

**ALGUNAS ECUACIONES QUE PRESENTAN SOLUCIÓN DE TIPO
ONDA VIAJERA**

JOSÉ LEONARDO PEREA LARA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2006

**ALGUNAS ECUACIONES QUE PRESENTAN SOLUCIÓN DE TIPO
ONDA VIAJERA**

JOSÉ LEONARDO PEREA LARA

**Trabajo presentado para optar el título de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

**Director
GILBERTO ARENAS DÍAZ**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2006

A Dios, mis padres y hermanos.

Agradecimientos

Especialmente:

- **Dios**, por darme la fortaleza y la sabiduría para lograr todos mis propósitos.
- **Mis padres José y Ana Jael**, por brindarme apoyo incondicional, comprensión, amor y porque sin ellos hoy este proyecto no sería una realidad.
- **Mis hermanos Sandra, Joaquín, Cesar y Carlos y mi Abuela Silenia**, por su apoyo moral, afectivo y ser quienes han compartido conmigo muy bellos momentos de mi vida.
- **Mi amor Yuli Katherine**, quien por su apoyo, compañía, comprensión y amor incondicional, me impulso para lograr este proyecto.
- Al profesor **GILBERTO ARENAS**, quién además de su amistad, me brindó orientación y paciencia en el desarrollo del proyecto.
- Los **profesores**, por sus aportes en mi formación académica.
- Mis **compañeros de carrera, en especial a Nicolás, Wilmer, Jairo, Oscar, Francisco, Liliana y Melissa**, que de una u otra manera me apoyaron y me brindaron amistad incondicional.

TITLE: SOME EQUATIONS THAT PRESENT SOLUTION OF TYPE TRAVELING WAVE*

AUTHOR: JOSÉ LEONARDO PEREA LARA**

KEY WORDS: Equations differentials, equation of wave, equation of Korteweg-de Vries, equation of Sine-Gordon and traveling waves.

DESCRIPTION

In the present work a bibliographical review is done on some equations that present solution of traveling wave.

The first chapter contains the preliminary ones of this project, which gives a brief description of the origins of the differential equations and some useful applications for any course of equations.

In the second chapter we showed to the utility of the waves in the physics and the mathematical one helped by means of the equation of wave, Burger, heat and advection, solving some equations differential subject to special conditions to verify if they had solution of any named equation previously.

In the third chapter we show two examples of equations that present solutions type traveling wave.

* Monograph

** FACULTY OF SCIENCES, LICENTIATE IN MATHEMATICS.
DIRECTOR GILBERTO ARENAS DÍAZ.

TITULO: ALGUNAS ECUACIONES QUE PRESENTAN SOLUCIÓN DE TIPO ONDA VIAJERA*

AUTOR: JOSÉ LEONARDO PEREA LARA**

PALABRAS CLAVES: Ecuaciones diferenciales, ecuación de onda, ecuación Korteweg-de Vries, ecuación de seno-Gordon, ondas viajeras.

DESCRIPCIÓN

En el presente trabajo se hace una revisión bibliográfica sobre algunas ecuaciones que presentan solución de onda viajera.

El primer capítulo contiene los preliminares de este proyecto, el cual da una breve descripción de los orígenes de las ecuaciones diferenciales y algunas aplicaciones útiles para cualquier curso de ecuaciones.

En el segundo capítulo mostramos la utilidad de las ondas en la física y las matemáticas ayudado por medio de la ecuación de onda, Burger, calor y advección, resolviendo algunas ecuaciones diferencial sujetas a condiciones especiales para comprobar si tenían solución de cualquier ecuación nombrada anteriormente.

En el tercer capítulo mostramos dos ejemplos de ecuaciones que presentan soluciones tipo onda viajera.

* Monografía

** FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR GILBERTO ARENAS DÍAZ.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales son una rama muy importante de las matemáticas, tienen un amplio desarrollo debido a su gran número de aplicaciones en diferentes disciplinas, como la física, la química, la biología y la economía, entre otras.

En el pensum de la Licenciatura en Matemáticas, sólo aparece un curso básico enfocado en esta línea, adicionalmente, son pocos los trabajos de monografía cuyo tema este ligado estrechamente con las ecuaciones diferenciales; por lo anterior, consideramos que el tema tratado en el presente trabajo monográfico es valioso.

El propósito más importante de esta monografía es estudiar dos ecuaciones interesantes (Korteweg-de Vries y seno-Gordon), que presentan soluciones tipo onda viajera. En miras de lo anterior, se ha dividido el trabajo en tres capítulos, los cuales se describen a continuación: en el primer capítulo se hace una pequeña introducción a las ecuaciones diferenciales: terminología, clasificación, etc, y se dan ejemplos clásicos donde ellas intervienen; en el segundo capítulo se hace un estudio acerca de las ondas, en especial las ondas viajeras, como se clasifican, que características tienen; se reseñan algunas ecuaciones cuyas soluciones describen ondas; en el tercer capítulo se analizan dos ecuaciones diferenciales: Korteweg-de Vries (KdV) y seno-Gordon, las cuales tienen solución tipo onda viajera, se describe cada ecuación y damos los fenómenos que modela cada una.

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo hacemos una descripción de las ecuaciones diferenciales, pasamos luego a realizar la clasificación de las ecuaciones diferenciales (ordinarias, parciales, lineales, no-lineales, orden, etc), así como también presentamos ejemplos clásicos en los cuales ellas intervienen.

1.1. Origen y evolución de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales aparecen por primera vez con los trabajos de Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716); los problemas que llevaron a su desarrollo fueron los estudios de la dinámica puntual y de los cuerpos rígidos, así como ciertos problemas geométricos, conducidos a través de los métodos del cálculo diferencial e integral, para llegar a los tipos más sencillos de las ecuaciones de primer y segundo orden.

Newton resuelve una serie de ecuaciones diferenciales como es la segunda ley de los principios, la cual viene formulada así: “el cambio del movimiento de la velocidad es proporcional a la fuerza motriz y tiene lugar en la dirección de la línea recta según la cual esta fuerza actúa”. Así, al resolver el problema del movimiento rectilíneo de un punto atraído hacia otro con una fuerza proporcional a la distancia, Newton resuelve

la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0.$$

El método general empleado por Newton fue el método de aproximaciones sucesivas, representando las soluciones mediante una serie de potencias de exponente positivo o negativo. Newton no se preocupó mucho por dar a sus soluciones una forma cerrada. Así, por ejemplo, propone la solución de la ecuación como

$$y = x + \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{2a^2} + \frac{x^4}{2a^3} + \dots$$

En general, Newton presenta como solución aquella en la que el término constante de la serie es cero, haciendo notar que añadiendo constantes se obtienen otras soluciones.

Leibniz fue el primero en introducir el término ecuación diferencial, él también utilizó la serie de potencias para la resolución de ecuaciones y junto a este método introdujo los fundamentos para la clasificación de las ecuaciones diferenciales y el método general para la reducción de las ecuaciones diferenciales a cuadraturas, siendo la más sencilla la de variables separables.

En 1693, Leibniz consigue reducir ecuaciones homogéneas mediante la sustitución $y = ux$, más tarde, él mismo logra reducir a variables separables la ecuación lineal de primer orden mediante la sustitución $y = uv$.

Euler (1707-1783) utilizó la teoría de las ecuaciones diferenciales en multitud de problemas de mecánica, geometría y análisis, obteniendo grandes resultados. Con Euler la teoría de ecuaciones diferenciales se transforma en una disciplina independiente con dos grandes ramas: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Ecuaciones Diferenciales Parciales.

En 1743, Euler presenta el método clásico de solución de la ecuación diferencial ordinaria lineal con coeficientes constantes mediante la sustitución $y = e^{kx}$, también propuso el caso de raíces múltiples del polinomio asociado por $y = ue^{kx}$. En el caso de un par de raíces complejas conjugadas $\alpha \pm \beta i$, la sustitución $y = ue^x$ le condujo a

la ecuación:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \beta^2 u = 0.$$

Gracias al estudio de esta ecuación, en 1740 lo llevo al conocimiento de una solución particular para cuando $\beta = 1$ en dos formas diferentes, $2 \cos x$ y $e^{xi} + e^{-xi}$, por medio del desarrollo de la serie de potencias, llego al convencimiento de que ambas coincidían. Esto le condujo a la fórmula

$$e^{\alpha i} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

que hoy llamamos la fórmula de Euler.

En 1753 publicó un método para la solución de ecuaciones lineales no homogéneas de coeficientes constantes, mediante la reducción sucesiva del orden.

Por ejemplo, para la ecuación

$$ay + b \frac{dy}{dx} + c \frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

multiplicando por e^{mx} e integrando a continuación, se obtiene

$$e^{mx} \left(a_1 y + b_1 \frac{dy}{dx} \right) = \int_{x_0}^x f(s) e^{ms} ds,$$

derivando ambos miembros resulta

$$e^{mx} m a_1 y + e^{mx} \frac{dy}{dx} [m b_1 + a_1] + e^{mx} b_1 \frac{d^2y}{dx^2} = e^{mx} f(x)$$

en donde a_1, b_1, m son constantes apropiadas. Así, se obtiene que

$$a_1 y + b_1 \frac{dy}{dx} = e^{-mx} \int_{x_0}^x f(s) e^{ms} ds.$$

Más adelante en 1750, D'Alembert (1717-1783) publicó otro método para resolver la ecuación no homogénea, siendo la solución general la suma de una solución particular de la no homogénea y la solución general de la homogénea.

Lagrange (1736-1813) mostró que el orden de una ecuación lineal homogénea puede ser rebajado r unidades si se conocen las r soluciones particulares.

Legrende (1752-1833) investigó la atracción de un elipsoide sobre un punto exterior e introdujo la ecuación que lleva su nombre así como sus soluciones.

Las ecuaciones ordinarias se originan por el estudio de las ecuaciones fundamentales de la dinámica, donde D'Alembert lleva a cabo el estudio del sistema de las ecuaciones de primer y segundo orden, aplicando el método de coeficientes indeterminados a los sistemas lineales con coeficientes constantes. D'Alembert elige los factores a modo de combinación lineal, llegando a tomar la forma

$$du + kdt = 0,$$

o bien,

$$d^2u + kudt^2 = 0.$$

Taylor (1685-1731) estableció la existencia de la proporcionalidad inversa entre la aceleración en un punto de la cuerda que vibra transversalmente (vibraciones pequeñas) y el radio de curvatura de la cuerda en el mismo punto, esto se puede expresar como

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Taylor redujo el problema a dos ecuaciones lineales ordinarias de segundo orden con coeficientes constantes mediante condiciones severas.

