Operadores Nucleares y Operadores Compactos

Holman Alejandro Pérez Ayala

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2017

Operadores Nucleares y Operadores Compactos

Holman Alejandro Pérez Ayala

Propuesta de trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director
Ronald Eduardo Paternina Salguedo
Doctor en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2017

AGRADECIMIENTOS

Gracias mamá por tu total entrega y sacrificio, has hecho todo lo posible para que cumpla mis objetivos en la vida. Espero recompensarte todo eso como lo mereces.

Un agradecimiento especial al profesor Ronald Paternina, su guía y paciencia fueron de gran ayuda en el desarrollo de este trabajo. También a todas esas personas que me brindaron su apoyo en el transcurso de este logro, sin su ayuda no se hubiese conseguido.

Índice general

RESUMEN

TÍTULO: OPERADORES NUCLEARES Y OPERADORES COMPACTOS.[1]

AUTOR: HOLMAN ALEJANDRO PÉREZ AYALA [2]

PALABRAS CLAVE: OPERADOR NUCLEAR; OPERADOR COMPACTO; PRODUCTO TENSORIAL INYECTIVO; PRODUCTO TENSORIAL PROYECTIVO; ESPACIOS $C(Q)$.

DESCRIPCIÓN:

En 1955 el matemático Alexander Grothendieck introduce los operadores nucleares en su artículo Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *con el fin de generalizar los operadores de clase-trazo definidos en espacios de Hilbert. Una serie de trabajos a partir de entonces centraron su atención en el estudio de los operadores nucleares definidos en espacios de funciones.*

Este trabajo consiste en estudiar algunos conceptos y definiciones sobre operadores nucleares relacionandolos con la teoría de operadores compactos. En el primer capítulo se abordarán algunos resultados previos necesarios en el desarrollo del proyecto en capítulos posteriores, por ejemplo teoremas fundamentales sobre operadores compactos, forma polar de un operador y la integral de Bocnher.

En el segundo capítulo se definirá el concepto de operador nuclear y de norma nuclear, se presentan y demuestran una serie de teoremas que muestran la relación existente entre los operadores nucleares y los operadores compactos y se estudian los operadores nucleares en espacios de Hilbert.

En el tercer capítulo se establece la teoría necesaria para la demostración del teorema principal, el cual es la no existencia de un isomorfismo entre el espacio $\mathcal{N}(C(Q))$ (espacio de operadores nucleares sobre $C(Q)$) y un subespacio de $\mathcal{K}(C(Q'))$ (espacio de operadores compactos sobre $C(Q')$), siendo Q y Q' espacios métricos compactos y numerables.

[1]Trabajo de grado

[2]Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Dr. Ronald Eduardo Paternina Salguedo

ABSTRACT

TITLE: NUCLEAR OPERATORS AND COMPACT OPERATORS.[3]

AUTHOR: HOLMAN ALEJANDRO PÉREZ AYALA [4]

KEYWORDS: NUCLEAR OPERATOR; COMPACT OPERATOR; INJECTIVE TENSORIAL PRODUCT; PROJECTIVE TENSORIAL PRODUCT; SPACES $C(Q)$.

DESCRIPTION:

In 1955 Alexander Grothendieck introduced the nuclear operators in his article Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *in orden to generalize the trace-class operators defined in Hilbert's spaces. A number of works thereafter focused their attention on the study of nuclear operators defined in function spaces.*

This work consists on the study of some concepts and definitions about nuclear operators in relation to the theory of compact operators. The first chapter will address some preliminary results necessary in the development of the project in later chapters, for example, fundamental theorems about compact operators, polar form of an operator and the Bocnher's integral.

In the second chapter we will define the concept of nuclear operator and nuclear norm, we present and proof a series of theorems that show the relationship between nuclear operators and compact operators and study nuclear operators in Hilbert' spaces.

The third chapter establishes the theory necessary for the proof of the main theorem, which is the non-existence of an isomorphism between the space $\mathcal{N}(C(Q))$ (space of nuclear operators on $C(Q)$) and a subspace of $\mathcal{K}(C(Q'))$ (space of compact operators on $C(Q')$), where Q and Q' are contable compact metric spaces.

