercitación del cálculo de límites apoyados en las propiedades para promover el uso y comprensión de las mismas. Además, el tutor antes de resolver un límite pedía a Alejandro analizarlo antes de escoger una estrategia, por ejemplo, revisar qué tipo de función era, si se trataba de límites cuando x tiende a un valor fijo o cuando tiende a infinito. Y en varias ocasiones el tutor cuestionó a Alejandro y a los demás estudiantes sobre la validez del procedimiento de transformar expresiones algebraicas por medio de la simplificación, con el fin de recalcarles que el análisis sobre el límite de una función es alrededor de un valor en el eje "x" y no en dicho valor.

En estas sesiones no se usó la definición formal de límite para resolver los ejercicios, dando prioridad a lo intuitivo. Observamos un mayor dominio por parte de Alejandro en el uso de la gráfica de una función como un procedimiento analítico para determinar un límite. Sin embargo, al estudiar el concepto de continuidad puntual de una función, Alejandro tuvo dificultades a nivel interpretativo dado que inicialmente confundió la notación de valor absoluto con la de parte entera, por otro lado, probar una afirmación verdadera se le dificultaba a Alejandro más que justificar que una afirmación es falsa, debido al poco dominio del conocimiento conceptual sobre continuidad. Lamentablemente al concepto de continuidad solo se le dedicó una parte de una de las sesiones, por lo que consideramos que quizás los estudiantes necesitaban otra tutoría sobre este tema.

En general, Alejandro fue un estudiante participativo y puntual durante las sesiones de tutoría ya que llevaba dudas sobre lo trabajado en la clase de cálculo I para solucionarlas con el tutor. En un comienzo fue muy dado a pasar al tablero y exponer a sus compañeros, sin embargo, en las últimas sesiones disminuyo su participación porque según el tutor le prestaba atención dentro de las sesiones a otras asignaturas en las que no iba bien. Las habilidades identificadas en esta parte del proceso las resumimos en la Tabla 17.

Tabla 17. Habilidades y dificultades identificadas en Alejandro durante del proceso tutorial

	Procedimientos aritméticos	**Procedimientos geométricos**	**Procedimientos analíticos**
Habilidades	• Realiza operaciones básicas con números a lápiz y papel. • Emplear correctamente las razones trigonométricas.	• Usa propiedades de las figuras como paralelismo y perpendicularidad y reconoce la relación entre las pendientes de este tipo de rectas. • Realiza representaciones en el plano de figuras de 2D o 3D.	• Reconoce situaciones que implican variación. • Simplificar expresiones algebraicas. • Transforma objetos matemáticos para obtener un nuevo objeto como en la resolución de límites.
Dificultades	• En ocasiones considera a infinito como un número. • Hacer estimaciones en operaciones como la radicación.	• Emplea procedimientos de tipo grafico para expresar la imagen visual de un concepto como el de límite. • Diferencia la funcione exponencial y potencia a partir de la gráfica. (según formato de seguimiento) • Recuerda las formulas sobre volúmenes y propiedades de figuras geométricas para modelar las situaciones de cambio.	• Transforma objetos matemáticos para obtener un nuevo objeto en el caso de obtener la función inversa. • Establece en algunas ocasiones la interdependencia de las magnitudes variables. • Modela situaciones de cambio a través de funciones (pasar de lo verbal a lo algebraico en problemas sobre optimización).

Para el semestre 2016-I, al igual que el anterior, se optó por elaborar una prueba simulacro que reunió los últimos contenidos, y algunos de los estudiantes beneficiarios de las tutorías de Cálculo I lo presentaron. A diferencia del anterior simulacro y de la socialización de los resultados obtenidos en ese semestre, dentro del seminario de enseñanza del cálculo, este nuevo simulacro se aplicó una semana antes del examen final de escuela y durante los dos días siguientes se invitó a los estudiantes a revisar con la coordinación el examen, y así lograr una realimentación de los contenidos y procedimientos. No obstante, por compromisos académicos Alejandro no pudo presentar la prueba simulacro, por lo tanto, el último instrumento que nos da cuenta de su proceso procedimental y habilidades es el examen final de la Escuela de Matemáticas.

5.3. El proceso procedimental de Alejandro después de las tutorías

Escuela de Matemáticas a través de reuniones con el coordinador y los profesores de la asignatura de cálculo I sugieren problemas para diseñar el último examen de cálculo I y programar la fecha de su aplicación. A continuación, analizaremos este último examen presentado por Alejandro para en términos de la teoría de la ZDP determinar el nuevo nivel de desarrollo alcanzado luego de su paso por todo el programa de atención y seguimiento.

En la presentación de los resultados, cada uno de los puntos del examen final son organizándolos de acuerdo al tipo de procedimiento presentes en la solución (es decir, que algunos enunciados se repiten pero haciendo alusión únicamente al procedimiento que corresponde). Además, tendremos en mayor medida procedimientos analíticos y aritméticos, seguidos de procedimientos geométricos y métricos con los cuales comenzaremos.

5.3.1. Procedimientos geométricos y métricos de Camilo en el examen final de escuela

El segundo punto del examen evalúa principalmente la comprensión de la derivada como razón de cambio, y para su solución es necesario la identificación e interpretación de los elementos del enunciado para modelar la situación de cambio a través de una representación gráfica del recipiente y una expresión algebraica del volumen, esta acción requiere de determinar las magnitudes (variables y constantes). A su vez es necesario hacer conversión de unidades porque algunas están dadas en centímetros y otras en metros. A continuación, el enunciado del segundo punto:

Los extremos de un recipiente de 6 metros de largo son triángulos equiláteros con uno de sus vértices hacia abajo. Dentro del recipiente se bombea a una razón constante de $1600\,\frac{cm^3}{min}$.

(a) ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua cuando su profundidad es de 40 cm?

(b) Si la profundidad del agua en el recipiente es h_0*, halle la velocidad con la que aumenta la altura h en un instante t. (Sugerencia: considere la diferencia del volumen después de t segundos)*

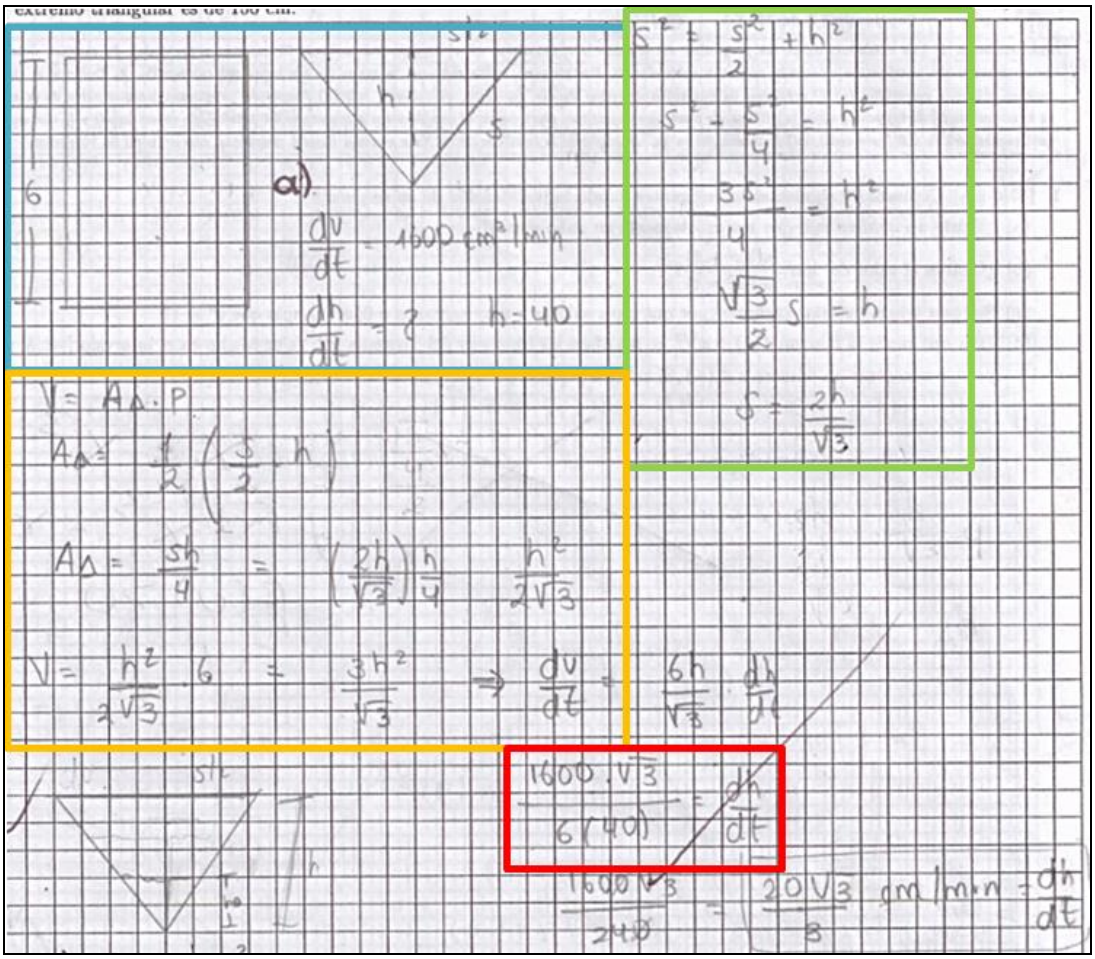
(c) Determine qué tan rápido sube el nivel del agua cuando el recipiente está lleno. Asuma que $h_0 = 60\ cm$ *y que la altura del triángulo es de 150 cm.*

