



SISTEMA MODULAR DIDÁCTICO DE APOYO PARA LA ENSEÑANZA Y  
APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA FRACTAL. DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE  
UN MODELO FUNCIONAL

MARIA IRENE SARMIENTO ROJAS  
ANGELA ANDREA SILVA LIZCANO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICO-MECANICAS  
ESCUELA DE DISEÑO INDUSTRIAL  
BUCARAMANGA  
2008



SISTEMA MODULAR DIDÁCTICO DE APOYO PARA LA ENSEÑANZA Y  
APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA FRACTAL. DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE  
UN MODELO FUNCIONAL

MARIA IRENE SARMIENTO ROJAS

Código: 2000896

ANGELA ANDREA SILVA LIZCANO

Código: 2021225

Trabajo de Grado para optar el título de  
Diseñador Industrial

Director

EDUARDO SERAFIN GUEVARA MELO

Codirector

SONIA M. SABOGAL P

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICO-MECANICAS  
ESCUELA DE DISEÑO INDUSTRIAL  
BUCARAMANGA

2008

## TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCION	20
1. TITULO DEL PROYECTO	22
2. AUTORES Y TUTORES	23
3. ENTIDADES INTERESADAS	24
3.1 UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	24
3.2 ESCUELA DE DISEÑO INDUSTRIAL	24
3.3 ESCUELA DE MATEMÁTICAS	24
4. RESUMEN DEL PROYECTO	25
5. DESCRIPCION DEL PROYECTO	26
5.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	26
5.2 IMPACTO ESPERADO	26
5.3 ALCANCE DEL PROYECTO	27
6. OBJETIVOS	29
6.1 OBJETIVO GENERAL	29
6.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	29
7. MARCO TEORICO	30
7.1 RESEÑA HISTÓRICA	30
7.2 ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN	31
7.2.1 Universidad Pedagógica Nacional	32
7.3 BASES TEÓRICAS	33
7.3.1 Caos	33
7.3.2 Efecto Mariposa	33
7.4 FRACTALES	33
7.4.1 Definición	34
7.4.2 Tipos de fractales	35
7.4.2.1 Fractales lineales	35

7.4.2.2	Conjunto Cantor	
7.4.2.3	Curva de Koch	35
7.4.2.4	Triangulo de Sierpinski	36
7.4.2.5	Fractales Complejos	37
7.4.2.6	Órbitas Caóticas	37
7.5	POLIEDROS	38
7.5.1	Sólidos Platónicos	38
7.5.1.1	Propiedades	38
7.5.2	Sólidos de Arquímedes	39
7.5.3	Sólidos de Catalán	42
7.5.4	Poliedros Estrellados	44
7.6	CRISTALOGRAFIA	47
7.7	TENSEGRITY	48
7.8	FIBONACCI	50
7.8.1	La sucesión de Fibonacci, el número áureo y la sección áurea en la naturaleza	50
7.9	MOVIMIENTO BROWNIANO	51
7.10	BIÓNICA	52
7.11	LA GEOMETRIA NATURAL	53
7.12	BIOMIMÉTICA	55
7.13	BIOFORMA	55
8.	GENERALIDADES DE DISEÑO	55
8.1	MÓDULO, SUBMÓDULO, SUPERMÓDULO	56
8.2	INTERRELACION FORMAL	56
8.3	TEORIA DEL COLOR	56
8.4	GEOMETRIZACION	57
8.5	TRATAMIENTO DE LA FORMA	59
9.	ANÁLISIS DEL ESTADO ACTUAL	59
9.1	MATERIAL ELABORADO POR ESTUDIANTES	61
9.2	MATERIAL COMERCIAL	63

9.3 FRACTALES EN ORIGAMI	65
9.4 SOFTWARE LIBRE	66
9.5 CONCLUSIONES	67
10. PROCESO DE DISEÑO	68
10.1 SELECCIÓN DE MATERIAL DE ESTUDIO	68
10.1.1 Fractales Básicos	68
10.1.1.1 Conjunto Cantor	68
10.1.1.2 Triangulo de Sierpinski	69
10.1.1.3 Alfombra de Sierpinski y Esponja de Menger	70
10.1.1.4 Curva y Copo de Nieve de Koch	71
10.1.1.5 Variantes del Copo de Nieve de Koch	73
10.1.1.6 Curva de Hilbert	75
10.1.2 Fractales Naturales	75
10.1.2.1 Paisajes Naturales	76
10.1.2.2 Costas y Bahías	77
10.1.2.3 Plantas	80
10.1.2.4 Fenómenos Naturales	82
10.1.2.5 Paisajes Espaciales	83
10.1.2.6 Fractales en animales	84
10.1.3 Otros ejemplos	86
10.1.3.1 Arquitectura	86
10.1.3.2 Arte	88
10.1.3.3 Publicidad	91
10.1.3.4 Fenómenos Físicos	92
10.1.4 Trabajo de Campo	92
10.1.4.1 Helechos	92
10.1.4.2 Bigotes de Gato	96
10.1.4.3 Brócoli	97
10.1.4.4 Amaranto Plumoso	98
10.1.4.5 Bromelias	99

10.1.4.6 Camarón	102
10.1.4.7 Pino	103
10.1.4.8 Hortensia	103
10.1.4.9 Jade	105
10.1.4.10 Thumbergia	105
10.1.4.11 Cactus	107
10.1.5 Selección de los elementos a trabajar	108
10.1.5.1 Primera etapa	108
10.1.5.2 Segunda etapa	108
11. REQUERIMIENTOS	110
11.1 REQUERIMIENTOS DE USO	110
11.2 REQUERIMIENTOS DE FUNCION	110
11.3 REQUERIMIENTOS ESTRUCTURALES	110
11.4 REQUERIMIENTOS TECNICO PRODUCTIVOS	111
11.5 REQUERIMIENTOS ECONOMICOS O DE MERCADO	112
11.6 REQUERIMIENTOS FORMAL ESTETICOS	112
12. ETAPA CREATIVA	113
12.1 FRACTALES BASICOS	113
12.1.1 Sierpinski y Menger	113
12.1.2 Koch	130
13. DESARROLLO PROYECTUAL	137
13.1 DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA	137
13.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	138
13.3 ANÁLISIS DEL OBJETO NATURAL	138
13.3.1 Generalidades del objeto analizar	138
13.4 ANÁLISIS VISUAL Y TÁCTIL	142
13.4.1 Simetría	142
13.4.1.1 Simetría bilateral	142
13.4.1.2 Simetría rotacional	143
13.4.2 Textura	144

13.4.3 Módulo	147
13.4.4 Gradación	150
13.4.5 Radiación	150
13.4.6 Contraste	153
13.4.6.1 Contraste de forma	153
13.4.6.2 Contraste de tamaño	153
13.4.6.3 Contraste de color	153
13.4.6.4 Contraste de textura	157
13.4.6.5 Contraste de dirección	158
13.4.7 Concentración	159
13.4.8 Estructura	160
13.5 ASPECTOS CONFORMATIVOS	162
13.5.1 Interrelación de formas	162
13.5.2 Geometrificaciones	163
13.5.3 Proporciones	166
13.5.4 Abstracciones	168
13.6 ANÁLISIS DE COMPOSICIONES BIDIMENSIONALES	191
13.7 APLICACIONES VIRTUALES	199
14. ASPECTOS TECNICOS	206
14.1 CONSTRUCCION DEL MODELO	206
14.2 TRIÁNGULO DE SIERPINSKI	207
14.2.1 Planos Generales	207
14.3 ESPONJA DE MENGER	208
14.3.1 Planos Generales	208
14.4 CURVA DE KOCH	209
14.4.1 Planos Generales	209
14.5 HYDRANGEA	210
14.5.1 Planos Generales	211
14.6 CARTILLA	212
15. TALLERES PROPUESTOS	213

15.1 TRIANGULO DE SIERPINSKI	213
15.2 ESPONJA DE MENGER	215
15.3 COPO DE NIEVE DE KOCH	217
15.4 HYDRANGEA	218
16. CONCLUSIONES	220
BIBLIOGRAFIA	221
WEBGRAFIA	223

## LISTA DE FIGURAS

Pág.

Figura 1. Gaston Julia	33
Figura 2. Autosemejanza	34
Figura 3. Iteraciones del Triangulo de Sierpinski	35
Figura 4. Conjunto Cantor	36
Figura 5. Curva de Koch	36
Figura 6. Triangulo de Sierpinski	37
Figura 7. Conjunto Julia	37
Figura 8. Atractor de Lorenz	38
Figura 9 y 10. Sólidos Platónicos 2000 a C	38
Figura 11. Escultura Leedle Tower 1868	50
Figura 12. Girasol	51
Figura 13. Variación dimensión masa y dimensión contorno	53
Figura 14. Vehiculo Biónico	54
Figura 15. Interrelación Formal	56
Figura 16. Geometrización	59
Figura 17. Tratamiento de la Forma	59
Figura 18. Triangulo de Sierpinski	61
Figura 19. Esponja de Menger	62
Figura 20. Carpeta de Sierpinski	63
Figura 21. Esponja de Menger-Módelo en Acrílico	63
Figura 22. Triangulo de Sierpinski-Construcción a partir del Lego	63
Figura 23. Triangulo de Sierpinski-Construcción a partir del Geomag	63
Figura 24. Construcciones a partir del Geomag	64
Figura 25. Sistema Lúdico a partir de Triángulos	64
Figura 26. Esponja de Menger	65
Figura 27. Tetraedro de Sierpinski	65
Figura 28. Curva de Koch en 2D y 3D	65

Figura 29. Conjunto de Cantor	68
Figura 30. Conjunto Cantor a partir de un cuadrado	69
Figura 31. Triangulo de Sierpinski	70
Figura 32. Alfombra de Sierpinski	70
Figura 33. Esponja de Menger	71
Figura 34. Copo de Nieve de Koch	72
Figura 35. Copo de Nieve de Koch a partir de un triangulo equilátero	73
Figura 36. Copo de Nieve de Koch	73
Figura 37. Anticopo de Koch	74
Figura 38. Copo de Nieve de Koch a partir de un Hexágono	74
Figura 39. Fractales de Cesaro	74
Figura 40. Curva de Hilbert	75
Figura 41. Cataratas de Iguazú	76
Figura 42. Paisaje en la Gran Muralla China	76
Figura 43. Dematac, México	76
Figura 44. Formaciones Rocosas	77
Figura 45. Islas	77
Figura 46. Costas y Bahías	78
Figura 47. Longitud de las Costas	78
Figura 48. Lago Viedma Nevado, Patagónia-Argentina	79
Figura 49. Lago Viedma, Patagónia-Argentina	79
Figura 50. Lago Pueyrredon, Patagónia-Argentina	80
Figura 51. Romanesco	80
Figura 52. Pino	80
Figura 53. Arbusto	81
Figura 54. Textura Hoja	81
Figura 55. Textura tronco	81
Figura 56. Planta de jardín	82
Figura 57. Tormentas eléctricas	82

Figura 58. Tornado	83
Figura 59. Cráteres de la Luna	83
Figura 60. Nubes	84
Figura 61. Galaxia	84
Figura 62 y 63. Sistema respiratorio	84
Figura 64. Sistema Circulatorio	85
Figura 65. Sistema Nervioso	85
Figura 66. Nautilus	85
Figura 67. Vitamina C	85
Figura 68. Catedral Gótica	86
Figura 69. Catedral de León	86
Figura 70. Piso de la Catedral de Anagni	86
Figura 71. Piso de la Catedral de San Clemente	86
Figura 72. Arquitectura Hindú	87
Figura 73. Escaleras	87
Figura 74. Torre Eiffel	88
Figura 75. Camino de vida (Scher)	89
Figura 76. Limite de Circulo (Scher)	89
Figura 77. Arte Africano	89
Figura 78. Mas pequeño y mas pequeño (Scher)	90
Figura 79. Limite de Circulo (Scher )	90
Figura 80. Muñecas Rusas	90
Figura 81. Accesorios	90
Figura 82. Arte en Maizales	91
Figura 83. Curva de Weierstrauss	91
Figura 84. Gota de tinta cayendo en agua	92
Figura 85. Helecho Blanco	93
Figura 86. Helecho Colchón de rico	94
Figura 87. Culantrillo	95
Figura 88. Otros Helechos	95

Figura 89. Bigotes de Gato	96
Figura 90. Brócoli	97
Figura 91. Amaranto Plumoso	98
Figura 92. Bromelia Fascista	100
Figura 93. Flor de la Bromelia Fasciata	100
Figura 94. Guzmania Lingulata	101
Figura 95. Camarón	102
Figura 96. Pino	103
Figura 97. Hortensia	104
Figura 98. Jade	105
Figura 99. Thunbergia	106
Figura 100. Cactus Opuntia Fulgida	107
Figura 101. Cuadro comparativo de los elementos seleccionados	109
Figura 102. Idea 1	113
Figura 103. Idea 2	113
Figura 104. Idea 3	114
Figura 105. Idea 4	114
Figura 106. Idea 5	114
Figura 107. Primer Principio	115
Figura 108. Segundo Principio	115
Figura 109. Tercer Principio	116
Figura 110. Cuatro Principio	116
Figura 111. Quinto Principio	117
Figura 112. Sexto Principio	117
Figura 113. Séptimo Principio	118
Figura 114. Bisagra integrada al modulo	122
Figura 115. Elemento adicional de agarre	122
Figura 116. Abrazadera integrada al modulo	123
Figura 117. Pre-modelo para construcción del molde	124
Figura 118. Molde	124

Figura 119. Modelos en resina	124
Figura 120. Doble abrazadera integrada al modulo	125
Figura 121. Pre-modelo para construcción del molde	125
Figura 122. Molde	125
Figura 123. Modelos en resina	126
Figura 124. Pruebas de acabados en el material	126
Figura 125. Análisis de ventajas y desventajas	127
Figura 126. Aproximación al modelo funcional	128
Figura 127. Renderizado Sierpinski y Menger	129
Figura 128. Idea 1	130
Figura 129. Idea 2	130
Figura 130. Idea 3	131
Figura 131. Alternativa 1	131
Figura 132. Alternativa 2	132
Figura 133. Alternativa 3	133
Figura 134. Evolución	135
Figura 135. Renderizado Koch	136
Figura 136. Hortensia (primera etapa)	140
Figura 137. Hortensia (segunda etapa)	140
Figura 138. Hortensia (tercera etapa)	141
Figura 139. Hortensia (cuarta etapa)	141
Figura 140. Simetría bilateral	143
Figura 141. Simetría rotacional	144
Figura 142. Textura Brácteas	145
Figura 143. Textura en tallo	146
Figura 144. Textura hojas	146
Figura 145. Módulos	147
Figura 146. Módulos	148
Figura 147. Módulos en la flor	149
Figura 148. Gradación de forma	150

Figura 149. Gradación en las brácteas y pistilos	152
Figura 150. Radiación de las ramificaciones	153
Figura 151. Contraste de forma: flor en etapa inicial y hojas	154
Figura 152. Contraste de forma. Flor y pistilo	154
Figura 153. Contraste de forma: tallo y flor	155
Figura 154. Contraste de forma: segunda etapa de la floración	155
Figura 155. Contraste de tamaño	156
Figura 156. Contraste de color: flor y botón central	156
Figura 157. Contraste de color: flor y pistilo	157
Figura 158. Contraste de textura: tallo y brácteas	157
Figura 159. Contraste de textura: tallo y hojas	158
Figura 160. Contraste de dirección: ramificaciones del tallo	158
Figura 161. Contraste de dirección: brácteas	159
Figura 162. Concentración	159
Figura 163. Estructura de la bráctea	160
Figura 164. Estructura de la planta	160
Figura 165. Aproximaciones a la estructura fractal de la planta	161
Figura 166. Superposición	162
Figura 167. Distanciamiento	162
Figura 168. Unión	162
Figura 169. Botón de Floración	163
Figura 170. Flor	163
Figura 171. Bráctea en etapa de desarrollo	163
Figura 172. Geometrización Bráctea	164
Figura 173. Botón de la flor-vista frontal	164
Figura 174. Pistilos	165
Figura 175. Hoja	165
Figura 176. Ramificaciones	165
Figura 177. Proporciones Bráctea desarrollada	166
Figura 178. Fibonacci en las Brácteas	167

Figura 179. Proporciones flor	167
Figura 180. Abstracción del módulo	168
Figura 181. Composiciones bidimensionales	169
Figura 182. Abstracción y composición	170
Figura 183. Abstracción del módulo	171
Figura 184. Abstracción del módulo	172
Figura 185. Composiciones bidimensionales	173
Figura 186. Evolución de la composición	174
Figura 187. Evolución de la composición	175
Figura 188. Evolución de la composición	176
Figura 189. Abstracción del módulo	177
Figura 190. Abstracción del módulo	178
Figura 191. Composiciones bidimensionales	179
Figura 192. Pruebas de colores	180
Figura 193. Composiciones bidimensionales	181
Figura 194. Composiciones bidimensionales	182
Figura 195. Tratamiento del módulo	183
Figura 196. Composiciones bidimensionales	184
Figura 197. Composiciones bidimensionales	185
Figura 198. Tratamiento del módulo	186
Figura 199. Composiciones bidimensionales	187
Figura 200. Abstracción del módulo	188
Figura 201. Composiciones bidimensionales	189
Figura 202. Composiciones bidimensionales	190
Figura 203. Análisis de composiciones bidimensionales	191
Figura 204. Análisis de composiciones bidimensionales	192
Figura 205. Composición seleccionada	193
Figura 206. Otras posibilidades de estructura	194
Figura 207. Otras posibilidades de estructura	195
Figura 208. Representación tridimensional	196

Figura 209. Representación tridimensional	197
Figura 210. Ensamblajes	198
Figura 211. Esculturas	199
Figura 212. Montaje escultura	200
Figura 213. Construcción de un puente	201
Figura 214. Renderizado del puente estructural 3D-MAX	202
Figura 215. Montaje del puente	203
Figura 216. Objeto estructural – fuente de agua	204
Figura 217. Montaje de la fuente	205

## LISTA DE TABLAS

	<b>Pág.</b>
Tabla 1. Sólidos Platónicos	41
Tabla 2. Sólidos de Arquímedes	42
Tabla 3. Sólidos de Catalán	45
Tabla 4. Sólidos de Kepler	47
Tabla 5. Evaluación de Principios de Solución	121
Tabla 6. Evaluación de Alternativas	134

## ABSTRACT

**TITLE:** DIDACTIC MODULAR SYSTEM FOR THE SUPPORT OF EDUCATION AND LEARNING OF FRACTAL. DESIGN AND CONSTRUCTION OF A FUNCTIONAL MODEL.

**AUTHOR:** SARMIENTO ROJAS, Maria Irene  
SILVA LIZCANO, Angela Andrea\*\*

**KEY WORDS:** Design, Modular System, Fractal Geometry, Natural Fractals, Bionic, Biomimetics, application, creativity.

### DESCRIPTION:

This project develops an alternative bi-dimensional and tri-dimensional representation of lineal fractals, and a fractal proposal obtained from a natural object analysis based on current methodologies for the development of bionic projects. This work is divided in three parts: the first part summarizes the information related to fractal geometry and design concepts; the second part refers to the search of ideas that solve ensemble of classic fractals and the evaluation of the same ones; the third part, establishes the experimental development of a bionic methodology, analyzing a natural object in this case the Hydrangea, in order to find alternatives involving the procurement of a fractal proposal. Finally, the project culminates in a playful system that contains the proposed material and a primer in which the student will can search basic information about fractals, some real examples and some practical workshops to be solved across the proposed material. In addition, presents a virtual proposal of possible functional or formal applications obtained in the natural object analysis.

This thesis sought to support education and learning of fractal geometry through alternative methods, as well as the identification of this concept in nature, and show the potential of this tool in the bio-configuration of real objects for several industrial fields.

---

\* Thesis

\*\* Physical and Mechanical Engineering Faculty, School of Industrial Design. Manager: Eduardo Guevara

## RESUMEN

**TITULO:** SISTEMA MODULAR DIDÁCTICO DE APOYO PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA FRACTAL. DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO FUNCIONAL\*

**AUTORES:** SARMIENTO ROJAS, Maria Irene  
SILVA LIZCANO, Angela Andrea\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Diseño, Sistema Modular, Geometría Fractal, Fractales Naturales, Biónica, Biomimética, Aplicación, Creatividad.

### DESCRIPCION:

El proyecto desarrolla una alternativa de representación bidimensional y tridimensional de fractales lineales, además de una propuesta fractal a través del análisis de un objeto natural, apoyándose en metodologías existentes para el desarrollo de proyectos en biónica. La primera parte sintetiza información concerniente a geometría fractal y conceptos de diseño; la segunda, hace referencia a la búsqueda de principios que solucionen el ensamble de los fractales clásicos y la evaluación de los mismos; y la tercera, se constituye como el desarrollo experimental de una metodología biónica, estudiando un objeto natural en este caso la Hydrangea mas conocida como Hortensia, para el desarrollo de alternativas que conlleven a la obtención de la propuesta fractal. Finalmente, el proyecto se sintetiza en un sistema lúdico que además de contener el material diseñado, cuenta con una cartilla en la cual el estudiante podrá consultar información básica sobre Fractales, algunos ejemplos reales y algunos talleres prácticos para ser resueltos a través del material propuesto. Adicional a esto, se presenta una propuesta virtual de posibles aplicaciones funcionales y/o formales obtenidas en el análisis del elemento natural.

Con este trabajo de grado se procuró apoyar la enseñanza y aprendizaje de geometría fractal a través de un elemento lúdico; así como la identificación del concepto fractal en la naturaleza y mostrar el potencial existente de esta herramienta para la bio-configuración de objetos reales para los diferentes sectores de la industria.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ingenierías Físico Mecánicas. Escuela de Diseño Industrial. Director: D.I. Eduardo Guevara

## INTRODUCCION

El concepto de fractal es difícil de comprender, por esta razón, tratar de enseñar este concepto no puede reducirse a la definición matemática ni a complicadas fórmulas que permitan generar fractales, sino que debe basarse principalmente en la gran potencialidad visual de los mismos y la búsqueda de propiedades geométricas (patrones, unidad generadora, semejanzas, variación de escala, entre otras).

La introducción de la geometría fractal en la enseñanza de las matemáticas, ha abierto nuevos campos de desarrollo e investigación, puesto que esta no se resuelve a través de métodos tradicionales, sino que corresponde a procesos simples que generan imágenes maravillosas y complicadas que revelan la magnificación de una variedad infinita repetida de patrones.

Al trabajar fractales estamos trabajando semejanza de figuras, recursividad, inducción geométrica y la idea intuitiva de infinito; además se potencian actitudes como el rigor, el gusto por el trabajo y la percepción de la belleza implícita en las matemáticas. Es por esta razón, que la geometría fractal deja de ser un término propio de la matemática, para convertirse en tema de estudio de otras ciencias y disciplinas, como la física, biología, química, economía, arquitectura, diseño entre otras.

Desde el punto de vista de diseño, se busca dar solución a la representación bidimensional y tridimensional de fractales, teniendo en cuenta dos características importantes de estos: autosimilitud y variación de escala; también es importante destacar que la construcción de fractales en dos dimensiones y tres dimensiones permite trabajar con los alumnos la percepción espacial y el complejo paso del plano al espacio. Además, teniendo en cuenta que el concepto también se

encuentra en la naturaleza, el estudio de un elemento natural permite identificar y generar nuevas alternativas fractales que ayuden a comprenderlo mejor y sean punto de partida para posteriores estudios en esta rama.

## **1. TITULO DEL PROYECTO**

“Sistema modular didáctico de apoyo para la enseñanza y aprendizaje de geometría fractal. Diseño y construcción de un modelo funcional”

## 2. AUTORES Y TUTORES

### **AUTORES:**

Nombre: Maria Irene Sarmiento Rojas

Código: 2000896

Carrera: Diseño Industrial

Nombre: Ángela Andrea Silva Lizcano

Código: 2021225

Carrera: Diseño Industrial

### **TUTORES:**

Director: M.s. D.I. Eduardo Serafín Guevara Melo

Escuela: Diseño Industrial

Facultad: Ingenierías Físico-Mecánicas

Codirector: Sonia M. Sabogal P. Doctora en Ciencias Matemáticas

Escuela: Matemáticas

Facultad: Ciencias

### **3. ENTIDADES INTERESADAS**

#### **3.1 UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

La Universidad Industrial de Santander se beneficia con el desarrollo de este proyecto ya que desde 1989 el Grupo Fractales-UIS ha venido desarrollando varias actividades entorno a la divulgación, estudio e investigación de fractales, como seminarios, dirección de trabajos de grado, cursos y ponencias en eventos académicos entre otras. El proyecto que presentamos está directamente relacionado con los temas de trabajo del Grupo Fractales-UIS y constituiría un muy valioso aporte a dicho grupo.

#### **3.2 ESCUELA DE DISEÑO INDUSTRIAL**

El aporte de este proyecto a la Escuela de Diseño Industrial es fomentar la investigación y desarrollo de fractales manejando sus principios de auto-similitud o autosemejanza como punto de partida para el desarrollo de nuevas alternativas. Además, este proyecto también apoyará el Grupo de Investigación en Biónica de la Escuela de Diseño Industrial.

#### **3.3 ESCUELA DE MATEMÁTICAS**

El aporte de este proyecto para la escuela de matemáticas es apoyar el curso de Introducción a la Geometría Fractal que desde el año 1992 se ha venido impartiendo de manera casi ininterrumpida, como contenido de la asignatura Geometría Moderna, ofrecida por esta escuela. Por otra parte, desde el punto de vista pedagógico, este proyecto será también de utilidad al Grupo EDUMAT-UIS como grupo de la Escuela de Matemáticas dedicado a la investigación en educación matemática.

#### 4. RESUMEN DEL PROYECTO

El desarrollo de este proyecto surge como apoyo al proyecto de investigación titulado: ***UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA FRACTAL A NIVEL UNIVERSITARIO***, que está siendo ejecutado en la Escuela de Matemáticas (UIS), dando respuesta a uno de sus objetivos: **Elaborar material didáctico de alta calidad que facilite la enseñanza de la geometría fractal a nivel universitario**, además de apoyar al Grupo de Investigación en Biónica de la Escuela de Diseño Industrial (UIS).

Se desarrollará un sistema modular didáctico basado en el análisis de formas fractales principales, conceptos básicos de diseño y análisis de algunos fractales naturales que permitan plantear nuevas alternativas en 2 y 3 dimensiones.

## 5. DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

### 5.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Este proyecto hace parte de otro titulado: ***UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA FRACTAL A NIVEL UNIVERSITARIO***, el cual está adscrito a la DIFE de Ciencias de la UIS, se encuentra actualmente en curso y a su vez surgió a partir de los siguientes hechos: por una parte, el creciente interés e importancia que existe en diversos campos de la ciencia por la geometría fractal y sus muy diversas aplicaciones, lo que conlleva a la necesidad de divulgar los conceptos básicos de esta geometría entre los estudiantes de ciencias e ingenierías de nuestras universidades, y por otra parte la sentida ausencia de material didáctico en español donde se exponga a un nivel universitario y de manera sistemática, detallada y formal desde el punto de vista matemático, la teoría básica de la geometría fractal.

Por tanto nuestro proyecto pretende contribuir a la divulgación, estudio e investigación de la geometría fractal a nivel universitario. Nuestro problema se sintetiza a partir del desarrollo de un sistema modular que sirva como material de apoyo al curso de geometría fractal implementado por la Escuela de Matemáticas en la asignatura Geometría Moderna y además aportar elementos de estudio al Grupo de Investigación en Biónica de la Escuela de Diseño Industrial y al Grupo de investigación EDUMAT-UIS de la Escuela de Matemáticas.

### 5.2 IMPACTO ESPERADO

Al finalizar este proyecto se espera obtener una representación bidimensional y tridimensional de los modelos fractales más conocidos ( triángulo de Sierpinski, la esponja de Menger y copo de nieve de Koch), y el planteamiento de talleres en la

creación y desarrollo de nuevas alternativas fractales.

También se pretende fortalecer el Grupo de Investigación en Biónica de la Escuela de Diseño Industrial, el grupo fractales-UIS y al grupo EDUMAT-UIS.

### 5.3 ALCANCES DEL PROYECTO

El desarrollo de este proyecto estará fundamentado principalmente en dos aspectos:

**Primero:** estudio tipológico, a través del cual se espera obtener y sintetizar la información necesaria y pertinente para ser punto de partida en la elaboración del sistema deseado; por lo tanto, este estudio será realizado de la siguiente manera:

- Recopilación de información contenida en la base de datos del Grupo Fractales-UIS.
- Análisis de los modelos fractales más conocidos (triángulo de Sierpinski, la esponja de Menger, copo de nieve de Koch,).
- Desarrollo de talleres prácticos, propuestos por la Escuela de Matemáticas en la asignatura de Geometría Moderna.
- Análisis y desarrollo biónico de estructuras naturales que presenten este concepto (helecho, piña de pino, estrellas de mar, brócoli, coliflor entre otros).
- Estudio estructural y dimensional de la geometría fractal.

**Segundo:** diseño y desarrollo del material propuesto; una vez desarrollada la primera etapa se procederá a la ejecución de la etapa creativa que se espera reflejar en la propuesta final de la siguiente manera:

- Desarrollo modular de representaciones de fractales, tomados como objeto de estudio en 2 y 3 dimensiones.

- Propuesta de talleres que permitan la conceptualización y aprendizaje de la geometría fractal, sustentado por el material lúdico necesario.
- Elaboración del manual de uso para cada etapa del sistema.
- Construcción de dos modelos funcionales para ser usados en las Escuelas de Matemáticas y Diseño Industrial como material de apoyo en sus respectivos enfoques.

## **6. OBJETIVOS**

### **6.1 OBJETIVO GENERAL**

Diseñar y construir un modelo funcional de un sistema modular didáctico de apoyo para la enseñanza y el aprendizaje de geometría fractal a nivel universitario.

### **6.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Proponer una técnica de construcción y desarrollo de modelos fractales principales en 2 y 3 dimensiones
- Plantear talleres que apoyen el aprendizaje de geometría fractal, soportados por medio del material diseñado.
- Fomentar la investigación y desarrollo de nuevas alternativas fractales a partir del sistema propuesto.
- Apoyar el método de enseñanza de geometría fractal implementado por la Escuela de Matemáticas a través de la asignatura de la Geometría Moderna.
- Aportar elementos de estudio al grupo de investigación biónica de la Escuela de Diseño Industrial.

## 7. MARCO TEORICO

### 7.1 RESEÑA HISTÓRICA<sup>1</sup>

“La mención explícita quizá mas remota en la historia sobre el fenómeno de autosemejanza, se remonta al siglo V a. de J.C. Según Anaxágoras, el universo fue un caos de innumerables semillas, al cual la mente, mediante un movimiento de rotación, dio orden y forma. Estas semillas no son elementos pues cada una es tan compleja como el todo. La alusión a la autosemejanza es clara, según anaxágoras, *“todo el universo y sus partes, por pequeñas que sean, son homogéneos; sus diferencias son solo diferencia de tamaño, no de composición”*. Así cada semilla no es mas simple que el resto, ni esencialmente distinta en su composición. Ejemplos de conjuntos auto semejantes son conocidos desde hace mucho tiempo. A una buena parte de ellos se les denomina actualmente conjuntos fractales. La prehistoria de este tipo de conjuntos auto semejantes son conocidos desde hace muchos tiempo. A una buena parte de ellos se les denomina actualmente conjuntos fractales. La prehistoria de este tipo de conjuntos se remonta a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, con el descubrimiento de fenómenos como el movimiento browniano y de conjuntos “extraños” o situaciones que en esa época fueron consideradas “patológicas”, tales como el conjunto Cantor (1883), el triangulo de Sierpinski (1916), las funciones continuas y nunca diferenciables (1872), la curva de Von Koch (1904), las curvas de Plano que llenan el espacio (1980), entre otros. En el momento de aparecer este tipo de conjuntos y fenómenos, muchos de ellos fueron subestimados y sencillamente “dejados a un lado”. En 1919 Hausdorff proporciona la herramienta fundamental para medir estos conjuntos tan particulares, al introducir lo que hoy se conoce como medidas y dimensión de

---

<sup>1</sup> UNA INTRODUCCION A LA GEOMETRIA FRACTAL, Sonia Sabogal y Gilberto Arenas. Pág. 11.

Hausdorff y durante la década de los veinte se sigue desarrollando la teoría geométrica de la medida, cuyo papel es fundamental en el estudio de este tipo de conjuntos. En 1918 Gaston Julia (1893-1978) publica sus trabajos sobre sistemas dinámicos complejos y lo mismo hace en 1926 el matemático francés Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1929). En los años veinte los trabajos de Julia y Fatou fueron de reconocida importancia, pero posteriormente quedaron en el olvido hasta que, en la década de los setenta Benoit Mandelbrot (1924), rescata dichos trabajos con la ayuda importante de los computadores. Basado en estos trabajos y en ejemplos como los que mencionamos anteriormente, Mandelbrot logra, con una visión particular muy geométrica, detectar ciertas características comunes, (auto semejanza, dimensión extraña), en objetos, situaciones y fenómenos de la naturaleza muy diversa: el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la curva de Koch, el movimiento browniano, las curvas de Peano, la medición de la longitud de una costa, las fluctuaciones en las líneas de transmisión de datos entre ordenadores, la turbulencia en fluidos, la distribución de las galaxias en el universo, las variaciones de los precios en la bolsa de valores, etc. Crea entonces el término "fractal" para agrupar bajo él esta gran variedad de fenómenos, y expone sus ideas y teorías al respecto principalmente en dos libros que son quizá sus dos obras más importantes en lo que se refiere a la geometría fractal: *Les Objets Fractals: Forme, hasard et dimension* y *The Fractal Geometry of Nature*.

## 7.2 ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN<sup>2</sup>

En 1996 un trabajo<sup>3</sup> realizado por Miguel Zapata<sup>4</sup> publicado por la UNED expone las razones por las cuales cada vez más docentes piensan integrar la geometría fractal en los contenidos de secundaria, en matemáticas y/o en informática.

---

<sup>2</sup> [www.platea.pntic.mec.es/zapata/tutot\\_ma/fractal/fractal.htm](http://www.platea.pntic.mec.es/zapata/tutot_ma/fractal/fractal.htm)

<sup>3</sup> [www.geometriafractal.com/articlech000301.htm](http://www.geometriafractal.com/articlech000301.htm)

<sup>4</sup> [www.um.es/ead/2001/postgrado/profesor.htm#Miguel](http://www.um.es/ead/2001/postgrado/profesor.htm#Miguel)

Partimos de la idea de que los fractales suministran modelos que contribuyen a percibir el espacio y las propiedades geométricas de objetos y procesos naturales. Queremos también poner de relieve varios hechos: Primero la conexión que existe entre este dominio del conocimiento y algunos de los objetivos educativos establecidos para la etapa de Secundaria. Segundo, la importancia y las posibilidades de introducir por primera vez unos conocimientos formulados de manera reciente (su desarrollo se ha producido en los últimos quince años). Recordemos que, en el contexto de la geometría descriptiva que se imparte, o mejor que se impartía, en los niveles equivalentes a secundaria, no se han incorporado contenidos prácticamente posteriores a Euler. Y por último conviene resaltar el potencial cognitivo de los modelos que suministra la geometría fractal y que permiten dar estructura cognitiva a objetos y procesos naturales (su representación y su forma) así como estudiar algunas de sus propiedades.

**7.2.1 Universidad Pedagógica Nacional.** Algunos profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional interesados en incorporar la temática fractales en los currículos de la Educación Básica, Media y Universitaria, formaron el grupo de estudio en torno a la Geometría fractal.

El grupo diseñó e implementó un curso electivo con el fin de brindar a los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, la posibilidad de ampliar la visión sobre los fractales, ofreciendo nuevos ambientes y experiencias de aprendizaje. Como parte del estudio al interior del grupo se han elaborado y socializado algunas propuestas en eventos en el ámbito académico de la Educación Matemática.

Son muchas las aplicaciones que se encuentran en el estudio de la geometría fractal: en la geología, la arquitectura, la medicina, el diseño, la economía, las ciencias sociales, etc.; y es esto lo que lleva cada vez a más docentes e

instituciones a crear grupos de investigación o a introducir el tema de la geometría fractal en sus temas de enseñanza.

### 7.3 BASES TEÓRICAS

**7.3.1 Caos.** “El término caos se refiere a una interconexión subyacente que se manifiesta en acontecimientos aparentemente aleatorios. Esta definición es difícil de interpretar ya que el caos no es un concepto fácilmente definible.

El caos matemático se presenta cuando se predice por ejemplo el comportamiento de una función pero ésta acaba comportándose de manera extraña aunque podemos intuir de manera aproximada cuan extraña y diferente se comporta de lo predicho”.

**7.3.2 Efecto Mariposa.** Esta expresión proviene de la afirmación que el aleteo de una mariposa en un remoto lugar de la Tierra puede originar un tornado en otro lugar. La idea es que, dadas unas condiciones iniciales de un determinado sistema natural, la más mínima variación en ellas puede provocar que el sistema evolucione en formas totalmente diferentes. Sucediendo así que, una pequeña perturbación inicial, mediante un proceso de amplificación, podrá generar un efecto considerablemente grande.

### 7.4 FRACTALES

**Origen.** En 1919 Hausdorff ideó un método para medir las dimensiones y medidas de los fractales, el llamado medida y dimensión Hausdorff. Al año siguiente Besicovitch, interesado por el trabajo de Hausdorff, en particular por la dimensión Hausdorff 1 creó la teoría geométrica de la medida.

Figura 1. Gaston Julia



Fuente: [www.boingboing.net](http://www.boingboing.net)

En 1963 Edward Lorenz, meteorólogo, intuía el efecto mariposa al redondear unos decimales en su programa de ordenador que simulaba situaciones meteorológicas. Al variar ligeramente el número de decimales después de la coma e introducir los resultados en su ordenador el programa devolvió unos resultados sorprendentemente diferentes a los anteriores. El caos matemático había nacido.

**7.4.1 Definición.** Los fractales son objetos geométricos, cuya estructura básica cumple con las siguientes características:

1. Autosemejanza a cualquier escala.
2. Dimensión fractal
3. Formación por iteración.

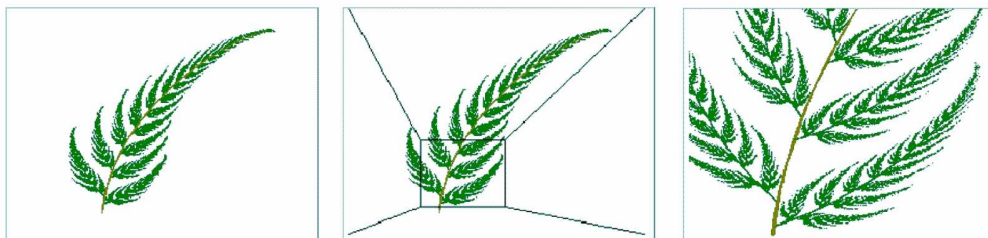
**-Otras definiciones...**

“Modelos infinitos comprimidos de alguna manera en un espacio finito”.

“Bellísimos y fascinantes diseños de estructura y complejidad infinita.”

**1. Autosemejanza a cualquier escala:** la autosemejanza en un fractal, quiere decir que tiene la propiedad de que una pequeña sección suya puede ser vista como una réplica a menor escala de todo el fractal.

Figura 2. Autosemejanza



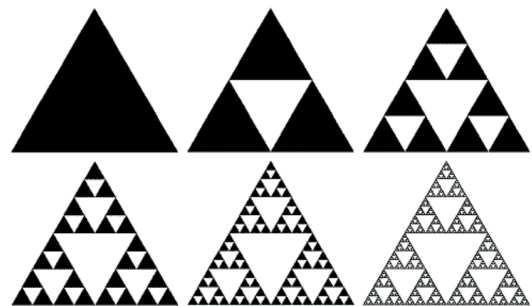
Fuente: <http://khaos1101.wordpress.com/category/fractales/>

**2. Dimensión fractal:** Para entender el concepto de dimensión fractal, podemos referirnos a un ejemplo sencillo, cuando hablamos de la dimensión de un punto

sabemos que esta es cero, si nos referimos a una línea esta es de dimensión 1, un rectángulo tiene dimensión 2 (ancho y alto) y finalmente un cubo tiene dimensión 3; por otro lado, los fractales están compuestos por elementos cada vez más pequeños de sí mismos que se replican indefinidamente a menor escala, generándose una figura que tiene una superficie finita con un perímetro de longitud infinita y con un número infinito de vértices. En el lenguaje matemático del cálculo, diríamos que esta curva no se puede diferenciar.

**3. Formación por iteración:** Los fractales se obtienen mediante un proceso iterativo que consiste en la aplicación repetitiva de una o varias transformaciones geométricas o aplicando algunos algoritmos iterativos; por ejemplo el Triángulo de Sierpinski comienza con una iteración  $n=0$  que

Figura 3. Iteraciones Triangulo de Sierpinski



Fuente: [www.matematicas.unal.edu.co](http://www.matematicas.unal.edu.co)

corresponde a la primera imagen, posteriormente continua la segunda iteración  $n=1$  correspondiente a la segunda imagen y así sucesivamente un infinito número de iteraciones crean el fractal correspondiente al Triángulo de Sierpinski.

**7.4.2 Tipos de fractales.** Entre los tipos de fractales se encuentran: los lineales, complejos y orbitas caóticas.

**7.4.2.1 Fractales lineales.** Se generan a partir de conceptos y algoritmos lineales, como por ejemplo rectas o triángulos. Pueden obtenerse mediante trazados geométricos simples.

**7.4.2.2 Conjunto Cantor.** El polvo de Cantor se inicia con un segmento lineal conocido como el iniciador. Este se divide en tres segmentos menores de la misma longitud, el central de los cuales se extrae y se elimina. Este proceso

(denominado, usualmente, como el generador) se repite indefinidamente produciendo el denominado polvo de Cantor, pues se observan como diminutos puntos.

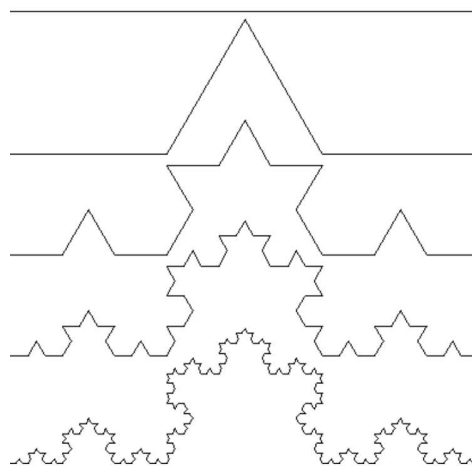
Figura 4. Conjunto Cantor



Fuente: Autor

**7.4.2.3 Curva de Koch.** Se forma partiendo de un segmento el cual es dividido en tres partes iguales. La parte central se sustituye por dos segmentos del mismo tamaño que el eliminado.

Figura 5. Curva de Koch



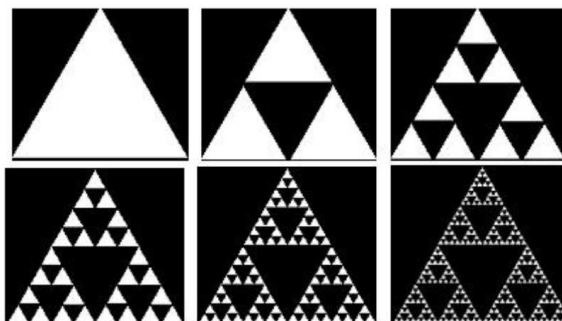
Fuente: [www.mad-actions.com](http://www.mad-actions.com)

#### 7.4.2.4 Triángulo de Sierpinski.

Definamos como *Triángulo de Sierpinski* en la iteración  $n=0$  un triángulo equilátero de lado  $x$ . En iteraciones sucesivas  $n=1, 2, 3, \dots$ , iremos recortando un triángulo equilátero de lado mitad al de la iteración anterior del centro del triángulo de la iteración anterior.

Tal como se puede observar en la figura en la primera iteración, se traza un triángulo equilátero, cuyos vértices, deben coincidir con los puntos medios de cada lado del triángulo mayor. Esta nueva figura tendrá una orientación invertida con respecto a la primera. Seguidamente, se retira o se elimina de la figura ese nuevo triángulo invertido, tal que solamente se conserven los tres triángulos equiláteros menores y similares que se observan dentro del grande. En las sucesivas iteraciones se aplica el mismo procedimiento de iteración para cada triángulo pequeño, obteniéndose, como resultado, un triángulo de Sierpinski.

Figura 6. Triángulo de Sierpinski

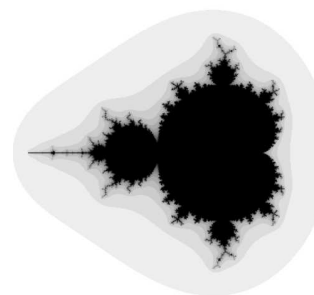


Fuente: [www.matematicas.unal.edu.co](http://www.matematicas.unal.edu.co)

#### 7.4.2.5 Fractales complejos.

Se generan mediante un algoritmo de escape. Para cada punto se calculan una serie de valores mediante la repetición de una fórmula hasta que se cumple una condición, momento en el cual se asigna al punto un color relacionado con el número de repeticiones. Los fractales de este tipo precisan de millones de operaciones, por lo cual sólo pueden dibujarse con la ayuda del ordenador. Una

Figura 7. Conjunto Julia

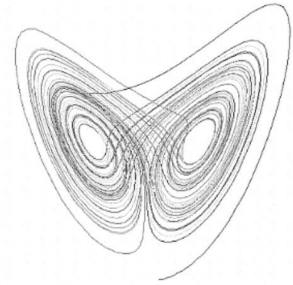


Fuente: [www.eduteka.org](http://www.eduteka.org)

Una clase importante de este tipo de fractales son los llamados conjuntos de Julia (mas exactamente el fractal obtenido de esta manera corresponde a lo que se conoce como la frontera del conjunto de Julia).

**7.4.2.6 Órbitas caóticas.** Este tipo de modelo nació con un estudio sobre órbitas caóticas desarrollado por Edward Lorenz en 1.963. El Atractor<sup>5</sup> de Lorenz tiene un comportamiento fractal, aunque caos y fractales no son sinónimos y tienen comportamientos distintos; comparten una formulación sencilla y existen varias interrelaciones entre los dos conceptos, algunos de los cuales aun están por explorar.

Figura 8. Atractor de Lorenz



Fuente: [www.fractales.org](http://www.fractales.org)

## 7.5 POLIEDROS

**7.5.1 Sólidos Platónicos. Orígenes.**<sup>6</sup> El origen de los sólidos platónicos como elemento para ser estudiado por las matemáticas se halla sin duda, en la antigua Grecia.

Figura 9. Sólidos Platónicos 2000 a C.



Fuente: [www.uam.es](http://www.uam.es)

La primera noticia que se conoce sobre estos poliedros, procede de un yacimiento neolítico en Escocia, donde se encontraron figuras de barro de aproximadamente 2000 a.C. Se cree que se trataba de elementos decorativos o, tal vez, de algún tipo de juego.

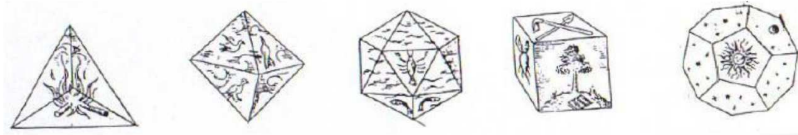
Es evidente que no había ninguna comprensión matemática de estos objetos, pero ya tenían identificados exactamente los cinco sólidos.

---

<sup>5</sup> Un atractor no es más que un punto o conjunto de ellos al cual tienden a aproximarse una parte de un conjunto fractal, el fractal se siente atraído. Por ejemplo si tomamos el problema clásico  $3n + 1$  se obtiene un atractor. <http://usuarios.lycos.es/sisar/fractales/fractales.php#26>

<sup>6</sup> [http://www.uam.es/personal\\_pdi/ciencias/barcelo/historia/Los%20solidos%20platonicos.pdf](http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Los%20solidos%20platonicos.pdf)

Figura 10. Sólidos Platónicos 2000 a C.



Fuente: [www.uam.es](http://www.uam.es)

Se cree que fue Empédocles (480 – 430 a.C.) quien por primera vez asoció el cubo, el tetraedro, el icosaedro y el octaedro a la tierra, el fuego, el agua y el aire respectivamente. Platón (447 – 347 a.C.) relacionó posteriormente el dodecaedro con la *sustancia de la que estaban compuestas las estrellas*, ya que por aquellos tiempos se pensaba que ésta habría de ser diferente a cualquiera de las de la tierra. En su diálogo Timeo, Platón pone en boca de Timeo de Locri estas palabras: “*El fuego está formado por tetraedros; el aire, de octaedros; el agua, de icosaedros; la tierra de cubos; y como aún es posible una quinta forma, Dios ha utilizado ésta, el dodecaedro pentagonal, para que sirva de límite al mundo*”. Desde entonces los sólidos pitagóricos pasaron a llamarse sólidos platónicos, nombre que conservan en la actualidad.

**Definición.** “...se dice por definición que un sólido platónico es un *poliedro regular*”<sup>7</sup>.

### 7.5.1.1 Propiedades

#### ▪ Regularidad

- Todas las caras de un sólido platónico son polígonos regulares iguales.
- En todos los vértices de un sólido platónico concurren el mismo número de caras y de aristas.

---

<sup>7</sup> Poliedro regular es aquel cuyas caras son todas polígonos regulares iguales, y todos sus diedros y ángulos poliedros también iguales. <http://perso.wanadoo.es/jpm/poliedros%20regulares/poliedros.html>

- Todas las aristas de un sólido platónico tienen la misma longitud.
- Todos los ángulos diedros que forman las caras de un sólido platónico entre sí son iguales.

- **Simetría**

- Todos ellos gozan de perfecta simetría central respecto a un punto del espacio (centro de simetría) que equidista de sus caras, de sus vértices y de sus aristas.
- Todos ellos tienen además simetría axial respecto a una serie de ejes de simetría que pasan por el centro de simetría anterior.
- Todos ellos tienen también simetría especular respecto a una serie de planos de simetría (o planos principales), que los dividen en dos partes iguales.


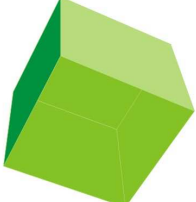
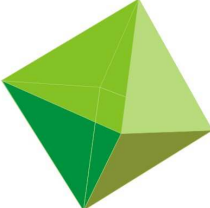


Como consecuencia geométrica de lo anterior, se pueden trazar en todo sólido platónico tres esferas particulares, todas ellas centradas en el centro de simetría del poliedro:

- Una esfera inscrita, tangente a todas sus caras en su centro.
- Una segunda esfera tangente a todas las aristas en su centro.
- Una esfera circunscrita, que pase por todos los vértices del poliedro.

- **Conjugación:** si se traza un poliedro empleando como vértices los centros de las caras de un sólido platónico se obtiene otro sólido platónico, llamado conjugado del primero, con tantos vértices como caras tenía el sólido inicial, y el mismo número de aristas. El poliedro conjugado de un dodecaedro es un icosaedro, y viceversa; el de un cubo es un octaedro; y poliedro conjugado de un tetraedro es otro tetraedro.

- **Esquema:** el teorema de poliedros de Euler fija que el número de caras de un poliedro más su número de vértices es siempre igual a su número de aristas más dos, es decir:  $c + v = a + 2$

Tabla1. Sólidos Platónicos

SÓLIDOS PLATÓNICOS		
TETRAEDRO		4 caras 6 aristas 4 vértices
HEXAEDRO REGULAR		6 caras 12 aristas 8 vértices
OCTAEDRO		8 caras 12 aristas 6 vértices
DODECAEDRO		12 caras 30 aristas 20 vértices
ICOSAEDRO		20 caras 30 aristas 12 vértices

Fuente: <http://es.wikipedia.org>

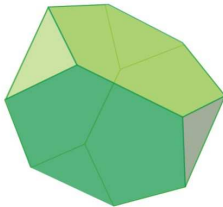
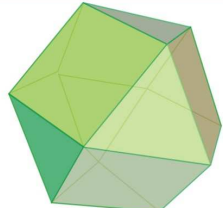
**7.5.2 sólidos de Arquímedes.** <sup>8</sup> Son un grupo de poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos. Todos los sólidos de Arquímedes son de vértices uniformes. La mayoría de ellos se obtienen truncando los sólidos platónicos.

Siete sólidos arquimedianos se pueden obtener truncando sólidos platónicos: el tetraedro truncado, el cuboctaedro, el cubo truncado, el octaedro truncado, el icosidodecaedro, el dodecaedro truncado y el icosaedro truncado.

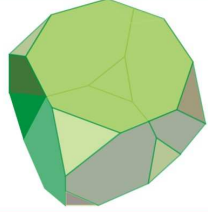
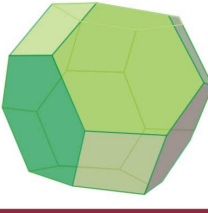

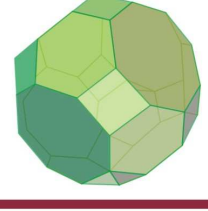
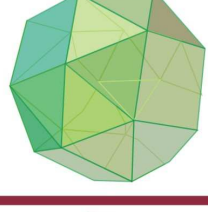
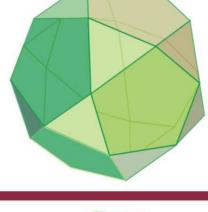
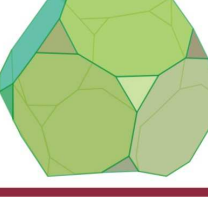
Los dos rombicuboctaedros se pueden obtener a partir del cuboctaedro mediante sucesivas operaciones de truncamiento y desplazamiento radial de las caras.

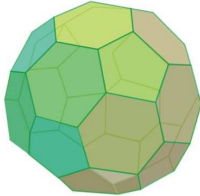
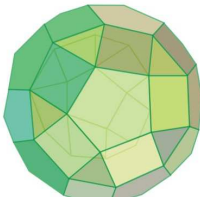
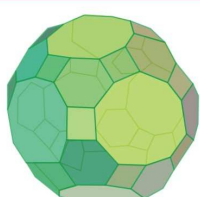

De forma similar, los dos rombicosidodecaedros se pueden obtener a partir del icosidodecaedro mediante sucesivas operaciones de truncamiento y desplazamiento radial de las caras.

Tabla 2. Sólidos de Arquímedes

SÓLIDOS DE ARQUÍMEDES		
TETRAEDRO TRUNCADO		8 caras 18 aristas 12 vértices
CUBOCTAEDRO		14 caras 24 aristas 12 vértices

<sup>8</sup> Sólidos arquimedianos - Wikipedia, la enciclopedia libre.mht

CUBO TRUNCADO		8 caras 12 aristas 6 vertices
OCTAEDRO TRUNCADO		14 caras 36 aristas 24 vertices
ROMBICUBOCTAEDRO		26 caras 48 aristas 24 vertices
CUBOCTAEDRO TRUNCADO		26 caras 72 aristas 48 vertices
CUBOCTAEDRO ROMO		38 caras 60 aristas 24 vertices
ICOSIDODECAEDRO		32 caras 60 aristas 30 vertices
DODECAEDRO TRUNCADO		32 caras 90 aristas 60 vertices

ICOSAEDRO TRUNCADO		32 caras 90 aristas 60 vertices
ROMBICOSIDODECAEDRO		62 caras 120 aristas 60 vertices
ICOSIDODECAEDRO TRUNCADO		60 caras 180 aristas 120 vertices
DODECAEDRO ROMO		92 caras 150 aristas 60 vertices

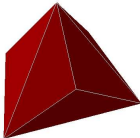
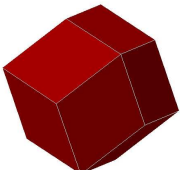




Fuente: <http://es.wikipedia.org>




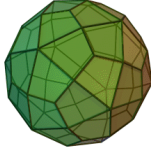



**7.5.3 sólidos de catalán.** Estos sólidos son una familia de poliedros que se generan con el dual de los sólidos de Arquímedes, fueron nombrados así por el matemático belga Eugène Charles Catalan.

Todos son poliedros convexos de caras uniformes aunque no son de vértices uniformes, esto ocurre ya que los Sólidos de Arquímedes que los generan son de vértices uniformes y no de caras uniformes; las caras que forman un sólido de Catalán no son polígonos regulares, pero sus ángulos diédricos son iguales en todo el poliedro. Además dos de ellos son poliedros de Aristas uniformes: el

rombododecaedro y el triacontaedro rómbico y dos de ellos tienen figura isomórfica: el Icositetraedro pentagonal y el Hexecontaedro pentagonal.

