TEOREMA DE KAPLANSKY SOBRE ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS.

LAURA MILENA VARGAS GONZALEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2018

TEOREMA DE KAPLANSKY SOBRE ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS.

LAURA MILENA VARGAS GONZALEZ

Trabajo de grado como requisito para optar al título de:

Matemática

Director:

MICHAEL ALEXANDER RINCÓN VILLAMIZAR

Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2018

"Hay una ley de vida, cruel y exacta,
que afirma que uno debe crecer o, en caso contrario,
pagar más por seguir siendo el mismo"
Norman Mailer

Agradecimientos

En primera instancia quiero agradecer a mis padres por su inmenso apoyo y amor, por ayudarme a perseguir mis sueños y ser mi fuente de motivación. También quiero dar las gracias al profesor Dr. Michael Alexander Rincón Villamizar por su incalculable dedicación y compromiso con mi trabajo, por su paciencia, y todo lo que me permitió aprender de él como persona y matemático a lo largo de este año bajo su dirección.

Por último, quiero expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que formaron parte de mi vida en estos años de aprendizaje, a mis amigos, compañeros de carrera y profesores. Llevo conmigo las experiencias vívidas, su cariño y gratos recuerdos.

Contenido

RESUMEN

TÍTULO: TEOREMA DE KAPLANSKY SOBRE ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS. [1]

AUTOR: LAURA MILENA VARGAS GONZALEZ.[2]

PALABRAS CLAVES: RETÍCULOS DE BANACH, TEOREMA DE KAPLANSKY, SUBESPACIOS ADECUADOS, ISOMORFISMOS DE ORDEN, ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS, COMPACTIFICACIONES.

DESCRIPCIÓN:

El objetivo de este trabajo es dar una prueba de una generalización del teorema de Kaplansky propuesta por los profesores Denny Leung y Lei Li en el 2013 (ver [12]) para los casos compacto y completamente regular (y Hausdorff).

En el primer capítulo (preliminares) se introducen los conceptos de retículo de Banach, subretículo de Banach y se presentan ejemplos importantes para el desarrollo del trabajo como es el caso del retículo $\mathcal{C}_0(X)$ donde X es un espacio localmente compacto Hausdorff. En el segundo capítulo se enuncia y demuestra el teorema principal. Además, se demuestran, como consecuencia de este resultado, los teoremas de Banach-Stone y Gelfand-Kolmogorov.

En el tercer capítulo, dado un espacio completamente regular (y Hausdorff) X, se muestra como realizar una compactificación del espacio X en términos de un subespacio vectorial $\mathcal{A}(X)$ de $\mathcal{C}(X)$, donde $\mathcal{C}(X)$ es el espacio de las funciones continuas definidas sobre X en el conjunto de los reales. Se presentan un tipo importante de subespacios de $\mathcal{C}(X)$ que se denominan adecuados. Luego se enuncia otra generalización del teorema de Kaplansky para el caso en que X e Y son espacios completamente regulares (y Hausdorff), y se presenta una prueba haciendo uso del teorema principal.

Finalmente, en el cuarto capítulo se comentan algunos problemas abiertos relacionados con el teorema de Kaplansky. También se muestra, mediante un ejemplo, que el teorema de Kaplansky no vale en general para el retículo de Banach $\mathcal{C}(X, E)$ donde X es un espacio compacto y E un retículo de Banach.

[1] Trabajo de grado.

[2] Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Michael Alexander Rincón Villamizar.

ABSTRACT

TITLE: KAPLANSKY'S THEOREM ON CONTINUOUS FUNCTION SPACES. [3]

AUTOR: LAURA MILENA VARGAS GONZALEZ. [4]

KEY WORDS: BANACH LATTICES, KAPLANSKY'S THEOREM, ADEQUATE SUBESPACES, ORDEN ISOMORPHISMS, SPACES OF CONTINUOUS FUNCTIONS, COMPACTIFICATIONS.

DESCRIPTION:

The aim of this paper is to give a proof of a generalization of Kaplansky's theorem proposed by professors Denny Leung and Lei Li in 2013 (see [12]) for the compact and completely regular (and Hausdorff) cases .

In the first chapter (preliminary) are given a brief introduction to Banach lattices and sublattices. Also, an important example as is the Banach lattice $\mathcal{C}_0(X)$, where X is a locally compact Hausdorff space, is shown. The second chapter is where the main theorem is announced and demonstrated. In addition, the theorems of Banach-Stone and Gelfand-Kolmogorov are shown as a consequence of this result.

The third chapter shows how to make a compactification of X in terms of a vector subspace $\mathcal{A}(X)$ of $\mathcal{C}(X)$, where X is a completely regular (and Hausdorff) space and $\mathcal{C}(X)$ is the space of all real-valued continuous functions defined on X. An important type of subspaces of $\mathcal{C}(X)$ which are called adequate are introduced. Also, another generalization of Kaplansky's theorem for the case in which X and Y are completely regular (and Hausdorff) spaces is presented, and a proof for this generalization using the main theorem is given.

Finally, in the fourth chapter we discuss some open problems related to Kaplansky's theorem. It is also shown, by an example, that Kaplansky's theorem is not generally valid for the Banach lattice $\mathcal{C}(X, E)$ where X is a compact space and E is any Banach lattice.

[3] Grade work.

[4] School of Mathematics. Faculty of Sciences. Universidad Industrial de Santander. Director: Michael Alexander Rincón Villamizar.

INTRODUCCIÓN

Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff y E un espacio de Banach. Diremos que $f\colon X \to E$ se anula en el infinito si el conjunto $\{x \in X \,:\, \|f(x)\| \geq \varepsilon\}$ es compacto para cualquier $\varepsilon > 0$. Denotamos por $\mathcal{C}_0(X, E)$ el espacio de funciones continuas de X en E que se anulan en el infinito junto con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| \,:\, x \in X\}.$$

En el caso en que E es un cuerpo de escalares, este espacio será denotado por $\mathcal{C}_0(X)$. Cuando X es compacto, estos espacios serán denotados por $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(X, E)$, respectivamente.

Es natural preguntar si la estructura del espacio de Banach $\mathcal{C}_0(X)$ está relacionada con la estructura topológica de X.

En 1933, Banach en su monografía [1] demostró que si X y Y son espacios métricos compactos y $\mathcal{C}(X)$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{C}(Y)$, entonces X y Y son homeomorfos. En 1937, Stone [14] probó este teorema para espacios compactos arbitrarios. En 1979, Behrends [2] demuestra que la misma conclusión del teorema vale para los espacios $\mathcal{C}_0(X)$ cuando X es localmente compacto Hausdorff. Así pues, el teorema de Banach-Stone puede resumirse diciendo que la estructura isométrica del espacio de funciones continuas $\mathcal{C}_0(X)$ determina la topología de X. Luego, en 1939, Gelfand y Kolmogorov [10] demuestran que si X e Y son espacios compactos Hausdorff y existe $T\colon \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ isomorfismo algebraico (es decir, isomorfismo de anillos) entonces X y Y son homeomorfos.

Por otro lado, observe que el espacio de funciones continuas $\mathcal{C}_0(X)$ admite una estructura de retículo de Banach (para una definición de este concepto, vea [13, pág. 69]). Basta definir, para $f \in \mathcal{C}_0(X)$, $f \geq 0$ si y solo si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Por lo tanto, es natural preguntarse si la estructura de retículo de Banach de $\mathcal{C}_0(X)$ también determina la topología de X.

En 1947, Kaplansky prueba que si $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(Y)$ son isomorfos como retículos de Banach, entonces X e Y son homeomorfos [11]. Más aún, en [11] se prueba que los teoremas de Banach-Stone y Gelfand-Kolmogorov pueden ser deducidos a partir del teorema de Kaplansky. Por otra parte, en 1960, Geba y Semadeni mostraron que si T es una isometría (no necesariamente sobreyectiva) definida de $\mathcal{C}(X)$ en $\mathcal{C}(Y)$ tal que $Tf \geq 0$ si, y solo si, $f \geq 0$ entonces X es imagen continua de un subespacio cerrado de Y [8]. Recientemente, D. Leung y L. Li en [12] extendieron el teorema de Kaplansky para ciertos subespacios vectoriales de $\mathcal{C}(X)$.

Como se ve en los resultados mencionados anteriormente, la topología del X está intimamente relacionada con la estructura isométrica (o de retículo) del espacio de funciones continuas $\mathcal{C}_0(X)$. Esto nos da pie para indagar sobre la siguiente pregunta:

Pregunta. Si $\mathcal{C}_0(X, E)$ está relacionado como espacio de Banach (o como retículo de Banach) a $\mathcal{C}_0(Y, E)$, ¿cómo están topológicamente relacionados los espacios X e Y?

Es conocido que la validez de los teoremas de Banach-Stone y Kaplansky para el espacio $\mathcal{C}_0(X, E)$ dependen de la estructura geométrica del espacio E. Note que el espacio $\mathcal{C}_0(X, E)$ también admite una estructura de retículo de Banach desde que E también posea dicha estructura. En efecto, para $f \in \mathcal{C}_0(X, E)$ definimos $f \geq 0$ si y solo si $f(x) \geq 0$ para cada $x \in X$.

En 2009, los matemáticos Jin Xi Chen, Zi Li Chen y Ngai-Ching Wong probaron que si E es un retículo de Banach y $T : \mathcal{C}(X, E) \to \mathcal{C}(Y, E)$ es un isomorfismo de retículos con la propiedad adicional que $0 \notin f(X)$ si y solo si $0 \notin Tf(Y)$ para todo $f \in \mathcal{C}(X, E)$, entonces X e Y son homeomorfos [3]. Como lo muestra el ejemplo dado en [3, Ejemplo 4], la hipótesis adicional sobre el isomorfismo T en el teorema previamente mencionado es esencial.

En 2016, M. A. Rincón Villamizar y E. M. Galego probaron que si X e Y son intervalos de ordinales y E es un espacio de Banach satisfaciendo ciertas condiciones geométricas, la existencia de un isomorfismo de retículos entre $\mathcal{C}(X, E)$ y $\mathcal{C}(Y, E)$, implica que X e Y son homeomorfos [7]. Notemos que en este teorema, el isomorfismo T no satisface hipótesis adicionales a diferencia del resultado probado en [3]. Sin embargo, no se sabe si tal teorema puede ser extendido para otra clase de espacios compactos Hausdorff.

El objetivo de este trabajo de grado es dar una prueba de una generalización del teorema de Kaplansky obtenida los profesores D. Leung y L. Li [12]. Como consecuencia de este resultado se deducirán los teoremas de Banach-Stone y Gelfand-Kolmogorov.

El trabajo está organizado en la siguiente forma: en el Capítulo 1 establecemos los preliminares que permitirán el desarrollo de los resultados estudiados. En el Capítulo 2, damos una prueba detallada del resultado principal de [12]. En el Capítulo 3, estudiamos una generalización del teorema de Kaplansky para el caso no compacto. Finalmente, en el Capítulo 4 se comentarán algunos problemas abiertos relacionados con el teorema de Kaplansky.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En este capítulo presentaremos los requisitos necesarios para el desarrollo del trabajo.

1.1 RETÍCULOS DE BANACH

Definición 1.1. Un *espacio de Banach* E es un espacio normado el cual es completo con la métrica inducida por la norma.

A lo largo de este trabajo solo consideraremos espacios de Banach sobre $\mathbb{R}$.

Definición 1.2. Un retículo de Banach es un espacio de Banach real E junto con un orden parcial $\leq$ que satisface las siguientes propiedades:

- Si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in E$;
- dados $a \in \mathbb{R}$ y $x \in E$ con $a \geq 0$ y $x \geq 0$, tenemos $ax \geq 0$;
- para cada $x, y \in E$, existen $x \vee y := \sup\{x, y\}$ y $x \wedge y := \text{ínf}\{x, y\}$;
- si $|x| \leq |y|$, entonces $\|x\| \leq \|y\|$, donde el módulo de $x \in E$, denotado por $|x|$, se define como $|x| := x \vee (-x)$.

Por conveniencia denotaremos $x \geq y$ para indicar que $y \leq x$.

