LA TRANSFORMADA z Y ALGUNAS APLICACIONES

NUBIA ALEXANDRA RONDÓN CARREÑO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2005

LA TRANSFORMADA z
Y ALGUNAS APLICACIONES

NUBIA ALEXANDRA RONDÓN CARREÑO

Monografía presentada como requisito para optar al título de Licenciada en Matemáticas

Director
MARLIO PAREDES GUTIÉRREZ
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2005

A mis padres Rodolfo y Ana Teresa, quienes me han apoyado todos estos años y sin lo cual este proyecto hoy no seria una realidad.

Agradecimientos

Doy mi más profundo agradecimiento a aquellos sin cuya colaboración y apoyo este trabajo no hubiera sido posible:

- A **Dios**, por darme la sabiduria y la fortaleza para terminar mis estudios.
- A **mis padres Rodolfo y Ana Teresa**, por su cariño, esfuerzo y comprensión; por enseñarme el valor de la disciplina y la responsabilidad, tan importante para alcanzar esta meta.
- A mis hermanos **Rodolfo y Edinsson**, quienes han compartido conmigo buenos momentos durante mi vida.
- Al profesor **Marlio Paredes**, por su colaboración, por su apoyo incondicional y por su acertada orientación durante el desarrollo en esta monografía.
- A **Luz Dary Castellanos**, por su amistad y colaboración en el desarrollo de este proyecto.
- A **John Jairo Navas**, por su amistad, paciencia y comprensión.
- A **los profesores**, por su contribución en mi formación académica.
- A **mis compañeros**, Ligia, Elder, Luz Genny, Claudia Johanna, Claudia Juliana, Deyanira, Martha, Trinidad, William González, William Calderón, Yamid, AZA; por su amistad, con quienes comence mis estudios en esta universidad.
- A **mis amigos**, que de una u otra forma estuvieron presentes en todos los momentos, les estaré siempre agradecida por permitirme dar este escalón en mi formación profesional.

- A la **UIS**, institución que me dio la oportunidad de escalar otro peldaño en mi formación profesional.

TITLE: THE z TRANSFORM AND SOME APPLICATIONS[1]

AUTHOR: NUBIA ALEXANDRA RONDÓN CARREÑO[2]

KEY WORDS: The z transform, the inverse z transform, difference equations, series, signs, LTI systems.

DESCRIPTION:

The z transformed is a mathematical method that is used among other applications by the study of processing of digital signs. More specifically it is used in the analysis of the projects of digital circuits, analysis of radar systems, telecommunications and especially the systems of control of computer process.

In the present work the z transform and its principal properties are studied rigorously.

The project consists of four chapters. In the first we present some preliminaries which are necessary to understand the z transform.

In the second chapter is defined the z transform and the elementary functions such us the unit step function, the polynomial function, the unit ramp function and the exponential function are worked. Important theorems and properties of the z transform are presented too, this properties and theorems are useful to the applications.

Third chapter treats about the inverse z transformed and the methods to calculate it such us the direct division method and the method of partial fraction expansion method.

Finally, in the fourth chapter we present some general applications of z transform such us the solution of difference equations and the analysis and characterization of the LTI systems (Linear time invariant systems).

---

[1]Monograph

[2]Faculty of Sciences, School of Mathematics. Marlio Paredes, Ph.D. in Mathematics

TÍTULO: LA TRANSFORMADA z Y ALGUNAS APLICACIONES[3]

AUTOR: NUBIA ALEXANDRA RONDÓN CARREÑO[4]

PALABRAS CLAVES: La transformada z, la transformada z inversa, ecuaciones de diferencias, series, señales, sistemas LTI.

DESCRIPCIÓN:

La transformada z es un método matemático que se emplea, entre otras aplicaciones, para el estudio de procesamientos de señales digitales. Más específicamente se usa en el análisis de proyectos de circuitos digitales, análisis de sistemas de radar, telecomunicaciones y especialmente los sistemas de control de procesos por computadora.

En el presente trabajo de grado se realiza un estudio riguroso de la transformada z y algunas de sus propiedades más importantes utilizando como principal elemento la sumatoria.

El proyecto consta de cuatro capítulos. En el primer capítulo se presenta algunos preliminares que son necesarios para trabajar con la transformada z.

En el segundo capitulo se define la transformada z y se trabajan las funciones elementales como lo son la función escalón unitario, la función rampa, la función polinomial y la función exponencial. Además se presentan propiedades y teoremas importantes de la transformada z, que son útiles para realizar las aplicaciones.

El tercer capitulo trata de la transformada z inversa y sus métodos para calcularla tales como el método de la división directa y el método de descomposición por fracciones parciales.

Por último, en el cuarto capítulo presentamos algunas aplicaciones generales de la transformada z como lo es la solución de ecuaciones de diferencias y el análisis y la caracterización de los sistemas LTI (Sistemas lineales invariantes en el tiempo).

---

[3]Monografía

[4]Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas. Marlio Paredes, Ph.D. en Matemáticas

Índice general

Introducción

A través de la historia el hombre ha creado herramientas para facilitar el desarrollo de las diferentes labores para los diversos campos de acción empleados en su vida cotidiana.

La ciencia y tecnología como parte de esa cotidianidad no ha sido ajena al avance constante que en la historia ha caracterizado al ser humano. Los conceptos de señales y sistemas aparecen en una variedad muy amplia de campos, las ideas y técnicas asociadas con estos conceptos juegan un papel importante en áreas tan diversas de la ciencia y tecnología como comunicaciones, aeronáutica y astronáutica, diseño de circuitos, acústica, sismología, ingeniería biomédica, sistemas de generación y distribución de energía, control de procesos químicos y procesamiento de voz. Por este motivo esta monografía esta dirigida a estudiar la transformada z que es un método matemático que se emplea entre otras aplicaciones, para el estudio de procesamiento de señales digitales. Más específicamente se usa en el análisis y proyectos de circuitos digitales, análisis de sistemas de radar, telecomunicaciones y especialmente los sistemas de control de procesos por computadora. Además es una herramienta muy útil para el análisis de diferentes tipos de señales, tanto en el dominio del tiempo como en la frecuencia.

Para esto es necesario abarcar los fundamentos de sumatorias, funciones periódicas, series y señales, los cuales consignamos en el primer capítulo; el énfasis lo haremos en las series, para poder aplicar la definición de la transformada z a lo largo de esta monografía.

En el segundo capítulo se presenta la definición de la transformada z y se trabajan las funciones elementales como lo son la función escalón unitario, la función rampa, la función polinomial y la función exponencial. Además se presentan propiedades y teoremas importantes de la transformada z, que son útiles para realizar las aplicaciones.

En el tercer capítulo se considera la transformada z inversa y sus métodos de solución tales como el método de la división directa y el método de descomposición por fracciones parciales.

Por último, en el cuarto capítulo presentamos algunas aplicaciones generales de la transformada z como lo es la solución de ecuaciones de diferencias y el análisis y la caracterización de los sistemas LTI (Sistemas lineales invariantes en el tiempo).

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Sumatorias y propiedades

El estudio de fenómenos y procesos que ocurren en la naturaleza y la sociedad conduce a la formulación de modelos que los describen y predicen su comportamiento, los cuales, no obstante su diversidad, pueden agruparse en dos categorías: continuos, como la descripción de la transmisión del movimiento a través de una cuerda, el desplazamiento de un vehículo, etc., o discretos, como la serie de pagos históricos de una entidad, los registros de temperatura de un país o territorio, etc.

Esta última categoría, discretos, tiene gran importancia en la actualidad atendiendo al acelerado desarrollo de las técnicas digitales, que en la práctica es un proceso donde toda la información, en última instancia, se representa a través de conjuntos ordenados de dos valores lógicos: falso o verdadero.

En términos matemáticos, el estudio de las funciones cuya variable dependiente exhibe una variación discreta constituye una especialidad, que tiene en las sumatorias y series un componente relevante.

Tomando en cuenta lo señalado, en esta sección se relacionan un conjunto de propiedades reportadas en la literatura sobre las sumatorias y se deducen otras que pueden facilitar cálculos tales como la solución de sistemas de ecuaciones lineales resultantes del planteamiento del problema de la obtención de expresiones analíticas para la derivada de funciones de variable independiente discreta.

Definición 1.1. Si n es un entero positivo y $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son números reales entonces escribimos

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{1.1}$$

Propiedades de las sumatorias

Sean $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ dos sucesiones finitas, entonces para cualquier entero positivo n se tiene:

1. **Aditiva:** Para cualquier entero positivo se cumple

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k\,.$$

Demostración. Utilizando la definición de sumatoria tenemos,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) &= (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n),\\
&= a_1 \pm b_1 + a_2 \pm b_2 + \cdots + a_n \pm b_n,\\
&= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (\pm b_1 \pm b_2 \pm \cdots \pm b_n),\\
&= (a_1 \pm a_2 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \cdots + b_n),\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k.
\end{aligned}$$

□

2. **Propiedad homogénea:**

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \text{con} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} ca_k &= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n,\\ &= c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n),\\ &= c\sum_{k=1}^{n} a_k.\end{aligned}$$

□

3. **Propiedad Telescópica:**

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$

   Demostración. Solo probaremos la primera parte puesto que la segunda se demuestra de forma análoga.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}),\\ &= a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \cdots + a_n - a_{n-1}.\end{aligned}$$

   Después de simplificar los términos semejantes se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0.$$

□

Teorema 1.1. *Sea c un número real y n un entero, entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = nc$.*

Demostración. Sea $a_k = c$, con $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,\\ &= c + c + \cdots + c,\\ &= nc.\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 1.2. $\displaystyle\sum_{k=-t}^{-1} k = -\sum_{k=1}^{t} k.$

Demostración.

$$\begin{aligned}\sum_{k=-t}^{-1} k &= -t - (t-1) - (t-2) - \cdots - 1,\\ &= -(t + (t-1) + (t-2) + \cdots + 1),\\ &= -\sum_{k=1}^{t} k.\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 1.3. $\displaystyle\sum_{k=-t}^{t} k = 0.$

Demostración.

$$\begin{aligned}\sum_{k=-t}^{t} k &= \sum_{k=-t}^{-1} k + \sum_{k=0}^{0} k + \sum_{k=1}^{t} k,\\ &= -\sum_{k=1}^{t} k + \sum_{k=1}^{t} k,\\ &= 0.\end{aligned}$$

$\square$

En algunas sumatorias es necesario cambiar el índice de la sumatoria para efectuar la aplicación de algún teorema o alguna propiedad del símbolo sumatorio. Esta propiedad se expresa de la siguiente manera:

$$\sum_{k=i}^{n} a_k = \sum_{k=i+p}^{n+p} a_{k-p}\,.$$

Demostración.

$$\sum_{k=i+p}^{n+p} a_{k-p} = a_{i+p-p} + a_{i+1+p-p} + a_{i+2+p-p} + \cdots + a_{n+p-p}$$
$$= a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_n$$
$$= \sum_{k=i}^{n} a_k.$$

□

1.2. Funciones periódicas

Definición 1.2. Una **función periódica** se puede definir como una función para la cual $f(t) = f(t+T)$ para todo valor de t. La constante mínima T que satisface la relación $f(t) = f(t+T)$ se llama **período** de la función. Mediante repetición de $f(t) = f(t+T)$ se obtiene, $f(t) = f(t+nT), n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$.