Tabla 3. Sólidos de catalán

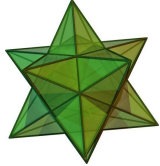
<b>SÓLIDOS DE CATALAN</b>		
Nombre: Triaquistetraedro Dual:Tetraedro truncado Cara:Triángulos Isósceles		12 caras 18 aristas 8 vertices
Nombre: Rombododecaedro Dual:Cuboctaedro Cara:Rombos		12 caras 24 aristas 14 vertices
Nombre: Triaquisoctaedro Dual:Cubo truncado Cara:Triángulos Isósceles		24 caras 36 aristas 14 vertices
Nombre: Tetraquishexaedro Dual:Octaedro truncado Cara:Triángulos Isósceles		24 caras 36 aristas 14 vertices
Nombre: Icositetraedro deltoidal Dual:Rombicuboctaedro Cara:Deltoides		24 caras 48 aristas 26 vertices
Nombre: Hexaquisoctaedro Dual:Cuboctaedro truncado Cara:Triángulos escalenos		48 caras 72 aristas 26 vertices

<p>Nombre: Triacontaedro rómbico Dual:Icosidodecaedro Cara:Rombos</p>		<p>30 caras 60 aristas 32 vertices</p>
<p>Nombre: Triaquisicosaedro Dual:Dodecaedro truncado Cara:Triángulos Isósceles</p>		<p>60 caras 90 aristas 32 vertices</p>
<p>Nombre: Pentaquisdodecaedro Dual:Icosaedro truncado Cara:Triángulos isósceles</p>		<p>60 caras 90 aristas 32 vertices</p>
<p>Nombre: Hexecontaedro deltoidal Dual:Rombicosidodecaedro Cara:Deltoides</p>		<p>60 caras 120 aristas 62 vertices</p>
<p>Nombre: Hexaquisicosaedro Dual:Icosidodecaedro truncado Cara:Triángulos Escalenos</p>		<p>120 caras 180 aristas 62 vertices</p>
<p>Nombre: Icositetraedro pentagonal Dual:Cubo romo Cara:Pentágonos Irregulares</p>		<p>24 caras 60 aristas 38 vertices</p>
<p>Nombre: Hexecontaedro pentagonal Dual:Icosidodecaedro romo Cara:Pentágonos irregulares</p>		<p>60 caras 150 aristas 92 vertices</p>

Fuente: <http://es.wikipedia.org>

**7.5.4 poliedros estrellados.** Johann Kepler (1571-1630) estudió los poliedros estrellados, obtenidos a partir del pentagrama de los pitagóricos. La diferencia principal de estos poliedros estrellados con el resto es que son cóncavos. Hay cuatro, dos de puntas estrelladas con pirámides pentagonales y otros dos de puntas estrelladas con pirámides triangulares. Kepler los llamó gran y pequeño dodecaedro estrellado (de 12 puntas) y gran y pequeño icosaedro estrellado (de 20 puntas).

Tabla 4. Sólidos de Kepler

SOLIDOS DE KEPLER		
Pequeño dodecaedro estrellado		12caras 30 aristas 12 vértices
Gran dodecaedro estrellado		12caras 30 aristas 20 vertices
Gran icosaedro		20caras 30 aristas 12 vertices
Gran dodecaedro		12caras 30 aristas 12 vértices

Fuente: <http://es.wikipedia.org>

## 7.6 CRISTALOGRAFÍA

La palabra **crystal** se asocia principalmente con uno de los tres estados de la materia: los sólidos, a pesar de que existen sólidos que no son cristalinos y líquidos que si lo son.

La definición principal de la cristalografía es: La rama de la ciencia que trata de la geometría, propiedades y estructuras de las sustancias cristalinas.

La propiedad visible más noble de los cristales es su forma geométrica, los cristales generalmente tienen superficies planas y estas superficies se hallan ordenadas en relaciones definidas entre sí.

Es por esta razón que la Cristalografía Geométrica: Estudia a los agrupamientos externos de los planos cristalinos y formas geométricas de los cristales, basándose en las tres leyes fundamentales:

- 1. Ley de la constancia de los ángulos interfaciales.**
- 2. Ley de la racionalidad de los índices**
- 3. Ley de simetría.**

**LA LEY DE LA CONSTANCIA** de los ángulos interfaciales establece que para una sustancia, las caras correspondientes a los planos que forman la superficie externa de un cristal interceptan en un ángulo definido, y éste permanece constante, sin importar como desarrollan las caras que comúnmente lo hacen en forma desigual en tamaño y forma, pero el ángulo de intersección de dos caras correspondientes, es siempre la misma, para cualquier cristal de la misma sustancia.

**LA LEY DE LA RACIONALIDAD** de los índices o parámetros, establece la posibilidad de elegir a lo largo de tres ejes coordenadas distintas unitarias: **a**, **b**, y **c**, que son NO forzosamente iguales entre sí, tales intersecciones en un plano están dadas por: **ma**, **nb** y **pc**; donde **m**, **n** y **p** son números enteros incluso infinito o fracciones de números enteros.

Los coeficientes **a**, **b** y **c** se denominan **INDICES DE WEISS** del plano, pero también existen los llamados **INDICES DE MILLER**, que se obtienen tomando los recíprocos de los índices de Weiss y multiplicándolos por el número menor recíproco en números enteros.

**LA LEY DE LA SIMETRIA** establece que todos los cristales de la misma sustancia poseen los mismos elementos de simetría, de la cual existen tres tipos posibles.

1. Un cristal se divide por un plano imaginario que pasa por su centro, en dos mitades iguales entre sí que son la una imagen de la otra, se dice entonces que el cristal posee un plano de simetría.

2. Un cristal tiene una línea de simetría si es posible dibujar una línea imaginaria que pase por su centro de manera que al hacerlo girar 360° , el cristal aparece sin cambio dos, tres, cuatro o seis veces, y en función a este grado de repetición se dice que posee un eje de simetría binario, terceario, cuaternario o senario.

4. El cristal posee un centro de simetría, si cada cara tiene otra idéntica en el lado opuesto de este centro.

## **SISTEMAS CRISTALINOS**

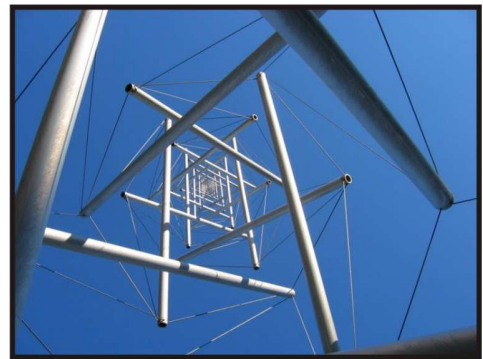
1. Cúbicos.
2. Tetragonal.
3. Hexagonal.

4. Ortorrómbico u ortogonal.
5. Monoclínico.
6. Triclínico.

## 7.7 TENSEGRITY

La tensegridad se define como la característica que exhiben determinadas estructuras, cuya estabilidad depende del equilibrio entre fuerzas de tensión y compresión. Las estructuras de tensegridad fueron exploradas por el artista Kenneth Snelson, produciendo esculturas como Needle Tower, de 18 metros de altura y construida en 1968.

Figura 11. Escultura Needle Tower 1868.



Fuente: <http://es.wikipedia.org/wiki/Tensegridad>

Esta estructura es mecánicamente estable debido a la manera que balancea y que distribuye las fuerzas de la compresión y de la tensión. Los elementos de la compresión (los puntales o los huesos) y los elementos del tensional (los cables o los músculos y los tendones elásticos) proporcionan estabilidad mecánica a este sistema del tensegrity del cuerpo<sup>9</sup>.

## 7.8 FIBONACCI

En matemáticas, la sucesión de Fibonacci es la sucesión infinita de números naturales:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 . . .

Donde el primer elemento es 0, el segundo es 1 y cada elemento restante es la suma de los dos anteriores. A cada elemento de esta sucesión se le llama número

---

<sup>9</sup> <http://es.wikipedia.org/wiki/Tensegridad>

de Fibonacci. Esta sucesión fue descrita en Europa por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII también conocido como Fibonacci.

### 7.8.1 La sucesión de Fibonacci, el número áureo y la sección áurea en la naturaleza.

La secuencia de Fibonacci se puede encontrar en la naturaleza, en la que la flor del girasol, por ejemplo, tiene veintiuna espirales que van en una dirección y treinta y cuatro que van en la otra; ambos son números consecutivos de Fibonacci. La parte externa de una piña piñonera tiene espirales que van en sentido de las manecillas del reloj y otras que lo hacen en sentido contrario, y la

Figura 12. Girasol



Fuente: [www.thelifeportfolio.wordpress.com](http://www.thelifeportfolio.wordpress.com)  
proporción entre el número de unas y otras espirales tiene valores secuenciales de Fibonacci. En las elegantes curvas de una concha de nautilus, cada nueva circunvolución completa cumplirá una proporción de 1: 1,618, si se compara con la distancia desde el centro de la espiral precedente.

Para que las hojas o las ramas de una planta, colocadas en hélice ascendente sobre la rama o el tronco, tengan el máximo de insolación con la mínima interferencia entre ellas, éstas deben crecer separadas según un ángulo constante igual a  $360^\circ (1 - \varphi) \approx 137^\circ 30' 27,950 580 136 276 726 855 462 662 132 999\dots$ " Para el cálculo se considera iluminación vertical y el criterio matemático es que las proyecciones horizontales de unas sobre otras no se recubran exactamente. Aunque la iluminación del Sol no es, en general, vertical y varía con la latitud y las estaciones, esto garantiza el máximo aprovechamiento de la luz solar. Este hecho fue descubierto empíricamente por Church y confirmado matemáticamente por Weisner en 1875. La letra griega  $\varphi$  representa a la sección áurea, aproximadamente igual a 0,618 033 988 7...

## 7.9 MOVIMIENTO BROWNIANO

El **movimiento browniano** es el movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas nanoscópicas que se hallan en un medio fluido (por ejemplo polen en una gota de agua).

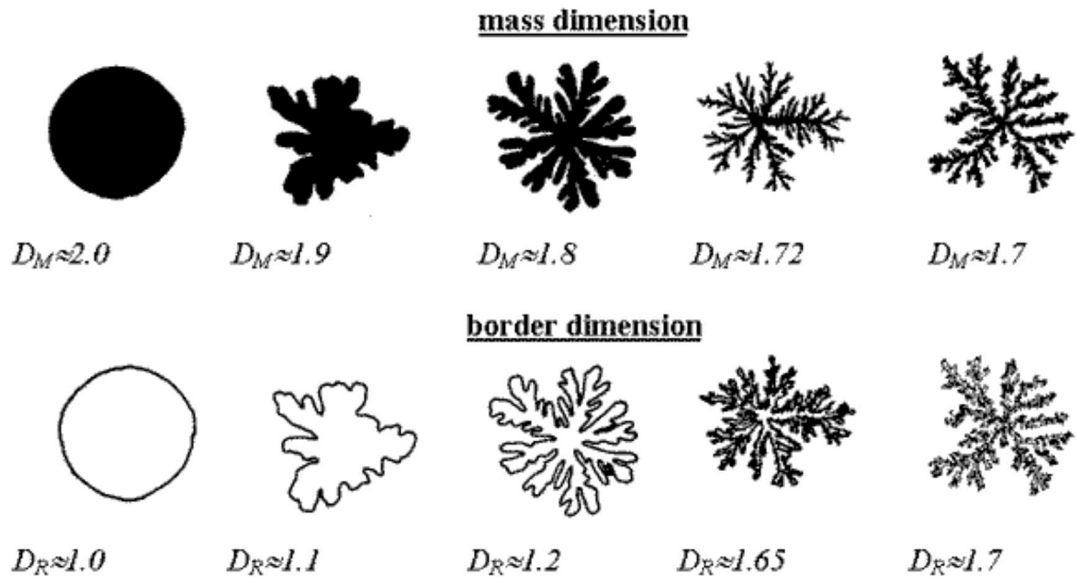
El movimiento aleatorio de estas partículas se debe a que su superficie es bombardeada incesantemente por las moléculas del fluido sometidas a una agitación térmica. Este bombardeo a escala atómica no es siempre completamente uniforme y sufre variaciones estadísticas importantes. Así la presión ejercida sobre los lados puede variar ligeramente con el tiempo provocando el movimiento observado.

El movimiento browniano también tiene importantes aportaciones al crecimiento fractal. Existe un proceso denominado *DLA* (Agregación por difusión limitada), que permite reproducir el crecimiento de algunas entidades vegetales como musgos, algas o líquenes y de procesos químicos como electrolisis o cristalización de ciertos compuestos.

Este proceso de *DLA* es extremadamente simple y consiste en liberar un número de partículas móviles dentro de un recinto acotado donde previamente habremos fijado una o más partículas. Las partículas liberadas permanecen en movimiento browniano hasta que alcanzan una celda contigua a una partícula fija, en cuyo caso se fijan también y sirven a su vez para poder capturar alguna de las partículas que continúan en movimiento. Si se modifica el movimiento browniano por otro que tenga preferencia por alguna dirección, se puede conseguir que determinadas zonas del recinto estén más pobladas y se crezca más deprisa, o bien modificando el número de las partículas y la zona donde se sitúan o la forma del recipiente que las contiene.

Ejemplo en el que se observa la variación de los valores de la dimensión de masa y de la dimensión del contorno calculada por el método del compás en los siguientes DLA.

Figura 13. Variación dimensión masa y dimensión contorno



Fuente: <http://sabia.tic.udc.es>

## 7.10 BIÓNICA

Etimológicamente la palabra biónica viene del griego “Bion” que traduce elemento de vida y del prefijo “Icos” que traduce estudios.<sup>10</sup> Otro termino conocido es la Biomimética: « del bios, que significa vida y mimesis, queriendo imitar.<sup>11</sup>

El diseñador italiano Carmelo Di Bartolo, la define como **“el estudio de las formas de vida”**. Tomándose de esta definición, presenta la Biónica como una actividad tan antigua como el hombre “la observación, el estudio de la naturaleza en sus formas y en las estructuras de sus componentes, con el fin de sacar más información de su medio ambiente”.

<sup>10</sup> <http://es.wikipedia.org/wiki/Bionica>.

<sup>11</sup> ENTREVISTA con Janine Benyus, Autor de “Innovación inspirada por la Naturaleza (1997)

Bruno Munari, en su libro ¿Cómo Nacen Los Objetos? establece que la Biónica “estudia los sistemas vivientes y tiende a descubrir procesos, técnicas y nuevos principios aplicables a la tecnología.

Figura 14. Vehículo Biónico



Fuente: [www.diariomotor.com](http://www.diariomotor.com)

Gui Bonsiepe, la define como “el estudio de sistemas vivientes para aplicar a las tecnologías sus principios técnicos y procedimientos.

La biónica busca como objetivo el análisis de estructuras existentes en la naturaleza, de fenómenos biológicos y el funcionamiento de los organismos, para posteriormente adaptar los conceptos básicos incluidos, tanto en las estructuras como en los fenómenos y aplicarlos para el aprendizaje y desarrollo de sistemas y productos funcionales para el hombre. La biónica logra recrear los entornos naturales, construyendo un ambiente que incluya las características y condiciones en que se desarrollan los modelos naturales, para hacer funcionales y reales el trabajo de los modelos artificiales a diseñar y los existentes.

### **7.11 LA GEOMETRÍA NATURAL**

“La geometría natural son las formas y estructuras con una segura eficacia mecánica que permite la adaptación y acumulación de otros elementos naturales.”<sup>12</sup>

### **7.12 BIOMIMÉTICA**

Es una ciencia que estudia los modelos naturales y los imita o toma información de ellos y los procesa para resolver problemas humanos.

### **7.13 BIOFORMA**

Forma de vida. Categorización de los individuos mediante su agrupación en tipos biológicos básicos, cuando un carácter supuestamente importante es muy notorio y se manifiesta en la mayoría de las especies<sup>13</sup>.

Es cada una de las formas biológicas que aparecen como resultado de la adaptación de los organismos al medio ambiente<sup>14</sup>.

---

<sup>12</sup> . Lozano Crespo, Pedro; Garceran Piqueras, Rosa. El diseño natural, aproximación histórica, metodologías, aplicación y consecuencias. Universidad Complutense de Madrid. España. 2006.

<sup>13</sup> Diccionario de la biodiversidad.

<sup>14</sup> <http://www.conocimientosweb.net/portal/term896.html>

## 8. GENERALIDADES DE DISEÑO



### 8.1 MÓDULO, SUBMÓDULO Y SUPERMÓDULO

- **Módulo:** Diseño compuesto por una cantidad de formas idénticas o similares entre si, que aparecen mas de una vez en el mismo.
- **Submódulo:** Elementos mas pequeños que son utilizados en repetición y componen un módulo.
- **Supermódulo:** compuesto por módulo que se organizan y agrupan formando una figura mayor.

### 8.2 INTERRELACIÓN FORMAL

Las formas pueden encontrarse entre si de diferentes maneras. Hemos demostrado que cuando una forma se superpone a otra, los resultados no son tan simples como los hubiéramos creído.

Figura 15. Interrelación formal


<b>DISTANCIAMIENTO:</b> AMBAS FORMAS QUEDAN SEPARADAS ENTRE SI; AUNQUE PUEDAN ESTAR MUY CERCANAS.	
<b>TOQUE:</b> si acercamos ambas formas, comienzan a tocarse.	

<p><b>SUPERPOSICION:</b> si acercamos aun mas ambas formas. Una se cruza sobre otra y parece estar por encima, cubriendo una porción de la que queda debajo.</p>	
<p><b>PENETRACION:</b> igual que la superposición, pero ambas formas parecen transparentes.</p>	
<p><b>UNION:</b> igual que la superposición, pero ambas formas quedan reunidas y se convierten en una forma nueva y mayor.</p>	
<p><b>SUSTRACCION:</b> cuando una forma invisible se cruza sobre otra visible, el resultado es una sustracción.</p>	
<p><b>INTERSECCION:</b> igual que en la penetración, pero solamente es visible la porción en que ambas formas se cruzan entre si.</p>	

Fuente: Autor

### 8.3 TEORÍA DEL COLOR

El color es un elemento básico a la hora de elaborar un mensaje visual. Muchas veces, el color no es un simple atributo que recubre la forma de las cosas en busca de la fidelidad reproducida. A pesar de que, sin el color la forma permanece, con frecuencia el Mensajes es, precisamente, el Color, o lo que sólo puede expresarse por el Color.

A vertical bar on the left side of the page, showing a color gradient from blue at the top to yellow at the bottom, passing through purple, red, and orange.

Más allá de la mera identificación o asociación, el color también se puede emplear para crear experiencias. El publicista representa el producto en su anuncio mediante la forma, pero añade las cualidades del color. El color puede llegar a ser la traducción visual de nuestros sentidos, o despertar éstos mediante la gama de colores utilizados. Podremos dar sensación de frío, de apetecible, de rugoso, de limpio...

El color está presente en todos los aspectos de la identidad empresarial y de marca. En la identidad, las empresas pueden hacer que el color sea el principal elemento de su identidad utilizando un único color o una paleta de colores como parte de su identidad visual. Si el color se emplea uniformemente en una serie de elementos de la identidad, se termina convirtiendo en la rúbrica de la empresa.

Aprender a ver el color y obtener una interpretación de sus propiedades inherentes ha de ser el punto de partida si deseamos realizar un tratamiento eficaz de éste en las distintas aplicaciones gráficas que hagamos. Podemos establecer diversas clasificaciones de color. Por ejemplo esta clasificación de "Grafismo Funcional" (Abraham Moles/ Luc Janiszewski):

- Los policromos, o gama cromática. Compuesto por colores diversos que encuentran su unidad en la común saturación de los colores.
- Los camafeos, o matizaciones alrededor de una coloración principal. Puede haber tantos camafeos como colores. No obstante, cabe distinguir en primer lugar el camafeo cálido (compuesto de tonos que giran alrededor del rojo y del naranja) del camafeo frío (compuesto por tonos alrededor del azul cyan y del verde).

- Los agrisados, que comportan colores variados muy cercanos al blanco (tonos pastel) o al negro (tonos oscuros) o al gris (tonos quebrados).
- Los neutros, que componen un conjunto únicamente blanco y negro o que pueden comprender grises escalonados.

#### 8.4 GEOMETRIZACIÓN

Consiste básicamente en convertir en la mayoría de los casos una figura orgánica en un elemento que solo contenga figuras geométricas. De esta manera se pueden obtener módulos a partir de un principio cualquiera.


Figura 16. Geometrización



Fuente: autor

#### 8.5 TRATAMIENTO DE LA FORMA

Figura 17. Tratamiento de la forma

VARIABLES	DESCRIPCION
<p style="text-align: center;">TAMAÑO</p> 	<p>El tamaño hace referencia a la dimensión y volumen del objeto.</p> <p>El tamaño es importante en nuestro proyecto, pues es una de las características importantes en los fractales su auto-similitud a cualquier escala.</p>

<p style="text-align: center;">TEXTURA</p> 	<p>La textura es un elemento visual, en donde las superficies de los objetos tiene ciertas características, que puede ser descrita como: suave o rugosa, lisa decorada, opaca o brillante, blanda o dura.</p> <p>En el diseño la textura puede ser un factor de contraste muy útil para diferenciar dos zonas en una misma figura y que podremos emplear ya sea de manera formal o funcional.</p>
<p style="text-align: center;">MATERIAL</p> 	<p>En este proyecto debemos trabajar con varios materiales antes de tomar una buena decisión pues de este depende el éxito del mismo y la complejidad o costo del proyecto.</p>
<p style="text-align: center;">GRADACION</p> 	<p>Experiencia visual donde el modulo, sufre un cambio gradual ya sea en su forma o en su tamaño de una manera ordenada.</p> <p>La gradación así como todos los conceptos existentes, puede enriquecerse al ser combinada con los conceptos de interrelación formal ya mencionados.</p>

Fuente: Autor

Experiencia visual donde el módulo, sufre un cambio gradual ya sea en su forma o en su tamaño de una manera ordenada.

## 9. ANÁLISIS DEL ESTADO ACTUAL

### 9.1 MATERIAL ELABORADO POR ESTUDIANTES

En la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander los alumnos de la asignatura Geometría Moderna han construido algunas representaciones tridimensionales de los fractales principales, obteniendo modelos de poca calidad estructural y funcional; a continuación se presentan algunos de estos modelos que son elaborados con cartulina y plásticos de baja densidad.

Figura 18. Triángulo de Sierpinski



Fuente: Autor

Figura 19. Esponja de Menger



Fuente: Autor

Figura 20. Carpeta de Sierpinski



Fuente: Autor

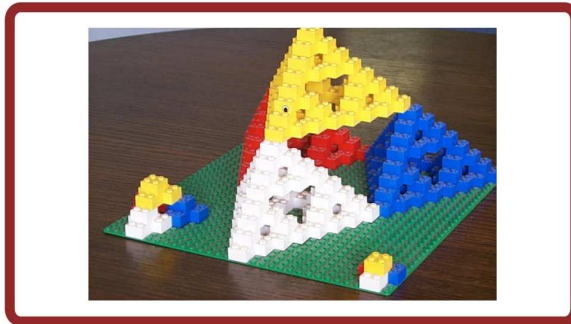
Figura 21. Esponja de Menger - Modelo en acrílico



Fuente: Autor

## 9.2 MATERIAL COMERCIAL

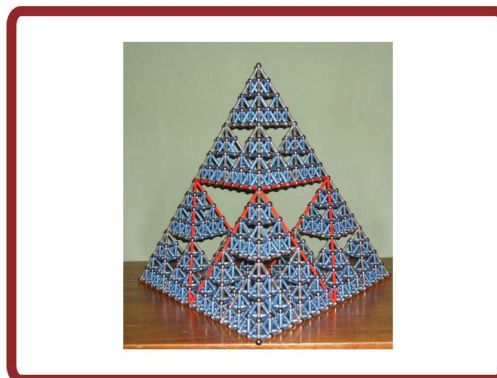
Figura 22. Triángulo de Sierpinski - Construcción a partir del lego



*Existen juegos de armar como el lego que permiten construir algun tipo de fractal como se observa en la figura 22; sin embargo este juego no esta diseñado para la enseñanza de los fractales.*

Fuente: [www.sci.usq.edu.au](http://www.sci.usq.edu.au)

Figura 23. Triángulo de Sierpinski - Construcción a partir del Geomag

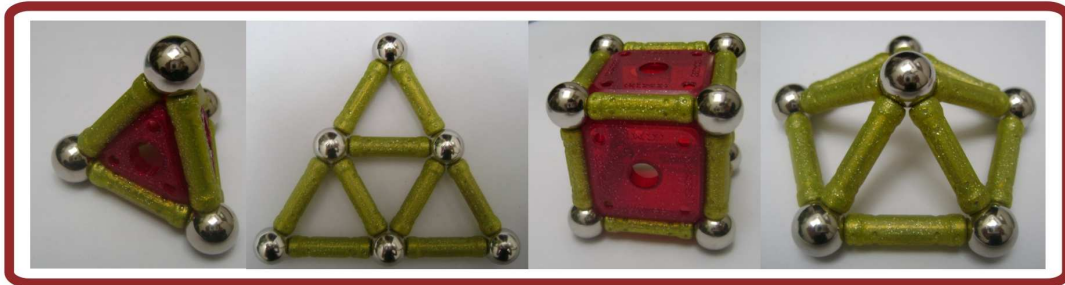


Fuente: [www.flickr.com](http://www.flickr.com)

Figura 24. Construcciones a partir del Geomag



*El Geomag es un juego diseñado para la creación de estructuras pues consta de elementos lineales, nodos y planos que a través de imanes permiten la construcción de los mismos; con el también se pueden construir la estructura de los fractales básicos como se observa en las figuras 23, 24 y 25.*

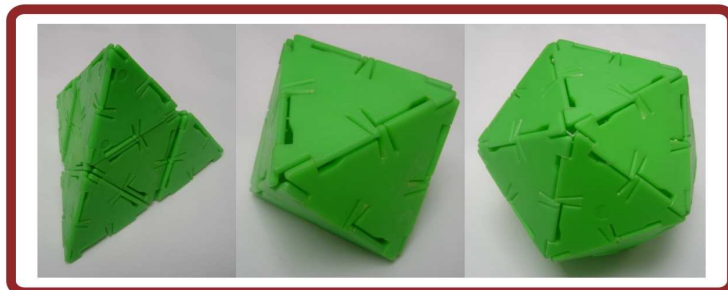


Fuente: autor

Figura 25. Sistema Lúdico a partir de triángulos



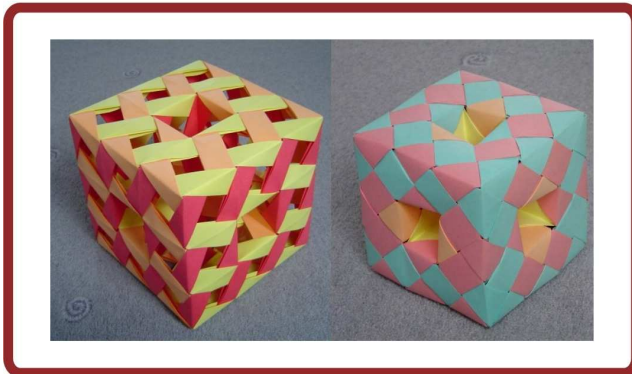
*Este sistema lúdico permite la construcción de poliedros a través de la unión por presión en sus aristas pues su material y su diseño así lo permiten; con más detalles de color o perforaciones, podría apreciarse la construcción del triángulo de sierpinski*



Fuente: autor

### 9.3 FRACTALES EN ORIGAMI

Figura 26. Esponja de Menger



*De la figura 26-28 se puede apreciar la construcción de fractales a partir de papel que por su variedad de colores se pueden crear figuras de muy buenos contrastes, pero la calidad del objeto es muy baja si se piensa en un uso continuo.*

Fuente: [www.flickr.com](http://www.flickr.com)

Figura 27. Tetraedro de Sierpinski



Fuente: [www.flickr.com](http://www.flickr.com)

Figura 28. Curva de Koch en 2D y 3D



Fuente: [www.flickr.com](http://www.flickr.com)

## 9.4 SOFTWARE LIBRE

Existen infinidad de software libres para la generación de fractales, a continuación se muestran algunos y las características que poseen:

- **Fractinr:** ofrece más de 100 tipos diferentes de fractales, soporte para fractales IFS y Lindenmayer, posibilidad de crear nuevos tipos personalizados, a partir de fórmulas definidas por el usuario, capacidad de zoom rápida y profunda, gran variedad de modos de pantalla (reales o virtuales), tanto en tamaño como en profundidad de color, multitud de opciones de deformación, coloreado, y muestreo. Para cualquier tipo de fractal, transformaciones a estructuras tridimensionales, estereogramas, superficies, campos de gradiente entre otras.<sup>15</sup>
- **Ultra fractal:** Es un duro competidor de Fractinr y ofrece las mismas opciones de trabajo.<sup>16</sup>
- **S.C. Ferguson:** S.C. Ferguson ha creado todo un universo de programas de fractales (Iterations, Flarium, Tierazon, GrafZViZion, InkBlot, Talis, RootIFS, Atriatix, Vchira, Ktaza...). Son aplicaciones de 32 bits para Win32, con todas las ventajas que ello conlleva en cuanto a interfaz, compatibilidad y funcionamiento. Por contra necesitan una máquina algo más potente para funcionar que en el caso de Fractint y otros programas DOS.<sup>17</sup>
- **Fractal Orbits:** Phil Packard ofrece un buen número de posibilidades gráficas para la creación de imágenes fractales a través de este programa, generando órbitas a partir de zonas específicas de un fractal. Fractal Orbits utiliza el formato

---

<sup>15</sup> <http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html>

<sup>16</sup> <Http://www.ultrafractal.com>

<sup>17</sup> <Http://www.electasy.com/Iterations-et-Flarium24>

GIF para el almacenamiento de datos, lo que permite guardar los parámetros fractales junto con la imagen en el mismo archivo.<sup>18</sup>

## 9.5 CONCLUSIONES

- El material del que esta provisto la Escuela de Matemáticas para la enseñanza de los fractales, no es apto por su nivel de calidad bajo, debido a los materiales de los que están fabricado.
- El material que se encuentra comercialmente no esta diseñado exclusivamente para la creación de fractales o como ayuda didáctica en la enseñanza de los mismos; además su costo es mas alto por los materiales que emplean para su creación.

---

<sup>18</sup> [Http://spanky.triumf.ca/www/welcome1.html](http://spanky.triumf.ca/www/welcome1.html)

## 10. PROCESO DE DISEÑO

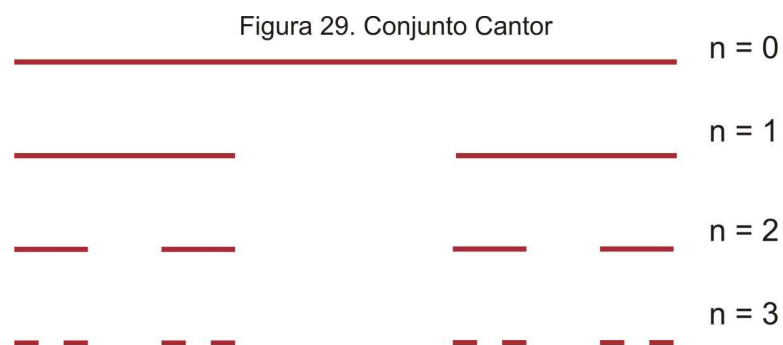
### 10.1 SELECCIÓN DE MATERIAL DE ESTUDIO

En esta etapa se mencionan algunos fractales y formas naturales que presentan el concepto de la teoría fractal y que serán estudiados y seleccionados según su riqueza formal y mayor aporte en el proceso de diseño permitiendo cumplir con los objetivos del proyecto.

#### 10.1.1 Fractales básicos

**10.1.1.1 Conjunto Cantor.** El conjunto de Cantor toma su nombre de George F. L. P. Cantor que en 1883 lo utilizó como herramienta de investigación para una de sus principales preocupaciones: el continuo. Su verdadero creador fue Henry Smith, un profesor de geometría de Oxford, en 1875. Es uno de los fractales más antiguos. Para obtenerlo se procede del siguiente modo:

Partimos de un segmento de longitud =  $L$  el cual dividimos en tres sub segmentos de tamaño  $1/3$  cada uno. Borrarnos el central y nos quedamos con los intervalos cerrados restantes<sup>19</sup>:

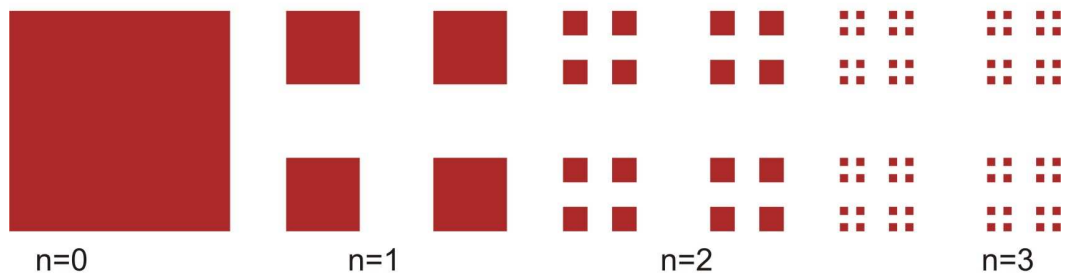


Fuente: Autor

<sup>19</sup> [www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/5.html](http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/5.html)

A continuación observamos que el mismo proceso puede ser aplicado a un cuadrado. El conjunto final estará constituido de nuevo por una cantidad no numerable de puntos.

Figura 30. Conjunto Cantor a partir de un cuadrado

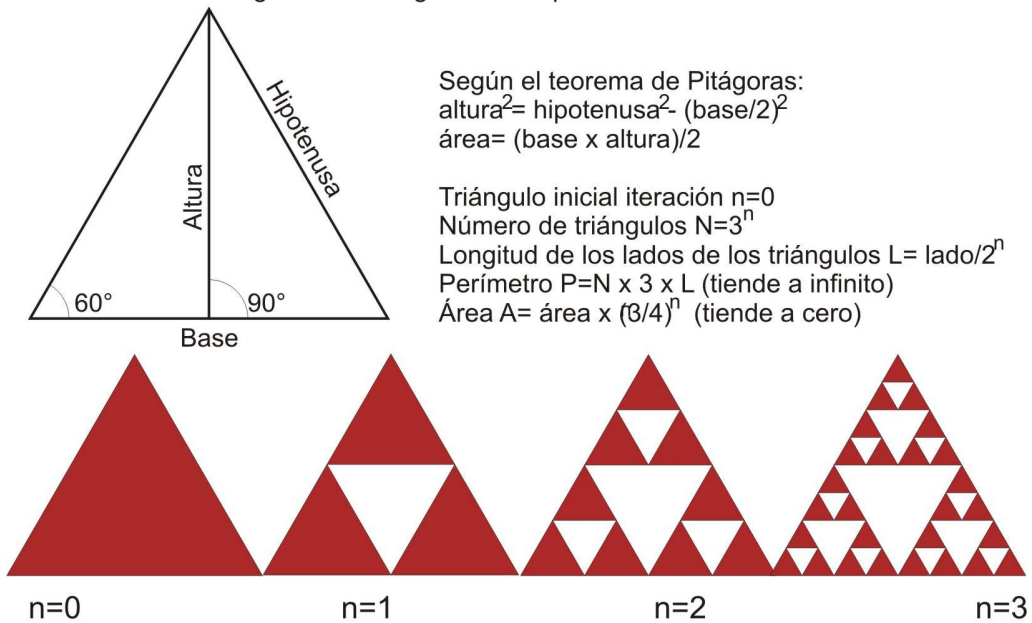


Fuente: Autor

**10.1.1.2 Triángulo de Sierpinski.** Waclaw Sierpinski, diseña en 1919 el fractal llamado triángulo de Sierpinski. Parte de un triángulo equilátero de lado 1 (altura  $3/4$  y área  $3/8$ ). A partir de los puntos medios de cada lado, se construye un triángulo equilátero invertido de  $1/2$  que recorta. El proceso se repite con cada uno de los 3 triángulos que quedan. El resultado de la primera iteración son 3 triángulos de lado  $1/2$  y de área  $3/4$  del inicial. Cada triángulo se puede descomponer en tres copias auto similares en todas las escalas. Construcciones semejantes se pueden realizar con otras figuras geométricas. En lugar de llenar el plano se desvanecen<sup>20</sup>.

<sup>20</sup> [www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/5.html](http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/5.html)

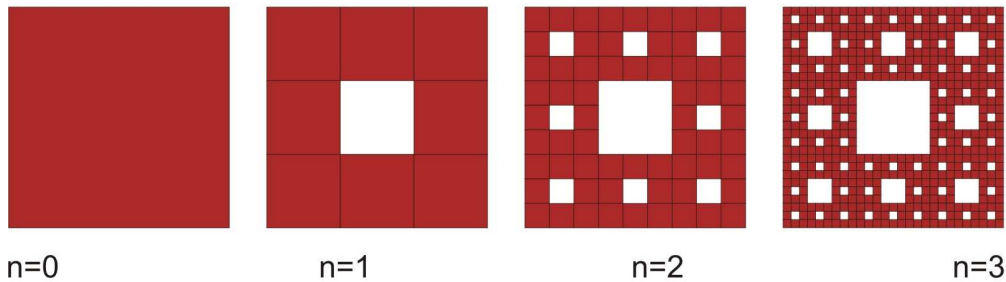
Figura 31. Triángulo de Sierpinski



Fuente: Autor

**10.1.1.3 Alfombra de Sierpinski y Esponja de Menger.** El proceso de elaboración de la alfombra de Sierpinski es muy semejante a su triángulo. Dividimos un cuadrado de lado unidad inicial en nueve cuadrados idénticos y recortamos el central. Repetimos el proceso en cada iteración.

Figura 32. Alfombra de Sierpinski

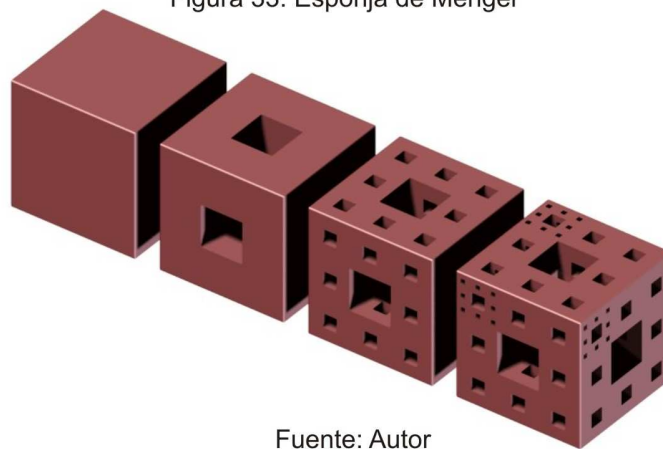


Cuadrado inicial iteración  $n=0$   
 Numero de cuadrados  $N=8^n$   
 Longitud de los lados de los triángulos  $L=lado/3^n$   
 Perímetro  $P=N \times 4 \times L$  (tiende a infinito)  
 Área  $A=L^2 \times N$  (tiende a cero)

Fuente: Autor

Si partimos de un cubo en tres dimensiones y aplicamos un proceso semejante al de la alfombra de Sierpinski, obtendremos la esponja de Menger. En vez de eliminar pequeños cuadrados, eliminamos pequeños cubos<sup>21</sup>.

Figura 33. Esponja de Menger



Fuente: Autor

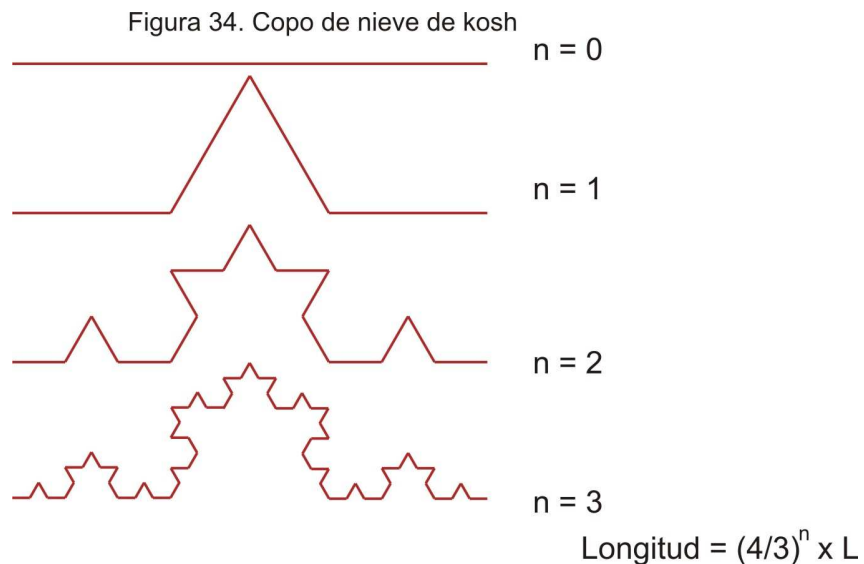
**10.1.1.4 Curva y Copo de nieve de Koch.** Es uno de los primeros fractales definido por Niels Helge von Koch en 1904. Esta curva se trataba de una curva

<sup>21</sup> [www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/5.html](http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/5.html)

matemáticamente "imposible" porque de ella se deducen estas tres características:

- No es posible trazar una tangente en ningún punto de su perímetro.
- La longitud entre dos puntos de su perímetro es infinita.
- La curva encierra un área finita.

La curva de von Koch presenta las mismas características que la costa de una isla. Luego, es correcto afirmar que "la longitud de la costa de Inglaterra es infinita". Si no lo parece es por la RESOLUCIÓN utilizada, es decir, el perímetro depende de la escala en la que se trabaje.



Fuente: Autor

El Copo de nieve de Kosh fue ideado por Koch de forma similar al anterior pero a partir de los lados de un triángulo equilátero<sup>22</sup>.

<sup>22</sup> [mosaic.uoc.edu/practicas/MatematicasII/asanchezfo\\_PAC1/fractales/web/fractales\\_koch.htm](http://mosaic.uoc.edu/practicas/MatematicasII/asanchezfo_PAC1/fractales/web/fractales_koch.htm)  
[www.dmae.upm.es/cursosfractales/capitulo1/5.html](http://www.dmae.upm.es/cursosfractales/capitulo1/5.html)

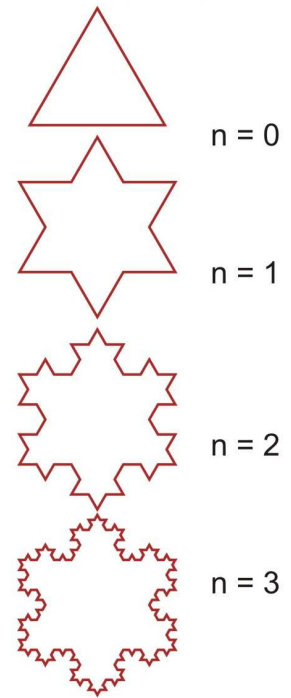
Figura 35. Copo de nieve de kosh a partir de un triángulo equilátero

- Se parte de un triángulo equilátero de lado unidad.

- Dividimos en tres partes iguales de longitud  $1/3$  cada lado. Sustituimos el segmento central por dos segmentos de tamaño idéntico formando un diente.

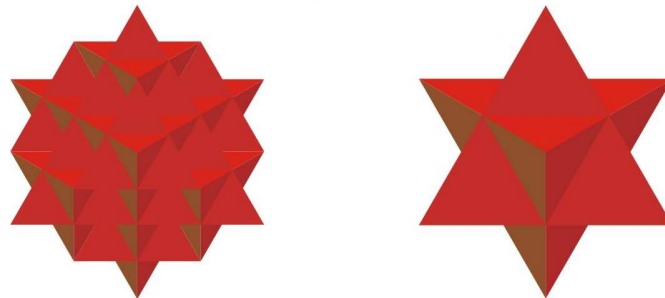
- Repetimos la operación con cada uno de los cuatro nuevos Segmentos de cada uno de los "lados".

- La iteración indefinida nos proporciona la isla de Koch O copo de nieve de Koch.



Fuente: Autor

Figura 36. Copo de nieve de kosh



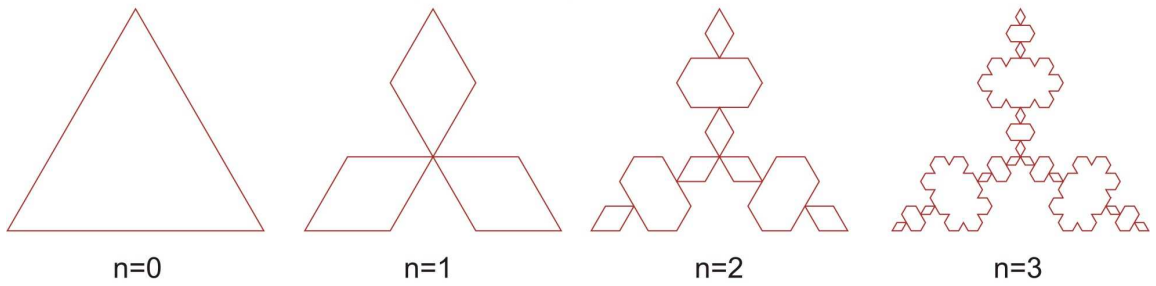
10.1.1.5  
Copo de

Fuente: Autor

Variantes del  
nieve de Koch.

**A. Anticopo de nieve de Kosh:** Se construye de manera similar al anterior pero las iteraciones son hacia el interior de la figura.

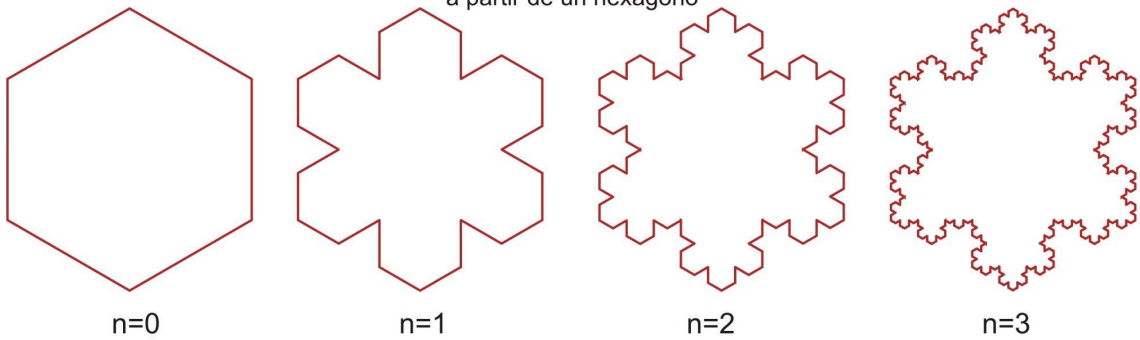
Figura 37. Anticopo de nieve de kosh



Fuente: Autor

La siguiente variante parte originalmente de un hexágono, en vez de un triángulo equilátero:

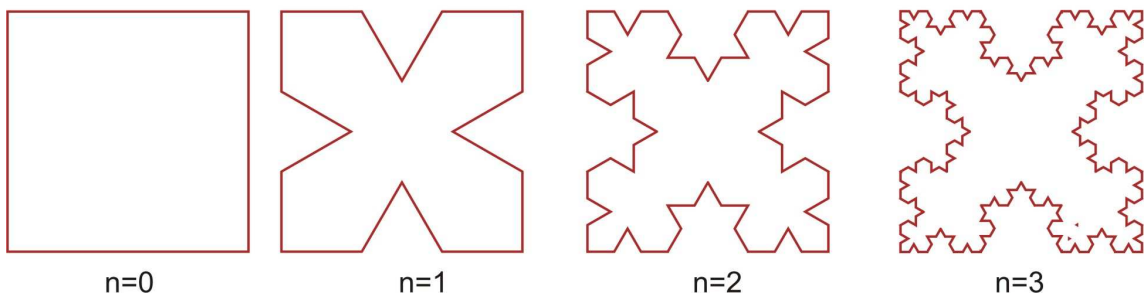
Figura 38. Copo de nieve de kosh a partir de un hexágono

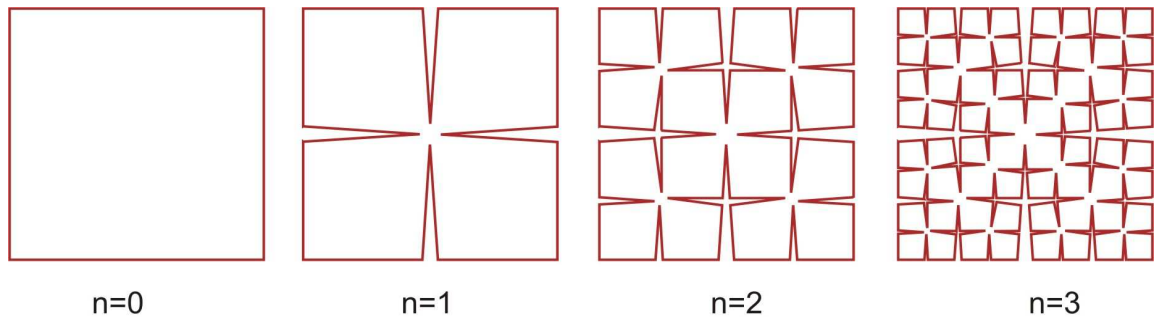


Fuente: Autor

**B.** Las siguientes dos versiones parten de un cuadrado. Se denominan fractales de Cesaro.

Figura 39. Fractales de Cesaro





Fuente: Autor

Observamos que la variación del ángulo de la sustracción nos da como resultado un fractal diferente que parte de la misma figura, un cuadrado.

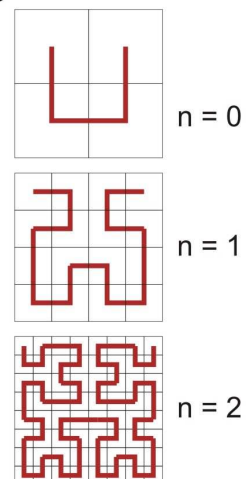
**10.1.1.6 Curva de Hilbert.** Esta curva fue descrita en 1891 por Hilbert (1862-1943) cuya propiedad notable es “llenar” el plano<sup>23</sup>.

- Dibujamos un cuadrado de lado unidad. Lo dividimos en cuatro partes iguales. Unimos los centros de los cuatro cuadrados.

- Volvemos a dividir cada cuadrado en cuatro cuadrados idénticos y unimos de nuevo los centros de todos los cuadrados mediante una sola curva.

- Repetimos el procedimiento infinitamente.

Figura 40. Curva de Hilbert



Fuente: Autor

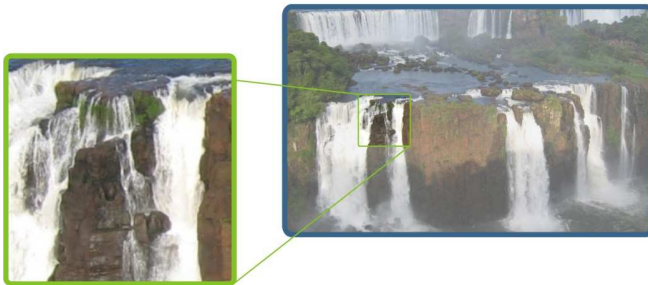
**10.1.2 Fractales Naturales.** Una rama de un árbol tiene características muy similares al árbol en su totalidad y en ella puede haber otras menores y en estas

<sup>23</sup> [www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/5.html](http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/5.html)

otras aun menores y similares, pero esta iteración no es infinita, llega un momento en que la auto similitud se pierde.

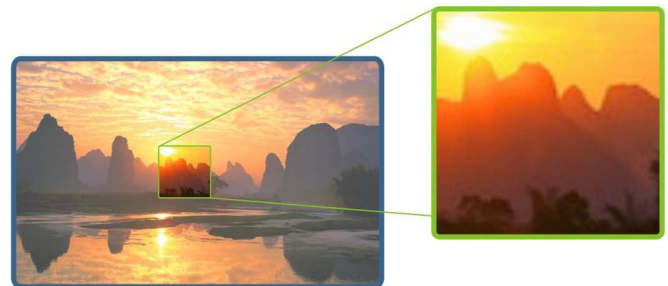
### 10.1.2.1 Paisajes naturales.

Figura 41. Cataratas de Iguazu



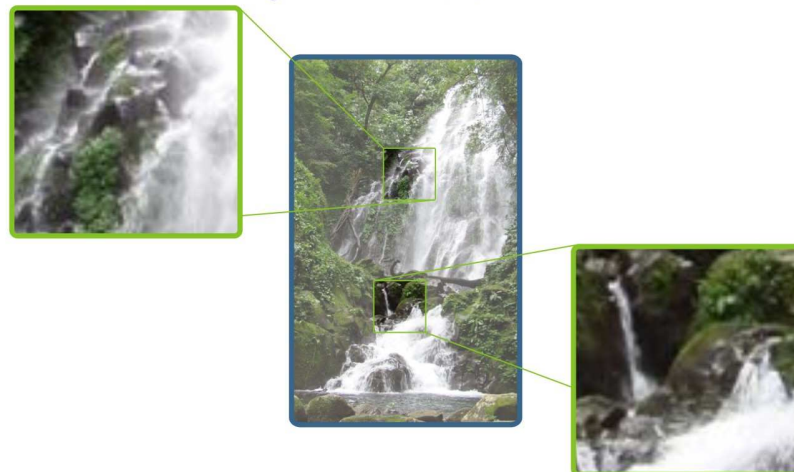
Fuente: [www.estudiantesuniversitarios.wordpress.com](http://www.estudiantesuniversitarios.wordpress.com)

Figura 42. Paisaje en la gran Muralla China



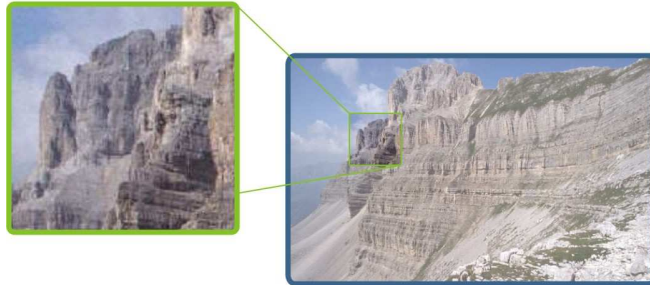
Fuente: [www.gran-muralla-china.com](http://www.gran-muralla-china.com)

Figura 43. Dematac, Mexico



Fuente: [www.dematac.com](http://www.dematac.com)

Figura 44. Formaciones Rocosas



Fuente: [www.fotomaf.com](http://www.fotomaf.com)

### 10.1.2.2 Costas y Bahías

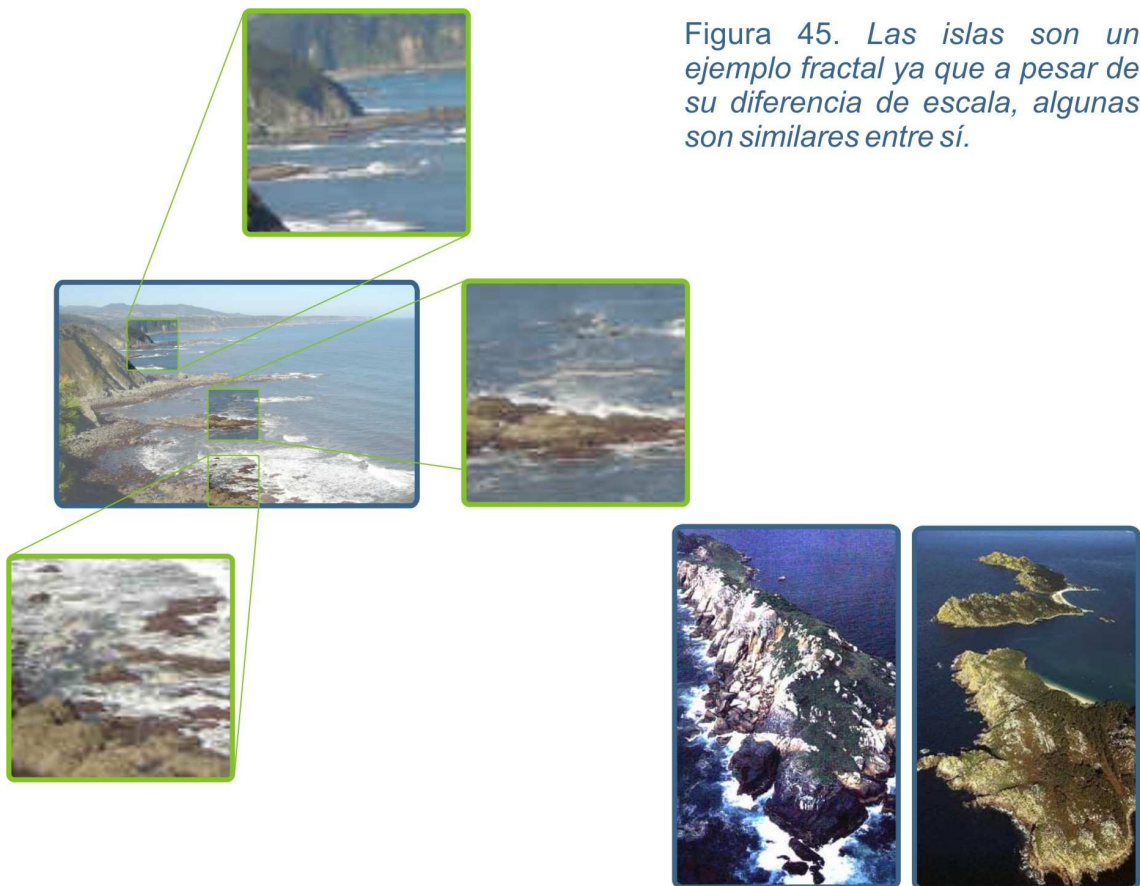


Figura 45. Las islas son un ejemplo fractal ya que a pesar de su diferencia de escala, algunas son similares entre sí.