En la solución de Alejandro al ítem a. (ver Ilustración 64) identificamos que él hizo la representación gráfica de las partes del recipiente, es decir, los extremos del recipiente y lo que podríamos considerar como la vista aérea (recuadro azul, Ilustración 64). Además, él identificó la información numérica dada en el enunciado, recordamos que durante las tutorías Alejandro

siempre tuvo la estrategia de listar los datos de una situación. En el recuadro azul (Ilustración 64) también identificamos que usó propiedades de los triángulos equiláteros ya que reconoció que todos sus lados tienen la misma magnitud (y la denotó como *s*) y que la altura respecto a cualquier base divide esta base en dos partes iguales, con lo anterior denotó *s/2*. Con esta representación gráfica Alejandro procede a relacionar el lado del triángulo equilátero con su altura por medio del teorema de Pitágoras (ver recuadro verde, Ilustración 64), entonces nuevamente usó propiedades de las figuras geométricas, en este caso del triángulo rectángulo para elaborar un procedimiento geométrico (Rico, 1995).

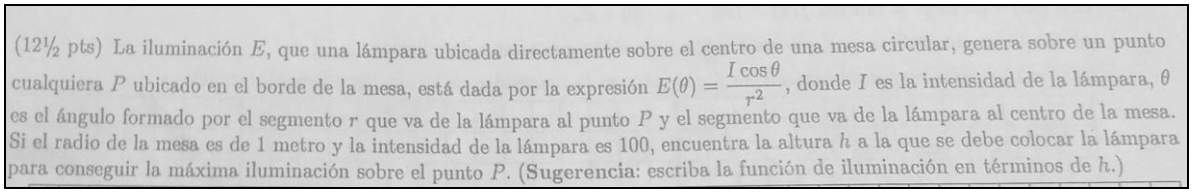
En el recuadro naranja de la Ilustración 64 notamos como Alejandro hace una modelación apropiada del volumen del recipiente al exprésalo con el producto del área del extremo triangular y la profundidad. Sin embargo, notamos que en la expresión para el área del triángulo se equivocó dado que consideró la mitad de la base como la base total del triángulo y por lo tanto la expresión final del volumen es la mitad de la que realmente debía ser $\left(V(h) = \frac{6h^2}{\sqrt{3}}\right)$. Además de esta equivocación que pudo ser por falta de atención, se evidenció que no hizo apropiadamente la conversión de unidades ya que como se observa en el recuadro rojo (Ilustración 64) operó la profundidad en centímetros y el largo del recipiente en metros; no obstante, el profesor calificó el ítem a. como si todos los procedimientos estuvieran correctos y sin hacer alguna corrección o notificación.

Ilustración 64. Procedimientos geométricos y métricos de Alejandro. Ítem 1.a, examen de escuela



En el punto 3, Ilustración 65, se planteó una situación de optimización y dada la presencia de varios elementos que hace extensa la descripción de la situación es necesario realizar un bosquejo donde estén presentes dichos elementos (el ángulo θ, el segmento r, la distancia de la lámpara al centro de la mesa y el punto p). La elaboración de este bosquejo exige la correcta interpretación del enunciado de lo contrario los siguientes procedimientos no conllevaran a una respuesta correcta.

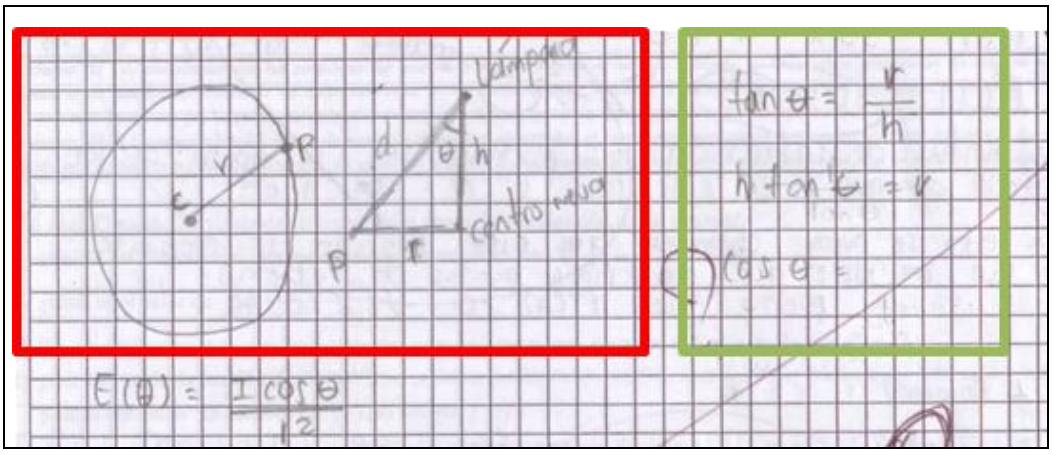
Ilustración 65. Enunciado problema 3 examen final de escuela



(12½ pts) La iluminación E, que una lámpara ubicada directamente sobre el centro de una mesa circular, genera sobre un punto cualquiera P ubicado en el borde de la mesa, está dada por la expresión $E(\theta) = \frac{I\cos\theta}{r^2}$, donde I es la intensidad de la lámpara, θ es el ángulo formado por el segmento r que va de la lámpara al punto P y el segmento que va de la lámpara al centro de la mesa. Si el radio de la mesa es de 1 metro y la intensidad de la lámpara es 100, encuentra la altura h a la que se debe colocar la lámpara para conseguir la máxima iluminación sobre el punto P. (**Sugerencia**: escriba la función de iluminación en términos de h.)

En la Ilustración 66 se observa la representación gráfica de la interpretación que Alejandro hizo del enunciado. En el recuadro rojo de dicha ilustración es evidente que interpretó correctamente quien era la distancia de la lámpara al centro de la mesa, pero no relacionó el ángulo θ con el segmento *r*, ubicando este último como el radio de la mesa. De este bosquejo se desprende que la razón trigonométrica de tangente no fue la esperada, a pesar de que Alejandro recuerda los lados del triángulo rectángulo que esta razón relaciona; además, su representación le impidió relacionar la distancia h con el coseno del ángulo ya que agregó una nueva variable (d). Por lo tanto, consideramos que persiste en Alejandro la dificultar para interpretar enunciados. Y por otro lado se evidencia la importancia del proceso de comunicación en la resolución de problemas matemáticos.

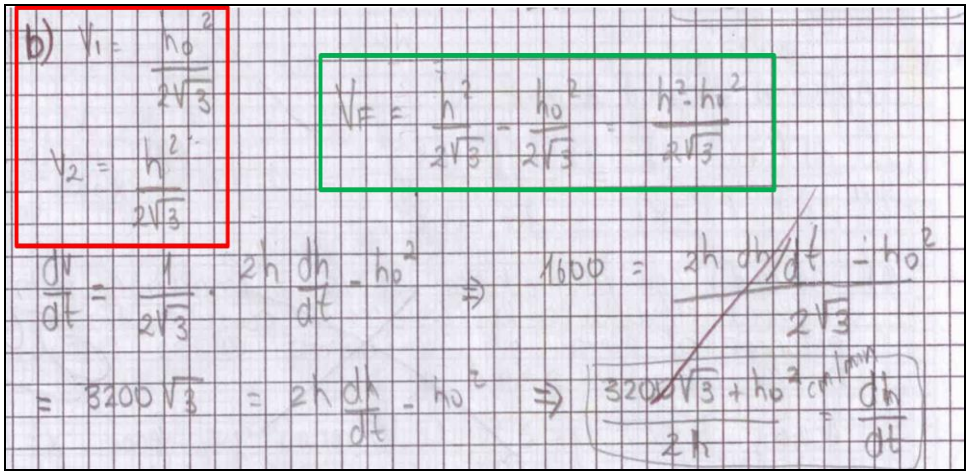
Ilustración 66. Procedimiento geométrico de Alejandro al ítem 3 del examen de escuela.



5.3.2. Procedimientos analíticos de Alejandro en el examen final de escuela

Retomando el ítem 2.b. encontramos en la solución de Alejandro que la expresión algebraica del volumen del recipiente en función de la altura (recuadro rojo, Ilustración 67) no es igual a la que había planteado para el ítem a. Además, en el recuadro verde (Ilustración 67) identificamos que él no interpretó que al existir una profundidad inicial hay un volumen inicial y entonces para cualquier tiempo *t* el volumen está compuesto por ese volumen inicial (V_0) y el volumen después de *t* minutos $(1600cm^3/min \times t)$. Sumado a lo anterior, primero derivó antes de despejar para h la expresión que había obtenido y como resultado obtiene una incorrecta velocidad con la que aumenta *h* que está en función de la altura inicial pero no del tiempo. Evidenciamos nuevamente la dificultad para interpretar matemáticamente los enunciados.