La ecuación de la cuerda vibrante fue escrita por D'Alembert y es de la forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

y la solución tiene la forma

$$y = f(x + t) + g(x - t),$$

siendo f y g dos funciones arbitrarias.

J. F. Pfaff (1765-1825) investigó la ecuación

$$F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \cdots + F_n dx_n = 0,$$

donde $F_1, F_2, \dots, F_n$ son funciones en las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, lo cual lleva a proponer el problema de integrar esta ecuación con el menor número posible de relaciones entre las variables, es decir, obtener la superficie integral de mayor dimensión posible.

La teoría de las ecuaciones en derivadas parciales de orden superior se desarrolla íntimamente con problemas de física y en particular de la teoría de la elasticidad. El punto de partida lo constituyó el trabajo de J. B. Fourier (1768-1830) sobre la teoría del calor.

Para integrar la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

con diversas condiciones de contorno, Fourier desarrolló el método de separación de variables y llegó a la representación de soluciones en la serie trigonométrica.

Dichos métodos especiales, como separación de variables, empleo de factores integrantes y los procedimientos sistemáticos introducidos principalmente por Euler, Lagrange y Laplace, no eran tan precisos, pues no nos llevaban a encontrar solución a todas las ecuaciones diferenciales, se vio entonces más provechoso estudiar si dada una ecuación diferencial, esta tenía o no solución y, cuando esto sucedía, intentar averiguar propiedades de la solución a partir de la misma ecuación diferencial.

Fue Cauchy (1789-1857) quien obtuvo el primer “teorema de existencia” para las ecuaciones diferenciales. Demostró que toda ecuación de primer orden de la forma $y' = f(x, y)$ tiene solución, siempre que $f(x, y)$ satisfaga ciertas condiciones generales.

En la segunda mitad del siglo *XIX*, L. Fuchs (1833-1902) propone una nueva orientación en la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes algebraicos. Él parte del trabajo realizado por Cauchy y Riemann sobre la serie hipergeométrica. Esta nueva orientación se ocupó del estudio de las propiedades generales de las soluciones de las ecuaciones diferenciales en el campo complejo, lo cual abordó los problemas de existencia y unicidad de puntos singulares de las soluciones.

Algunos tipos especiales de ecuaciones de la física matemática fueron investigados

con éxito por S. Poisson (1781-1840), C. Neumann (1832-1925), H. A. Schwarz (1843-1921), H. Poincaré (1854-1912), A. M. Lyapunov (1857-1948), W. A. Stehlov (1864-1926) entre otros.

1.2. Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial (ED) es una ecuación que relaciona de manera no trivial a una función desconocida y una o más derivadas de esta función con respecto a una o más variables independientes. Si la función depende de una sola variable la ecuación diferencial se llama **ordinaria**, y si depende de más de una variable, se llama **ecuación diferencial parcial**.

El orden de una ecuación diferencial ordinaria es igual al de la derivada de más alto orden que aparece de manera no trivial en la ecuación.

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es lineal si se puede escribir de la forma

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y^1 + a_0(x)y = g(x), \quad (1.1)$$

donde los coeficientes $a_k(x)$ para $k = 0, 1, \dots, n$ son funciones reales, con $a_n(x) \neq 0$. Una ecuación diferencial ordinaria que no se pueda expresar de esta forma es no lineal.

Decimos que la ecuación (1.1) es lineal con coeficientes constantes si las funciones son constantes para toda k , en caso contrario, decimos que es con coeficientes variables.

A menudo, las ecuaciones diferenciales representan leyes naturales relativas a la velocidad de un determinado cambio^{*}. Una solución de una ecuación diferencial es una

^{*}La primera derivada de una función $y = f(x)$, o derivada de primer orden, $f'(x)$, es la velocidad a la que cambia y con respecto a x ; si la función se representa gráficamente, la primera derivada en cualquier punto es la pendiente de la curva en ese punto. La segunda derivada o derivada de segundo orden, $f''(x)$, es sencillamente la derivada de la derivada y se interpreta como la aceleración con la que cambia y con respecto a x .

función $y = f(x)$ que satisface la ecuación; la solución general es una fórmula que representa todas las soluciones posibles.

Una ecuación diferencial de orden n es una ecuación en la que figura la derivada enésima, denotada por $d^n y/dx^n = f^{(n)}(x)$, y ninguna derivada de orden superior.

Para ver un ejemplo de ecuación diferencial de primer grado que corresponde a una ley natural, hagamos que x represente el tiempo, mientras que y representa la masa de una muestra radiactiva en el momento x . Se ha demostrado que y disminuye a una velocidad dy/dx proporcional a la masa de material radiactivo que queda, esto es,,

$$\frac{dy}{dx} = ay, \quad (1.2)$$

donde a es negativo puesto que y disminuye. La solución general de esta ecuación diferencial viene dada por $y = ce^{ax}$, donde c es una constante igual a la masa del material en el momento $x = 0$.

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden surgen a menudo en problemas relativos al movimiento bajo la influencia de fuerzas. Si un objeto recorre la distancia y en el tiempo t , entonces dy/dt es su velocidad y d^2y/dt^2 es su aceleración. Si el objeto tiene una masa constante m y está sometido a una fuerza F , la segunda ley de Newton afirma que

$$F = m \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Si F es la fuerza gravitatoria mg , y representa la distancia en caída libre y t el tiempo, entonces

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = F = mg, \quad (1.3)$$

por lo que

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g. \quad (1.4)$$

Como se demuestra en un curso de cálculo diferencial, la solución general de (1.4) es

$$y = \frac{g}{2}t^2 + at + b,$$

donde a y b son constantes, que representan respectivamente a la velocidad y la distancia en el momento $t = 0$.

Como ilustran estos ejemplos, podemos deducir que la solución general de una ecuación diferencial de orden n , implica n constantes arbitrarias, como son c en (1.2) o a y b en (1.4).

Como se dijo antes, se dispone de muchos métodos para resolver distintos tipos de ecuaciones diferenciales, pero no hay un método único que resuelva todas, y en algunos casos sólo pueden hallarse soluciones aproximadas mediante técnicas numéricas.

Las ecuaciones diferenciales parciales implican derivadas parciales de una función de dos o más variables. Consideremos el caso en el cual la función u depende solamente de dos variables, x y t .

Una ecuación diferencial parcial (EDP) para una función $u(x, t)$ es una ecuación diferencial que implica uno o varias de las derivadas parciales de u en lo que concierne a x y t . Por lo general denotaremos las derivadas parciales de u por

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \quad \dots$$

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) son un instrumento matemático fundamental para modelar los fenómenos físicos que cambian con el tiempo, el espacio, la velocidad, etc. El orden de una ecuación diferencial parcial es el orden de la derivada parcial más alta que aparece en la ecuación, la primera y segunda ecuación de orden son muy comunes en uso ya que la primera y segunda derivada tienen fundamentalmente significados físicos.

Las ecuaciones diferenciales parciales también se presenta de dos formas: lineales y no-lineales.

En la ecuación lineal solo la variable dependiente u y todas sus derivadas aparecen de un mismo modo lineal (por ejemplo no se multiplican entre funciones ni tampoco sus potencias), más precisamente, una ecuación lineal de segundo orden en dos variables, es una ecuación de la forma

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G,$$

donde A, B, C, D, E, F y G pueden ser constantes o funciones de x y y , por ejemplo

$$\begin{aligned} u_{tt} &= e^{-t}u_{xx} + \sin t && (\text{lineal}), \\ uu_{xx} + u_t &= 0 && (\text{no-lineal}), \\ u_{xx} + yu_{yy} &= 0 && (\text{lineal}), \\ xu_x + yu_y + u^2 &= 0 && (\text{no-lineal}). \end{aligned}$$

Una ecuación diferencial se llama homogénea si el lado derecho de la función $G(x, y)$ es idénticamente cero para todos x y y . Si $G(x, y)$ no es idénticamente cero entonces la ecuación se llama no homogénea.

Una ecuación diferencial parcial para $u(x, t)$ es llamada de primer orden lineal si puede ser escrita de la forma

$$a_1u_t + a_2u_x + bu = f, \quad (1.5)$$

donde a_1 y a_2 no son cero simultáneamente y a_1, a_2, b y f son constantes o funciones de x y t (pero no dependen de u), se llama a las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden que no se pueden escribir de esta forma no lineales. De forma equivalente una ecuación diferencial parcial de segundo orden para $u(x, t)$ es llamada de segundo orden lineal si puede ser escrita de la forma

$$a_{11}u_{tt} + a_{12}u_{tx} + a_{22}u_{xx} + b_1u_t + b_2u_x + cu = f, \quad (1.6)$$

donde a_{11}, a_{12} y a_{22} no son todos ceros y a_{ij}, b_i, c y f son constantes o funciones de x y t , si las ecuaciones de segundo orden no pueden ser puestas de esta forma, entonces son llamadas no-lineales.

Las ecuaciones lineales (1.5) y (1.6) son llamadas homogéneas si el término f es idénticamente 0; de otra manera serán no homogéneas. Las ecuaciones no lineales generalmente no son clasificadas como homogéneas o no homogéneas.

Ejemplo 1.1. *La ecuación de Burgers*

$$u_t + uu_x = Du_{xx} \quad (D > 0 \text{ constante}) \quad (1.7)$$

es no lineal porque el término uu_x no es de la forma au_x donde a es independiente de u .

Ejemplo 1.2. *La ecuación de Burgers linealizada*

$$u_t + cu_x = Du_{xx} \quad (c, D \text{ constante}) \quad (1.8)$$

es lineal y homogénea ya que se puede reescribir de la forma (1.6) como

$$u_t + cu_x - Du_{xx} = 0.$$

Los siguientes ejemplos de ecuaciones diferenciales parciales describen principios científicos fundamentales, muchas de estas ecuaciones pueden ser entendidas desde un punto de vista intuitivo pensando en los significados físicos y geométricos de las derivadas parciales.