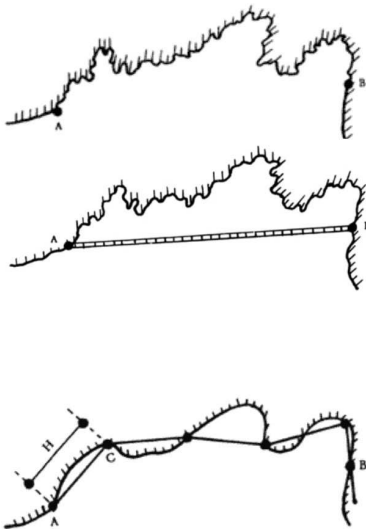
Fuente: [www.campusred.net](http://www.campusred.net)

Figura 46. Costas y bahías



Fuente: [www.hormiga.org](http://www.hormiga.org)

Figura 47. Longitud de las costas



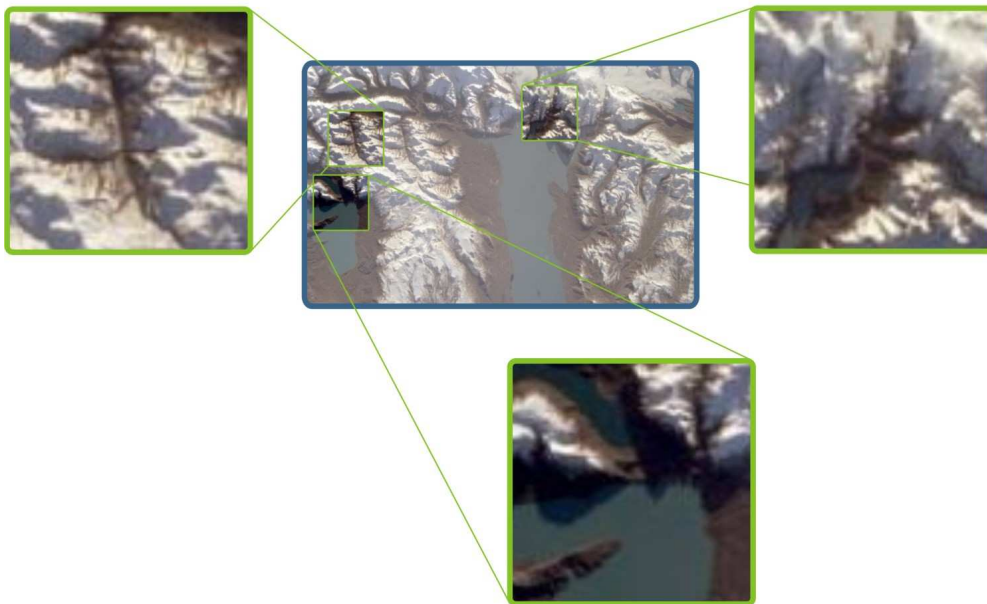
*Una situación que nos parece común es medir alguna longitud; como la de una costa, entre dos puntos A y B.*

*La costa es, en general, irregular, por lo que es claro que su longitud será mayor que la de la línea recta entre sus dos puntos extremos.*

*Podemos continuar indefinidamente de esta manera, tomando unidades cada vez más y más pequeñas. Sin embargo, al ir cambiando de escala, como van apareciendo más y más bahías y penínsulas pequeñas, éstas contribuyen a la longitud que se está midiendo. Por muy chica que sea la nueva bahía o península, al ir aumentando la escala, en algún momento aparecerá en el mapa y contribuirá a la longitud de la costa.*

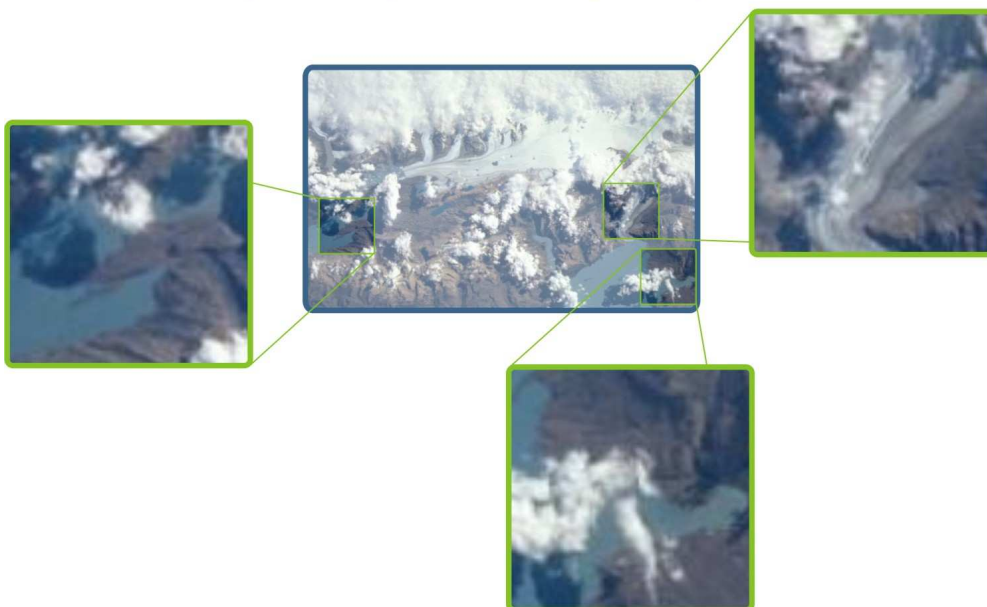
Fuente: Eliezer braun caos, fractales y cosas raras

Figura 48. Lago Viedma Nevado, Patagonia- Argentina



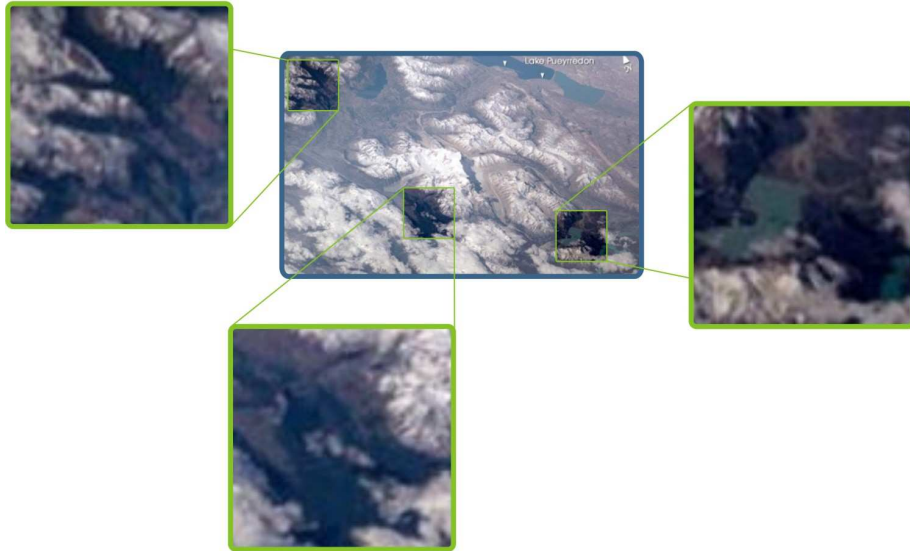
Fuente: [www.patagonline.com](http://www.patagonline.com)

Figura 49. Lago Viedma, Patagonia-Argentina



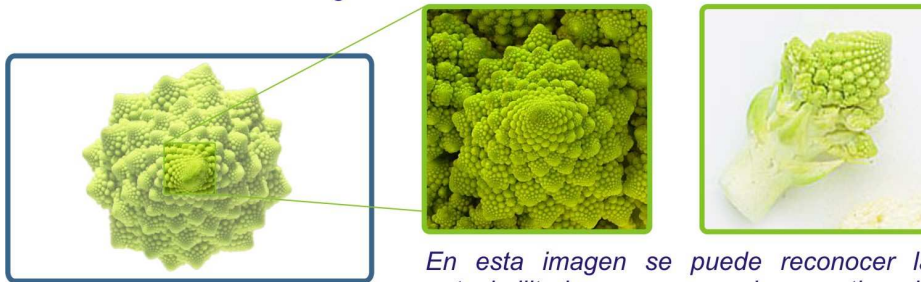
Fuente: [www.patagonline.com](http://www.patagonline.com)

Figura 50. Lago Pueyrredon, Patagonia-Argentina



Fuente: [www.patagonline.com](http://www.patagonline.com)

Figura 51. Romanesco

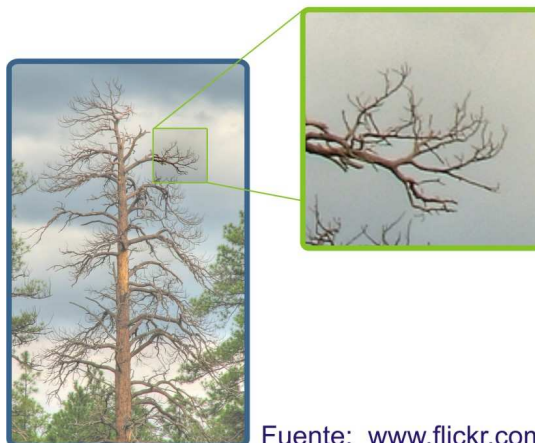


*En esta imagen se puede reconocer la autosimilitud, ya que una sola rama tiene la forma de toda la verdura.*

Fuente: [www.hitech2k7.wordpress.com](http://www.hitech2k7.wordpress.com)

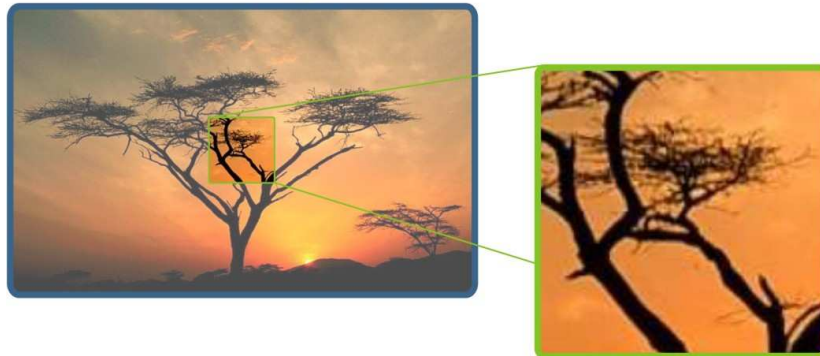
### 10.1.2.3 Plantas

Figura 52. Pino



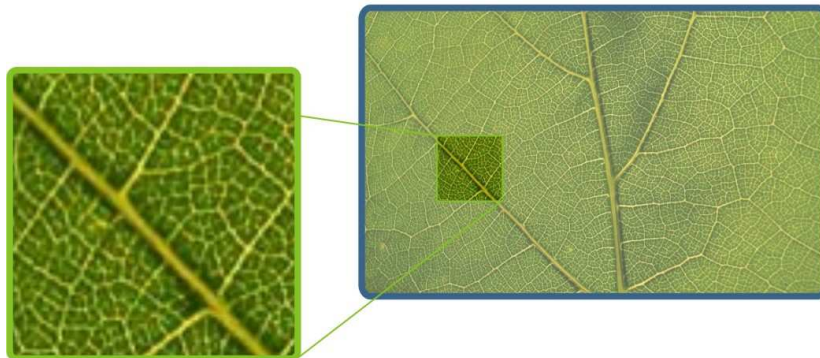
Fuente: [www.flickr.com](http://www.flickr.com)

Figura 53 . Arbusto



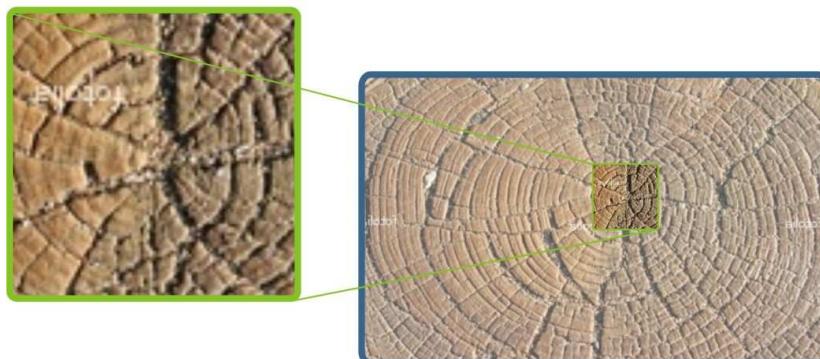
Fuente: [www.hormiga.org](http://www.hormiga.org)

Figura 54. Textura hoja



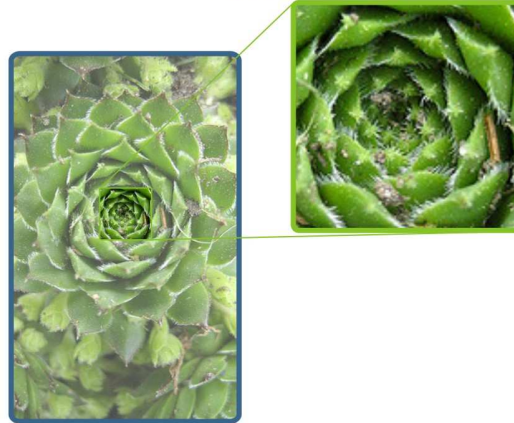
Fuente: [www.hormiga.org](http://www.hormiga.org)

Figura 55. Textura tronco



Fuente: [www.fotolia.com](http://www.fotolia.com)

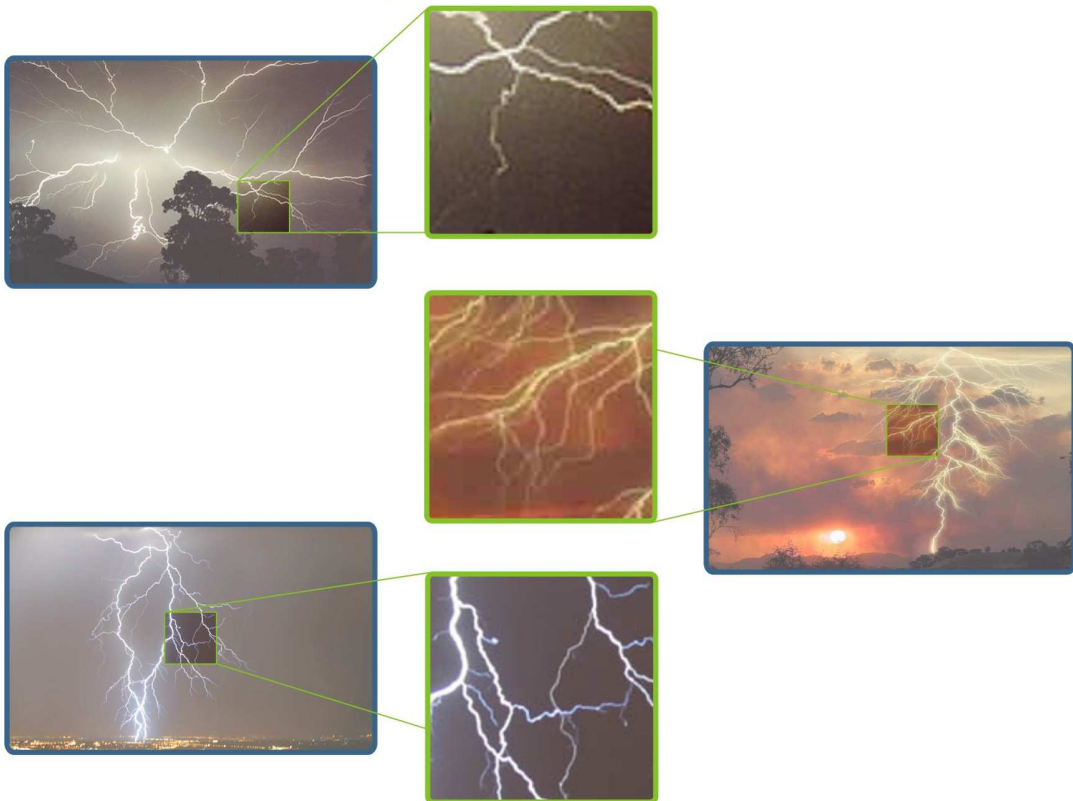
Figura 56. Planta de jardín



Fuente: [www.fotolia.com](http://www.fotolia.com)

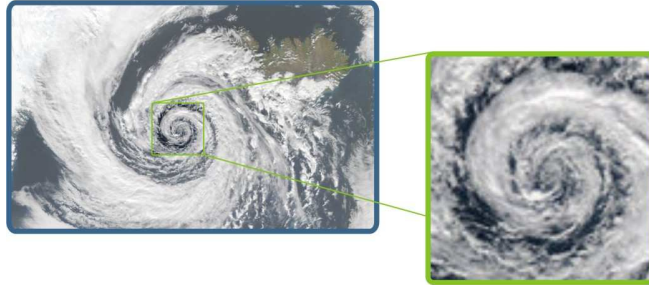
#### 10.1.2.4 Fenómenos naturales

Figura 57. Tormentas eléctricas



Fuente: [www.cronicasmadrilenas.blogspot.com](http://www.cronicasmadrilenas.blogspot.com)

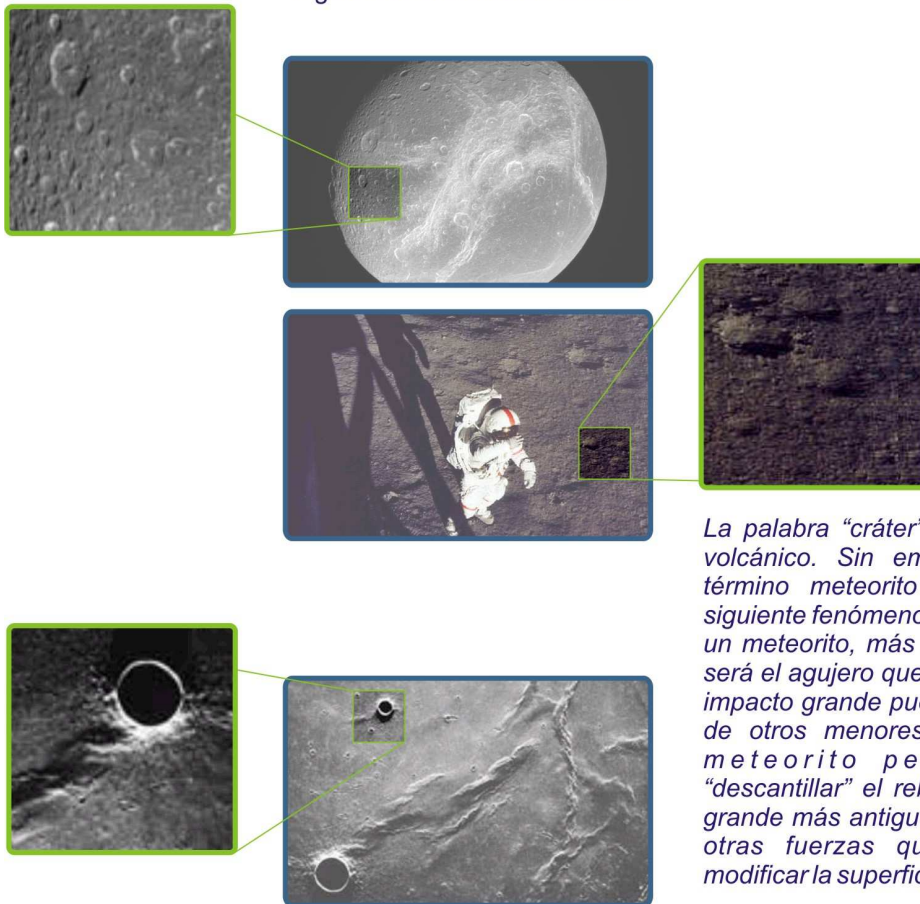
Figura 58. Tornado



Fuente: [www.xahlee.org](http://www.xahlee.org)

### 10.1.2.5 Paisajes espaciales

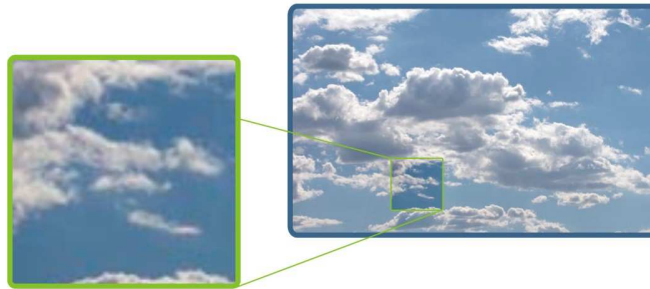
Figura 59. Cráteres de la Luna



*La palabra “cráter” implica un origen volcánico. Sin embargo se usa el término meteorito para explicar el siguiente fenómeno: cuanto mayor sea un meteorito, más grande y profundo será el agujero que produzca, pero un impacto grande puede borrar el rastro de otros menores anteriores, y un meteorito pequeño puede “descantillar” el reborde de un cráter grande más antiguo. Se dan además, otras fuerzas que contribuyen a modificar la superficie de la luna.*

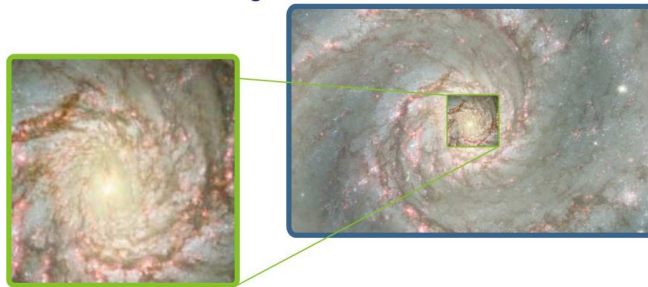
Fuente: [www.uantof.cl](http://www.uantof.cl)

Figura 60. Nubes



Fuente: [www.l4ado.com](http://www.l4ado.com)

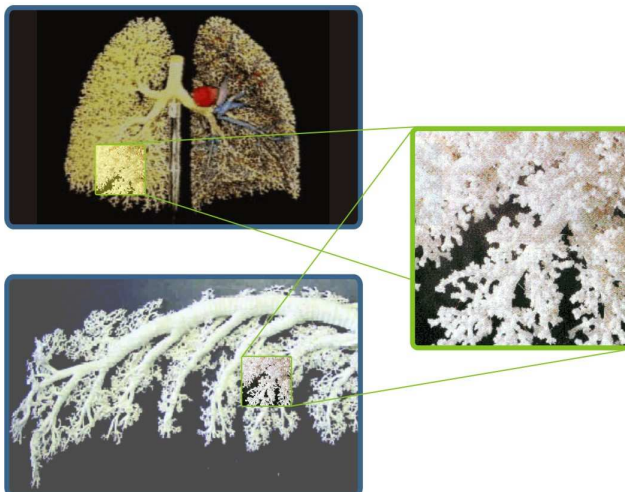
Figura 61. Galaxia



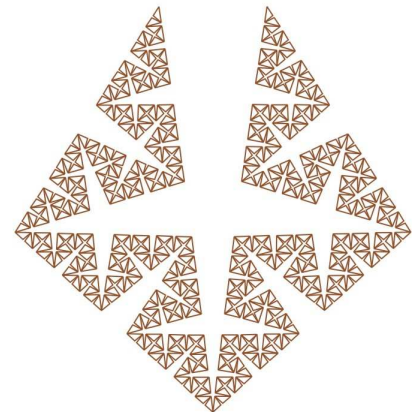
Fuente: [www.jrcasan.com](http://www.jrcasan.com)

### 10.1.2.6 fractales en animales

Figura 62 y 63. Sistema respiratorio



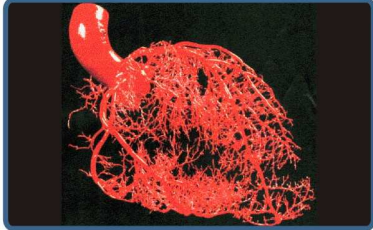
Fuente: [www.campusred.net](http://www.campusred.net)  
[www.uantof.cl](http://www.uantof.cl)



*Esta figura es una variante del copo de nieve de koch y representa un corte de pulmón. Cada pulmón toma la forma de un triángulo isósceles, con el vértice obtuso.*

Fuente: Los objetos fractales.  
Benoît Mandelbrot. Pág. 46-47

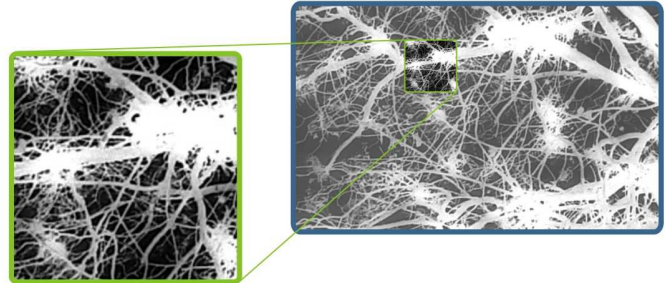
Figura 64. Sistema circulatorio



*La sangre bombeada por las arterias, comienza su largo viaje por todo el cuerpo y por las venas, regresa otra vez al corazón. Por tanto, el sistema circulatorio presenta una estructura fractal.*

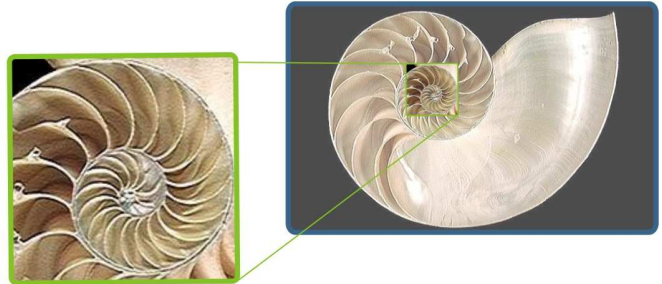
Fuente: [www.campusred.net](http://www.campusred.net)  
[www.uantof.cl](http://www.uantof.cl)

Figura 65. Sistema Nervioso



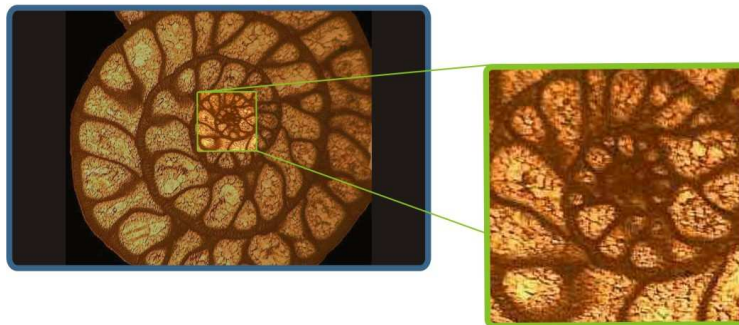
Fuente: [www.dialogica.com.ar](http://www.dialogica.com.ar)

Figura 66. Nautilus



Fuente: [www.interactiva.matem.unam.mx](http://www.interactiva.matem.unam.mx)

Figura 67. Vitamina c

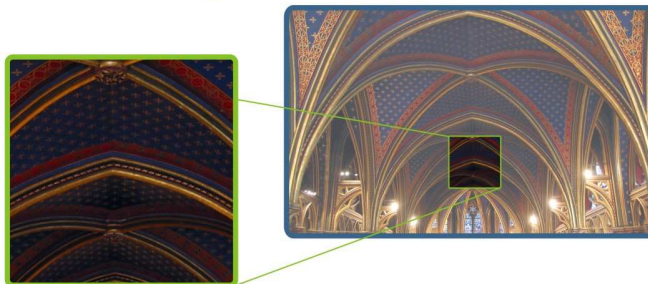


Fuente: [www.Microscopy\\_uk.org.uk](http://www.Microscopy_uk.org.uk)

### 10.1.3 Otros ejemplos

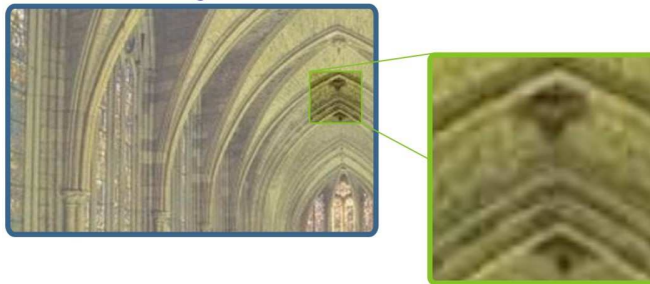
#### 10.1.3.1 Arquitectura

Figura 68. Catedral gótica



Fuente: [www.taringa.net](http://www.taringa.net)

Figura 69. Catedral de León



*Hay ejemplos de recursividad fractal en la arquitectura de catedrales góticas, como la de León y Leonardo da Vinci en algunos de los diseños de catedrales con tres niveles jerárquicos de bóvedas circundantes.*

Fuente: [www.campusred.net](http://www.campusred.net)

Figura 70. Piso de la catedral de anagni

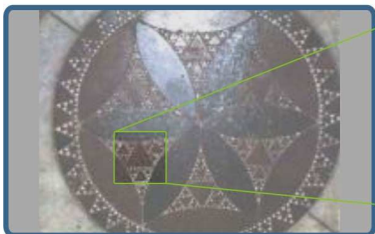
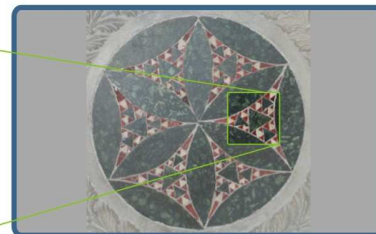


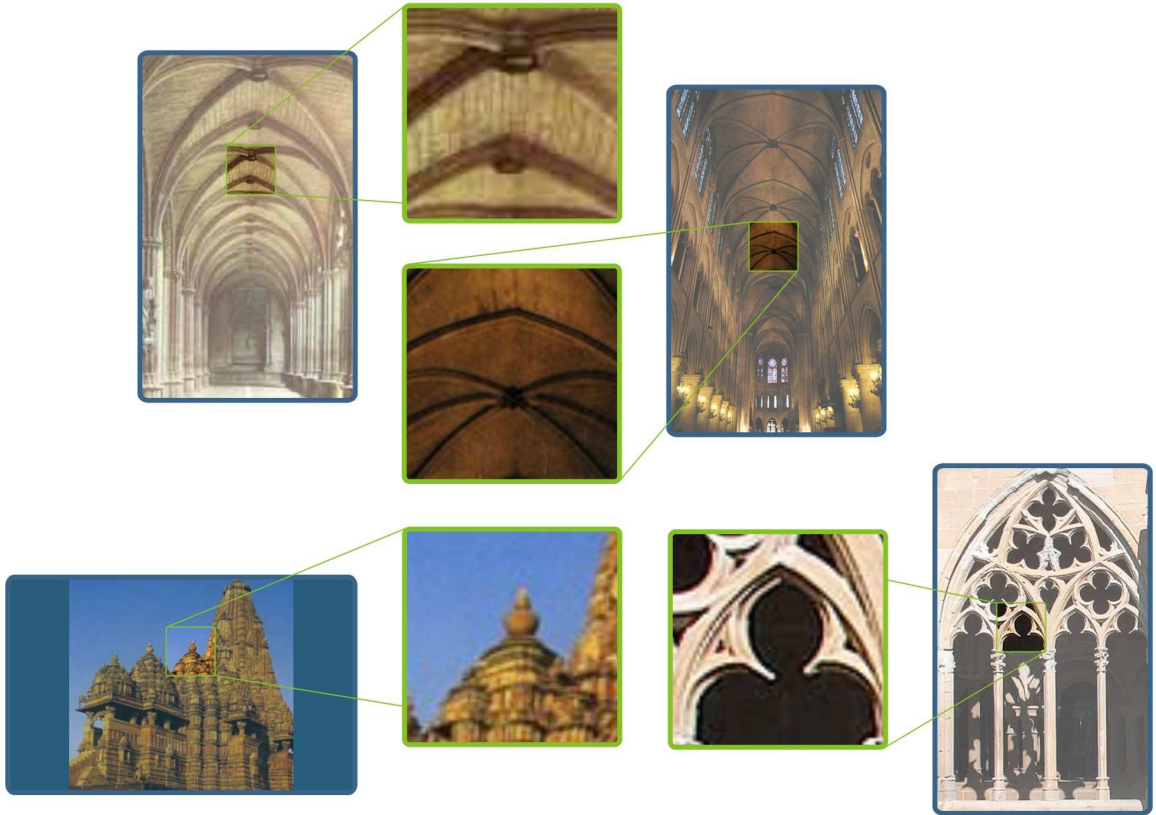
Figura 71. Piso de la catedral de san clemente



*El mosaico del suelo de la catedral de Anagni (Italia), construida en el año 1104, son "triángulos de Sierpinski" de orden 4 son, probablemente, los fractales más antiguos dibujados por el hombre. Waclaw Sierpinski, quizá sin conocerlos, los dotó de rigor matemático ochocientos años después.*

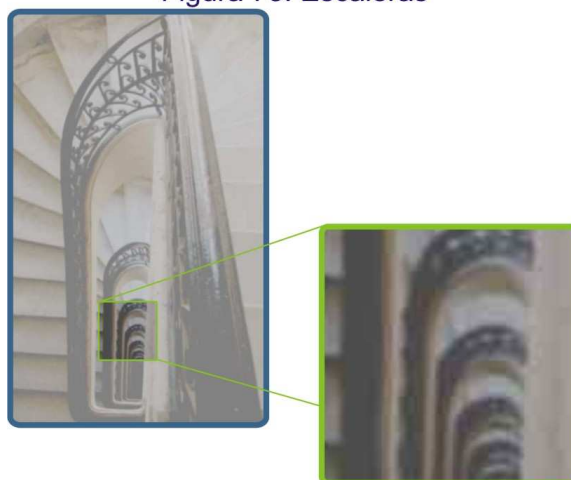
Fuente: [www.campusred.net](http://www.campusred.net)

Figura 72. Arquitectura Hindú



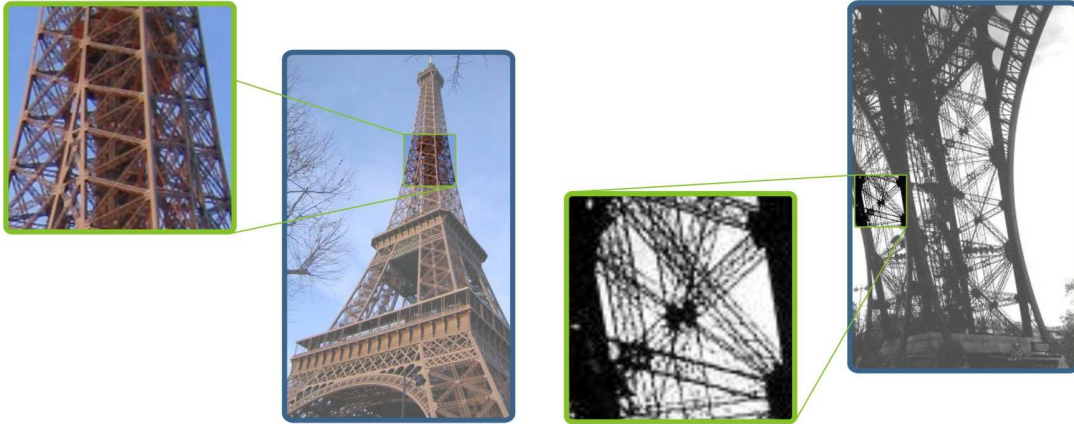
Fuente: [www.campusred.net](http://www.campusred.net)

Figura 73. Escaleras



Fuente: [www.taringa.net](http://www.taringa.net)

Figura 74. Torre Eiffel



*La estructura de la torre Eiffel se acerca a una esponja de Menger. Esta construcción de 335 m de altura tiene cuatro lados y cada lado tiene la forma de una letra A. Los cuerpos de cada parte de la A no están contruidos con vigas sólidas, llenas, sino con armaduras gigantesas formadas, a su vez, de otras armaduras, que están formadas de armaduras, que a su vez son armaduras, que a su vez... Así se obtiene una estructura autosimilar que constituye un fractal. Así, vemos que la Torre Eiffel es una aproximación a la empaquetadura de Sierpinski en tres dimensiones. Además, se trata de una estructura muy ligera, igual que en el caso de Sierpinski.*

Fuente: [www.arikat.net](http://www.arikat.net)

**10.1.3.2 Arte.** Mauritis Cornelius Scher (1898- 1972) 1, es el artista que mejor ha reflejado gráficamente el pensamiento matemático moderno y que intuyó los fractales y su geometría.

Sin ser matemático, sus obras muestran un interés y una profunda comprensión de los conceptos geométricos, desde la perspectiva a los espacios curvos, pasando por la división del plano en figuras iguales. A partir de la década de los 30 del pasado siglo XX realizó numerosos grabados que nos incursionan artísticamente, en las cuestiones de las progresiones infinitas. Se interesó también por las construcciones imposibles, por conciliar cuestiones paradójicas entre sí y por representar la unidad de las dualidades.

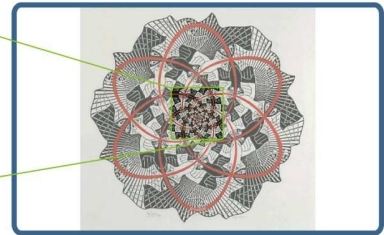
Figura 76. Límite de círculo (Scher)



*Límite de Círculo grabado en madera en 1959, segundo estado, en amarillo, verde, azul, marrón y negro, impreso de 5 bloques.*



Figura 75. Camino de vida (Scher)

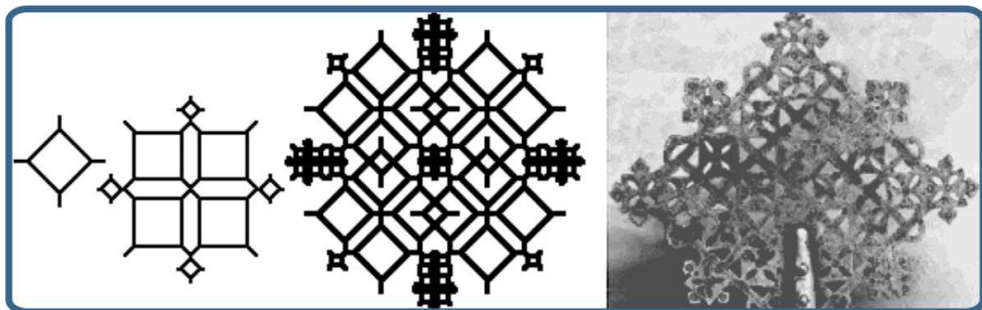


*Camino de Vida grabado en madera en 1966 en rojo y negro, impreso de 2 bloques.*



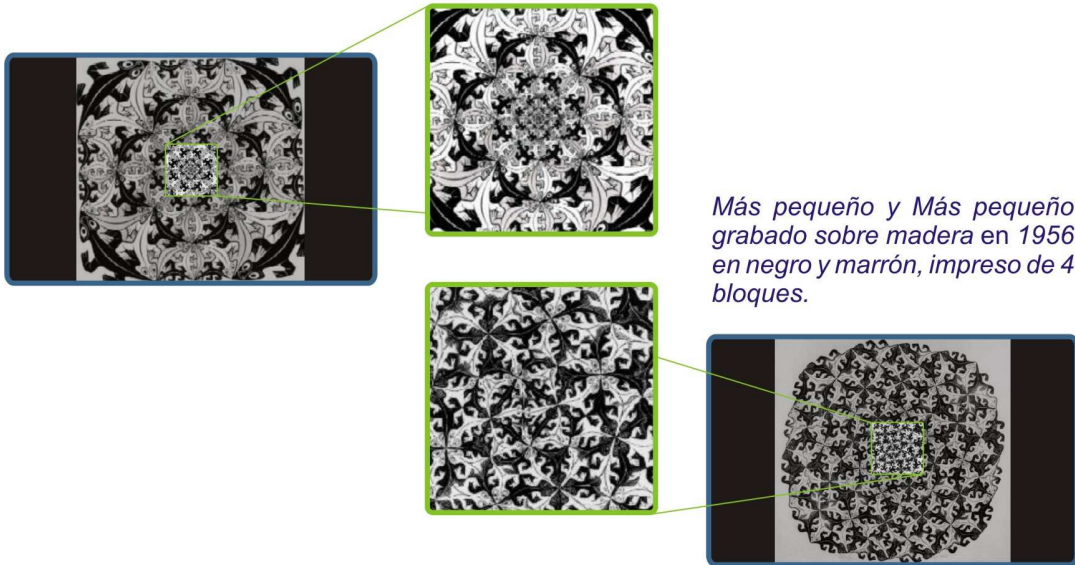
Fuente: [www.tonova.com/images/articulos/escher/jpg](http://www.tonova.com/images/articulos/escher/jpg)

Figura 77. Arte africano



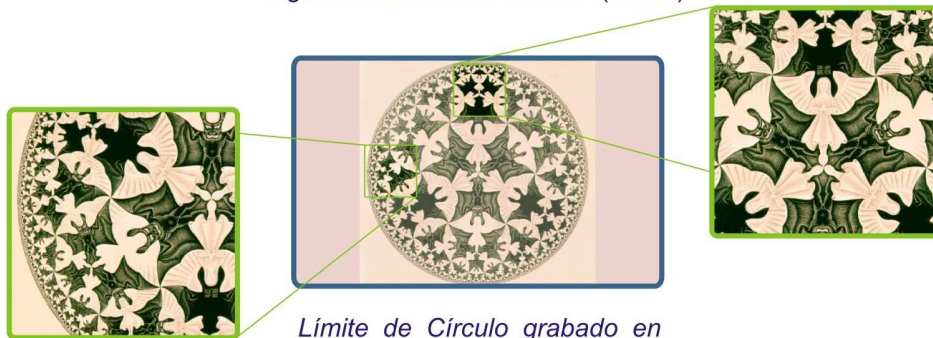
Fuente: [www.campusred.net](http://www.campusred.net)

Figura 78. Mas pequeño y mas pequeño (Scher)



*Más pequeño y Más pequeño grabado sobre madera en 1956 en negro y marrón, impreso de 4 bloques.*

Figura 79. Límite de Círculo (Scher)



*Límite de Círculo grabado en madera en 1960 en negro y ocre, impreso de 2 bloques.*

Fuente: [www.tonova.com/images/articulos/escher/jpg](http://www.tonova.com/images/articulos/escher/jpg)

Figura 80. Muñecas Rusas



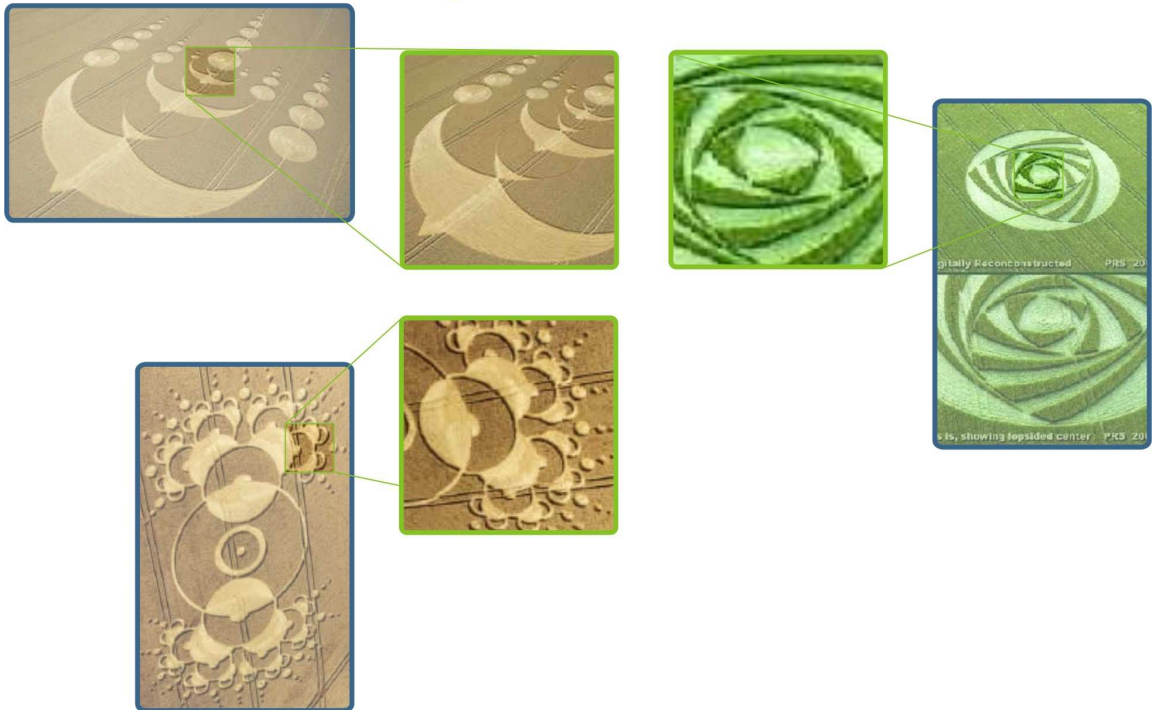
Figura 81. Accesorios



*Al pasar de una figura a otra se está cambiando la escala. Al cambiar la escala, las figuras en conjunto son similares. Si se pudiera tener un conjunto infinito, de figuras todas iguales, pero una más pequeña que la anterior, tendríamos un fractal.*

Fuente: [Www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/5.html](http://Www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/5.html)

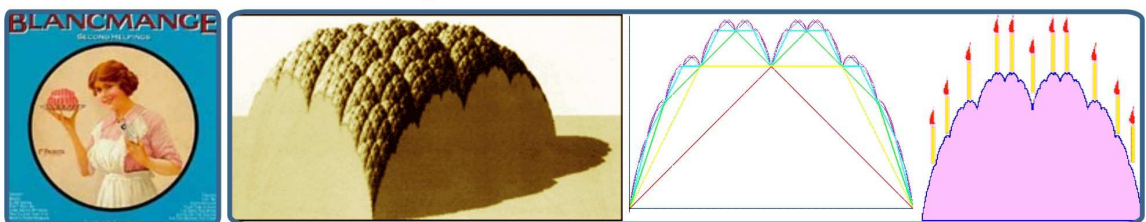
Figura 82. Arte en maizales



Fuente: [www.radioesfera.iespana.es/circuitosmaiz.htm](http://www.radioesfera.iespana.es/circuitosmaiz.htm)  
[www.du-ocio.com](http://www.du-ocio.com)

### 10.1.3.3 Publicidad

Figura 83. Curva de Weierstrauss

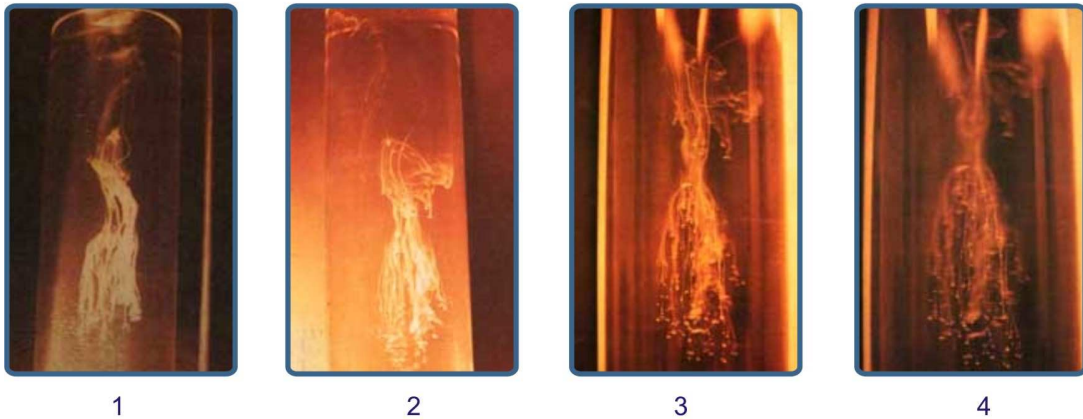


Variaciones de la curva weierstrauss en las portadas de blancmange (grupo new wave de los 80) 1861.

Fuente: [Www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/5.html](http://Www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/5.html)

#### 10.1.3.4 Fenómenos físicos

Figura 84. Gota de tinta cayendo en agua



*Sucesión de fotografías que muestran la caída de una gota de tinta en agua. Al caer la gota, se transforma en un anillo de vórtices, que se expande hasta volverse inestable, dando lugar a un nuevo anillo de vórtices. Este proceso se repite muchísimas veces, es decir se forma un fractal. En las fotografías se ven distintos estados de los fractales así formados.*

Fuente: Eliezer braun caos, fractales y cosas raras

**10.1.4 Trabajo de Campo.** En esta etapa se han tomado fotografías de algunas plantas resaltando sus características más relevantes, para luego evaluarlas y seleccionar aquella que más herramientas de diseño nos brinde y finalmente realizar un análisis biónico de esta.

**10.1.4.1 Helechos.** Los helechos son un grupo de plantas que aparecieron en la Tierra hace unos 400 millones de años. En la actualidad, hay unas 12.000 especies.

Hay helechos de tamaño pequeño, que miden solo unos pocos centímetros, y helechos arbóreos, que pueden alcanzar más de 20 metros de altura. Los helechos son abundantes en lugares húmedos, en los bosques o cerca de los ríos.

Tienen un sistema de tubos o vasos conductores, denominado **sistema vascular**, para transportar el alimento, el agua y las sales minerales por toda la planta. Recibiendo así, el nombre de **plantas vasculares** o **cormofitas**.

- **Clasificación científica:** los helechos constituyen la subdivisión *Filicophytina* perteneciente a la división *Pteridofita* que incluye también las subdivisiones *Lycophytina* (las licofitinas o licopodios), *Equisetophytina* (equisetos o colas de caballo) y *Psilophytina*. La subdivisión *Filicophytina* incluye 3 clases: *Ophioglossopsida*, *Marattiopsida* y *Filicopsida*. Esta última clase incluye 19 órdenes, 51 familias, 400 géneros y unas 10.000 especies, entre las que se encuentran el helecho canela (*Osmunda cinnamomea*); el helecho común, helecho águila o de pescadero (*Pteridium aquilinum*); los helechos acuáticos como *Salvella* o *Marisela*; el helecho macho (*Dryopteris filix-mas*) o el helecho avestruz (*Pteretis pensilvanilla*)<sup>24</sup>.

Figura 85. Helecho blanco



Aunque a simple vista, este parece no ser un fractal, presenta todas las características correspondientes a este. El comportamiento de cada una de sus ramas es similar al pino (figura 24). Presenta claramente el concepto de auto similitud; la forma de las ramas de esta planta es orgánica, lo cual lo hace más fluida sin dejar de ser ordenada en cuanto a crecimiento y variación de escala.

<sup>24</sup> Microsoft Encarta 2007. 1993 – 2006 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.

- Presenta textura similar al poliéster y sus fibras ordenadas y homogéneas.
- El color verde de sus hojas se encuentra cubierto por las fibras de color blanco, lo cual le da a estas un espesor mayor al que comúnmente presentan las plantas.



Fuente: Autor

Figura 86. Helecho colchón de rico



- Por su pequeño tamaño, la planta puede tomarse como una textura porosa, con sus fibras ordenadas en variación de escala y dirección. Sin embargo, la textura de una sola fibra es lisa.
- Cada parte de sus ramas se asemeja a un segmento de línea de color verde homogéneo.

Fuente: Autor

Figura 87. Culantrillo

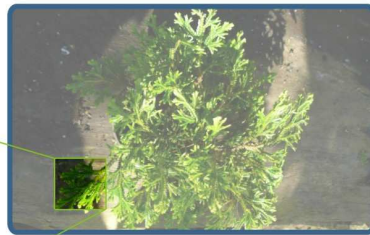
*El culantrillo o cabello de Venus es un helecho caducifolio común en las regiones templadas de Europa y el hemisferio occidental. Forma frondes arqueadas de color verde claro con tallos negros. Alcanza hasta 30 cm de altura y medra en lugares umbríos y suelos húmedos, neutros o ligeramente ácidos.*



*- Cada parte de sus ramas es de formas orgánicas, aunque mantienen un orden de dirección y tamaño.*

Fuente: Autor

Figura 88. Otros helechos



*Este helecho presenta textura compuesta por módulos en forma de escamas; además de dirección y radiación en el crecimiento de sus ramas. El color es uniforme.*

*- Al igual que la fig. 70, este helecho presenta ramificación compuesta por elementos lineales que a su vez contienen los conceptos de radiación, dirección y variación de escala en su crecimiento.*

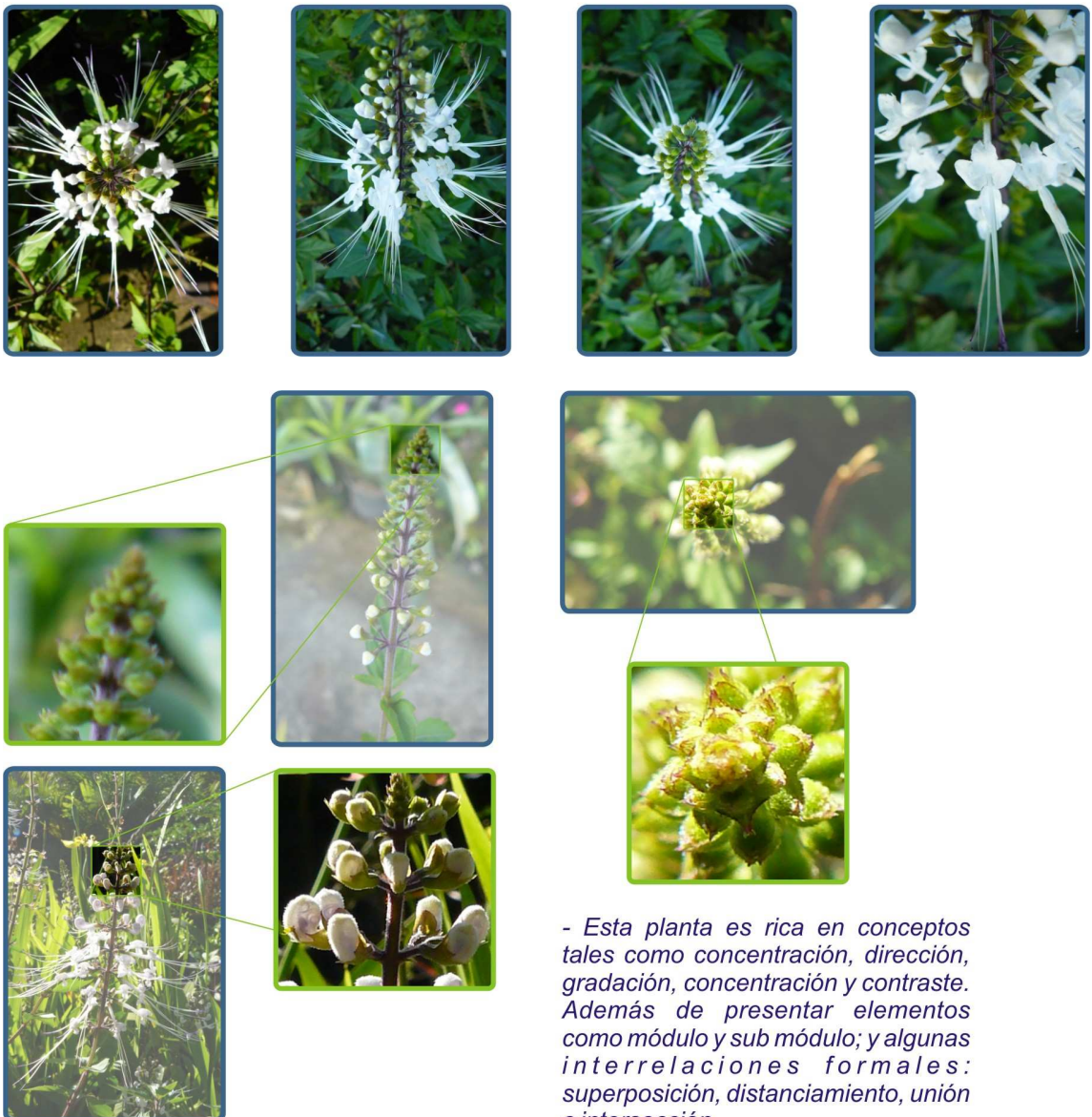
*- La textura de cada parte es lisa y el color es uniforme.*



Fuente: Autor

**10.1.4.2 Bigotes de gato.** Esta es una flor de clima frío que crece en forma lineal y está compuesta por un tallo delgado con hojas grandes en su parte inferior y flores de color blanco en el resto de su cuerpo, las cuales a su vez presentan en el centro pistilos blancos y largos. De ahí su nombre común de *flor bigotes de gato*.

Figura 89 . Bigotes de Gato



- Esta planta es rica en conceptos tales como concentración, dirección, gradación, concentración y contraste. Además de presentar elementos como módulo y sub módulo; y algunas interrelaciones formales: superposición, distanciamiento, unión e intersección.

Fuente: Autor

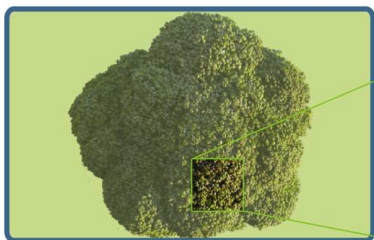
**10.1.4.3 Brócoli.** Nombre común de una planta hortícola, variedad de la col. El brécol es una mata ramificada de unos 60 cm de altura con hojas grandes y tallos gruesos. Las flores carnosas de colores púrpura y blanco se reúnen en una inflorescencia, situada al final del tallo principal, que es la que se utiliza para el consumo<sup>25</sup>.

Figura 90. brócoli



- Familia: Crucíferas (Cruciferae)
- Especie: Brassica oleracea
- Variedad: italica.

- Esta planta hortícola presenta numerosas ramificaciones que a pesar de ser cada vez más pequeñas, son similares a la unidad.
- Presenta una textura "abultada" donde cada "punto" de ella es al igual que las ramificaciones, similar a la unidad.



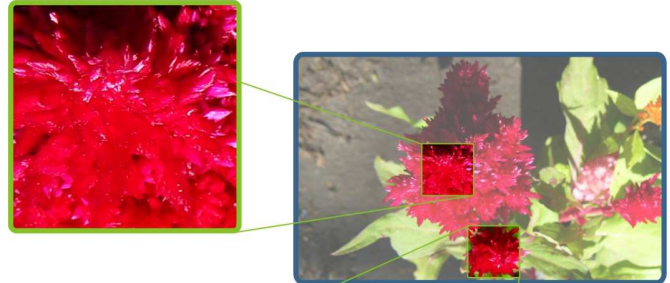
Fuente: Autor

<sup>25</sup> Microsoft Encarta 2007. 1993 – 2006 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.

#### 10.1.4.4 Amaranto Plumoso

Figura 91. Amaranto Plumoso

- *Nombre científico: Celosia argentea var. Plumosa*
- *Nombre común o vulgar: Celosía, Amaranto plumoso.*
- *Familia: Amaranthaceae.*
- *Origen: Asia y Africa ecuatoriales.*



- *Esta planta se encuentra en la naturaleza en colores cálidos que van desde el amarillo hasta el naranja, pasando por el rojo.*

- *Presenta ramificaciones cónicas cuya textura se asemeja a la del algodón o las plumas de un ave; de ahí su nombre común "plumosa".*

- *Es rica en conceptos como concentración, gradación, textura, radiación y dirección. También presenta alto contraste del color cálido de sus ramas con el verde de sus hojas.*

Fuente: Autor

**10.1.4.5 Bromelias.** Pertenece al género *Aechmea* comprende unas 170 especies, nativas de Centro y Sudamérica; la mayoría de ellas son epifitas o litófitas.