Ejemplo 1.3. Dado $1 \leq p < \infty$, sea

$$\ell_p = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \, : \, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\}.$$

Para cada $x = (x_n) \in \ell_p$ definamos

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

La función $\|\cdot\|_p$ es una norma en el espacio ℓ_p. Es fácil ver que $(\ell_p, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Más aún, $(\ell_p, \|\cdot\|)$ es un retículo de Banach. Aquí el orden parcial es definido como sigue: dados $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in \ell_p$, diremos que $x \leq y$ si $x_n \leq y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un retículo de Banach. Un subespacio cerrado B de E es un *subretículo* si dados $a, b \in B$ se tiene que $a \vee b \in B$ y $a \wedge b \in B$.

Ejemplo 1.5. Considere el espacio de Banach $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{max})$. Dados $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, definimos $x \leq y$ si $x_1 \leq y_1$ y $x_2 \leq y_2$. Es fácil mostrar que $(\mathbb{R}^2, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. El espacio $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\text{máx}})$ junto con este orden es un retículo de Banach. Note que el subespacio $B = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ es un subretículo de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\text{máx}})$.

1.2 EL RETÍCULO $\mathcal{C}_0(X)$

Se enuncian a continuación algunas definiciones y lemas que son importantes para el desarrollo de los siguientes capítulos.

Definición 1.6. Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff. Se dice que $f \colon X \to \mathbb{R}$ se anula en infinito si dado $\epsilon > 0$, el conjunto $V_\epsilon(f) = \{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\}$ es compacto. El conjunto de todas las funciones de X en $\mathbb{R}$ continuas y que se anulan en infinito será denotado por $\mathcal{C}_0(X)$.

Cuando X es compacto, es común denotar $\mathcal{C}_0(X)$ por $\mathcal{C}(X)$. Si $f \in \mathcal{C}_0(X)$, definimos

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Lema 1.7. *Sea $f \in \mathcal{C}_0(X)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f se anula en el infinito;*
2. *Para todo $\epsilon > 0$ existe $F \subseteq X$ compacto tal que $|f(u)| < \epsilon$ si $u \in X \setminus F$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}_0(X)$ tal que f se anula en el infinito. Dado $\epsilon > 0$, definimos $F = \{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\}$. Por hipótesis F es un subespacio compacto de X y $|f(u)| < \epsilon$ para cualquier $u \in X \setminus F$. Por otro lado, sea $\epsilon > 0$ entonces existe $F \subseteq X$ compacto tal que $|f(u)| < \epsilon$ si $u \in X \setminus F$. Luego $V_\epsilon(f) \subseteq F$. Como $V_\epsilon(f)$ es cerrado y F es compacto, $V_\epsilon(f)$ es compacto. Así, f se anula en el infinito. $\square$

Lema 1.8. *El conjunto $\mathcal{C}_0(X)$, junto con las operaciones de suma y multiplicación por escalar usuales, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración. Primero se probará que el espacio $\mathcal{C}_0(X)$ es cerrado bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalares. Sean $f, g \in \mathcal{C}_0(X)$, $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$ dado. Entonces f y g son continuas en x_0. Para $\epsilon/2 > 0$ existen U y U' abiertos de X con $x_0 \in U \cap U'$ tales que

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon/2, \quad \text{si } x \in U \quad \text{y} \quad |g(x) - g(x_0)| < \epsilon/2, \quad \text{si } x \in U'.$$

Ahora, el conjunto $M = U \cap U'$ es un abierto de X con $x_0 \in M$ y además

$$f(x) + g(x) \in (f(x_0) + g(x_0) - \epsilon, f(x_0) + g(x_0) + \epsilon) \quad \text{si } x \in M.$$

Concluimos que la función $f+g$ es continua en x_0. Ahora, sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Como f es continua en x_0 para $\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{|\lambda|+1} > 0$ existe U abierto de X con $x_0 \in U$ tal que

$$f(x) \in (f(x_0) - \epsilon_0, f(x_0) + \epsilon_0) \quad \text{si } x \in U.$$

Así, $\lambda f(x) \in (\lambda f(x_0) - \epsilon, \lambda f(x_0) + \epsilon)$ si $x \in U$. Concluimos que λf es continua en x_0.

Finalmente, probemos que si f y g se anulan en el infinito, entonces las funciones $f + g$ y λf, $\lambda \in \mathbb{R}$, también se anulan en infinito. Por el lema anterior para $\epsilon/2 > 0$ existen subconjuntos F_1 y F_2 compactos de X tales que

$$|f(u)| < \epsilon/2 \quad \text{si } u \in X \setminus F_1 \quad \text{y} \quad |g(u)| < \epsilon/2 \quad \text{si } u \in X \setminus F_2.$$

Sea $F' = F_1 \cap F_2$. Entonces F' es compacto de X tal que

$$|f(u)| < \epsilon/2 \quad \text{y} \quad |g(u)| < \epsilon/2, \quad \text{si } u \in X \setminus F'.$$

Sigue que,

$$|f(u) + g(u)| < \epsilon, \quad \text{si } u \in X \setminus F'.$$

Por el lema anterior tenemos que $f + g$ se anula en el infinito. Por otro lado, sea $\lambda \in \mathbb{R}$.

Por el Lema 1.7 existe un subconjunto compacto F de X tal que

$$|f(u)| < \frac{\epsilon}{|\lambda| + 1}, \quad \text{si } u \in X \setminus F,$$

De modo que $|\lambda f(u)| < \epsilon$ si $u \in X \setminus F$. El Lema 1.7 implica que λf se anula en el infinito. Concluimos que las funciones $f + g$ y λf pertenecen al espacio $\mathcal{C}_0(X)$. Es claro que el conjunto $\mathcal{C}_0(X)$, con las operaciones de suma y multiplicación por escalar usuales, cumple con los axiomas de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. $\square$

Lema 1.9. *La función* $\|\cdot\|_\infty \colon \mathcal{C}_0(X) \to \mathbb{R}$ *es una norma.*

Demostración. Primero se probará que la función $\|\cdot\|_\infty$ está bien definida, es decir, que para cualquier $f \in \mathcal{C}_0(X)$ tenemos que $\|f\|_\infty$ existe. Para esto, probaremos que el conjunto $\{|f(x)| : x \in X\}$ está acotado superiormente.

Sea $f \in \mathcal{C}_0(X)$ dada y fijemos $\epsilon_0 > 0$. Puesto que f se anula en el infinito, el conjunto $V_{\epsilon_0}(f)$ es compacto. Por la continuidad de f el conjunto $f(V_{\epsilon_0}(f))$ es un compacto de $\mathbb{R}$. Luego $f(V_{\epsilon_0}(f))$ está acotado, y por tanto, existe $0 < M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para cada $x \in V_{\epsilon_0}(f)$. Sea $x \in X \setminus V_{\epsilon_0}(f)$ entonces $|f(x)| < \epsilon_0$. Así $|f(x)| \leq \max = \{M, \epsilon_0\}$ para cualquier $x \in X$.

Veamos que $\|\cdot\|_\infty$ es norma.

1. Puesto que $|f(x)| \geq 0$ para cada $x \in X$ tenemos $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \geq 0$.
2. $\|\lambda f\|_\infty = \sup\{|\lambda f(x)| : x \in X\} = \sup\{|\lambda||f(x)| : x \in X\} = |\lambda|\|f\|_\infty$.
3. $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup\{|f(x)| : x \in X\} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ para cada $x \in X \Leftrightarrow f = 0$.
4. Sean $f, g \in C_0(X)$. Sabemos que $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ para cada $x \in X$. Luego

$$\begin{aligned}\sup\{|f(x) + g(x)| : x \in X\} &\leq \sup\{(|f(x)| + |g(x)|) : x \in X\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| : x \in X\} + \sup\{|g(x)| : x \in X\}.\end{aligned}$$

   Esto demuestra que $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. $\square$

Proposición 1.10. *El espacio* $(\mathcal{C}_0(X), \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Por los Lemas 1.8 y 1.9 solo resta probar que el espacio $\mathcal{C}_0(X)$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ es completo.

Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}_0(X)$. Observe que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, para cada $x \in X$. Como $\mathbb{R}$ es un espacio completo, la sucesión de

Cauchy $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente para cada $x \in X$. Entonces para cada $x \in X$, existe $f(x) \in \mathbb{R}$ de modo que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Se demostrará que dicha f es la función a la que converge la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la norma de $\mathcal{C}_0(X)$. Para esto, se probarán tres cosas:

Afirmación 1.11. La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $\mathcal{C}_0(X)$.

Puesto que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}_0(X)$, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$ si $n, m > N$. De modo que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \quad \text{para cualesquiera } x \in X \text{ y } n, m > N.$$

Como $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$ para cada $x \in X$, tenemos

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon, \quad \text{si } n > N.$$

La arbitrariedad de $x \in X$ implica que $\|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon$, si $n > N$.

Afirmación 1.12. f es continua.

Sea $x_0 \in X$ y veamos que f es continua en x_0. Por la afirmación anterior, para $\epsilon/3 > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_\infty < \epsilon/3, \quad \text{si } n \geq N.$$

Entonces $|f_N(x) - f(x)| < \epsilon/3$ para cada $x \in X$. Note que f_N es continua en x_0. Así, para $\epsilon/3 > 0$ existe U abierto de X con $x_0 \in U$ tal que

$$f_N(u) \in (f_N(x_0) - \epsilon/3, f_N(x_0) + \epsilon/3), \quad \text{si } u \in U.$$

Ahora, veamos que $f(u) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$, para cada $u \in U$. Dado $u \in U$ tenemos

$$|f(u) - f(x_0)| = |f(u) - f_N(u) + f_N(u) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)|.$$

Observe que

$$|f(u) - f_N(u)| < \epsilon/3, \quad |f_N(x_0) - f(x_0)| < \epsilon/3 \quad \text{y} \quad |f_N(u) - f_N(x_0)| < \epsilon/3.$$

De esta forma

$$|f(u) - f(x_0)| < \epsilon, \quad \text{si } u \in U.$$

Concluimos que f es continua en x_0.

Afirmación 1.13. f se anula en el infinito.

Sea $\epsilon > 0$ dado. Por la Afirmación 1.11, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/2, \quad \text{para cada } x \in X.$$

Note que para cada $x \in X$ tenemos

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \\ &< \epsilon/2 + |f_N(x)|. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$V_\epsilon(f) = \{x \in X : \ |f(x)| \geq \epsilon\} \subseteq V_{\epsilon/2}(f_N) = \{x \in X : \ |f_N(x)| \geq \epsilon/2\}.$$

Puesto que $V_\epsilon(f)$ es cerrado y $V_{\epsilon/2}(f_N)$ es compacto concluimos que $V_\epsilon(f)$ es compacto. Así f se anula en el infinito. $\square$

Observación 1.14. El espacio de Banach $C_0(X)$ admite estructura de retículo, definiendo $f \geq g$ si y solamente si $f(x) \geq g(x)$ para cada $x \in X$. Es fácil mostrar que con este orden parcial, $(\mathcal{C}_0(X), \|\cdot\|_\infty)$ es un retículo de Banach.

En adelante la norma $\|\cdot\|_\infty$ será denotada simplemente por $\|\cdot\|$.

Capítulo

2

ISOMORFISMOS DE ORDEN ENTRE ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS

El objetivo principal de este capítulo es dar una prueba del teorema de Leung (Teorema 2.4), el cual es una generalización del teorema de Kaplansky. Como consecuencia de este teorema se demostrarán tres teoremas clásicos de la teoría de espacios de funciones continuas: el Teorema de Banach, el Teorema de Kaplansky y el Teorema de Gelfand-Kolmogorov.

2.1 UNA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE KAPLANSKY

En esta sección probaremos el teorema de Leung. Empezaremos introduciendo una clase importante de subespacios de $\mathcal{C}(X)$.

Definición 2.1. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{A}(X)$ un subespacio vectorial de $\mathcal{C}(X)$. Diremos que $\mathcal{A}(X)$ *separa puntos de conjuntos cerrados* si dados $x \in X$ y $F \subset X$ cerrado con $x \notin F$, existe $f \in \mathcal{A}(X)$ tal que $f(x) = 1$ y $f(w) = 0$ para cualquier $w \in F$. Si, además, f puede ser escogida de modo que $0 \leq f \leq 1$, diremos que $\mathcal{A}(X)$ *separa puntos de cerrados con precisión*.