Ejemplo 1.1. *La función coseno es una función periódica con período 2π, y su gráfica (ver Figura 1.1) se repite cada 2π unidades sobre el eje horizontal.*

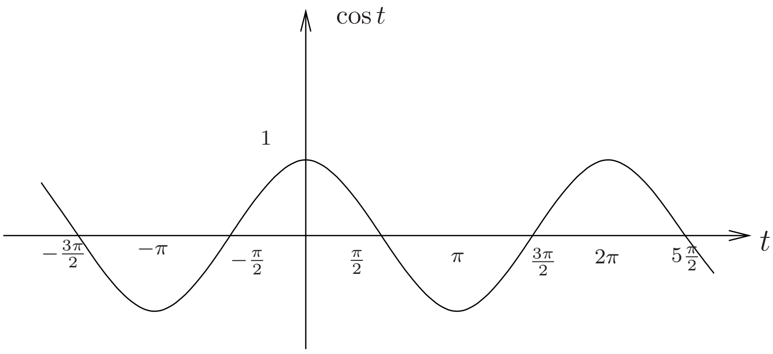

Figura 1.1: Función coseno

Ejemplo 1.2. *La función $f(t) = \cos\frac{t}{3} + \cos\frac{t}{4}$ es periódica, vamos a encontrar su período. Supongamos que su período es T, entonces por definición tenemos*

$$\cos\frac{1}{3}(t+T) + \cos\frac{1}{4}(t+T) = \cos\frac{t}{3} + \cos\frac{t}{4}.$$

Como $\cos(\theta + 2\pi m) = \cos\theta$*, para cualquier entero* m*, se tiene que* $\frac{1}{3}T = 2\pi m$ *y* $\frac{1}{4}T = 2\pi n$ *donde* m *y* n *son enteros. Por tanto,* $T = 6\pi m = 8\pi n$*; cuando* $m = 4$ *y* $n = 3$*, se obtiene el mínimo valor de* T*. De donde* $T = 24\pi$*.*

En general, si la función $f(t) = \cos w_1 t + \cos w_2 t$ es periódica, con período T, entonces es posible encontrar dos números enteros m y n tales que

$$w_1 T = 2\pi m,$$

$$w_2 T = 2\pi n.$$

El cociente de las ecuaciones anteriores es,

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{m}{n}$$

es decir, la relación $\frac{w_1}{w_2}$ debe ser un número racional.

Ejemplo 1.3. *Consideremos la función* $f(t) = \cos 10t + \cos(10 + \pi)t$ *y veamos si es una función periódica.*

Sea $w_1 = 10$ *y* $w_2 = 10 + \pi$*, como* $\frac{w_1}{w_2} = \frac{10}{10+\pi}$ *no es un número racional, es imposible encontrar un valor* T *que satisfaga* $f(t) = f(t+T)$*, por lo tanto* $f(t)$ *no es una función períodica.*

1.3. Series

Definición 1.3. Una función f cuyo dominio es el conjunto de todos los números naturales, se denomina sucesión infinita. El valor $f(n)$ de la función se denomina el término n-ésimo de la sucesión.

Se utiliza la notación $f(n)$ para indicar la sucesión cuyo término n-ésimo es $f(n)$. Con frecuencia la dependencia de n se indica utilizando subíndices y se escribe a_n, s_n, x_n, ó u_n, o alguna notación análoga en lugar de $f(n)$.

Cuando los valores de la función $f(n)$ están en el conjunto de los números reales diremos que nuestra sucesión es real y en el caso que estén en el conjunto de los números complejos decimos que la sucesión es compleja.

Otra forma de pensar una sucesión es como un arreglo ordenado de números

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

uno por cada número natural. También se acostumbra denotar una sucesión como $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ó $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$.

Ejemplo 1.4. *La sucesión de Fibonacci cuyos términos son:* $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$*, es un ejemplo clásico. Esta sucesión se puede definir también diciendo que* $a_1 = a_2 = 1$ *y que* $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$*, para* $n \geq 2$*. Este método para definir una sucesión es conocido como método recursivo.*

Ejemplo 1.5. *La sucesión dada por* $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ *tiene la propiedad de que sus términos se acercan a cero cuando* $n \to +\infty$*, a diferencia de la sucesión del ejemplo anterior cuyos términos no se acercan a ningún número.*

Dada una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, la suma de todos sus términos es conocida como una serie. Esto es, una serie es una suma de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Toda serie puede pensarse como la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1, \\
S_2 &= a_1 + a_2, \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + \cdots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

llamada la sucesión de sumas parciales.

Definición 1.4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y tiene como suma el número S si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge a S. Si $\{S_n\}$ diverge entonces decimos que la serie diverge.

Esta definición se aplica tanto en el caso en que la serie es de términos reales como en el caso que es de términos complejos.

Ejemplo 1.6. *Consideremos la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ *y veamos que es convergente. Para esto consideremos la sucesión de sumas parciales*

$$\begin{aligned} S_1 &= \tfrac{1}{2}, \\ S_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}, \\ &\vdots \\ S_n &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Es fácil probar por inducción que

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1.$$

Es decir que la serie es convergente y converge a 1.

Ejemplo 1.7. *Consideremos la serie armónica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *y veamos que diverge. Para esto demostremos que* S_n *crece sin limite.*

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}, \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \frac{1}{n}, \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{1}{n}, \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Si n *es lo suficientemente grande, podemos obtener en la última expresión tantas mitades como queramos. Por tanto,* S_n *diverge; y por consiguiente la serie armónica también diverge.*

Los dos ejemplos anteriores funcionan tanto en el caso real como en el caso complejo, es decir, la serie $\sum \frac{1}{2^n}$ es convergente en $\mathbb{C}$ y la serie armónica es divergente en $\mathbb{C}$.

Una serie $\sum u_n$, cuyos términos no son necesariamente positivos, se dice que es absolutamente convergente si la serie $\sum |u_n|$ es convergente.

Teorema 1.4. ***(Criterio de comparación)*** *Supóngamos que* $0 \leq a_n \leq b_n$ *para* $n \geq N$.

1. *Si* $\sum b_n$ *converge entonces* $\sum a_n$ *también es convergente.*

2. *Si* $\sum a_n$ *diverge entonces* $\sum b_n$ *también es divergente.*

Demostración. Supongamos que $N = 1$, el caso $N > 1$ se prueba de forma similar. Para demostrar la primera parte, sea $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ y notese que $\{S_n\}$ es una sucesión no decresciente. Como

$$S_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

y $\sum b_n$ es convergente entonces la sucesión $\{S_n\}$ converge, por tanto $\sum a_n$ converge. La segunda parte es consecuencia de la primera parte pues si $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ debería ser convergente. □

Teorema 1.5. *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Demostración. Sea $v_n = u_n + |u_n|$ entonces $0 \leq v_n \leq 2|u_n|$, de donde por el criterio de comparación se sigue que $\sum v_n$ converge. Ahora, de la propiedad de linealidad se concluye que $\sum u_n = \sum(v_n - |u_n|)$ converge. □

Teorema 1.6. ***(Criterio de la razón)*** *Sea* $\sum u_n$ *una serie de términos no nulos y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \rho.$$

1. *Si* $\rho < 1$, *la serie es absolutamente convergente.*

2. *Si* $\rho > 1$, *la serie diverge.*

3. *Si $\rho = 1$, no hay conclusión.*

La demostración de este teorema no la presentamos porque se puede encontrar en cualquier libro de cálculo y no es de nuestro interés aquí.

Ejemplo 1.8. *Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$ y veamos que tiene convergencia absoluta.*

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|},\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}},\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1},\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $\rho = 0 < 1$ concluimos, por el criterio de la razón, que la serie es absolutamente convergente.

Para el caso que nos interesa en esta monografía, es decir la transformada z, debemos trabajar con la serie geométrica, por tal razón en adelante solo hablaremos de ella.

La **Serie Geométrica** se genera por adiciones sucesivas de los términos de una progresión geométrica y tiene la forma $\sum x^n$, donde el término enésimo x^n es la potencia enésima de un número real fijo x. Es conveniente comenzar esta serie con $n = 0$, entendiendo que el término inicial es $x^0 = 1$.

Teorema 1.7. *Si x es un número complejo, con $|x| < 1$, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge y tiene suma $\frac{1}{1-x}$ es decir,*

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}, \qquad \textit{si} \qquad |x| < 1 \tag{1.2}$$

Demostración. Sea S_n la enésima suma parcial de esta serie, de modo que

$$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{n-1}.$$

Si $x = 1$ cada término del primer miembro es igual a 1 y entonces $S_n = n$. En este caso la serie diverge puesto que $S_n \to \infty$, cuando $n \to \infty$.

Si $x \neq 1$ entonces

$$\begin{aligned}
(1-x)S_n &= (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k \\
&= (1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{n-1}) \\
&= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{n-1}) - (x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(x^k - x^{k+1}) \\
&= 1 - x^n.
\end{aligned}$$

Ahora, como $x \neq 1$, dividiendo por $1 - x$ obtenemos

$$S_n = \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^n}{1 - x}.$$

Con esto se muestra que el comportamiento de S_n para n grande depende exclusivamente del comportamiento de x^n.

Si $|x| < 1$, $x^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y la serie converge hacia la suma $\dfrac{1}{1-x}$. Si $|x| \geq 1$, el término x^n no tiene límite y la serie diverge con lo cual queda demostrado el teorema. $\square$

Usbando este resultado podemos deducir las siguientes fórmulas que son muy útiles para nuestros propositos.