**a. La bromelia fasciata** es la más representativa del género; originaria de Brasil, despierta gran interés como planta ornamental utilizada en jardinería en zonas no tropicales. Presenta hojas basales, entre 10 y 20, muy largas y anchas, que forman una roseta tubular. Los bordes son redondeados con espinas; la parte externa del limbo tiene zonas plateadas y oscuras. En la base de las hojas y en las zonas claras aparecen unas escamas suctoras que permite a la planta tomar el agua y los nutrientes disueltos en ella. De un grueso pedúnculo, que surge por encima de la corona de las hojas, brota la inflorescencia con forma piramidal, erguida y de unos 30 cm. de altura. Está formada por brácteas rosadas con bordes aserrados y flores púrpuras con pétalos en forma de pestaña<sup>26</sup>.

**b. La guzmania lingulata** es otra especie bastante frecuente de las bromelias; es muy llamativa por sus brácteas rojo vivo en el centro, de las cuales surgen unas flores muy pequeñas que bien pueden ser de color blanco crema, amarillas o incluso rojas. Otro elemento muy atractivo de esta planta son sus hojas largas, que pueden alcanzar incluso hasta los 30 centímetros de longitud, y que se encuentran dispuestas en forma de roseta, todas ellas de un verde brillante muy alegre.<sup>27</sup>

---

<sup>26</sup> Microsoft Encarta 2007. 1993 – 2006 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.

<sup>27</sup> [www.misplantas.com](http://www.misplantas.com)

Figura 92. Bromelia Fasciata



Figura 93. Flor de la bromelia fasciata



- Familia: *Bromeliáceas (Bromeliaceae)*.
- Nombre científico: *Aechmea fasciata*.

Fuente: [www.abbra.eng.br](http://www.abbra.eng.br)



- Esta planta es rica formalmente en cuanto a textura en los bordes de sus hojas que a su vez, por presentarse en puntas, es una repetición de módulos; también presenta el concepto de radiación y concentración tanto de forma como de color.

- El concepto fractal se evidencia en la auto similitud y variación de escala que se presenta en forma radial inserta en cada parte de la planta.

-Sus pequeñas flores púrpuras se presentan como anomalía generando así un alto contraste con la totalidad de la planta.

Fuente: Autor

Figura 94 . Guzmania Lingulata



- Esta planta es rica en conceptos de color ya que presenta la gama de colores cálidos que van desde el rojo hasta el amarillo; además de el alto contraste con el verde de las hojas.

- También presenta conceptos de forma como similitud, gradación, rotación, concentración y variación de escala entre otros.

Fuente: Autor

**10.1.4.6 Camarón.** Arbusto de porte arqueado, perenne, erecto, de 0.8 a 1 m de altura, ramificada, de follaje ornamental, con ramos finos, alargados y hojas pubescentes. Inflorescencias largas, con brácteas rojas y anaranjadas y flores pequeñas, blancas, formadas durante casi todo el año. Existe también una variedad de flores amarillas, las flores son muy visitadas por mariposas y abejas, por lo tanto se le considera melífera además de ornamental.

Figura 95. Camarón



- Nombre común: Caracolillo o Camarón bermejo
- Familia: Acanthaceae
- Nombre científico: *Justicia brandegeana*
- Lugar de origen: Nativa de México

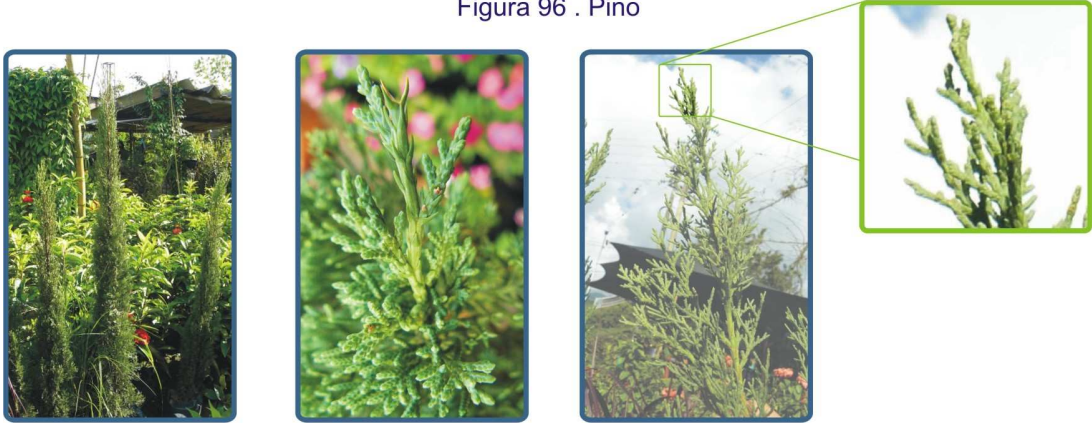


*El camarón es una planta que, aunque formalmente es simple, presenta conceptos muy atractivos como es la gradación de tamaño de sus elementos y la rotación de ellos, el alto contraste entre el verde de sus hojas y las brácteas que son de color rojo, su esbeltez y equilibrio y otros conceptos de interrelación formal como superposición y toque.*

Fuente: Autor

**10.1.4.7 Pino.** Los pinos son un género (*Pinus*) de árboles o, raramente, arbustos, de la familia *Pinaceae*, Subfamilia *Pinoideae* que presentan una ramificación frecuentemente verticilada y más o menos regular.

Figura 96 . Pino



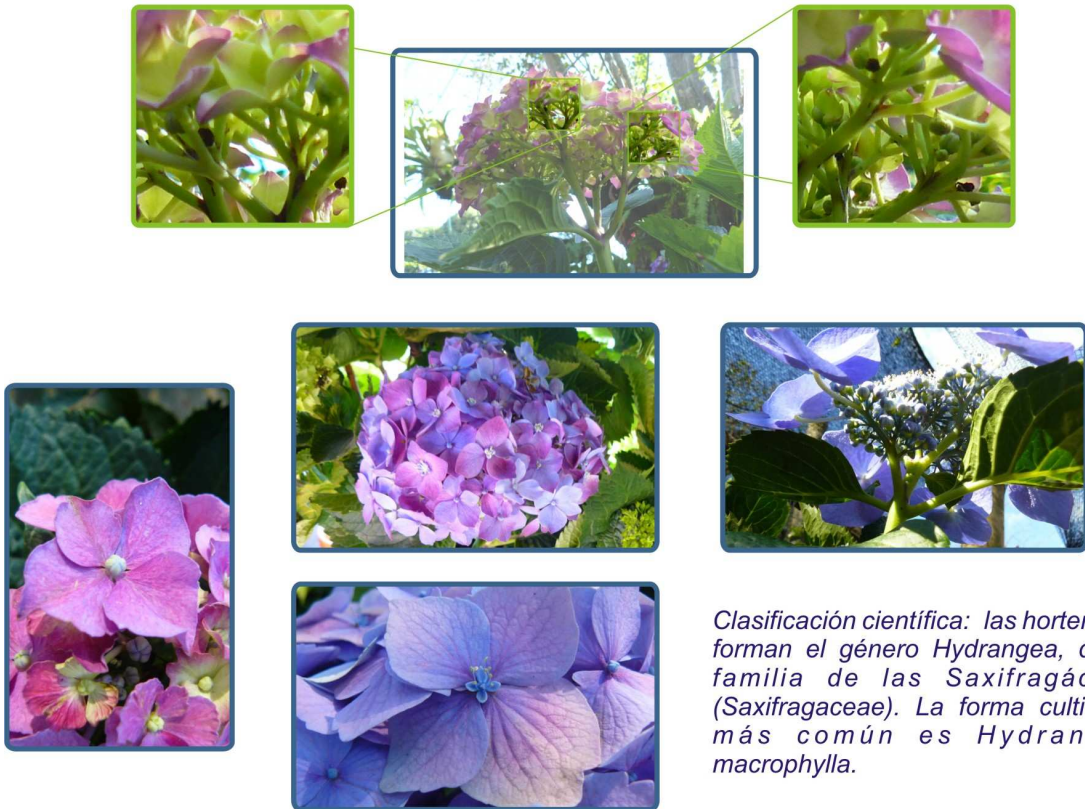
*El pino es un ejemplo convencional de fractal natural, pues este concepto se encuentra en todas sus ramificaciones desde las más pequeña hasta la más larga y frondosa.  
- En ella encontramos el concepto de línea, aunque si nos acercamos nos damos cuenta de su riqueza en cuanto a textura y modularidad.*

Fuente: Autor

**10.1.4.8 Hortensia.** Nombre común de una serie de arbustos y enredaderas leñosas nativas de Asia y América. Las flores están agrupadas en inflorescencias; las externas tienen una envoltura membranosa coloreada, mientras que las internas tienen una envoltura tubular con ocho a diez costillas, cuatro o cinco pétalos ovados, ocho a diez estambres delgados y un pistilo de dos lóculos. El fruto es una cápsula con numerosas semillas. Las formas más vistosas son especies asiáticas cultivadas. El cultivar típico de hortensia crece hasta casi 4 m de altura, tiene hojas anchas, gruesas y lustrosas y produce flores de color blanco,

azul o rosa en inflorescencias redondeadas o planas. La celinda corresponde a un género distinto de la misma familia; también forma flores blancas vistosas.<sup>28</sup>

Figura 97. Hortensia



*Clasificación científica: las hortensias forman el género Hydrangea, de la familia de las Saxifragáceas (Saxifragaceae). La forma cultivada más común es Hydrangea macrophylla.*

*La hortensia es una planta que, además de la gama de colores fríos que maneja en sus flores, presenta una estructura fractal lo cual hace que se agrupen en ramos haciéndolas más llamativas.*

*La riqueza formal de esta planta se complementa con la gradación de tamaño y forma de cada uno de sus elementos, la concentración de formas y colores y la disposición de las brácteas, además de las interrelaciones entre ellos.*

Fuente: Autor

---

<sup>28</sup>Microsoft Encarta 2007. 1993 – 2006 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.

**10.1.4.9 Jade.** Es una de las más raras trepaderas de clima tropical. Su crecimiento es bastante vigoroso precisando de grandes espacios para desenvolverse. Sus flores son grandes, agrupadas en cachos voluminosos de color verde-azul y de un efecto decorativo impresionante.

Figura 98 . Jade



*Aunque esta planta es una especie poco conocida, es una planta que presenta conceptos tales como módulo, repetición y radiación además de su color verde-azul uniforme, lo cual la hace más atractiva.*

Fuente: Autor

**10.1.4.10 Thunbergia.** Es un género de plantas de flor en la familia Acanthaceae, nativa de las regiones tropicales de África, Madagascar y el sur de Asia. Sus miembros se conocen por varios nombres tales como **thunbergias**; **parras reloj** los cuales se refieren a *Thunbergia grandiflora*, mientras que *Thunbergia alata* es

conocida como **parra Susana de ojos negros** ó solamente como **Susana ojos negros**.

Las Thunbergias son unas vigorosas parras y arbustos anuales ó perennes, desarrollándose a alturas de 2 a 8 m. Algunas especies salen con facilidad de los jardines, llegando a ser especies invasoras; se encuentran catalogadas como amenazas para el medio ambiente en Australia.

Figura 99. Thunbergia



*Clasificación: el nombre científico de la familia Acantáceas es Acanthaceae, del orden Escrofulariales, y engloba a cuatro subfamilias.*

*Esta planta es muy vistosa debido al volumen de su flor que da un aspecto de contenedor. Formalmente tiene un alto contraste en los colores cálidos que presenta y una textura suave lo cual permite que su color sea uniforme.*

Fuente: Autor

**10.1.4.11 Cactus.** Los cactus suelen tener tallos espinosos y raíces; las hojas están por lo general muy reducidas, faltan por completo o se han transformado en espinas. Sólo hay dos géneros con hojas bien formadas. Los tallos están hinchados y son carnosos, adaptados para la acumulación de agua; muchos tienen una forma que conduce el agua de lluvia directamente a las raíces. Éstas son extensas y superficiales, para absorber la mayor cantidad posible de agua de una gran superficie. En los desiertos, las plantas suelen estar muy separadas unas de otras.

Figura 100. Cactus *Opuntia fulgida*



*Este cactus, nativo de los desiertos pedregosos de Baja California, norte de México, Arizona y Nuevo México, forma flores de color azul espliego y un fruto verdoso que crece a modo de cadena a lo largo de varios años.*

*Aunque presenta una estructura simple similar a una esfera, se asemeja a un fractal debido las pequeñas copias que crecen a en su superficie; también es simétrico y presenta una textura suave con concentración de pequeñas manchas de color un poco más claro en algunas zonas.*




Fuente: Autor

**10.1.5 Selección de los elementos a trabajar.** Después de analizar los elementos propuestos en el trabajo de campo, se ha decidido dividir el trabajo en 2 etapas:

**10.1.5.1 Primera etapa.** Se realizará la representación en 2 y 3 dimensiones de los siguientes fractales lineales: Triángulo de Sierpinski (fig.31), Esponja de Menger (fig.33), Carpeta de Sierpinski (fig.32) y Copo de nieve de Koch (fig.34). Estos fractales fueron seleccionados debido a que son los más utilizados como ejemplo de aplicación en la asignatura Geometría Moderna de la Escuela de Matemáticas- UIS, además de que al ser representados en 3 dimensiones permiten identificar con claridad los conceptos de módulo, auto similitud y variación de escala que son algunas de las características importantes de los fractales.

**10.1.5.2 Segunda etapa.** Se seleccionaron 3 de los elementos analizados en la etapa de Trabajo de Campo: Aechmea fasciata ( fig.92 y 93 ), brócoli (fig.90) y la Hortensia (fig.97). A continuación se presenta un cuadro comparativo de estos elementos para seleccionar el que más riqueza formal y conceptual brinde para el desarrollo del trabajo.

Figura 101. Cuadro comparativo de los elementos seleccionados

ELEMENTO	ASPECTOS POSITIVOS	ASPECTOS NEGATIVOS
	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Es el fractal natural más conocido por sus características de autosimilitud e invarianza de escala.</li> <li>-Presenta interrelación formal entre sus componentes como toque, superposición, distanciamiento.</li> <li>-La aglomeración de sus pequeños nodos superiores dan la sensación de textura.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Su riqueza formal es poca en cuanto a características de color, diversidad de formas y conceptos básicos de diseño.</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Presenta algunas características fractales como autosimilitud e invarianza de escala.</li> <li>-Es rica en conceptos de diseño como radiación, textura, concentración y anomalía por la aparición de sus pequeñas flores en algunas zonas de la planta.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- No se es un fractal en su totalidad.</li> <li>- No presenta diversidad de color.</li> <li>-En sus hojas no se observan características fractales.</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Es un fractal natural puesto que presenta los conceptos de autosimilitud e invarianza de escala en el crecimiento, además de que este es similar al del brócoli.</li> <li>-Es rica en color ya que presenta la gama de los colores fríos que van desde el blanco hasta el violeta, pasando por el rosado.</li> <li>-Presenta diversidad de formas en la flor durante su desarrollo.</li> <li>-En la textura de sus hojas también se evidencia el concepto fractal.</li> <li>-También presenta los conceptos de interrelación de formas como toque, superposición, distanciamiento</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Aunque presenta una estructura fractal, esta no se identifica a simple vista.</li> </ul>

Fuente: Autor

## **11. REQUERIMIENTOS DE DISEÑO**

### **11.1 REQUERIMIENTOS DE USO**

- El ensamble entre elementos debe ser de unión simple y que no requiera gran cantidad de esfuerzos.
- Se debe evitar incluir terminaciones en punta que puedan causar daño al usuario.
- Los elementos deben indicar por si solos al usuario la forma en la cual deben ser ensamblados.

### **11.2 REQUERIMIENTOS DE FUNCIÓN**

- Debe aplicarse un principio mecánico que permita el ensamble de dos o más piezas.
- El mecanismo aplicado debe cumplir correctamente su función.
- La combinación de módulos debe permitir la representación de otras posibilidades geométricas.
- El módulo debe constar de una única pieza que incluya el mecanismo y la representación deseada.

### **11.3 REQUERIMIENTOS ESTRUCTURALES**

- El producto debe contar con un máximo de 3 elementos diferenciables que posibiliten la representación bidimensional, representación tridimensional y unión entre sólidos, además de una cartilla que contenga instrucciones de

uso e información referente al tema en torno al cual se desarrolla el producto.

- Las sujeciones de las partes que componen el producto deben ser fijas y adecuadas para generar una estructura que no se desajuste ni presente problemas de estabilidad.

#### **11.4 REQUERIMIENTOS TÉCNICO PRODUCTIVOS**

- Las máquinas, herramientas y tecnologías empleadas para la fabricación de los elementos debe estar relacionado con procesos de transformación de materiales que permitan producciones a gran escala.
- Para realizar la producción se debe tener en cuenta personal calificado en el tipo de proceso que se emplee.
- Debe contemplarse la organización y gestión necesaria para la fabricación, la producción y el desarrollo de los productos utilizando combinación de materiales.
- Los procesos de producción deben ser optimizados para el aprovechamiento del material utilizado.
- El material en el cual sea fabricada la pieza debe contar con las siguientes características: resistencia al rayado, resistencia al impacto, soportar esfuerzos de flexión, no ser toxico y/o contaminante, entre otros.
- Se debe realizar las comprobaciones necesarias para garantizar la calidad del producto.
- Debe tomarse en cuenta un monto máximo de 1'500.000 pesos moneda corriente para el desarrollo de los modelos funcionales.

### **11.5 REQUERIMIENTOS ECONÓMICOS O DE MERCADO**

- Debe considerarse la posibilidad que el producto va dirigido a instituciones académicas que son el intermediario entre este y el usuario final.
- El empaque debe proteger y contener los elementos de los cuales consta el producto organizado de tal manera que se diferencien entre si.

### **11.6 REQUERIMIENTOS FORMAL ESTETICOS**

- El producto debe manifestar el concepto bajo el cual fue creado, por medio del uso de color, materiales y texturas.
- Debe considerarse la [coherencia intra-figural del](#) objeto consigo mismo.

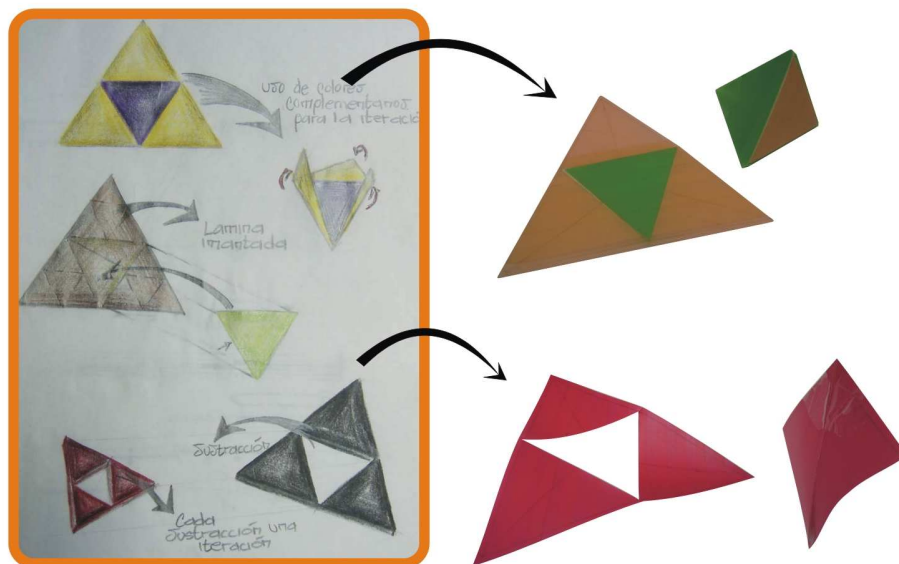
## 12. ETAPA CREATIVA

### 12.1 FRACTALES BÁSICOS

#### 12.1.1 Sierpinski y Menger

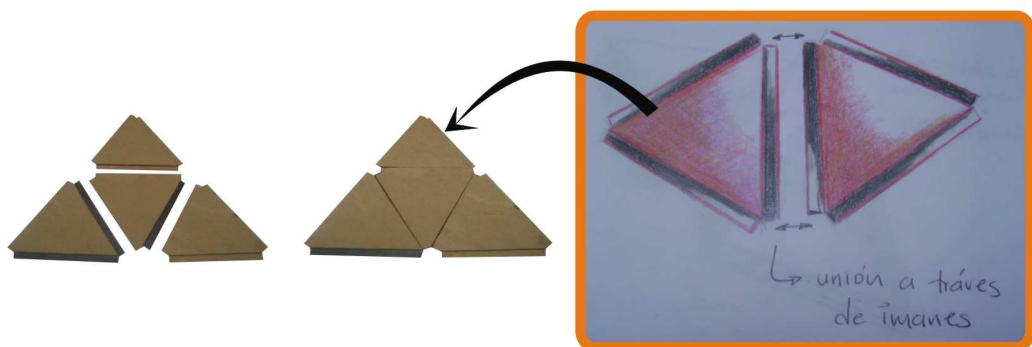
##### A. Lluvia de ideas

Figura 102. Idea 1



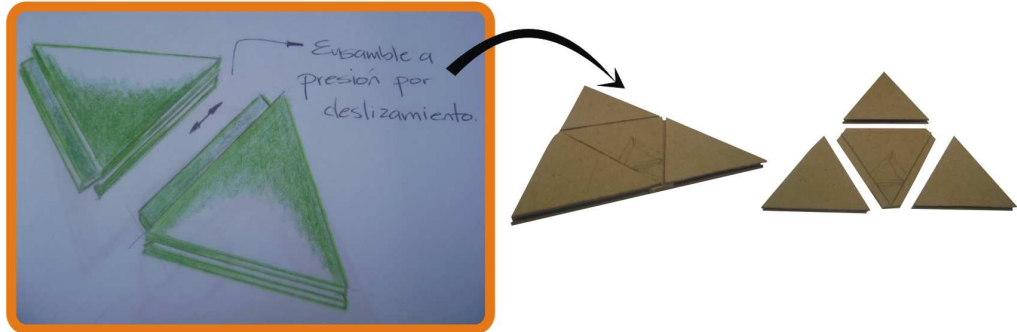
Fuente: Autor

Figura 103. Idea 2



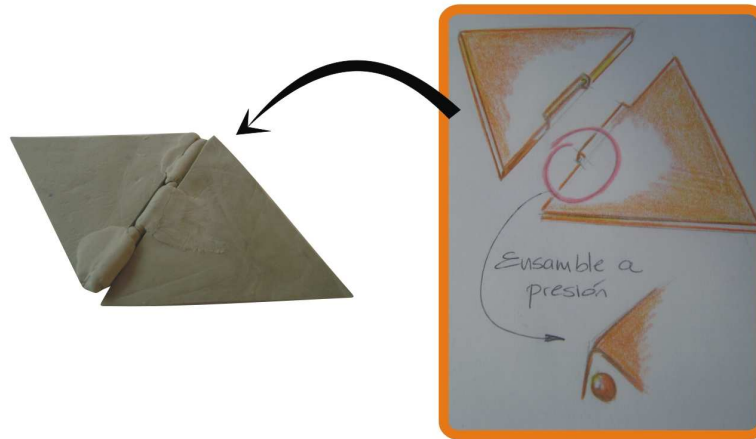
Fuente: Autor

Figura 104 . Idea 3



Fuente: Autor

Figura 105. Idea 4



Fuente: Autor

Figura 106. Idea 5

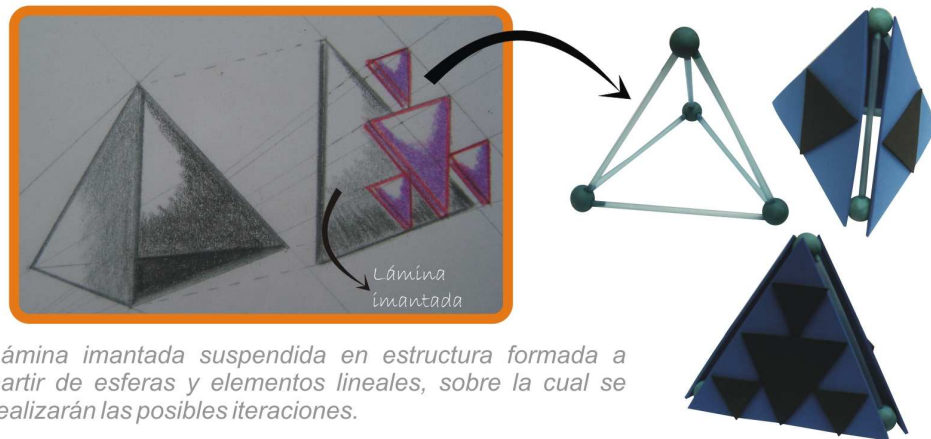


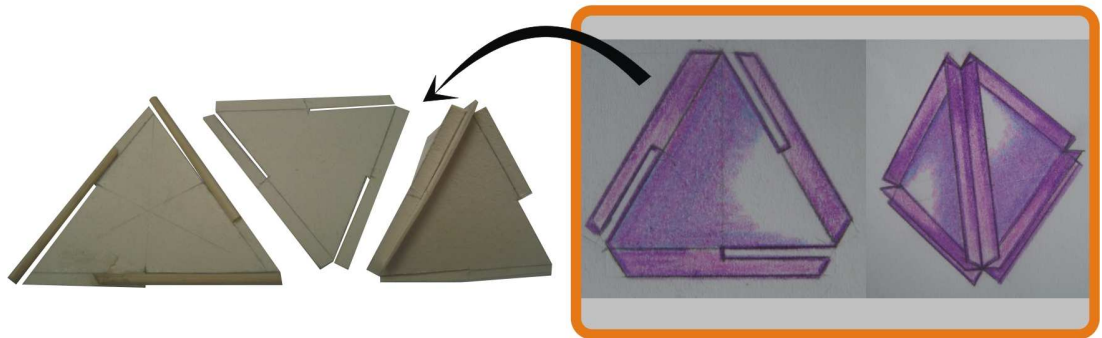
Lámina imantada suspendida en estructura formada a partir de esferas y elementos lineales, sobre la cual se realizarán las posibles iteraciones.

Fuente: Autor

## B. Principios de Solución

A continuación se plantean seis principios de solución, pensados para la construcción de un tetraedro como modulo a trabajar en la creación del triángulo de Sierpinski y la Esponja de Menger.

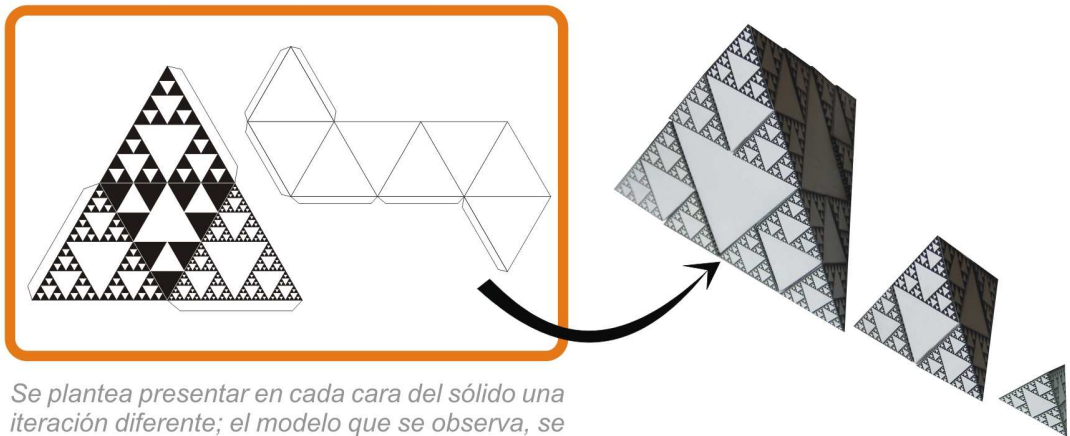
Figura 107. Primer Principio



*Principio de solución basado en módulos de ensamble deslizable, la pieza que cierra el sólido no puede ser deslizada al pensar en un material rígido. Por lo tanto, la unión queda inconclusa.*

Fuente: Autor

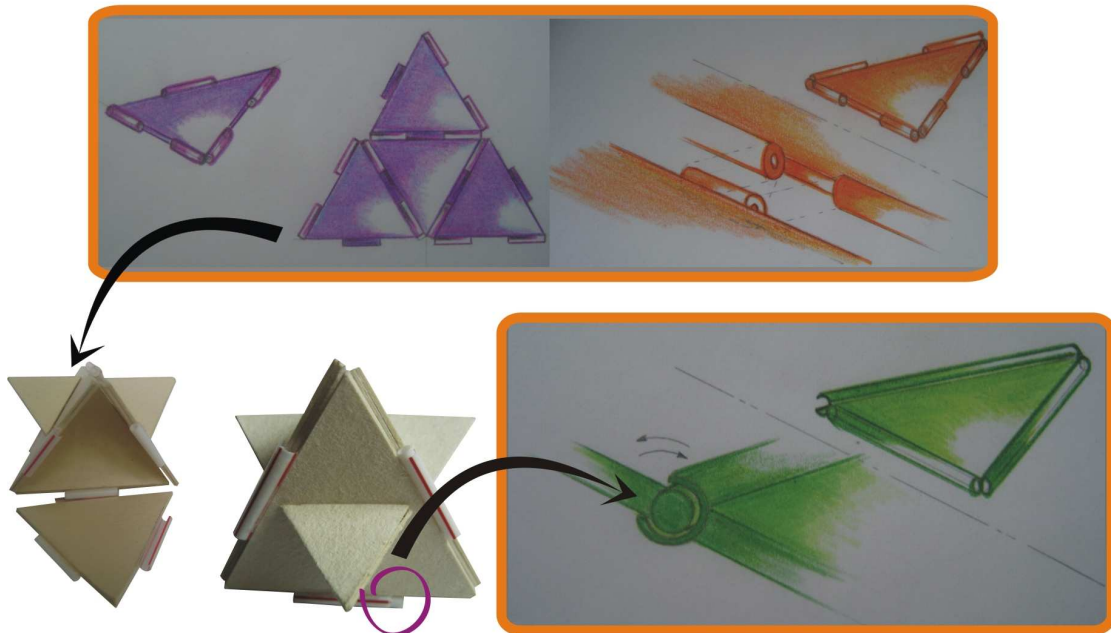
Figura 108. Segundo Principio



*Se plantea presentar en cada cara del sólido una iteración diferente; el modelo que se observa, se crea a partir de un desarrollo; sin embargo, el principio planteado propone los módulos de tetraedro sólidos, construyendo el triángulo de Sierpinski sobre bases de octaedros igualmente sólidos.*

Fuente: Autor

Figura 109. Tercer Principio



*Al pensar en módulos para ensamblar se propone el principio de solución a partir de bisagras con corte longitudinal que permiten encajar el eje de giro.*

*En esta idea la bisagra permite un solo sentido de giro y para la construcción del sólido se necesitan dos módulos diferentes.*

Fuente: Autor

Figura 110. Cuarto Principio

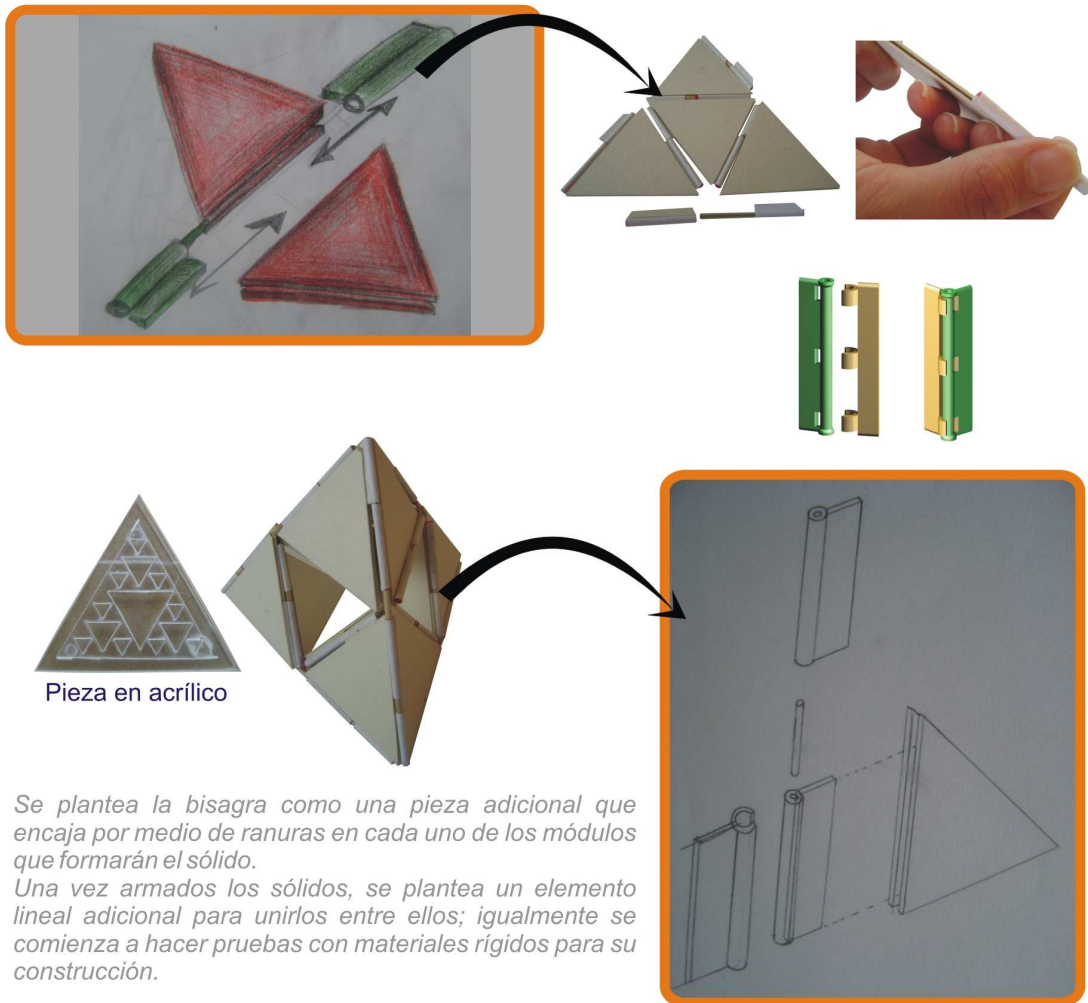


*Este principio plantea una bisagra de macho y hembra ; lo cual permite que gire en dos sentidos.*

*Sin embargo, la pieza que cierra el sólido no puede ser ensamblado como ocurre en la fig. 107*

Fuente: Autor

Figura 111. Quinto Principio



Fuente: Autor

Figura 112. Sexto principio



*Se piensa en un principio completamente diferente de unión entre módulos, empleando el concepto de **tensegrity**, usando los conceptos de tensión y compresión para mantener la estructura en pie.*

Fuente: Autor

Figura 113. Séptimo Principio



Fuente: Autor

## EVALUACION DE PRINCIPIOS DE SOLUCIÓN

Se realizó un cuadro para la evaluación de los principios de solución basado en el método de evaluación de alternativas que lleva por nombre: "Examen y selección de alternativas o conceptos de diseño"; el cual parte de tener desarrollados algunos conceptos globales de diseño enfocados a la solución del problema planteado y contraponerlos a los criterios que están determinados como requerimientos; el resultado de esta evaluación, será el punto de inicio para evolucionar el ensamble y generar alternativas mas completas hasta obtener la adecuada de acuerdo a los requerimientos establecidos.

En este punto no todos los requerimientos planteados serán evaluados; a continuación se enuncian los requerimientos a evaluar:

### REQUERIMIENTOS DE USO

- El ensamble entre elementos debe ser de unión simple y que no requiera gran cantidad de esfuerzos.

## **REQUERIMIENTOS DE FUNCIÓN**

- Debe aplicarse un principio mecánico que permita el ensamble de dos o más piezas.
- El mecanismo aplicado debe cumplir correctamente su función.
- El módulo debe constar de una única pieza que incluya el mecanismo y la representación deseada.
- La combinación de módulos debe permitir la representación de otras posibilidades geométricas.

## **REQUERIMIENTOS ESTRUCTURALES**



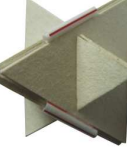



- El producto debe contar con un máximo de 3 elementos diferenciables que posibiliten la representación bidimensional, representación tridimensional y unión entre sólidos, además de una cartilla que contenga instrucciones de uso e información referente al tema en torno al cual se desarrolla el producto.
- Las sujeciones de las partes que componen el producto deben ser fijas y adecuadas para generar una estructura que no se desajuste ni presente problemas de estabilidad.

Se evalúa cada principio de solución, concediendo la calificación más alta a la interacción en que se satisfaga de manera más adecuada los requerimientos anteriormente planteados de la siguiente manera:

0= no cumple

- 1= cumple medianamente
- 2= Cumple
- 3= Cumple adecuadamente

Tabla 5. Evaluación de Principios de Solución

PRINCIPIOS							
CRITERIOS							
USO	El ensamble no requiere esfuerzos pues posee un mecanismo deslizable. <b>3</b>	no posee ensamble por lo tanto no genera ningún esfuerzo. <b>3</b>	El ensamble requiere de una presión leve por lo tanto no genera esfuerzos. <b>3</b>	El ensamble no requiere esfuerzos pues posee un mecanismo deslizable. <b>3</b>	Consta de dos funciones: encajar la bisagra en el elemento y posteriormente unirlos entre si. <b>1</b>	El elemento elastico puede quedar mas tensionado en algunos puntos y la forma triangular no ser bien definida. <b>0</b>	Se debe ubicar los elementos en la posición de ensamble y atravesar un eje para mantenerlos unidos. <b>2</b>
FUNCIÓN	Cuando se va a ensambalar la última pieza, el mecanismo deslizable no permite su unión. El ensamble permite la representación de otras posibilidades. <b>1</b>	No posee un principio mecánico de unión, por lo tanto el sólido se construye sobre otros elementos como bases. No permite la representación de otras posibilidades. <b>0</b>	Su ensamble a presión, permite que la última pieza se una correctamente. No permite la representación de otras posibilidades. <b>1</b>	Cuando se va a ensambalar la última pieza, el mecanismo deslizable no permite su unión. Permite la representación de otras posibilidades. <b>1</b>	El mecanismo deslizable de la bisagra, permite que la última pieza se una correctamente. Permite la representación de otras posibilidades. <b>3</b>	No permite la representación de otras posibilidades. <b>3</b>	El mecanismo de ensamble funciona correctamente. Permite la representación de otras posibilidades. <b>3</b>
ESTRUCTURALES	El producto consta de 2 elementos diferenciables: el módulo que genera el sólido y el elemento de unión entre sólidos. <b>3</b>	El producto consta de 3 elementos diferenciables: el módulo principal (tetraedro) y dos módulos (octaedros) sobre el que se ubican los primeros. <b>3</b>	La construcción del sólido necesita de 2 módulos diferentes pues el mecanismo así lo requiere, ademas costa de un elemento que une los sólidos entre si. <b>3</b>	La construcción del sólido necesita de 2 módulos diferentes pues el mecanismo así lo requiere, ademas costa de un elemento que une los sólidos entre si. <b>3</b>	El producto consta de 4 elementos diferenciables: los 2 elementos de unión, el modulo sólido y el elemento de unión entre sólidos. <b>1</b>	El producto consta de 3 elementos diferenciables: un elemento elastico, las varillas y el elemento de unión entre sólidos. <b>3</b>	El producto consta de 3 elementos diferenciables: el módulo triangular, el eje de ensamble y la pieza de unión entre módulos. <b>3</b>
Total	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>7</b>	<b>7</b>	<b>3</b>	<b>8</b>

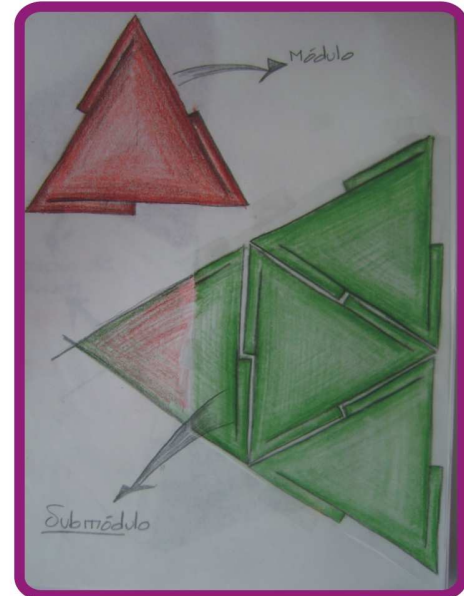
Fuente: Autor

## RESULTADO DE LA EVALUACIÓN

Figura 114. Bisagra integrada al módulo

*De los principios de solución planteados se ha decidido trabajar con la bisagra integrada en el módulo y posteriormente a partir de este principio se plantearán soluciones que disminuyan el número de piezas para ensamble y obtener así un único módulo para la construcción del sólido.*

*Este principio de solución será utilizado para la construcción del tetraedro de Sierpinski y la esponja de Menger, así como la utilización de diferentes iteraciones en cada cara de los módulos (característica planteada en el segundo principio).*



Fuente: Autor

## C. Evolución

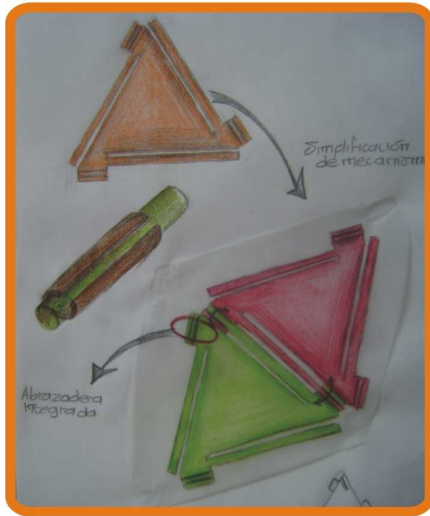
Figura 115. Elemento adicional de agarre



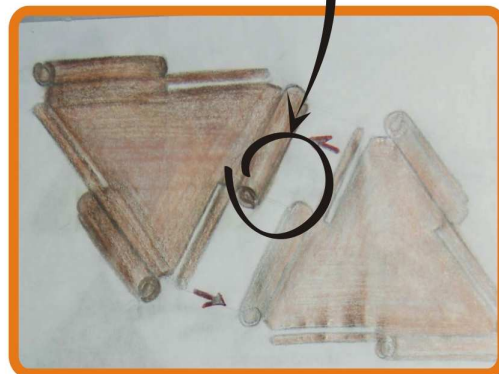
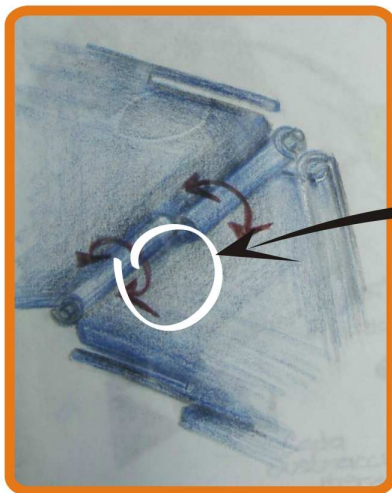
*Se plantea la construcción de un elemento de agarre adicional que permita la unión entre módulos para construir el sólido y la unión de estos entre sí; sin embargo nuestro objetivo para la construcción de los sólidos es el utilizar el menor número de piezas posible y esta idea nos genera más elementos.*

Fuente: Autor

Figura 116. Abrazadera integrada al módulo



Se integra la abrazadera al módulo disminuyendo el número de elementos para la construcción del sólido; a continuación se muestra la evolución de esta idea y las pruebas que se realizarán en un posible material de construcción.



Fuente: Autor

Figura 117. Pre-modelo para construcción del molde



Fuente: Autor

Figura 118. Molde



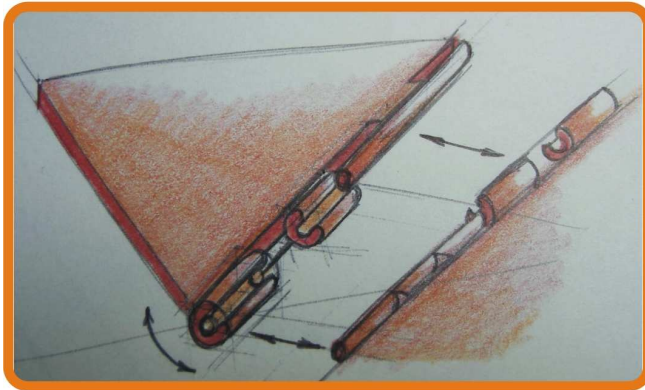
Fuente: Autor

Figura 119. Modelos en resina



Fuente: Autor

Figura 120. Doble abrazadera integrada al módulo



*Aquí se plantea una doble abrazadera, para evitar que la pieza se salga del sólido cuando este armado.*

Fuente: Autor

Figura 121. Pre-modelo para construcción del molde



Fuente: Autor

Figura 122. Molde



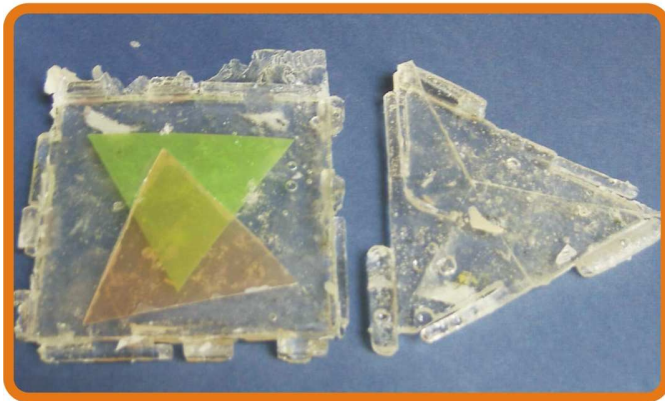
Fuente: Autor

Figura 123. Modelos en resina



Fuente: Autor

Figura 124. Pruebas de acabados en el material






*Se plantea la posibilidad de crear una pieza transparente, encapsulando las iteraciones generadas en el triángulo de Sierpinsky y la esponja de Menger; sin embargo, los moldes y el material no permiten obtener piezas de alta calidad.*

Fuente: Autor

A continuación se realiza un análisis a través de ventajas y desventajas, de cada una de las ideas obtenidas en la etapa de evolución del principio de solución.

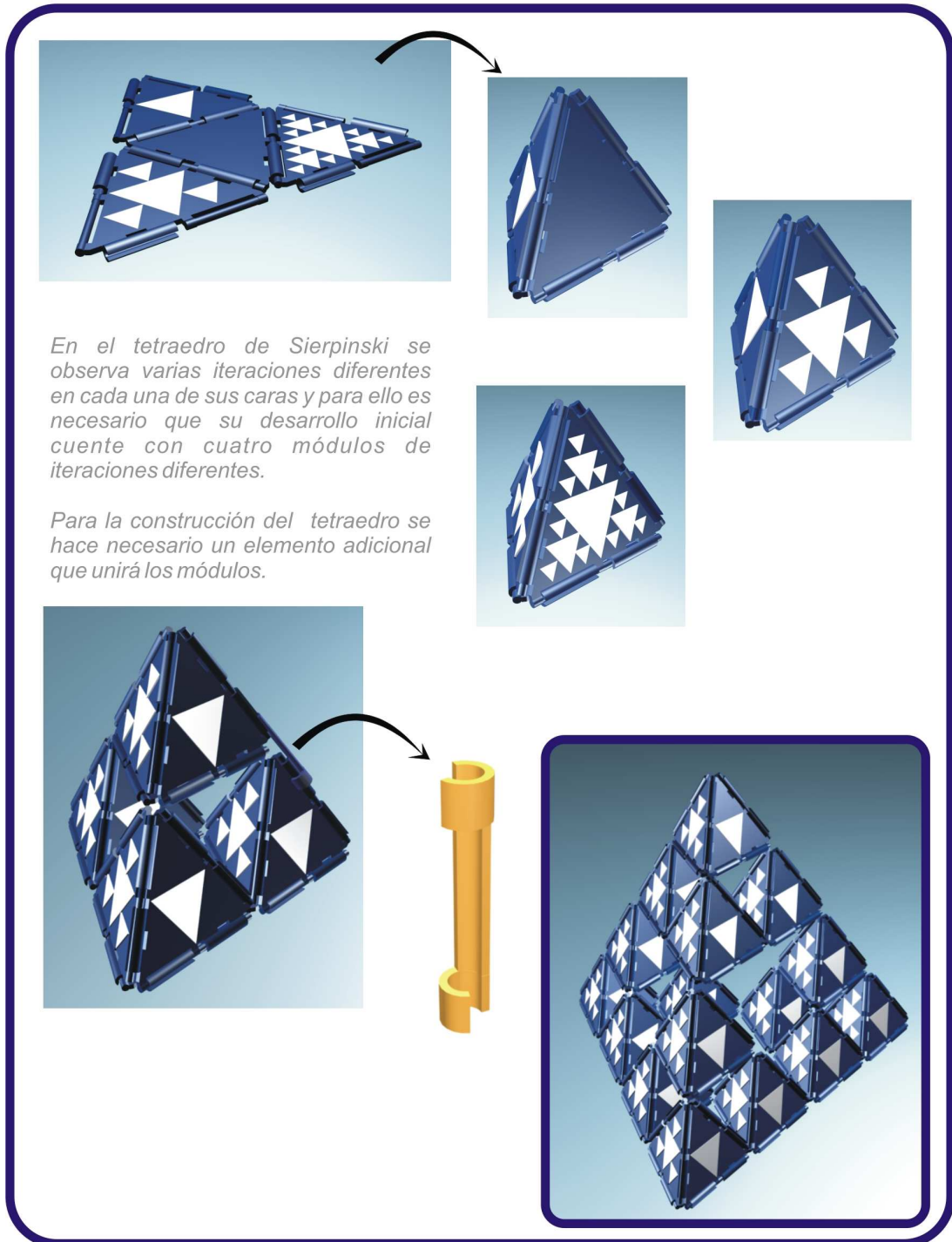
Figura 125. Análisis de ventajas y desventajas

	VENTAJAS	DESVENTAJAS
	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Permite la rotación de los módulos en dos direcciones.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Posee mayor número de elementos.</li> <li>- La fabricación de la abrazadera no se puede realizar por mecanizado.</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Permite la rotación de los módulos en dos direcciones.</li> <li>- Posee menor número de elementos.</li> <li>- La fabricación del módulo se puede realizar por procesos industriales y artesanales.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Los elementos unidos pueden soltarse ya que no posee un tope el eje donde la abrazadera agarra.</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Permite la rotación de los módulos en dos direcciones.</li> <li>- Posee menor número de elementos.</li> <li>- la unión de los elementos, posee un tope en el eje que toma la abrazadera y esto evita que se suelten.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- La fabricación del modulo se puede realizar por procesos industriales y artesanales, sin embargo presenta mas dificultad en su fabricación por poseer dos abrazaderas separadas.</li> </ul>

Fuente: Autor

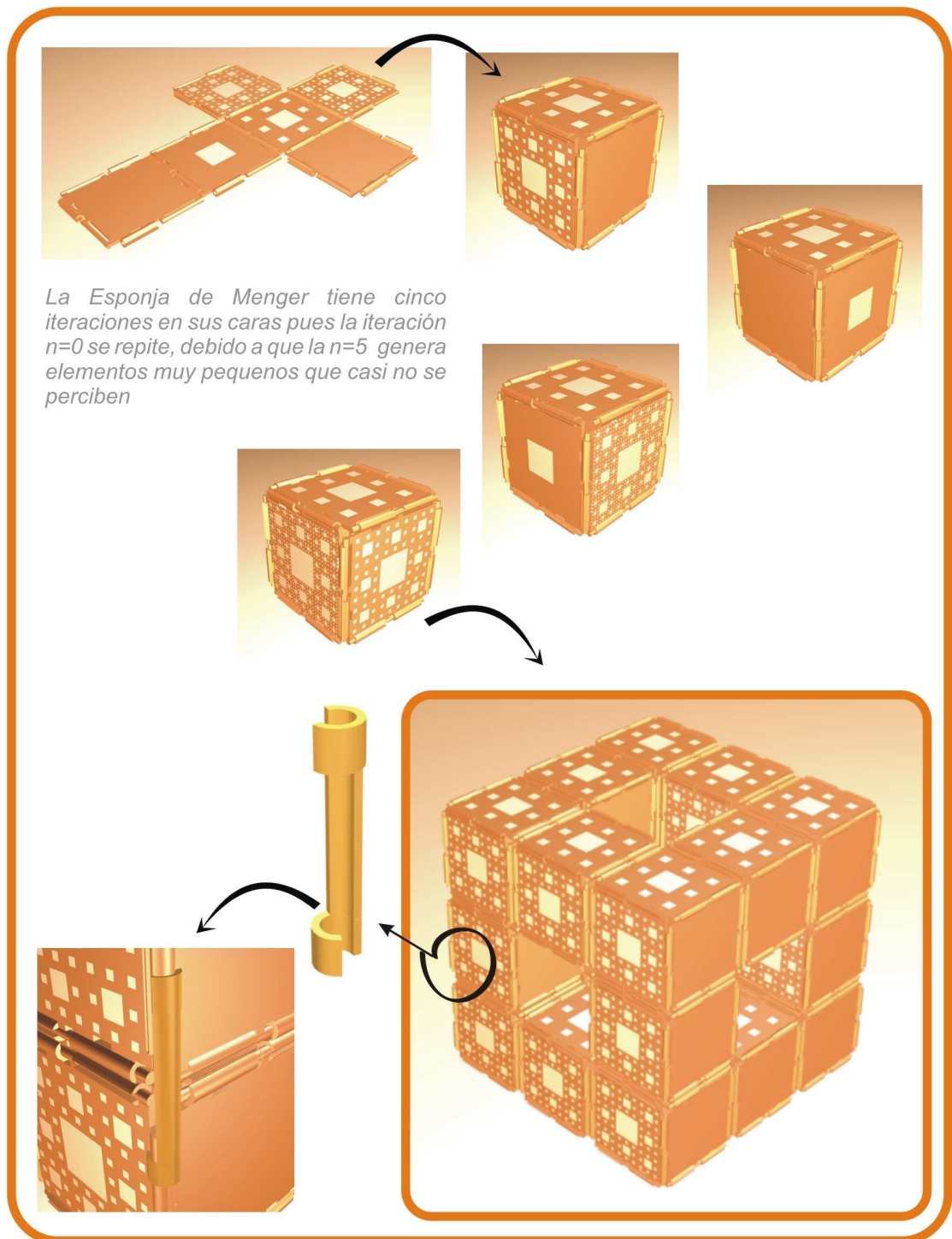
Después de analizar las ventajas y desventajas de las ideas obtenidas en la etapa de evolución, se crea un módulo donde se mezclan las ventajas de las ideas, obteniendo una mejorada, la cual se presenta a continuación; luego, se realizarán las pruebas de materiales y acabados del modelo final.