Observación 2.2. Notemos que cualquier subretículo de $\mathcal{C}(X)$ que separa puntos de cerrados, separa puntos de cerrados con precisión. Para verificar esto, basta observar que si $\mathcal{A}(X)$ es un subreticulo que separa puntos de cerrados y $f \in \mathcal{A}(X)$, $f \neq 0$, la función $g = |f|/\|f\|$ está en $\mathcal{A}(X)$ y $0 \leq g \leq 1$.

Definición 2.3. Sean $\mathcal{A}(X)$ y $\mathcal{A}(Y)$ subespacios de $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(Y)$, respectivamente. Diremos que una biyección lineal $T\colon \mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}(Y)$ es un isomorfismo de orden si $Tf \geq 0$

si y solo si $f \geq 0$.

A continuación enunciaremos el teorema principal de este capítulo.

Teorema 2.4. *Sean X, Y espacios compactos Hausdorff y sean $\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)$ subespacios de $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(Y)$, respectivamente, que contienen las funciones constantes y que separan puntos de conjuntos cerrados con precisión. Si $T\colon \mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}(Y)$ es un isomorfismo de orden, entonces existe un homeomorfismo $h\colon X \to Y$ tal que $Tf = T1_X \cdot f \circ h^{-1}$ para cualquier $f \in \mathcal{A}(X)$.*

Dividiremos la prueba en una serie de proposiones. Antes de empezar con la prueba, introduciremos la siguiente notación: Dada $f\colon X \to \mathbb{R}$, definimos

$$Z(f) = \{x \in X \,:\, f(x) = 0\}.$$

A lo largo de esta prueba, suponemos que $T\colon \mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}(Y)$ es un isomorfismo de orden.

Proposición 2.5. *Para cualquier $x_0 \in X$, la familia*

$$\mathcal{Z}(x_0, T, X) = \{Z(Tf) \,:\, f \in \mathcal{A}(X), f \geq 0, f(x_0) = 0\}$$

tiene la propiedad de intersección finita.

Demostración. Sean $f_1, ..., f_n \in \mathcal{A}(X)$ con $f_i \geq 0$ y $f_i(x_0) = 0$, $1 \leq i \leq n$. Definimos

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i.$$

Entonces $f \in \mathcal{A}(X), f \geq 0$ y $f(x_0) = 0$. Probaremos que $Z(Tf) \neq \emptyset$. Supongamos que $Z(Tf) = \emptyset$, entonces $(Tf)(y) > 0$ para todo $y \in Y$.

Afirmación 2.6. Existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $y \in Y$ tenemos $Tf(y) > \epsilon_0$.

Sea $y \in Y$, entonces existe $\epsilon_y > 0$ tal que $Tf(y) > \epsilon_y > 0$. Por la continuidad de Tf en y para $\epsilon = Tf(y) - \epsilon_y > 0$ existe un abierto U_y de Y con $y \in U_y$ tal que

$$Tf(U_y) \subseteq (Tf(y) - \epsilon, Tf(y) + \epsilon).$$

Es decir,

$$|Tf(u) - Tf(y)| < \epsilon, \quad \text{para cada } u \in U_y.$$

Sigue que

$$Tf(u) > \epsilon_y, \quad \text{para cada } u \in U_y.$$

Considere ahora la colección $\{U_y\}_{y\in Y}$. Note que esta colección es una cobertura abierta de Y. Por la compacidad de Y, se tiene que $Y = \bigcup_{j=1}^{m} U_{y_j}$ para algunos $y_1, ..., y_m \in Y$. Defina $\epsilon_0 = \min\{\epsilon_{y_j} : 1 \leq j \leq m\} > 0$. Dado $w \in Y$, tenemos $w \in U_{y_{j_0}}$ para algún $j_0 \in \{1, ..., m\}$. Luego, $Tf(w) > \epsilon_{y_{j_0}} > \epsilon_0$. Esto prueba la afirmación.

Mostraremos ahora que $Tf \geq \frac{\epsilon_0}{\|T1_X\|}T1_X$. Supongamos que existe y' en Y tal que $(Tf - \frac{\epsilon_0}{\|T1_X\|}T1_X)(y') < 0$. Esto implica que

$$Tf(y') - \frac{\epsilon_0}{\|T1_X\|}T1_X(y') < 0, \quad \text{y así} \quad Tf(y') < \epsilon_0,$$

lo cual contradice la afirmación anterior.

De modo que, si $\epsilon = \frac{\epsilon_0}{\|T1_X\|}$ entonces $Tf(y) - \epsilon T1_X(y) \geq 0$ para toda $y \in Y$. Luego

$$T(f - \epsilon 1_X)(y) \geq 0 \quad \text{para toda } y \in Y,$$

y como T es isomorfismo de orden, tenemos

$$(f - \epsilon 1_X)(x) \geq 0, \quad \text{para toda } x \in X,$$

lo cual es absurdo, pues f tiene un cero en x_0. De esta manera debe existir $y_0 \in Y$ tal que $Tf(y_0) = 0$, y como

$$Tf(y_0) = T\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)(y_0) = \sum_{i=1}^{n} Tf_i(y_0),$$

se concluye que $Tf_i(y_0) = 0$ para $1 \leq i \leq n$, pues $Tf_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq n$.

Concluimos que y_0 pertenece a cada $Z(Tf_i)$, y por tanto la colección $\mathcal{Z}(x_0, T, X)$ tiene la propiedad de intersección finita. □

Observación 2.7. Para cada $y_0 \in Y$ definimos

$$\mathcal{Z}(y_0, T^{-1}, Y) = \{Z(T^{-1}f) : f \in \mathcal{A}(Y), f \geq 0, f(y_0) = 0\}.$$

Se prueba de manera análoga que la familia $\mathcal{Z}(y_0, T^{-1}, Y)$ tiene la propiedad de intersección finita.

Por la compacidad de los espacios X e Y y la proposición anterior, los conjuntos $\bigcap \mathcal{Z}(x_0, T, X)$

y $\bigcap \mathcal{Z}(y_0, T^{-1}, Y)$ son no vacíos para cualquier $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$. El siguiente resultado establece una relación de reciprocidad entre estos conjuntos.

Proposición 2.8. *Sean $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$. Entonces $y_0 \in \bigcap \mathcal{Z}(x_0, T, X)$, si y solo si, $x_0 \in \bigcap \mathcal{Z}(y_0, T^{-1}, Y)$.*

Demostración. Supongamos que $y_0 \in \bigcap \mathcal{Z}(x_0, T, X)$ y $x_0 \notin \bigcap \mathcal{Z}(y_0, T^{-1}, Y)$. Por la Proposición 2.5, existe $x_1 \in \bigcap \mathcal{Z}(y_0, T^{-1}, Y)$. Note que $x_1 \neq x_0$ y como X es Hausdorff y $\mathcal{A}(X)$ separa puntos de cerrados con precisión, existe $f \in A(X)$ con $0 \leq f \leq 1$ tal que $f(x_0) = 0$ y $f(x_1) = 1$. Por otra parte, dado que $y_0 \in \bigcap \mathcal{Z}(x_0, T, X)$ entonces $Tf(y_0) = 0$. Si $g = Tf$, entonces $g \geq 0$ y $g(y_0) = 0$. Como $x_1 \in \bigcap \mathcal{Z}(y_0, T^{-1}, Y)$ sigue que $T^{-1}g(x_1) = 0$, donde $g = Tf$ y por tanto $f(x_1) = 0$, lo cual contradice la afirmación anterior.

Para la otra implicación supongamos que $x_0 \in \bigcap \mathcal{Z}(y_0, T^{-1}, Y)$ y $y_0 \notin \bigcap \mathcal{Z}(x_0, T, X)$. Por la Proposición 2.5, existe $y_1 \in \bigcap \mathcal{Z}(x_0, T, X)$. Observe que $y_1 \neq y_0$, y como $\mathcal{A}(Y)$ separa puntos de cerados, existe $g \in \mathcal{A}(Y)$ con $0 \leq g \leq 1$ tal que $g(y_0) = 0$ y $g(y_1) = 1$. Por hipótesis, $x_0 \in \bigcap \mathcal{Z}(y_0, T^{-1}, Y)$ implica que $T^{-1}g(x_0) = 0$. Si $f = T^{-1}g$ entonces $f \geq 0$ y $f(x_0) = 0$. Además, como $y_1 \in \bigcap \mathcal{Z}(x_0, T, X)$, entonces $Tf(y_1) = 0$ y reemplazando $g(y_1) = 0$, lo cual es absurdo. Esto completa la prueba del resultado. $\square$

Proposición 2.9. *Para cada $x \in X$, el conjunto $\bigcap \mathcal{Z}(x, T, X)$ contiene un único punto.*

Demostración. Sea $x \in X$ dado y $y_1, y_0 \in \bigcap \mathcal{Z}(x, T, X)$ con $y_1 \neq y_0$. Como $\mathcal{A}(Y)$ separa puntos de cerrados, existe $g \in \mathcal{A}(Y)$ tal que $g(y_1) = 1$ y $g(y_0) = 0$. Dado que $y_0 \in \bigcap \mathcal{Z}(x, T, X)$, por la proposición anterior, $x \in \bigcap \mathcal{Z}(y_0, T^{-1}, Y)$ entonces $T^{-1}g(x) = 0$, y haciendo $f = T^{-1}g$ se cumple que $f \geq 0$ y $f(x) = 0$. Ahora, $y_1 \in \bigcap \mathcal{Z}(x, T, X)$ y así $Tf(y_1) = 0$. Como $f = T^{-1}g$ sigue que $g(y_1) = 0$, lo cual es absurdo. $\square$

Proposición 2.10. *Para cualesquiera $x \in X$ y $y \in Y$ se tiene que $T1_X(y) > 0$ y $T^{-1}1_Y(x) > 0$.*

Demostración. Suponga que $T1_X(y_0) = 0$ para algún $y_0 \in Y$. Sea $f \in \mathcal{A}(X)$ dada. Entonces existe $c \geq 0$ tal que

$$|f(x)| \leq c, \quad \text{para cada } x \in X.$$

De esta manera,

$$-c1_X(x) \leq f(x) \leq c1_X(x), \quad \text{para toda } x \in X.$$

Como T es isomorfismo de orden, tenemos

$$-cT1_X \leq Tf \leq cT1_X, \quad \text{para toda } y \in Y.$$

En particular $-cT1_X(y_0) \leq Tf(y_0) \leq cT1_X(y_0)$. Puesto que $T1_X(y_0) = 0$, entonces $Tf(y_0) = 0$ para toda $f \in \mathcal{A}(X)$. Lo anterior implica que $g(y_0) = 0$ para cada $g \in \mathcal{A}(Y)$ ya que T es sobreyectivo. Esto es imposible pues $\mathcal{A}(Y)$ contiene funciones constantes distintas de la función nula.

Del mismo modo, suponga que $T^{-1}1_Y(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in X$. Si $g \in \mathcal{A}(Y)$ es dada, existe $m \geq 0$ tal que

$$|g(y)| \leq m, \quad \text{para toda } y \in Y.$$

Luego,

$$-m1_Y \leq g \leq m1_Y, \quad \text{para toda } y \in Y,$$

y como T^{-1} es isomorfismo de orden, sigue que $-mT^{-1}1_Y(x) \leq T^{-1}g(x) \leq mT^{-1}1_Y(x)$ para cada $x \in X$. En particular

$$-mT^{-1}1_Y(x_0) \leq T^{-1}g(x_0) \leq mT^{-1}1_Y(x_0).$$

Como $T^{-1}1_Y(x_0) = 0$, concluimos que $T^{-1}g(x_0) = 0$ para toda $g \in \mathcal{A}(Y)$. La sobreyectividad de T^{-1} implica que $f(x_0) = 0$ para cualquier $f \in A(X)$ lo cual es absurdo. $\square$

Definamos $h : X \to Y$ por $h(x_0) = y_0$ donde $\{y_0\} = \bigcap \mathcal{Z}(x_0, T, X)$.