En una posición x fija en el medio donde el valor de $u_t(x, t)$ da una proporción en la cual u cambia con respecto al tiempo. Un valor positivo de $u_t(x, t)$ indica que en la posición x , u aumenta y el tiempo se incrementa. Un valor negativo de $u_t(x, t)$ indica que u disminuye en la posición de x y el tiempo decrece, en una aplicación donde $u(x, t)$ se denota como un desplazamiento en la posición x , $u_t(x, t)$ y $u_{tt}(x, t)$ tienen una interpretación particular de velocidad y aceleración.

En un tiempo t fijo, si los valores de $u_t(x, t)$ y $u_{tt}(x, t)$ proporcionan la información sobre la inclinación y la concavidad del gráfico $u(x, t)$ como una función de x . En particular estas aplicaciones representan cantidades como el flujo y la tensión.

Ejemplo 1.3. *Suponga que un contaminante es derramado en una corriente rápida, en una posición x del río abajo del derrame, $u(x, t)$ denota la concentración del contaminante en el agua pasado un tiempo t . Antes de la llegada del agua contaminada, el valor de $u(x, t)$ en la posición x es cero. Como el contaminante llevado por la corriente pasa por la posición x , el valor de $u(x, t)$ aumenta la corriente de advección y es modelada por la famosa ecuación de advección*

$$u_t + cu_x = 0. \quad (1.9)$$

La ecuación (1.9) es también llamada la ecuación de convección.

Por ejemplo, la siguiente función satisface la ecuación de advección

$$u(x, t) = f(x - ct),$$

donde f es continua y diferenciable, en efecto,

$$u_x = f'(x - ct) \quad u_t = -cf'(x - ct).$$

De donde se puede ver claramente que $u(x, t) = f(x - ct)$ satisface la ecuación (1.9).

Ejemplo 1.4. *Suponga que $u(x, t)$ representa la temperatura u en la posición x a lo largo de una barra metálica en un tiempo t , una foto del perfil de la temperatura de la barra en un tiempo t es representada por el gráfico de $u(x, t)$ como una función de x , si la distribución de temperaturas de la barra es gobernada por la ecuación de calor:*

$$u_t = Du_{xx} \quad (D > 0 \text{ constante}) \quad (1.10)$$

entonces la proporción en la cual los cambios de temperatura en la posición x son proporcionales a la concavidad del perfil de la temperatura en x , ya que D es positiva, por lo cuál la proporción de cambio $u_t(x, t)$ en la posición x y la concavidad $u_{xx}(x, t)$ tendrá el mismo signo, en particular las partes del perfil de la temperatura $u(x, t)$ es cóncava hacia arriba si $u_{xx}(x, t) > 0$ correspondiendo a los puntos sobre la barra cuya temperatura aumenta cuando $u_t(x, t) > 0$. Las partes del perfil de temperatura que son cóncavos hacia abajo corresponden a los puntos sobre la barra cuya temperatura disminuye; cuando más grande (pequeño) sea la magnitud de $u_{xx}(x, t) > 0$ mayor sera la proporción de aumento (disminución) de u sobre la posición x .

La expansión de calor por un medio también puede ser un proceso difuso y entonces también es llamada la ecuación de calor a la ecuación de difusión.

Otro ejemplo es la ecuación de difusión no-lineal

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \theta(\theta - a)(\theta - 1), \quad 0 < a < 1,$$

una de cuyas soluciones es

$$\theta = \left[1 + \exp \left(\frac{x - ct}{\sqrt{2}} \right)^{-1} \right], \quad c = \frac{1 - 2a}{\sqrt{2}}.$$

Para interpretar esta solución, hacemos $\theta(x, t) = X(\tau)$ y definimos $V(\theta)$ a través de la igualdad $\theta(\theta - a)(\theta - 1) \equiv -\partial V/\partial \mu$. La ecuación de difusión queda

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \tau^2} = -c \frac{\partial X}{\partial \tau} - \frac{\partial V}{\partial \mu}$$

que representa una partícula de unidad de masa moviéndose bajo la acción del potencial V con coeficiente de amortiguación c ; X representa el desplazamiento y τ el tiempo correspondiente. Eligiendo convenientemente a c , una partícula quieta (velocidad $= \partial X/\partial \tau = 0$) en el máximo de V (en $X = 1$) caerá, luego pasará por el valle (en $X = a$) y parará exactamente en la colina de menor altura (en $X = 0$).

La ecuación Burgers linealizada (1.8) es una ecuación que ilustra una combinación del transporte y procesos de difusión de los dos ejemplos anteriores. La ecuación de Burgers (1.7) es una ecuación fundamental de la mecánica de fluidos que combina procesos diferentes de advección y de difusión.

Cuando $D = 0$, la ecuación de Burgers se transforma en la ecuación de Burgers de invisibilidad

$$u_t + uu_x = 0, \quad (1.11)$$

la cual proporciona un ejemplo clásico de las ondas de choque.

Ejemplo 1.5. *El movimiento de una cuerda de guitarra arrancada es casi perpendicular a la longitud de cuerda. La ecuación*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (1.12)$$

*es usada para modelar la cantidad de desplazamiento $u(x, t)$ en la posición x a lo largo de la cuerda en un tiempo t , llamando a esta ecuación **la ecuación de onda**, no se quiere decir que esta sea la única sugerencia para una ecuación que describe el comportamiento de una onda.*

Podemos demostrar que la siguiente función satisface la ecuación de onda (1.12)

$$u(x, t) = e^{-(x-ct)^2}.$$

En efecto, derivando una vez con respecto a cada una de las variables, tenemos

$$u_x = -2(x - ct)e^{-(x-ct)^2}, \quad u_t = 2c(x - ct)e^{-(x-ct)^2},$$

volviendo a derivar se obtiene

$$u_{xx} = -2e^{-(x-ct)^2} - 4(x - ct)^2e^{-(x-ct)^2},$$

$$u_{tt} = c^2 \left[-2e^{-(x-ct)^2} - 4(x - ct)^2e^{-(x-ct)^2} \right].$$

Al reemplazar en la ecuación (1.12) vemos que efectivamente la satisface.

Capítulo 2

Ondas

Las perturbaciones que se extienden a través de un medio son un fenómeno importante en diversos campos como la acústica, la biología, la química, la mecánica, el electromagnetismo y la mecánica de fluidos. El termino “onda” es muy familiar a cada uno en una forma o en otra, por ejemplo las ondas del océano, las ondas sonoras, o las olas u ondas de los estadios. El amplio empleo del término onda hace difícil de producir una definición exacta. En vez de intentar definirla matemáticamente, vamos a intentar identificar y describir los fenómenos de onda. En la observación de fenómenos de onda siempre se puede identificar una señal de una perturbación que es transferida de una parte del medio al otro, somos capaces de observar la posición de la perturbación que se mueve a una velocidad reconocible, por ejemplo: el agua, el aire o una multitud de individuos (carros, bacterias, personas, etc.). El medio de términos señalado y transferido es usado ampliamente y de manera que nos permite una amplia gama de interpretaciones que constituyen una onda.

Un ejemplo que comúnmente suele ilustrar fenómenos de onda es los anillos que irradian de un punto sobre la superficie del agua, semejantes a aquellos formados por los lanzamientos de una piedra en un charco de agua. La piedra crea una perturbación inicial en una pequeña región de la superficie del charco. Las crestas y el abrevadero que se forman como la perturbación son transferidas horizontalmente por esta capa de agua, creando los anillos que parecen irradiar el exterior de la perturbación inicial.

Una señal identificable de cada anillo en su cresta, es un desplazamiento del extremo vertical del agua. Esta señal que se mueve del extremo del centro con una velocidad reconocible de propagación, va identificando una onda. Se puede observar que mientras el movimiento de una onda se mueve horizontal a través del charco que su propia señal se va formando por el desplazamiento vertical del agua.

Otros fenómenos que también son clasificados como una onda son el sostenimiento del tráfico en una luz de parada (semáforo en rojo), en este caso el medio es el tráfico de automóviles y la perturbación es el tráfico parado. Una señal reconocible de estas perturbaciones es el aumento abrupto de la densidad del tráfico. Note que mientras que cada carro se mueve hacia la luz de parada, la señal se propaga lejos de ella.

2.1. Fenómenos de ondas

Las ondas son un fenómeno natural común e importante en la física como por ejemplo:

1. Las ondas que provoca en el agua una piedra al ser arrojada en un lago en calma.
2. El sonido que emite una cuerda tensa al vibrar en el aire.
3. Las ondas de presión.
4. Las ondas electromagnéticas.

Todos estos pueden ser descritos en conjunto por una teoría física la cual ha sido investigada por siglos, de hecho Isaac Newton utilizó sus conocimientos de las propiedades ondulatorias para reforzar su creencia de que la luz no podía ser una onda, pero tenía un error el cual era originado por su incapacidad de medir correctamente los fenómenos de interacción de la luz con la materia.

De todos los fenómenos citados, el más fácil de observar, debido a la lentitud del movimiento, son las ondas de superficie que provoca un objeto al ser arrojado a una

piscina o a un charco, observaremos que dichas ondas se forman en la superficie del agua y a la vez se puede ver una serie de círculos que se alejan del punto donde cae el objeto. En cada uno de estos círculos todos los puntos estarán en un estado de movimiento y se define **frente de onda** (más adelante daremos una descripción mucho más amplia de los frentes de onda). Si la densidad del medio es uniforme, la dirección de propagación de las ondas será perpendicular al frente de onda. Cuando las perturbaciones viajan en una sola dirección, tendremos una onda plana, donde cada plano representa un frente de onda espaciado, las condiciones son las mismas en todas partes del plano, cualquiera que sea la dirección de propagación.

En el caso de una cuerda tensa, entre dos soportes rígidos, si esta es suficientemente larga y se le golpea perpendicular, puede mostrarse que cada punto está animado de un rápido movimiento de vaivén, normal a la cuerda y a la vez esta se desplaza con mayor rapidez que la onda superficial.

Fenómenos de Onda	Medios	Signo
Las ondas en un estanque	La capa de la superficie de agua	La altura de superficie de agua extrema
Las ondas de condensación	La barra elástica	El desplazamiento longitudinal máximo
Las ondas del sonido	Gas o líquido	Presión extrema
Las ondas de choque	Gas	El cambio abrupto en la presión
Las ondas de tráfico	El tráfico del automóvil en un camino	El cambio abrupto en la densidad de tráfico

Cuadro 2.1: Fenómenos de ondas comunes.