Figura 126. Renderizado Tetraedro de Sierpinski-3D MAX



Fuente: Autor

Figura 127. Renderizado Esponja de Menger-3D MAX

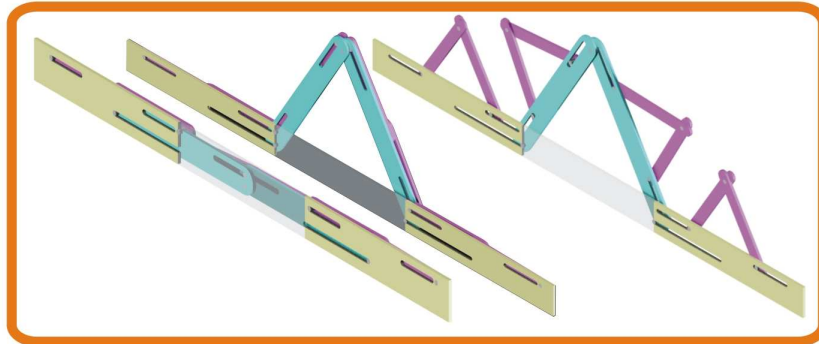


Fuente: Autor

## 12.1.2 Curva de Koch

### A. Lluvia de ideas

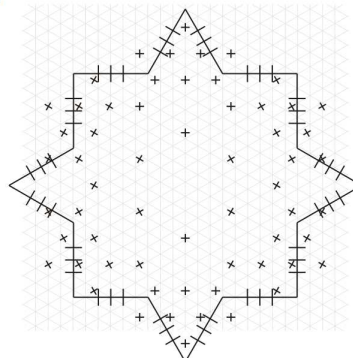
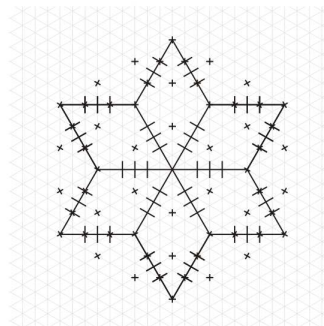
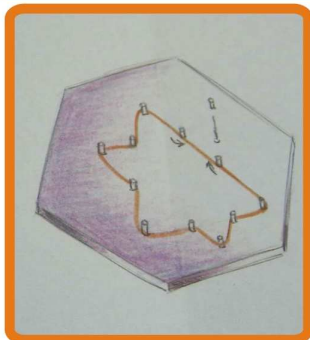
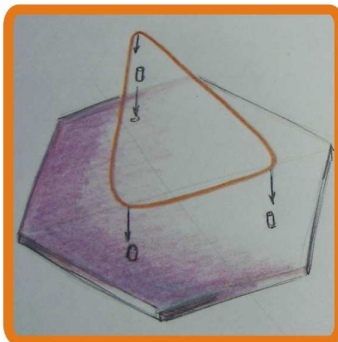
Figura 128. Idea 1



*La primera idea que se plasmó de la curva de Koch, es la que consta de elementos lineales, con mecanismos de correderas que permiten la aparición de las iteraciones; sin embargo este mecanismo es muy complejo y genera mucho volumen.*

Fuente: Autor

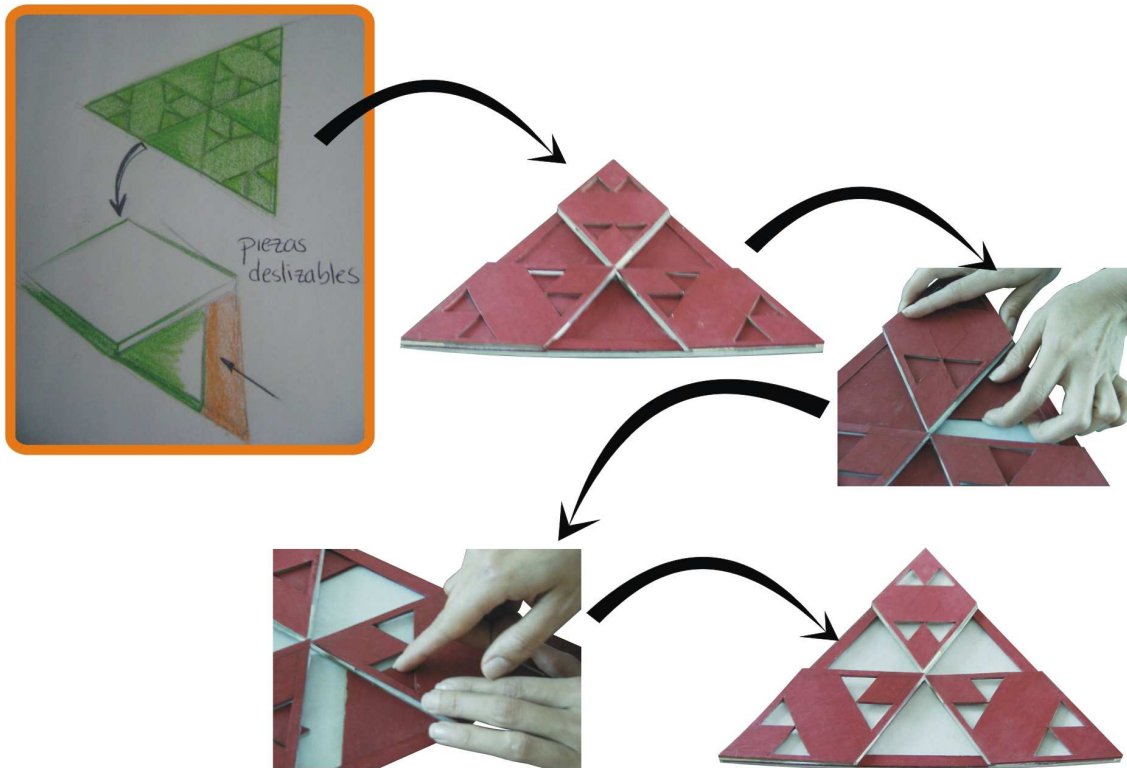
Figura 129. Idea 2



*En esta idea se plantea una red de triángulos y cuadrados, donde se puedan ubicar elementos que permitan crear a través de una banda elástica el copo de Koch a partir de un triángulo y un cuadrado, así como de su anticopo; sin embargo, no se encuentra una red que acoja todas las posibilidades.*

Fuente: Autor

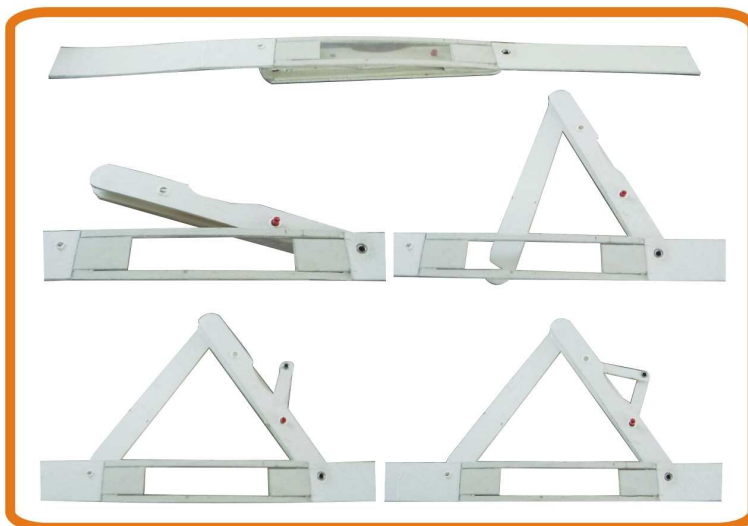
Figura 130. Idea 3



Fuente: Autor

## B. ALTERNATIVAS

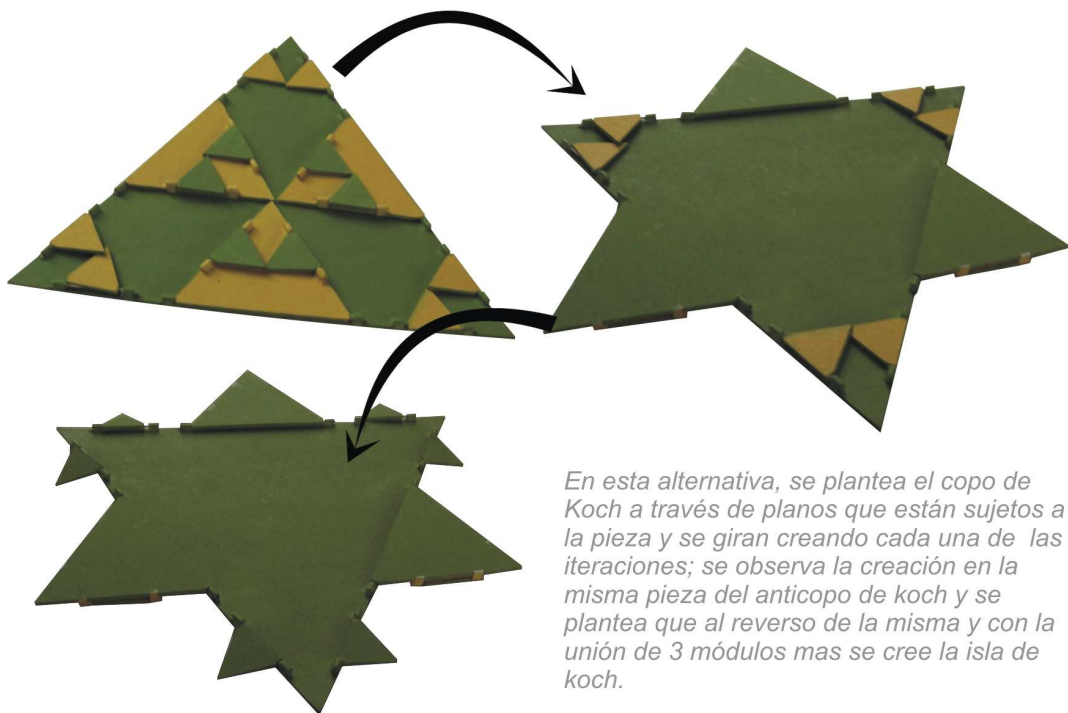
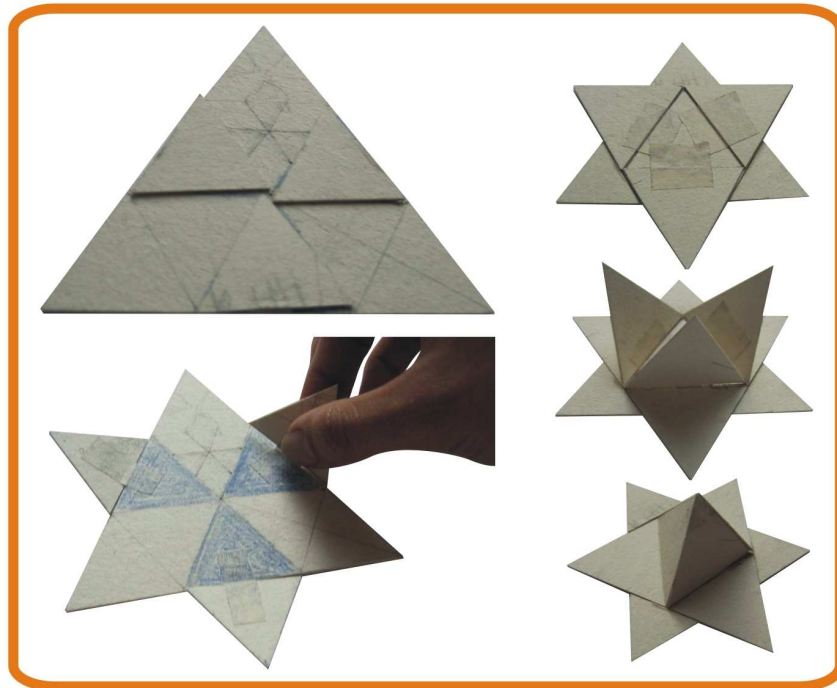
Figura 131. Alternativa 1



*Esta alternativa se obtiene de la evolución de la idea 1. Ahora se utilizan ejes de donde se unen las piezas que forman las iteraciones;*

Fuente: Autor

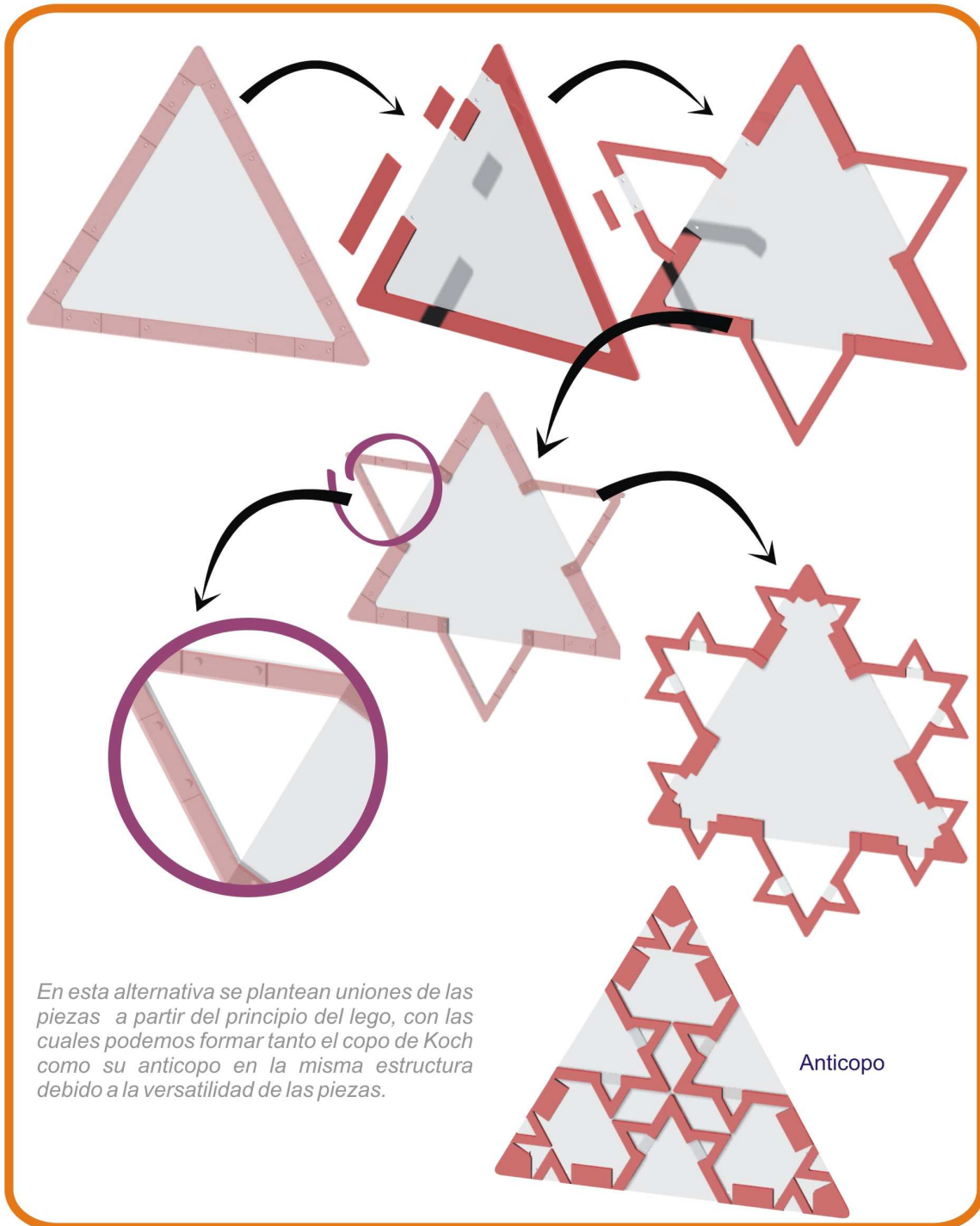
Figura 132. Alternativa 2



*En esta alternativa, se plantea el copo de Koch a través de planos que están sujetos a la pieza y se giran creando cada una de las iteraciones; se observa la creación en la misma pieza del anticopo de koch y se plantea que al reverso de la misma y con la unión de 3 módulos mas se cree la isla de koch.*

Fuente: Autor

Figura 133. Alternativa 3



Fuente: Autor

## EVALUACION DE ALTERNATIVAS

A continuación se evalúan las alternativas para la construcción de la curva de Koch, según los requerimientos analizados en la anterior; igualmente, se evalúa cada alternativa, concediendo la calificación más alta a la interacción en que se satisfaga de manera más adecuada los requerimientos según lo siguiente:




0= no cumple

1= cumple medianamente

2= Cumple

3= Cumple adecuadamente

Tabla 6. Evaluación de Alternativas

ALTERNATIVAS			
CRITERIOS			
USO	<p>El usuario no necesita hacer ningún tipo de esfuerzo, solo debe girar algunas piezas y ensamblarlas en un eje dispuesto para ello. <b>3</b></p>	<p>El usuario no necesita hacer ningún tipo de esfuerzo, solo debe girar las piezas triangulares y obtener la iteración que busca. <b>3</b></p>	<p>El ensamble de las piezas es sencillo, pues solo debe encajarlas con una presión leve para ajustarlas. <b>3</b></p>
FUNCIÓN	<p>Posee un principio mecánico que facilita la interacción con el usuario.</p> <p>Consta de varios elementos ensamblados entre sí formando una única pieza.</p> <p>Solo permite la representación de la curva de Koch. <b>2</b></p>	<p>Posee un principio mecánico que facilita la interacción con el usuario.</p> <p>Consta de varios elementos ensamblados entre sí formando una única pieza.</p> <p>Permite la representación de la curva y la isla de Koch, el anticopo se percibe adecuadamente. <b>2</b></p>	<p>Posee un principio mecánico que facilita la interacción con el usuario.</p> <p>Consta de varios elementos ensamblados entre sí formando una única pieza.</p> <p>Permite la representación de la curva, el anticopo y la isla de Koch. <b>3</b></p>
ESTRUCTURALES	<p>Las sujeciones de las piezas son fijas y generan una fuerte estructura. <b>3</b></p>	<p>Las sujeciones de las piezas son fijas pero los triángulos pueden girarse fácilmente y entorpecer el proceso de iteración. <b>2</b></p>	<p>Al ser una sujeción a presión, las piezas no se desencajan, además permite quitarlas y así reducir peso para la creación de la isla de Koch que requiere de 3 módulos más. <b>3</b></p>
Total	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>9</b>

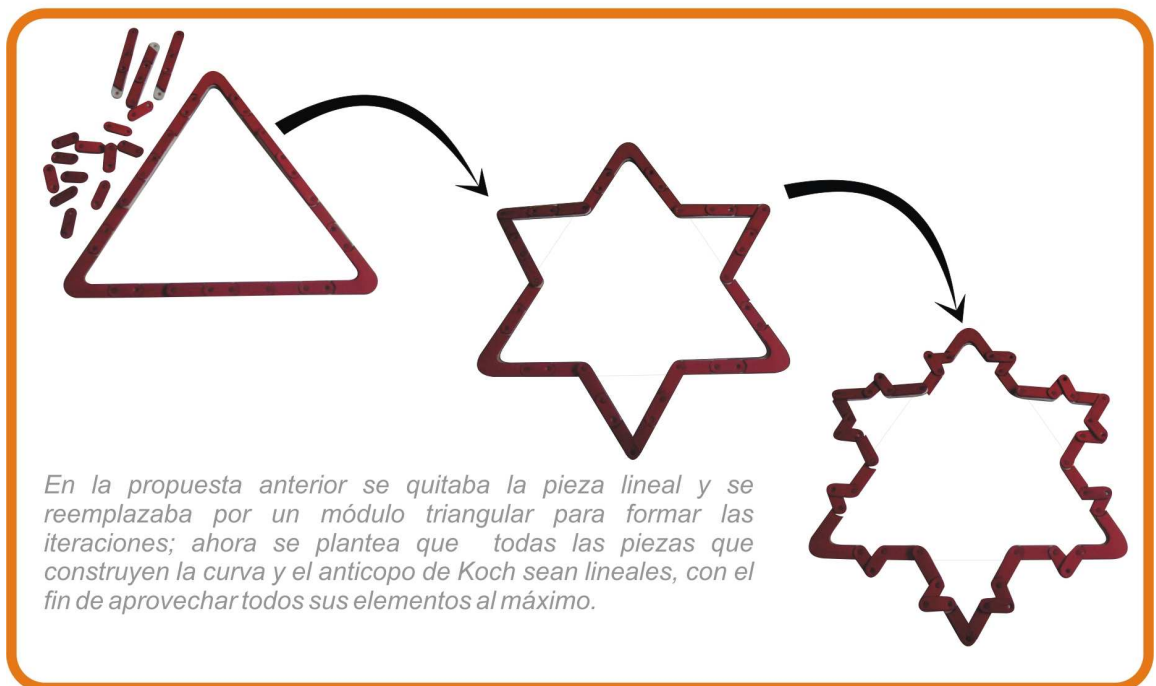
Fuente: Autor

## RESULTADO DE LA EVALUACIÓN

Teniendo en cuenta la calificación obtenida, se decide evolucionar la alternativa 3 con el fin de unificar más los elementos; además, decidimos construir también la alternativa 1 pues es muy didáctica si analizamos que el origen de este fractal parte de una línea.

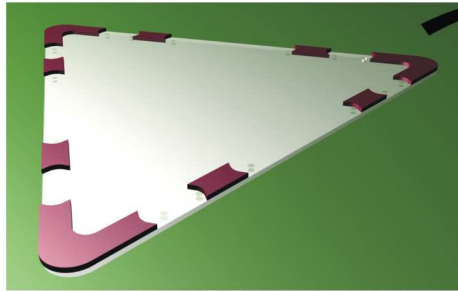
### C. EVOLUCIÓN

Figura 134. Evolución

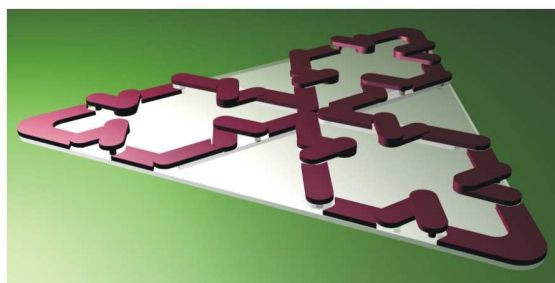
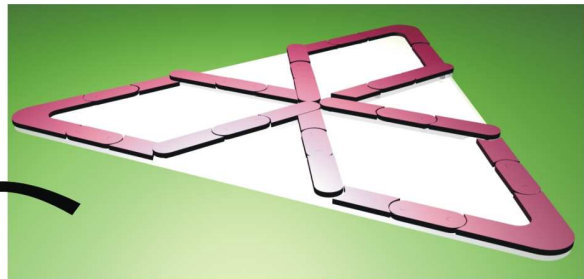
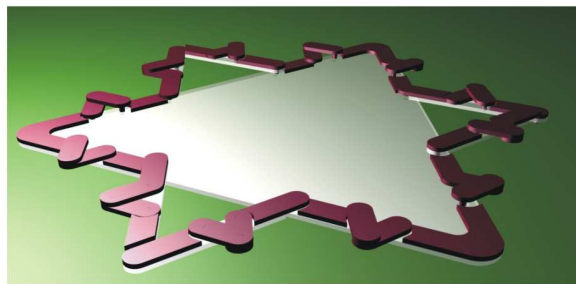


Fuente: Autor

Figura 135. Renderizado Copo de nieve de Kosh-3D MAX



*Las imágenes muestran la secuencia de construcción del Copo y Anticopo de Koch.*



Fuente: Autor

## **13. DESARROLLO PROYECTUAL**

### **13.1 DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA**

Para el desarrollo de la fase 2. Se hace necesario utilizar una metodología para procesos de biónica aplicada donde existe un equilibrio entre la investigación en el área de análisis biónica y el desarrollo proyectual.

La metodología a utilizar contiene el siguiente orden:

#### **1. PROBLEMA PROYECTUAL**

- Descripción del problema

#### **2. INVESTIGACION BIONICA**

- Análisis del objeto natural
- Identificación de los principios morfológicos

#### **3. PROCESO METODOLÓGICO**

- Alternativas formales
- Evaluación de las alternativas
- Selección de alternativa final
- Evolución de la alternativa
- Posibles aplicaciones
- Evaluación de las alternativas de aplicación
- Selección de la aplicación
- Requerimientos de la situación de diseño, teniendo en cuenta la aplicación seleccionada
- Alternativas
- Evaluación de alternativas
- Selección de alternativa final
- Evolución

- Construcción de modelos

#### 4. PROYECTO

- Construcción de modelos funcionales

### 13.2 DESCRIPCION DEL PROBLEMA

En esta fase se busca el desarrollo de nuevas alternativas fractales y plantear aplicaciones formales funcionales, con el fin de fomentar la investigación y desarrollo de las mismas a partir del sistema propuesto y aportar elementos de estudio al grupo de investigación biónica de la Escuela de Diseño Industrial.

### 13.3 ANÁLISIS DEL OBJETO NATURAL

Es importante recordar que el objeto a analizar se seleccionó de forma preliminar, por la riqueza formal que contiene en comparación con los demás objetos estudiados en el trabajo de campo; a partir de su estudio se obtendrán alternativas modulares que presenten características del concepto fractal, para posteriormente realizar una propuesta formal de aplicación funcional.

#### 13.3.1 Generalidades del objeto a analizar.

- Nombre común: Hortensia
- Nombre Científico: Hydrangea macrophylla
- Familia: saxifragáceas<sup>57</sup>.
- Origen: Extremo Oriente.

---

<sup>57</sup> Saxifragáceas. Se caracterizan por tener flores dispuestas en inflorescencias en forma de cabezuelas.

- Etimología: Hydrangea significa "bebedora de agua". El nombre de Hortensia se debe a la dama francesa del Siglo XVIII Hortense Lepante.
- Arbusto caducifolio<sup>58</sup> de 1-1,5 metros de altura.
- Las hojas son grandes, verdes, ovaladas con borde dentado, terminando en punta y se caen al llegar el otoño.
- Flores verdes al principio y rosáceas o azules más tarde, reunidas en grandes corimbos terminales. Lo que realmente da el color son unas hojas modificadas llamadas brácteas.
- La floración dura desde la primavera al comienzo del otoño.
- Se pueden criar en balcones y terrazas, o en interior si la habitación es fresca y ventilada.
- La floración de la hydrangea está compuesta de pequeñas flores agrupadas, lo que hace que sea muy versátil, de ahí que se utilice mucho para la decoración de las bases de los pasteles de boda y, separadas, para exhibir en los ojales.

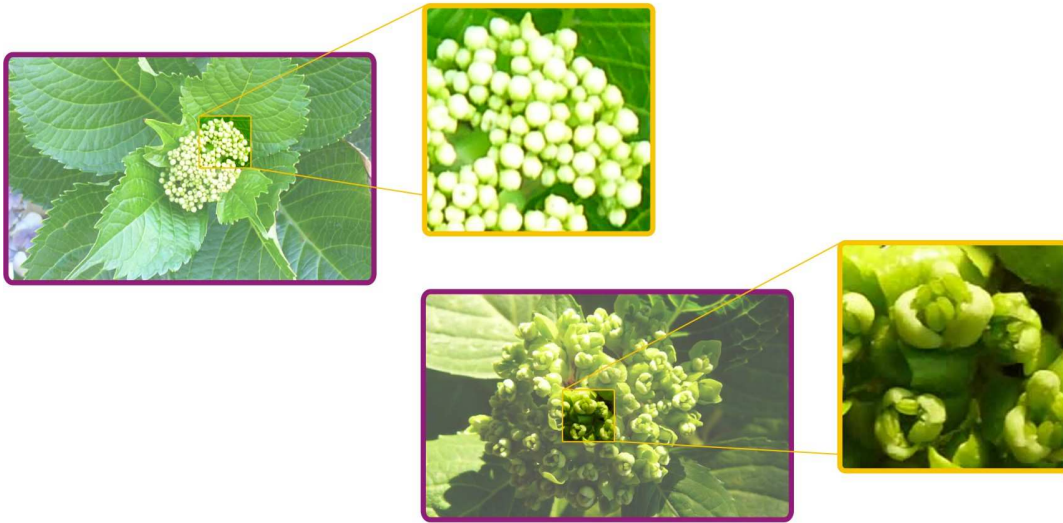
En ella se distinguen 4 etapas:

- **Primera etapa:** Aparecen los botones de floración y de 7 a 10 días después las brácteas empiezan a abrirse.

---

<sup>58</sup> Caducifolio. Se refiere a los árboles o arbustos que pierden su follaje durante una parte del año, la cual coincide en la mayoría de los casos con la llegada de la época desfavorable, la estación más fría en los climas templados o polares.

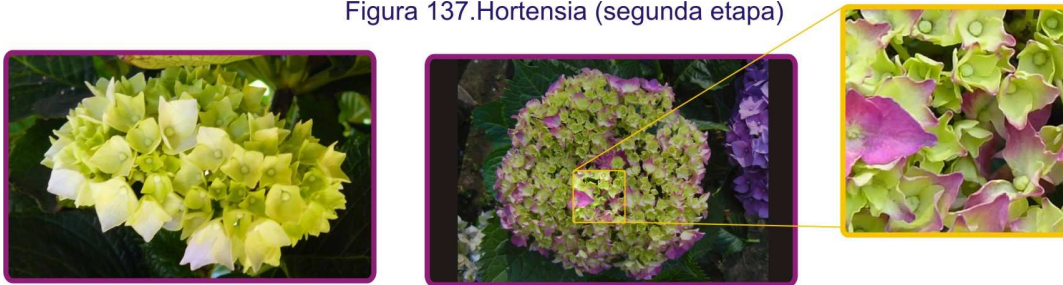
Figura 136. Hortensia (primera etapa)



Fuente: Autor

- **segunda etapa:** Las brácteas empiezan a tomar color pasando de su color verde inicial al rosa o violeta.

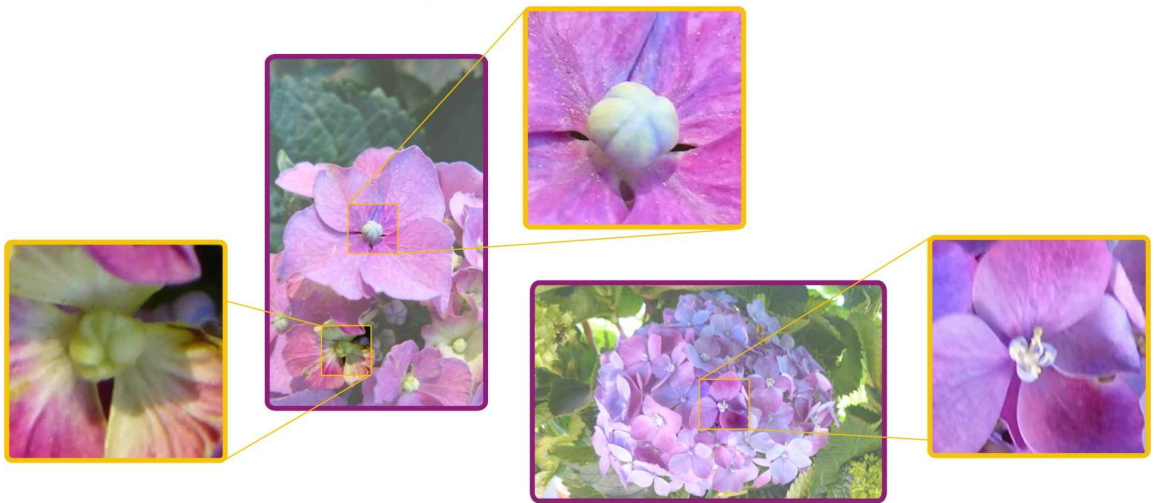
Figura 137. Hortensia (segunda etapa)



Fuente: Autor

- **Tercera etapa:** Las brácteas terminan de abrirse, dejando al descubierto el botón de la flor, que antes de abrir pasará por una gradación de color similar a las brácteas.

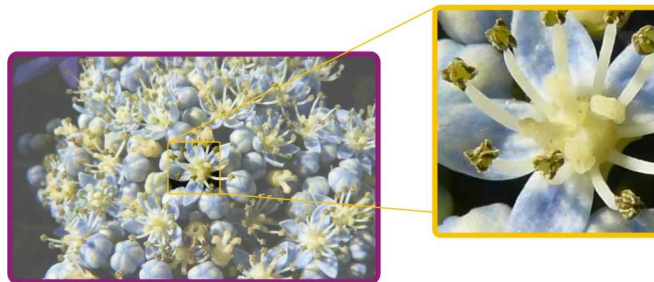
Figura 138. Hortensia (tercera etapa)



Fuente: Autor

- **Cuarta etapa:** La flor abre y las brácteas se caen. Sin embargo, cuando la planta ha estado expuesta mucho tiempo al sol, este proceso se da mucho antes de que la flor abra.

Figura 139. Hortensia (Cuarta etapa)



Fuente: Autor

La hydrangea se recoge durante todo el año como flor cortada, sus colores, que dependen de las estaciones, abarcan una amplia gama: los blancos lechosos y los pasteles suaves, además se pueden encontrar en distintos tonos como azul brillante y rosa fuerte, e incluso en fucsia.

- Luz: en verano necesita sombra y el resto del año sol. El sol del verano fuerte la quema.
- Necesita de suelos ácidos (ph 5), porosos y húmedos aunque en los alcalinos y neutros también vegeta con normalidad.
- Suelo fresco, permeable, bien abonado y de naturaleza ácida (la naturaleza del suelo influye en la coloración que presentarán las flores).
- El color de las flores lo determina el PH del sustrato que la contiene, de forma que si este tiene un PH 4,5 a 5 y elevado contenido de aluminio libre con contenido alto en K<sub>2</sub>O la flor será azul.

### **13.4 ANÁLISIS VISUAL Y TÁCTIL**

**13.4.1 Simetría.** Decimos que un objeto es simétrico en lo que concierne a una operación matemática dada, si, cuando aplicado al objeto, esta operación no cambia el objeto o su aspecto.

Existen varios tipos de simetría y los siguientes fueron observados en el objeto de estudio:

**13.4.1.1 Simetría bilateral:** simetría que tiene una figura si se puede dividir por medio de una línea en dos partes iguales que son imágenes de espejo.

Figura 140. Simetría bilateral



Fuente: Autor

**13.4.1.2 Simetría rotacional:** Algunas veces llamada simetría de giro.

Una forma geométrica tiene simetría rotacional alrededor de un punto “O” si se puede hacer que coincida exactamente sobre el original cuando se rota alrededor de “O” un cierto ángulo positivo menor a un ciclo completo.

Por ejemplo, un cuadrado no cambia si se rota  $90^\circ$  alrededor de su centro y un triángulo equilátero permanece sin cambio al girar  $120^\circ$  sobre su centro.

Figura 141. Simetría Rotacional



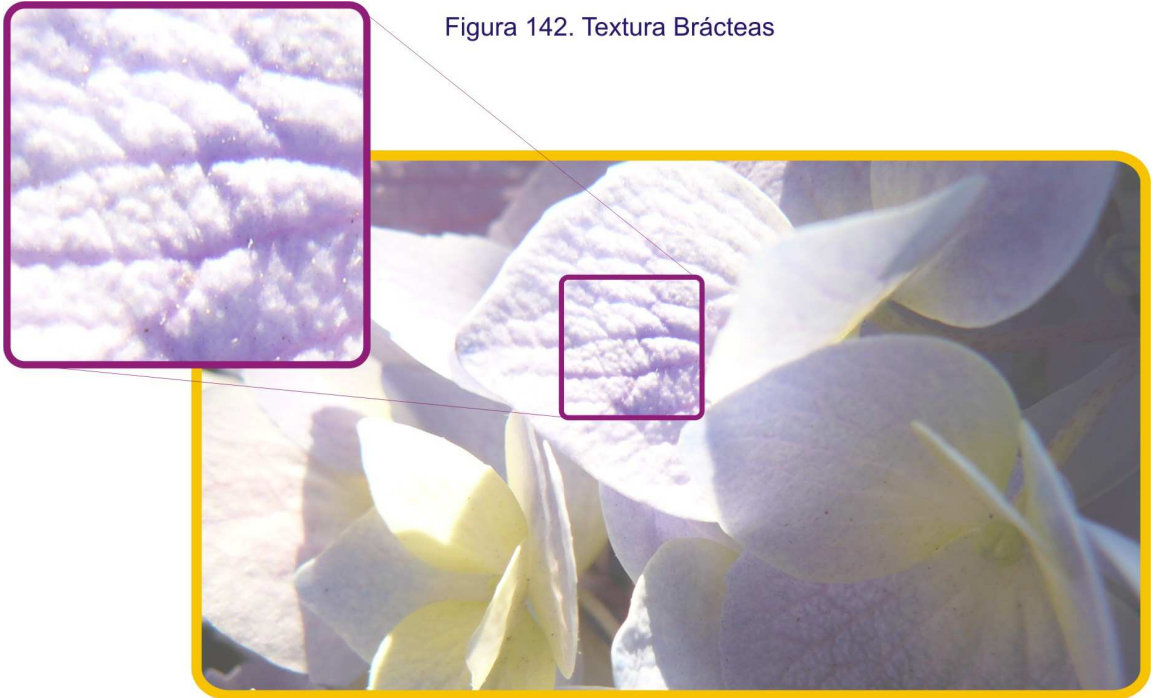
*Aunque la simetría no se cumple estrictamente pues las formas no son del todo perfectas, se pueden percibir como simétricas.*

*En esta imagen se observa una simetría bilateral y rotacional; si se gira  $72^\circ$  o  $90^\circ$  la figura debe coincidir,*

Fuente: Autor

**13.4.2 Textura.** La textura es la cercanía en una superficie de varias formas, se refiere también a las características superficiales y puede ser rugosa, suave, lisa, etc. Está compuesta por la repetición de módulos. Puede tener variación de módulos y de concentración. Existe textura visual, que es la estrictamente bidimensional aunque es posible que evoque sensaciones táctiles. Y existe la textura táctil que no solo es visible si no que se puede sentir por la elevación sobre la superficie que da una tridimensionalidad.

Figura 142. Textura Brácteas



*En las brácteas de la flor encontramos una textura visual, generada por las nervaduras; y una textura táctil generada por la rugosidad de las mismas. A esto se le suma el contraste de color entre las nervaduras y el fondo.*



*La textura observada en las nervaduras de las brácteas también presenta una simetría bilateral que se desarrolla radialmente.*

Fuente: Autor

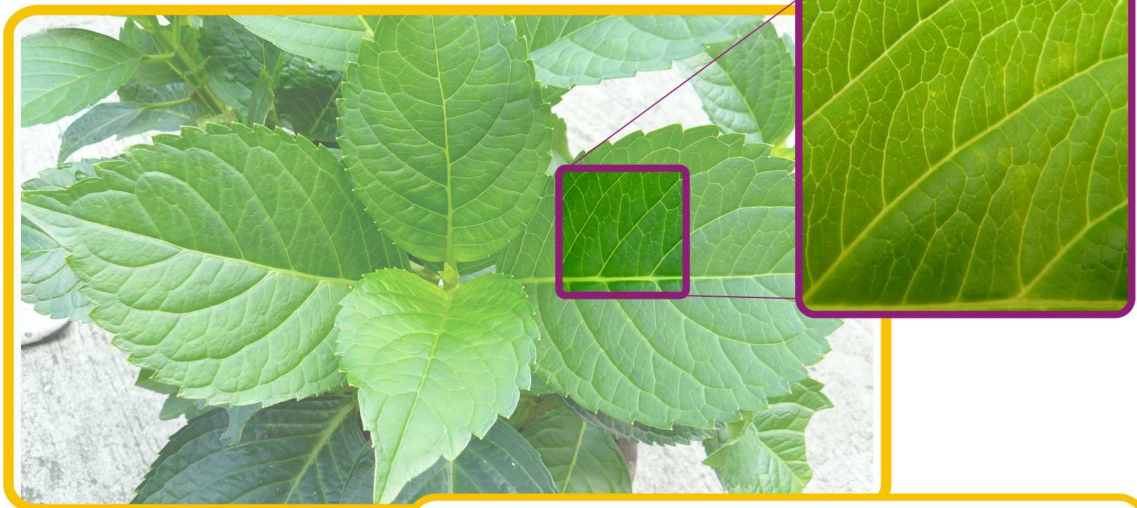
Figura 143. Textura en tallo



*En el tallo se observa una textura suave debido a la presencia de pequeñas vellosidades.*

Fuente: Autor

Figura 144. Textura hojas



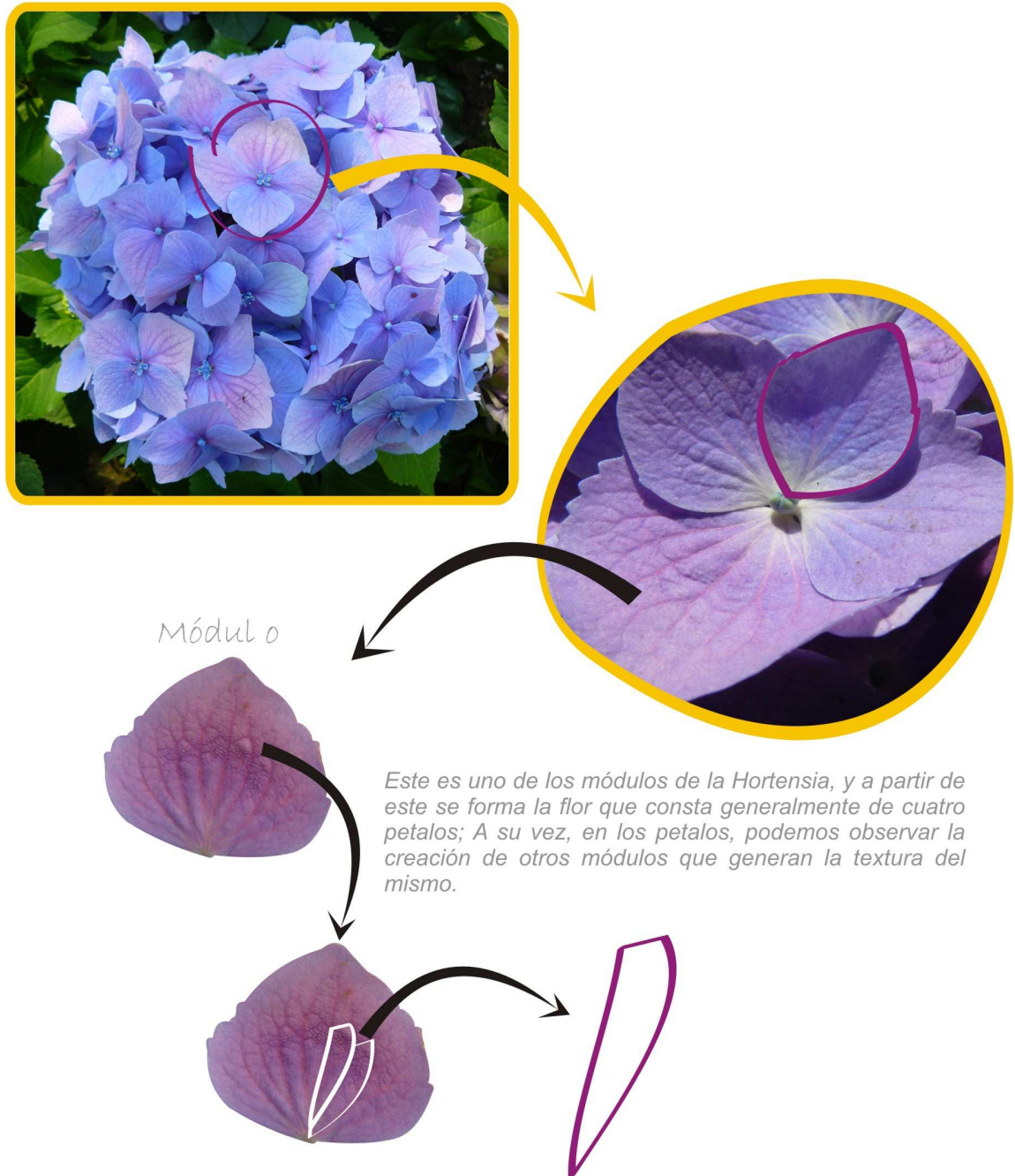
*En la parte anterior y posterior de las hojas, se observa una textura táctil producida por la profundidad de las nervaduras.*



Fuente: Autor

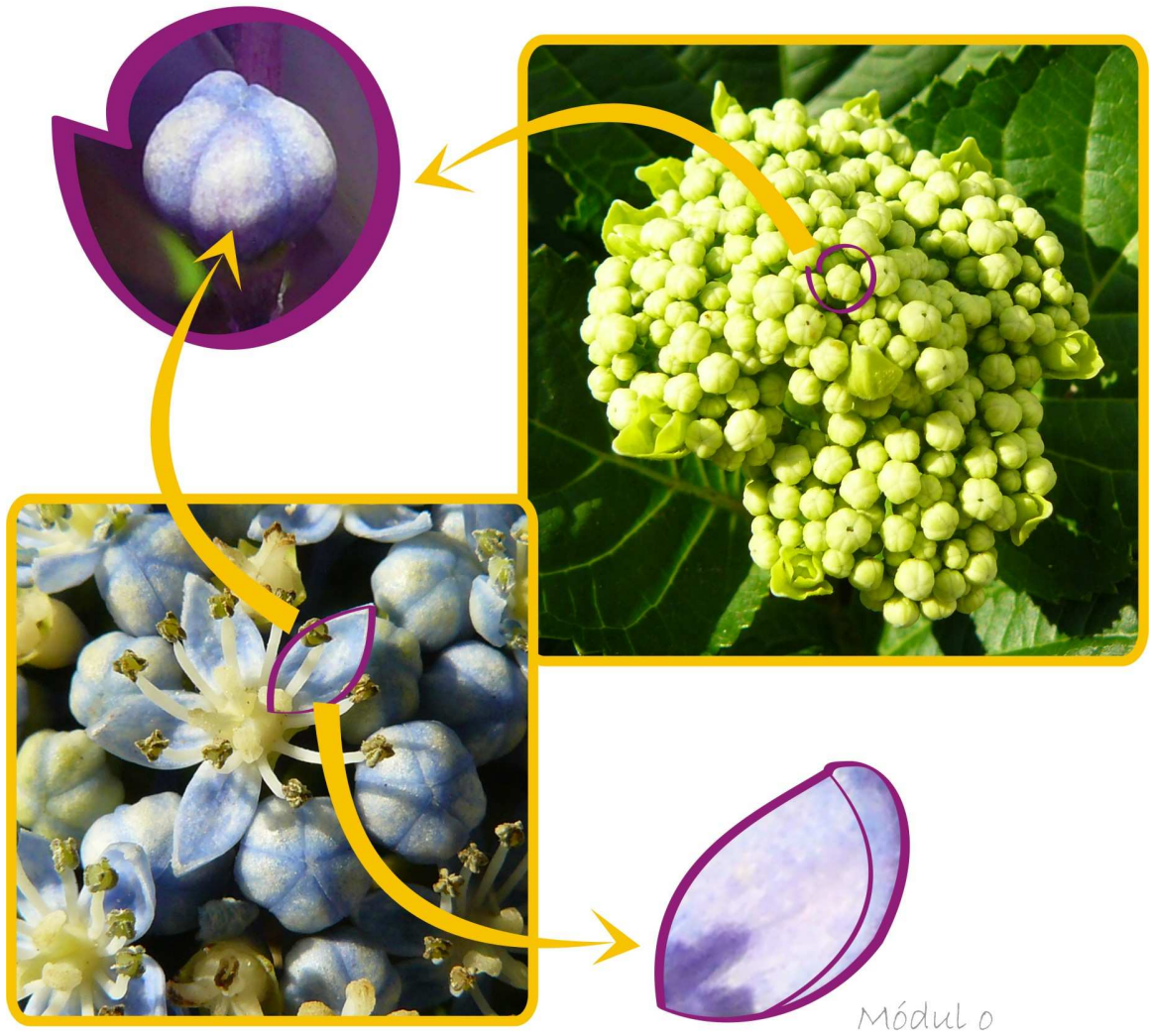
**13.4.3 Módulo.** Formas idénticas o similares que componen un elemento.

Figura 145. Módulos



Fuente: Autor

Figura 146. Módulos



*Este es un módulo tridimensional que forma una especie de cascaron que cubre el interior de la flor antes de madurar.*

Fuente: Autor

Figura 147. Módulos en la flor



Fuente: Autor

**13.4.4 Gradación.** La gradación es un cambio gradual y ordenado que causa una sensación de progresión, un caso de gradación se presenta en los módulos cuando estos varían en tamaño o en forma.

La gradación mas significativa en la Hortensia se puede observar en la figura 142. Donde el módulo de las brácteas casi conserva su forma como tal pero varía significativamente su tamaño dentro de la misma flor en una dirección de 90°.

También se observa gradación de tamaño y forma en los módulos que conforman las hojas de la planta.

Figura 148. Gradación de forma



*En las hojas de la Hortensia se observan módulos que varían en tamaño y forma.*

Fuente. Autor

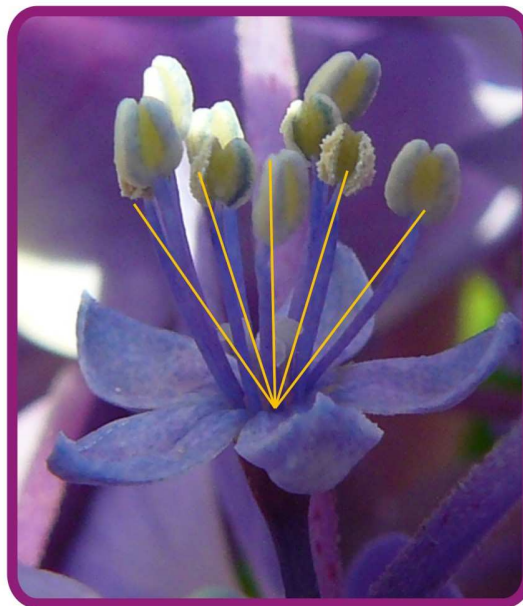
**13.4.5 Radiación.** La radiación se da cuando elementos similares y repetidos giran alrededor de un centro común, produciendo un efecto de radiación, es muy frecuente en las unidades naturales, y algunas veces con centros múltiples.

La radiación puede tener el efecto de vibración óptica que encontramos en la gradación. Por tanto, la radiación puede ser denominada un caso especial de gradación.

En la hortensia, el fenómeno de radiación que se presenta es estructura de radiación centrífuga de dos tipos:

- **Estructura centrífuga básica**, presente en la estructura de las brácteas y la disposición de los pistilos.

Figura 149. Radiación en las brácteas y pistilos



Fuente: Autor

- **Estructura de centros múltiples dividiendo y deslizando el centro de radiación**, presente en la distribución de las ramificaciones.

Figura 150 Radiación de las ramificaciones



Fuente: Autor

**13.4.6 contraste.** El contraste es una clase de comparación, por la cual las diferencias entre dos formas se hacen evidentes.

**13.4.6.1 Contraste de Forma:** en la hortensia encontramos el contraste de forma entre la flor en su etapa inicial que representa una esfera y las hojas que son planas y de bordes con terminaciones en punta; también se encuentra entre la flor y el tallo pasando de un elemento lineal a uno orgánico, y la flor y el pistilo de igual manera.

**13.4.6.2 Contraste de Tamaño:** el contraste de tamaño lo encontramos en sus ramificaciones, de tal forma que las ramificaciones inferiores son más largas y gruesas que las superiores.

**13.4.6.3 Contraste de color:** este tipo de contraste se da en la hortensia de dos formas: la primera es entre la flor y los pistilos, que a

su vez contrastan con sus terminaciones; y la segunda entre la flor y el botón central; en ambos casos el contraste es entre colores fríos, por lo cual hablamos de un bajo contraste.

Figura 153. Contraste de forma:  
Tallo y flor



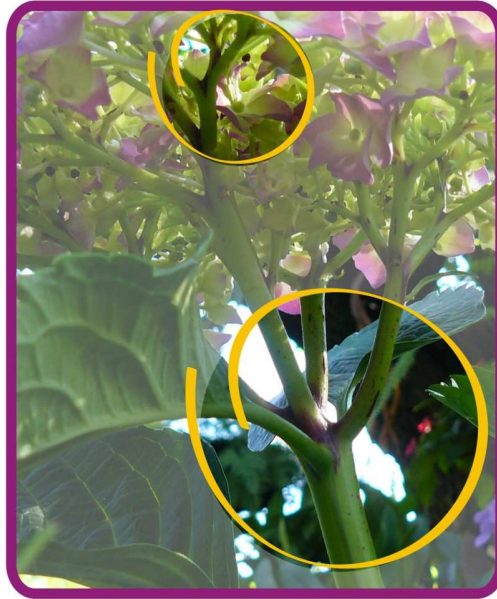
Fuente: Autor

Figura 154. Contraste de forma:  
segunda etapa de la floración



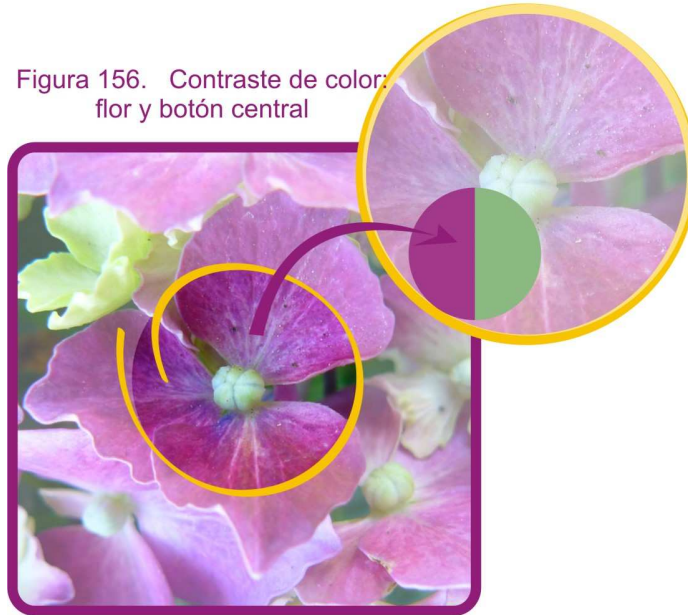
Fuente: Autor

Figura 155. Contraste de tamaño



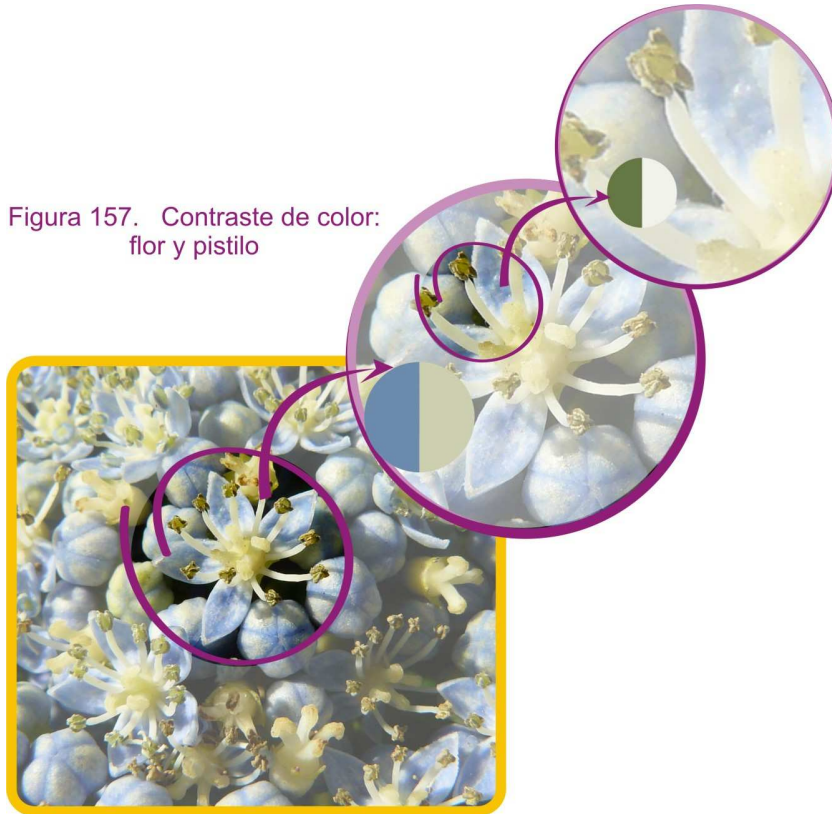
Fuente: Autor

Figura 156. Contraste de color: flor y botón central



Fuente: Autor

Figura 157. Contraste de color:  
flor y pistilo



Fuente: Autor

**13.4.6.4 Contraste de textura:** este aspecto lo podemos observar de la siguiente manera: por una parte encontramos contraste de textura entre el tallo de menor tamaño que es suave, y las brácteas que rodean la flor, que es rugosa; ocurre lo mismo entre el tallo y las hojas de la planta que además de ser rugosa presenta un alto relieve de sus venas en la parte posterior.

Figura 158. Contraste de textura:  
tallo y brácteas



Fuente: Autor

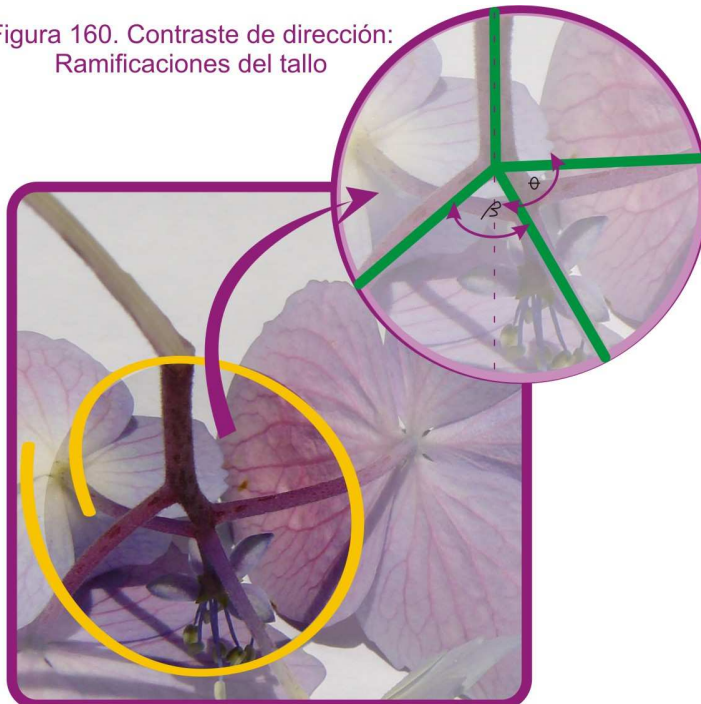
Figura 159. Contraste de textura:  
tallo y hoja



Fuente: Autor

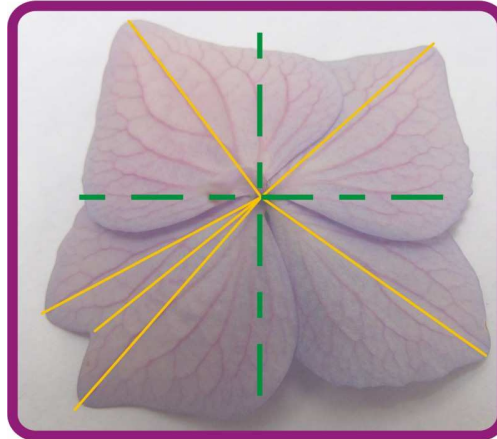
**13.4.6.5 Contraste de dirección:** esta característica es simplemente la presencia de la forma en diferentes direcciones, como se observa en las brácteas y las ramificaciones del tallo.

Figura 160. Contraste de dirección:  
Ramificaciones del tallo



Fuente: Autor

Figura 161. Contraste de dirección:  
Brácteas



Fuente: Autor

**13.4.7 Concentración.** La concentración es una manera de distribución de módulos, que pueden estar apretadamente reunidos en ciertas zonas del diseño o levemente repartidos en otras.

En la hortensia encontramos este concepto a lo largo de todo el proceso de floración puesto que este se desarrolla en racimos.

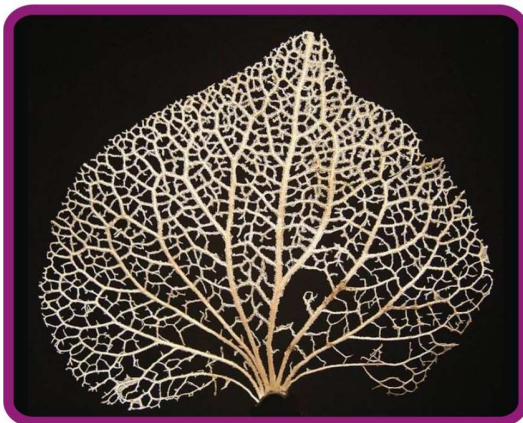
Figura 162. Concentración



Fuente: Autor

**13.4.8 Estructura.** La estructura que presenta la hortensia es una estructura de múltiple repetición tanto en las ramificaciones del tallo como en la estructura de la bráctea, interviniendo aquí el concepto de proporción y escala por lo cual es correcto afirmar que la hortensia posee un estructura fractal.