Lema 2.11. *La función $h \colon X \to Y$ es biyectiva.*

Demostración. Primero se probará que h es sobreyectiva. Sea $y \in Y$. Por la Proposición 2.9 existe un único $x \in X$ tal que $\{x\} = \bigcap \mathcal{Z}(y, T^{-1}, Y)$ y por la Proposición 2.8 esto se da, si y solo si, $\{y\} = \bigcap \mathcal{Z}(x, T, X)$ entonces $h(x) = y$. Ahora, para probar la inyectividad de h, sean $x_0, x_1 \in X$ tales que $h(x_0) = h(x_1)$. Entonces $\{h(x_1)\} = \bigcap \mathcal{Z}(x_0, T, X)$ y $\{h(x_0)\} = \bigcap \mathcal{Z}(x_1, T, X)$. Por la Proposición 2.8, $\{x_0\} = \bigcap \mathcal{Z}(h(x_1), T^{-1}, Y)$ y $\{x_1\} = \bigcap \mathcal{Z}(h(x_0), T^{-1}, Y)$, y como $h(x_0) = h(x_1)$ se tiene que $x_0 = x_1$. De esta forma concluimos que h es biyectiva. $\square$

Proposición 2.12. *La función $h\colon X \to Y$ es un homeomorfismo. Además, para cualesquiera $y \in Y$ y $f \in \mathcal{A}(X)$ tenemos $Tf = T1_X \cdot f \circ h^{-1}$.*

Demostración. Veamos que $Tf = T1_X \cdot f \circ h^{-1}$ para toda $y \in Y$ y $f \in \mathcal{A}(X)$. Sean $x_0 \in X$ y $y_0 = h(x_0)$. Sean $f \in \mathcal{A}(X)$ y $m = \min\{f(x) : x \in X\}$. Note que m existe ya que f es una función continua definida en un compacto. Dado $\epsilon > 0$, por la continuidad de f en x_0 existe U abierto de X con $x_0 \in U$ tal que

$$f(U) \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon).$$

Luego $|f(x_0) - f(x)| < \epsilon$ para toda $x \in U$. Así $f(x) > f(x_0) - \epsilon$ para toda $x \in U$. Sea $F = X \setminus U$, entonces F es un cerrado de X que no contiene a x_0 y por tanto existe $g_1 \in \mathcal{A}(X)$ con $0 \leq g_1 \leq 1$ tal que $g_1(x_0) = 1$ y $g_1(x) = 0$ para toda $x \in F$. Sigue que

$$(1_X - g_1)(x) \geq 0 \text{ para cada } x \in X \text{ y } (1_X - g_1)(x_0) = 0.$$

Además, observe que $1_X - g_1 \in \mathcal{A}(X)$ y como $\{y_0\} = \bigcap \mathcal{Z}(x_0, T, X)$ tenemos,

$$T(1_X - g_1)(y_0) = 0.$$

Así $(T1_X)(y_0) = (Tg_1)(y_0)$. Note que

$$f(x) - m1_X(x) - (f(x_0) - m - \epsilon)g_1(x) \geq 0, \quad \text{para cualquier } x \in X.$$

Como T es isomorfismo entonces

$$Tf(y) \geq mT1_X(y) + (f(x_0) - m - \epsilon)(Tg_1)(y), \quad \text{para toda } y \in Y.$$

En particular,

$$Tf(y_0) \geq mT1_X(y_0) + (f(x_0) - m - \epsilon)(Tg_1)(y_0).$$

De la igualdad $(T1_X)(y_0) = (Tg_1)(y_0)$ se obtiene

$$Tf(y_0) \geq (f(x_0) - \epsilon)(T1_X)(y_0).$$

Puesto que la afirmación anterior se cumple para $\epsilon > 0$ arbitrario, entonces

$$Tf(y_0) \geq f(x_0)(T1_X)(y_0).$$

Aplicando el mismo argumento para $-f$, tenemos $T(-f)(y_0) \geq (-f)(x_0)(T1_X)(y_0)$, es decir $Tf(y_0) \leq f(x_0)(T1_X)(y_0)$. Luego $Tf(y_0) = (T1_X)(y_0)f(x_0)$. Por el Lema 2.11, h es biyectiva y como $h(x_0) = y_0$, entonces $h^{-1}(y_0) = x_0$ y

$$Tf(y_0) = (T1_X)(y_0)f(h^{-1}(y_0)), \quad \text{esto es} \quad Tf(y_0) = (T1_X)(y_0)(f \circ h^{-1})(y_0),$$

para cada $f \in \mathcal{A}(X)$ y $y_0 \in Y$.

Resta probar que h es un homeomorfismo.

Afirmación 2.13. La función h es continua en X.

Sea $x_0 \in X$ y $y_0 = h(x_0)$. Se probará que h es continua en x_0. Sea V un abierto de Y tal que $y_0 \in V$. Sea $M = Y \setminus V$, entonces M es un cerrado de Y que no contiene a y_0 y por tanto existe $g \in \mathcal{A}(Y)$ tal que $0 \leq g \leq 1$, $g(y_0) = 1$ y $g(w) = 0$ para cualquier $w \in M$. Dado que $g \geq 0$, tenemos $T^{-1}g \geq 0$. Veamos que $T^{-1}g(x_0) > 0$. Supongamos que $T^{-1}g(x_0) = 0$, y sea $f = T^{-1}g$. Sigue que $f \geq 0$, $f \in \mathcal{A}(X)$ y $f(x_0) = 0$. Como $\{y_0\} = \bigcap \mathcal{Z}(x_0, T, X)$ entonces $Tf(y_0) = 0$ donde $f = T^{-1}g$ y así $g(y_0) = 0$, lo cual es absurdo. Por lo anterior se concluye que $T^{-1}g(x_0) > 0$.

Ahora, $T^{-1}g \in \mathcal{A}(X)$ es una función continua de X a $\mathbb{R}$. Por tanto la preimagen del subconjunto $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ es un abierto de X. Sea $U = \{x \in X : T^{-1}g(x) > 0\}$, entonces U es un abierto de X que contiene a x_0.

Veamos que $h(U) \subset V$. Dado $x \in U$, tenemos

$$g(h(x)) = T(T^{-1}g(h(x))) = T1_X(h(x)) \cdot (T^{-1}g \circ h^{-1})(h(x)).$$

Luego, $g(h(x)) = T1_X(h(x)) \cdot T^{-1}g(x)$ y por la Proposición 2.10, $T1_X(h(x)) \cdot T^{-1}g(x) > 0$, entonces $g(h(x)) > 0$. De modo que $h(x) \notin M$ ya que $g(w) = 0$ para cada $w \in M$. Así $h(x) \in V$ y concluimos la continuidad de h en x_0.

Puesto que h es una función continua y biyectiva entre espacios compactos Hausdorff, entonces concluimos que h es un homeomorfismo. $\square$

2.2 CONSECUENCIAS

En esta sección se dará una prueba de los teoremas de Banach-Stone, Kaplansky y Gelfand-Kolmogorov a partir del Teorema 2.4. Empezaremos con un lema.

Lema 2.14. *Sean X, Y espacios compactos Hausdorff. Si $T \colon \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ es una isometría , entonces $|T(1_X)(y)| = 1_Y$ para toda $y \in Y$. Además, para cualquier $f \in \mathcal{C}(X)$, $f \geq 0$ si y solo si $T(f) \cdot T(1_X) \geq 0$.*

Demostración. Note que $\|1_X\| = 1$ y como T es isometría, entonces $\|T1_X\| = 1$. Queremos ver que $|T1_X(y)| = 1$ para toda $y \in Y$. Supongamos que existe $y_0 \in Y$ tal que $|T1_X(y_0)| < 1$. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $1 - |T1_X(y_0)| > a > 0$. Por la continuidad de $T1_X$ en y_0 para $\epsilon = 1 - |T1_X(y_0)| - a > 0$ existe V abierto de Y con $y_0 \in V$ tal que

$$T1_X(V) \subseteq (T1_X(y_0) - \epsilon, T1_X(y_0) + \epsilon).$$

Luego, $|T1_X(y) - T1_X(y_0)| < \epsilon$ para cada $y \in V$.

De la desigualdad triangular se sigue que

$$|T1_X(y)| < \epsilon + |T1_X(y_0)| = 1 - a \quad \text{para cualquier } y \in V.$$

Sea $F = Y \setminus V$, entonces F es un cerrado de Y tal que $y_0 \notin F$. Por el Lema de Urysohn, existe $g \in C(Y)$ tal que $0 \leq g \leq 1$, $g(y_0) = 1$ y $g(y) = 0$ para cualquier $y \in F$.

Ahora, veamos que $\|1_X + aT^{-1}g\| \leq 1$. Observe que si $y \in V$ tenemos

$$|(T1_X + ag)(y)| \leq |T1_X(y)| + a|g(y)| < 1 - a + a = 1,$$

y, si $y \notin V$, entonces

$$|(T1_X + ag)(y)| \leq |T1_X(y)| + a|g(y)| \leq 1.$$

Así, $\|T1_X + ag\| \leq 1$. Como T es una isometría, concluimos que $\|1_X + aT^{-1}g\| \leq 1$.

Por la desigualdad anterior tenemos

$$\sup\{|(1_X + aT^{-1}g)(x)| : \, x \in X\} \leq 1.$$

Así,

$$|1_X(x) + aT^{-1}g(x)| \leq 1, \quad \text{para cada } x \in X.$$

Sigue que $aT^{-1}g(x) \leq 0$ para toda $x \in X$. Entonces $T^{-1}g(x) \leq 0$ para cualquier $x \in X$. Como T es isometría, tenemos $\|T^{-1}g\| = \|g\|$ y puesto que $0 \leq g \leq 1$ entonces $\|T^{-1}g\| = 1$. De este modo, debe existir $x_0 \in X$ tal que $T^{-1}g(x_0) = -1$. De modo que,

$$2 = |(1_X - T^{-1}g)(x_0)| \leq \|1_X - T^{-1}g\| \leq \|1_X\| + \|T^{-1}g\| = 2.$$

Así, $\|1_X - T^{-1}g\| = \|T1_X - g\| = 2$.

Sin embargo, si $y \in V$ entonces

$$|(T1_X - g)(y)| \leq |T1_X(y)| + |g(y)| < 1 - a + 1 = 2 - a,$$

y si $y \notin V$ tenemos

$$|(T1_X - g)(y)| \leq |T1_X(y)| + |g(y)| \leq 1.$$

Puesto que $2 - a > 1$, concluimos que $|(T1_X - g)(y)| \leq 2 - a$ para cualquier $y \in Y$.

Entonces,

$$|(T1_X - g)(y)| \leq 2 - a < 2 \quad \text{para toda } y \in Y.$$

Lo anterior implica que $\|T1_X - g\| < 2$, lo cual es un absurdo ya que previamente se mostró que $\|T1_X - g\| = 2$. Con esto se prueba que $|T1_X(y)| = 1 = 1_Y(y)$ para toda $y \in Y$.

Ahora, probaremos que para cualesquiera $x \in X$ e $y \in Y$, tenemos $f(x) \geq 0$ si y solo si $Tf(y) \cdot T1_X(y) \geq 0$.

Note que $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \|f\| - f(x) \leq \|f\|$, para cada $x \in X$. Como $\|f\| \geq f(x)$, tenemos $\|f\| - f(x) = |f(x) - \|f\||$, para cada $x \in X$. Así

$$|f(x) - \|f\|| \leq \|f\| \Leftrightarrow |f(x) - \|f\|1_X(x)| \leq \|f\| \quad \text{para cualquier } x \in X.$$

De lo anterior se concluye que $\|f - \|f\|1_X\| \leq \|f\|$. Siendo T una isometría tenemos $|Tf(y) - \|Tf\|T1_X(y)| \leq \|Tf\|$ para toda $y \in Y$. Puesto que $|T1_X| = 1_Y$ se presentan dos casos:

1. Si $T1_X(y) = -1$, sigue que $|Tf(y) + \|Tf\|| \leq \|Tf\|$ y entonces $Tf(y) + \|Tf\| \leq \|Tf\|$. Se obtiene que $Tf(y) \leq 0$ y así $Tf(y) \cdot T1_X(y) \geq 0$.
2. Si $T1_X(y) = 1$, tenemos $|Tf(y) - \|Tf\|| \leq \|Tf\|$ y como $\|Tf\| \geq Tf(y)$ para toda $y \in Y$ entonces $\|Tf\| - Tf(y) \leq \|Tf\|$. Se obtiene que $-Tf(y) \leq 0$ y así $Tf(y) \geq 0$ y $Tf(y) \cdot T1_X(y) \geq 0$. $\square$

Definición 2.15. Una biyección lineal $T\colon \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ es:

- Un *isomorfismo de retículos* si $|Tf| = T(|f|)$ para cualquier $f \in \mathcal{C}(X)$.
- Un *isomorfismo algebraico* si $T1_X = 1_Y$ y $T(f \cdot g) = Tf \cdot Tg$ para cualesquiera $f, g \in \mathcal{C}(X)$.