Dentro de los diferentes tipos de ondas que aparecen en la naturaleza se clasifican en ondas mecánicas aquellas que se propagan a través de un medio deformable o elástico, a diferencia de las ondas electromagnéticas no se pueden propagar en el vacío.

Para los ejemplos citados anteriormente parece indispensable el movimiento de un objeto material cualquiera en un medio (agua, metal, aire, gente) para hacer posible el movimiento de una onda; esto no es siempre necesario, por ejemplo, las ondas luminosas se desplazan en el vacío, ya que son producidas por campos eléctricos y magnéticos que constituyen la luz.

Si el movimiento de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación de la onda, diremos que se trata de una **onda transversal**, (por ejemplo la onda de cuerda). Por otro lado si el movimiento de las partículas de una onda es en el mismo sentido de la dirección de propagación, estaremos hablando de una **onda longitudinal**, (por ejemplo las ondas de sonido en un gas).

Algunas ondas no son puramente longitudinales, ni puramente transversales; las ondas longitudinales (como las del sonido) se propagan en medios con resistencia a la compresión (gases, líquidos y sólidos) y las transversales necesitan medios con resistencia de flexión como la superficie de un líquido y en general medios rígidos (los gases y líquidos no se pueden transmitir por medio de las ondas transversales).

Si producimos un movimiento vertical sobre la cuerda estamos generando **un pulso** el cual viajará por la cuerda, al ser producido las partículas que se encuentran en reposo solo se moverán cuando el pulso llega hasta ellas, logrando así que ellas se muevan por un instante y luego vuelven a su estado original.

En el cuadro 2.1 se hace un resumen de dichos fenómenos.

2.2. Ondas en una dimensión

2.2.1. Ecuación del movimiento

Sería interesante describir por medio de una ecuación matemática, el movimiento en el cual se propaga una onda. Tomaremos algunos ejemplos para describirla.

Por ejemplo, el movimiento de un elemento de una barra metálica delgada y larga, para ello utilizamos un sistema de coordenadas, el cual es ortogonal al plano x , y y z , y el tiempo t , ahora suponemos que la barra tiene su origen en $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, y

que se extiende a lo largo del semieje positivo z .

Si en el momento $t = 0$ se golpea en el origen a la barra con un martillo en dirección x , se provoca en la barra una onda que se desplaza en el sentido de los valores de z crecientes, esta perturbación es transversal respecto al movimiento de onda, siguiendo la dirección del eje x , mientras que sus coordenadas y y z permanecen constantes.

La coordenada x de cualquier punto de la barra en $z = 0$ satisface la ecuación $x = f(t)$, para $z = 0$ donde $f(t)$ puede ser cualquier función, esta función va a variar de acuerdo a la intensidad del golpe.

El instante t_1 está relacionado con la velocidad de propagación (ν) y la coordenada z_1 con la partícula, por medio de la formula

$$\nu = \frac{z_1}{t_1} = \frac{\delta_z}{\delta_t}.$$

La coordenada x del elemento u es un punto z_1 cualquiera tendrá un movimiento

$$x(z_1) = f(t - t_1).$$

Sabiendo la definición de velocidad de propagación se puede llegar a la ecuación general del movimiento para cualquier punto z de la barra y cualquier tiempo t , esto es

$$x(z, t) = f\left(t - \frac{z}{\nu}\right).$$

Si el golpe inicial hubiera sido en el eje y se tendría análogamente

$$y(z, t) = g\left(t - \frac{z}{\nu}\right).$$

Así mismo, puede excitarse la barra longitudinalmente en $t = 0$ con un golpe en la dirección del eje z , obteniendo que

$$z(z, t) = h\left(t - \frac{z}{\nu}\right),$$

donde g y h son dos funciones apropiadas.

Ecuaciones de este tipo sirven para describir aproximadamente el movimiento de ondas por ejemplo las sonoras, los campos eléctricos y magnéticos. En cambio para las ondas acuáticas de superficie hay que tener en cuenta el amortiguamiento, lo mismo ocurre con las ondas cilíndricas y esféricas (en este caso los frentes de onda, también espaciados una longitud de onda, son superficies esféricas en tanto que los rayos aparecen en dirección radial.).

2.2.2. Movimientos periódicos

Se llaman fenómenos periódicos a los que después de un cierto intervalo de tiempo, se repiten exactamente en posición, velocidad y dirección. Al mínimo intervalo de tiempo que transcurre hasta que se repiten las condiciones anteriores, se le llama período, por ejemplo las funciones: $y = A \sin \omega t$, $y = \sin \omega t$ e $y = 2 \cos \sqrt{10}x + 3 \sin \sqrt{10}x$ las cuales tienen movimientos periódicos.

Algunos elementos que caracterizan a las ondas periódicas son:

- ✓ **Longitud de onda** (λ): es la distancia entre dos crestas, dos valles o dos nudos no consecutivos, también podemos decir que es la distancia que recorre el pulso mientras un punto realiza una oscilación completa

$$\lambda = vt.$$

- ✓ **Amplitud** (A): magnitud del máximo desplazamiento
- ✓ **Periodo** (T): es el intervalo de tiempo necesario para formar una onda completa

$$T = \frac{1}{f}.$$

- ✓ **Frecuencia** (f): es el número de ciclos que se forman por unidad de tiempo

$$f = \frac{1}{T}.$$

- ✓ **Frecuencia angular** (ω): análogo en el movimiento ondulatorio a la frecuencia angular del movimiento armónico simple.
- ✓ **Rapidez de onda** (v): magnitud de la velocidad de propagación de la onda (depende únicamente de las características del medio).

Si se consideran que las ondas se propagan con rapidez podemos determinar una expresión en términos de la longitud de onda y el período. El tiempo que emplea un punto en cualquier coordenada x para completar un ciclo es el período T , durante dicho tiempo la onda recorre una distancia vT , correspondiente a una longitud de onda, así que:

$$\lambda = vT, \quad v = \frac{\lambda}{T}, \quad v = \lambda f.$$

2.2.3. Ondas armónicas o senosoidales

Nos referiremos a ondas cuyos pulsos pueden ser descritos por las funciones seno y coseno, llamando a estas ondas armónicas las cuales se mueven con un movimiento armónico simple, es decir las partículas del medio en que se propagan estas ondas (en este caso las de la cuerda) vibran perpendicularmente a la posición inicial de la cuerda, separándose de la posición inicial subiendo y bajando.

Sabiendo de antemano que cualquier onda periódica puede representarse por una combinación de ondas senosoidales.

La descripción que se ha hecho es válida para formas de ondas arbitrarias y se cumple tanto para ondas longitudinales como transversales.

Si para el tiempo t tenemos un tren de onda (cuando $x = 0$) a lo largo de una cuerda de la forma

$$y(0, t) = A \sen \omega t, \quad \text{o lo que es igual} \quad y(0, t) = A \sen 2\pi f t,$$

donde A representa la amplitud, ω representa la frecuencia angular; y la onda se propaga en la dirección positiva del eje x con velocidad de fase v , entonces la ecuación de la onda será

$$y(x, t) = A \sen \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad \text{o equivalentemente} \quad y(x, t) = A \sen 2\pi f \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

Se puede encontrar otra expresión para la onda; esto es

$$y(x, t) = A \sen 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

y de acuerdo con esta última forma se puede ver que x puede tomar el valor de $x, x + \lambda, x + 2\lambda$ en cualquier instante, también ocurre con el tiempo el cual puede tomar cualquier valor de acuerdo a su posición, ya sea $t, t + T, t + 2T$, etc.

2.2.4. Propagación de las ondas

Para poder describir este movimiento tomaremos el ejemplo de una onda transversal que viaja en una cuerda ideal que se mantiene horizontal, en el que la perturbación ya sea de pulso o un frente de onda van a conservar su forma mientras se propagan, esto

implica que la pérdida de energía debe ser despreciada, estas perturbaciones van a viajar a lo largo de x mientras se mantiene en el plano xy .

La coordenada y representa el desplazamiento vertical de un punto específico de la cuerda. Este valor depende tanto de la posición como del tiempo, podemos indicar esta dependencia de las variables como $y(x, t)$, en general va a tomar la forma de la onda cuando $t = 0$ y se representa como

$$y(x, 0) = f(x).$$

Después de un instante t , la forma de la onda se deberá describir por la misma función f , ya que consideramos que la forma de la onda no cambia al viajar. La relación entre las abscisas de los dos sistemas de referencia es $x' = x - vt$. Entonces para el tiempo t , la onda se describe por

$$y(x, t) = f(x'); \quad y(x, t) = f(x - vt);$$

donde la cantidad $x - vt$ se denomina la fase de onda.

Evidentemente para describir por completo la onda, habrá que especificar la función f ; si la onda se mueve en dirección $-x$, se reemplazará $-v$, así se tendrá

$$y(x, t) = f(x + vt).$$

La expresión $x - vt = c$, donde c es una constante que caracteriza la forma del movimiento de la fase de onda ya que al derivar respecto al tiempo obtenemos

$$\frac{dx}{dt} - v = 0; \quad \text{esto es} \quad \frac{dx}{dt} = v.$$

La velocidad dx/dt , describe al movimiento de la fase de la onda y se llama velocidad de fase. El signo de la velocidad es positivo, lo que indica que la onda se propaga hacia la derecha como se indica en la ecuación:

$$y(x, t) = f(x - vt).$$

2.2.5. Superposición de ondas

Dos objetos materiales no pueden coexistir en el mismo lugar del espacio, esto es dos libros o dos lápices no pueden ocupar el mismo lugar en el espacio simultáneamente.

Sin embargo dos o más ondas si pueden existir en el mismo espacio y en el mismo tiempo. Por ejemplo, al lanzar un par de piedras al agua, las ondas generadas se superponen y forman un patron llamado patrón de interferencia. Los efectos de las ondas pueden aumentar, disminuir o neutralizarse en el patrón de interferencia.

El principio de superposición cuando hay varias ondas se combinan en un punto, el desplazamiento de cualquier partícula en un instante dado es la sonda vectorial de los desplazamientos que produciría cada onda individual actuando por si sola.

El principio de superposición es válido para las ondas mecánicas cuando las fuerzas de restitución varía linealmente con el desplazamiento, esto es: la fuerza ejercida por el material es de la forma

$$F = Bx,$$

donde B es una constante que depende de las características del material.