Figura 163. Estructura de la bráctea



*La estructura de la bráctea se asemeja a la estructura del pulmón. Es una estructura fractal que presenta numerosas ramificaciones en toda el área de esta.*

Fuente: Autor

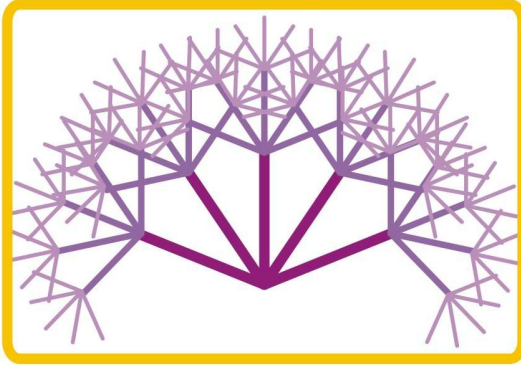
Figura 164. Estructura de la planta



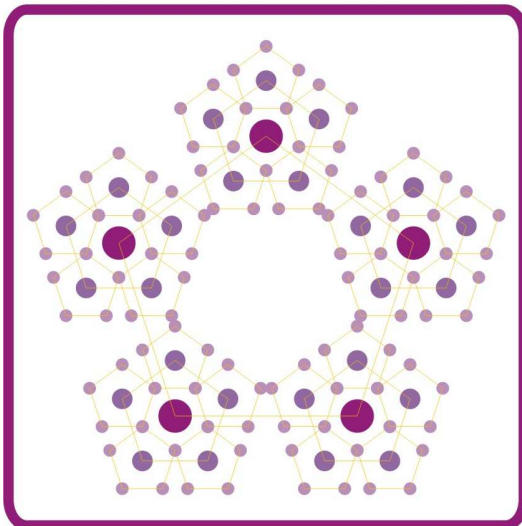
*La estructura que presenta la hortensia es una estructura fractal, ya que el fenómeno de auto similitud e invarianza de escala lo podemos apreciar desde su parte más baja que inicia en el tallo, hasta su parte más alta que culmina con la floración.*

Fuente: Autor

Figura 165. Aproximaciones a la estructura fractal de la planta



*Esta es una aproximación a la estructura de la hortensia que inicia en 5 ramificaciones que a su vez se dividen en 5 en cada iteración. Sin embargo, en algunas zonas de la planta, este fenómeno se rompe presentándose como una anomalía, por lo cual no se pierde el concepto de fractal.*



*En la vista superior se observa que la aproximación de la estructura es un pentágono regular que va disminuyendo gradualmente de tamaño.*

Fuente: Autor

## 13.5 ASPECTOS CONFORMATIVOS

### 13.5.1 Interrelación de formas

Figura 166. Superposición



Fuente: Autor

Figura 168. Unión

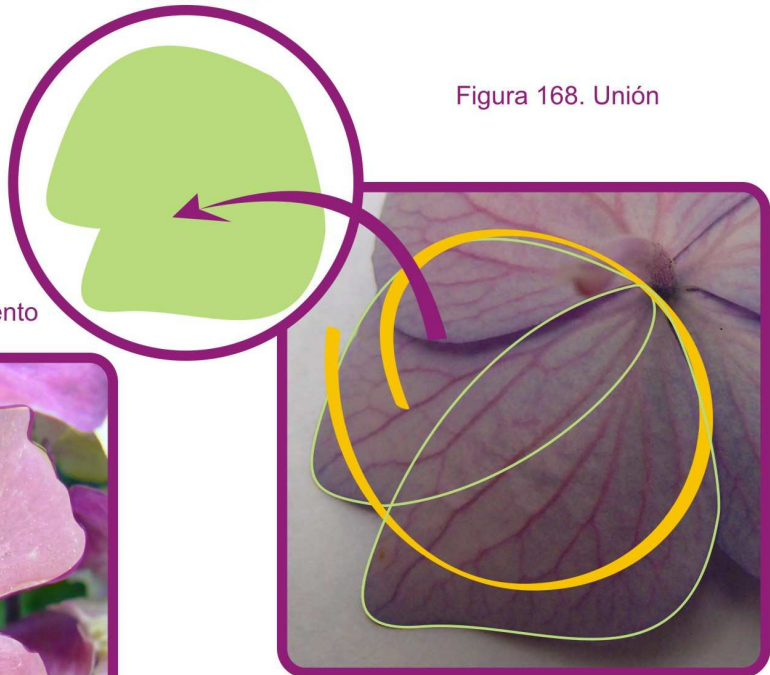


Figura 167. Distanciamiento



Fuente: Autor

Fuente: Autor

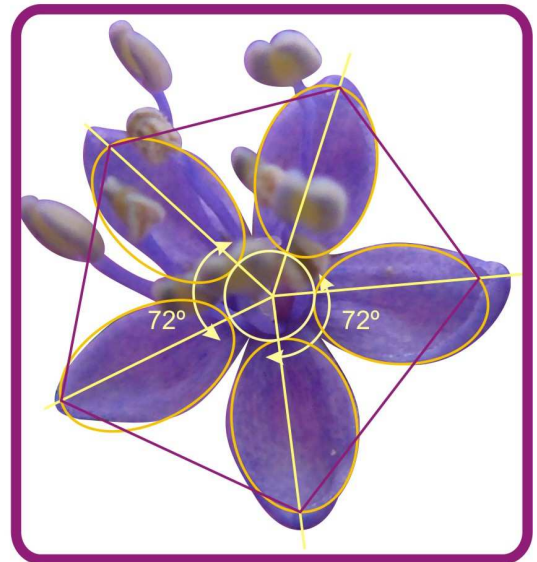
### 13.5.2 Geometrizariones

Figura 169. Botón de floración



Fuente: Autor

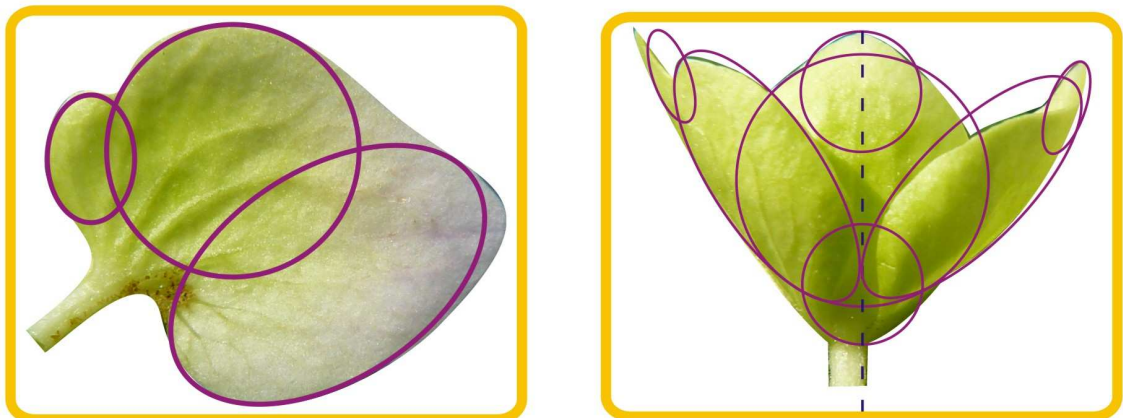
Figura 170. Flor



Fuente: Autor

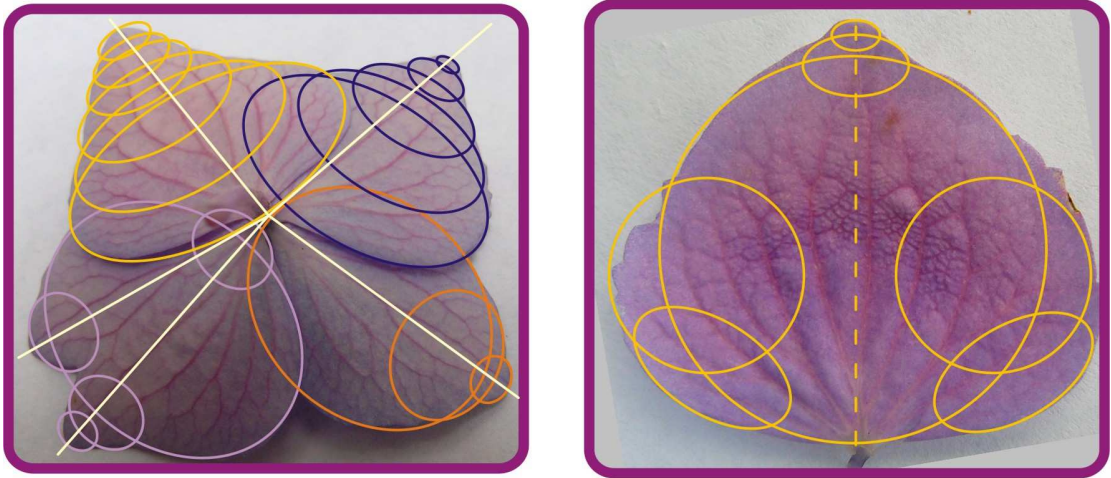
*El botón de floración y la flor, presentan una estructura de radiación y repetición con dirección de 72°.*

Figura 171. Bráctea en etapa de desarrollo



Fuente: Autor

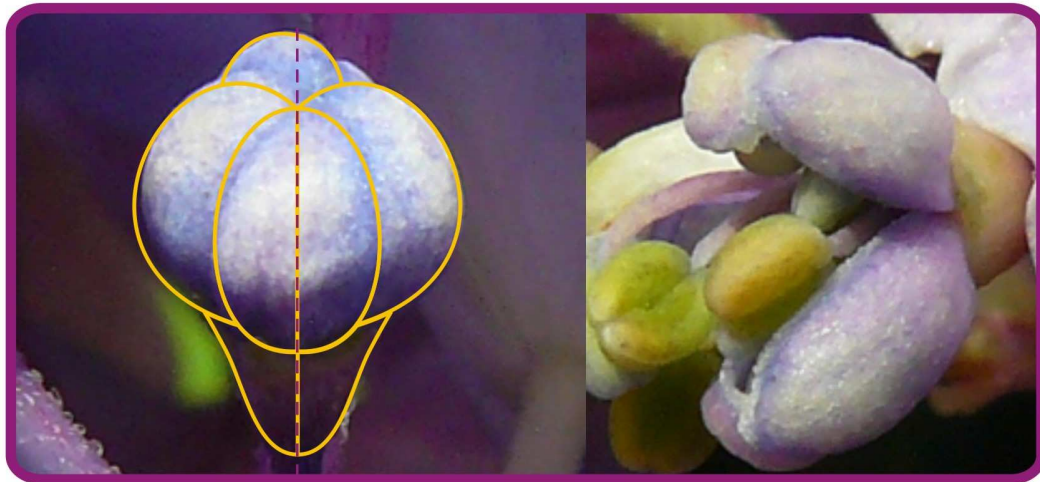
Figura 172. Geometrización Brácteas



*En las brácteas se presenta gradación de tamaño y forma; y una estructura de radiación concéntrica con traslado de centros.*

Fuente: Autor

Figura 173. Botón d ela flor vista frontal



Fuente: Autor

Figura 174. Pistilos



Fuente: Autor

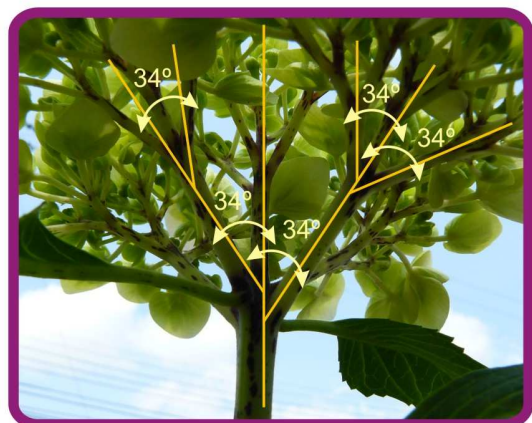
Figura 175. Hoja



*La hoja presenta una gradación de tamaño y estructura de radiación concéntrica con traslado de centros.*

Fuente: Autor

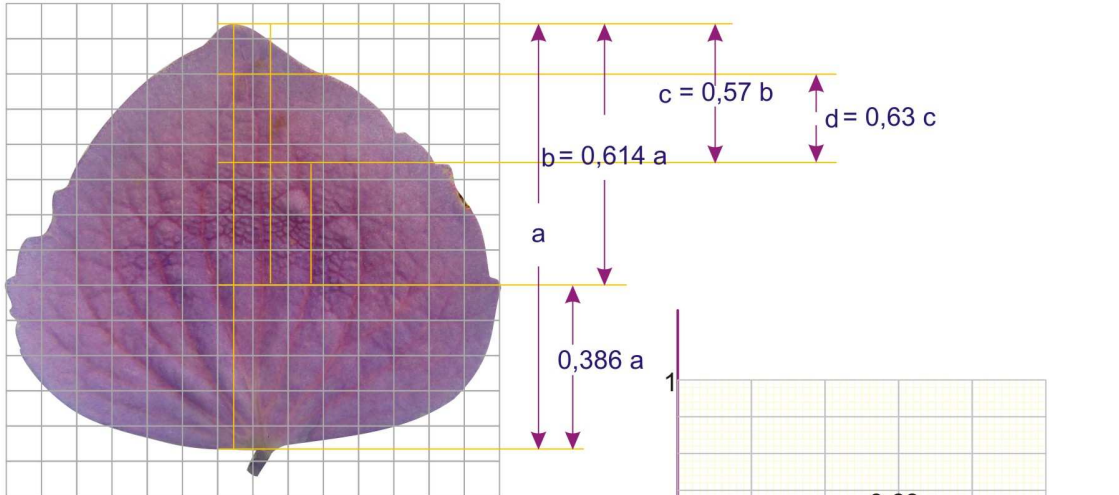
Figura 176. Ramificaciones



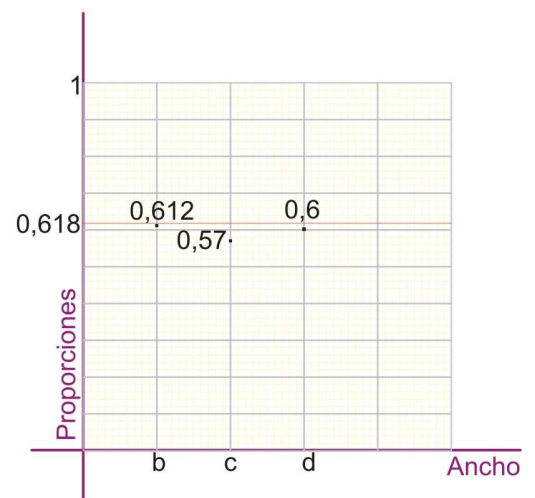
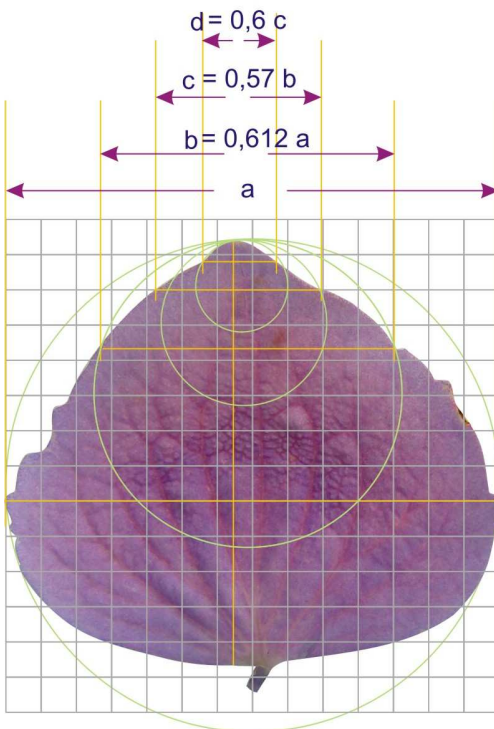
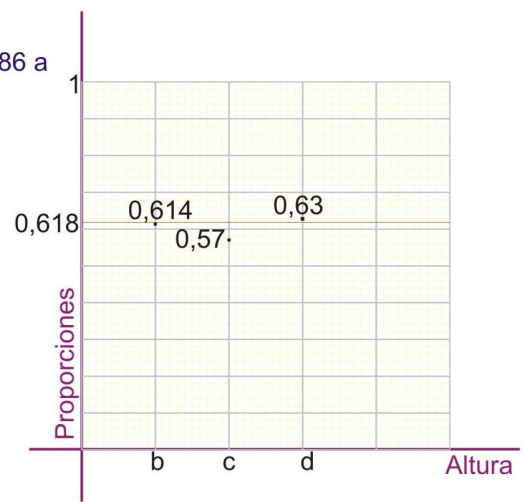
Fuente: Autor

### 13.5.3 Proporciones

Figura 177. Proporciones bráctea desarrollada

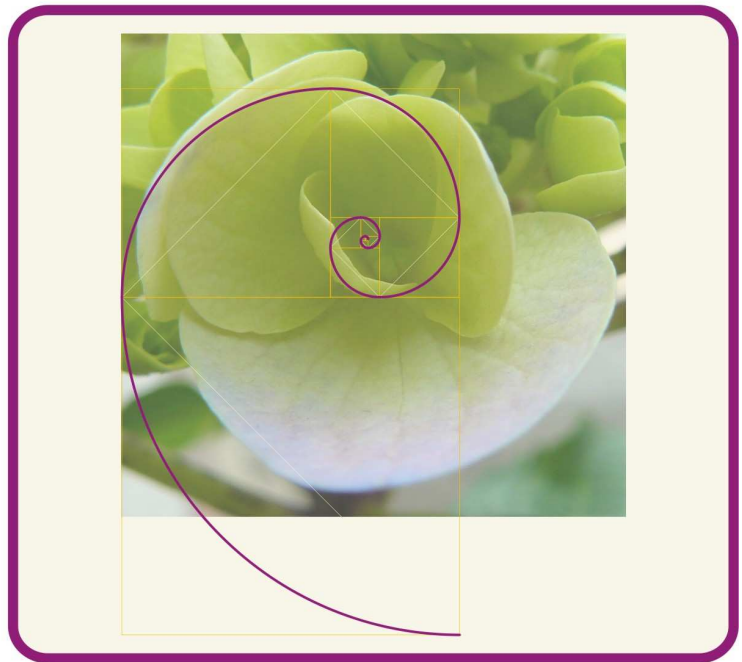


En el análisis de la proporción se observa que la relación de las dimensiones tanto longitudinal como transversalmente en la bráctea, se acerca a la proporción áurea.



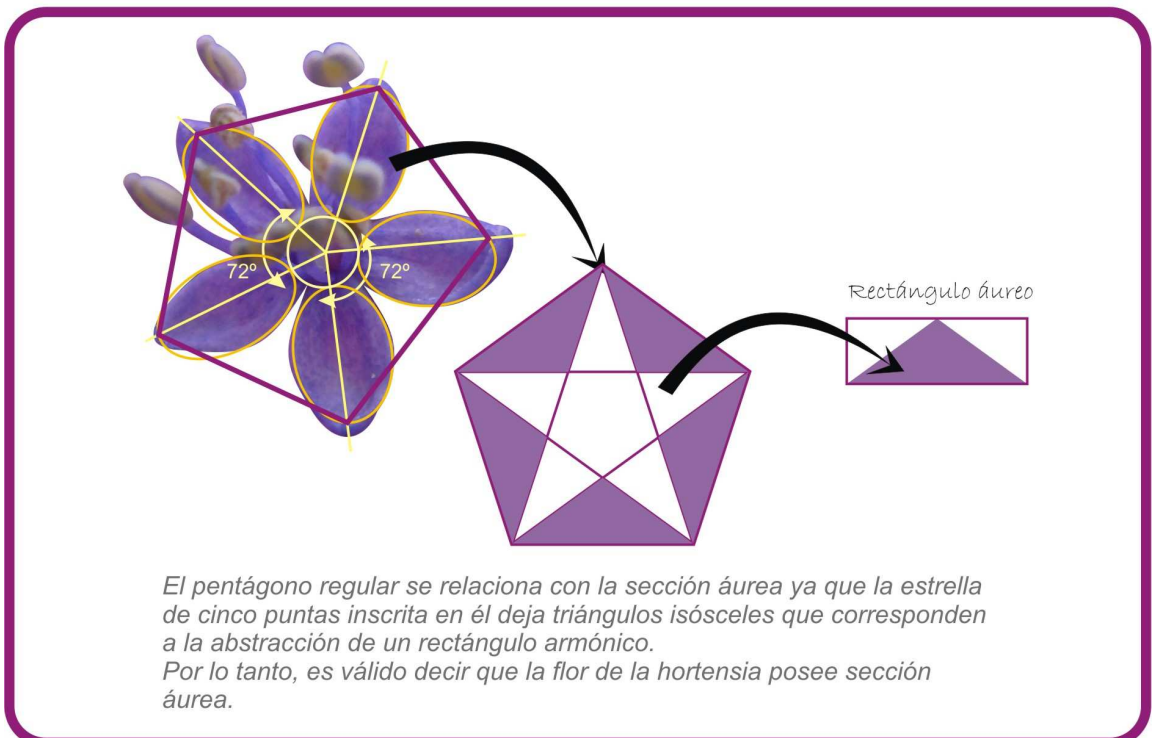
Fuente: Autor

Figura 178. Fibonacci en las Brácteas



Fuente: Autor

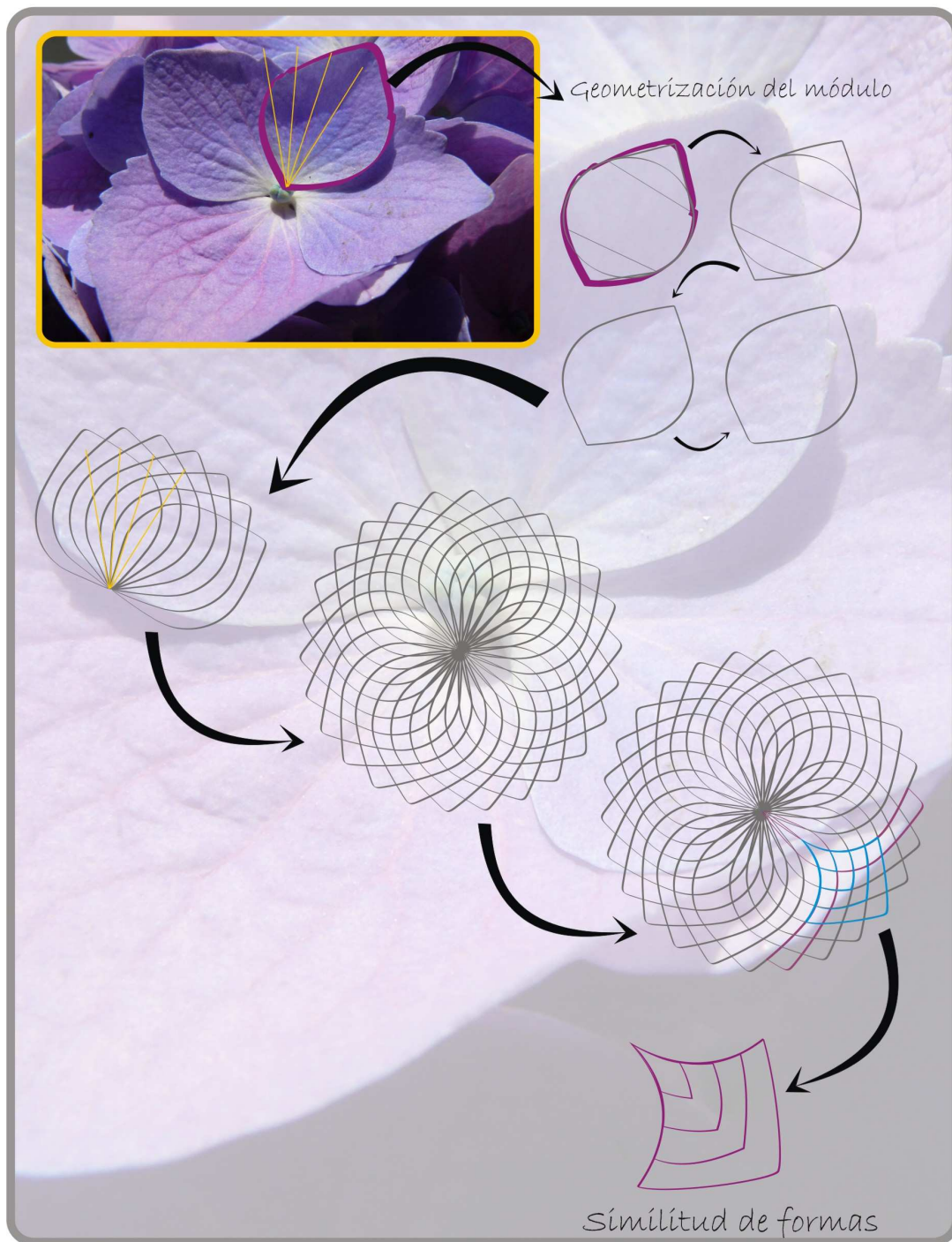
Figura 179. Proporciones flor



Fuente: Autor

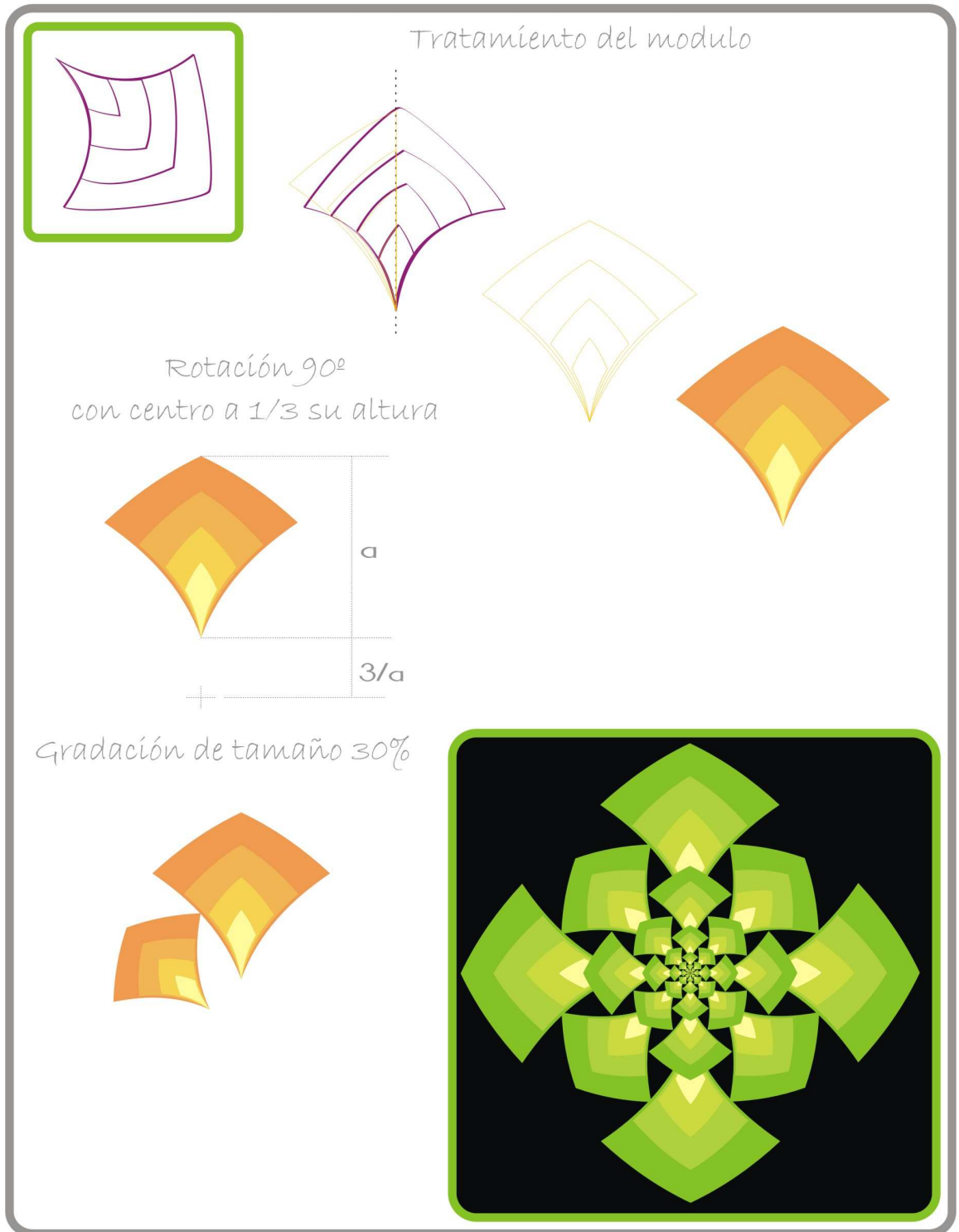
### 13.5.4 Abstracciones

Figura 180. Abstracción del módulo



Fuente: Autor

Figura 181. Composiciones Bidimensionales



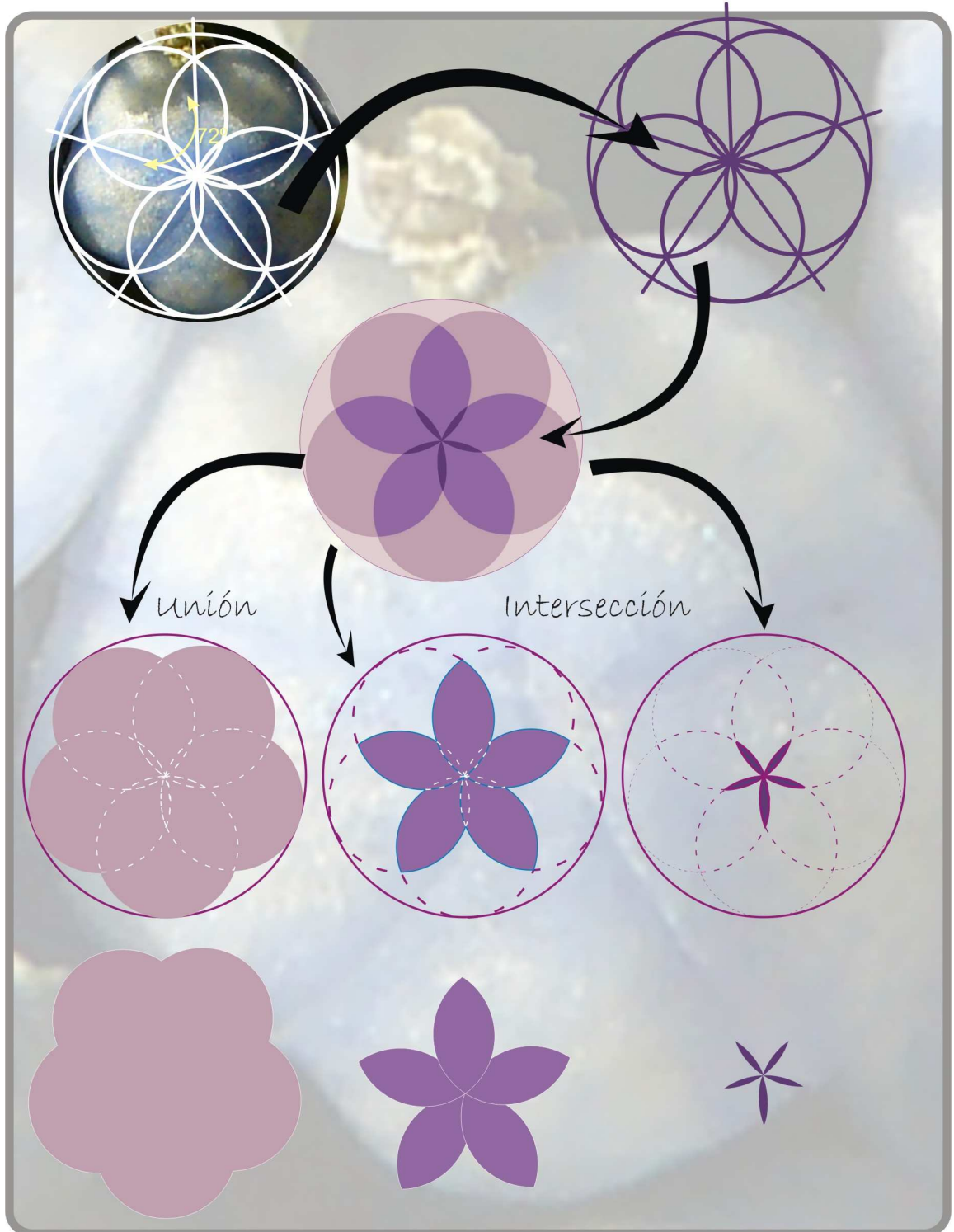
Fuente: Autor

Figura 182. Abstracción y composición



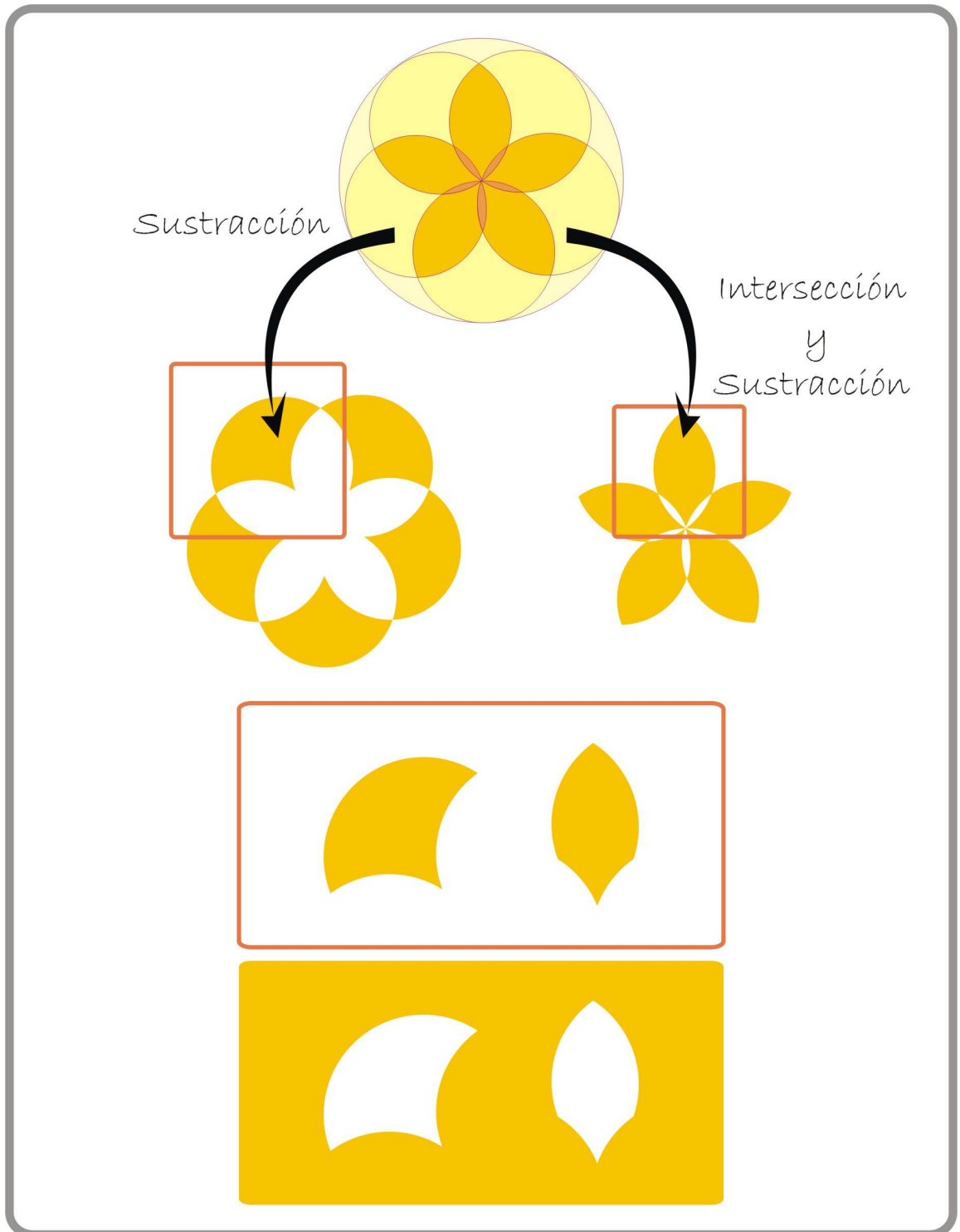
Fuente: Autor

Figura 183. Abstracción del módulo



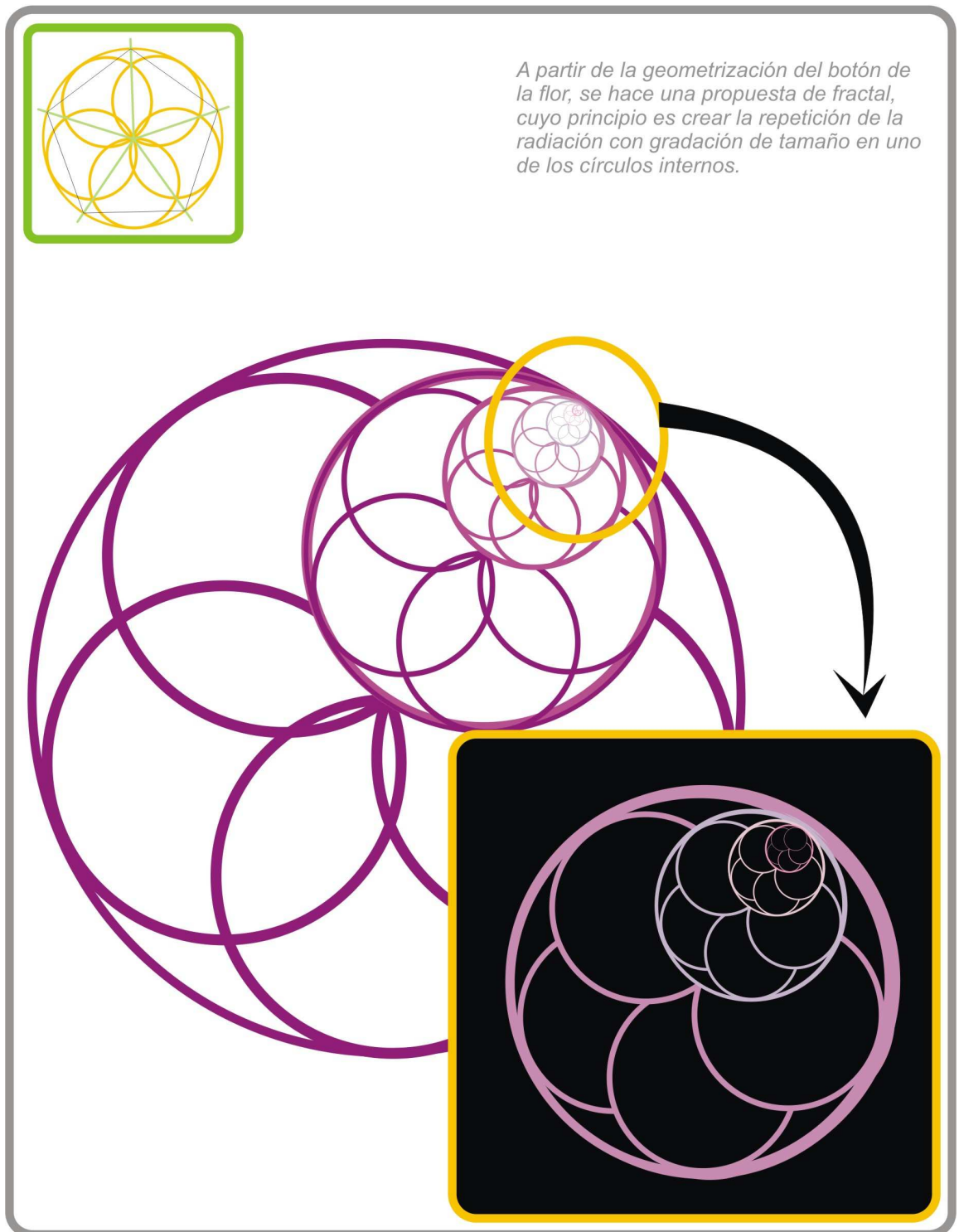
Fuente: Autor

Figura 184. Abstracción del módulo



Fuente: Autor

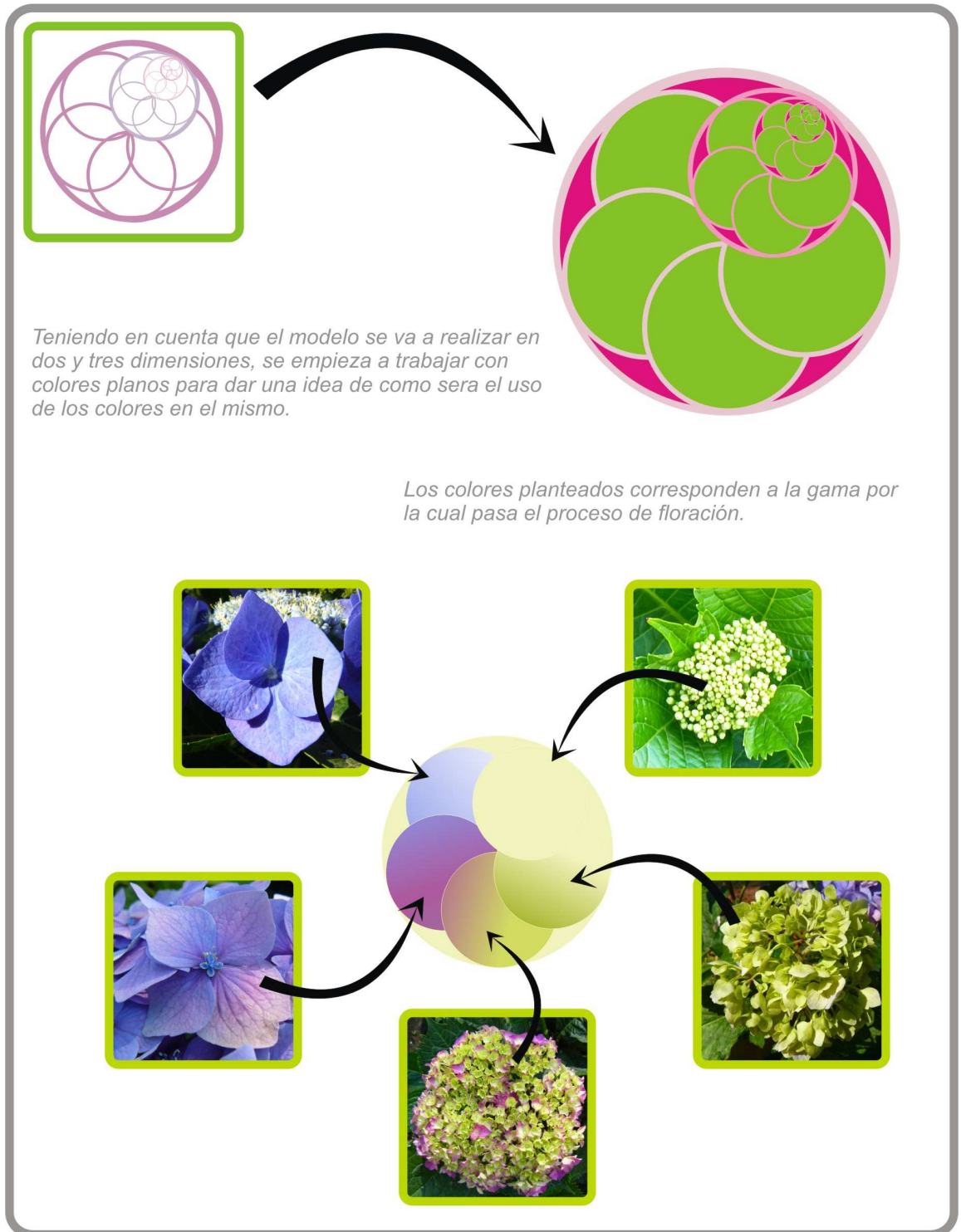
Figura 185. Composiciones Bidimensionales



*A partir de la geometrización del botón de la flor, se hace una propuesta de fractal, cuyo principio es crear la repetición de la radiación con gradación de tamaño en uno de los círculos internos.*

Fuente: Autor

Figura 186. Evolución de la Composición

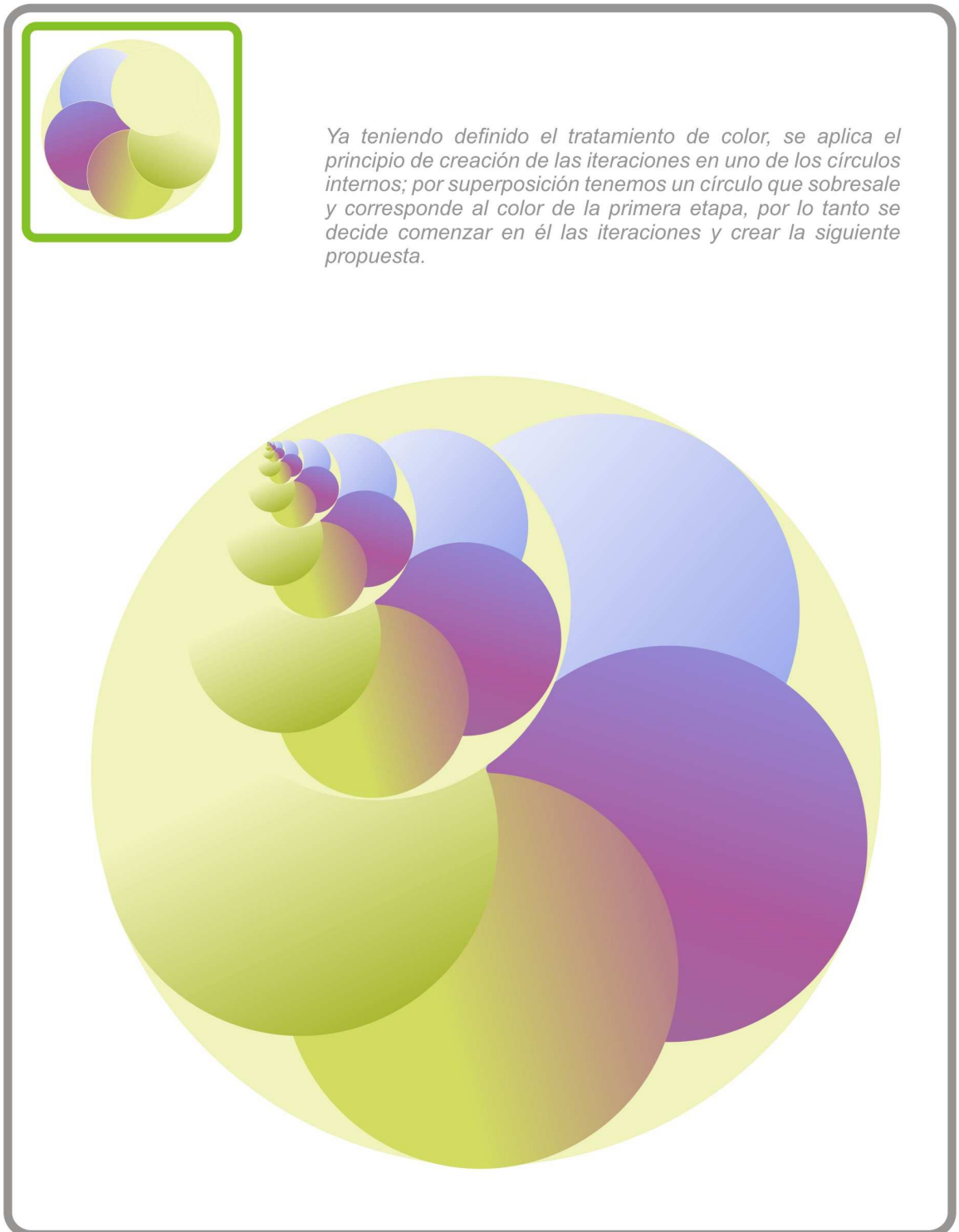


*Teniendo en cuenta que el modelo se va a realizar en dos y tres dimensiones, se empieza a trabajar con colores planos para dar una idea de como sera el uso de los colores en el mismo.*

*Los colores planteados corresponden a la gama por la cual pasa el proceso de floración.*

Fuente: Autor

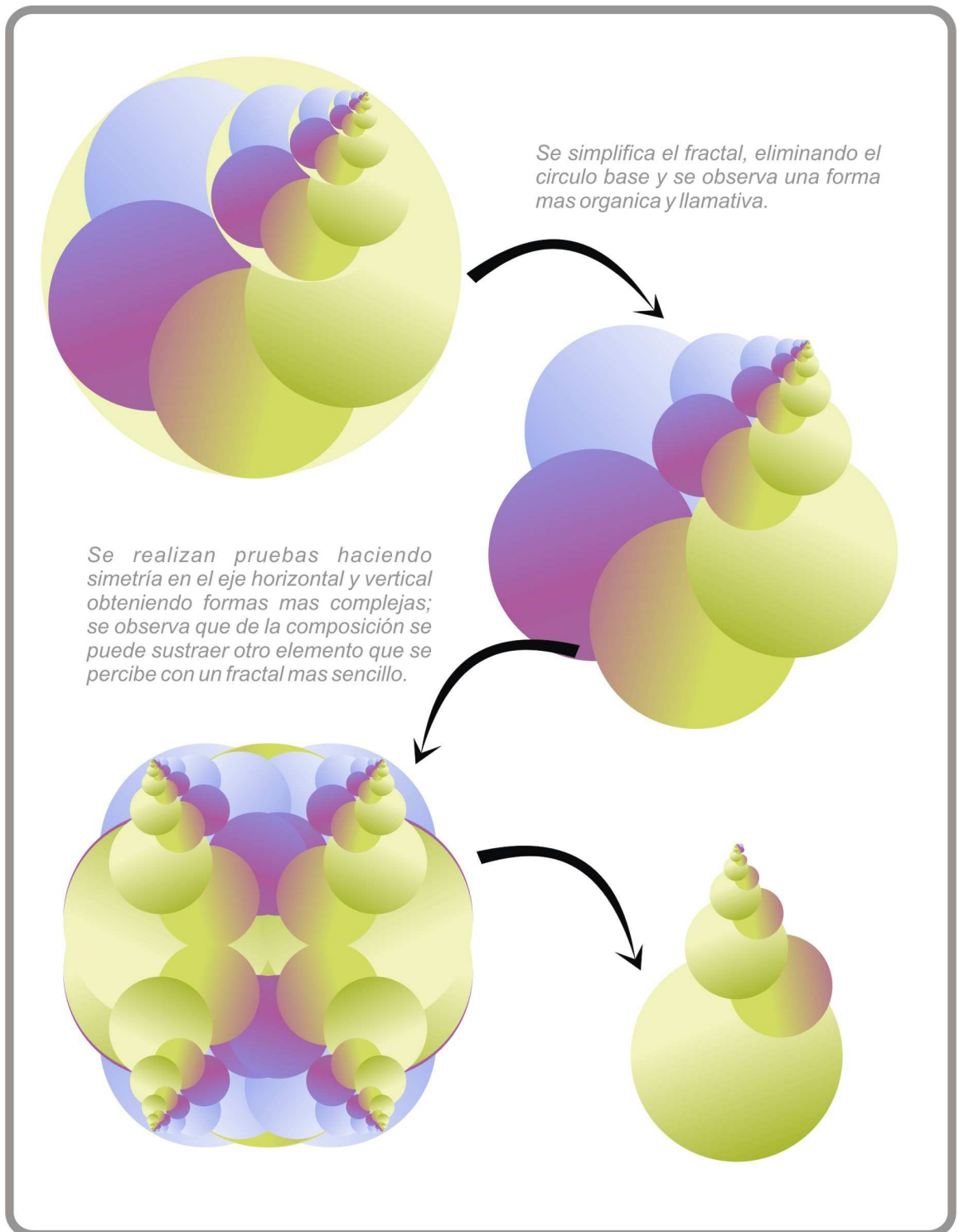
Figura 187. Evolución de la Composición



*Ya teniendo definido el tratamiento de color, se aplica el principio de creación de las iteraciones en uno de los círculos internos; por superposición tenemos un círculo que sobresale y corresponde al color de la primera etapa, por lo tanto se decide comenzar en él las iteraciones y crear la siguiente propuesta.*