- Si $|x| < 1$ entonces reemplazando x por x^2 en (1.2) obtenemos

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1 - x^2} \tag{1.3}$$

- Si multiplicamos por x en la ecuación (1.3) se obtiene

$$x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1-x^2}, \qquad \text{si} \quad |x| < 1. \tag{1.4}$$

- Ahora, si sustituimos x por $-x$ en la ecuación (1.2) tenemos

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^6 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x}, \qquad \text{si} \quad |x| < 1. \tag{1.5}$$

- Si sustituimos x por x^2 en la ecuación (1.5) se tiene

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \text{si} \quad |x| < 1. \tag{1.6}$$

- Ahora, multiplicando por x la ecuación (1.6) se obtiene

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^n x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1+x^2} \qquad \text{si} \quad |x| < 1. \tag{1.7}$$

- Sustituyendo x por $2x$ en la ecuación (1.2) resulta

$$x + 4x^2 + 16x^4 + \cdots + 4^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-4x^2}, \qquad \text{que es valido si} \quad |x| < \frac{1}{2}. \tag{1.8}$$

- Cambiando x por x^{-1} en la ecuación (1.2) se obtiene

$$1 + x^{-1} + x^{-2} + \cdots + x^{-n} + \cdots = \frac{1}{1-x^{-n}}. \tag{1.9}$$

Las series anteriores tienen la forma particular $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ que se conoce como series de potencias. Los números $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ se denominan coeficientes de la serie de potencias.

1.4. Señales y sistemas

Las señales y sistemas se representan matemáticamente como funciones de una o más variables independientes. Por ejemplo, la señal de voz se representa de forma matemática por la presión acústica como una función del tiempo.

Hay dos tipos de señales; de tiempo continuo y de tiempo discreto. Las señales de tipo **continuo** se define sobre un intervalo continuo de tiempo. La amplitud puede tener un intervalo continuo de valores o solamente un número finito de valores distintos. Por ejemplo, una señal de voz como una función del tiempo.

Ejemplo 1.9. *Una señal básica de tiempo continuo es la función escalón unitario,*

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad t > 0, \\ 0 & \textit{si} \quad t < 0, \end{cases}$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 1.2.

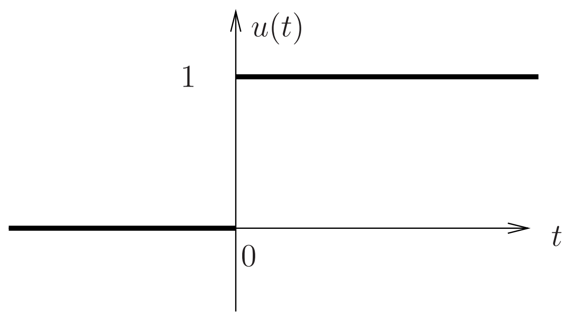

Figura 1.2: Función escalón unitario.

Las señales de tiempo **discreto** son señales definidas solo en valores discretos de tiempo (la variable independiente t está cuantificada). Estas aparecen por ejemplo en los estudios demográficos de población en los cuales varios atributos tales como, ingreso promedio, índice de criminalidad, se tabulan contra variables discretas como años de escolaridad y población total, respectivamente.

Ejemplo 1.10. *La contraparte de la función escalón en tiempo continuo es la función escalón unitario en tiempo discreto, denotada por* $u[n]$ *y definida por*

$$u[n] = \begin{cases} 1, & \textit{si} \quad n \geq 0, \\ 0, & \textit{si} \quad n < 0. \end{cases}$$

La secuencia escalón unitario se muestra en la Figura 1.3.

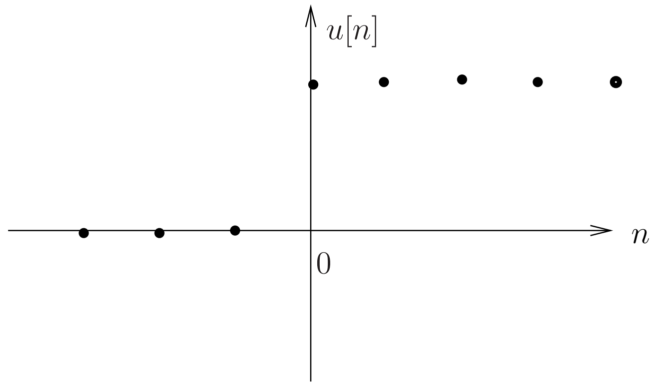

Figura 1.3: Función escalón unitario en tiempo discreto.

Ejemplo 1.11. *La función impulso unitario en tiempo discreto se define como*

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \textit{si} \quad n = 0, \\ 0, & \textit{si} \quad n \neq 0, \end{cases}$$

y su gráfica se muestra en la Figura 1.4.

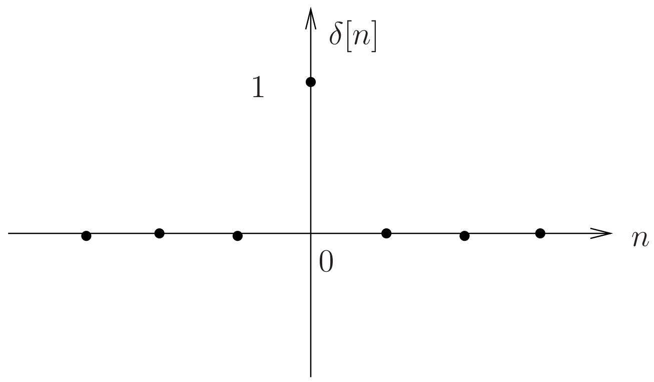

Figura 1.4: Función impulso unitario en tiempo discreto.

Un sistema se puede ver como cualquier proceso que produce una transformación de señales. Entonces un sistema tiene una señal de entrada y una señal de salida la cual esta relacionada a través de la transformación del sistema. Por ejemplo, un sistema de sonido de alta fidelidad toma una señal de audio grabada y genera una reproducción de esa señal.

Un sistema de tiempo continuo es aquel en que las señales de entrada de tiempo continuo son transformadas en señales de salida de tiempo continuo. Estos sistemas se representan de forma gráfica como se muestra en la figura 1.5 en donde la entrada es $x(t)$ y la salida es $y(t)$. Representaremos la relación entrada–salida de un sistema de tiempo continuo mediante la notación $x(t) \rightarrowtail y(t)$.

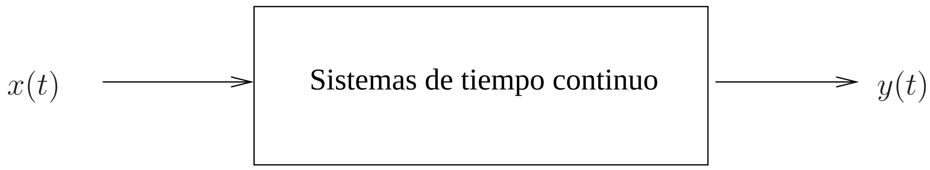

Figura 1.5: Sistema de tiempo continuo

Un sistema de tiempo discreto es aquel en que las señales de entrada en tiempo discreto son transformadas en señales de salida de tiempo discreto. Estos sistemas se representan de forma gráfica como se muestra en la figura 1.6. Representaremos la relación entrada–salida de un sistema de tiempo discreto mediante la notación $x[n] \rightarrowtail y[n]$.

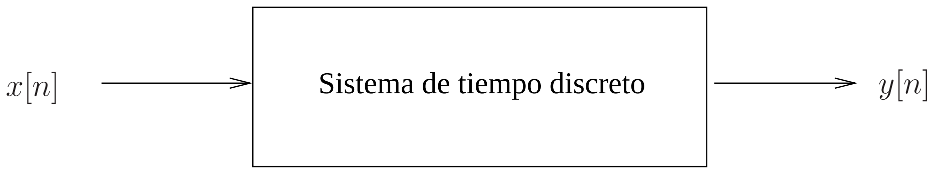

Figura 1.6: Sistema de tiempo discreto

Una **interconexión en serie o cascada** de dos sistemas se ilustra en la Figura 1.7. A este tipo de diagramas, nos referimos como *diagramas de bloque.* En este caso la salida del sistema 1 es la entrada del sistema 2 y el sistema completo transforma la entrada, procesándola primero en el sistema 1 y después en el sistema 2. De modo similar, se define una interconexión en serie de tres o más sistemas.

Una **interconexión en paralelo** de dos sistemas se ilustra en la figura 1.8. Aquí la señal de entrada se aplica al sistema 1 y al sistema 2. El símbolo "$\oplus$" en la figura denota adición, de modo que la salida de la interconexión en paralelo es la suma de las salidas

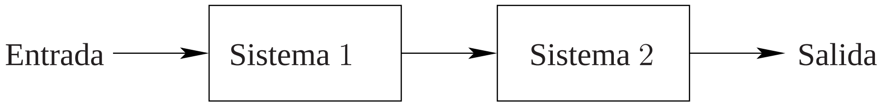

Figura 1.7: Interconexión en serie

de los sistemas 1 y 2. También se pueden definir interconexiones en paralelo de dos o más sistemas, además también se pueden combinar ambas interconexiones, en cascada y en paralelo para obtener interconexiones más complejas.

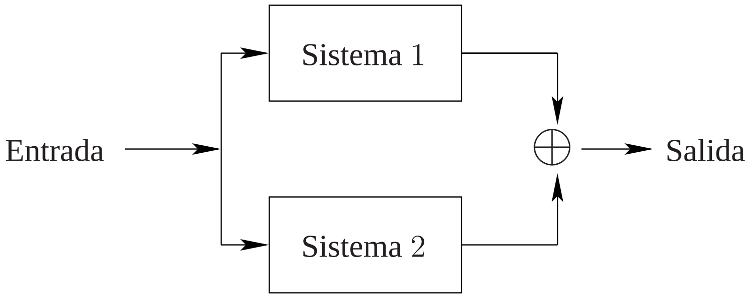

Figura 1.8: Interconexión en serie

propiedad de corrimiento: La señal $x(t - t_0)$ representa una versión de $x(t)$ desplazada en el tiempo.

Las señales que estan relacionadas en esta forma se presentan en aplicaciones tales como el sonar, en el procesamiento de señales sísmicas, y en radar, en las cuales varios receptores situados en diferentes localizaciones detectan una señal que está siendo tranamitida a través de un medio (agua, roca, aire, etc.). En este caso, la diferencia de tiempo de propagación desde el punto de origen de la señal transmitida o cualquiera de dos receptores resulta en un corrimiento de tiempo entre las señales medidas por los dos receptores.

Un sistema es **invariante en el tiempo** si undesplazamiento en el tiempo de la señal de entrada causa undesplazamiento en el tiempo en la señal de salida.

Ejemplo 1.12. *Consideremos el sistema de tiempo continuo definido por*

$$y(t) = \sin[x(t)]$$

Verificar si el sistema es invariante en el tiempo.