2.2.6. Ondas estacionarias

Este caso se puede observar con el ejemplo de atar una cuerda a una pared y agitando el extremo libre de arriba hacia abajo se va a producir una onda en la cuerda. La onda se refleja y se regresa desplazándose por la cuerda. Si se agita la cuerda de otra forma se puede lograr que la onda incidente y la onda reflejada formen una onda estacionaria, en la que ciertos puntos de la cuerda permanecen inmóviles.

Este fenómeno se debe al efecto de superposición de dos ondas de igual amplitud y frecuencia, que se mueven en una misma cuerda en direcciones opuestas.

2.3. Representación de ondas

A continuación, el objetivo sera ilustrar el empleo de las funciones de dos variables como un camino para representar y visualizar las ondas que se mueven en un medio unidimensional. Nuestro estudio será de ondas que se propagan en medios unidimensionales como cuerdas, tubos delgados y largos, y caminos de una sola ruta. El medio mismo podría mover o deformar en dos o tres dimensiones dichas ondas; sin embar-

go, la posición de la señal de una onda puede ser descrita por una sola coordenada a lo largo de una línea.

Las ondas unidimensionales son representadas matemáticamente por las funciones de dos variables $u(x, t)$, donde la u representa el valor de alguna medida cuantitativa hecha en un medio de cada posición x sobre un tiempo t . Cuando el tiempo t_0 es fijo se ve la función $u(x, t_0)$ como una función de x que puede indicar la existencia de una perturbación en el medio. Las señales que más fácilmente identifican la presencia y la posición de una perturbación son los puntos extremos o cambios abruptos del valor de $u(x, a)$. Examinando $u(x, t_k)$ en tiempos posteriores $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ indica como la señal se mueve por el medio.

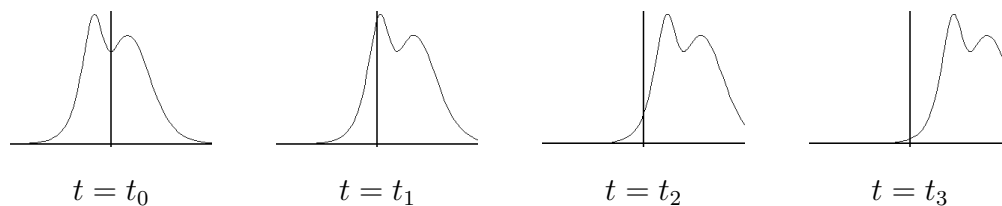


Figura 2.1: Representación en diferentes tiempos de una onda.

En los cuales, los gráficos de la Figura 2.1 pueden ser usados para dar una representación visual de una función de dos variables. Estas visualizaciones a menudo hacen más fácil identificar la posición y el movimiento de una perturbación dentro de un medio.

En cualquier tiempo t_0 fijo de una función $u(x, t_0)$ de una variable x cuya gráfica está en el plano xu es un perfil o frente de u a lo largo del medio en el tiempo t_0 , para trazar la gráfica de $u(x, t_k)$ en el plano xu sobre una secuencia de tiempos $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ uno puede construir una secuencia de trazos, siguiendo estos trazos paso por paso o jugando con ellos velozmente con la ayuda de un computador creamos el efecto de movimiento (ver Figura 2.1), la inspección de varios trazos de animación inmediatamente ayuda a ver la historia de la perturbación con el tiempo, colocando los trazos de animación en tercera dimensión con un sistema de ejes de coordenadas x, t, u , uno puede ver varios trazos en un diagrama cortado (o de rebanadas) (ver Figura 2.2).

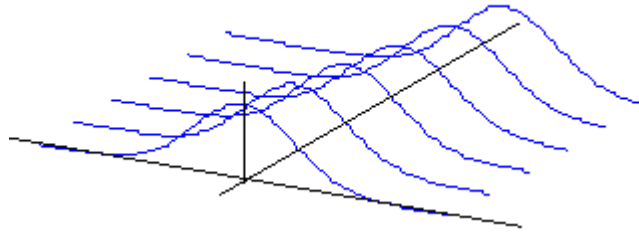


Figura 2.2: Diagrama cortado o de rebanadas de una onda.

2.4. Ondas viajeras

Hemos visto que la representación matemática fundamental de una onda está dada por la ecuación

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad (2.1)$$

donde f es una función de una variable y c una constante no nula. La animación de tal función comienza en el gráfico del perfil inicial de $u(x, 0) = f(x)$, como se ve en la Figura 2.1. Si c es positiva entonces el perfil inicial de $u(x, t) = f(x - ct)$ en un tiempo posterior t , el cual es una traslación del perfil inicial por una cantidad ct en la dirección positiva de las x . Tal función se mueve con una velocidad constante c . Asimismo si $c < 0$ se va a mover en la dirección negativa de las x con velocidad $|c|$, en otro caso el perfil de cada tiempo t no se deforma y deja un rasgo reconocible de una onda y esta se traslada a lo largo del eje x .

Después consideraremos el tipo más notable de soluciones asociadas a ecuaciones de evolución no lineales, a saber, las ondas viajeras.

Una solución tipo onda viajera de una ecuación diferencial parcial de evolución no-lineal del estilo

$$u_t = N(u) \quad \text{o} \quad u_{tt} = N_1(u)$$

donde $u = u(x, t) \in \mathbb{R}$ y $x(t) \in Y$ para todo t , Y es un espacio apropiado donde está definida $x(t)$. Aquí N , N_1 se pueden considerar como operadores no-lineales, son independientes de t pero pueden implicar a x o derivadas con respecto a x .

2.5. Frentes de onda y pulsos

Un cambio repentino del tiempo ocurre cuando un frente frío pasa por una región, la temperatura en los puntos adelante del frente aparecen estar en grados relativamente constantes k_1 , mientras que detrás de la dirección la temperatura sea caído (a veces por más de $30^\circ F$) a una nueva temperatura k_2 . Sobre un mapa meteorológico repentinamente cae la temperatura en un rasgo reconocible que indica la posición y el movimiento de esta dirección entonces un frente frío es un ejemplo de una onda. Una onda viajera representada por $u(x, t)$ es un frente de onda para cualquier t fija,

$$u(x, t) \rightarrow k_1 \quad \text{cuando } x \rightarrow -\infty$$

$$u(x, t) \rightarrow k_2 \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty$$

para algunas constantes k_1 y k_2 no necesariamente las mismas, en el caso particular que la medida de u es aproximadamente la misma a ambos lados de la dirección ($k_1 = k_2$), entonces se llama un pulso al frente de onda. Una dirección de pulso temporal cambia el valor de u en la posición x antes de que esto vuelva a su valor inicial.

Ejemplo 2.1. La onda viajera $u(x, t) = e^{-(x-5t)^2}$ es un pulso ya que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} e^{-(x-5t)^2} = 0.$$

mientras que la onda viajera $u(x, t) = \cos(2x + 6t)$ no es un frente de onda o un pulso ya que el

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t)$$

no existe.

2.6. Trenes de onda y dispersión

Una onda viajera que puede ser escrita de la forma

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \tag{2.2}$$

o

$$u(x, t) = A \cos(kx + \omega t)$$

donde $A \neq 0$, $k > 0$ y $\omega > 0$ son constantes, son llamadas *Tren de Onda*. Reescribiendo a $u(x, t)$ como

$$u(x, t) = A \cos \left[k \left(x - \frac{\omega}{k} t \right) \right],$$

Puede verse que la onda viajera tiene sus perfiles de la forma

$$f(z) = A \cos(kz)$$

moviéndose con una velocidad de $c = \frac{\omega}{k}$. Más generalmente los trenes de onda son funciones que pueden ser representadas como

$$u(x, t) = f(kx - \omega t)$$

donde $f(z)$ es una función periódica.

En un tren de onda de la función (2.2) la variable k es llamada *el número de onda* y representa el número de ciclos de esta onda periódica que aparecen en una ventana de longitud 2π sobre el eje x , la variable ω es llamado la *frecuencia circular* y representa el número de ciclos de la onda que pasan por cualquier punto fijo x sobre el eje x durante un intervalo de tiempo de 2π .

Una ecuación diferencial parcial puede tener soluciones de trenes de onda, pero no necesariamente para cada número de onda k o una frecuencia ω ; para encontrar el número y frecuencias que son permitidos uno puede sustituir la forma de un tren de onda como la función (2.2) dentro de la ecuación diferencial y reducirla a una relación entre k y ω , llamada una relación de dispersión, en esta relación se indica cuales valores de k y ω pueden ser seleccionados por $u(x, t)$ para ser una solución de tren de onda.

Ejemplo 2.2. Aquí buscaremos las soluciones de tren de onda de la forma (2.2) para la ecuación de advección

$$u_t + au_x = 0.$$

Calculando las derivadas parciales u_x y u_t , u será una solución de la ecuación de advección si

$$\omega A \sin(kx - \omega t) + a[-kA \sin(kx - \omega t)] = 0$$

o

$$A(\omega - ak)[\sin(kx - \omega t)] = 0$$

la relación de dispersión donde $\omega = ak$, así para cualquier número de onda k ,

$$u(x, t) = \cos[k(x - at)]$$

es una solución apropiada de tipo tren de onda que viaja con velocidad $c = a$.

Ejemplo 2.3. *La ecuación de Klein-Gordon:*

$$u_{tt} = au_{xx} - bu$$

con (a, b) constantes positivas) modela la vibración transversal de una cuerda con una fuerza restauradora lineal.

Después de encontrar las segundas derivadas parciales de la función de tren de onda (2.2), tenemos que es una solución de la ecuación de Klein-Gordon si:

$$-\omega^2 A \cos(kx - \omega t) = a[-k^2 A \cos(kx - \omega t)] - bA \cos(kx - \omega t)$$

o equivalentemente, si

$$A(\omega^2 - ak^2 - b) \cos(kx - \omega t) = 0.$$

Así (2.2) es una solución de la ecuación de Klein-Gordon si k y ω satisfacen la relación de dispersión $\omega^2 = ak^2 + b$, cuando $(\omega = \sqrt{ak^2 + b})$, la solución del tren de onda toma la forma de onda viajera

$$u(x, t) = A \cos(kx - \sqrt{ak^2 + b}t) = A \cos \left[k \left(x - \sqrt{\frac{ak^2 + b}{k^2}} t \right) \right]$$

con velocidad

$$c = \sqrt{\frac{ak^2 + b}{k^2}} = \sqrt{a + \frac{b}{k^2}} = \sqrt{a + \frac{ab}{\omega^2 - b}}. \quad (2.3)$$

Hay una diferencia fundamental entre los dos ejemplos anteriores. En la ecuación de advección, todas las soluciones de tren de onda viajan con la misma velocidad $c = a$. En el ejemplo de Klein-Gordon, la ecuación (2.3) muestra que los trenes de onda con frecuencia ω demasiado alta pueden viajar con una velocidad c baja. Se dice que una ecuación diferencial parcial que tiene soluciones de tren de onda es de dispersión, si los trenes de ondas de diferentes frecuencias ω se propagan a través del medio con diferentes velocidades. La ecuación de Klein-Gordon es de dispersión mientras que la ecuación de advección no lo es.