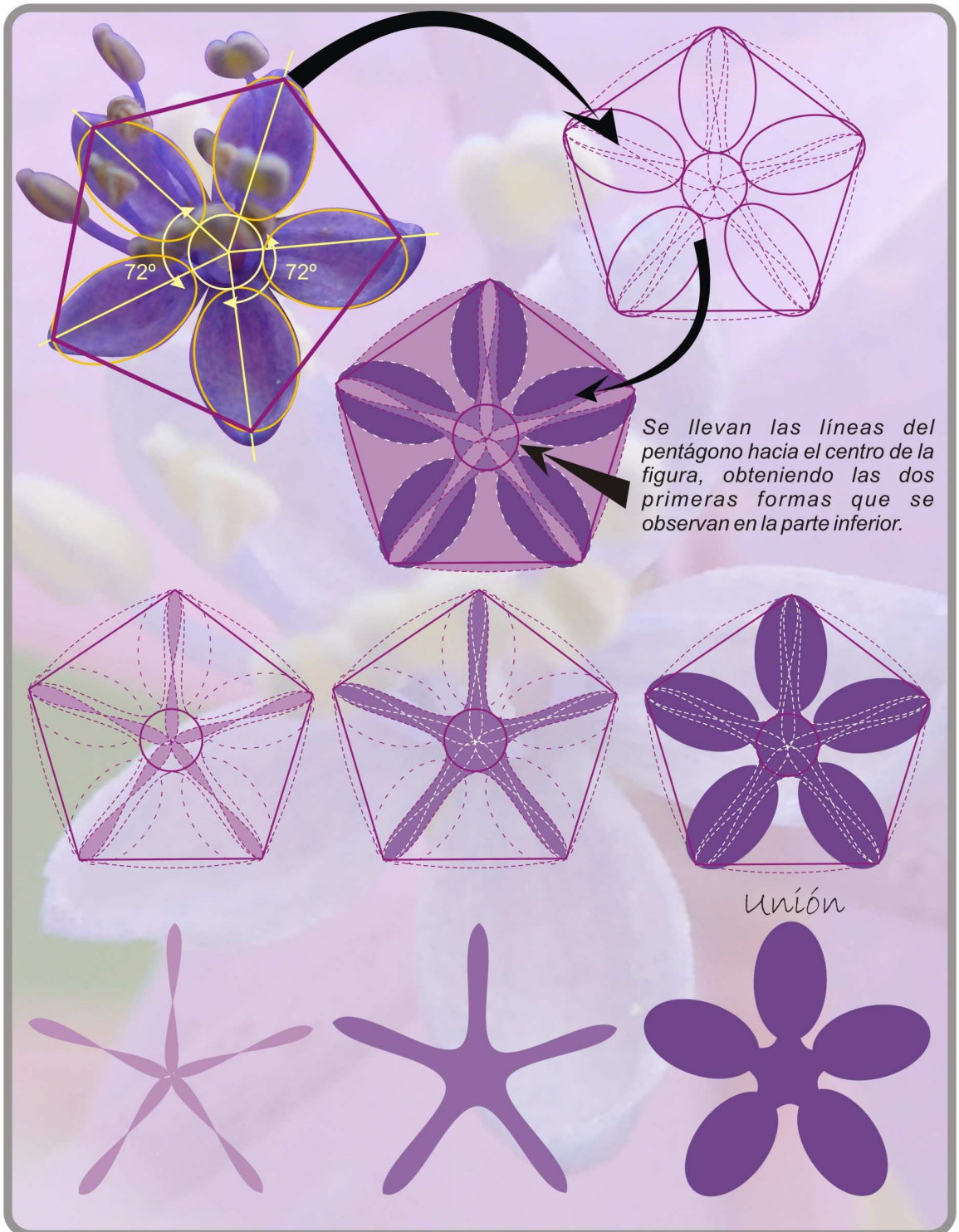
Fuente: Autor

Figura 188. Evolución de la Composición



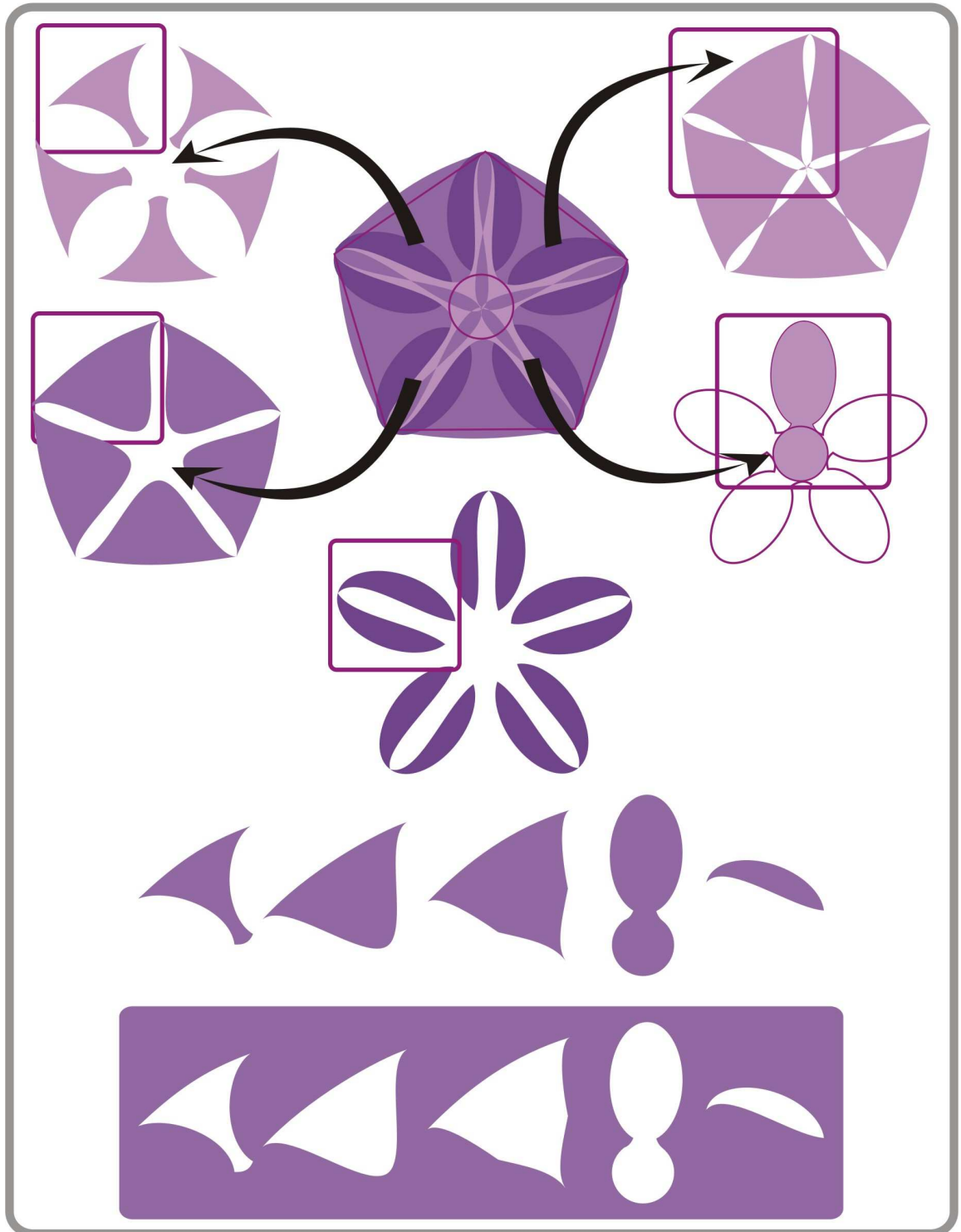
Fuente: Autor

Figura 189. Abstracción del modulo



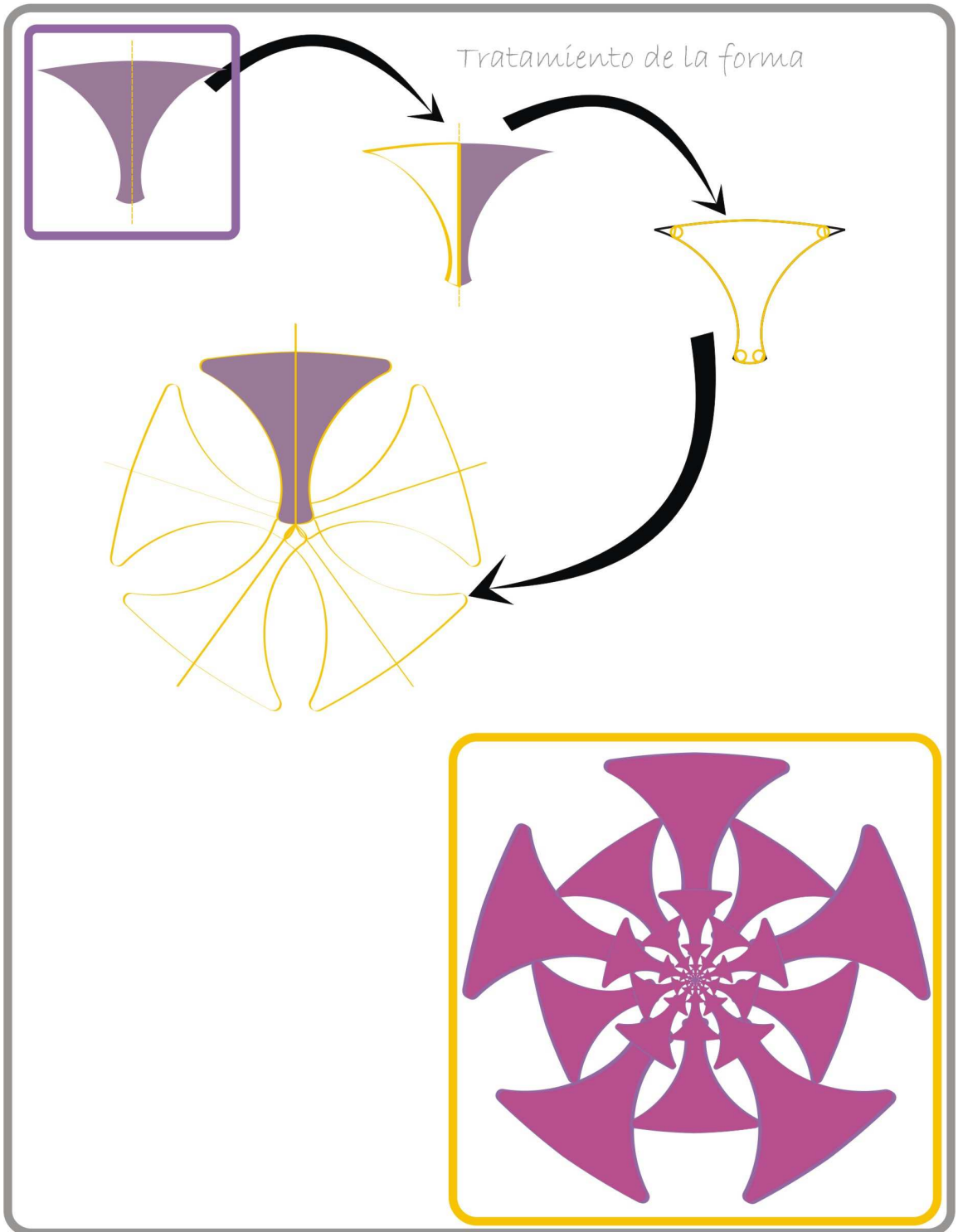
Fuente: Autor

Figura 190. Abstracción del módulo



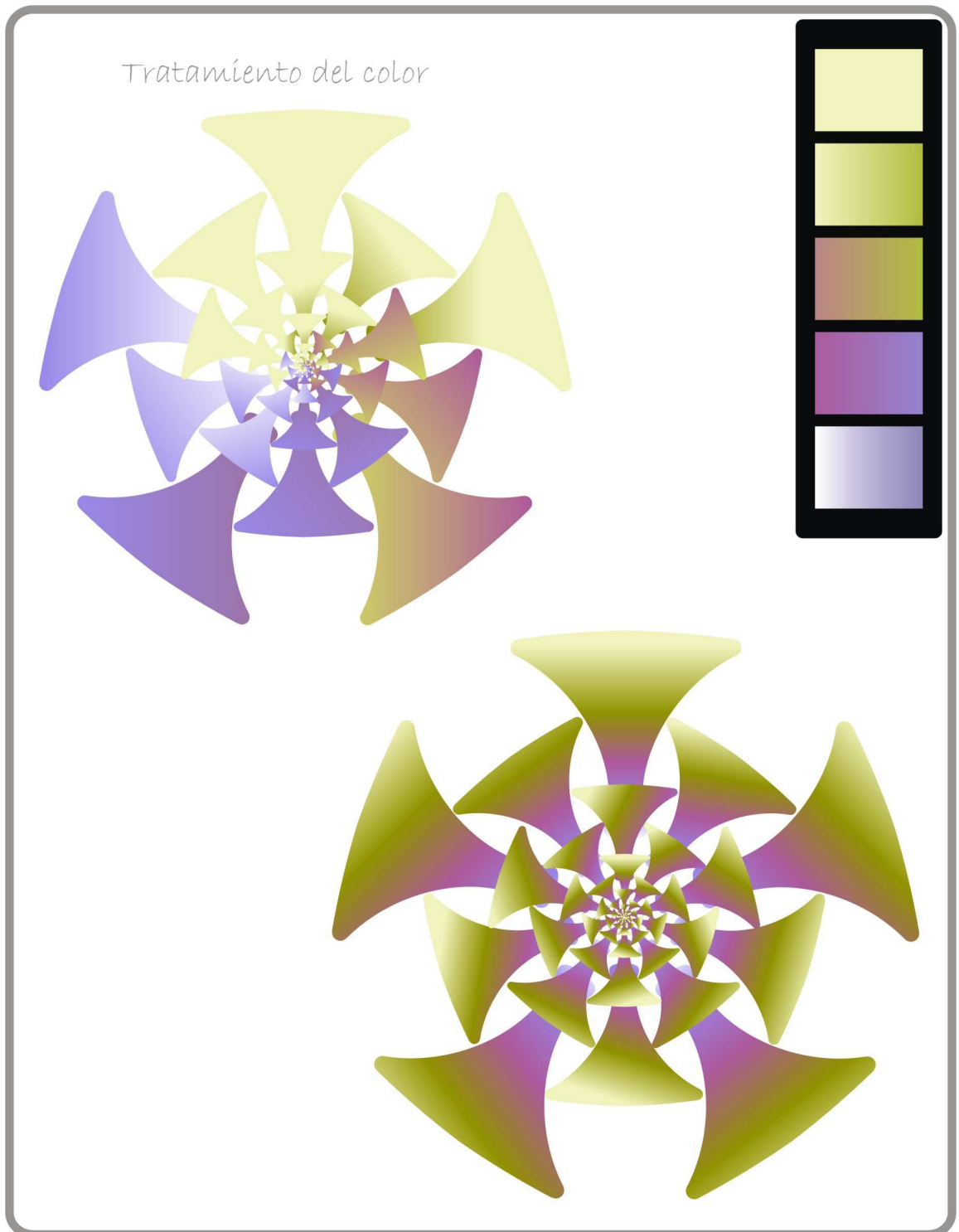
Fuente: Autor

Figura 191. Composiciones Bidimensionales



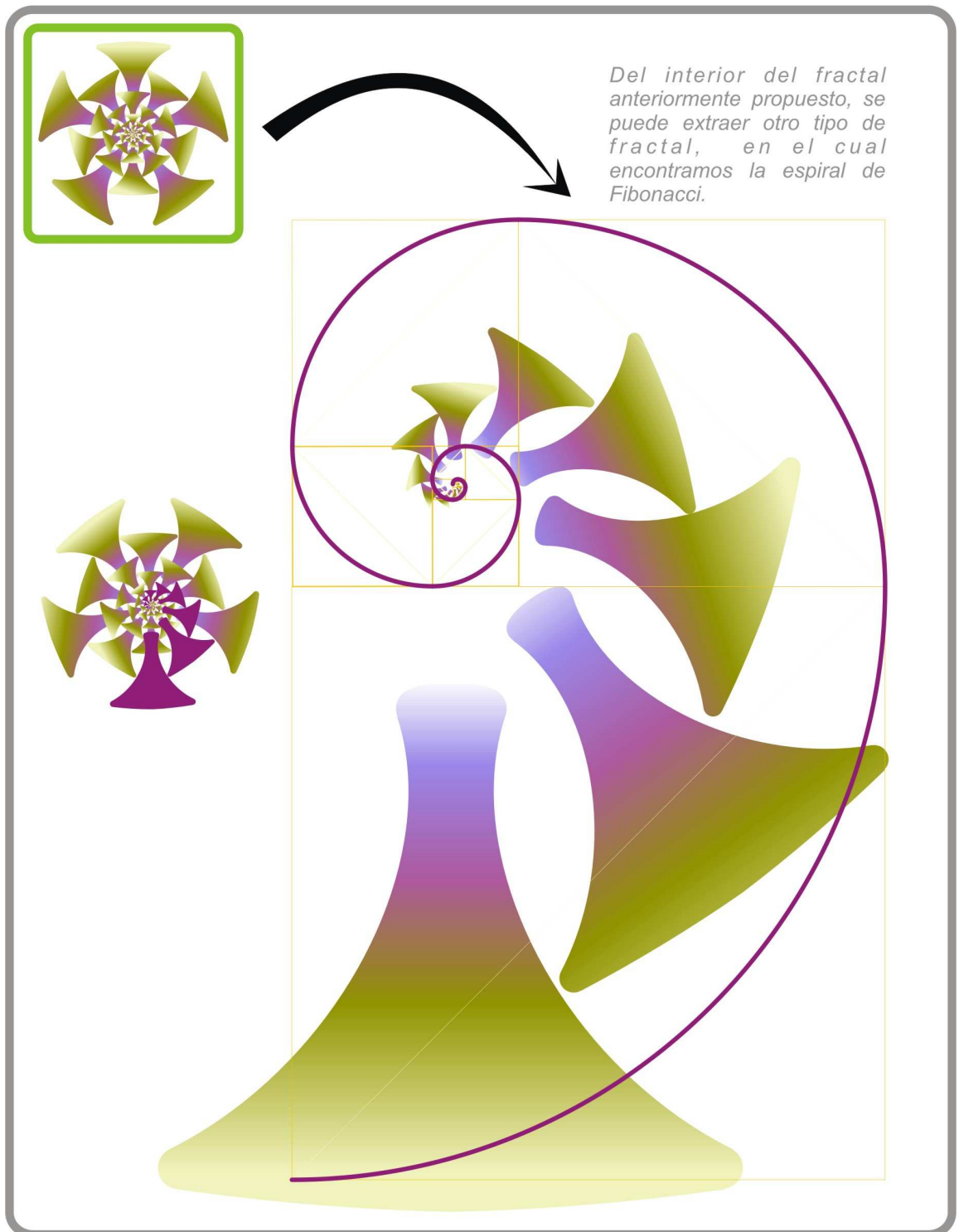
Fuente: Autor

Figura 192. Pruebas de colores



Fuente: Autor

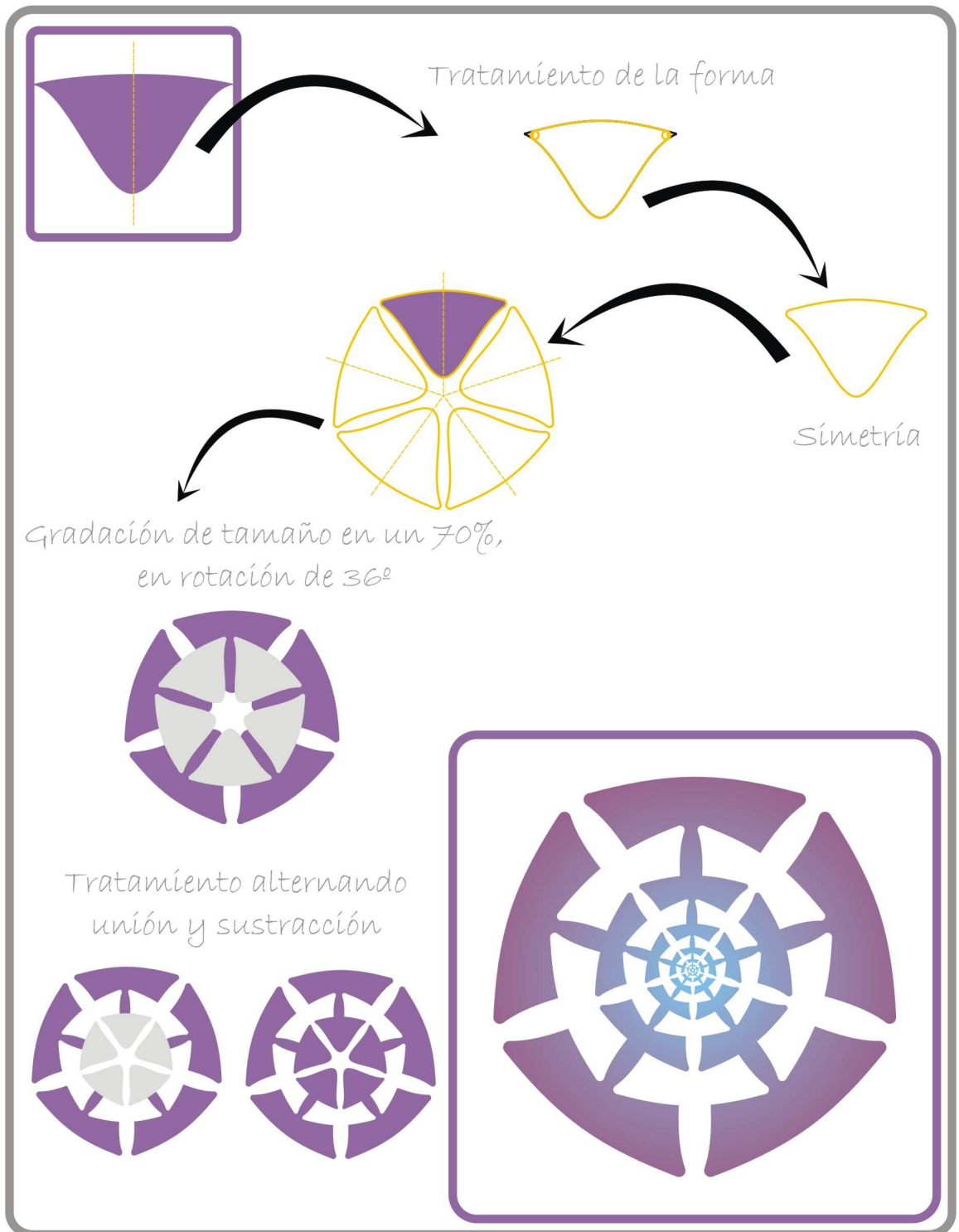
Figura 193. Composiciones Bidimensionales



*Del interior del fractal anteriormente propuesto, se puede extraer otro tipo de fractal, en el cual encontramos la espiral de Fibonacci.*

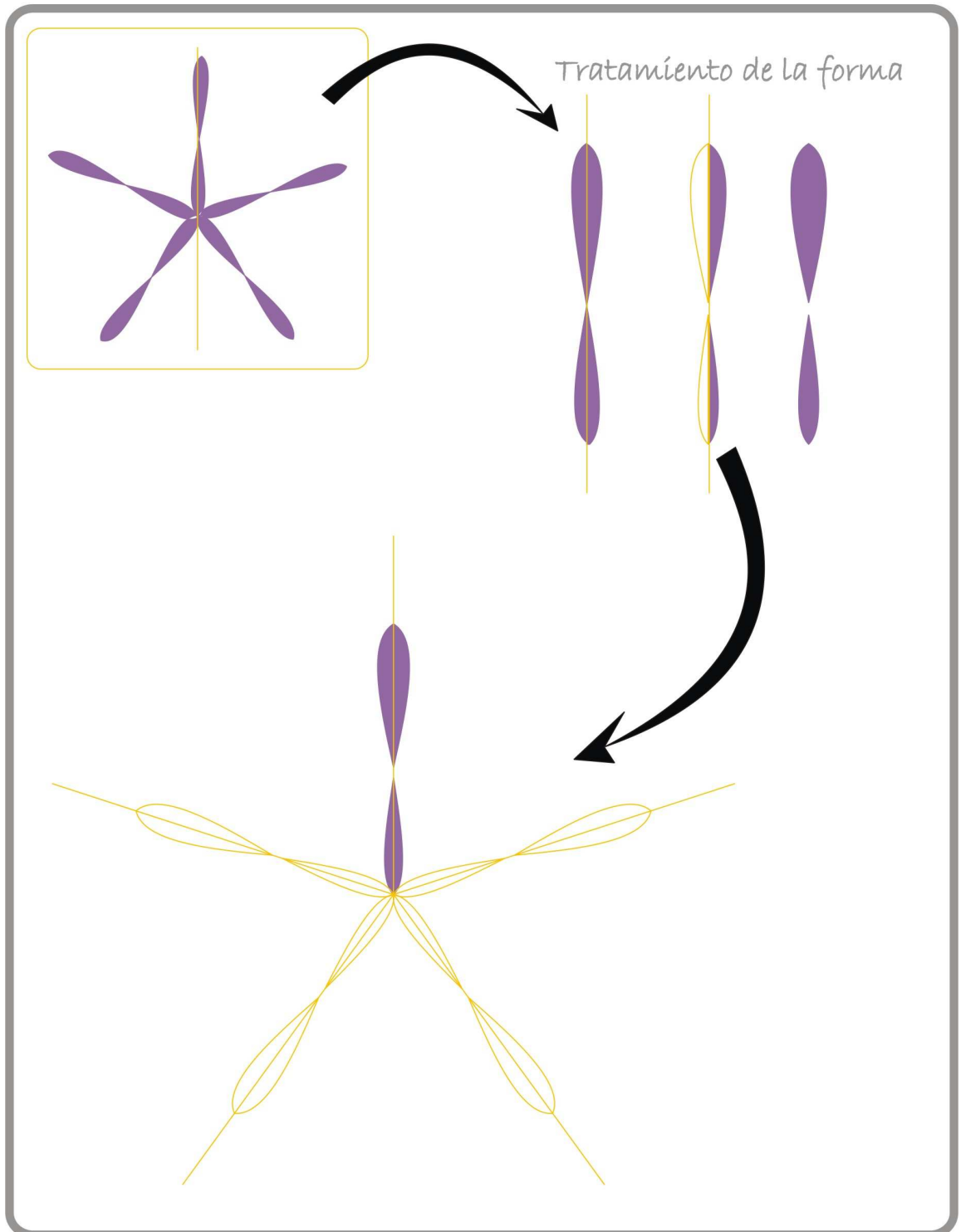
Fuente: Autor

Figura 194. Composiciones bidimensionales



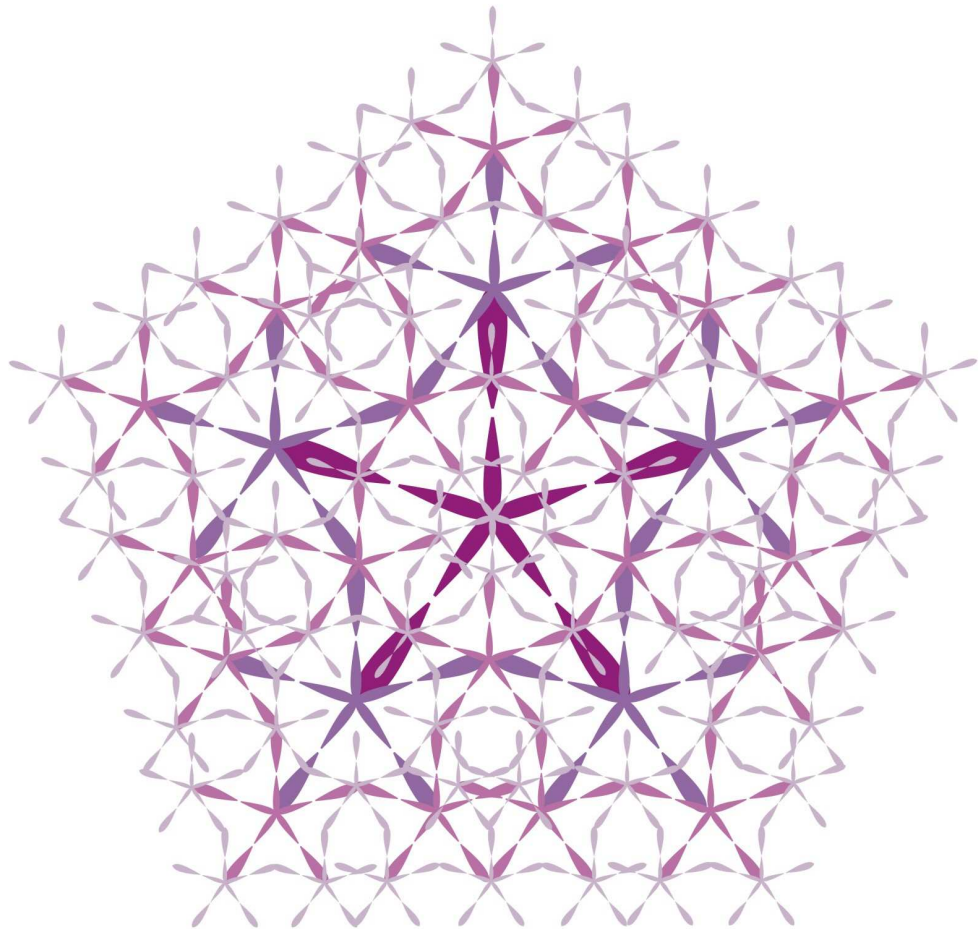
Fuente: Autor

Figura 195. Tratamiento del módulo



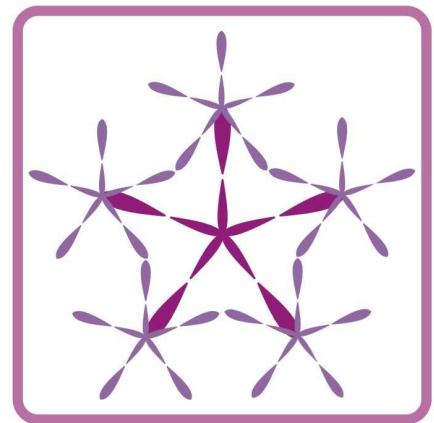
Fuente: Autor

Figura 196. Composiciones bidimensionales



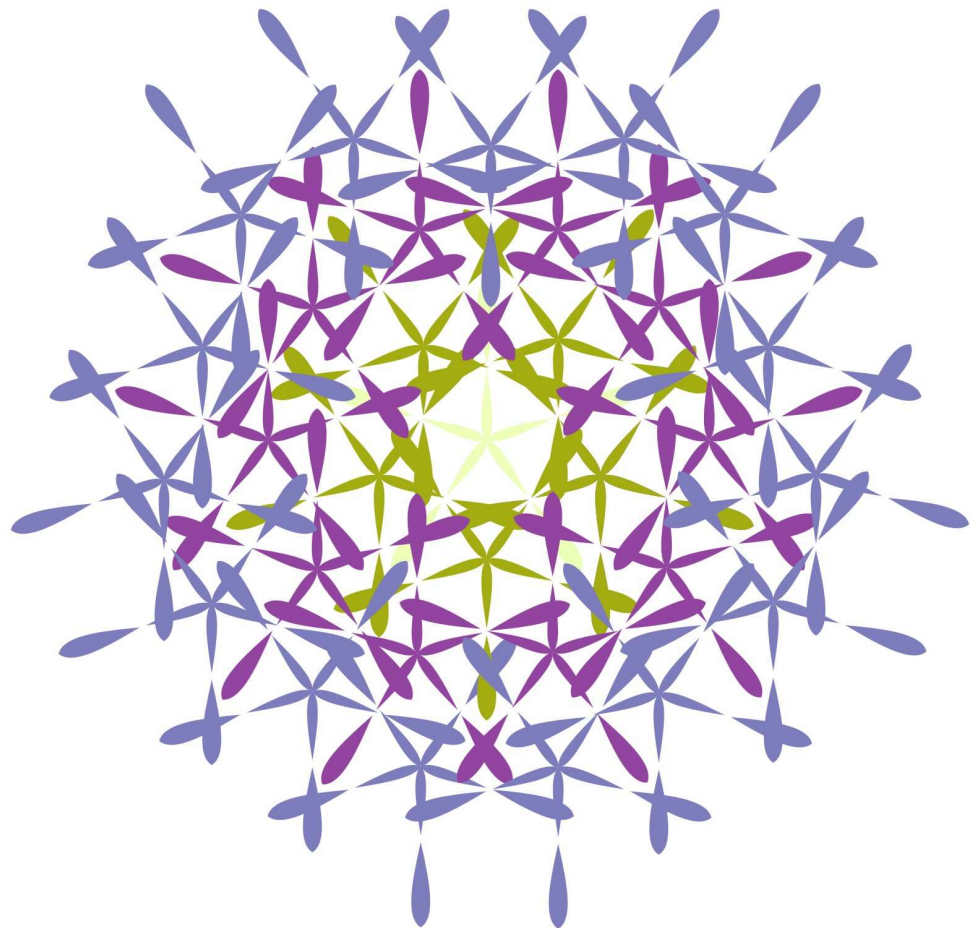
1ra. Iteración

*El principio de la iteración es la ubicación de un módulo sobre cada una de las cinco puntas del mismo, reducido en tamaño a proporción áurea; la segunda iteración continúa con el mismo principio en cada uno de los módulos creados y de esta manera infinitamente hasta obtener la composición arriba mostrada.*

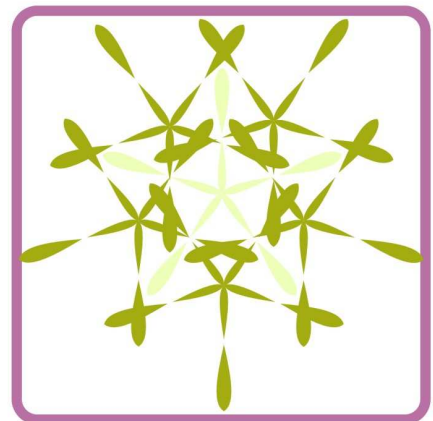


Fuente: Autor

Figura 197. Composiciones bidimensionales



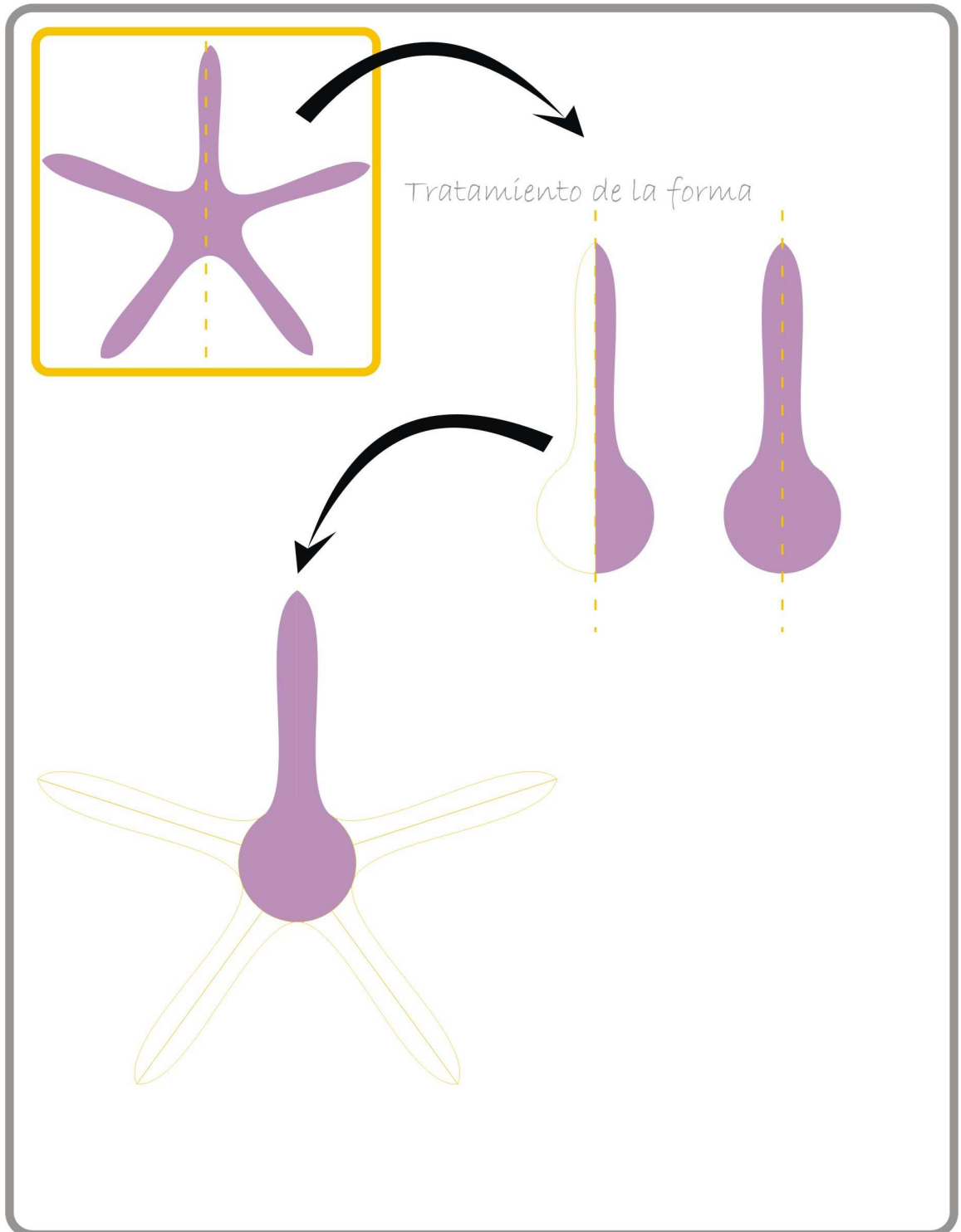
1ra. Iteración



*El principio de la iteración es la ubicación de un módulo del mismo tamaño haciendo contacto con el inicial en sus puntos medios. la segunda iteración continua con el mismo principio en cada uno de los módulos creados y de esta manera infinitamente hasta obtener la composición arriba mostrada.*

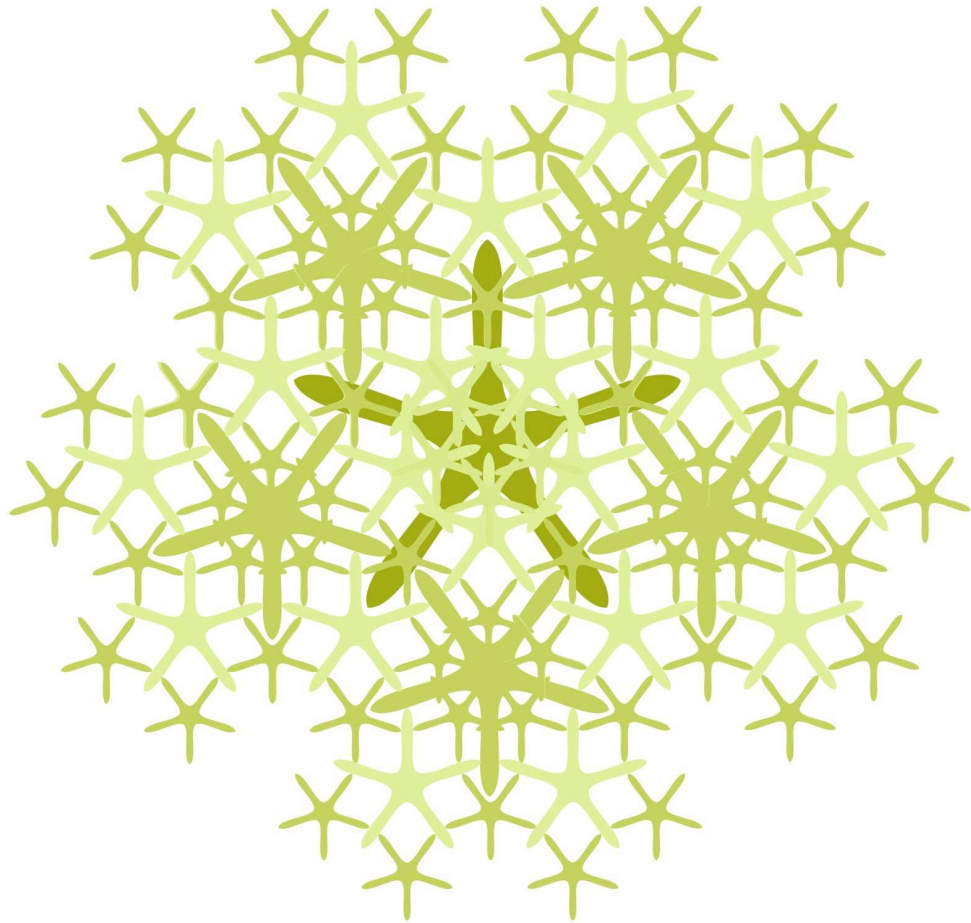
Fuente: Autor

Figura198. Tratamiento del módulo



Fuente: Autor

Figura 199. Composiciones bidimensionales



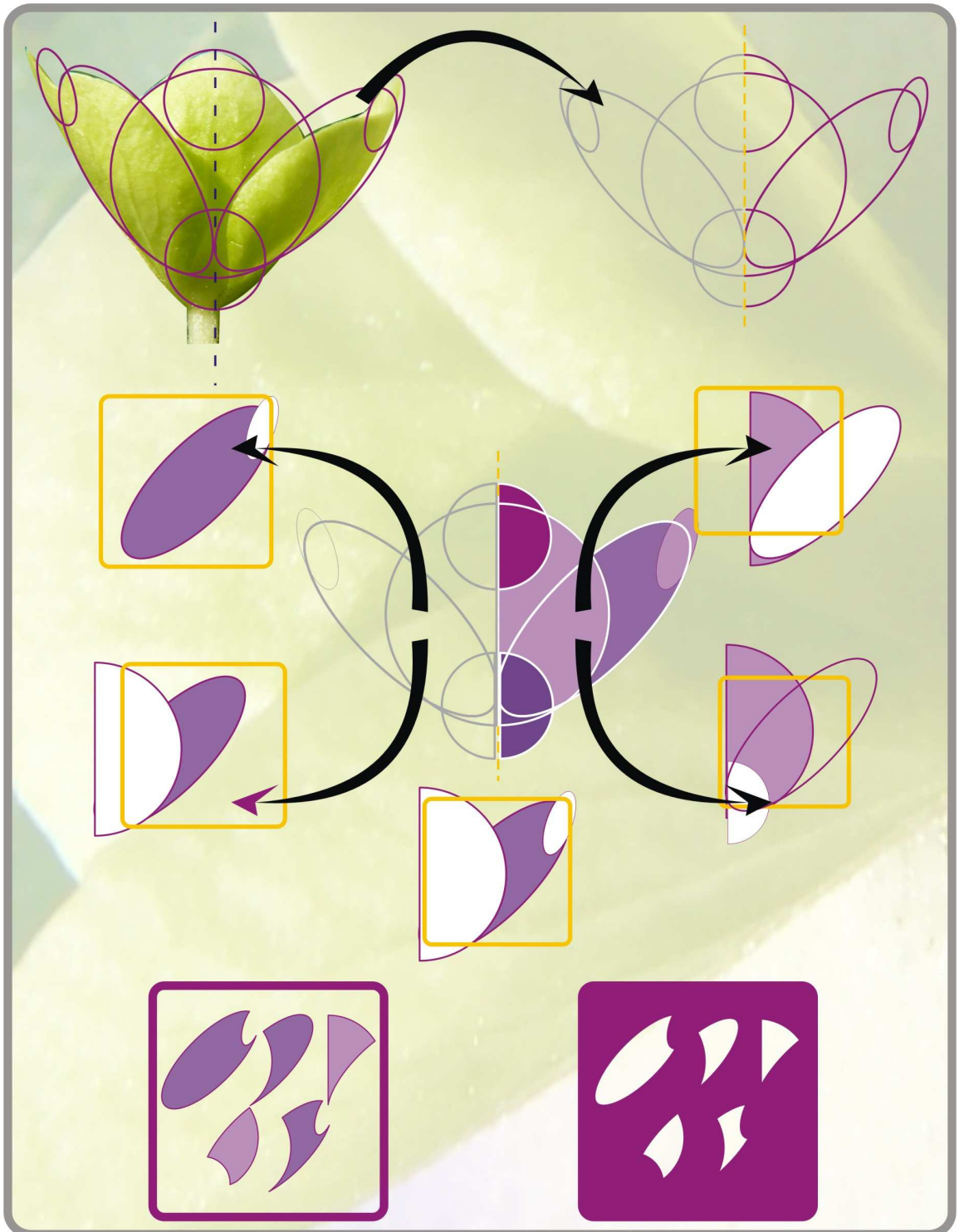
1ra. Iteración



*El principio de la iteración es la ubicación de un módulo de tamaño reducido en proporción áurea, haciendo contacto con el inicial en sus puntos medios. la segunda iteración continua con el mismo principio en cada uno de los módulos creados y de esta manera infinitamente hasta obtener la composición arriba mostrada.*

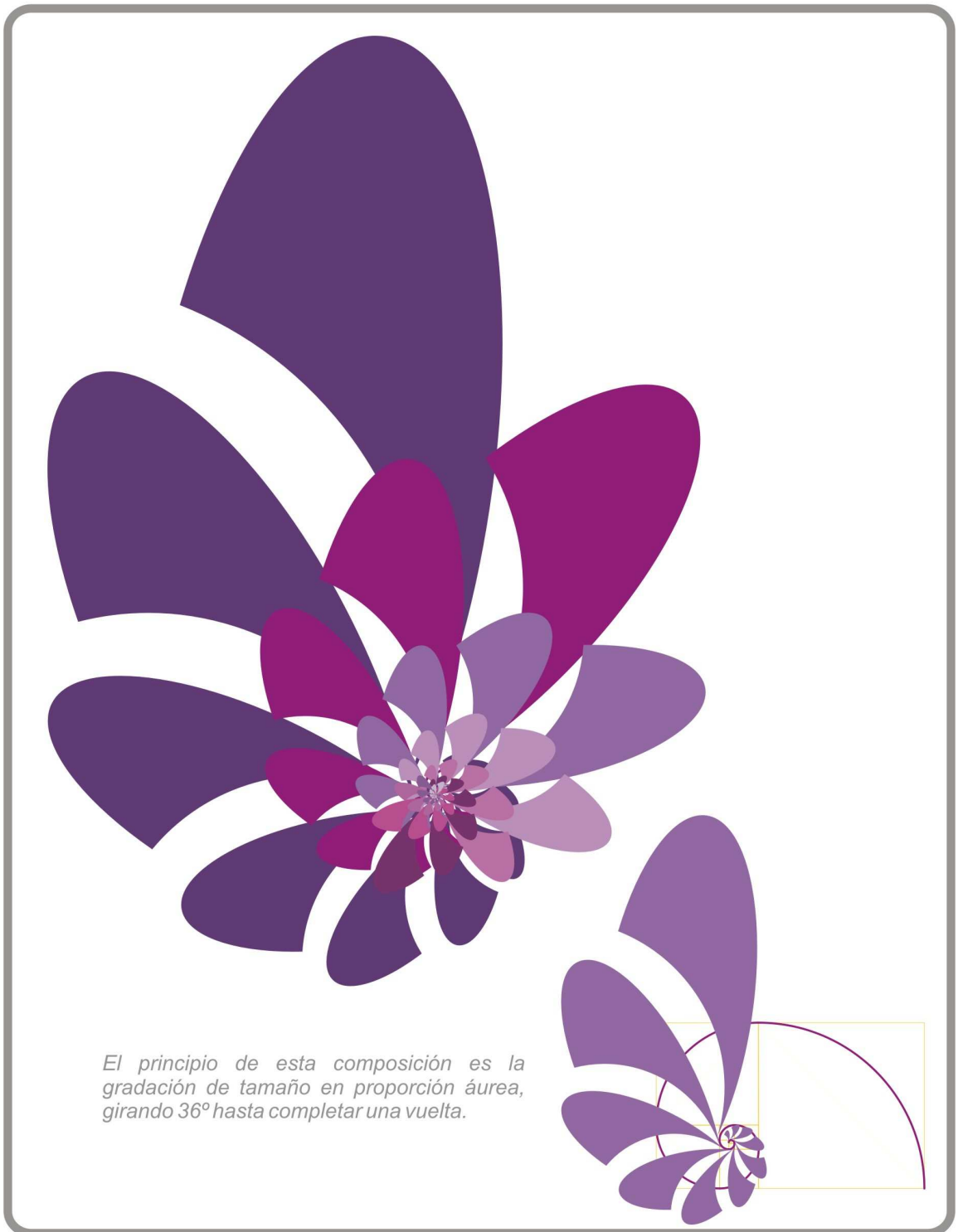
Fuente: Autor

Figura 200. Abstracción del módulo



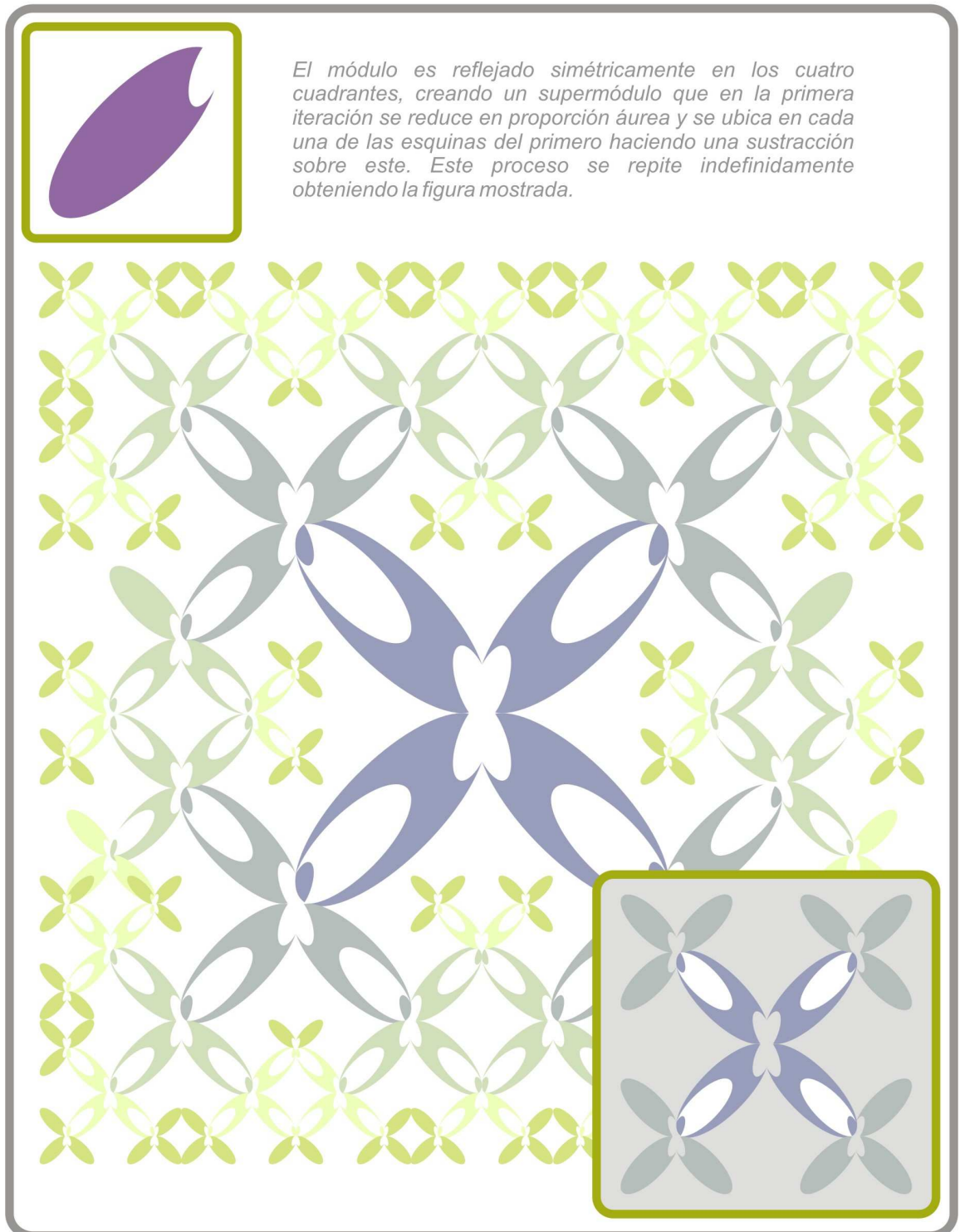
Fuente: Autor

Figura 201. Composiciones bidimensionales



Fuente: Autor


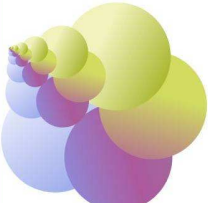
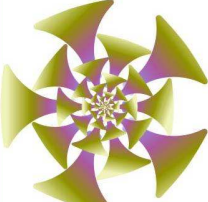

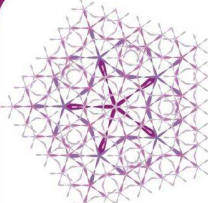
Figura 202. Composiciones bidimensionales



Fuente: Autor

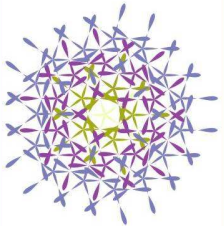
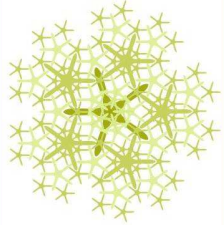
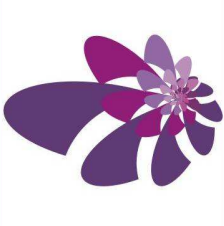

## 13.6 ANÁLISIS DE COMPOSICIONES BIDIMENSIONALES

Figura 203. Análisis de Composiciones Bidimensionales

COMPOSICIONES					
CRITERIO	<b>RIQUEZA FORMAL</b>				
<p>Gradación de tamaño, de forma y color en cada uno de los módulos.</p> <p>Radiación a 45° que junto con la gradación de tamaño en un 30% generan el fractal.</p>	<p>Radiación a 72° de un módulo circular.</p> <p>Gradación de tamaño y color en el interior de uno de los módulos de la etapa inicial.</p> <p>La gradación de color, hace referencia a los tonos que presenta el crecimiento de la hortensia.</p>	<p>El módulo obtenido de las abstracciones, genera por radiación de 72° un supermódulo usado en la formación del fractal.</p> <p>Radiación a 36° que junto con la gradación de tamaño en un 30% generan el fractal.</p> <p>Gradación de color, usando los tonos de la hortensia analizada, en el interior de cada módulo.</p>	<p>El módulo obtenido de las abstracciones, trabaja creando un supermódulo, que a medida que reduce en tamaño un 30% y rota 36°, va trabajando con unión y sustracción alternadamente creando el fractal.</p>	<p>El módulo obtenido, forma una estructura fractal, gradando de tamaño en proporción áurea, y rotándolo 36° para ubicarlo en las cinco puntas del módulo inicial.</p> <p>Utiliza una gama de tonos violeta que son los colores presentados en las brácteas de la hortensia en su penúltima etapa.</p> <p>Se observa, que a medida que los módulos van gradando de tamaño, van generando otro tipo de formas visibles como son los círculos que se aprecian, con centro en las puntas del primer módulo.</p>	

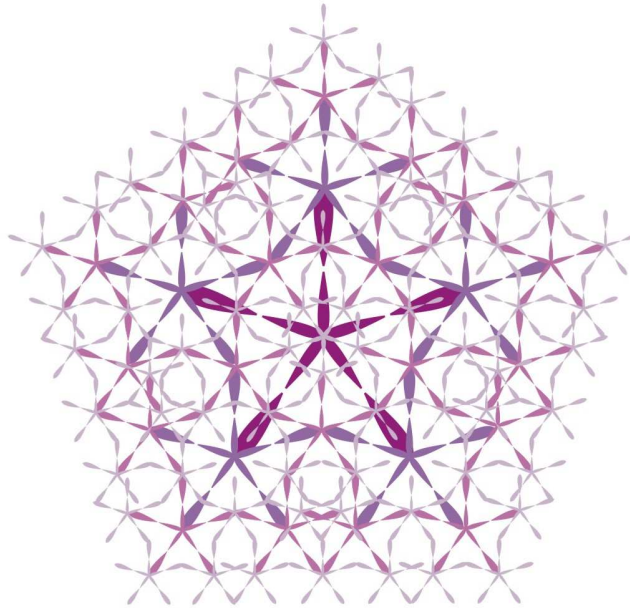
Fuente: Autor

Figura 204. Análisis de Composiciones Bidimensionales

COMPOSICIONES				
<p>RIQUEZA FORMAL</p>	<p>El módulo obtenido, forma una estructura fractal, ubicándose en los puntos medios de su anterior módulo pero manteniendo su tamaño inicial.</p> <p>Se usan tonos de colores mas fuertes y contrastantes.</p>	<p>Con este módulo, que tiene cierta similitud con el anterior, se genera otra estructura con el mismo principio, pero gradando los módulos en proporción áurea.</p> <p>Se observa una radiación que se intensifica con el uso de los tonos en verde.</p>	<p>El módulo obtenido, genera un supermódulo a través de su gradación de tamaño y rotación de 72°; posteriormente, este supermódulo también se trabaja en gradación de tamaño y en rotación de 36°.</p> <p>El supermódulo se obtiene teniendo como base la espiral de Fibonacci.</p> <p>Se utilizan tonos de violeta que generan un contraste.</p>	<p>El módulo se trabaja inicialmente haciendo simetría longitudinal y transversalmente, obteniendo el supermódulo del que se parte para generar el fractal; posteriormente, se realiza una gradación de tamaño en proporción áurea, y se ubica en cada punta del supermódulo inicial, sustrayéndole al mismo una parte correspondiente al módulo.</p>

Fuente: Autor

Figura 205. Composición seleccionada



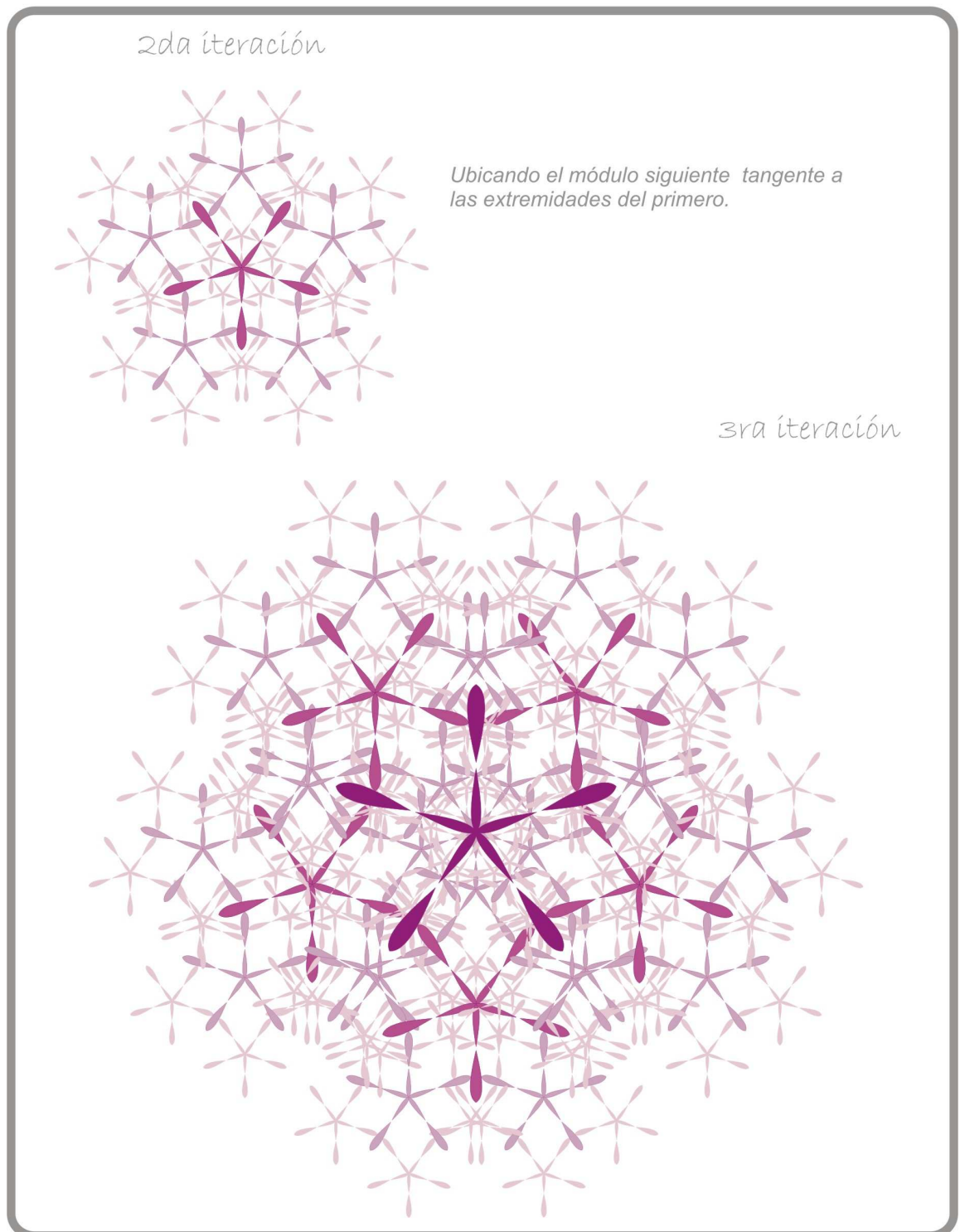
*Se escoge la composición que se observa en la figura , por las siguientes razones:*

- Posee varios conceptos de diseño como la gradación de tamaño, simetría, rotación, estructura, trabajo del color a través de tonos violeta que forman parte de la penúltima etapa de crecimiento de la hortensia.*
- El concepto fractal se aprecia claramente en la autosimilitud de formas, y las iteraciones donde el módulo disminuye de tamaño y se ubica en las cinco puntas de el módulo anterior.*

Fuente: Autor

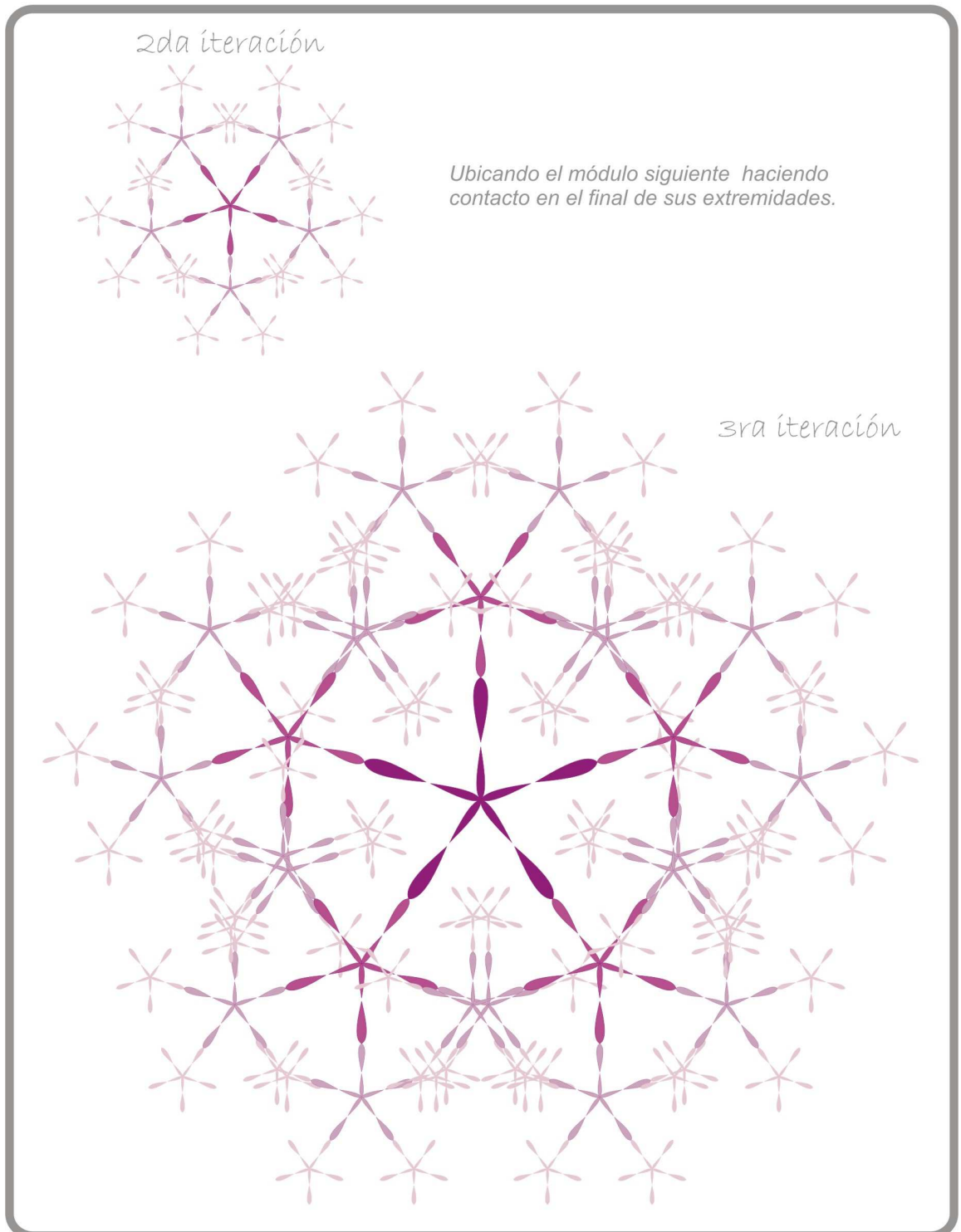
Cabe mencionar, que en el momento de analizar las composiciones, se observa que el módulo utilizado en esta, tiene varias posibilidades de organización, creando otras composiciones que se muestran a continuación.