Sea $x_1(t)$ *cualquier entrada a este sistema entonces*

$$y_1(t) = \sin[x_1(t)]$$

es la salida correspondiente. Ahora, consideremos una segunda entrada obtenida por el desplazamiento de x_1*, esto es*

$$x_2(t) = x_1(t - t_0).$$

La salida correspondiente a esta entrada entonces es

$$y_2(t) = \sin[x_2(t)] = \sin[x_1(t - t_0)].$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, observamos que $y_2(t) = y_1(t - t_0)$ *y por consiguiente es un sistema invariante en el tiempo.*

Ejemplo 1.13. *Consideremos el sistema de tiempo discreto definido por*

$$y[n] = nx[n]$$

y considere las respuestas a dos entradas $x_1[n]$ *y* $x_2[n]$*, donde* $x_2[n] = x_1[n - n_0]$*,*

$$y_1[n] = nx_1[n],$$

$$y_2[n] = nx_2[n] = nx_1[n - n_0].$$

Sin embargo, desplazando la salida $y_1[n]$*, obtenemos*

$$y_1[n - n_0] = (n - n_0)x_1[n - n_0] \neq y_2[n],$$

y por lo tanto concluimos que este sistema no es invariante en el tiempo.

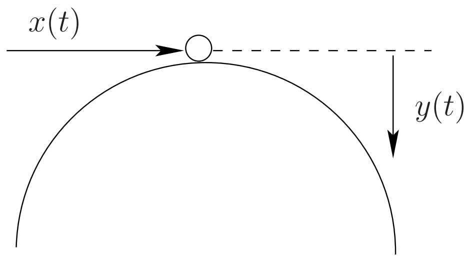

Figura 1.9: Sistema inestable

Un **sistema lineal**, en el tiempo continuo o discreto, es aquel que posee la importante propiedad de superposición: si una entrada consiste de la suma ponderada de varias señales entonces la salida es solo la superposición, es decir, la suma ponderada de las respuestas del sistema a cada una de estas señales. Matemáticamente, sean $y_1(t)$ y $y_2(t)$ las respuestas del sistema de tiempo continuo a las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente. Entonces el sistema es lineal si se cumple

- **Propiedad de aditividad de un sistema lineal:** La respuesta a $x_1(t) + x_2(t)$ es $y_1(t) + y_2(t)$
- **Propiedad de homogeneidad:** La respuesta a $\alpha x_1(t)$ es $\alpha y_1(t)$, en donde α es cualquier constante compleja.

La **estabilidad** es una propiedad importante de los sistemas. Intuitivamente, un sistema estable es aquel cuya salida no diverge.

Ejemplo 1.14. *Consideremos la situación ilustrada en la Figura 1.9, esa superficie es una colina con una pelota en la cresta. Si imaginamos un sistema cuya entrada es una aceleración horizontal aplicada a la pelota, entonces el sistema dibujado en la Figura 1.9 es inestable, ya que una pequeña perturbación en la posición horizontal de la pelota provocará que ruede hacia abajo de la colina.*

Ejemplo 1.15. *Consideremos la situación ilustrada en la Figura 1.10, la superficie es un valle con una pelota en la base. Si imaginamos un sistema cuya entrada es una aceleración horizontal aplicada a la pelota, entonces el sistema de la Figura 1.10 es estable,* *ya que pequeñas aceleraciones horizontales conducen a pequeñas perturbaciones en la posición vertical.*

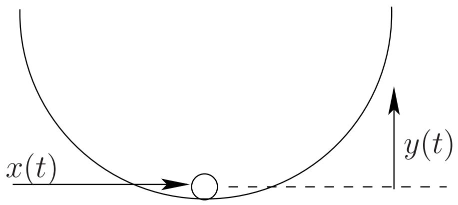

Figura 1.10: Sistema estable

Un sistema es **causal** si su salida en cualquier instante de tiempo depende solo de los valores de entrada en el tiempo presente y en el pasado. Tal sistema es con frecuencia llamado **no anticipativo** ya que la salida del sistema no anticipa valores futuros de la entrada.

Ejemplo 1.16. *El movimiento de un automóvil es causal ya que no anticipa acciones futuras del conductor.*

1.5. Ecuaciones de diferencias

Una ecuación de diferencias lineal de orden n con coeficientes constantes tiene la forma

$$a_{n+1}y_{k+n} + a_n y_{k+n-1} + \cdots + a_2 y_{k+1} + a_1 y_k = g(k),$$

donde los y_i denota los valores de la variable dependiente discreta y en el i–ésimo instante, para $i = k, k+1, \ldots, k+n$.

Sea $y_x = f(x)$, donde $x \in \mathbb{Z}$, entonces

- La primera diferencia de y_x es el cambio de y cuando x cambia de x a $x+1$ y se escribe

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x.$$

- La segunda diferencia de y_x es

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_x &= \Delta(\Delta y_x) = \Delta(y_{x+1} - y_x),\\ &= (y_{x+2} - y_{x+1}) - (y_{x+1} - y_x),\\ &= y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x.\end{aligned}$$

- La tercera diferencia de y_x es

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_x &= \Delta(\Delta^2 y_x) = \Delta y_{x+2} - 2\Delta y_{x+1} + \Delta y_x,\\ &= (y_{x+3} - y_{x+2}) - 2(y_{x+2} - y_{x+1}) + (y_{x+1} - y_x),\\ &= y_{x+3} - 3y_{x+2} - 3y_{x+1} + y_x.\end{aligned}$$

- La n–ésima diferencia de y_x es

$$\Delta^k y_x = \Delta(\Delta^{k-1} y_x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-1)!i!}(-1)^i y_{x+k-i}.$$

Ejemplo 1.17. *Consideremos la función* $y = 4x^2 - 5$*, la segunda diferencia es*

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_x &= \Delta y_{x+1} - \Delta y_x\\ &= (y_{x+2} - y_{x+1}) - (y_{x+1} - y_x)\\ &= [4(x+2)^2 - 5] - [4(x+1)^2 - 5] - [4(x+1)^2 - 5] - [4x^2 - 5]\\ &= 4(x+2)^2 - 5 - 4(x+1)^2 + 5 - 4(x+1)^2 + 5 + 4x^2 - 5\\ &= 4(x+2)^2 - 8(x+1)^2 + 4x^2\\ &= 4(x^2 + 4x + 4) - 8(x^2 + 2x + 1) + 4x^2\\ &= 4x^2 + 16x + 16 - 8x^2 + 16x + 8 + 4x^2\\ &= 8.\end{aligned}$$

1.5.1. Ecuaciones de diferencias lineales de primer orden con coeficientes constantes

La ecuación general de diferencias lineal de primer orden con coeficientes constantes tiene la forma

$$y_{x+1} = Ay_x + B,$$

con A y B constantes.

Hay tres casos especiales para la solución de esta ecuación.

1. La diferencia de primer orden es una constante: $y_{x+1} - y_x = B$ (Para $A = 1$), la solución es $y_x = y_0 + Bx$.

2. La diferencia de primer orden es proporcional a la variable y_{x+1}: $y_{x+1} - y_x = \alpha y_{x+1}$ (Para $A = \frac{1}{1-\alpha}$ y $B = 0$), la solución es $y_x = (\frac{1}{1-\alpha})^x y_0$.

3. La diferencia de primer orden es una función lineal de la variable y_{x+1}: $y_{x+1} - y_x = \alpha y_{x+1} + B$ (Para $A = B = \frac{1}{1-\alpha}$), la solución es $y_x = (\frac{1}{1-\alpha})^x y_0 + \frac{B}{\alpha}[y_x = (\frac{1}{1-\alpha})^x - 1]$.

Ejemplo 1.18. *Consideremos la ecuación $8y_{x+1} + 4y_x - 3 = 0$ con condición inicial $y_0 = \dfrac{1}{2}$, veamos la solución del problema.*

$$\begin{aligned} 8y_{x+1} + 4y_x - 3 = 0, \\ 8y_{x+1} &= -4y_x + 3, \\ y_{x+1} &= -\frac{1}{2}y_x + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned}
y_x &= \left(\frac{-1}{2}\right)^x y_0 + \frac{3}{8}\left(\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^x}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right),\\
y_x &= \left(-\frac{1}{2}\right)^x y_0 + \frac{3}{8}\left(\frac{1-(-\frac{1}{2})^x}{\frac{3}{2}}\right),\\
y_x &= \left(-\frac{1}{2}\right)^x y_0 + \frac{3}{8}\frac{2}{3} - \frac{3}{8}\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^x,\\
y_x &= \left(y_0 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)^x + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Ahora, si $y_0 = \dfrac{1}{2}$ *entonces la solución particular es*

$$\begin{aligned}
y_x &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{4},\\
y_x &= \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{2}\right)^x + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.19. *Consideremos la ecuación* $5y_{x+1} - 5y_x + 4 = 0$ *con condición inicial* $y_0 = 3$*, entonces veamos la solución del problema.*

$$\begin{aligned}
5y_{x+1} - 5y_x + 4 &= 0,\\
5y_{x+1} &= 5y_x - 4,\\
y_{x+1} &= y_x - \frac{4}{5},\\
y_x &= y_0 - \frac{4}{5}x.
\end{aligned}$$

Ahora, si $y_0 = 3$ *entonces la solución particular es*

$$y_x = 3 - \frac{4}{5}x.$$

Ejemplo 1.20. *Consideremos la ecuación* $12y_{x+1} + 3y_x = 0$ *con condición inicial* $y_0 = 2$*, veamos la solución del problema.*

$$\begin{aligned}
12y_{x+1} + 3y_x &= 0,\\
12y_{x+1} &= -3y_x,\\
y_{x+1} &= \frac{-1}{4}y_x,\\
y_x &= \frac{-1}{4}^x y_0.
\end{aligned}$$

Ahora, si $y_0 = 2$ *entonces la solución particular es,*

$$y_x = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^x.$$

1.5.2. Ecuaciones de diferencias lineales de segundo orden con coeficientes constantes

La ecuación general en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes se escribe en la forma

$$y_{x+2} + Ay_{x+1} + By_x = g(x).$$

1. Consideremos primero el caso en que $g(x) = 0$, esto es,

   $$y_{x+2} + Ay_{x+1} + By_x = 0.$$

   Para obtener la solución de esta ecuación tomamos la ecuación auxiliar

   $$m^2 + Am + B = 0$$

   y encontramos sus raices usando la fórmula de la ecuación cuadrática

   $$m_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2},$$
   $$m_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}.$$

   Hay tres tipos de soluciones

   a) m_1 y m_2 son reales y distintas, entonces la solución es: $y_x = C_1 m_1^x + C_2 m_2^x$.

   b) m_1 y m_2 son reales e iguales, entonces la solución es: $y_x = C_1 m^x + C_2 m^x$.

   c) m_1 y m_2 son complejas, $m_1 = a + bi$ y $m_2 = a - bi$, entonces la solución es: $y_x = r^x(C_1 \cos\theta x + C_2 \sin\theta x)$, donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y θ es el ángulo tal que $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$.