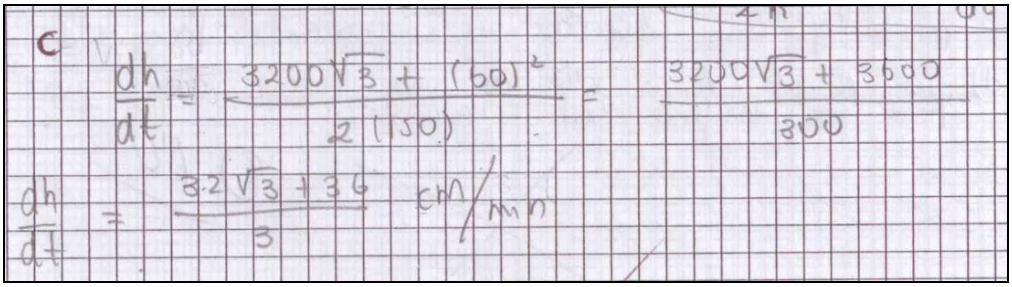
Ilustración 67. Procedimientos analíticos de Alejandro, ítem 2.b, examen final de escuela



Dada la solución incorrecta en ítem 2.b. entonces la solución al ítem 2.c. (Ilustración 68) también es incorrecta, sin embargo, los procedimientos aritméticos evidenciados son correctos, así como los algoritmos de derivación. Llama la atención que para el profesor todos los procedimientos fueron aceptados como correctos, entonces eso nos hace pensar sobre los hechos e ideas que llevaron al profesor a decidir que el estudiante solucionó correctamente todo el

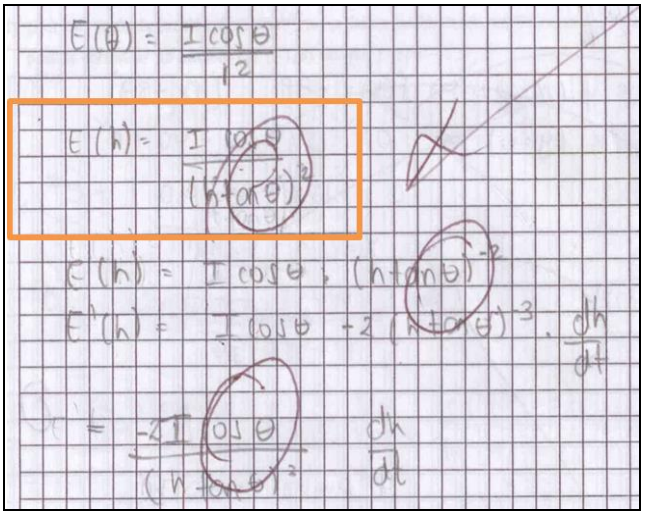
ejercicio, además, recordamos que cuando el profesor calificó un punto similar, sobre la interpretación de la derivada como razón de cambio, en el examen final de Camilo también se equivocó.

Ilustración 68. Procedimientos analíticos de Alejandro, ítem 2.c, examen final



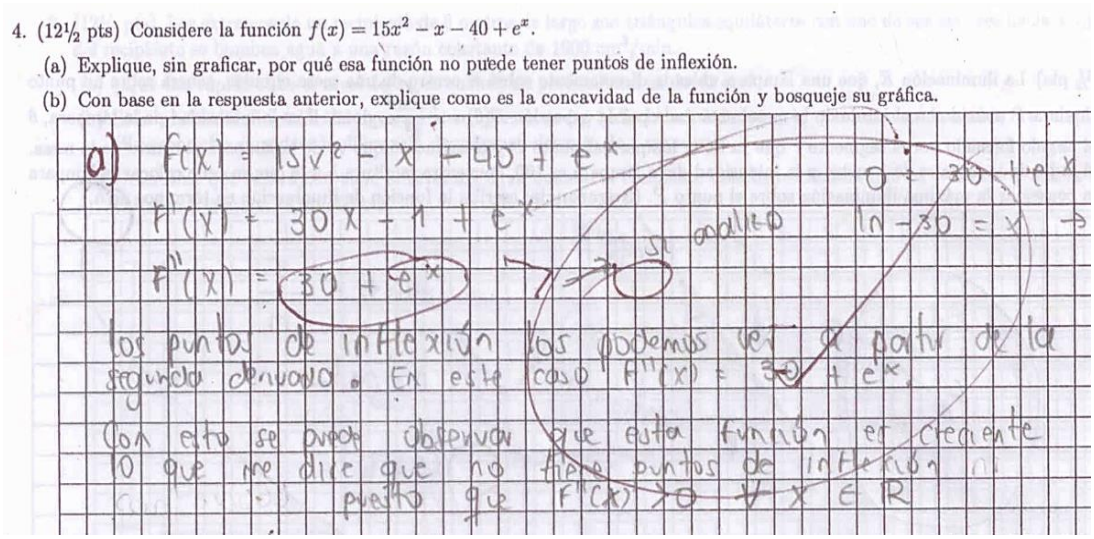
Ahora, retomando el problema 3 (Ilustración 65) y dada la incorrecta interpretación del enunciado por parte de Alejandro, ya evidenciada en la de la subsección anterior, conllevo a que él tuviera dificultades en establecer la interdependencia de las magnitudes y por ende transformar la expresión, dada en el enunciado, para obtener una nueva en función de la variable altura. A su vez, el profesor hizo la anotación para resaltar que la función estaba en términos tanto de θ como de h, y por consiguiente el procedimiento de derivación estaba incorrecto, porque Alejandro consideró al ángulo como una contante (ver Ilustración 69).

Ilustración 69. Procedimientos analíticos de Alejandro, problema 3, examen final



El punto 4 (Ilustración 70) evaluó los conocimientos sobre la aplicación de las derivadas de una función y los procedimientos para usarlas como herramientas en la justificación de los enunciados. Ahora bien, para interpretar adecuadamente la solución dada por Alejandro a este problema realizamos una transcripción literal de lo que él escribió.

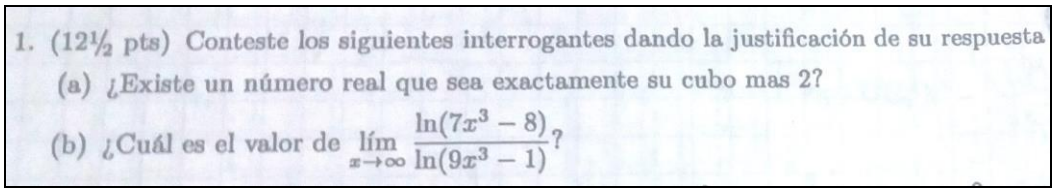
Ilustración 70. Problema 4 y procedimiento analítico de Alejando en el examen final



Los puntos de inflexión los podemos ver a partir de la segunda derivada. En este caso $f''(x) = 30 + e^x$. *Con esto se puede observar que esta función es creciente lo que me dice que no tiene puntos de inflexión puesto que* $f''(x) > 0 \ \forall \ x \in R$.

La Ilustración 70 nos da cuenta de que Alejandro realiza con fluidez los algoritmos de derivación y además recuerda la información gráfica que brinda la segunda derivada. Finalizamos reportando las habilidades y errores de Alejandro, identificados en las respuestas al primer punto de examen (Ilustración 71), el cual dentro del lenguaje informal de los estudiantes se conoce como una la miscelánea de problemas porque es acumulativo.