Observación 2.16. El Lema de Urysohn implica que el espacio $\mathcal{C}(X)$ separa puntos de cerrados con precisión para cualquier espacio compacto Hausdorff X.

A continuación enunciamos los teoremas de Banach-Stone, Kaplansky y Gelfand-Kolmogorov.

Corolario 2.17. *Sean X, Y compactos Hausdorff y $T\colon \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ una biyección lineal.*

(a) Si T es isometría, entonces existen un homeomorfismo $h\colon X \to Y$ y $g \in \mathcal{C}(Y)$ con $|g| = 1_Y$ tal que $Tf = g \cdot f \circ h^{-1}$ para cualquier $f \in \mathcal{C}(X)$.

(b) Si T es un isomorfismo de retículos, entonces existen un homeomorfismo $h\colon X \to Y$ y $g \in \mathcal{C}(Y)$ con $g(y) > 0$ para toda $y \in Y$ tal que $Tf = g \cdot f \circ h^{-1}$ para cualquier $f \in \mathcal{C}(X)$.

(c) *Si T es un isomorfismo algebraico, entonces existe un homeomorfismo $h\colon X \to Y$ tal que $Tf = f \circ h^{-1}$ para cualquier $f \in \mathcal{C}(X)$.*

Demostración. (a) Puesto que T es isometría, por el Lema 2.14 se tiene que $\|T1_X\| = 1_Y$. Sea $g = T1_X$, entonces $\|g\| = 1_Y$. Defina $\widetilde{T}\colon \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ por

$$\widetilde{T}(f) = \frac{Tf}{g}, \quad \text{para cada } f \in \mathcal{C}(X).$$

Se probará que $\widetilde{T}$ es isomorfismo de orden, es decir, $f \geq 0$ si y solo si $\widetilde{T}f \geq 0$. Primero suponga que $f \geq 0$. Como T es isometría se tiene por el Lema 2.14 que $Tf(y) \cdot T1_X(y) \geq 0$ para cada $y \in Y$. Como $(g(y))^2 > 0$ para cada $y \in Y$, entonces

$$\frac{Tf(y) \cdot T1_X(y)}{(g(y))^2} \geq 0, \quad \text{para cualquier } y \in Y.$$

Ahora, la igualdad $g = T1_X$ junto con la ecuación anterior implican que $\widetilde{T}f(y) \geq 0$ para cualquier $y \in Y$. Ahora, suponga que $\widetilde{T}f(y) \geq 0$ para cualquier $y \in Y$. Entonces

$$\frac{Tf(y)}{g(y)} \geq 0, \quad \text{para toda } y \in Y.$$

De esta manera

$$\frac{Tf(y) \cdot g(y)}{(g(y))^2} \geq 0, \quad \text{para cualquier } y \in Y.$$

Sigue que

$$Tf(y) \cdot g(y) \geq 0, \quad \text{para cada } y \in Y.$$

Esto último equivale a tener $Tf(y) \cdot T1_X(y) \geq 0$ para toda $y \in Y$ y por el Lema 2.14 esto se da si y solo si, $f \geq 0$. Se concluye que $\widetilde{T}$ es isomorfismo de orden y por el Teorema 2.4 existe un homeomorfismo $h\colon X \to Y$ satisfaciendo

$$\widetilde{T}f = \widetilde{T}1_X \cdot f \circ h^{-1}, \quad \text{para cada } f \in \mathcal{C}(X).$$

Además, como

$$\widetilde{T}f = \frac{Tf}{g} \quad \text{y} \quad \widetilde{T}1_X = \frac{T1_X}{g} = 1,$$

tenemos

$$Tf = g \cdot f \circ h^{-1}, \quad \text{para toda } f \in \mathcal{C}(X).$$

(b) Primero se probará que T es isomorfismo de orden. Sea $f \in \mathcal{C}(X)$ con $f \geq 0$.

Veamos que $Tf = |Tf|$. Puesto que T es un isomorfismo de retículos tenemos

$$|Tf| = T(|f|),$$

y como $f \geq 0$, tenemos $T(|f|) = Tf$. Sigue que $|Tf| = Tf \geq 0$.

Ahora, sea $f \in \mathcal{C}(X)$ con $Tf \geq 0$. Entonces $Tf = |Tf|$ y como T es isomorfismo de retículos, $Tf = |Tf| = T(|f|)$. Luego,

$$T^{-1}(Tf) = T^{-1}(T(|f|)).$$

De este modo, tenemos que $|f| = f \geq 0$. Concluimos que T es isomorfismo de orden.

Sea $g = T1_X$. Por la Proposición 2.10, $g(y) > 0$ para cualquier $y \in Y$. Así, por el Teorema 2.4 existe un homeomorfismo $h\colon X \to Y$ tal que

$$Tf = T1_X \cdot f \circ h^{-1}, \quad \text{para cualquier } f \in \mathcal{C}(X).$$

Es decir, $Tf = g \cdot f \circ h^{-1}$ para toda $f \in \mathcal{C}(X)$.

(c) Veamos que T es isomorfismo de orden. Sea $f \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f \geq 0$. Se probará que $Tf \geq 0$. Como $f \geq 0$ entonces $g = \sqrt{f} \in \mathcal{C}(X)$ y $g \geq 0$. Observe que

$$Tf = T(g^2) = (Tg)^2,$$

y puesto que $(Tg)^2 \geq 0$ entonces $Tf \geq 0$. Recíprocamente, sea $Tf \geq 0$ con $f \in \mathcal{C}(X)$ y veamos que $f \geq 0$. Note que $T^{-1}(Tf) \cdot T^{-1}(Tg) = T^{-1}(Tf \cdot Tg)$ para cualesquiera $f, g \in \mathcal{C}(X)$. La sobreyectividad de T implica que $T^{-1}(F \cdot G) = T^{-1}(F) \cdot T^{-1}(G)$ para cualesquiera $F, G \in \mathcal{C}(Y)$.

Puesto que $Tf \geq 0$ entonces $h = \sqrt{Tf} \in \mathcal{C}(X)$ y $h \geq 0$. Observe que

$$f = T^{-1}(Tf) = T^{-1}(h^2) = (T^{-1}h)^2,$$

y como $(T^{-1}h)^2 \geq 0$ entonces $f \geq 0$. Sigue que T es isomorfismo de orden.

De esta forma, por el Teorema 2.4 existe un homeomorfismo $h\colon X \to Y$ tal que

$$Tf = T1_X \cdot f \circ h^{-1}, \quad \text{para cualquier } f \in \mathcal{C}(X).$$

Como T es un isomorfismo algebraico, entonces $T1_X = 1_Y$. Sigue que,

$$Tf = 1_Y \cdot f \circ h^{-1} \quad \text{para cada } f \in \mathcal{C}(X).$$

Concluimos que $Tf = f \circ h^{-1}$ para cada $f \in \mathcal{C}(X)$. $\square$

Capítulo

3

ISOMORFISMOS DE ORDEN ENTRE ESPACIOS COMPLETAMENTE REGULARES

El objetivo de este capítulo es extender el resultado principal del Capítulo 2 (Teorema 2.4) para espacios de funciones continuas definidas en un espacio no necesariamente compacto.

3.1 COMPATIFICACIONES

Sea X un espacio completamente regular. Como en el Capítulo 1, $\mathcal{C}(X)$ denota el espacio de funciones continuas definidas en X y con valores en $\mathbb{R}$. En esta sección, se mostrará cómo construir una compactificación de X a partir de un subespacio $\mathcal{A}(X)$ de $\mathcal{C}(X)$ que separa puntos de conjuntos cerrados. Antes de probar el próximo lema, se introducirá una notación.

Notación 3.1. Denote por $\mathbb{R}_\infty$ el intervalo $[-\infty, \infty]$ junto con la topología del orden. El producto $\prod_{\phi\in\mathcal{A}(X)} \mathbb{R}_\infty$ será denotado por $\mathbb{R}_\infty^{\mathcal{A}(X)}$.

Recordemos que dada una familia de espacios topológicos $\{X_i\}_{i\in I}$ y $f\colon X \to \prod_{i\in I} X_i$, entonces f es continua si y solamente si $\pi_i \circ f\colon X \to X_i$ es continua para cada $i \in I$, donde π_i denota la proyección canónica del espacio $\prod_{j\in I} X_j$ al correspondiente factor X_i, para cada $i \in I$. (ver [4, Teorema 2.2, pág. 101]). Aquí la topología del espacio $\prod_{i\in I} X_i$ es la topología producto.

Lema 3.2. *La función $i_X\colon X \to \mathbb{R}_\infty^{\mathcal{A}(X)}$, definida por $i_X(x)(\phi) = (\phi(x))_{\phi\in\mathcal{A}(X)}$ es un encaje.*

Demostración. Se probará que $i_X \colon X \to i_X(X)$ es un homeomeorfismo.

Afirmación 3.3. La función i_X es continua.

Observe que para cada $\phi \in \mathcal{A}(X)$ se tiene

$$(\pi_\phi \circ i_X)(x) = \phi(x), \quad \text{para cualquier } x \in X.$$

Por tanto $\pi_\phi \circ i_X$ es continua para toda $\phi \in \mathcal{A}(X)$. Esto demuestra la continuidad de la función i_X.

Afirmación 3.4. La función i_X es cerrada.

Sea F un cerrado de X y veamos que $i_X(X) \setminus i_X(F)$ es un abierto de $i_X(X)$. Sea $i_X(x) \in i_X(X) \setminus i_X(F)$. Observe que $x \notin F$. Como $\mathcal{A}(X)$ separa puntos de cerrados, existe $f \in \mathcal{A}(X)$ tal que $f(x) = 1$ y $f(w) = 0$ para todo $w \in F$. Considere el abierto $V = \prod_{\varphi \in \mathcal{A}(X)} U_\varphi$ de $\mathbb{R}_\infty^{\mathcal{A}(X)}$, donde

$$U_\varphi = \begin{cases} (0, 1+\epsilon), & \text{si } \varphi = f; \\ \\ \mathbb{R}_\infty, & \text{si } \varphi \neq f, \end{cases}$$

para algún $\epsilon > 0$. Note que $i_X(x) \in V$. Mostraremos que $V \cap i_X(X) \subset i_X(X) \setminus i_X(F)$. Suponga que $V \cap i_X(F) \neq \emptyset$ y sea $y \in F$ tal que $i_X(y) \in V$. Lo anterior implica que $i_X(y)(f) = f(y) = 0 \in U_f$, pero esto es imposible ya que $U_f = (0, 1+\varepsilon)$. Este absurdo muestra que $V \cap i_X(X) \subset i_X(X) \setminus i_X(F)$ y así, concluimos que $i_X(X) \setminus i_X(F)$ es un abierto de $i_X(X)$. De esta forma, $i_X \colon X \to i_X(X)$ es cerrada.

Afirmación 3.5. La función i_X es inyectiva.

Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Como $A(X)$ separa puntos de cerrados, existe $f \in \mathcal{A}(X)$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Esto último es equivalente a tener $i_X(x) \neq i_X(y)$ ya que $i_X(x)(f) \neq i_X(y)(f)$.

Podemos concluir, por las Afirmaciones 3.3, 3.4 y 3.5 que $i_X \colon X \to i_X(X)$ es un homeomorfismo y por ende, $i_X \colon X \to \mathbb{R}_\infty^{\mathcal{A}(X)}$ es un encaje. □

Sea $\mathcal{A}X$ la clausura de $i_X(X)$ en $\mathbb{R}_\infty^{\mathcal{A}(X)}$. Por el teorema de Tychonoff, el espacio $\mathbb{R}_\infty^{\mathcal{A}(X)}$ es compacto y Hausdorff. Por tanto, $\mathcal{A}X$ también es compacto y Hausdorff. Además, por el Lema 3.2, X puede ser identificado como un subespacio de $\mathcal{A}X$.