Ejemplo 1.21. *Consideremos la ecuación de diferencias* $y_{x+2}+3y_{x+1}+2y_x=0$*, con condiciones iniciales* $y_0=2$*, y* $y_1=5$*. La ecuación auxiliar es* $m^2+3m+2=0$*, cuyas raices son*

$$m_1=\frac{-3+\sqrt{3^2-4\cdot 2}}{2}=-1,$$
$$m_2=\frac{-3-\sqrt{3^2-4\cdot 2}}{2}=-2.$$

Luego, la solución general es

$$y_x=C_1(-1)^x+C_2(-2)^x.$$

Ahora, si $y_0=2$*, y* $y_1=5$ *entonces*

$$2=C_1+C_2,$$
$$5=-1C_1-2C_2.$$

Luego, $C_1=1=C_2$*, por tanto la solución particular es*

$$y_x=(-1)^x+(-2)^x.$$

2. Ahora si $g(x)\neq 0$ entonces la ecuación de diferencias no es homogénea y tiene solución general y_x+y^*, donde y^* es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea. La forma de y^* depende de $g(x)$.

   Supongamos que $g(x)=K$ es una constante, es decir,

   $$y_{x+2}+Ay_{x+1}+By_x=K$$

   y supongamos que $y_x=z_x$ es la solución de la ecuación homogénea $y_{x+2}+Ay_{x+1}+By_x=0$. Ahora determinamos la solución de la ecuación no homogénea en la forma

   $$y_x=z_x+L,$$

   donde L es una constante. Luego,

   $$(z_{x+2}+L)+A(z_{x+1}+L)+B(z_x+L)=K,$$
   $$z_{x+2}+Az_{x+1}+Bz_x+(1+A+B)L=K.$$

Pero $z_{x+2}+Az_{x+1}+Bz_x = 0$, ya que z_x es una solución de la ecuación homogénea y

$$L = \frac{K}{1+A+B}.$$

Entonces, la solución de la ecuación no homogénea es

$$y_x = z_x + \frac{K}{1+A+B},$$

donde z_x es la solución de la ecuación homogénea correspondiente.

Capítulo 2

La Transformada z

En este capítulo hablaremos de la transformada z y presentaremos algunas de sus propiedades más importantes.

Definición 2.1. Sea $x(t)$ una función del tiempo definida para $t \geq 0$. Sea la sucesión $x(k)$ ó $x(kT)$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$, donde T es el período.

Se define la transformada z unilateral como

$$X(z) = \mathfrak{z}[x(t)] = \mathfrak{z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}, \qquad \text{con} \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{2.1}$$

Cuando $T = 1$ se tiene

$$X(z) = \mathfrak{z}[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}, \qquad \text{con} \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{2.2}$$

Se define la transformada z bilateral como

$$X(z) = \mathfrak{z}[x(t)] = \mathfrak{z}[x(kT)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) z^{-k}, \qquad \text{con} \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{2.3}$$

Cuando $T = 1$ se tiene que:

$$X(z) = \mathfrak{z}[x(k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k}, \qquad \text{con} \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{2.4}$$

2.1. Transformada z de funciones elementales

1. Función escalón unitario:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad t \geq 0, \\ 0, & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

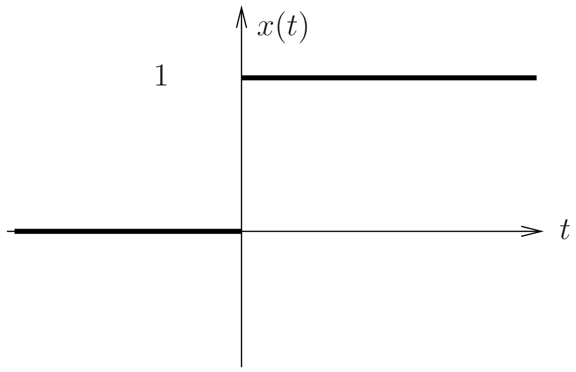

Figura 2.1: Función escalón unitario.

La transformada z de $x(t)$ es

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathfrak{z}[x(t)] = \mathfrak{z}[1] && \text{Definición de la función} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} && \text{Definición de la transformada } z \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots && \text{Definición de sumatoria} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} && \text{Aplicación de la serie geométrica} \\ &= \frac{z}{z-1} && \text{Multiplicando por } \frac{z}{z} \end{aligned}$$

Luego, la transformada z de la función escalón unitario es,

$$X(z) = \frac{z}{z-1}.$$

2. Función rampa:

$$x(t) = \begin{cases} t, & \text{si} \quad t \geq 0, \\ 0, & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

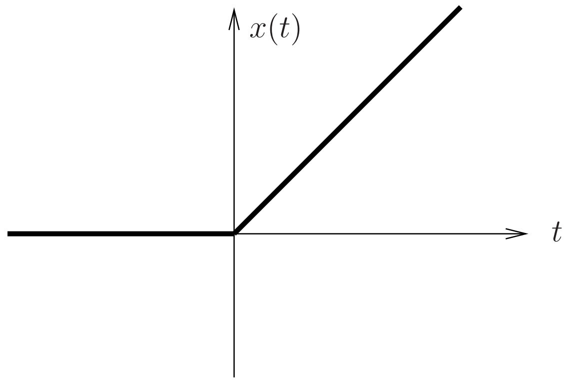

Figura 2.2: Función rampa.

La transformada z de $x(t)$ es

$$\begin{aligned}
X(z) &= \mathfrak{z}[x(t)] = \mathfrak{z}[t] && \text{Definición de la función}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k} && \text{Definición de la transformada } z\\
&= T\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} && \text{Propiedad de sumatoria}\\
&= T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots) && \text{Definición de sumatoria}\\
&= T\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} && \text{Aplicación de la serie geométrica}\\
&= \frac{Tz}{(z-1)^2} && \text{Multiplicando por } \frac{z^2}{z^2}
\end{aligned}$$

Luego, la transformada z de la función rampa es

$$X(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}\,.$$

3. Función polinomial:

$$x(t) = \begin{cases} a^k, & \text{si} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{si} \quad k < 0 \end{cases}$$

La transformada z de $x(t)$ es

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \mathfrak{z}[x(t)] = \mathfrak{z}[a^k] && \text{Definición de la función}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} && \text{Definición de la transformada } z\\
&= 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \cdots && \text{Definición de sumatoria}\\
&= \frac{1}{1-az^{-1}} && \text{Aplicación de la serie geométrica}\\
&= \frac{z}{z-a} && \text{Multiplicando por } \frac{z}{z}
\end{aligned}
$$

Luego, la transformada z de la función polinomial es

$$X(z) = \frac{z}{z-a}.$$

4. Función exponencial:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \text{si} \quad t \geq 0,\\ 0, & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

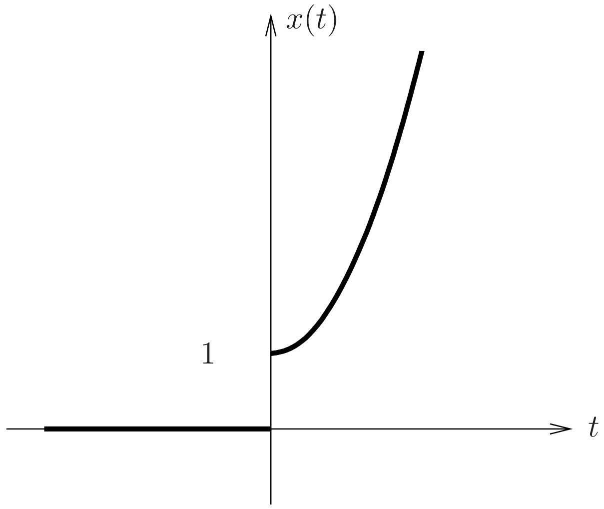

Figura 2.3: Función exponencial

La transformada z de $x(t)$ es

$$\begin{aligned}
X(z) &= \mathfrak{z}[e^{-at}] && \text{Definición de la función}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} && \text{Definición de la transformada } z\\
&= 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + e^{-3aT}z^{-3} + \cdots && \text{Definición de sumatoria}\\
&= \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} && \text{Aplicación de la serie geométrica}\\
&= \frac{z}{z - e^{-aT}} && \text{Multiplicando por } \frac{z}{z}
\end{aligned}$$

Luego, la transformada z de la función exponencial es

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}.$$

5. Función senosoidal:

$$x(t) = \begin{cases} \sin(wt), & \text{si} \quad t \geq 0,\\ 0, & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

Observemos que la transformada z de la función exponencial es

$$\mathfrak{z}[e^{-at}] = \frac{1}{1 - e^{-aT}z{-1}}$$

y que la función $\sin(wt)$ se puede escribir como

$$\sin(wt) = \frac{1}{2i}(e^{iwt} - e^{-iwt}).$$

Entonces, la Transformada z de $x(t)$ es

$$\begin{aligned}
X(z) &= \mathfrak{z}[\sin(wt)],\\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1 - e^{iwt}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-iwt}z^{-1}}\right),\\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{(e^{iwt} - e^{-iwt})z^{-1}}{1 - (e^{iwt} - e^{-iwt})z^{-1} + z^{-2}}\right),
\end{aligned}$$

$$= \frac{z^{-1}\sin(wT)}{1-2z^{-1}\cos(wT)+z^{-2}},$$

$$= \frac{z\sin(wT)}{z^2-2z\cos(wT)+1}.$$

Luego, la transformada z de la función $\sin(wt)$ es

$$X(z) = \frac{z\sin(wT)}{z^2-2z\cos(wT)+1}.$$

6. Función coseno:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(wt), & \text{si} \quad t \geq 0, \\ 0, & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

Recordemos que $\cos(wt) = \frac{1}{2}(e^{iwt}+e^{-iwt})$. Si procedemos de forma similar a la usada para encontrar la transformada z de la función $sin(wt)$, tenemos que la transformada z de $x(t)$ es

$$X(z) = \mathfrak{z}[\cos(wt)] = \frac{1}{2}\mathfrak{z}[e^{iwt}+e^{-iwt}],$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{iwt}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-iwt}z^{-1}}\right),$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2-(e^{iwt}+e^{-iwt})z^{-1}}{1-(e^{iwt}+e^{-iwt})z^{-1}+z^{-2}}\right),$$

$$= \frac{1-z^{-1}\cos(wT)}{1-2z^{-1}\cos(wT)+z^{-2}},$$

$$= \frac{z^2-z\cos(wT)}{z^2-2z\cos(wT)+1}.$$

Luego, la transformada z de la función $\cos(wt)$ es

$$X(z) = \frac{z^2-z\cos(wT)}{z^2-2z\cos(wT)+1}.$$

2.2. Propiedades y teoremas importantes de la transformada z

En esta sección presentaremos algunas propiedades y teoremas importantes de la transformada z.

Teorema 2.1. ***(Multiplicación por una constante)*** *Si $X(z)$ es la transformada z de $x(t)$, entonces*

$$\mathfrak{z}[ax(t)] = a\mathfrak{z}[x(t)] = aX(z), \tag{2.5}$$

donde a es una constante.