Ilustración 71. Enunciados problema 1 examen final de escuela

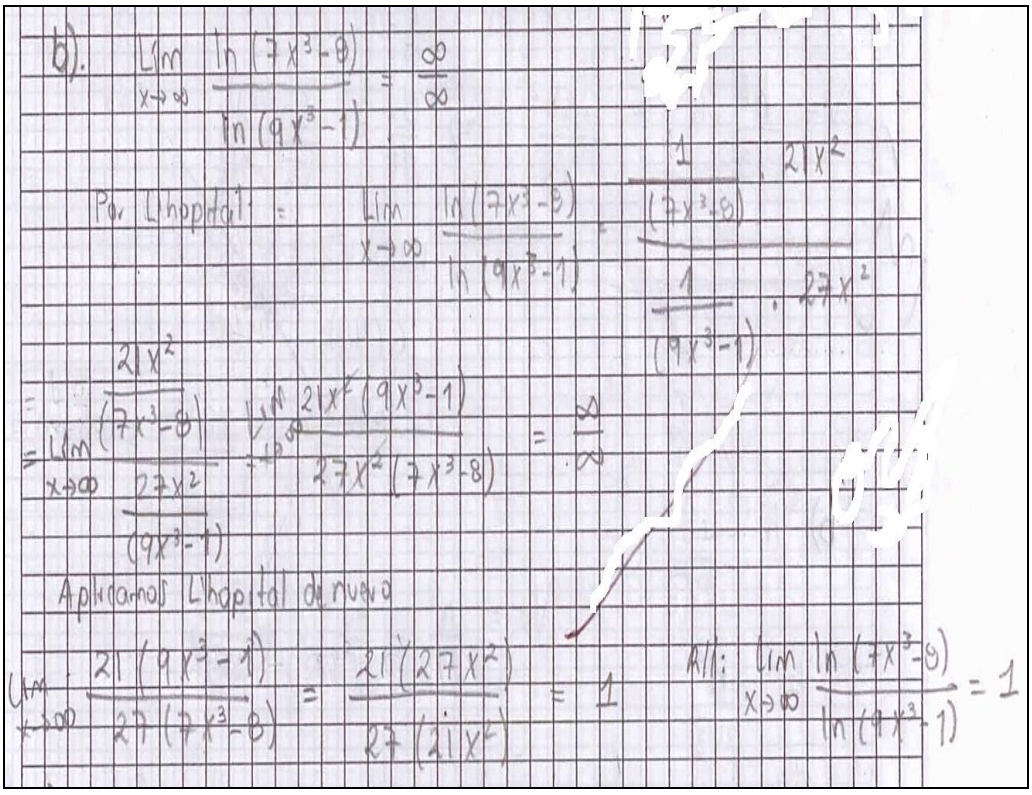


1. (12½ pts) Conteste los siguientes interrogantes dando la justificación de su respuesta
   (a) ¿Existe un número real que sea exactamente su cubo mas 2?
   (b) ¿Cuál es el valor de $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(7x^3-8)}{\ln(9x^3-1)}$?

En la hoja de procedimientos de Alejandro al problema 1 (

Ilustración 71) identificamos que el primer ítem no lo contestó porque no asoció el enunciado con algún concepto matemático propio del cálculo diferencial como el teorema del valor medio. Referente al ítem b (Ilustración 72), se ratifica la habilidad de Alejandro para derivar usando apropiadamente las reglas de la derivación y para simplificar expresiones; además, al evaluar el límite reconoció que era una de los casos en la que la regla de L'hopital puede ser usada, por lo tanto, aplico procedimientos aritméticos para responder que involucran procesos infinitos.

Ilustración 72. Procedimientos analíticos de Alejandro, problema 1.b, examen final



De la información analizada sobre Alejandro, después del proceso tutorial por medio del examen final de cálculo I, se identificaron las habilidades presentadas en la Tabla 18.

Tabla 18.
Habilidades y dificultades identificadas en Alejandro después del proceso tutorial

	Procedimientos aritméticos	**Procedimientos geométricos**	**Procedimientos analíticos**
Habilidades	• Realiza cálculos con números lápiz y papel. • Usa apropiadamente símbolos y notaciones en la solución de problemas. • Emplear correctamente las razones trigonométricas.	• Realiza representaciones en el plano de figuras geométricas de 2 o 3 dimensiones. ✓ Accede a los algoritmos de la memoria a largo plazo para calcular áreas y volúmenes.	• Determina las variables de una situación. • Transforma objetos matemáticos para obtener un nuevo objeto como la derivación. • Relaciona expresiones algebraicas y gráficas empleando sus propiedades • Transforma expresiones algebraicas.
Dificultades		• Emplea procedimientos de tipo pictórico para expresar la imagen visual de la situación enunciada verbalmente.	• Establece la interdependencia de las magnitudes variables • Verifica los pasos de un procedimiento en la trasformación de expresiones sobre volúmenes.

Para finalizar el capítulo, daremos conclusiones generales de Alejandro, a partir de los resultados reportados en las tres etapas de participación de Alejandro como beneficiario del

programa de acompañamiento y seguimiento en Cálculo Diferencial y a su vez estudiante de dicha asignatura.

5.4. Reflexiones generales de las habilidades procedimentales de Alejandro durante el programa de acompañamiento

Alejandro demostró un buen manejo de las operaciones básicas con números racionales, evidenciado a través de las pruebas iniciales y el curso de pre-calculo, posteriormente esta habilidad se ejercitó y reforzó durante las tutorías al socializar las soluciones. Además, las situaciones planteadas en los talleres permitieron recordar las razones e identidades trigonométricas. Aunque no se le dificultaba operar con números negativos, si hubo una ocasión en que erró y fue importante que el tutor interviniera oportunamente por medio de preguntas para revisar si su procedimiento estaba correcto, posibilitando a la vez la habilidad para verificar los pasos de un procedimiento. Al finalizar estas habilidades aritméticas se evidenciaron en varias de las soluciones del examen final.

Los talleres iniciales elaborados por el tutor posibilitaron revisar las nociones de perpendicularidad y paralelismos, y las propiedades algebraicas de rectas paralelas o perpendiculares. Sumando a esto, como se reportó en el trabajo con funciones se dieron experiencias para el estudio y construcción de figuras, con el objetivo de ir desarrollando la habilidad para expresar imágenes visuales de una relación variacional, que se evidencio en una de las soluciones del examen final. No obstante, en el examen final notamos que una de la representación pictórica no fue la más apropiada debido a una mala interpretación del texto.

Sobre los procedimientos algorítmicos, los talleres de la sesión tutorial y las inquietudes sobre tareas que Alejandro llevaba, y que fueron mediadas por el tutor contribuyeron a que

Alejandro ejercitara la transformación de expresiones algebraicas y objetos como las funciones con el fin de obtener, el límite de una función o la derivada.

También consideramos que las actividades trabajas en el curso de pre-calculo permitieron que Alejandro explorara diferentes formas de representación de una función. El proceso de representación fue ampliamente reportado por Rueda (2016) quien caracterizó habilidades asociadas al proceso de representación posibilitadas por las actividades del curso de pre-cálculo (parte del contexto del estudio que aquí presentamos). Precisamente la experiencia de Alejandro en el curso se pudo evidenciar en la prueba de egreso que él contó desarrolló habilidades para representar la situación de cambio a través de la expresión algebraica, la gráfica y la tabla.

Además, la exploración con GeoGebra guiada por el tutor sobre las ideas de tendencia y aproximación reforzó notablemente la noción de límite de una función en Alejandro. Así mismo, le permitió reforzar otros tipos de representación del cambio además del algebraico. Dichos logros, favorecieron posteriormente la comprensión y aplicación de procedimientos aritméticos en la deducción de los limites. De igual modo, esta experiencia permitió explorar nociones como el infinito y corregir ideas erróneas como, por ejemplo, que se puede operar como si se tratara de un número real, beneficiando habilidades analíticas de determinar procesos infinitos.

6. Conclusiones

Para responder al objetivo *de identificar y describir las habilidades asociadas al proceso procedimental que desarrollan estudiantes beneficiarios de un programa de acompañamiento y seguimiento en Cálculo Diferencial* hemos considerado analizar las diferentes actividades que el programa de acompañamiento y seguimiento coordina antes y durante el proceso tutorial, así como el examen final de cálculo I diseñado por la coordinación de la Escuela de Matemáticas UIS.

La presentación de las conclusiones la realizaremos en tres secciones: i) las habilidades asociadas al proceso procedimental que hemos visualizado en los datos organizadas de acurdo a la Taxonomía de los Procedimientos; ii) reflexiones acerca del programa de acompañamiento y seguimiento como Zona de Desarrollo Próximo; iii) perspectivas de investigación.

6.1. Habilidades asociadas al proceso procedimental desarrolladas en estudiantes beneficiarios de un programa de acompañamiento y seguimiento.

La identificación de las habilidades evidenciadas en los estudiantes la relacionaremos explicitando nuevamente los descriptores propuestos desde el marco conceptual y aquellos que surgieron a través del análisis de los datos en cada categoría (tipo de procedimiento) y que son particulares a los objetos matemáticos tratados durante el curso de cálculo I, como lo son las funciones, los límites y las derivadas. Recordamos que los procedimientos necesarios en la

solución de situaciones propias de un curso de cálculo pueden ser de tipo aritmético, geométrico, métrico y analítico.

6.1.1 Habilidades asociadas a los procedimientos aritméticos posibilitadas en ASAE

Al revisar la elaboración y la ejecución de este tipo de procedimientos en el caso de Camilo, a través de las diferentes actividades del programa, encontramos que en su fase inicial usaba únicamente la representación decimal para realizar cálculos, los cuales los realizaba apropiadamente, pero le dificultaron identificar el patrón de una situación. No obstante, al finalizar su proceso tutorial se identificó la habilidad para usar la expresión fraccionaria en alternancia con la decimal (prueba simulacro). A su vez y dada la posibilidad de ejercitar los algoritmos de derivación, hubo iniciativa por parte de Camilo para usar otra notación para las operaciones como la potenciación que se pudo observar en el examen final de Cálculo.