[3] Bachelor Thesis

[4] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Dr. Ronald Eduardo Paternina Salguedo

LISTA DE SÍMBOLOS

$E, F, X, Y, ...$	Espacios de Banach
$\alpha, \beta, \gamma, ...$	Números ordinales
ω	Primer ordinal infinito contable
ω_1	Primer ordinal no contable
B_E	Bola cerrada unitaria en el espacio E
E^*, E'	Dual algebraico y dual topológico del espacio E
$\langle\alpha, \beta\rangle$	$\{\gamma : \alpha \leq \gamma \leq \beta\}$
$\langle\alpha, \beta)$	$\{\gamma : \alpha \leq \gamma < \beta\}$
$C(\alpha)$	Espacio de funciones continuas $f : \langle 1, \alpha\rangle \to \mathbb{R}$
$C(\alpha, E)$	Espacio de las funciones continuas $f : \langle 1, \alpha\rangle \to E$
$C_0(\alpha, E)$	$\{x \in C(\alpha, E) : x(\alpha) = 0\}$
c_0	Espacio de sucesiones escalares convergentes a cero
ℓ_p	$\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{+\infty} \lvert x_n\rvert^p < +\infty\}$ con $1 \leq p < +\infty$
$L_1(\mu)$	Espacio de las funciones Lebesgue integrables
$L_1(\mu, E)$	Espacio de las funciones Bochner integrables
$\mathcal{L}^*(X, Y)$	Espacio de los operadores lineales
$\mathcal{L}(X, Y)$	Espacio de los operadores lineales continuos
$\mathcal{B}(X, Y)$	Espacio de los operadores lineales acotados
$\mathcal{L}^f(X, Y)$	Espacio de los operadores lineales de rango finito
$\mathcal{K}(X, Y)$	Espacio de los operadores compactos
$\mathcal{N}(X, Y)$	Espacio de los operadores nucleares
$B^*(X, Y; Z)$	Espacio de los operadores bilineales
$B^*(X, Y)$	Espacio de las formas bilineales
$B(X, Y)$	Espacio de las formas bilineales continuas
$E \otimes F$	Producto tensorial entre los espacios E y F
$\lVert\cdot\rVert_\varepsilon$	Norma inyectiva en $E \otimes F$
$\lVert\cdot\rVert_\pi$	Norma proyectiva en $E \otimes F$
$E\widehat{\otimes}_\varepsilon F$	Completante del espacio $(E \otimes F, \lVert\cdot\rVert_\varepsilon)$
$E\widehat{\otimes}_\pi F$	Completante del espacio $(E \otimes F, \lVert\cdot\rVert_\pi)$

INTRODUCCIÓN

Los operadores nucleares fueron introducidos primero bajo el nombre de operadores de *clase-trazo* cuando R. Schatten y John von Neumann investigaron la pregunta de cuales funciones lineales continuas en un espacio de Hilbert determinan un trazo significativo. Sin embargo, la extensión de estas ideas a espacios de Banach fue liderada por Grothendieck en 1955 (ver [8]).

Grothendieck define un operador nuclear entre dos espacios de Banach X e Y y describe el espacio de los operadores nucleares $\mathcal{N}(X,Y)$. Grothendieck demuestra que todo operador nuclear es compacto es decir que $\mathcal{N}(X,Y) \subseteq \mathcal{K}(X,Y)$ y propone el problema de determinar si existen espacios de Banach X e Y de dimensión infinita tal que todo operador compacto $T : X \longrightarrow Y$ es nuclear. No en tanto, ya existian algunas respuestas negativas para este problema en algunos casos particulares de espacios de Banach X e Y. Por ejemplo, Dvoretzky y Rogers estudian el problema en el caso $X = c_0$ e Y es un espacio de Banach, demostrando que existe un operador compacto no nuclear $T : c_0 \longrightarrow Y$.

Podemos destacar también el trabajo de W. Jonhson en 1974 que demuestra que si X e Y son espacios de Banach con estructura incondicional local entonces existe un operador compacto no nuclear $T : X \longrightarrow Y$. A partir de este resultado aparecen multiples relaciones importantes entre los espacios de operadores nucleares y los espacios de operadores compactos.

A lo largo del tiempo se transforma un poco el interes hacia el estudio de las relaciones geométricas entre estos conjuntos, es decir, en demostrar que si X es un espacio de funciones continuas en un intervalo de ordinales enumerables $\langle 1, \alpha \rangle$, $(X = C(\alpha))$ entonces no existe un isomorfismo entre el espacio de operadores nucleares y un subespacio de los operadores compactos, siendo este el objetivo principal de este trabajo.

El estudio de los operadores compactos surgió gracias a la teoría de las ecuaciones integrales de la forma

$$(T - \lambda I)x(s) = y(s) \quad \textit{donde} \quad Tx(s) = \int_a^b k(s,t)x(t)dt \tag{1}$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$ parámetro complejo, con el *kernel* k e y funciones dadas (sujetas a ciertas condiciones), y x la función desconocida. Estas ecuaciones las cuales se encuentran en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales poseen la sorprendente propiedad descubierta por D. Hilbert (1912) que la solubilidad de (1) (Teoría de Fredholm) no depende de la existencia de la representación integral de (1) si no solo de la hipótesis que T en (1) sea un operador lineal compacto.