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}[ax(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} ax(t)z^{-k} && \text{Definición de la transformada } z \\ &= a\sum_{k=0}^{\infty} x(t)z^{-k} && \text{Propiedad de sumatorias} \\ &= a\mathfrak{z}[x(t)] && \text{Definición de la transformada } z \\ &= aX(z) && \text{Definición} \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2. ***(Propiedad de linealidad)*** *Sean $x(t)$ y $y(t)$ funciones que poseen transformada z y sean α y β constantes, entonces*

$$\mathfrak{z}[\alpha x(k) + \beta y(k)] = \alpha\mathfrak{z}[x(k)] + \beta\mathfrak{z}[y(k)]. \tag{2.6}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}[\alpha x(k) + \beta y(tk)] &= \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha x(k) + \beta y(k)] z^{-k} && \text{Definición de la transformada } z \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha x(k) z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta y(k) z^{-k} && \text{Propiedad de linealidad} \\
& && \text{en las sumatorias} \\
&= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} + \beta \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} && \text{Propiedad en sumatorias} \\
&= \alpha \mathfrak{z}[x(k)] + \beta \mathfrak{z}[y(k)] && \text{Definición}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.1. *La transformada z de $x(k+1)$ está dada por*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}[x(k+1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1) z^{-k}, \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} x(k) z^{-k+1}, \\
&= z x(0) + z \sum_{k=1}^{\infty} x(k) z^{-k} - z x(0), \\
&= z[\sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} - x(0)], \\
&= z[X(z) - x(0)].
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.2. *La transformada z de $x(k+2)$ está dada por,*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}[x(k+2)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k+2)z^{-k}, \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} x(k)z^{-k}z^{2}, \\
&= z^{2}x(0) + z^{2}x(1)z^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} x(k)z^{-k}z^{2} - z^{2}x(1)z^{-1}, \\
&= z^{2}\left(\sum_{k=2}^{\infty} x(k)z^{-k} - x(0) - x(1)z^{-1}\right), \\
&= z^{2}X(z) - z^{2}x(0) - zx(1).
\end{aligned}$$

Similarmente, se puede ver que

$$\mathfrak{z}[x(k+n)] = z^{n}X(z) - z^{n}x(0) - z^{n-1}x(1) - z^{n-2}x(2) - \cdots - zx(n-1). \quad (2.7)$$

Teorema 2.3. ***(Multiplicación por** a^k**)** Si $x(k)$ tiene transformada z, entonces*

$$\mathfrak{z}[a^{k}x(k)] = x(a^{-1}z). \quad (2.8)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}[a^{k}x(k)] &= \sum_{k=0}^{\infty} a^{k}x(k)z^{-k} && \text{Definición} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x(k)(a^{-1}z^{-k}) && \text{Propiedad conmutativa en } \mathbb{C} \\
&= X(a^{-1}z) && \text{Definición}
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.4. ***(Teorema de corrimiento ó de traslación real)** Si $x(t)$ tiene transformada z entonces*

i. $\mathfrak{z}[x(t-nT)] = z^{-n}\mathfrak{z}[x(t)],$ *para* $n = 0, 1, 2, \ldots.$

ii. $\mathfrak{z}[x(t+nT)] = z^{n}[\mathfrak{z}[x(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}],$ *para* $n = 0, 1, 2, \ldots.$

Demostración. i.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{z}[x(t-nT] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT)z^{-k}\\
&= z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT)z^{-k+n}\\
&= z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT))z^{-(k-n)}\\
&= z^{-n}\sum_{m=-n}^{\infty} x(mT)z^{-m}\\
&= z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty} x(mT)z^{-m}\\
&= z^{-n}\mathfrak{z}[x(t)]
\end{aligned}
$$

ii.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{z}[x(t+nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT+nT)z^{-k}\\
&= z^{n}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT+nT)z^{-(k+n)}\\
&= z^{n}[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT+nT))z^{-(k+n)} + \sum_{k=0}^{n-1} x(kT))z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT))z^{-k}]\\
&= z^{n}[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}]\\
&= z^{n}[\mathfrak{z}[x(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}]
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 2.3. *Sea*

$$
u(t) = \begin{cases} t-2T, & \textit{si} \quad t \geq 0,\\ 0, & \textit{si} \quad t < 0. \end{cases}
$$

Para encontrar la transformada z de $u(t)$ utilizaremos el teorema de traslación real.

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}[u(t-2T)] &= z^{-2}\mathfrak{z}[u(t)],\\ &= z^{-2}\frac{1}{1-z^{-1}},\\ &= \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}}.\end{aligned}$$

Luego, $\mathfrak{z}[u(t-2T)] = \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}}$.

Teorema 2.5. ***(Teorema de traslación compleja)***

Si $x(t)$ tiene transformada z entonces

$$\mathfrak{z}[e^{-(at)}x(t)] = X(ze^{aT}). \tag{2.9}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}[e^{-(at)}x(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-akT}z^{-k},\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(ze^{-aT})^{-k},\\ &= X(ze^{aT}).\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.4. *Sea $x(t) = te^{-at}$, notemos que*

$$\mathfrak{z}[t] = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = X(z).$$

Además, utilizando el teorema de traslación compleja tenemos

$$\mathfrak{z}[te^{-at}] = X(ze^{at}) = \frac{Te^{-at}z^{-1}}{(1-e^{-at}z^{-1})^2}$$

Ejemplo 2.5. *Sea $x(t) = e^{-at}cos(wt)$, para encontrar su transformada z notemos que*

$$\mathfrak{z}[cos(wT)] = \frac{z^2 - z\cos(wT)}{z^2 - 2z\cos(wT) + 1}.$$

Además, utilizando el teorema de traslación compleja sustituimos ze^{at} por z, entonces

$$\mathfrak{z}[e^{-at}cos(wt)] = \frac{z^2e^{2at} - ze^{at}\cos(wT)}{z^2e^{2at} - 2ze^{at}\cos(wT) + 1}.$$

Teorema 2.6. ***(Teorema del valor inicial)***

Si $X(z) = \mathfrak{z}[x(t)]$ y el $\lim\limits_{z\to\infty} X(z)$ existe, entonces el valor inicial de $x(0)$ de $x(t)$ ó $x(k)$ está dado por

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(Z). \tag{2.10}$$

Demostración. Para demostrar este teorema notemos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}[x(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}\\ &= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots\end{aligned}$$

Haciendo que $z \to \infty$ en la última ecuación, obtenemos la ecuación (2.9). El comportamiento del signo en la región de $t = 0$ ó $k = 0$ puede estar determinada por el comportamiento de $X(z)$ cuando $z = \infty$. □

Ejemplo 2.6. *Determinemos $x(0)$ sabiendo que la transformada z de $x(t)$ es*

$$X(z) = \frac{1-(1-aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}.$$

Usamos el teorema del valor inicial y obtenemos

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} \frac{1-(1-aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2} = 1.$$

Luego, el valor inicial de $x(t)$ es $x(0) = 1$.

Teorema 2.7. ***(Teorema de Convolución Real)***

Sean las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$, donde

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 0, \qquad \textit{para } t < 0,\\ x_2(t) &= 0, \qquad \textit{para } t < 0.\end{aligned}$$

Supongamos que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tienen transformada z igual a $X_1(z)$ y $X_2(z)$ respectivamente. Entonces,

$$X_1(z)X_2(z) = \mathfrak{z}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x_1(hT)x_2(kT-hT)\right]. \tag{2.11}$$

Demostración.

$$\mathfrak{z}\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)x_2(kT-hT)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)x_2(kT-hT)z^{-k},$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} x_1(hT)x_2(kT-hT)z^{-k},$$

donde sabemos que $x_2(kT-hT) = 0$ para $h > k$. Ahora definimos $m = k-h$, entonces

$$\mathfrak{z}\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)x_2(kT-hT)\right] = \sum_{h=0}^{\infty} x_1(hT)z^{-h} \sum_{m=-h}^{\infty} x_2(mT)z^{-m}.$$

Además, $x_2(mT) = 0$ para $m < 0$ y de esta última ecuación obtenemos

$$\mathfrak{z}\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)x_2(kT-hT)\right] = \sum_{h=0}^{\infty} x_1(hT)z^{-h} \sum_{m=0}^{\infty} x_2(mT)z^{-m}$$
$$= X_1(z)X_2(z).$$

□

El siguiente teorema se utiliza para obtener la transformada z de dos secuencias.

Teorema 2.8. ***(Teorema de Convolución Compleja)***

Supongamos que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos secuencias con $k < 0$ y

$$X_1(z) = \mathfrak{z}[x_1(t)], \qquad \textit{para } |z| > R_1,$$
$$X_2(z) = \mathfrak{z}[x_2(t)], \qquad \textit{para } |z| > R_2,$$

donde R_1 y R_2 son dos radios de convergencia absoluta para $x_1(k)$ y $x_2(k)$, respectivamente. Entonces,el producto de dos transformadas $x_1(k)$ y $x_2(k)$ está dado por

$$\mathfrak{z}[x_1(k)x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c \xi^{-1}X_2(\xi)X_1(\xi^{-1}z)d\xi, \tag{2.12}$$

donde $R_2 < |\xi| < |z|/R_1$.