Para encontrar soluciones de tipo onda viajera se puede comenzar generalmente, si se asume la ecuación de la forma (2.1) y después determinando cuál función ϕ y constante c dan una solución, por ejemplo de la ecuación diferencial

$$-c\phi'(\xi) = N(\phi)(\xi),$$

donde “ $\phi' = \frac{d}{d\xi}$ ” y $\xi = x - ct$ es la variable característica. En general ϕ será una función que depende de c .

La determinación de ϕ y c depende básicamente de las condiciones límites dadas sobre ϕ . Para que podemos dividir la familia de soluciones de onda viajera asociadas a una ecuación diferencial parcial está dada en tres formas básicas:

1. **Soluciones de tipo ondas solitarias:** una solución es de tipo onda solitaria si es una onda viajera de la forma $u(x, t) = \phi(x - ct)$ para alguna función ϕ suave que decae rápidamente a cero en infinito. Esto quiere decir, si el perfil $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las condiciones en

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \phi^{(n)}(\xi) = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Cuando una solución es de este tipo es llamada un solitón. En la Figura 2.3 se muestra una onda solitaria o solitón.

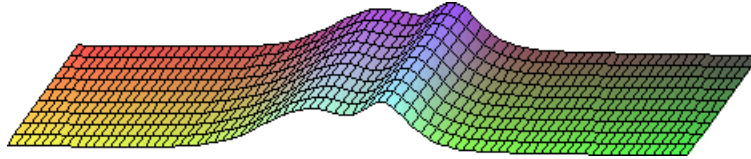


Figura 2.3: Una onda solitaria.

2. **Solución de tipo onda viajera periódica:** este nombre es dado a una onda viajera cuando la función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que describe cada perfil es periódica con un período L , y tal que existen las derivadas $\phi^{(n)}(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, con condiciones sobre el límite del periodo $[0, L]$ dado por

$$\phi^{(n)}(0) = \phi^{(n)}(L),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. **Solución de tipo onda viajera de quiebre:** este nombre es dado a una solución de onda viajera cuando $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las condiciones de frontera

$$m = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \phi(\xi), \quad M = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \phi(\xi),$$

donde $m > M$ o $m < M$.

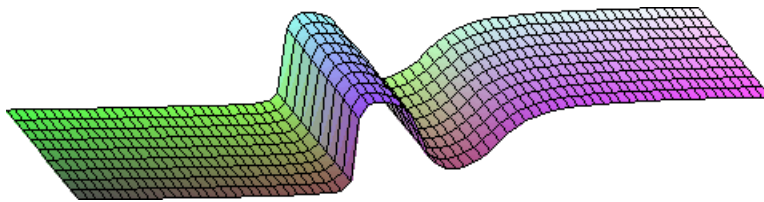


Figura 2.4: Una onda viajera de quiebre.

La función ϕ a veces puede satisfacer las condiciones asintóticas adicionales,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \phi^{(j)}(\xi) = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

En la Figura 2.4 se muestra una onda viajera de quiebre.

Ejemplo 2.4. Podemos verificar fácilmente que

$$u(x, t) = e^{-(x-5t)^2}$$

satisface las condiciones para ser una onda viajera solitaria, su perfil inicial es $u(x, 0) = e^{-x^2}$, y se mueve en la dirección positiva de las x con una velocidad de 5.

Ejemplo 2.5. La función

$$u(x, t) = \cos(2x + 6t)$$

representa una onda viajera periódica, podemos escribirla como $u(x, t) = \cos[2(x + 3t)]$; el perfil inicial $u(x, 0) = \cos(2x)$ esta siendo desplazada en la dirección negativa x con una velocidad de 3.

Ejemplo 2.6. A continuación encontraremos las soluciones de tipo onda viajera de la ecuación de onda

$$u_{tt} = au_{xx}, \quad a > 0 \quad \text{constante.}$$

Asumimos que $u(x, t) = f(x - ct)$, aplicamos la regla de la cadena y obtenemos que

$$u_t(x, t) = [f'(x - ct)](x - ct)_t = -cf'(x - ct),$$

$$u_x(x, t) = [f'(x - ct)](x - ct)_x = f'(x - ct).$$

Aplicando la regla de la cadena por segunda vez, tenemos

$$u_{tt}(x, t) = [-cf''(x - ct)](x - ct)_t = c^2 f''(x - ct)$$

$$u_{xx}(x, t) = [f''(x - ct)](x - ct)_x = f''(x - ct)$$

y sustituyendo dentro de la ecuación de onda implicaría que:

$$c^2 f''(x - ct) = a f''(x - ct)$$

Llamando a $z = x - ct$ y reorganizando la demostración tenemos que encontrar a c y $f(z)$ de modo tal que

$$(c^2 - a)f''(z) = 0$$

para todo z .

Una posibilidad es que $c^2 = a$, en este caso f puede ser alguna función dos veces diferenciable y no constante, y $c = \pm\sqrt{a}$; las dos funciones son

$$u(x, t) = f(x - \sqrt{a}t), \quad \text{y} \quad u(x, t) = f(x + \sqrt{a}t),$$

estas son soluciones de tipo onda viajera de la ecuación de onda, ejemplos especiales incluyen $u(x, t) = \sin(x - \sqrt{a}t)$, $u(x, t) = (x + \sqrt{a}t)^4$ y $u(x, t) = e^{-(x - \sqrt{a}t)^2}$. Otra posibilidad es que $f'' = 0$ en este caso f será una función lineal, esto es $f(z) = A + Bz$, el coeficiente B no debe ser cero para asegurar que $f(z)$ no sea constante, en este caso tenemos

$$u(x, t) = A + B(x - ct)$$

esta es una solución tipo onda viajera de la ecuación de onda para cualesquier valor de las constantes de A , B y c con la condición que $B \neq 0$ y $c \neq 0$.

2.7. Una nota histórica de los solitones

La teoría de solitones se remonta a agosto de 1834, cuando el ingeniero escocés John Scott Russell (1808-1882) realizó la siguiente observación: cabalgando a caballo a lo largo de un canal cercano a Edimburgo, contempló una barcaza mientras era remolcada por dos caballos a lo largo del canal. Cuando la embarcación efectuó una parada, una onda surgió de la proa, y Scott Russell fue capaz de seguirle la pista durante más de un kilómetro. Al contrario de lo que se podría esperar, la onda no se dispersó y su forma subsistió sin alteraciones. Fascinado completamente por el fenómeno, que mucha gente había visto con anterioridad sin apreciar su peculiaridad, Scott Russell estudió las ondas que durante muchos años denominó ondas solitarias.

Uno de los logros más notables que se han conseguido en la segunda mitad del siglo XX y que además ilustra con claridad la unidad subyacente de las Matemáticas es

la Teoría de Solitones. Los solitones son ondas no lineales que exhiben un comportamiento extremadamente inesperado e interesante.

Tradicionalmente, hablamos de dos tipos de ondas, las primeras, las ondas lineales, que son las ondas familiares de la vida diaria, como, por ejemplo: las ondas de luz y las ondas de sonido, estas ondas tienen velocidad constante, sea cual sea su forma: un Do sostenido viaja a la misma velocidad que un Fa bemol; y, además, tienen longitud de onda constante: un Do sostenido sigue siendo un Do sostenido si lo oyes a una manzana de distancia.

Las ondas lineales también obedecen al llamado principio de superposición: si tocas varias notas simultáneamente en un piano, siempre escucharás la suma de todas esas notas a la vez, y esto es lo que produce armonía. Por muy complicado que sea un sonido se puede descomponer en los armónicos que lo constituyen.

Las otras ondas, las no lineales, son menos familiares y son bien distintas de las lineales. Una onda en el mar aproximándose hacia la orilla es un buen ejemplo de onda no lineal. Obsérvese que ahora la amplitud, la longitud de onda y la velocidad, van variando según avanza la onda, mientras que en las ondas lineales éstas son constantes. La distancia entre las crestas va decreciendo, la altura de las ondas va creciendo mientras van percibiendo el fondo, y la velocidad cambia; la parte superior de la onda se adelanta sobre la inferior, cae sobre ella y la onda rompe.

Hay fenómenos aún más complicados como el de dos ondas que se cruzan, interactúan de forma complicada y no-lineal, y dan lugar a tres ondas en lugar de dos.

Las ondas pueden viajar largas distancias a velocidad constante sin cambiar su forma, pero las de amplitud grande viajan más rápidamente que las de amplitud pequeña. Una onda grande puede alcanzar a una pequeña, y como resultado de complejas interacciones, la onda grande emerge avanzando a mayor velocidad que la pequeña. Tras esta interacción no-lineal las dos ondas siguen su camino comportandose como ondas lineales.

A mediados del siglo *XX*, un equipo de investigación en Matemáticas estaba estudiando la ecuación de ondas no lineal, como esta ecuación describe ondas no-lineales, ellos esperaban que sus soluciones exhibieran en algún momento singularidades, o roturas, tal y como se observa en las ondas que se cruzan, interactúan y se rompen de forma no-lineal, debido a este fenómeno escribieron un programa de computador para resolver la ecuación numéricamente y descubrieron, para su sorpresa, que la

onda no se rompía como habían previsto.