Además, en la prueba diagnóstica se identificó que Camilo no usaba apropiadamente los símbolos matemáticos para denotar ideas y relaciones matemáticas. Sin embargo, el dialogo continuo y el trabajo en colaboración con la tutora sobre límites y aplicaciones de la derivada, permitió alertar sobre la importancia de escribir la expresión matemática completa, a pesar de que una parte de ella vaya siendo simplificada (sección 4.2.2), y de identificar la información relevante de una situación de cambio. Posterior a ello en las pruebas simulacro y final, se observó que Camilo había realizado un proceso de interiorización ya que entendía y manejaba independientemente las notaciones y símbolos matemáticos en la solución de las situaciones.

Por último, a lo largo de su participación en el programa Camilo tuvo debilidad para operar con números negativos, en operaciones particulares como la multiplicación y la

potenciación, en donde la tutora alertaba constantemente, y ya en el examen final la dificultad estuvo presente únicamente en la simplificación de una expresión, en donde además mostró dominio para aplicar propiedades de la potenciación.

Respecto al caso de Alejandro notamos un buen manejo de las operaciones básicas con números racionales que se ejercitó y reforzó durante las tutorías, además las situaciones planteadas permitieron repasar las razones trigonométricas para emplearlas correctamente. También se equivocó al operar con negativos, pero en menor medida que Camilo, en donde el tutor fue importante para indicar por medio de preguntas si su procedimiento aritmético estaba correcto. Su dificultad estuvo en hacer aproximaciones de raíces en donde prefería recurrir a la calculadora por más que el tutor le indicaba que no necesitaba una respuesta exacta y en un inicio tratar al infinito como un número con el cual se puede operar, pero que oportunamente fue corregido por el tutor al trabajar la noción de limite (apartado 5.2.2. episodio 15). Usaba apropiadamente las notaciones y los símbolos matemáticos como se pudo observar en los exámenes finales.

A partir de los dos casos de estudio planteamos que los estudiantes al terminar su proceso de acompañamiento tienen habilidades de tipo aritmético específicamente al:

- ✓ Realizar operaciones básicas a lápiz y papel con números, principalmente racionales.
- ✓ Utilizar la propiedad distributiva de la multiplicación y la potenciación para simplificar los cálculos con números racionales tanto en su expresión fraccionaria y decimal.
- ✓ Establecer relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada
- ✓ Emplear correctamente las razones y las identidades trigonométricas en contextos matemáticos.

A pesar de notar algunas fallas leves en las pruebas escritas al operar con números negativos o fraccionarios que atribuimos a la falta de atención, si reconocemos que dentro del proceso de acompañamiento la labor de los tutores permitió alertar a los estudiantes sobres sus errores y corregirlos en ese instante posibilitando así el desarrollo de habilidades de control como verificar los pasos del procedimiento y justificarlos.

Además, los talleres propuestos para las sesione propician en los estudiantes la necesidad de ejercitar sus procedimientos aritméticos, con el doble fin de elaborar los procedimientos necesarios para resolver las situaciones y ejercitarlos para tener una mayor precisión y agilidad, por ejemplo, al momento de ser evaluados a través de los exámenes del curso dado que en algunas ocasiones no se permite el uso de calculadora.

6.1.2. Habilidades asociadas a los procedimientos geométricos y métricos

Respecto a los procedimientos métricos los resultados son escasos ya que como lo evidenciamos en la sección c) este tipo de procedimiento es poco valorado y trabajado por los tutores junto con sus estudiantes. Además, las situaciones que requieren del dominio del sistema métrico decimal son las relacionadas con la interpretación de la derivada como razón de cambio, y se limitan a los algoritmos para la conversión de unidades que se asumen deben ser dominados por todos los estudiantes al terminar la educación media. Por lo tanto, la atención es superficial, pero a la hora de ser necesarios identificamos que Camilo tuvo en cuenta las unidades de media en los problemas que incluyen magnitudes mientras que Alejandro trabajó una de las situaciones sin prestar atención a las diferentes unidades de una misma magnitud.

En el caso de los procedimientos geométricos, estos tienen una mayor presencia tanto en las pruebas escritas como en las sesiones tutoriales (como se evidencio en los apartados 4.2.4,

4.4, 5.2.1 y 5.3.1) en comparación con los procedimientos métricos, dado que como lo mencionamos en el documento las representaciones geométricas son esenciales en la resolución problemas no solo matemáticos, y los tutores conscientes de esta estrategia (por su experiencia como estudiantes y profesores en formación) posibilitaron en sus estudiantes el desarrollo de algunas acciones.

En el caso de Camilo identificamos al inicio de las sesiones tutoriales que tuvo dificultades con las nociones de perpendicularidad y paralelismo que la tutora aclaró. Además, durante las sesiones finales al trabajar los temas de razón de cambio y optimización se reforzó, con los diferentes problemas, la realización de representaciones geométricas y pictóricas. Sin embargo, la dificultad de Camilo estuvo en recordar fórmulas de áreas y volúmenes de algunas figuras geométricas como la del área del trapecio. Dicha dificultad fue atendida por la tutora, sin embargo, el vacío conceptual escolar le imposibilitó concluir los procedimientos de construcción de representaciones de figuras geométricas, acción que sí realizaba con mayor dominio. Además, Camilo reconocía propiedades de figuras bidimensionales usuales que lograba relacionar con expresiones algebraicas.

En el seguimiento de Alejandro notamos que el estudiante desde el comienzo manejaba las nociones de perpendicularidad y paralelismos y que las propiedades de rectas paralelas o perpendiculares las relacionaba con expresiones algebraicas. Por otro lado, al reforzar los temas de funciones la construcción de figuras tridimensionales fue trabajado permitiendo posteriormente la elaboración de procedimientos analíticos. No obstante, en el examen final notamos que una de las representaciones pictóricas no fue la más apropiada debido a una mala interpretación del texto.

Nuevamente teniendo en cuenta los resultados de los dos casos de estudio planteamos que los estudiantes al terminar su proceso de acompañamiento en ASAE ha desarrollado habilidades de tipo geométrico específicamente al:

- ✓ Dibujar y construir representaciones de figuras bidimensionales o tridimensionales para expresar una imagen visual de una relación variacional.
- ✓ Usar atributos y propiedades de figuras y objetos bidimensionales y tridimensionales.
- ✓ Relacionar las propiedades de las figuras geométricas con expresiones numéricas y algebraicas.

Sin embargo, no deja de parecernos inquietante que el uso de las propiedades de las figuras geométricas no es sólido y que se les dificulta acceder a los algoritmos de la memoria a largo plazo para calcular áreas y volúmenes (habilidad de control, ver apartado 2.3.5.b), como se evidencio en la entrevista a tutora (episodio 9) y en la respuesta de Camilo (Ilustración 33).

Además, cuando las representaciones pictóricas no fueron las más adecuadas, se reflejó principalmente la dificultad de los estudiantes para interpretar los enunciados de las situaciones problemas que en el documento habíamos asociado con el proceso de comunicación y que influye en la elaboración y ejecución de los procedimientos. Entonces consideramos importante prestar mayor atención al proceso de comunicación en los primeros niveles universitarios desde la Educación Matemática.

6.1.3. Habilidades asociadas a los procedimientos analíticos

Este tipo de procedimientos se relaciona principalmente con el reconocimiento de regularidades y patrones, la caracterización de la variación, la identificación de variables, la descripción de fenómenos de cambio y dependencia en contextos aritméticos y geométricos (Barajas, 2015).

A partir de la interpretación de los resultados de Camilo en cada etapa notamos que, después del curso de pre-cálculo, la identificación de las magnitudes variables se realizó sin mayores contratiempos en las demás etapas del programa. No obstante, en las situaciones de optimización, cuando él logró relacionar cuantitativamente dos magnitudes tuvo dificultad para concretar la expresión algebraica final debido a los vacíos conceptuales en geometría y a la interpretación de lo verbal, como ya habíamos mencionado en la sección anterior, y a pesar de haber resuelto en colaboración con la tutora diferentes situaciones sobre el tema de interdependencia de variables, esto nos sugiere que el conocimiento no trascendió el nivel interpsiquico. Dado esto sugerimos que la coordinación oriente a sus tutores en la profundización de interpretación de enunciados más que en la mecanización de algoritmos sobre derivación, estos últimos pueden ser abordados como actividad extra fuera de las sesiones.

Dado el énfasis de la tutora en la ejercitación de diferentes algoritmos identificamos que Camilo tenia habilidad para realizar composición de funciones y para derivar funciones, así como transformar expresiones algebraicas. Por otro lado, en la prueba diagnóstica Camilo tuvo dificultades para elaborar procedimientos relacionados con procesos infinitos, pero durante las tutorías fue satisfactorio su desempeño ya que con ayuda de GeoGebra pudo explorar gráficamente diferentes límites de funciones. Además, los talleres permitieron que Camilo aplicara la derivada como una herramienta para relacionar expresiones algebraicas con propiedades gráficas, como se evidencio en el examen final de escuela.