Demostración. Para demostrar este teorema tomamos la transformada z de $x_1(k)x_2(k)$

$$\mathfrak{z}[x_1(k)x_2(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)x_2(k)z^{-k}. \tag{2.13}$$

Las series en la parte derecha de la ecuación (2.13) convergen para $|z| > R$, donde R es el radio de convergencia absoluta para $x_1(k)x_2(k)$ y de la ecuación

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}^{-1}[X(z)] &= x(kT) = x(k),\\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz,\end{aligned}$$

en donde C es un círculo con centro en el origen del plano z tenemos

$$\begin{aligned}x_2(k) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_2(z)z^{k-1}dz,\\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_2(\xi)\xi^{k-1}d\xi.\end{aligned}$$

Luego, sustituimos la ecuación anterior por la ecuación (2.13) y se tiene

$$\mathfrak{z}[x_1(k)x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \xi^{-1}X_2(\xi)\sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)(\xi^{-1}z^{)}-kd\xi.$$

Como

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)(\xi^{-1}z)^{-k} = X_1(\xi^{-1}z),$$

entonces,

$$\mathfrak{z}[x_1(k)x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c \xi^{-1}X_2(\xi)X_1(\xi^{-1}z)d\xi,$$

donde C es un círculo con centro en el origen y ξ está en la región dada por $|\xi| > R_2$ y $|\xi^{-1}z| > R_1$ o equivalentemente $R_2 < |\xi| < \frac{|z|}{R_1}$. $\square$

Teorema 2.9. *Sean $x_1(k)$ y $x_2(k)$ dos secuencias que tienen por transformada z las funciones $X_1(z)$ y $X_2(z)$ respectivamente, tales que*

$$\begin{aligned}X_1(z) &= \mathfrak{z}[x_1(k)], \qquad |z| > R_1,\\ X_2(z) &= \mathfrak{z}[x_2(k)], \qquad |z| > R_2.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^2(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1}X(z)X(z^{-1}z)dz. \tag{2.14}$$

Demostración. Por hipótesis sabemos que las secuencias $x_1(k)$ y $x_2(k)$ tienen transformada z y además que

$$X_1(z) = \mathfrak{z}[x_1(k)], \qquad |z| > R_1$$
$$X_2(z) = \mathfrak{z}[x_2(k)], \qquad |z| > R_2$$

y la inecuación $R_2 < |\xi| < \frac{|z|}{R_1}$ se satisface para $|z| = 1$, es decir $R_2 < |\xi| < \frac{1}{R_1}$. Entonces, sustituimos $|z| = 1$ en la ecuación

$$\mathfrak{z}[x_1(k)x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \xi^{-1} X_2(\xi) X_1(\xi^{-1} z) d\xi$$

y obtenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}[x_1(k)x_2(k)]_{|z|=1} &= \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)x_2(k), \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \xi^{-1} X_2(\xi) X_1(\xi^{-1} z) d\xi.\end{aligned}$$

Si colocamos $x_1(k) = x_2(k) = x(k)$ en esta ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} x^2(k) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \xi^{-1} X(\xi) X(\xi^{-1} z) d\xi, \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{-1} X(z) X(z^{-1} z) dz.\end{aligned}$$

Esta ecuación es el teorema de Parseval. Este teorema es usado para obtener la suma de $x^2(k)$. □

Nº	$x(t)$	$x(kT)$ **o** $x(k)$	$X(z)$
1.	$1(t)$	$1(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
2.	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
3.	t	kT	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
4.	t^2	$(kT)^2$	$\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
5.	t^3	$(kT)^3$	$\frac{T^3z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$
6.	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
7.	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bt})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$
8.	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
9.	$(1-at)e^{-at}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
10.	t^2e^{-at}	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{T^2e^{-aT}(1+e^{-aT}z^{-1})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^3}$
11.	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{[(aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z^{-1}]z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-aT}z^{-1})}$
12.	$\sin wt$	$\sin wkT$	$\frac{z^{-1}\sin wT}{1-2z^{-1}\cos wT+z^{-2}}$
13.	$\cos wt$	$\cos wkT$	$\frac{1-z^{-1}\cos wT}{1-2z^{-1}\cos wT+z^{-2}}$
14.	$e^{-at}\sin wt$	$e^{-akT}\sin wkT$	$\frac{e^{-aT}z^{-1}\sin wT}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos wT+e^{-aT}z^{-2}}$
15.	$e^{-at}\cos wt$	$e^{-akT}\cos wkT$	$\frac{1-e^{-aT}z^{-1}\cos wT}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos wT+e^{-aT}z^{-2}}$
16.	$\cdots$	a^k	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
17.	$\cdots$	a^{k-1}, con $k=1,2,3,\ldots$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$
18.	$\cdots$	ka^{k-1}	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
19.	$\cdots$	k^2a^k	$\frac{z^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$
20.	$\cdots$	k^3a^k	$\frac{z^{-1}(1+4az^{-1}+a^2z^{-2})}{(1-az^{-1})^4}$
21.	$\cdots$	k^4a^k	$\frac{z^{-1}(1+11az^{-1}+11a^2z^{-2}+a^3z^{-3})}{(1-az^{-1})^5}$
22.	$\cdots$	$a^k\cos k\Pi$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
23.	$\cdots$	$1,\quad k=0$ $0,\quad k\neq 0$	1
24.	$\cdots$	$1,\quad n=k$ $0,\quad n\neq k$	z^{-k}

Cuadro 2.1: Tabla de la transformada z

Capítulo 3

Transformada z Inversa

La Transformada z inversa de $X(z)$ da como resultado la correspondiente secuencia de tiempo $x(k)$. A partir de la transformada z inversa solo se obtiene la secuencia de tiempo en los instantes de muestreo. Así, la transformada inversa de $X(z)$ da como resultado una única $x(k)$, pero no da una única $x(t)$ para $t = 0, T, 2T, \ldots$

Cuando $X(z)$, la transformada z de $x(kT)$ o $x(k)$, es dada la operación que determina la $x(kT)$ o $x(k)$ correspondiente se denomina **Transformada z inversa**.

Para calcular la transformada z inversa estudiaremos dos métodos

i. Método de la división directa.

ii. Método de descomposición en fracciones parciales.

3.1. Método de la división directa

La transformada z inversa se obtiene mediante la expansión de $X(z)$ en una serie infinita de potencias de z^{-1}.

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \\ &= x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \cdots + x(kT)z^{-k} + \cdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \\
&= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots + x(k)z^{-k} + \cdots
\end{aligned}
$$

entonces $x(kT)$ o $x(k)$ es el coeficiente del término z^{-k}. Por consiguiente los valores de $x(kT)$ o $x(k)$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$, se pueden determinar por inspección.

Aunque el presente método da los valores de $x(0), x(T), x(2T), \ldots$ de forma secuencial, es difícil de obtener una expresión para el término general de ciertos valores.

Las siguientes fórmulas a veces son útiles si se reconoce la expresión para una serie finita o infinita de z^{-1}.

$(1 - az^{-1})^3 = 1 - 3az^{-1} + 3a^2z^{-2} - a^3z^{-3}$

$(1 - az^{-1})^4 = 1 - 4az^{-1} + 6a^2z^{-2} - 4a^3z^{-3} + a^4z^{-4}$

$(1 - az^{-1})^{-1} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + a^4z^{-4} + \cdots \qquad |z| > 1$

$(1 - az^{-1})^{-2} = 1 + 2az^{-1} + 3a^2z^{-2} + 4a^3z^{-3} + 5a^4z^{-4} + \cdots \qquad |z| > 1$

$(1 - az^{-1})^{-3} = 1 + 3az^{-1} + 6a^2z^{-2} + 10a^3z^{-3} + 15a^4z^{-4} + \cdots \qquad |z| > 1$

$(1 - az^{-1})^{-4} = 1 + 4az^{-1} + 10a^2z^{-2} + 20a^3z^{-3} + 35a^4z^{-4} + \cdots \qquad |z| > 1$

Ejemplo 3.1. *Sea*

$$X(z) = \frac{1}{(z-1)^2 z^2}.$$

Para encontrar $x(k)$ *cuando* $k = 0, 1, 2, 3, 4$*, primero expresamos* $X(z)$ *en la forma*

$$X(z) = \frac{z^{-4}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{z^{-4}}{1 - 2z^{-1} + z^2},$$

ahora dividiendo el numerador entre el denominador se obtiene $X(z)$ *escrito como un polinomio en* z^{-1}

$$X(z) = z^{-4} + 2z^{-5} + 3z^{-6} + 4z^{-7} + 5z^{-8} + \cdots$$

Comparando la serie de expansión infinita de $X(z)$ *con* $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$*, se obtiene*

$$x(0) = 0$$
$$x(1) = 0$$
$$x(2) = 0$$
$$x(3) = 0$$
$$x(4) = 1$$
$$x(5) = 2$$
$$x(6) = 3$$
$$x(7) = 4$$
$$x(8) = 5$$

Es decir, que la transformada inversa de $X(z) = \frac{1}{(z-1)^2 z^2}$ *tiene la forma*

$$x(k) = \begin{cases} 0, & \textit{si } k = 0, 1, 2, 3 \\ k - 3 & \textit{si } k \geq 4 \end{cases}$$

3.2. Método de descomposición en fracciones parciales

La linealidad de la transformada z nos permite utilizar este método para obtener la transformada z inversa de $X(z)$.

Para encontrar la transformada z inversa, se emplea la siguiente técnica:

1. Escriba $X(z)$ como una suma de fracciones parciales con coeficientes constantes.
2. Exprese cada fracción parcial de $X(z)$ como potencias de z^{-1}.
3. Obtenga la inversa de cada término con la ayuda de las tablas.

4. Obtenga $x(k)$ sumando los términos hallados.

Ejemplo 3.2. *Sea*

$$X(z) = \frac{1}{(z-1)^2 z^2}$$

Para encontrar $x(k)$ cuando $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Se expande $X(z)$ en fracciones parciales, y se obtiene

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{(z-1)^2 z^2}, \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{2}{(z-1)} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^2}, \\ &= \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{2z^{-1}}{1-z^{-1}} + z^{-2} + 2z^{-1}. \end{aligned}$$

Ahora, calculando la transformada z inversa de cada fracción se tiene:

$$\mathfrak{z}^{-1}\left[\frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}\right] = \mathfrak{z}^{-1}\left[z^{-1}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right] = \begin{cases} k-1, & \textit{si } k = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & \textit{si } k \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathfrak{z}^{-1}\left[\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\right] = \mathfrak{z}^{-1}\left[z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}}\right] = \begin{cases} 1, & \textit{si } k = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & \textit{si } k \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathfrak{z}^{-1}[z^{-2}] = \begin{cases} 1, & \textit{si } k = 2 \\ 0 & \textit{si } k \neq 2 \end{cases}$$

$$\mathfrak{z}^{-1}[z^{-1}] = \begin{cases} 1, & \textit{si } k = 1 \\ 0 & \textit{si } k \neq 1 \end{cases}$$

Luego, la transformada z inversa de $X(z)$ es

$$x(k) = \begin{cases} 0 - 0 + 0 + 0 = 0, & k = 0 \\ 0 - 2 + 0 + 2 = 0, & k = 1 \\ 1 - 2 + 1 + 0 = 0, & k = 2 \\ k - 1 - 2 + 0 + 0 = k - 3, & k = 3, 4, 5, \ldots \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, 2, 3 \\ k - 3, & k = 4, 5, 6, \ldots \end{cases}$$

Capítulo 4

Aplicaciones de la Transformada z

4.1. Solución de ecuaciones de diferencias

Recordemos que una ecuación de diferencias lineal de orden n con coeficientes constantes tiene la forma

$$a_{n+1}y_{k+n} + a_n y_{k+n-1} + \cdots + a_2 y_{k+1} + a_1 y_k = g(k).$$

Una ecuación de diferencias puede interpretarse como la ecuación que rige un sistema de datos muestreados donde los $y_{(i)}$, con $i = k, k+1, ..., k+n$ son los valores de las señales de salida del sistema correspondientes a intervalos de tiempo T, las a_i con $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ son constantes y $g(k)$ es una señal de entrada del sistema.

La transformada z es usada para solucionar ecuaciones de diferencias lineales.