Para un operador lineal compacto, la teoría espectral queda totalmente desarrollada en el sentido de la teoría de Fredholm de las ecuaciones integrales y puede ser extendida a una ecuación funcional lineal $Tx - \lambda x = y$ con un parámetro complejo λ. Esta teoría generalizada recibe el nombre de *Riesz-Schauder*; *F. Riesz*(1918) y *J. Schauder* (1930).

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1. OPERADORES COMPACTOS

Definición 1.1.1. ***(Operador Compacto)*** *Sean X y Y espacios de Banach, un operador lineal $T \in \mathcal{L}^*(X,Y)$ es* ***Compacto*** *o* ***Completamente Continuo*** *si para cada subconjunto acotado M de X, la imagen $T(M)$ es relativamente compacta en Y, esto es, la clausura $\overline{T(M)}$ es compacta.*

El conjunto de todo los operadores compactos entre los espacios X y Y se notará por $\mathcal{K}(X,Y)$, cuando $X = Y$ por simplicidad se escribirá $\mathcal{K}(X)$. Se presentarán ahora criterios de compacidad para un operador $T \in \mathcal{L}^*(X,Y)$.

Teorema 1.1.1. ***(Criterio de Compacidad)*** *Sean X y Y espacios de Banach y T un operador lineal $T \in \mathcal{L}^*(X,Y)$. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(i) $T \in \mathcal{K}(X,Y)$.
(ii) *$T(B_X)$ es relativamente compacto en Y.*
(iii) *Para toda sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, la sucesión $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente.*
(Ver [15], Proposición 4.2.2 pág 186)

El nombre compactos se debe a la naturaleza de su definición, completamente continuos es debido a que todo operador compacto es continuo aunque su recíproco no es cierto.

Teorema 1.1.2. *Sean X, Y espacios de Banach, si $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ entonces $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y por tanto T es acotado* (ver [18], Teorema 7.2 pág 206).

Observación 1.1.1. *No todo operador continuo es compacto, esto sucede si la $\dim X = \infty$ y T es el operador identidad. En efecto, dado que B_X es acotado y por el hecho de la no compacidad de B_X; así, $I_X(B_X) = B_X = \overline{B_X}$ no es compacto* (ver [11], Lemma 8.1-2 pág 406).

Teorema 1.1.3. *Sean X, Y y Z espacios de Banach. Entonces*

(i) Si S, $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ y α, $\beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha S + \beta T$ es compacto. Esto es, $\mathcal{K}(X,Y)$ es subespacio de $\mathcal{L}(X,Y)$.

(ii) Si $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$ y al menos un operador S ó T es compacto, entonces $T \circ S$ es compacto.
(Ver [18], Teorema 7.3 pág 206)

Observación 1.1.2. *Como el operador identidad I_X no es compacto cuando $\dim X = \infty$, a partir de aquí notemos que si $T \in \mathcal{K}(X)$, entonces T no es invertible. En efecto, supongamos que el operador T es invertible, luego el operador $I_X = T^{-1} \circ T$ debe ser compacto por el teorema anterior, lo que contradice el hecho de la no compacidad del operador identidad.*

Teorema 1.1.4. *Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, entonces*

(i) Si $T \in \mathcal{L}^f(X,Y)$ entonces $T \in \mathcal{K}(X,Y)$.
(ii) Si $\dim X$ ó $\dim Y$ es finita entonces $T \in \mathcal{K}(X,Y)$.
(Ver [11], Teorema 8.1-4 pág 407)

Ahora presentamos una propiedad importante de la imagen directa de los operadores compactos.

Teorema 1.1.5. *Sean X, Y espacios de Banach. Si $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ entonces $T(X)$ y $\overline{T(X)}$ son separables* (ver [18], Teorema 7.8(b) pág 208).

En el siguiente teorema se considera una manera de demostrar que un operador dado es compacto, la cual es de gran importancia en un desarrollo posterior de la teoría.

Teorema 1.1.6. *Si X, Y son espacios de Banach y $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{K}(X,Y)$ la cual converge al operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, (convergencia uniforme, es decir, $\|T_k - T\| \longrightarrow 0$), entonces $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Esto implica que $\mathcal{K}(X,Y)$ es cerrado en $\mathcal{L}(X,Y)$* (ver [11], Teorema 8.1-5 pág 408).

Como consecuencia directa del Teorema 1.1.6 tenemos que los operadores de rango finito son densos en $\mathcal{K}(X,Y)$, lo cual se presenta en el siguiente corolario.

Corolario 1.1.1. *Sean X, Y espacios de Banach, y sea $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{L}^f(X,Y)$ la cual converge a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, entonces $T \in \mathcal{K}(X,Y)$*

El siguiente teorema el cual relaciona a los operadores compactos con su operador adjunto, es otra caracterización para ellos.