En el caso de Alejandro, las pruebas iniciales nos permitieron evidenciar una interpretación superficial de la derivada como razón de cambio, sin embargo, durante las tutorías el tutor reportó un avance en su interpretación además como pendiente de una recta tangente. También identificamos que situaciones relacionadas con la física fueron modeladas por el

estudiante y en la prueba de egreso hizo uso de diferentes representaciones, que son propiciadas por las actividades del curso de pre-cálculo como se ha previsto y evidenciado en los trabajos de Fiallo y Parada (2014) y Rueda (2016).

Al igual que Camilo, identificamos en Alejandro a través de sus pruebas escritas un dominio para simplificar expresiones, resolver ecuaciones y derivar funciones. Además, la exploración con GeoGebra guiada por el tutor de las ideas de tendencia y aproximación reforzó la noción de límite de una función, así como explorar otros tipos de representación del cambio. Por otro lado, a pesar de hacer explicita la información de un problema, como estrategia de solución, tuvo (desde lo comunicativo) dificultad para interpretar los enunciados y por lo tanto elaborar estrategias para relacionar algebraicamente las variables implicadas en la situación. Por último, relacionado con habilidades de control identificamos que en los exámenes los estudiantes olvidan verificar los pasos de sus procedimientos por ejemplo al transformar expresiones.

Y las habilidades fueron posibilitas al ejercitar, con ayuda de los andamiajes elaborados por el tutor, las siguientes acciones:

- ✓ Determinar las variables de una situación.
- ✓ Relacionar las expresiones algebraicas y gráfica empleando sus propiedades.
- ✓ Utilizar aproximaciones numéricas y gráficas para deducir intuitivamente el límite de una función.
- ✓ Aplicar procedimientos aritméticos para resolver problemas que involucran procesos infinitos.
- ✓ Representa situaciones de cambio a través de las funciones, las gráficas y las tablas.
- ✓ Transformar expresiones algebraicas desde una forma hasta otra.

Ahora bien, para los objetos matemáticos trabajados en el curso de cálculo I, como lo son las funciones, los límites y las derivadas; y que a su vez fueron ampliamente reforzados en las sesiones tutoriales por medio talleres de ejercitación, identificamos que los estudiantes tienen habilidades de tipo analítico y de rutina al:

- ✓ Aplicar reglas de derivación de funciones y hacer uso de la regla de la cadena.
- ✓ Transformar funciones ya sea para obtener la función inversa, una función compuesta o realizar precisamente transformaciones en el plano (traslación).

De las acciones anteriores resaltamos que aquellas en que los estudiantes tenían un mayor dominio son las relacionadas con la aplicación de algoritmos establecidos para hallar límites y derivar funciones. Dado que algunas de las sesiones se centraron en la ejercitación de dichos procedimientos, en parte por atender las necesidades de los estudiantes producto de la organización del curso de Calculo I, que al ser tradicional recae en la algortimización, y como lo menciona Cantoral y Reséndiz (2013) no se posibilita el espacio para el desarrollo de ideas propiamente variacionales, como se evidencio en uno de los casos de estudio. A pesar de esto, dentro de las tutorías (y el curso de pre-cálculo) se evidenciaron esfuerzos, con ayuda de GeoGebra como herramienta mediadora, para la exploración de elementos como el cambio, la tendencia y la aproximación en la introducción y el estudio de objetos matemáticos como el límite.

Y nuevamente el usar tablas para observar el cambio y la interdependencia de las magnitudes variables del problema, solo se posibilitó dentro del programa de acompañamiento y seguimiento, dado que en los exámenes finales (y quizás por no permitir el uso de la calculadora) la mayoría de las representaciones de funciones se restringió a las expresiones algebraicas.

6.2. Reflexiones acerca del programa de acompañamiento y seguimiento relacionadas como zona de desarrollo próximo en cálculo diferencial

Después de observar el programa de acompañamiento y seguimiento durante dos semestres seguido e intercambiar opiniones con los participantes pudimos identificar diferentes cuestiones favorables y no tan favorables de programa que caracterizamos como una Zona de Desarrollo Próximo en Cálculo I, el cual brinda los andamiajes precisos a través de los tutores para atender las necesidades académicas de los estudiantes de primer nivel de las carreras de ciencias e ingenierías.

A pesar de no ser el objetivo del programa, si es cierto que algunas de las sesiones son usadas para abordar temas propios de la educación media, es decir, que los tutores deben mediar con las dificultades que los estudiantes tienen sobre temas básicos, como factorización o suma de fraccionarios, haciendo que el programa tutorial sea un espacio de nivelación de la Educación Básica Secundaria. Cuestión que no es tan favorable para el desarrollo de las nociones importantes del Cálculo.

Un asunto favorable del programa es posibilitar a los estudiantes beneficiarios un espacio, a través del examen simulacro, para poner a prueba sus conocimientos y habilidades. Es decir, esta herramienta permite que los estudiantes y el mismo programa identifiquen el nuevo nivel de desarrollo real de los estudiantes (identificados con dificultades en matemáticas). Además, esta experiencia ayuda a los alumnos a familiarizarse con el formato y la metodología de un Examen de Escuela, lo que a nuestro juicio brindará seguridad al momento de ser evaluados institucionalmente. Por otro lado, consideramos importante que haya una realimentación adecuada del estudiante sobre los procedimientos realizados en el simulacro, preferiblemente en

compañía del tutor; razón por la que sugerimos que éste sea aplicado con tiempo prudencial dentro del calendario académico, y así lograr una evaluación completa que beneficie a los estudiantes.

Otro aspecto favorable del programa (través de las tutorías o la prueba simulacro) es brindar experiencia a los estudiantes en donde se aborden temas que quizás los profesores no hayan profundizado en sus clases de Cálculo I. Pero que pueden ser evaluados en el último examen de Escuela, dada la unificación de los contenidos de la asignatura.

Por otro lado, dada la atención casi personalizada de los estudiantes, identificamos que se posibilita la participación activa de los estudiantes en su propio aprendizaje, fomentando el trabajo colaborativo en la solución de situaciones y la superación de dificultades. Aspecto, que es sumamente importante para que el estudiante tenga una ZDP que conlleve a nuevos niveles de desarrollo real. Por tal motivo, sugerimos que los grupos de trabajo en cada sesión no superen los tres o dos estudiantes, para que todos puedan participar y a su vez haya un mejor acompañamiento por parte del tutor.

Resaltamos el uso de GeoGebra, como herramienta de mediación, que la mayoría de los tutores usan en la creación de andamiajes en favor de la compresión del estudiante, porque se posibilita la visualización de conceptos matemáticos y el desarrollo de ideas intuitivas (como lo registramos en el estudio de límite de una función en un punto). Además, de ampliar el conjunto de estrategias de solución. Cuestión que es coherente con los sugerido por diferentes documentos orientadores en el aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 2003, MEN, 2002, 2006).

La experiencia de investigación nos permitió corroborar que persiste la brecha entre lo que el programa de acompañamiento y seguimiento quiere posibilitar dentro de un curso de

cálculo diferencial y lo establecido institucionalmente; dado que las características del programa apuntan al desarrollo de procesos matemáticos a través de la resolución de problemas y de igual modo el desarrollo del Pensamiento Variacional. No obstante, el tradicionalismo del curso de cálculo I con la designación de listas de ejercicios para cada tema, hace que varias de las acciones asociadas a los procedimientos analíticos se queden en reproducción de soluciones de problemas matemáticos estándar ya practicados.

6.3. Perspectivas de investigación

Reconocemos que este trabajo más que identificar las habilidades de los estudiantes dentro de un contexto particular y su vez validar un referente teórico (creado al interior de la comunidad de investigadores de la universidad), fue una oportunidad para aportar en la consolidación y mejoramiento del programa de acompañamiento y seguimiento, con el fin de seguir aportando al objetivo de contrarrestar la deserción y reprobación en cálculo I. Por ejemplo, al reconocer aquellas habilidades que deberían ser desarrolladas por los estudiantes, pero que no lograron ser dominadas; al idear nuevas herramientas de evaluación y seguimiento, y a su vez estrategias de implementación que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes.

Además, de reportar cualitativamente el trabajo e impacto de las tutorías más allá de las cifras cuantitativas, logramos identificar al programa como una Zona de Desarrollo Próximo en Cálculo Diferencial, donde los tutores son los sujetos más experimentados que crean los andamiajes necesarios para que los estudiantes comprendan diferentes conceptos y puedan elaborar estrategias para resolver situaciones de dicho curso.

A pesar de que nosotros nos esforzamos por presentar los resultados más relevantes sobre las habilidades a lo largo de un curso de cálculo I, en donde se abordaron diferentes elementos

como los números reales, las funciones, el infinito, los limites, junto con nociones centrales como el cambio, la variación y la tendencia. Hacemos la invitación a la comunidad de educación matemática para profundizar en algún tipo de procedimiento específicamente para cada uno de los elementos teóricos. A su vez, dada la conexión del proceso procedimental con otros procesos matemáticos, como, por ejemplo, el de comunicación queda también abierta la puerta para indagar sobre cuáles son las habilidades que se pueden y se deben potenciar dentro de este y otros contextos de aprendizaje.