Observación 3.6. Si $\mathcal{A}(X) = \mathcal{C}(X)$, entonces $\mathcal{A}X$ coincide con la compactificación de $Stone - \check{C}ech$ de X. Para detalles de esta construcción, vea [15, pág. 136].

Lema 3.7. *Para cada $f \in \mathcal{A}(X)$ existe una única extensión continua $\hat{f}\colon \mathcal{A}X \to \mathbb{R}_\infty$ dada por $\hat{f}(x) = x(f)$.*

Demostración. Veamos que $\hat{f}$ es una extensión continua de f. Para esto se probará que $\hat{f}|_X = f$. Sea $x \in X$. Por el Lema 3.2 podemos identificar a x con $i_X(x)$. De modo que

$$\hat{f}(i_X(x)) = i_X(x)(f) = f(x).$$

Así $\hat{f}(x) = f(x)$ para toda $x \in X$.

Afirmación 3.8. La función $\hat{f}$ es continua.

Sean $x \in \mathcal{A}X$ y (x_α) una red en $\mathcal{A}X$ tal que $x_\alpha \to x$. Entonces, $\pi_\varphi(x_\alpha) \to \pi_\varphi(x)$ para cada $\varphi \in \mathcal{A}(X)$. En particular, $x_\alpha(f) \to x(f)$. Sigue que $\hat{f}(x_\alpha) \to \hat{f}(x)$. Esto demuestra la continuidad de $\hat{f}$. □

Afirmación 3.9. Dada $f \in \mathcal{A}(X)$, $\hat{f}$ es única.

Suponga que existen $\hat{g}$ y $\hat{f}$ funciones en $\mathbb{R}_\infty^{\mathcal{A}X}$ tales que $\hat{g}|_X = f$ y $\hat{f}|_X = f$. Por el Lema 3.2, X es denso en $\mathcal{A}X$. Como $\hat{g}$ y $\hat{f}$ son continuas, coinciden en un subconjunto denso de $\mathcal{A}X$ y $\mathbb{R}_\infty$ es Hausdorff, sigue que $\hat{g} = \hat{f}$ en $\mathbb{R}_\infty^{\mathcal{A}X}$.

3.2 SUBESPACIOS ADECUADOS DE $\mathcal{C}(X)$

A fin de generalizar el Teorema 2.4, en esta sección se introducirá una clase de subespacios de $\mathcal{C}(X)$. En cierto sentido, tales subespacios juegan un papel semejante a los subespacios de $\mathcal{C}(X)$ que separan puntos de conjuntos cerrados con precisión.

Definición 3.10. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que $\mathcal{A}(X)$ es ***g-invariante*** si $g \circ f \in \mathcal{A}(X)$ para cualquier $f \in \mathcal{A}(X)$.

Definición 3.11. Decimos que un subespacio vectorial $\mathcal{A}(X)$ de $\mathcal{C}(X)$ es *adecuado* si

(a) $\mathcal{A}(X)$ separa puntos de cerrados y contiene las funciones constantes;

(b) Existe una función continua no decreciente $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $g(t) = 0$ si $t \leq 0$ y $g(t) = 1$ si $t \geq 1$ tal que $\mathcal{A}(X)$ es *g-invariante*;

(c) Cada $f \in \mathcal{A}(X)$ puede ser escrita como $f_1 - f_2$, donde f_1, f_2 son funciones no negativas en $\mathcal{A}(X)$.

Observación 3.12. Puede ser mostrado que todo subretículo $\mathcal{A}(X)$ de $\mathcal{C}(X)$ satisface las condiciones (b) y (c). Note además que la condición (c) de la definición anterior es automáticamente satisfecha cuando $\mathcal{A}(X)$ consta de funciones acotadas y contiene toda función constante. En efecto, si $f \in \mathcal{A}(X)$, sea $c \geq 0$ tal que $f \leq c1_X$. Entonces $f = f_1 - f_2$, donde $f_1 = c1_X \in \mathcal{A}(X)$ y $f_2 = c1_X - f \in \mathcal{A}(X)$.

Lema 3.13. *Sea X un espacio completamente regular y $\mathcal{A}(X)$ un subespacio adecuado de $\mathcal{C}(X)$. Dados $x_0 \in \mathcal{A}X$, $f \in \mathcal{A}(X)$ y un abierto U en $\mathbb{R}_\infty$ tal que $x_0(f) \in U$, sea $V = \{x \in \mathcal{A}X :\ x(f) \in U\}$. Entonces existe $h \in \mathcal{A}(X)$, con $0 \leq h \leq 1$ y $x_0(h) = 0$, tal que $W = \{x \in \mathcal{A}X :\ x(h) < 1\} \subseteq V$.*

Demostración. Mostraremos que si $x \in \mathcal{A}X$, entonces

$$\widehat{(g \circ f)}(x) = g(\hat{f}(x)), \quad \text{para cada } f \in \mathcal{A}(X).$$

Sea g la función dada en la Definición 3.11. Podemos considerar la función g definida en $\mathbb{R}_\infty$ suponiendo que $g(\infty) = 1$ y $g(-\infty) = 0$. Como X es denso en $\mathcal{A}X$, existe una red (x_α) en X tal que $\lim x_\alpha = x$. Dada $f \in \mathcal{A}(X)$, la continuidad de $\widehat{g \circ f}$ implica que

$$\widehat{(g \circ f)}(x) = \lim \widehat{(g \circ f)}(x_\alpha).$$

Como (x_α) es una red en X, sigue que

$$\widehat{(g \circ f)}(x) = \lim\, (g \circ f)(x_\alpha).$$

Por la continuidad de las funciones g y f, tenemos que $\lim\, (g \circ f)(x_\alpha) = g(\lim f(x_\alpha))$. Así

$$\widehat{(g \circ f)}(x) = g(\hat{f}(x)).$$

Por lo anterior, concluimos que $x(g \circ f) = g(x(f))$ para cualquier $x \in \mathcal{A}X$ y $f \in \mathcal{A}(X)$. Usaremos este resultado para probar la afirmación del teorema.

Primero, supongamos que $x_0(f) = a \in \mathbb{R}$. Puesto que U es abierto existe $\epsilon > 0$ tal que $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subseteq U$. Considere la función $f_1 = \frac{1}{\epsilon}(f - a1_X) \in \mathcal{A}(X)$. Tenemos

$$x_0(f_1) = \frac{1}{\epsilon}(x_0(f) - ax_0(1_X)) = \frac{1}{\epsilon}(x_0(f) - a) = \frac{1}{\epsilon}(a - a),$$

y así $x_0(f_1)=0$. Si $x\in\mathcal{A}X$, entonces

$$x(f_1)=\frac{1}{\epsilon}(x(f)-ax(1_X))=\frac{1}{\epsilon}(x(f)-a).$$

Por tanto si $|x(f_1)|<1$, sigue que

$$\epsilon>\epsilon\,|x(f_1)|=|x(f)-a|\,,$$

y concluimos que $x(f)\in U$. Esto demuestra que si $W'=\{x\in\mathcal{A}X:\ |x(f_1)|<1\}$, entonces $W'\subseteq V=\{x\in\mathcal{A}X:\ x(f)\in U\}$. Definamos $h=1_X+g\circ f_1-g\circ(f_1+1_X)\in\mathcal{A}(X)$. Para cualquier $x\in\mathcal{A}X$, tenemos

$$x(h)=x(1_X)+x(g\circ f_1)-x(g\circ(f_1+1_X)),$$

y como $x(g\circ f)=g(x(f))$, sigue que

$$x(h)=1+g(x(f_1))-g(x(f_1)+1).$$

De esta forma,

$$x_0(h)=1+g(x_0(f_1))-g(x_0(f_1)+1)=1+0-1=0.$$

Por definición de g concluimos que $0\leq h\leq 1_X$. Observe que si $x(h)<1$, entonces

$$1+g(x(f_1))-g(x(f_1)+1)<1,$$

y en consecuencia $-1<x(f_1)<1$. Así,

$$W=\{x\in\mathcal{A}X:\ x(h)<1\}\subseteq W'=\{x\in\mathcal{A}X:\ |x(f_1)|<1\}.$$

Por lo tanto $W\subseteq V$. Por otro lado, supongamos que $x_0(f)=+\infty$. Entonces existe $0<m\in\mathbb{R}$ tal que $(m,\infty]\subseteq U$. Sea $h=1_X-g\circ(f-m1_X-1_X)$, entonces

$$x_0(h)=x_0(1_X)-x_0(g\circ(f-m1_X-1_X)).$$

Ahora, como $x(g\circ f)=g(x(f))$, tenemos

$$x_0(h)=1-g(x_0(f-m1_X-1_X)).$$

Sigue que $1-g(x_0(f)-mx_0(1_X)-x_0(1_X))=1-g(x_0(f)-m-1)$. Así, $x_0(h)=1-g(\infty)=$

0. Note que $0 \leq h \leq 1_X$ puesto que g solo toma valores entre 0 y 1. Sea $x \in \mathcal{A}X$. Si $x(h) < 1$, entonces $g(x(f) - m - 1) > 0$. Considere los siguientes casos:

- Si $x(f) - m - 1 \geq 1$, luego $x(f) \geq m + 2$. Por lo tanto $x(f) \in U$.
- Si $1 > x(f) - m - 1 > 0$, entonces $m + 2 > x(f) > m + 1$. Así $x(f) \in U$.

De esta forma, $W \subseteq V$ cuando $x_0(f) = +\infty$. Por último, si $x_0 = -\infty$ se procede de la misma forma al caso anterior. Esto concluye la prueba. $\square$

Denote por $\mathcal{C}_b(X) = \{f \in \mathcal{C}(X) \,:\, f \text{ es acotada}\}$. Sean $\mathcal{A}_b(X) = \mathcal{C}_b(X) \cap \mathcal{A}(X)$ y $\hat{\mathcal{A}}_b(X) = \{\hat{f} \,:\, f \in \mathcal{A}_b(X)\}$. El siguiente resultado establece una relación entre los espacios $\mathcal{A}_b(X)$ y $\hat{\mathcal{A}}_b(X)$.

Lema 3.14. *La correspondencia $f \to \hat{f}$ es un isomorfismo de orden de $\mathcal{A}_b(X)$ sobre el subespacio $\hat{\mathcal{A}}_b(X)$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A}X)$.*

Demostración. Note que si $\hat{f}(x) \geq 0$ para cualquier $x \in \mathcal{A}X$ entonces $f(x) \geq 0$ para toda $x \in X$. Ahora, sea $f \in \mathcal{A}_b(X)$ tal que $f \geq 0$. Veamos que $\hat{f} \geq 0$. Sean $x \in \mathcal{A}X$ y (x_α) una red en X tal que $x_\alpha \to x$. Por la Afirmación 3.8, tenemos que $\hat{f}(x_\alpha) \to \hat{f}(x)$. Puesto que (x_α) es una red en X, sigue que $f(x_\alpha) \to \hat{f}(x)$. Concluimos que $\hat{f}(x) \geq 0$.

Sean $f, g \in \mathcal{A}_b(X)$ tales que $f \neq g$. Por la Afirmación 3.9 tenemos que $\hat{f} \neq \hat{g}$. Además, como $\hat{\mathcal{A}}_b(X) = \{\hat{f} \,:\, f \in \mathcal{A}_b(X)\}$ dicha correspondencia es sobreyectiva. Concluimos que es biyectiva.