Esto les llevó a la ecuación de Korteweg-de Vries, que había sido escrita cien años antes con el propósito de describir el comportamiento de ondas en aguas poco profundas, y descubrieron que el fenómeno que Russell había descrito se podía demostrar matemáticamente usando esa ecuación; en otras palabras, las soluciones de la ecuación de Korteweg-de Vries exhiben el comportamiento de un solitón, dichas ecuaciones son extremadamente inusuales porque los solitones se comportan como ondas lineales unas veces, y como ondas no-lineales otras; este descubrimiento provocó una enorme actividad investigadora que puso de manifiesto, de una forma muy hermosa, la unidad de las Matemáticas. Concurrían aquí desarrollos en computación y en Análisis Matemático, que es la forma tradicional de estudiar las ecuaciones diferenciales. El resultado de estas soluciones se pueden entender mediante elegantes construcciones utilizando la Geometría Algebraica. Las soluciones están también ligadas íntimamente a la Teoría de Representaciones, porque estas ecuaciones poseen un número infinito de simetrías ocultas.

Finalmente, estas ecuaciones también están relacionadas con cuestiones de Geometría elemental. Por ejemplo: un problema interesante es el de encontrar la superficie de un cono con un volumen dado, pero con la menor área entre todas las superficies con una frontera dada. No es ni mucho menos evidente que este problema pueda tener algo que ver con las ondas de aguas poco profundas, pero la verdad es que sí que tiene que ver.

Las ecuaciones diferenciales que describen las soluciones de este problema exhiben el mismo comportamiento de un solitón que las ecuaciones que describen las ondas de aguas poco profundas. De manera que hemos empezado con dos problemas matemáticos, uno en Física Matemática y otros en Ecuaciones Diferenciales, y hemos encontrado que los dos exhiben ese mismo comportamiento tan interesante y extraño que tienen los solitones.

Las matemáticas no sólo han sido capaces de romper sus barreras internas, sino que ahora interactúan con otras ciencias y con las empresas, las finanzas, las cuestiones de seguridad la gestión, la toma de decisiones y la modelización de sistemas complejos. Y algunas de estas disciplinas, por su parte, están retando a los matemáticos con nuevas clases de problemas interesantes que, a su vez, están dando lugar a nuevas aplicaciones.

No hay mejor ilustración para este último asunto que la Física Teórica.

Estrictamente, sólo se llaman solitones si, además, tienen la propiedad de conservar su identidad (velocidad y forma) en colisiones (elásticas). Resulta que esta propiedad está relacionada con la integrabilidad del sistema (como es el caso de la ecuación de Korteweg-de Vries), apareciendo muy raramente en sistemas no-integrables (como la ecuación de difusión no-lineal). Puesto que éstos son los más usuales en física, la literatura correspondiente no suele exigir tal propiedad, de modo que describe un solitón el cual pueden distorsionar ligeramente su identidad, permisividad que no aceptan los matemáticos.

Capítulo 3

Dos ecuaciones especiales que presentan solución tipo onda viajera

En el presente capítulo analizaremos dos ecuaciones importantes en ecuaciones diferenciales parciales que tienen solución de tipo onda viajera. Inicialmente realizaremos una representación del fenómeno que describen y luego deduciremos formalmente la solución correspondiente.

Es de aclarar que en [1], [2] y [6], hacen una deducción de la solución para la ecuación KdV y que en [2] se hace una deducción para la seno-Gordon, pero sin entrar en algunos detalles y cálculos que haremos en el presente capítulo.

3.1. La ecuación Korteweg-de Vries (KdV)

Los experimentos de Russell y sus observaciones llamaron la atención de los científicos como Boussinesq, Rayleigh y Stokes. En 1895 D.J. Korteweg y G. de Vries obtenían un modelo matemático de una ecuación diferencial parcial para proporcionar una explicación acerca de lo que había estudiado Russell, llegando a derivar la ecuación para la propagación de ondas en una sola dirección en la superficie del

agua, y con densidad ρ :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\sqrt{gh}}{h} \left[\left(\varepsilon + \frac{3}{2}v \right) \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\sigma \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3} \right], \quad (3.1)$$

donde $v = v(\xi, \tau)$, ξ es una coordenada escogida para que se mueva en el agua y ε es un parámetro muy pequeño y

$$\sigma = h \left(\frac{h^2}{3} - \frac{T}{g\rho} \right) \sim \frac{1}{3}h^3,$$

donde la superficie de la tensión T ($\ll \frac{1}{3}g\rho h^2$) es despreciable. De aquí obtenemos la forma original de la ecuación KdV. De acuerdo a la ecuación (3.1) se puede decir que es una de las mas simples y útiles de los modelos de ecuaciones no-lineales para ondas solitarias, y esta representa a largo tiempo de evolución, el fenómeno de onda, el efecto empujado del termino no-lineal $\left(v \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)$ se equilibra por la dispersión $\left(\frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3} \right)$. La ecuación (3.1) puede llevarse a la forma no-dimensional haciendo la transformación

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h\sigma}} \tau, \quad x = -\sigma^{-\frac{1}{2}} \xi, \quad u = \frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\varepsilon.$$

De donde se obtiene la forma clásica

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) posee la siguiente solución explícita llamada solución tipo onda solitaria

$$u(x, t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2 \left[k \left(x - 4k^2 t - x_0 \right) \right],$$

donde k y x_0 son constantes.

Nota: La velocidad de esta onda $4k^2$ es proporcional a la amplitud $2k^2$ por consiguiente las ondas más altas viajan más rápidamente que las cortas.

La ecuación diferencial (3.1) puede escribirse después de hacer sustituciones apropiadas

$$U_t + (a_1 + a_2 U)U_x + a_3 U_{xxx} = 0, \quad a_2, a_3 \neq 0,$$

la cuál es una ecuación de tercer orden no-lineal conocida como la ecuación de Korteweg-de Vries o la ecuación KdV.

La sustitución $u = a_1 + a_2 U$ y la adaptación apropiada de las variables independientes x y t nos lleva a una forma reducida de la ecuación KdV

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (3.3)$$

Para una interpretación más completa sobre la historia de los solitones, la ecuación de KdV y las otras ecuaciones fundamentales en las que los solitones aparecen, ver la monografía *Solitons in Mathematics and Physics* del autor Alan C. Newell [7].

Otra forma de escribir la ecuación Korteweg-de Vries o KdV es

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \alpha \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} = 0, \quad \text{con } \alpha \text{ constante,} \quad (3.4)$$

donde el segundo término es no-lineal y el tercero de dispersión.

3.1.1. Solución de la ecuación KdV

En esta sección buscaremos las soluciones tipo onda viajera de la ecuación KdV reducida (3.3), las soluciones que se encuentren serán llamados solitones y son los fenómenos de ondas observados por Russell.

Iniciemos suponiendo que la solución es de la forma

$$u(x, t) = f(x - ct), \quad (3.5)$$

es decir, tiene la forma de un impulso, donde $c > 0$ y $f(z)$, $f'(z)$ y $f''(z)$ tiende a 0 cuando $|z| \rightarrow \infty$, sustituyendo la ecuación (3.5) en la ecuación KdV (3.3), vemos que constituye una ecuación ordinaria no lineal de tercer orden para $f(z)$ (donde $z = x - ct$), es decir, podemos escribirla como

$$-cf' + ff' + f''' = 0.$$

Esta ecuación particular puede ser integrada, obteniendo la ecuación

$$-cf + \frac{1}{2}f^2 + f'' = a,$$

donde a es una constante de integración.

De la suposiciones que $f(z)$, $f'(z)$ y $f''(z) \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$, obtenemos que el valor de a es cero, multiplicando esta ultima ecuación por f' se obtiene

$$-cf f' + \frac{1}{2}f^2 f' + f' f'' = 0.$$

integrando de nuevo, obtenemos como resultado la ecuación de primer orden

$$-\frac{1}{2}cf^2 + \frac{1}{6}f^3 + \frac{1}{2}(f')^2 = b.$$

Nuevamente por las condiciones sobre f , f' y f'' se tiene que la constante de integración b es 0. Despejando para $(f')^2$ obtenemos

$$3(f')^2 = (3c - f)f^2.$$

aquí requerimos que $0 < f(z) < 3c$ para tener que el lado derecho de la ecuación es positivo; tomando la raíz cuadrada

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3c - f}}f' = 1. \quad (3.6)$$

Para integrar, hacemos la sustitución

$$g^2 = 3c - f, \quad \text{esto es,} \quad f = 3c - g^2,$$

de donde resulta

$$f' = -2gg';$$

reemplazando en (3.6) obtenemos

$$\frac{2\sqrt{3}}{3c - g^2}g' = -1.$$

Utilizando el método de las fracciones parciales, obtenemos después de integrar a ambos lados con respecto a z que

$$\ln \left(\frac{\sqrt{3c} + g}{\sqrt{3c} - g} \right) = -\sqrt{c}z + d,$$

para alguna constante de integración d ; para obtener g debemos aplicar la función exponencial, esto nos lleva a que

$$\frac{\sqrt{3c} + g}{\sqrt{3c} - g} = \exp(-\sqrt{c}z + d),$$

despejando de aquí g , obtenemos

$$g(z) = \sqrt{3c} \frac{\exp(-\sqrt{c}z + d) - 1}{\exp(-\sqrt{c}z + d) + 1} = -\sqrt{3c} \tanh \left[\frac{1}{2}(\sqrt{c}z - d) \right].$$

Dado que $f = 3c - g^2$, tenemos al reemplazar que

$$f(z) = 3c - 3c \tanh^2 \left[\frac{1}{2}(\sqrt{c}z - d) \right],$$

o lo que es equivalente que

$$f(z) = 3c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2}(\sqrt{c}z - d) \right].$$

Si suponemos $d = 0$, se obtiene que

$$f(z) = 3c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2}(\sqrt{c}z) \right],$$

escribiendo en términos de las variables iniciales x y t , tenemos que

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct) \right]. \quad (3.7)$$

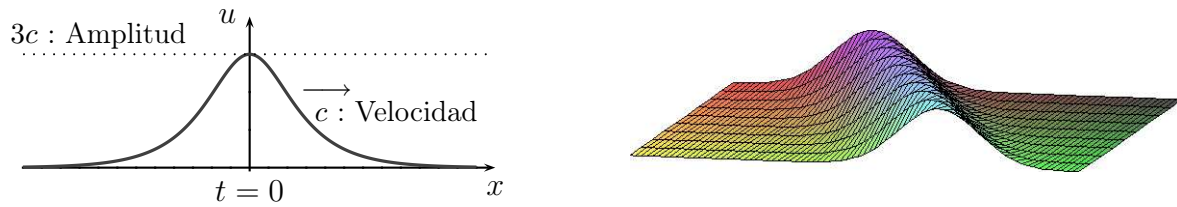


Figura 3.1: Onda solitaria solución de la ecuación KdV.