Por último, queremos agradecer al Sistema de Apoyo a la Excelencia Académica de la Universidad (SEA-UIS) y a la Vicerrectoría Académica por sus aportes económicos, los cuales han permitido que cada uno de las actividades del programa ASAE sean hoy una realidad. Así mismo, invitamos a la administración institucional a voltear también la mirada a los resultados cualitativos, que han sido presentados en ésta y otras investigaciones del grupo Edumat, los cuales dan cuenta de la relevancia de los programas de acompañamiento para el mejoramiento académico de los estudiantes beneficiarios.

Referencias Bibliográficas

Abrate, R.; Pochulu, M. & Vargas, J. (2006). Conclusiones generales en torno a los errores y dificultades en Matemática. *Errores y dificultades en Matemática Análisis de causas y sugerencias de trabajo 1ª ed*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María. 127-144. Recuperado de: http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf

Alcaraz, A., Figueroa, L. & Cruz, J. (2014). Experiencia de la tutoría de ingreso en las carreras de negocios internacionales, psicología y abogado del centro universitario del sur. En Soto, J.C, Juárez, G., González, K. (coord.). *La innovación en la función tutorial como eje integrador de la acción educativa*. Instituto Tecnológico Superior de Irapuato. 27-30.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios de cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* 97-140. Bogotá: Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares. *Revista Latinoamericana en Matemáticas Educativa*. 1 (1), 40-55.

Azcárate, C., Camacho, M. & Sierra, M. (1999). Perspectivas de investigación en didáctica de las matemáticas: investigación en didáctica del análisis. En Ortega, Tomás (Ed.), *Actas del III SEIEM.* 283-293. Valladolid: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Baquero, R. (1997). La Zona de Desarrollo Próximo y el análisis de las prácticas educativas. *En Vigotsky y el aprendizaje escolar*, Buenos Aires: Aique, segunda edición, 137-159.

Barajas, C. (2015). *Elaboración, Comparación Y Ejercitación de Procedimientos: Una mirada desde la Resolución de Problemas que implican Fenómenos de Variación*. Tesis de maestría no publicada. Instituto Politécnico Nacional. México.

Barringer, M., Pohlman, C. & Robinson, M. (2011) *Schools for all kinds of minds: boosting student success by embracing learning variation.* 139–181, DOI: 10.1002/9781118269367.ch

Bohórquez, M. Ariza, G., & Ocampo, H. (2009). Percepción estudiantil de las tutorías en la Facultad de Psicología de la Universidad Católica de Colombia. *Docencia Universitaria*, 9(1), 31-41. Recuperado de: http://revistas.uis.edu.co/index.php/revistadocencia/article/view/563

Botello, I. C. (2013). *Procesos de seguimiento y acompañamiento académico a estudiantes de cálculo diferencial: un aula experimental para profesores de matemáticas en formación*. Universidad Industrial de Santander, escuela de matemáticas. Tesis de maestría en Educación Matemática. Bucaramanga.

Botello, I. C. & Parada, S. (2013). Tutorías entre pares: un camino potencial para la formación de profesores de matemáticas. *Revista Uni- pluriuniversidad*. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. D.C 13(2), 29-42. ISSN: 1657-4249

Botello, I. C. & Parada, S. (2014). Seguimiento y acompañamiento académico entre pares: una forma para atender el fracaso académico de estudiantes de cálculo diferencial. En Soto,

J.C, Juárez, G., González, K. (coord.). *La innovación en la función tutorial como eje integrador de la acción educativa*. Instituto Tecnológico Superior de Irapuato. 52-56.

Botello, I. C. & Parada, S. (2015). Evaluando el Pensamiento Variacional de estudiantes de recién ingreso a la Universidad. En G. Obando (ed). *16º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Bogotá. CO: Asociación Colombiana de Matemática Educativa.

Brousseau, G. (1989). *Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Construction des savoirs*. Ottawa: CIRADE, 41-63.

Cañedo, C. (2008). *Fundamentos teóricos para la implementación de la didáctica en el proceso enseñanza-aprendizaje*. Universidad Carlos Rafael Rodríguez. Tesis de doctorado. Cienfuegos

Cantoral, R. (2008). Pensamiento Matemático Avanzado: Una revisión de los enfoques a la investigación sobre didáctica del análisis. En *Desarrollo del Pensamiento Matemático,* Capítulo 11. 205 – 218. Editorial Trillas, reimpresión de la 1ª edición de 2000.

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", España. 42, 14(3), 353 – 369. ISSN 1131-9321.

Cantoral, R. & Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. En *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 6(2), 133-154. ISSN 1665-2436. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2092522

Cardozo, C. (2011). Tutoría entre pares como una estrategia pedagógica universitaria. *Revista educación y educadores,* 14(2), 309-325.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in MathematicsEducation*, 33 (5), 352-378.

César, M. (2000). Interacções sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos: a investigação contextualizada. En: Ponte, J. P.; Serrazina, L. (Ed.). *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália: actas da escola de verão em educação matemática 1999*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 5-46.

Chávez, R., & Vargas, C. (2007). El papel de la asesoría académica en el programa de tutorías: caso ITT. *Tiempo de educar*, 8(15), 9-36. ISSN 1665-0824. Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/311/31181502.pdf

Cieza, J. (2011). Experiencia-piloto de implementación de la tutoría entre compañeros (peer tutoring) en el primer curso de la diplomatura en magisterio (especialidad de educación infantil). Trabajo presentado en el *Primer congreso internacional virtual de formación del profesorado*, Salamanca.

Cornu B. (1981) Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propes. *Proceedings PME-V*, Grenoble, France, Vol. I, 322-326.

Corredor, M., Perez, M. & Arbelaéz, R. (2009). *Estrategias de Enseñanza y Aprendizaje*. Bucaramanga: Ediciones UIS

Cuevas, C., Moreno, S. & Pluvinage, F. (2005). Una Experiencia de Enseñanza del Objeto Función. En *Annales de didactique et de sciences connitives*, 10, 177-208.

Cuevas, A., Rodríguez, A. & González, O. (2014). Introducción al concepto de derivada de una función real con apoyo de las tecnologías digitales. En El Cálculo y su Enseñanza. Cinvestav-IPN, Mexico, D. F. 5(5), 157-164.

Davis, R. B., (1988), 'The Interplay of Algebra, Geometry, and Logic', *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 9–28.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P. y Kilpatrick, J. (Eds), *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press, 113-133.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. 173-201. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Falsetti, M., Favieri, A., Scorzo, R. y Williner, B. (2012) Actividades de cálculo diferencial con computadora: estudio de habilidades matemáticas desarrolladas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 13 (1).

Fiallo, J. (2011*). Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica* (Tesis doctoral). Universitat de València, España.

Fiallo, J. & Gutiérrez, A. (2007). Tipos de demostración de estudiantes del grado 10º. En Santander (Colombia). En Camacho, M.; Flores, P.; Bolea, P. (eds.), Actas del XI Simposio de la SEIEM, 355-368.

Fiallo, J. & Parada, S. (2014) Curso de pre-cálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del Pensamiento Variacional. *Revista Científica*. Universidad Distrital. Bogotá, Colombia. 20, 56-71. ISSN 0124-2253

García, G., Serrano, C. & Díaz, H. (2002). *La aproximación: una noción básica en el cálculo*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Godino, J., & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico para maestros.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, 476-786.

González, M., Velasco, C. & González, A. (2014). *La tutoría como estrategia en la formación integral de estudiantes del instituto tecnológico de atitalaquia*. En Soto, J.C, Juárez, G., González, K. (coord.). *La innovación en la función tutorial como eje integrador de la acción educativa*. Instituto Tecnológico Superior de Irapuato. 141-153.

Guitert, M. y Giménez, F. (2000). El trabajo cooperativo en entornos virtuales de aprendizaje, en Duart, J.M. y Sangrà, A. (Eds.), *Aprender en la virtualidad*. Barcelona, Gedisa, 113-134.

Hernández, G. (1999) La zona de desarrollo próximo. Comentarios en torno a su uso en los contextos escolares. *Perfiles Educativos [en linea]*. *(86)* ISSN 0185-2698. Recuperada de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=13208604

Hernández, H., Delgado, J., & Fernández, B. (2001). *Cuestiones de didáctica de la matemática.* Rosario: Homo Sapiens Ediciones.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* .1-27. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. C. Cortés y F. Hitt (Eds*), Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. México.

Imaz, C. y Moreno, L. E. (2010*). La Génesis y la Enseñanza del Cálculo. Las trampas del rigor*. Editorial Trillas, Primera Edición. 100 páginas. ISBN: 978-607-17-0676-8.

Kunsch, C.A., Jitendra, A.K., & Sood, S. (2007). The effects of peer-mediated instruction in mathematics for students with learning problems: A research synthesis. *Learning Disabilities Research & Practice*, 22(1), 1-12.