Mostraremos que dados $f, g \in \mathcal{A}_b(X)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\widehat{(f+g)} = \hat{f} + \hat{g} \quad \text{y} \quad \widehat{\alpha f} = \alpha \hat{f}.$$

Sea $x \in \mathcal{A}X$ dado. Como X es denso en $\mathcal{A}X$ existe una red (x_α) en X tal que $\lim x_\alpha = x$. Por la continuidad de las funciones $\hat{f}$ y $\hat{g}$ tenemos $\hat{f}(x) = \lim f(x_\alpha)$ y $\hat{g}(x) = \lim g(x_\alpha)$. Entonces

$$\begin{aligned} \widehat{(f+g)}(x) &= \lim (f+g)(x_\alpha) \\ &= \lim f(x_\alpha) + \lim g(x_\alpha) \\ &= \hat{f}(x) + \hat{g}(x). \end{aligned}$$

Sigue que $\widehat{(f+g)} = \hat{f} + \hat{g}$ y de modo semejante se muestra que $\widehat{\alpha f} = \alpha \hat{f}$. Concluimos que la correspondecia $f \to \hat{f}$ es lineal. De esta forma, hemos probado que $f \to \hat{f}$ es un isomorfismo de orden. $\square$

Por el Lema 3.14 sigue que $\hat{\mathcal{A}}_b(X)$ contiene las funciones constantes en $\mathcal{A}X$ ya que $\mathcal{A}_b(X)$ contiene las funciones constantes en X. El próximo resultado establece una correspondencia entre subespacios adecuados y subespacios que separan puntos de cerrados con precisión.

Lema 3.15. *Sea X un espacio completamente regular. Si $\mathcal{A}(X)$ es un subespacio adecuado de $\mathcal{C}(X)$, entonces $\hat{\mathcal{A}}_b(X)$ separa puntos de cerrados con precisión en $\mathcal{A}X$.*

Demostración. Sean $x_0 \in \mathcal{A}X$ y F un cerrado de $\mathcal{A}X$ tal que $x_0 \notin F$. Sea $W = \mathcal{A}X \setminus F$, entonces W es un abierto de $\mathcal{A}X$ y $x_0 \in W$. Sea $U = \prod_{f\in\mathcal{A}(X)} U_f$ un abierto de $\mathbb{R}_\infty^{\mathcal{A}(X)}$ tal que $x_0 \in U \cap \mathcal{A}X \subset W$. Por definición de la topología producto en $\mathbb{R}_\infty^{\mathcal{A}(X)}$, el conjunto

$$\{f \in \mathcal{A}(X) \,:\, U_f \neq \mathbb{R}_\infty\}$$

es finito. Sean $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{A}(X)$ tales que $U_{f_i} \neq \mathbb{R}_\infty$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, definamos $V_i = \{x \in \mathcal{A}X \,:\, x(f_i) \in U_{f_i}\}$. Entonces $x_0 \in \bigcap_{i=1}^n V_i \subset W$.

Por el Lema 3.13, existen $h_1, ..., h_n \in \mathcal{A}(X)$ tales que

$$0 \leq h_i \leq 1_X, \quad x_0(h_i) = 0 \quad \text{y} \quad W_i = \{x \in \mathcal{A}X :\, x(h_i) < 1\} \subseteq V_i,$$

para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Considere la función

$$h = 1_X - g \circ \left(\sum_{i=1}^n h_i\right).$$

Entonces $h \in \mathcal{A}(X)$, $0 \leq h \leq 1_X$ y $x_0(h) = 1$. Sea $x \in F$ entonces $x \notin W$. Por tanto, existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \notin V_j$. Sigue que $x \notin W_j$. Luego $x(h_j) \geq 1$, y así

$$x\left(\sum_{i=1}^n h_i\right) = \widehat{\left(\sum_{i=1}^n h_i\right)}(x) = \sum_{i=1}^n \hat{h}_i(x) \geq \hat{h}_j(x) = x(h_j) \geq 1.$$

De modo que

$$x(h) = x(1_X) - g\left(x\left(\sum_{i=1}^n h_i\right)\right) = 0.$$

Por lo anterior concluimos que $\hat{h} \in \hat{\mathcal{A}}_b(X)$, $0 \leq \hat{h} \leq 1_X$, $\hat{h}(x_0) = 1$ y $\hat{h}(x) = 0$ para cada $x \notin F$. Así, $\hat{\mathcal{A}}_b(X)$ separa puntos de cerrados con precisión. $\square$

3.3 OTRA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE KAPLANSKY

A continuación probaremos el resultado principal de este capítulo.

Teorema 3.16. *Sean X y Y espacios completamente regulares. Suponga que $\mathcal{A}(X)$ y $\mathcal{A}(Y)$ son subespacios adecuados de $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(Y)$, respectivamente. Si $T\colon \mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}(Y)$ es un isomorfismo de orden tal que $T(\mathcal{A}_b(X)) = \mathcal{A}_b(Y)$, entonces existe un homeomorfismo $h\colon \mathcal{A}X \to \mathcal{A}Y$ tal que para cualesquiera $x \in X$, $y \in Y$, $f \in \mathcal{A}(X)$, $g \in \mathcal{A}(Y)$, tenemos $\hat{f}(h^{-1}(y))$, $\hat{g}(h(x)) \in \mathbb{R}$, y*

$$Tf = T1_X \cdot \hat{f} \circ h^{-1} \restriction_Y \quad \text{y} \quad T^{-1}g = T^{-1}1_Y \cdot \hat{g} \circ h \restriction_X . \tag{3.1}$$

Demostración. Para comenzar probaremos que la función $\hat{T}\colon \hat{\mathcal{A}}_b(X) \to \hat{\mathcal{A}}_b(Y)$ dada por $\hat{T}(\hat{f}) = \widehat{Tf}$ es un isomorfismo de orden.

Afirmación 3.17. $\hat{T}$ es biyectiva.

Primero probaremos que $\hat{T}$ es inyectiva. Sean $\hat{f}$ y $\hat{g}$ en $\hat{\mathcal{A}}_b(X)$ tales que $\hat{f} \neq \hat{g}$. Por el Lema 3.14 tenemos que $f \neq g$. Como T es inyectiva entonces $Tf \neq Tg$. Nuevamente por el Lema 3.14 para los espacios $\hat{A}_b(Y)$ y $A_b(Y)$, tenemos que $\widehat{Tf} \neq \widehat{Tg}$. Ahora probaremos que $\hat{T}$ es sobreyectiva. Sea $\widehat{g} \in \hat{\mathcal{A}}_b(Y)$, donde $g \in \mathcal{A}_b(Y)$. Como T es sobreyectiva y $T(\mathcal{A}_b(X)) = \mathcal{A}_b(Y)$, existe $f \in \mathcal{A}_b(X)$ tal que $T(f) = g$. Luego $\widehat{Tf} = \hat{g}$, esto es, $\hat{T}(\hat{f}) = \hat{g}$.

Afirmación 3.18. $\hat{T}$ es lineal.

Sean $\hat{f}, \hat{g} \in \hat{\mathcal{A}}_b(X)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Veamos que $\hat{T}(\alpha\hat{f} + \hat{g}) = \alpha\widehat{Tf} + \widehat{Tg}$. Por definición de $\hat{T}$ tenemos que

$$\hat{T}(\alpha\hat{f} + \hat{g}) = T(\widehat{\alpha f + g}).$$

La linealidad de T y el Lema 3.14 implican que $T(\widehat{\alpha f + g}) = \alpha\widehat{Tf} + \widehat{Tg}$. Luego,

$$\hat{T}(\alpha\hat{f} + \hat{g}) = \alpha\widehat{Tf + Tg} = \alpha\widehat{Tf} + \widehat{Tg} = \alpha\hat{T}(\hat{f}) + \hat{T}(\hat{g}).$$

Afirmación 3.19. $\hat{T}$ es isomorfismo de orden.

Sea $\hat{f} \in \hat{\mathcal{A}}_b(X)$ con $\hat{f} \geq 0$, donde $f \in \mathcal{A}_b(X)$. Por el Lema 3.14, $f \geq 0$. Como T es isomorfismo de orden, entonces $Tf \geq 0$. Luego $\widehat{Tf} \geq 0$, por el Lema 3.14, es decir $\hat{T}(\hat{f}) \geq 0$. Ahora, sea $\hat{T}(\hat{f}) = \widehat{Tf} \in \hat{\mathcal{A}}_b(Y)$ con $\widehat{Tf} \geq 0$. Por el Lema 3.14 para los espacios $\mathcal{A}_b(Y)$ y $\hat{\mathcal{A}}_b(Y)$, tenemos que $Tf \geq 0$. Como T es isomorfismo de orden, sigue que $f \geq 0$. Concluimos que $\hat{f} \geq 0$ por el Lema 3.14. Esto prueba la afirmación.

Por el Lema 3.15 los subespacios $\hat{\mathcal{A}}_b(X)$ y $\hat{\mathcal{A}}_b(Y)$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A}X)$ y $\mathcal{C}(\mathcal{A}Y)$ respectivamente, separan puntos de cerrados con precisión. Por el Teorema 2.4, existe un homeomorfismo $h\colon \mathcal{A}X \to \mathcal{A}Y$ tal que

$$\widehat{T}(\hat{f}) = (\widehat{T1_X}) \cdot \hat{f} \circ h^{-1} \quad \text{y} \quad \widehat{T^{-1}}(\hat{g}) = (\widehat{T^{-1}1_Y}) \cdot \hat{g} \circ h, \tag{3.2}$$

para cualesquiera $\hat{f} \in \hat{\mathcal{A}}_b(X)$ y $\hat{g} \in \hat{\mathcal{A}}_b(Y)$.

Afirmación 3.20. Dados cualesquiera $x \in X$, $y \in Y$, tenemos $\hat{f}(h^{-1}(y)), \hat{g}(h(x)) \in \mathbb{R}$ para cada $f \in \mathcal{A}(X)$ y $g \in \mathcal{A}(Y)$.

Sean $y_0 \in Y$ y $x_0 \in \mathcal{A}X$ tal que $y_0 = h(x_0)$ y fijemos $f \in \mathcal{A}(X)$ con $f \geq 0$. Como $x_0 \in \mathcal{A}X$ y X es denso en $\mathcal{A}X$ existe una red (x_α) en X tal que $x_\alpha \to x_0$. Por la continuidad de $\hat{f}$ tenemos $\hat{f}(x_\alpha) \to \hat{f}(x_0)$. Puesto que $\hat{f}(x) = f(x)$ para cualquier $x \in X$, sigue que $f(x_\alpha) \to \hat{f}(x_0)$ y como $f \geq 0$, concluimos que $\hat{f}(x_0) \geq 0$.

Si $\hat{f}(x_0) = 0$, tenemos $Tf(y_0) \geq 0$ ya que $f \geq 0$. Así

$$Tf(y_0) \geq (T1_X)(y_0)\hat{f}(x_0).$$

Ahora, supongamos que $\hat{f}(x_0) > 0$. Por la continuidad de $\hat{f}$ en x_0, dado $a \in \mathbb{R}$ con $\hat{f}(x_0) > a \geq 0$, existe un abierto U_a de $\mathcal{A}X$ tal que $x_0 \in U_a$ y $\hat{f}(u) > a$ para cada $u \in U_a$. De modo que $f(x) > a$ para cualquier $x \in U_a \cap X$. El conjunto $M_a = \mathcal{A}X \setminus U_a$ es cerrado en $\mathcal{A}X$ y $x_0 \notin M_a$. Como $\hat{\mathcal{A}}_b(X)$ separa puntos de cerrados con precisión en $\mathcal{A}X$ (Lema

3.15), existe $s_a \in \mathcal{A}_b(X)$ tal que $0 \leq \widehat{s_a} \leq 1$, $\widehat{s_a}(x_0) = 1$ y $\widehat{s_a}(w) = 0$ para cada $w \in M_a$. La ecuación (3.2) implica que

$$\widehat{Ts_a}(y_0) = \widehat{T1_X}(y_0) \cdot \widehat{s_a}(h^{-1}(y_0)).$$

Puesto que $\widehat{Ts_a}(y) = Ts_a(y)$ y $\widehat{T1_X}(y) = T1_X(y)$ para toda $y \in Y$ y $\widehat{s_a}(x_0) = \widehat{s_a}(h^{-1}(y_0)) = 1$, sigue que $Ts_a(y_0) = T1_X(y_0)$. Ahora bien, es fácil ver que $f - as_a \geq 0$ y siendo T un isomorfismo de orden, tenemos $T(f - as_a) \geq 0$. Luego

$$Tf(y_0) \geq a(Ts_a)(y_0) = aT1_X(y_0).$$

La arbitrariedad de a implica que

$$Tf(y_0) \geq \hat{f}(x_0)(T1_X)(y_0) = T1_X(y_0)\hat{f}(h^{-1}(y_0)),$$

ya que $x_0 = h^{-1}(y_0)$. De la Proposición 2.10 deducimos que $T1_X(y_0) = \widehat{T1_X}(y_0) > 0$. Por tanto $\hat{f}(x_0) = \hat{f}(h^{-1}(y_0)) \in \mathbb{R}$. El argumento anterior muestra que $\hat{f}(h^{-1}(y)) \in \mathbb{R}$ y

$$Tf(y) \geq T1_X(y)\hat{f}(h^{-1}(y)), \quad \text{para cualquier } y \in Y. \tag{3.3}$$

De modo semejante se muestra que si $g \in \mathcal{A}(Y)$ con $g \geq 0$, entonces $\hat{g}(h(x)) \in \mathbb{R}$ y

$$T^{-1}g(x) \geq T^{-1}1_Y(x) \cdot \hat{g}(h(x)), \quad \text{para cualquier } x \in X. \tag{3.4}$$

Esto demuestra la Afirmación 3.20.