La **onda solitaria o solitón** solución de la ecuación KdV y uno de sus perfiles es mostrado en la Figura 3.1.

De la ecuación (3.6) tenemos otra forma de ver la ecuación KdV, por ejemplo, podemos tomar $\alpha = 6$, en este caso obtenemos la ecuación $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$.

Un procedimiento análogo, nos muestra que en este caso la solución está dada por

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct) \right), \quad (3.8)$$

muy similar a la solución dada por la ecuación (3.7).

Notamos que si $f(z)$ es una solución de la ecuación KdV (3.3) entonces cualquiera que sea $f(z + x_0)$, es también una solución, por lo tanto para una velocidad dada c tenemos una familia de ondas solitarias infinitas asociadas a la ecuación KdV.

Ejemplo 3.1. Una forma modificada de la ecuación KdV denotada como $+mKdV$ es

$$u_t \pm 6u^2u_x + u_{xxx} = 0,$$

podemos mostrar de modo similar al realizado para la ecuación (3.3), que hay una familia de soluciones de tipo onda solitaria de la forma

$$\psi(\xi) = \sqrt{c} \operatorname{sech}(\sqrt{c}\xi) \quad \text{para cada} \quad c > 0.$$

3.2. La ecuación seno-Gordon

La ecuación seno-Gordon fué utilizada inicialmente por Scott para describir por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias el ángulo de rotación $u(x, t)$ de un péndulo en la posición x y el tiempo t , donde se asume que cada péndulo tiene masa m y longitud ℓ , y que dichos péndulos se extienden uniformemente a lo largo de un resorte, separados una distancia Δx , como se ve en la Figura 3.2. La ecuación seno-Gordon también se utiliza en el estudio de líneas de transmisión de superconductores, cristales, trayectorias de láser, y en geometría diferencial.

El modelo matemático del movimiento es basado en la segunda ley del movimiento rotatorio de Newton y tiene la forma

$$I \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \text{el movimiento de torsión neto que actúa sobre el } i\text{-ésimo péndulo,}$$

donde I es el momento de inercia de un péndulo, $I = m\ell^2$ y el momento de torsión es la medida de los efectos de transformación de la fuerza.

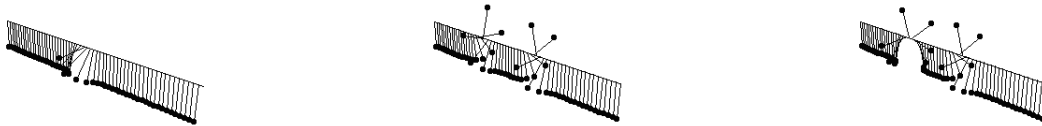


Figura 3.2: Representación de diferentes movimientos del péndulo.

A continuación describiremos la solución tipo onda viajera de la ecuación seno-Gordon

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = \sin u. \quad (3.9)$$

Como en el caso de la KdV, podemos considerar una solución de la forma $u(x, t) = \phi(x - \eta t)$ que corresponde a una onda viajera, con una velocidad η , entonces, substituyendo en la ecuación (3.9), obtenemos la ecuación diferencial para $\phi(\xi)$,

$$(1 - \beta^2) \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = \sin \phi, \quad (3.10)$$

donde $\xi = x - \eta t$ y $\beta^2 = \frac{\eta^2}{c^2}$. Dividiendo ambos lados por $1 - \beta^2$ y multiplicando por $\phi'(\xi)$ obtenemos

$$\phi'(\xi) \phi''(\xi) = \left(\frac{\sin \phi}{1 - \beta^2} \right) \phi'(\xi);$$

esta ecuación se puede reescribir como

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 + \frac{\cos \phi}{1 - \beta^2} \right] = 0,$$

o lo que es análogo

$$\frac{(1 - \beta^2)}{2} \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 = B(1 - \beta^2) - \cos \phi \quad (3.11)$$

donde B es una constante. Si denotamos $A \equiv B(1 - \beta^2)$, y consideramos que $A \geq 1$ y $\beta^2 < 1$, obtenemos las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para ϕ , dadas por

$$\sqrt{\frac{1 - \beta^2}{2}} \frac{d\phi}{d\xi} = \pm \sqrt{A - \cos \phi}.$$

Utilizando separación de variables e integrando, obtenemos

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\zeta}{\sqrt{A - \cos \zeta}} = \pm \int_{\xi_0}^{\xi} \left(\frac{2}{1 - \beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} d\mu = \pm \left(\frac{2}{1 - \beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} (\xi - \xi_0). \quad (3.12)$$

Si consideramos $A = 1$, la integral del lado izquierdo, se puede hacer impropia, pero podemos solucionarla en un intervalo apropiado; luego utilizando las identidades

$$1 - \cos \phi = 2 \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right), \quad \text{y} \quad \frac{d}{d\zeta} \left[\ln \tan \left(\frac{\zeta}{4} \right) \right] = \left[2 \sin \left(\frac{\zeta}{2} \right) \right]^{-1}$$

obtenemos que

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \cos \xi}} = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\xi}{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\xi}{2} \right)} = \left[\sqrt{2} \ln \tan \left(\frac{\xi}{4} \right) \right]_{\phi_0}^{\phi},$$

de donde obtenemos que la ecuación (3.12) toma la forma

$$\pm \left(\frac{2}{1 - \beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} (\xi - \xi_0) = \sqrt{2} \ln \left[\frac{1}{\alpha} \tan \left(\frac{\phi}{4} \right) \right],$$

donde $\alpha = \tan \left(\frac{\phi}{4} \right)$, después de despejar obtenemos que

$$\tan \left(\frac{\phi}{4} \right) = \alpha \exp \left(\pm \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right).$$

Por lo tanto, obtenemos dos soluciones básicas para ϕ , denotadas por

$$\phi_{\pm}(\xi) = 4 \tan^{-1} \left[\alpha \exp \left(\pm \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \right],$$

donde α , ξ_0 son constantes de integración que pueden ser incorporadas de varios modos. Además, de la propiedad de la función seno se puede ver inmediatamente que $\pm\phi_{\pm}$ es también solución de la ecuación (3.10). También, tenemos que $\phi_{\pm} + 2n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, son solución de la ecuación (3.10). Escogiendo $\alpha = 1$ y $\xi_0 = 0$ obtenemos que la onda viajera de quiebre o solitón, solución de la ecuación seno-Gordon (3.9) es

$$\phi_+(x, t) = 4 \tan^{-1} \left[\exp \left(\frac{x - \eta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \right], \quad (3.13)$$

que representa un perfil continuo creciente $\phi_+(\xi) \rightarrow 0$, cuando $\xi \rightarrow -\infty$, $\phi_+(\xi) \rightarrow 2\pi$, cuando $\xi \rightarrow +\infty$ y $\phi_+(0) = \pi$.

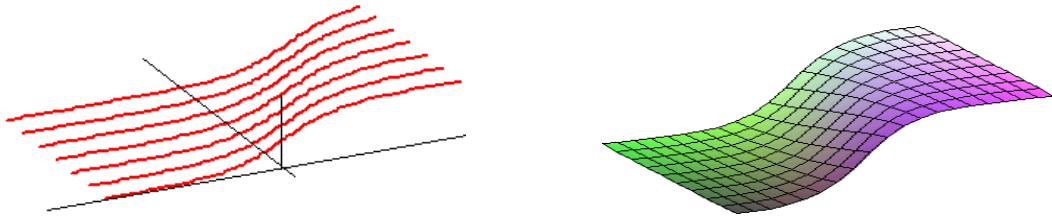


Figura 3.3: Onda viajera de quiebre.

En la Figura 3.3 se muestra la onda viajera de quiebre (3.13) y algunos de sus cortes, hemos tomado $\beta = 0,3$ y $\eta = 0,5$.

El quiebre se propaga en la dirección positiva del eje x con una velocidad $|\eta| < c$. También tenemos el llamado antiquiebre de la onda viajera (o antisolitón) y la solución es

$$\phi_-(x, t) = 4 \tan^{-1} \left[\exp \left(-\frac{\xi - \eta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \right] = 4 \cot^{-1} \left[\exp \left(\frac{\xi - \eta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \right], \quad (3.14)$$

que representa un perfil continuo que disminuye $\phi_-\xi \rightarrow 0$, cuando $\xi \rightarrow +\infty$, $\phi_-\xi \rightarrow 2\pi$, cuando $\xi \rightarrow -\infty$ y $\phi_-(0) = \pi$. El antiquiebre se propaga en la dirección negativa de las x con una velocidad $|\eta| < c$.

Para $A \neq 1$, obtenemos otros tipos de soluciones de la ecuación de seno-Gordon los cuales no vamos analizar, dado que necesitaremos introducir algunos conceptos relacionados con las funciones elípticas Jacobianas, y consideraremos que harían más extenso el trabajo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANGULO Jaime. *Existence and Stability os Solitary Waves Solutions to Non-linear Dispersive Evolution Equations*. 24^o Colóquio Brasileirodo Matemática, IMPA, Rio de Jainero, Brasil, 2003.
- [2] ANGULO Jaime, DUSSAN Martha and NORONHA Maria Helena *An introduction to soliton Geometry*, . XIII Escola de geometría diferencial, Instituto de matemática e estatística Universidade do Sao Paulo, Brasil, 2004.
- [3] AYRES Frank. *Ecuaciones Diferenciales*. McGraw-Hill. México, 1981.
- [4] BRESSAN Oscar J. y GAVIOLA Enrique. *Ondas*. Programa Regional de Desarrollo Cientifico y tecnológico. Washintong, D.C., 1975.
- [5] GUZMAN M. de. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias "Teoria de Estabilidad y control"*. Editorial Alhambra. S.A. Madrid España, 1975.
- [6] KNOBEL Roger. *An Introduction to the Mathematical Theory of Waves*. Editorial Board, AMS, USA, 2000.
- [7] NEWELL Alan. C. *Solitons in Mathematics and Physics*. SIAM, 1985.
- [8] SMALE Stephen, HIRSCH Morris W. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic pres limited, New York, 1974.
- [9] SOTOMAYOR Jorge. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, IMPA, Rio de Jainero, Brasil, 1979.
- [10] STANLEY J. Farlow. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Dover Publications. Inc New York, 1993.