Liern, V. (2012) *Matemáticas y economía: Ventajas de la cooperación*. XIII Día escolar de las Matemáticas Federación Española de Sociedades de Profesores de Matematicas (FESPM). Recuperado de: https://www.fespm.es/IMG/pdf/dem2012_-_matematicas_y_economia_ventajas_de_la_cooperacion.pdf

Maciel, D. (2003). *A avaliação no processo ensino-aprendizagem de Matemática, no ensino médio: uma abordagem formativa sócio-cognitivista*. Tesis de maestría. Campinas: Editora da Unciamp.

Maldonado, L., Serrano, E., Macías, D., Bernal, R., Rodríguez, G., & Vargas, E. (2009). El acompañamiento como estrategia pedagógica en el aprendizaje exitoso de las matemáticas. *Entre ciencia e ingeniería*, 6, 33-59.

Mason, John (1997). Pensamiento Matemático Avanzado. *Revista EMA*, 2(1), 59-64.

Martín, A., Paralela, C., Romero, E. & Segovia, M. (2009). Mejora de la comprensión del lenguaje matemático mediante una acción tutorial. En actas 17 de XVII Jornadas ASEPUMA, España. Recuperado de: http://urls.my/fQQCp6

Mendiola, M. & Romano, C. (2014). Las Tutorías desde una perspectiva humanista. En Soto, J.C, Juárez, G., González, K. (coord.). *La innovación en la función tutorial como eje integrador de la acción educativa*. Instituto Tecnológico Superior de Irapuato. 268-272.

Ministerio de Educación Nacional MEN. (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá.

MEN. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Bogotá.

MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en Matemáticas.*Colombia. Recuperado de: http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf

MEN (2013). *Destacados Históricos, Estadísticas 2013*. En Cruzar la meta. Recuperado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/w3-article-343426.html

MEN (2015). *Estrategias para la Permanencia en Educación Superior: Experiencias Significativas*. Bogotá.

Miranda, A. (2010). Peer tutoring: aprendiendo entre estudiantes. *Revista Médica UIS*, 23(1), 7-8. ISSN 1794-5240. Recuperado de: http://revistas.uis.edu.co/index.php/revistamedicasuis/article/view/979/1341

Montenegro, E. (1999*). Modelo para la estructuración y formación de habilidades lógicas a través del Análisis Matemático en la Licenciatura en Educación carrera Matemática – Computación.* Tesis en opción del título de master.

Moreno, D. (2015) *Procesos de interpretación y acción de profesores que participan en una comunidad de práctica en la que se realiza el diseño curricular de un curso de precálculo*. Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas. Tesis de Maestría en Educación Matemática, no publicada. Bucaramanga, Colombia.

Moreña, M. (2012). *Influencia de dos Estudiantes Monitores en el Rendimiento Académico en los Estudiantes en el Área Ciencias Naturales-Física.* Universidad Nacional de Colombia. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas Y Naturales no publicada. Manizales.

NCTM. (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Traducción de M. Fernández (Traducción de la versión del 2000 del NCTM). SAEM Thales. Sevilla.

OECD. (2006). *Marco De La Evaluación Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lecturade PISA 2006.* Recuperado de: https://www.oecd.org/pisa/39732471.pdf

Parada, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional*. Tesis de doctorado. Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, México.

Parada, S. (2016). Una estructura curricular para Cálculo Diferencial: alternativa y objeto de estudio. Revista *Enseñanza del Cálculo*. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. 7. 74-87. México D.F. ISSN: 2007-4107.

Parada, S. & Pluvinage, F. (2014) Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa (RELIME*). 17 (1): 1- 31. México. ISSN 1665-2436.

Pólya, G. (1989). Cómo plantear y resolver problemas. México: Editorial Trillas S.A.

Ramos, A., Herrera, J., & Ramírez, M. (2010). Desarrollo de habilidades cognitivas con aprendizaje móvil: un estudio de casos. *Revista Comunicar*. Monterrey, México *17*(34), 201-209. ISSN: 1134-3478. Recuperado de: https://repositorio.itesm.mx/ortec/bitstream/11285/578318/3/Desarrollo+de+habilidades+cognitivas.pdf

Ramos, & Jiménez, (2014) Elementos teóricos para analizar el desarrollo del Pensamiento Variacional en el estudiante. *Revista El cálculo y su enseñanza* 5 (5), 107-124.

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J.; Rico, L. y Gómez, P. (eds.). *Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Richmond, P. G. (2000). Introducción a Piaget. Editorial Fundamentos. Madrid. ISSN 9788424500184

Rigo, M., Rojano, T. y Pluvinage, F. (2011). Las prácticas de justificación en el aula de matemáticas. PNA, 5(3), 93-103.

Rittle-Jhonson, B. Siegler, R. & Wagner, M. (2001). Developing Conceptual Undestanding anf Procedural Skill in Mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*. 93 (2), 346 – 362. Recuperado de: http://www.psy.cmu.edu/~siegler/r-jhnsn-etal-01.pdf

Rittle-Johnson, B. & Schneider, M. (2012). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. En R. Kadosh & A. Dowker (eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition. Oxford Press.*

Rodríguez, D. (2013). El diagnóstico de la amplitud de la zona de desarrollo próximo: Una experiencia cubana. *Revista Psicoespacios*. 7 (11), 307-347. ISSN 2145-2776 Recuperado de: http://revistas.iue.edu.co/index.php/Psicoespacios

Rodríguez, S, & Belladona, S, (2006) *La lecto-escritura en matemática*. Universidad Nacional del Comahue - Patagonia – Argentina. Recuperado de: http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem06/memorias/comunicaciones/Reflexiones/CRG1.pdf

Rodríguez, Carnelli, Formica, (2005). Una evaluación de habilidades matemáticas. *En Revista SUMA*. 48. 33-43. Recuperado de: https://revistasuma.es/IMG/pdf/48/033-043.pdf

Rojas, C. (2008). Reconstrucción del concepto de derivada en docentes de matemáticas. Tesis de Especialización no publicada. Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Rueda, N. (2016). *Habilidades Cognitivas Asociadas al Proceso de Representación de Fenómenos de Variación*. Tesis de Maestría en Educación Matemática, no publicada. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

Rueda, N., Parada, S., & Fiallo, J. (2015). Habilidades inherentes al pensamiento variacional de estudiantes de nuevo ingreso a la universidad. En memorias de la *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática CIAEM*. Tuxtla Gutiérrez, México, 3-7 mayo. Recuperado en: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/900/375

Santamaría, A.M. y Parada, S.E. (2016). Habilidades procedimentales en Cálculo Diferencial desarrolladas por la interacción entre pares académicos. *Revista Electrónica de Matemáticas. SAHUARUS*. 1(2): ISSN 2448-5365.

Star, J. R. (2004). Flexibility in the use of mathematical procedures. *Proposal submitted to the College of Education In-house Grant Program*. Michigan State University College of Education Seed Grant. Recuperado de: http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic654816.files/StarSeed.pdf

Suárez, S.R. & Rojas, S.J. (2013). *Experiencias didácticas con estudiantes de once grado alrededor de sus competencias comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad*. Trabajo de grado. Universidad Industrial de Santander. Colombia.

Tall, D. (Ed) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer. volumen 11, 306 páginas.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition. *En Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics*, No 12, 151-169.

UIS. (2014). Sistema de Apoyo a la Excelencia Académica, SEA. Colombia. Recuperado de https://www.uis.edu.co/webUIS/es/estudiantes/excelenciaAcademica/Cartilla%20SEA.pdf

UIS. (2014). Rendición de cuentas del segundo año de gestión rectoral 2014-2015. Recuperado de https://www.uis.edu.co/webUIS/es/administracion/rectoria/documentos/rendicionDeCuentas2014/rendicionCuentasV18.pdf

Valery, O. (2000). Reflexiones sobre la escritura a partir de Vigostky. *Educere*. Año 3, Nº 9, junio, 2000. Universidad de los Andes.

Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En Vasco, C. *Didáctica de las matemáticas*: *artículos selectos.* 134-148. Bogotá: Editorial Universidad Pedagógica Nacional. ISBN: 958-8226-85-6.

Vicerrectoría Académica (2011). *Diagnóstico de las causas de deserción y retención estudiantil en los programas de pregrado presencial de la Universidad Industrial de Santander*. Documento interno no publicado de la Vicerrectoría Académica de la UIS, Bucaramanga.

Vygotsky L. (1979), *El desarrollo de las funciones psicológicas superiores*, Barcelona, Grijalbo (publicado en inglés en 1978).

Vygotsky L. (1993), "Pensamiento y lenguaje", en *L. S. Vigotsky, Obras escogidas,* vol. II, Madrid, Visor (publicado en ruso por primera vez en 1934).

Vrancken, S. Engler, A. Giampieri, M. & Müller, D. (2014) Estudio de las funciones en situaciones variacionales. Resultados de la implementación de una secuencia de actividades. *Matemática, Educación e Internet, 15*(1), 1-20. Recuperado de: http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/ARTICULOS_V15_N1_2014/RevistaDigital_Vranckeen_V15_n1_2014/index.html

Williner, B. (2014). Habilidades matemáticas referidas el concepto de Derivada y uso de tecnología. En *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas.* 87, 101-124 ISSN: 1887-1984. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/87/Articulos_07.pdf