Finalmente se mostrará la validez de la ecuación (3.1). Como $T^{-1}1_Y$ es acotada sigue de la ecuación (3.2) que

$$1_{\mathcal{A}Y} = \hat{T}(\widehat{T^{-1}1_Y}) = (\widehat{T1_X}) \cdot (\widehat{T^{-1}1_Y}) \circ h^{-1}. \tag{3.5}$$

Por tanto, combinando las ecuaciones (3.4) y (3.5) tenemos para cada $x \in X$

$$\begin{aligned}(\widehat{T1_X})(h(x)) \cdot f(x) &= (\widehat{T1_X})(h(x)) \cdot T^{-1}(Tf)(x) \\ &\geq (\widehat{T1_X})(h(x))(T^{-1}1_Y)(x) \cdot \widehat{Tf}(h(x)) \\ &= \widehat{Tf}(h(x)).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Sea $y \in Y$. Puesto que h es un homeomorfismo, existe $x \in \mathcal{A}X$ tal que $h(x) = y$. Como X es denso en $\mathcal{A}X$ existe una red (x_α) en X tal que $x_\alpha \to x$. Por la continuidad de h

tenemos que $h(x_\alpha) \to y$. De la desigualdad (3.6) tenemos

$$\lim\,(\widehat{T1_X})(h(x_\alpha)) \cdot f(x_\alpha) \geq \lim\,(\widehat{Tf})(h(x_\alpha)).$$

La desigualdad anterior puede ser reescrita como

$$\lim\,(\widehat{T1_X})(h(x_\alpha)) \cdot \hat{f}(x_\alpha) \geq \lim\,(\widehat{Tf})(h(x_\alpha)).$$

Sigue de la continuidad de las funciones involucradas que

$$T1_X(y) \cdot \hat{f}(h^{-1}(y)) \geq Tf(y), \quad \text{para cualquier } y \in Y. \tag{3.7}$$

Concluimos por las desigualdades (3.3) y (3.7) que

$$Tf(y) = T1_X(y) \cdot \hat{f}(h^{-1}(y)), \quad \text{para cualquier } y \in Y.$$

Para finalizar, sea $f \in \mathcal{A}(X)$ dada. Como $\mathcal{A}(X)$ es un espacio adecuado, existen $0 \leq f_1, f_2 \in \mathcal{A}(X)$ tales que $f = f_1 - f_2$. Si $y \in Y$, tenemos que $\hat{f}_1(h^{-1}(y)), \hat{f}_2(h^{-1}(y)) \in \mathbb{R}$ y

$$Tf_1(y) = T1_X(y) \cdot \hat{f}_1(h^{-1}(y)) \quad \text{y} \quad Tf_2(y) = T1_X(y) \cdot \hat{f}_2(h^{-1}(y)).$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} Tf(y) &= T(f_1 - f_2)(y) = Tf_1(y) - Tf_2(y) \\ &= T1_X(y)[\hat{f}_1(h^{-1}(y)) - \hat{f}_2(h^{-1}(y))] \\ &= T1_X(y)\hat{f}(h^{-1}(y)), \end{aligned}$$

ya que $\hat{f} = \hat{f}_1 - \hat{f}_2$. Luego

$$Tf(y) = T1_X(y) \cdot \hat{f}(h^{-1}(y)), \quad \text{para cualquier } y \in Y \text{ y } f \in \mathcal{A}(X).$$

De manera similar puede ser mostrado que

$$T^{-1}g(x) = T^{-1}1_Y(x) \cdot \hat{g}(h(x)), \quad \text{para cualquier } x \in X \text{ y } g \in A(Y). \qquad \square$$

Capítulo

4

PROBLEMAS ABIERTOS

Como conclusión, presentamos algunos problemas relacionados con los resultados probados en este trabajo.

4.1 PROBLEMAS

No sabemos si el teorema de Kaplansky es válido para el espacio de funciones continuas $\mathcal{C}_0(X)$. Esto motiva el siguiente problema:

Problema 4.1. Si $T\colon \mathcal{C}_0(X) \to \mathcal{C}_0(Y)$ es un isomorfismo de orden, ¿podemos concluir que X y Y son homeomorfos?

Una respuesta afirmativa se tiene cuando el isomorfismo T es tal que $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 2$ (ver [5, Teorema 1.3]).

Un resultado clásico de la teoría de los espacios de Banach de funciones continuas es el teorema de Holsztyński el cual establece que si $\mathcal{C}(X)$ es isométrico a un subespacio de $\mathcal{C}(Y)$, entonces X es imagen continua de un subespacio cerrado de Y [9]. No sabemos si este resultado puede extenderse a isomorfismos de orden. Más precisamente:

Problema 4.2. Si existe un operador T inyectivo de $\mathcal{C}_0(X)$ en $\mathcal{C}_0(Y)$, tal que $Tf \geq 0$ si y solo si $f \geq 0$ ¿Es posible concluir que X es imagen continua de un subespacio de Y?

La respuesta del problema anterior es sí cuando el operador T satisface $\|T\|\|T^{-1}\| < 2$ (ver [6, Teorema 1.1]).

Definición 4.3. Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff y E un espacio de Banach. Diremos que $f\colon X \to E$ se anula en infinito si dado $\epsilon > 0$, el conjunto $\{x \in X : \|f(x)\| \geq \epsilon\}$ es compacto.

Denotamos por $\mathcal{C}_0(X, E)$ el espacio de funciones continuas de X en E que se anulan en el infinito. Cuando X es compacto, es común denotar $\mathcal{C}_0(X, E)$ por $\mathcal{C}(X, E)$. Note que si E es un retículo de Banach, el espacio $\mathcal{C}_0(X, E)$ admite estructura natural de retículo de Banach.

Es fácil ver que el teorema de Kaplansky no vale en general para el retículo de Banach $\mathcal{C}(X, E)$.

Ejemplo 4.4. Sean $1 \leq p < \infty$ y $T \colon \ell_p \to \ell_p \oplus_\infty \ell_p$ definida por

$$T((x_n)) = ((x_{2n}), (x_{2n-1})), \quad \text{para cada } (x_n) \in \ell_p.$$

Entonces T es isomorfismo de orden. Por otro lado, ℓ_p puede ser identificado con el retículo de Banach $\mathcal{C}(X, \ell_p)$, donde $X = \{1\}$. También $\ell_p \oplus_\infty \ell_p$ es orden isomorfo (de hecho isométrico) a $\mathcal{C}(Y, \ell_p)$, donde $Y = \{1, 2\}$. De esta manera, el isomorfismo de orden T induce un isomorfismo de orden entre los retículos de Banach $\mathcal{C}(X, \ell_p)$ y $\mathcal{C}(Y, \ell_p)$. Sin embargo, es claro que X y Y no son homeomorfos.

Por otra parte, varios autores han obtenido versiones del teorema de Kaplansky imponiendo hipótesis adicionales. Para más detalles, véase [3, 7]. Sin embargo, el siguiente problema aún permanece abierto.

Problema 4.5. ¿Qué condiciones deben cumplir X, Y y E a fin que las siguientes afirmaciones sean equivalentes:

- $C(X, E)$ es isomorfo como retículo de Banach a $C(Y, E)$;
- X e Y son homeomorfos?

REFERENCIAS

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warsaw, 1993.

[2] E. Behrends, *M-structure and Banach-Stone theorem*, Lectures Notes in Math. 736, Springer-Verlag, 1979.

[3] J.-X. Chen, Z.-L. Chen, N.-C. Wong, *A Banach–Stone theorem for Riesz isomorphisms of Banach lattices*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 3869-3874.

[4] J. Dugundji, *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass. 1966.

[5] E. M. Galego, M. A. Rincón-Villamizar, *Banach-lattice isomorphisms of $C_0(K, X)$ spaces which determine the locally compact spaces K*. Fund. Math. 239 (2017), 2, 185–200.

[6] E. M. Galego, M. A. Rincón-Villamizar, *How do the positive embeddings of $C_0(K, X)$ Banach lattices depend on the αth derivatives of K?* Math. Nachr. 290 (2017), 10, 1544-1552.

[7] E. M. Galego, M. A. Rincón-Villamizar, *When do the Banach lattices $C([0, \alpha], X)$ determine the ordinal intervals $[0, \alpha]$?* J. Math. Anal. Appl. 443 (2016), 2, 1362-1369.

[8] K. Geba, Z. Semadeni, *Spaces of continuous functions (V),* Studia Math. 19 (1960), p. 303-320.

[9] W. Holsztyński, *Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuousfunctions*, Studia Math. 26 (1966), 133-136.

[10] I. Gelfand , A. Kolmogorov, *On rings of continuous functions on topological spaces*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 22 (1939), 11-15.

[11] I. Kaplansky, *Lattices of continuous functions.* Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 617-623.

[12] D. H. Leung, L. Li, *Order isomorphisms on function spaces*. Studia Math. 219 (2013), 2, 123-138.

[13] Z. Semadeni, *Banach spaces of continuous functions*. Vol. I. Monografie Matematyczne, Tom 55. PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1971.

[14] M. H. Stone, *Applications for the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. So. 41 (1937), 375-481.

[15] S. Willard, *General topology*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1970.

BIBLIOGRAFÍA

J. Araujo, J. J. Font, S. Hernández, *A note on Holsztyński's theorem*. Papers on general topology and applications (Amsterdam, 1994), 9-12, Ann. New York Acad. Sci., 788, New York Acad. Sci., New York, 1996.

S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warsaw, 1993.

E. Behrends, *M-structure and Banach-Stone theorem*, Lectures Notes in Math. 736, Springer-Verlag, 1979.

J.-X. Chen, Z.-L. Chen, N.-C. Wong, *A Banach–Stone theorem for Riesz isomorphisms of Banach lattices*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 3869-3874.

J. Dugundji, *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass. 1966.

E. M. Galego, M. A. Rincón-Villamizar, *Banach-lattice isomorphisms of $C_0(K, X)$ spaces which determine the locally compact spaces K*. Fund. Math. 239 (2017), 2, 185–200.

E. M. Galego, M. A. Rincón-Villamizar, *How do the positive embeddings of $C_0(K, X)$ Banach lattices depend on the αth derivatives of K?* Math. Nachr. 290 (2017), 10, 1544-1552.

E. M. Galego, M. A. Rincón-Villamizar, *When do the Banach lattices $C([0, \alpha], X)$ determine the ordinal intervals $[0, \alpha]$?* J. Math. Anal. Appl. 443 (2016), 2, 1362-1369.

K. Geba, Z. Semadeni, *Spaces of continuous functions (V),* Studia Math. 19 (1960), p. 303-320.

W. Holsztyński, *Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuousfunctions*, Studia Math. 26 (1966), 133-136.

I. Gelfand , A. Kolmogorov, *On rings of continuous functions on topological spaces*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 22 (1939), 11-15.

I. Kaplansky, *Lattices of continuous functions.* Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 617-623.

D. H. Leung, L. Li, *Order isomorphisms on function spaces*. Studia Math. 219 (2013), 2, 123-138.

Z. Semadeni, *Banach spaces of continuous functions*. Vol. I. Monografie Matematyczne, Tom 55. PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1971.

M. H. Stone, *Applications for the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. So. 41 (1937), 375-481.

S. Willard, *General topology*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1970.