Ejemplo 4.1. *Considere la ecuación de diferencias de segundo orden,*

$$x(k+2) + 0{,}5x(k+1) + 0{,}2x(k) = u(k)$$

donde

$$u(k) = u_s(k) = 1 \quad \texttt{para} f = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Las condiciones iniciales de $x(k)$ son $x(0) = 0$ y $x(1) = 0$. Aplicamos la transformada

z en ambos lados de la ecuación, y obtenemos,

$$[z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)] + 0{,}5[zX(z) - zx(0)] + 0{,}2X(z) = U(z)$$

La transformada z de $u(k) = \frac{z}{z-1}$. Sustituimos las condiciones iniciales de $x(k)$ y $U(z)$ en la ecuacioón anterior y solucionamos para $X(z)$, y se obtiene,

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2 + 0{,}5z + 0{,}2)}$$

Aplicando el método de expansión en fracciones parciales se tiene,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{0{,}588}{z-1} - \frac{1{,}036\varrho^{j1{,}283}}{z + 0{,}25 + j0{,}37} - \frac{1{,}036\varrho^{j1{,}283}}{z + 0{,}25 - j0{,}37}$$

Donde los exponentes en los coeficientes del numerador estan en radianes. Aplicando la transformada z inversa de $X(z)$, resulta,

$$\begin{aligned} x(k) &= 0{,}588 - 1{,}036(0{,}447)^k[\varrho^{-j2{,}165k-1{,}283} + \varrho^{j2{,}165k-1{,}283}] \\ &= 0{,}588 - 2{,}072(0{,}447)^k \cos(2{,}165k - 1{,}283) \quad \textit{con} \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

4.2. Análisis y caracterización de los sistemas LTI usando la Transformada z

La transformada z es importante en el análisis y representación de los sistemas LTI de tiempo discreto. Partiendo del teorema de convolución, donde $X(z), Y(z)$ son las transformadas de la entrada, salida y respuesta al impulso del sistema, respectivamente. $H(z)$ es una función de transferencia o la función del sistema.

Para los sistemas caracterizados por ecuaciones lineales de diferencias con coeficientes constantes, las propiedades de la transformada z proveen un procedimiento muy conveniente para obtener la función de transferencia, la respuesta en la frecuencia o la respuesta en el dominio del tiempo del sistema.

Ejemplo 4.2. *Consideremos el sistema LTI en el cual la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ satisfacen la ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes*

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1].$$

Aplicando la transformada z en ambos lados de la ecuación, y usando la propiedad de linealidad y la propiedad de desplazamiento en el tiempo, obtenemos

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^-1Y[z] = X[z] + \frac{1}{3}z^-1X[z]$$

o

$$Y(z) = X[z][\frac{1 + \frac{1}{3}z^-1}{1 - \frac{1}{2}z^-1}]$$

y por la propiedad de convolución tenemos,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^-1}{1 - \frac{1}{2}z^-1}$$

Esta proporciona la expresión algebraica de $H(z)$ pero no la región de convergencia. De hecho hay dos respuestas al impulso distintas que son consistentes con la ecuación de diferencias inicial, una derecha y otra izquierda. De modo que , hay dos posibles selecciones difrentes de la región de convergencia asociada con la expresión algebraica final. Una , $\mid z \mid > \frac{1}{2}$ está asociada con la suposición de que $h[n]$ es una señal derecha y la otra $\mid z \mid < \frac{1}{2}$ está asociada con la suposición de que $h[n]$ es una señal izquierda.

Para el caso más general de una ecuación de diferencias de orden N, se procede de igual forma que en el ejemplo anterior, aplicando la transformada z en ambos lados de la ecuación y usamos las propiedades de linealidad y desplazamiento en el tiempo. Por consiguiente, consideramos un sistema LTI para el cual la entrada y la salida satisfacen una ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

luego,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y[z] = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} X[z]$$

o

$$Y[z]\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X[z]\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}$$

de modo que

$$H[z] = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Observemos en particular que la función de transferencia de un sistema que satisface una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes siempre es racional. Mirando el ejemplo anterior la ecuación por si misma no nos brinda información acerca de la región de convergencia asociada con la expresión algebraica $H(z)$. Sin embargo, una restricción adicional como la causalidad o la estabilidad del sistema, sirve para especificar la región de convergencia.

La transformada z de tiempo discreto permite reemplazar las operaciones en el dominio del tiempo tales como la convolución y el desplazamiento en el tiempo, con operaciones algebraicas. El empleo de la transformada z para convertir descripciones de sistemas a ecuaciones de dieferencias algebraicas también es útil en el análisis de las conexiones de sistemas LTI, como conexiones en serie, paralelo y retroalimentadas. Por ejemplo consideremos una conexión retroalimentada de dos sistemas como se muestra en la figura 4.1. Es difícil determinar en el dominio del tiempo la ecuación en diferencias o la respuesta al impulso del sistema total. Sin embargo con los sistemas y las secuencias expresadas en términos de su transformada z, el análisis involucra sólo ecuaciones algebraicas. Las ecuaciones específicas de las conexiones de la figura 4.1 son exactamente iguales a las ecuaciones, con el resultado final de que la función de transferencia total del sistema retroalimentado de la figura 4.1 es

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}.$$

Un sistema LTI representado por una ecuación lineal en diferencias finitas se transforma por medio de la transformada z en

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

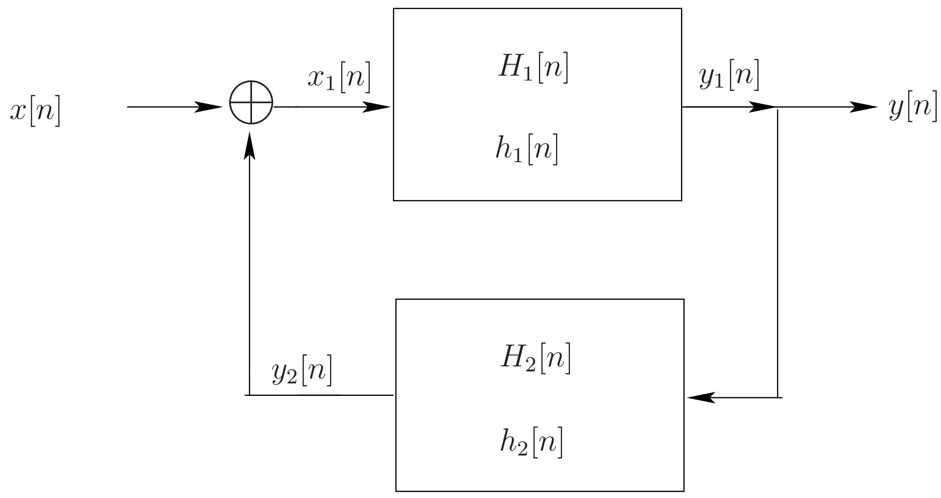

Figura 4.1: Conexión retroalimentada de dos sistemas

que es la ley de Ohm generalizada. A la relación entre la salida y la entrada del sistema se le llama transferencia $H(z)$.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

La solución general del sistema es la convolución:

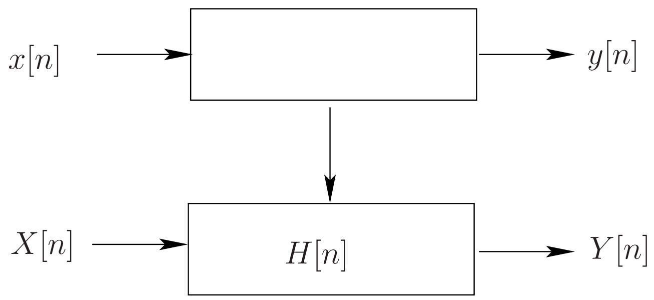

Figura 4.2: Sistemade transferencia $H(z)$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Ejemplo 4.3. *Resolver el circuito de la figura con* $x[n] = u[n]$.

La ecuación del circuito es:

$$y[n] = x[n] + ay[n-1] \qquad x[n] = u[n]$$

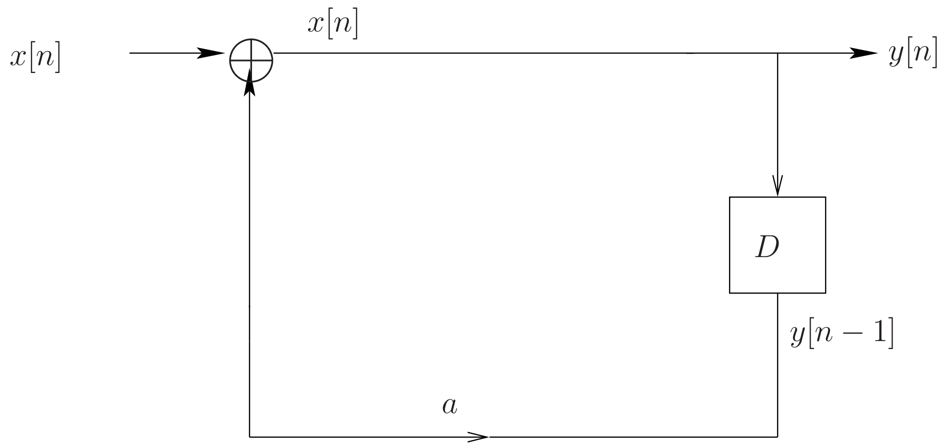

Figura 4.3: Circuito

Despejamos $x[n]$

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

Ahora aplicamos la transformada z *en ambos lados de la ecuación y obtenemos,*

$$\begin{aligned} Y(z) - az^{-1}Y(z) &= X(z) \\ Y(z)[1 - az^{-1}] &= \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ Y(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \frac{1}{1-\frac{a}{z}} \\ Y(z) &= \frac{z^2}{(z-1)(z-a)} \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de convolución, para $a \neq 1$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \frac{1}{1-\frac{a}{z}} \\ y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k]u[n-k] \\ y[n] &= \sum_{k=0}^{n} a^k u[k]u[n-k] = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^{n-1} + a^n. \end{aligned}$$

Bibliografía

APOSTOL, Tom M. Calculus. Introducción, con vectores y geometría Analitica . Volumen I. Editorial Reverter. Barcelona, Buenos Aires, México.

DRAPER, J. Matemáticas para Administración y Economía. Harla, S.A., 1976, México D. F.

KUO, Benjamin C.*Automatic Control Systems*. VI edición. Editorial Prentice-hall Internacional Editions, 1991, New Jersey.

OGATA, Katsuhiko. Discrete - Time Control Systems. II edición. Editorial Prentice-hall, Inc., 1987, New Jersey.

OPPENHEIM, Alan V., WILLSKY, Alan S. Sistemas y señales. Prentice.hall, Hispanoamericana, S.A., 1983, México, D. F.

SWOKOWSKI, Earl W. Álgebra y Trigonometria con Geometría Analítica. II Edición. Grupo Editorial Iberoamericana, 1986, México.