Figura 206. Otras posibilidades de estructura



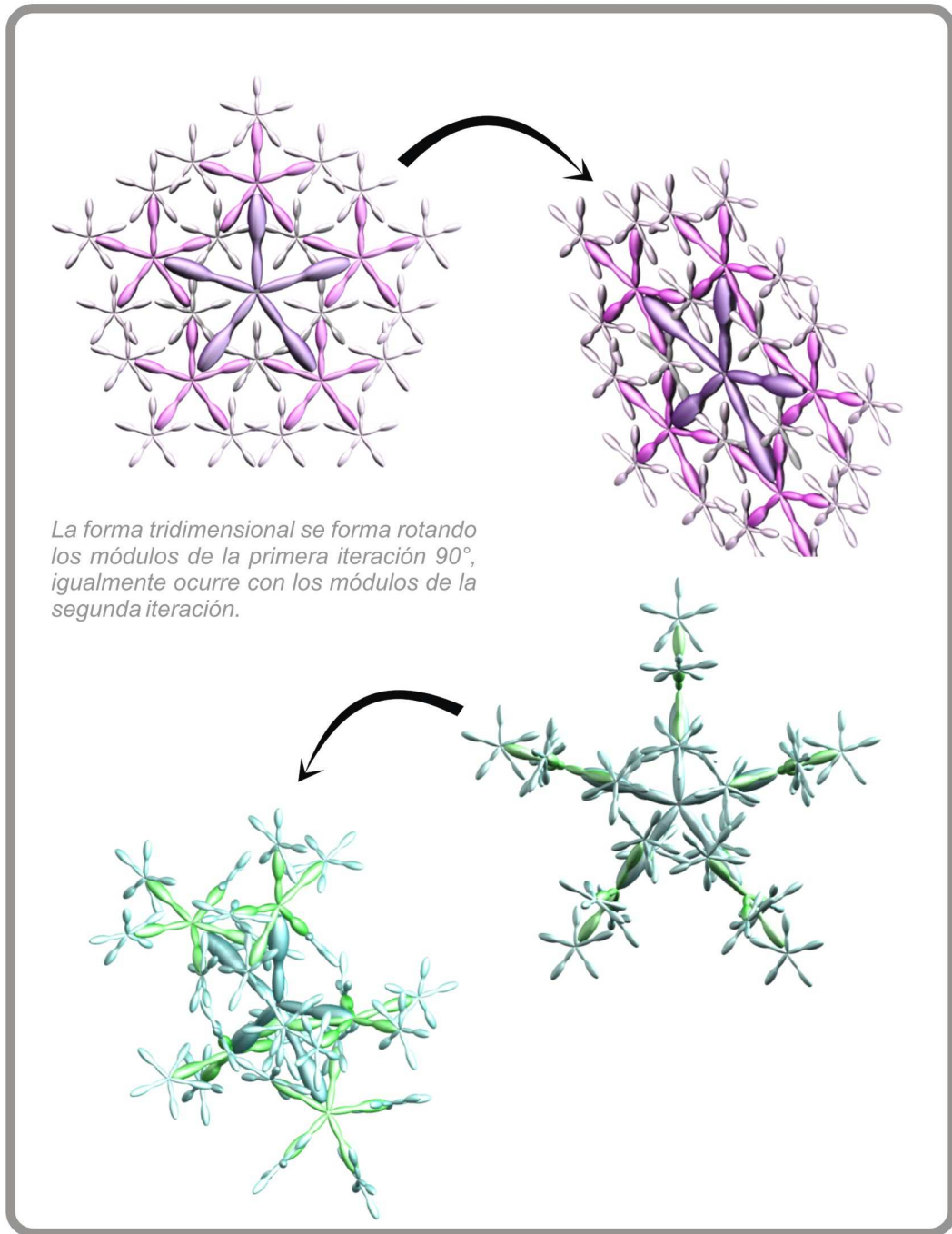
Fuente: Autor

Figura 207. Otras posibilidades de estructura



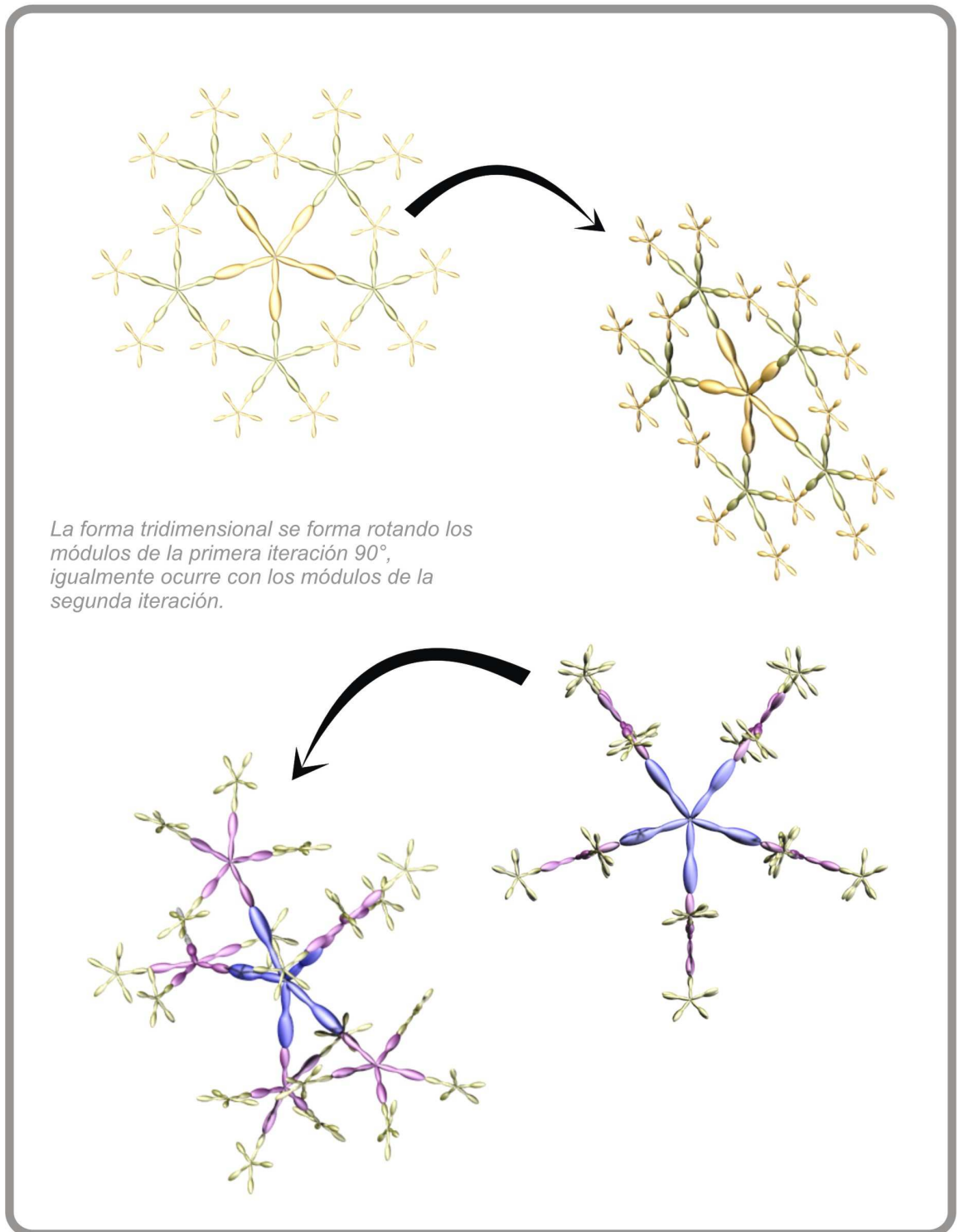
Fuente: Autor

Figura 208. Representación Tridimensional



Fuente: Autor

Figura 209.Representación Tridimensional



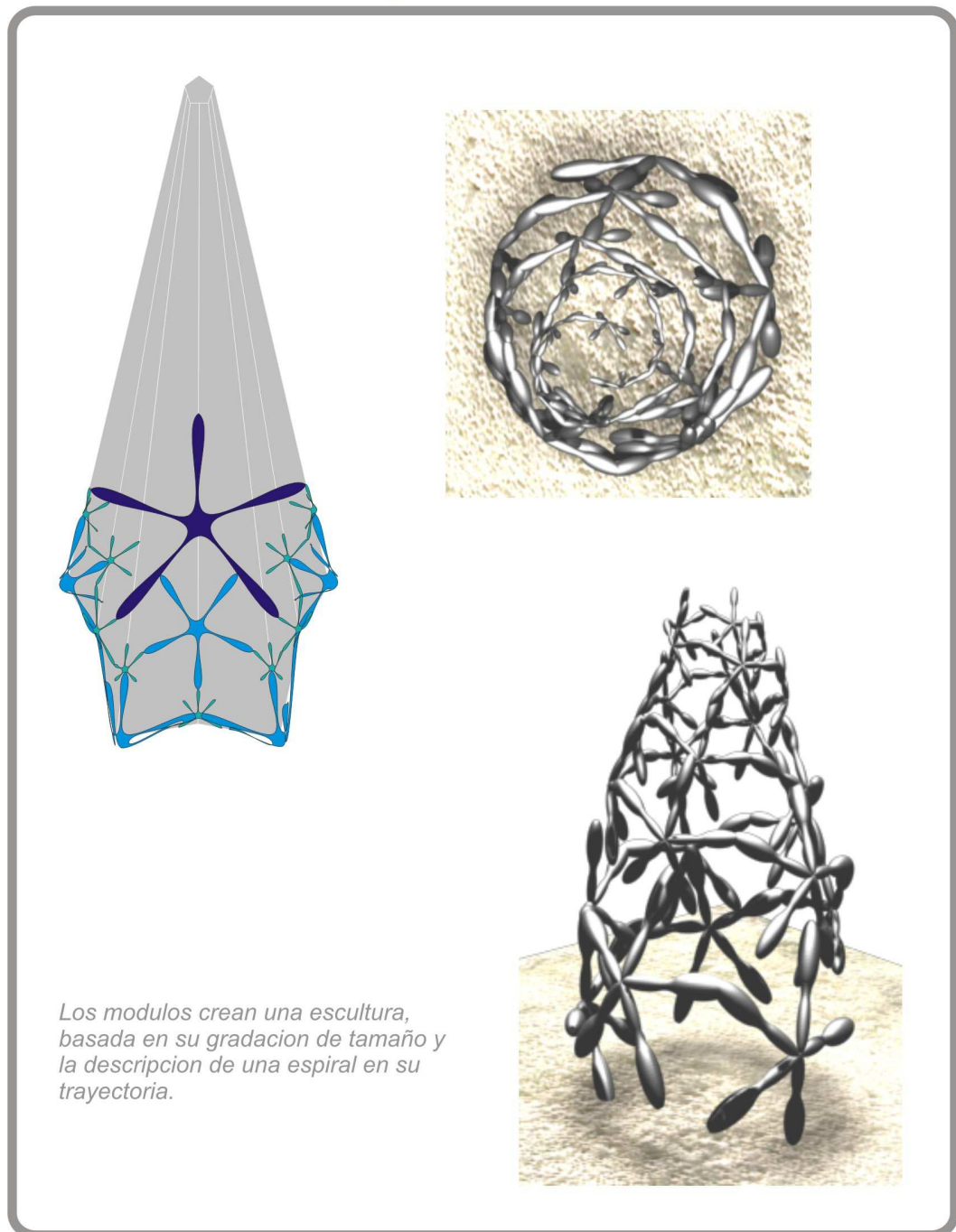
Fuente: Autor



### 13.7 APLICACIONES VIRTUALES

A continuación se presentan Aplicaciones formales y posibles aplicaciones funcionales del modulo elegido.

Figura 211. Esculturas



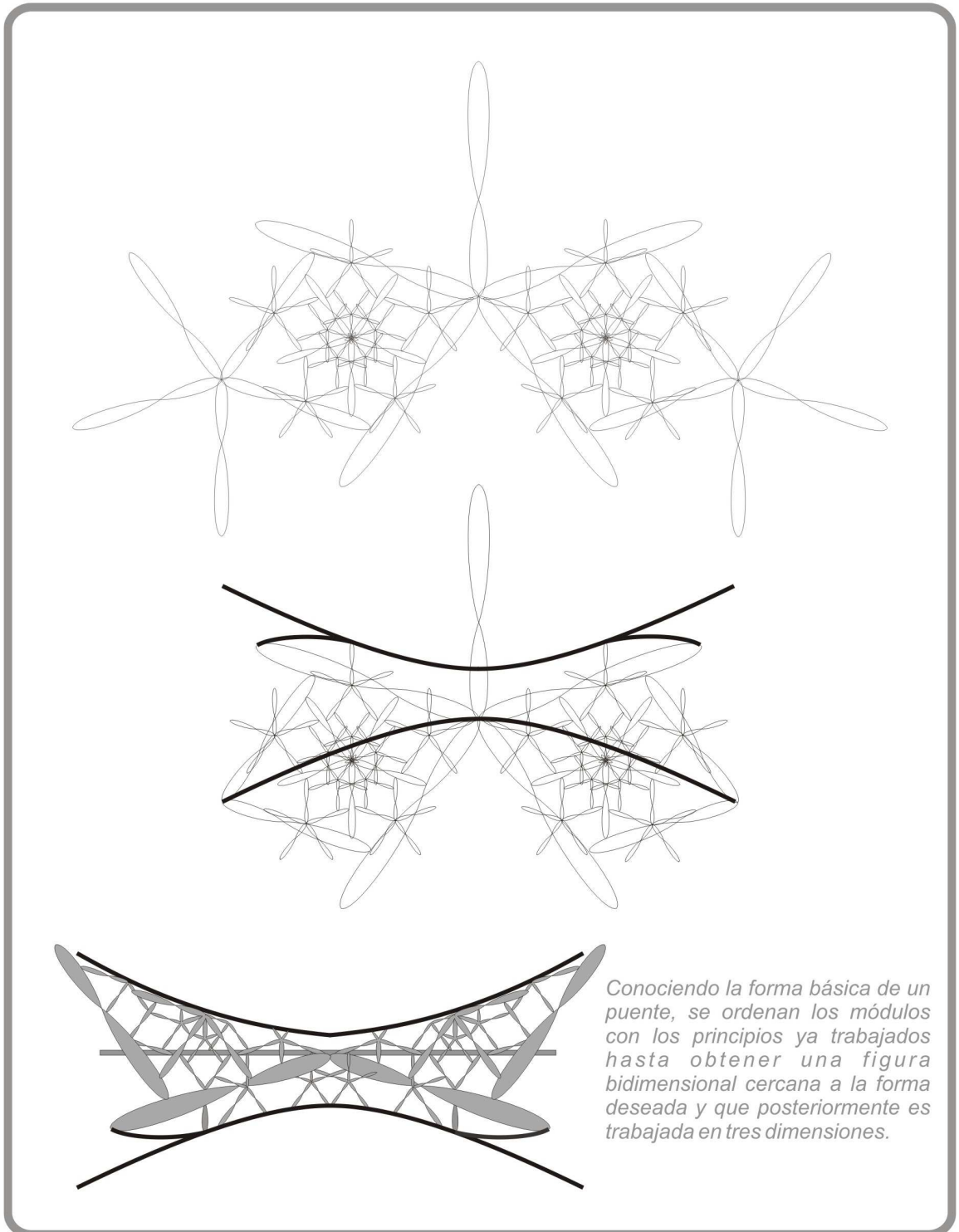
Fuente: Autor

Figura 212. Montaje Escultura



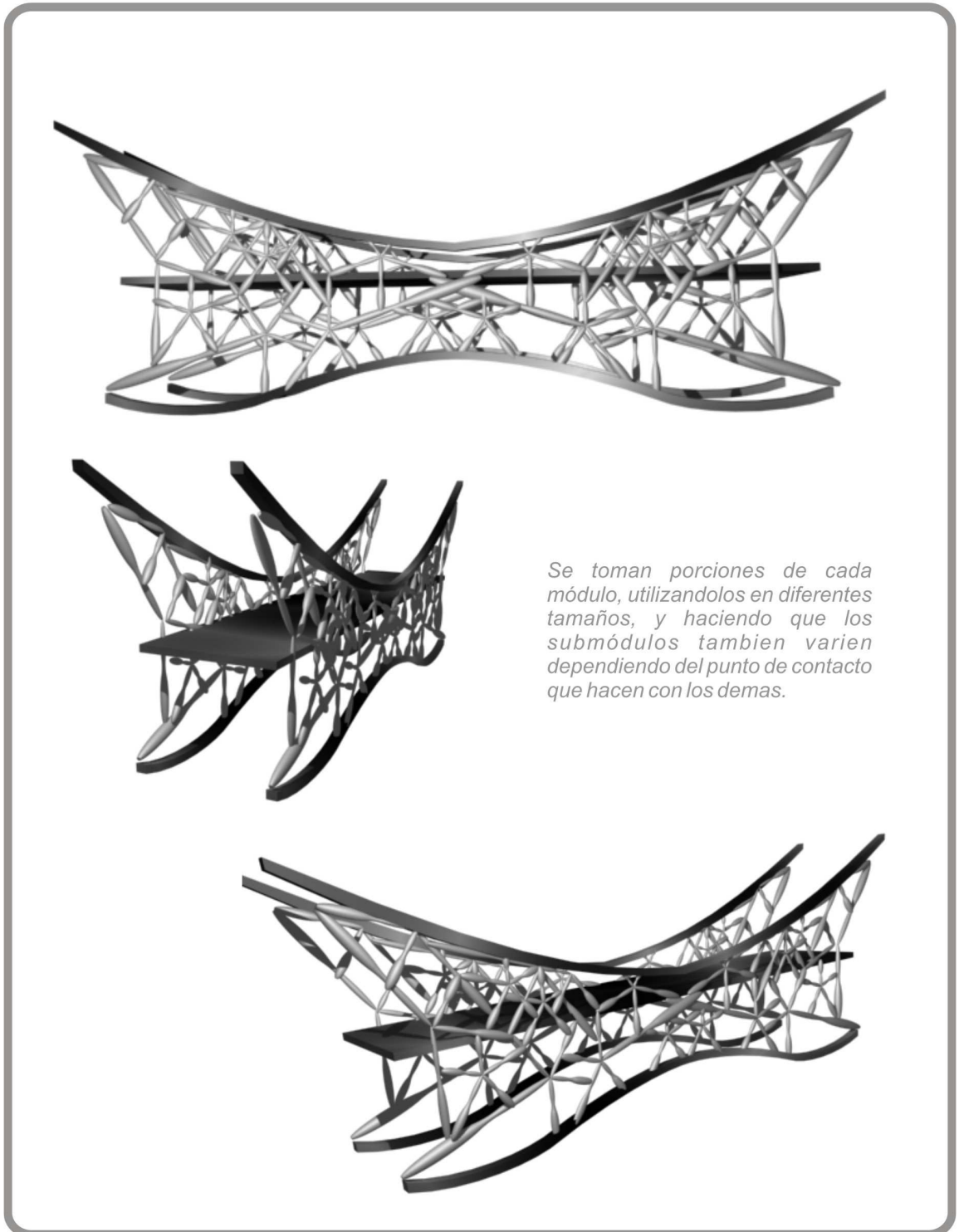
Fuente: Autor

Figura 213. Construcción de un puente



Fuente: Autor

Figura 214. Renderizado del puente estructural-3D Max



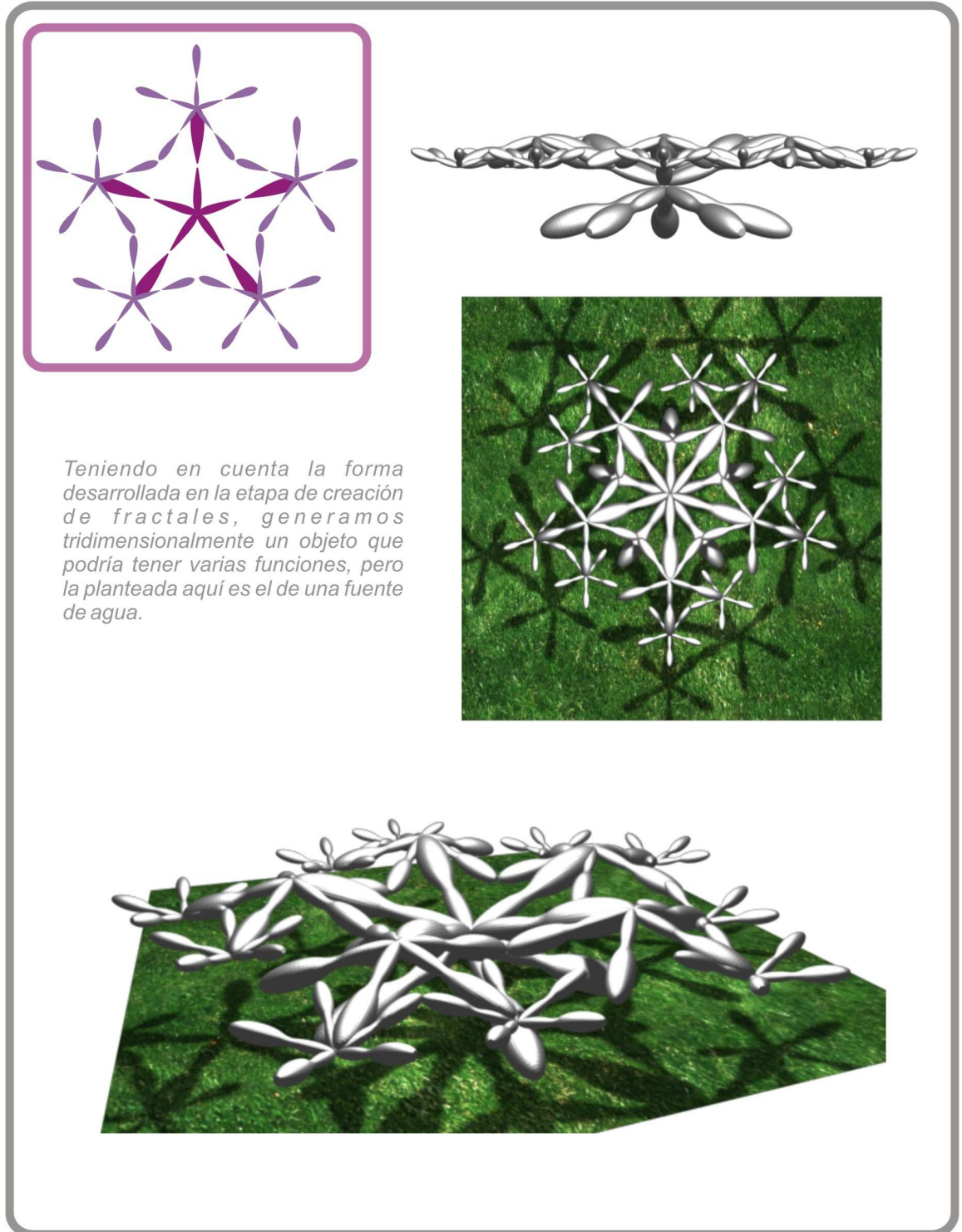
Fuente: Autor

Figura 215. Montaje del Puente



Fuente: Autor

Figura 216. Objeto estructural-Fuente de agua



*Teniendo en cuenta la forma desarrollada en la etapa de creación de fractales, generamos tridimensionalmente un objeto que podría tener varias funciones, pero la planteada aquí es el de una fuente de agua.*

Fuente: Autor

Figura 217. Montaje de la Fuente



Fuente: Autor

## 14. ASPECTOS TECNICOS

### 14.1 CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

La construcción del sistema esta pensada para ser producida a través de una matriz de inyección, en un polímero flexible de alta densidad como el polipropileno y poliestireno que además son plásticos reciclables; sin embargo, la construcción del modelo funcional, se plantea de la siguiente manera:

- **Modelos en aluminio.** Para la construcción de la matriz en caucho vulcanizado.
- **Matrices en caucho vulcanizado.** Para producción de elementos de unión en resina poliéster y resina flexible.
- **Corte en láser.** Se realiza corte en láser de acrílico de 3 mm de espesor para las piezas que serán ensambladas.
- **Pegante CA40H 3Mscotch-weld.** Utilizado para fijar los elementos de unión a las piezas de acrílico.
- **Plotter de corte y laca de poliuretano.** Para producción de acabados en el material de acrílico.

A continuación se presentan las especificaciones para cada parte del sistema:

## 14.2 TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

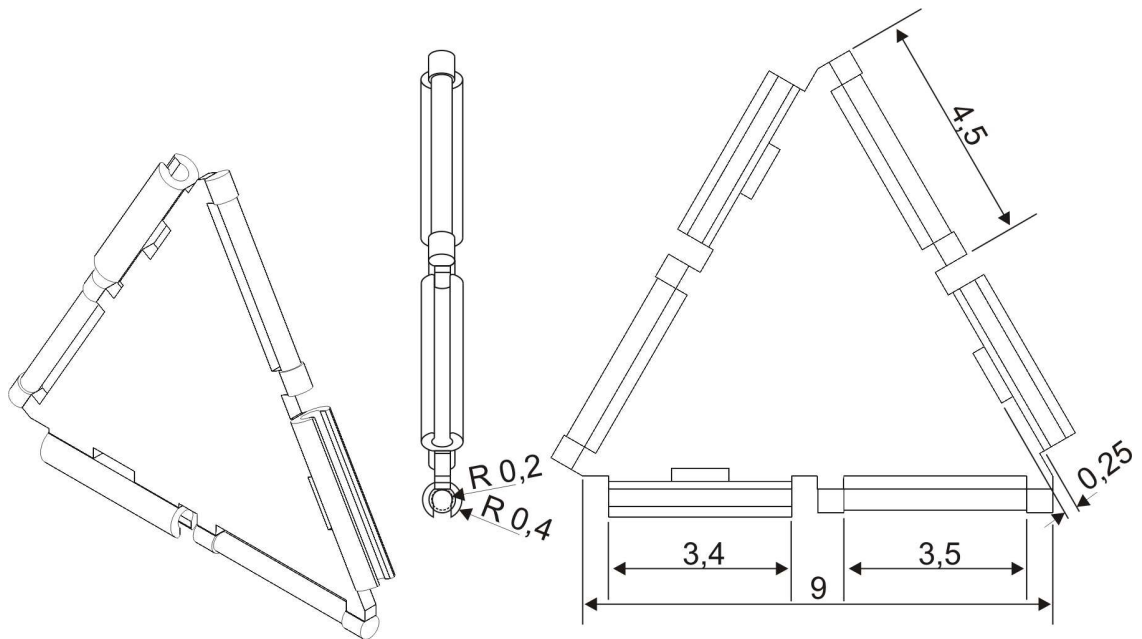
Está compuesto de 88 elementos repartidos de la siguiente manera:

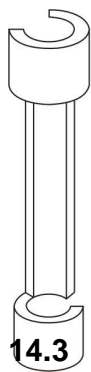
- 64 módulos triangulares
- 24 elementos de unión

### 14.2.1 Planos Generales

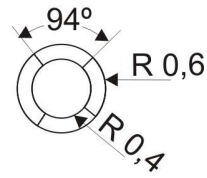
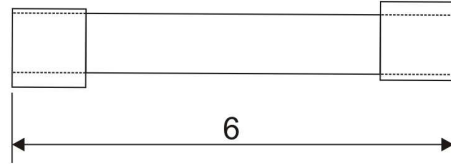
Módulo Triángulo de Sierpinski

Dimensiones en centímetros





### 14.3 ESPONJA DE Menger

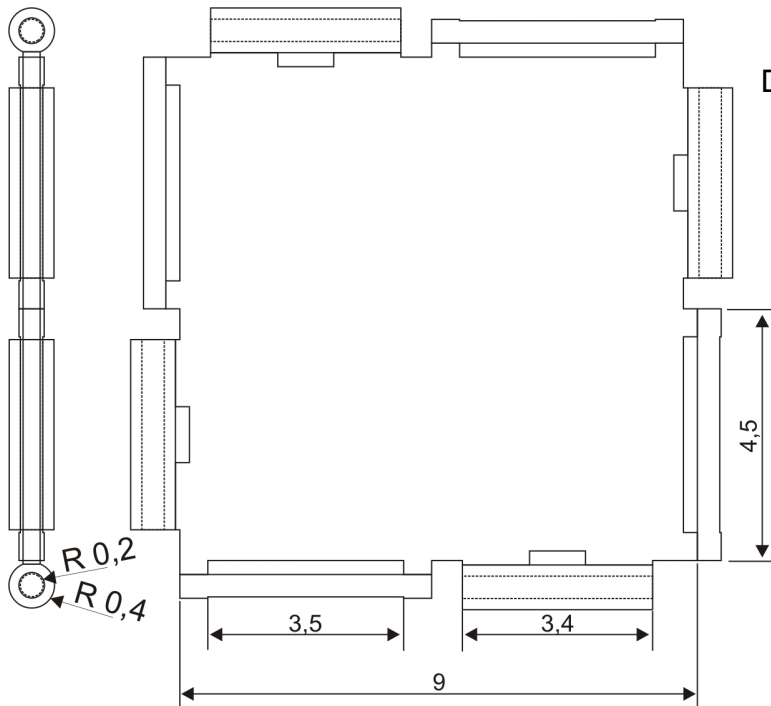


Módulo elemento de unión  
Dimensiones en centímetros

Está compuesto de 144 elementos repartidos de la siguiente manera:

- 120 módulos cuadrados
- 24 elementos de unión

#### 14.3.1 Planos Generales



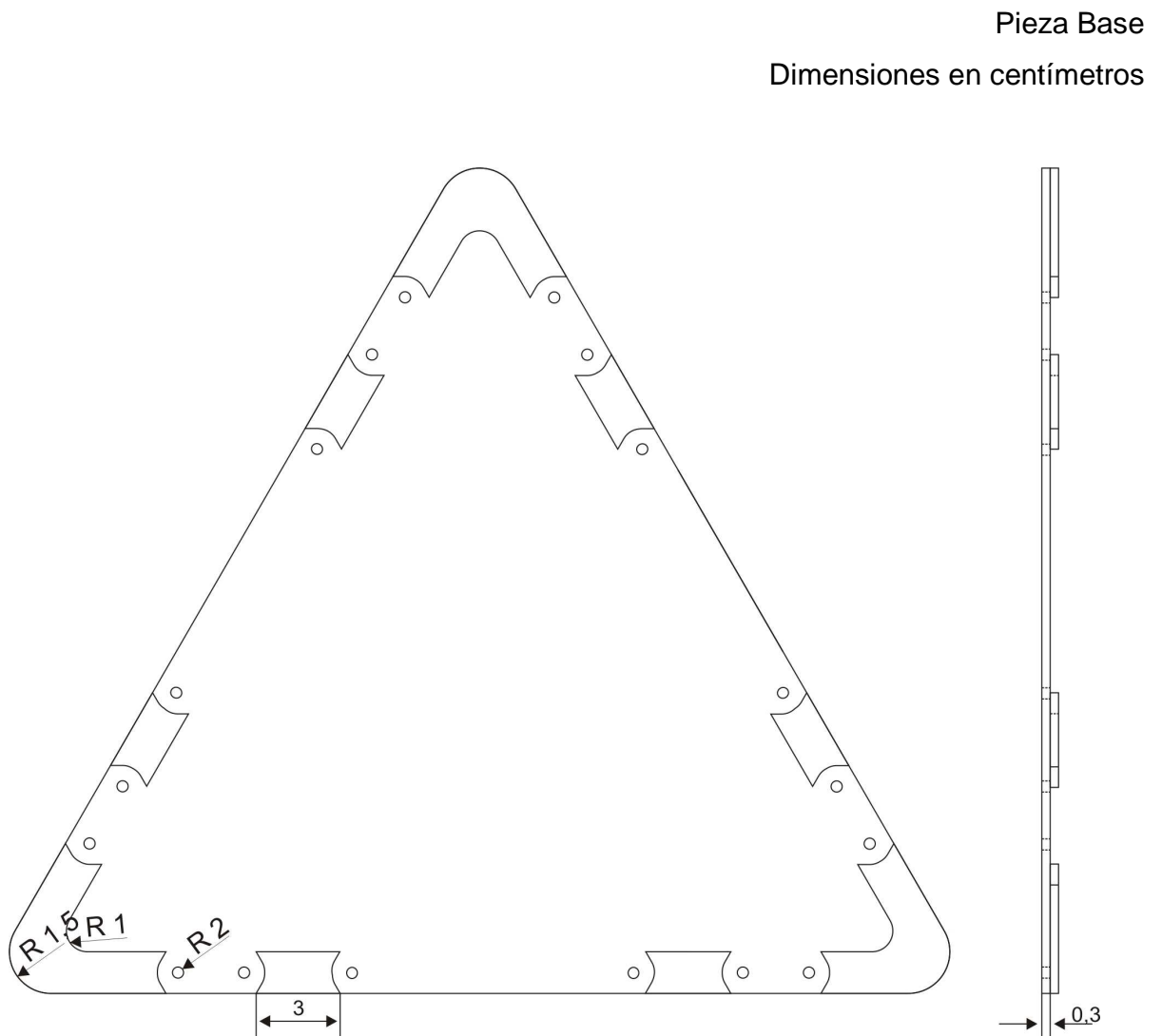
Módulo Esponja de Menger  
Dimensiones en centímetros

## 14.4 CURVA DE KOCH

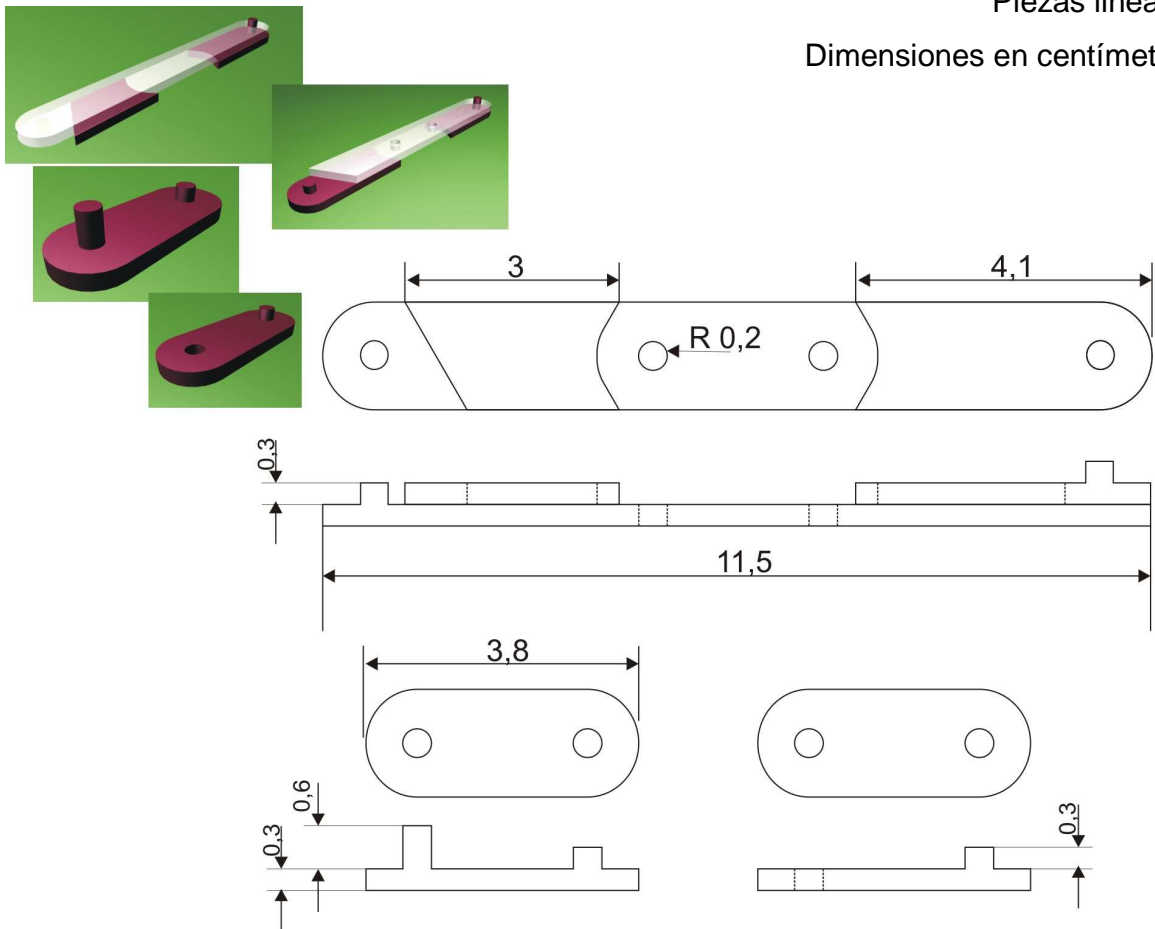
Está compuesto de 95 elementos repartidos de la siguiente manera:

- Un elemento lineal
- 4 bases para la creación del copo de koch con 30 elementos lineales cada una.

### 14.4.1 Planos Generales



Piezas lineales  
Dimensiones en centímetros



### 14.5 HYDRANGEA

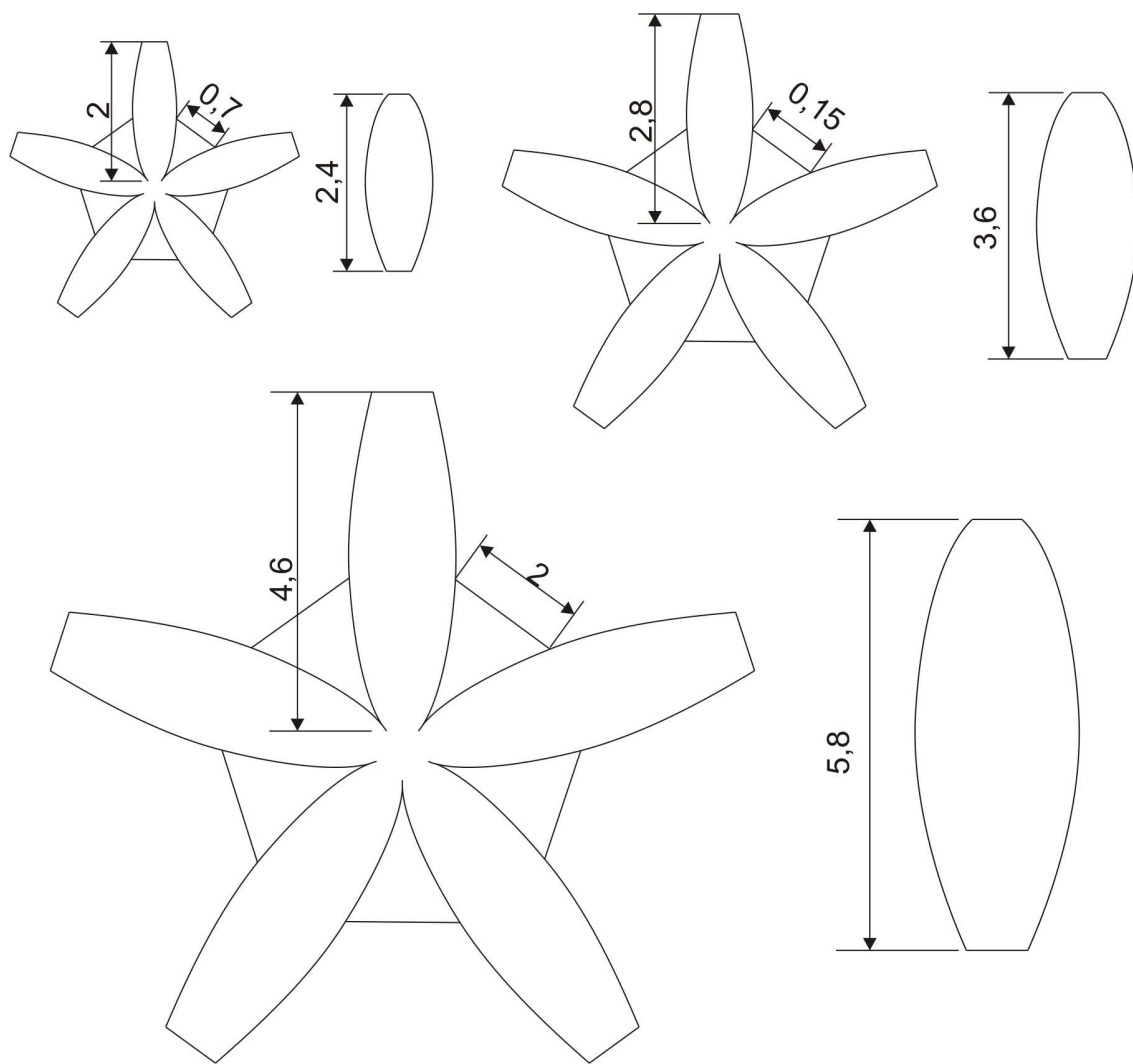
Esta compuesto por 36 repartidos de la siguiente manera:

- Un elemento inicial
- Cinco elementos de menor tamaño
- 25 elementos de tamaño inferior al anterior
- Elementos de unión
- Plantillas didácticas

### 14.5.1 Planos Generales

Módulos

Dimensiones en centímetros



## 14.6 CARTILLA

La cartilla contiene:

- Información Básica sobre fractales
- Descripción del Sistema
- Talleres para ser resueltos a través del material creado
- Información sobre otras formas geométricas que pueden ser construidas con el mismo material (tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro, pirámide Cuadrangular, Cuboctaedro, Cuboctaedro Snub, Rombicuboctaedro, antiprisma cuadrangular, prisma triangular, Dodecaedro Pentakis).
- Descripción del elemento natural y propuesta fractal a partir de el.

## **15. TALLERES PROPUESTOS**

Las actividades planteadas a continuación se diseñaron con el fin de implementar el material elaborado para ayudar a comprender mejor los conceptos y nociones esenciales de geometría fractal.

### **15.1 TRIÁNGULO DE SIERPINSKI**

Para realizar esta actividad se divide el número de estudiantes en cuatro grupos; cada grupo a su vez se divide en otros cuatro a los cuales les corresponde los siguientes elementos:

- 4 fichas triangulares con diferentes iteraciones.
- Formato de la actividad a realizar.

Previamente, el docente da unas bases acerca de los fractales, para que el estudiante posea cierto grado de conocimiento y el material sirva de apoyo para su mejor comprensión.

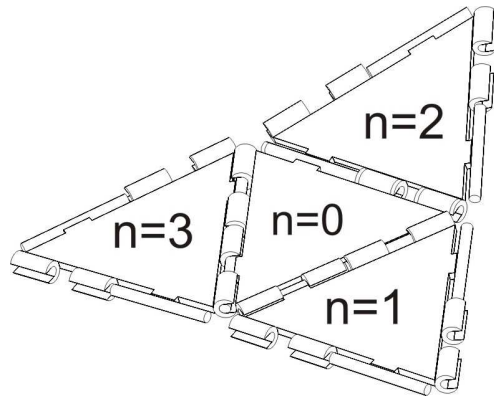
### **ACTIVIDAD TRIÁNGULO DE SIERPINSKI**

El formato para la realización de esta actividad debe tener los siguientes pasos:

Paso 1.

Se le pide al estudiante que analice los elementos dados y de acuerdo a conceptos dados anteriormente, construya el desarrollo de un tetraedro teniendo en cuenta lo siguiente:

A través de un gráfico se le pide al estudiante que según su concepto de iteración 0, 1, 2 y 3 arme el desarrollo, posteriormente si están bien ubicadas las piezas, el tetraedro final, mostrara en cada una de sus caras un orden de iteración del triangulo de Sierpinski.



*Se ubica la ficha correspondiente a la iteración  $n=0$  en la base del desarrollo; Posteriormente, se van ubicando las otras tres iteraciones como se observa en la figura.*

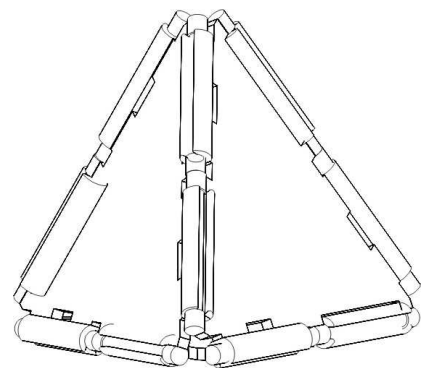
Paso 2.

Se le pide al estudiante responder las siguientes preguntas, observando el desarrollo anteriormente construido.

- Cuál es el número de nuevos triángulos para cada iteración?
- Conociendo que la longitud de las aristas del triángulo es de 9 cm, cual es el área del triangulo en su ultima iteración?

Paso 3.

Se pide a los estudiantes, construir el tetraedro con el desarrollo que tienen y unir los tetraedros de los demás compañeros de grupo y responder las siguientes preguntas: (Se les recuerda tener en cuenta que cada cara del tetraedro debe contener una iteración diferente del triangulo de Sierpinski).



- Cuál es el número de tetraedros formados en la primera iteración que se observa y cuantos en la última?
- Cuál es el volumen del sólido en la segunda iteración?, ¿En la tercera?, ¿en la cuarta?,...¿ Cuál es el volumen de la n-ésima iteración?.

Paso 4.

Se pide a los estudiantes armar el resto del tetraedro y responder las siguientes preguntas:

- Qué le sucede al volumen en cada paso?
- Cuál piensa es el volumen del tetraedro de Sierpinski?
- Conoce objetos de la naturaleza u otros que se parezcan al tetraedro de Sierpinski? ¿Cuáles?
- Qué conclusiones puede sacar de esta actividad? Escriba al menos tres conclusiones.

## 15.2 ESPONJA DE MENGER

Para realizar esta actividad se divide el número de estudiantes en 20 grupos, a los cuales les corresponde los siguientes elementos:

- 6 fichas cuadradas de diferentes iteraciones
- Formato de la actividad a realizar

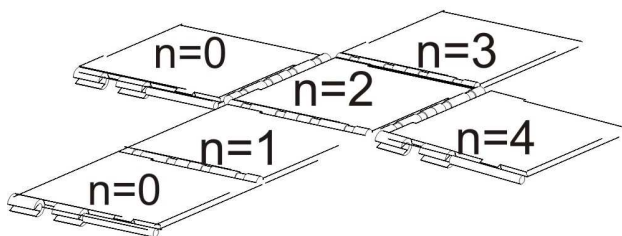
### ACTIVIDAD ESPONJA DE MENGER

El formato para la realización de esta actividad debe tener los siguientes pasos:

Paso 1.

Se le pide al estudiante que analice los elementos dados y de acuerdo a conceptos dados anteriormente, construya el desarrollo de un hexaedro teniendo en cuenta lo siguiente:

A través de un gráfico se le pide al estudiante que según su concepto de iteración 0, 1, 2, 3 y 4 arme el desarrollo, posteriormente si están bien ubicadas las piezas, el hexaedro final, mostrará en cada una de sus caras un orden de iteración de carpeta de Sierpinski.



*Se ubica la ficha correspondiente a la iteración  $n=0$  en el inicio del desarrollo; Posteriormente, se van ubicando las otras cuatro iteraciones como se observa en la figura. (como en la cuarta iteración el área de los cuadrados se hace muy pequeña, se hizo necesaria la repetición de la iteración  $n=0$  que ubicaremos en una esquina del desarrollo.*

Paso 2.

Se le pide al estudiante responder las siguientes preguntas, observando el desarrollo anteriormente construido.

- Cuál es el número de nuevos cuadrados para cada iteración?
- Conociendo que la longitud de las aristas del cuadrado es de 9 cm, ¿cuál es el área de éste en su última iteración?

Paso 3.

Se pide a los estudiantes, construir el cubo con el desarrollo que tienen y unir los cubos de los demás compañeros de grupo y responder las siguientes preguntas. (Se les recuerda tener en cuenta que cada cara del tetraedro debe contener una iteración diferente).

- Cuál es el numero de cubos formados en la primera iteración que se observa y cuantos en la última?.
- Cuál es el volumen del sólido en la segunda iteración?.
- Qué le sucede al volumen en cada paso?
- Cuál cree es el volumen del la Esponja de Menger?
- Conoce objetos de la naturaleza u otros que se parezcan al tetraedro de Sierpinski?
- Qué conclusiones puede sacar de esta actividad?

### **15.3 COPO DE NIEVE DE KOCH**

Para realizar esta actividad, se creó un modelo adicional donde el docente explica a través de este a sus alumnos el concepto de la curva de koch. Posteriormente se explica que la actividad a realizar es la creación del copo de koch a partir de un triángulo, su anticopo y la isla de koch.

Antes de comenzar, se divide el número de estudiantes en cuatro grupos y se le asigna a cada uno el material de estudio.

## **ACTIVIDAD COPO, ANTICOPO E ISLA DE KOCH**

El formato para la realización de esta actividad debe tener los siguientes pasos:

Paso 1.

Se le pide a los estudiantes, hallar el perímetro y el área del triángulo inicial, conociendo que sus lados miden 36 cm;

Paso 2.

El estudiante debe construir la primera y segunda iteración del copo de koch con el material entregado y hallar nuevamente su perímetro y área.

Paso 3.

Se pide a los estudiantes analizar el material que poseen y que construyan lo que piensan sería el anticopo de koch; posteriormente, concluir cuáles son las diferencias con el anterior.

Paso 4.

Los estudiantes, deben construir la isla de koch con todos los elementos que tienen los demás grupos y hallar el volumen generado por el modelo; finalmente, se piden las conclusiones de la actividad.

## 15.4 HYDRANGEA

Esta actividad será realizada por el grupo en general.

### ACTIVIDAD FRACTAL PROPUESTO (Hydrangea)

El docente explica a sus estudiantes, la creación de este fractal a través del análisis de un elemento natural (*La Hortensia*) y como gran variedad de fractales se encuentran en la naturaleza.

Paso 1.

La actividad comienza cuando el docente pide a dos voluntarios intentar construir un fractal con el material propuesto para ello. El objetivo de esta actividad, es dar a conocer a los estudiantes la variedad en la existencia y estudio de los fractales.

Después de terminada la construcción del fractal, se pide a la clase analizarlo y decir si se puede considerar o no un fractal, ¿por qué si o por qué no?

Paso 2.

Uno de los elementos que contiene este modelo son unas plantillas para copiar figuras; estas van a tener tanto las figuras utilizadas en el modelo funcional como otras obtenidas en el análisis del elemento natural con el objetivo de pedir a los estudiantes, crear fractales a partir de estas figuras.

## 16. CONCLUSIONES

Al finalizar este proyecto, queda clara la interdisciplinaridad del diseño industrial, dejando de lado la idea errónea que este solo influye en aspectos netamente formales e industriales; pues a partir de necesidades de otras ciencias (matemáticas, biología, física, química, entre otras.) se pueden llegar a propuestas de soluciones que aporten elementos de estudio en estas áreas.

El desarrollo de este proyecto aporta nuevos elementos de estudio, tanto para la Escuela de Diseño Industrial como para la Escuela de Matemáticas, ya que a partir del análisis de un elemento natural (Hortensia) no solo se aplicaron conceptos formales y estructurales del diseño, sino también se aplicaron y comprendieron los conceptos de dimensión fraccionaria e iteración, comprobando la analogía de la naturaleza con la geometría fractal, obteniendo como resultado una propuesta fractal que puede ser punto de partida para nuevos estudios.

La inclusión de la Biónica en el diseño, permite enriquecer el proceso creativo y facilitar la obtención de múltiples alternativas, las cuales podrían ser desarrolladas y enfocadas como productos con diferentes aplicaciones en diferentes sectores de la industria con una identidad propia y gran riqueza formal.

Este tipo de estudios, logra sensibilizar al hombre y abrir un poco más su mente a nuevas posibilidades de solución a diferentes necesidades a partir de elementos y conceptos que se encuentran a nuestro alrededor.

## BIBLIOGRAFÍA

- BRAUN, Eliézer. CAOS, FRACTALES Y COSAS RARAS. 3ra edición. México: Fondo de cultura económica, 2003.
- NEVARDO, Gustavo y ORTEGON, Pubiano. Universidad Nacional de Colombia. 2002.
- MANDELBROT, Benoit. Los objetos fractales; forma azar y dimensión. Metatemas 13. Libros para pensar a ciencia.
- VARELA, Juan de dios. Elementos Geométricos de la Cristalografía. Bogota: Academia Colombiana de ciencias exactas, físicas y naturales: Universidad Nacional de Colombia, 2000.
- JONG, W. Cristalografía General. Madrid: Aguilar, 1967. 334p.
- ELAM, Kimberly. Geometría del diseño: estudio en proporción y composición. México: Trillas, 2003. 126p.
- DOCZI, Gyorgy. The power of limits: proporcional harmonies in Nature, Art, and Architecture. Boston y Londres: Shambhala, 1994. 143 p.
- BONELL, Carmen. La divina proporción: las formas geométricas. 2da Edición. Barcelona, España: ALFAOMEGA S.A., 2000. 128 p.
- RODRIGUES SANTAMARIA, Giovanni. Elaboración de una cartilla sobre Geometría Fractal en secundaria. Bucaramanga, 2006. Trabajo de grado (Licenciado en matemáticas). Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas.
- SIERRA TORRES, William. Un acercamiento a la Geometría Fractal en el bachillerato. Bucaramanga, 2006. Trabajo de grado (Licenciado en matemáticas). Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas.
- PEREZ, Nolvis Patricia. Talleres sobre Geometría Fractal aplicados a grupos de estudiantes de Básica secundaria y Media. Bucaramanga. Trabajo de

grado (licenciado en matemáticas). Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas.

- COBOS LOZADA, Jenny Paola. Introducción a la Geometría Fractal Básica primaria. Bucaramanga. Trabajo de grado (licenciado en matemáticas). Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas.
- DAZA HIGIRIO, Carlos Julio. Geometría fractal en el bachillerato: acercamiento por sistemas dinámicos. Bucaramanga. Trabajo de grado (licenciado en matemáticas). Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas.
- BAUTISTA DUQUE, Carlos Arturo. Traducción, Investigación y exposición de un artículo sobre Geometría fractal. Bucaramanga. Trabajo de grado (licenciado en matemáticas). Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas.
- FLOREZ MORENO, Esperanza. Una reseña histórica de la Geometría fractal. Bucaramanga. Trabajo de grado (licenciado en matemáticas). Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas.
- CASTRO GRANADOS, Fabiola. Geometría fractal en el bachillerato. Bucaramanga. Trabajo de grado (licenciado en matemáticas). Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas.

## WEBGRAFIA

- [www.es.wikipedia.org/wiki/Sólidos\\_arquimedianos](http://www.es.wikipedia.org/wiki/Sólidos_arquimedianos)
- [www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia/parte\\_01.html](http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia/parte_01.html)
- [www.elergonomista.com/tecnicas/geometria.htm](http://www.elergonomista.com/tecnicas/geometria.htm)
- [www.cienciorama.unam.mx/index.jsp?action=vrArticulo&pagina=materia&aid=19](http://www.cienciorama.unam.mx/index.jsp?action=vrArticulo&pagina=materia&aid=19)

3

- [www.platea.pntic.mec.es/mzapata/tutor\\_ma/fractal/fractal.htm](http://www.platea.pntic.mec.es/mzapata/tutor_ma/fractal/fractal.htm)
- [www.w3.pedagogica.edu.co/index.php?inf=502&grupo=130](http://www.w3.pedagogica.edu.co/index.php?inf=502&grupo=130)
- [www.fibranet.org/contenidos/proyectos/geoma/Abstract\\_Geoma.pdf](http://www.fibranet.org/contenidos/proyectos/geoma/Abstract_Geoma.pdf)
- [www.geometriafractal.com/articlech000301.htm](http://www.geometriafractal.com/articlech000301.htm)
- [www.campusred.net/straining/cursos/C2Dignacioargote/lecciones/definicion.htm](http://www.campusred.net/straining/cursos/C2Dignacioargote/lecciones/definicion.htm)
- <http://usuarios.lycos.es/sisar/fractales/fractales.php#21>
- <http://es.wikipedia.org/wiki/Tensegridad>