Teorema 1.1.7. ***(Schauder)*** *Sean X y Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Entonces $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ si y solamente si $T^* \in \mathcal{K}(Y',X')$ donde T^* es el operador adjunto asociado a T* (ver [1], Teorema 6.4 pág 159).

Ahora daremos otra caracterización de los operadores compactos en el caso que esten definidos en espacios de Hilbert.

Teorema 1.1.8. *Sean $\mathcal{H}$ e $\mathcal{I}$ espacios de Hilbert. Un operador lineal $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H},\mathcal{I})$ si y solo si transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones fuertemente convergentes* (ver [15], Teorema 4.2.3 pág 187).

A continuación presentamos ejemplos clásicos de operadores compactos.

Ejemplo 1.1.1. *El operador $T \in \mathcal{B}(\ell_2)$ definido por $T(a_n) = (n^{-1}a_n)$ es operador compacto* (ver [18], Ejemplo 7.11 pág 210).

Ejemplo 1.1.2. *Sea* $K : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función real continua definida para* $-\infty < a \leq x, y \leq b < +\infty$. *Entonces el* ***Operador Integral*** $T \in \mathcal{L}(C[a,b])$ *definido por*

$$Tf(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy \tag{1.1}$$

es un operador compacto (ver [24], Ejemplo 1. pág 277).

1.2. FORMA POLAR DE UN OPERADOR

Todo número complejo z se puede expresar como $z = |z|w$, donde w es un número complejo tal que $|w| = 1$. Los operadores compactos en espacios de Hilbert cumplen una propiedad similar.

Definición 1.2.1. *Un operador* T *en un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *es hermitiano si* $T^* = T$, *donde* T^* *es el operador adjunto de* T.

Definición 1.2.2. *Un operador* T *en un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *es positivo si* $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ *para todo* $x \in \mathcal{H}$.

Observación 1.2.1. *Observemos que si* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ *donde* $\mathcal{H}$ *e* $\mathcal{I}$ *son espacios de Hilbert, entonces* $S = T^* \circ T$ *es un operador hermitiano positivo en* $\mathcal{H}$ *donde* T^* *es el operador adjunto de* T *en espacios de Hilbert. En efecto,* $S^* = (T^* \circ T)^* = T^* \circ T^{**} = T^* \circ T = S$ *y* $\langle Sx, x\rangle = \langle T^* \circ Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$ *para todo* $x \in \mathcal{H}$.

Definición 1.2.3. *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert,* S *y* T *operadores hermitianos en* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, *definamos la relación* $S \preceq T$ *si y solo si* $T - S$ *es positivo.*

Observación 1.2.2. *La relación definida anteriormente es una relación de orden parcial en el conjunto de los operadores hermitianos.*

Definición 1.2.4. *Si* $T \succeq 0$ *diremos que el operador* U *es* ***una raíz cuadrada*** *de* T *si* $U^2 = U \circ U = T$ *y* $U \succeq 0$.

Observación 1.2.3. *Es posible demostrar la existencia y unicidad de la raíz cuadrada positiva para todo operador hermitiano y positivo* T*, el cual se denotará* $T^{\frac{1}{2}}$*.*

Proposición 1.2.1. *La raíz cuadrada de un operador hermitiano y positivo es un operador hermitiano positivo* (ver [15], Proposición 4.6.2 pág 212).

Definición 1.2.5. *Sean* $\mathcal{H}$ *e* $\mathcal{I}$ *espacios de Hilbert y* $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$*. Diremos que* W *es una* ***isometría parcial*** *si preserva las normas de los elementos en* $G = (Ker(W))^{\perp}$*. Es decir,* $\|Wg\|_{\mathcal{I}} = \|g\|_{\mathcal{H}}$ *para todo* $g \in G$*.*

Observación 1.2.4. *Si* W *es una isometría parcial, entonces* $\|W\| = 1$*.*

Definición 1.2.6. *Sean* $\mathcal{H}$ *e* $\mathcal{I}$ *espacios de Hilbert y* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$*, el* ***módulo*** *de* T *es el operador* $(T^* \circ T)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$*, el cual se denotará por* $|T|$*.*

Mostraremos ahora algunas propiedades del módulo en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.2. *Si* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$*, entonces* $|T|$ *posee las propiedades siguientes;*

(i) $|T|$ *es un operador hermitiano y positivo de* $\mathcal{H}$ *en* $\mathcal{H}$*.*
(ii) $\|Tx\| = \||T|x\|$ *para todo* $x \in \mathcal{H}$*.*
(iii) $Ker(T) = Ker(|T|)$ *y* $(Ker(T))^{\perp} = \overline{|T|(\mathcal{H})}$*.*
(iv) T *es compacto si y solo si* $|T|$ *es compacto*
(v) *Si* $S = |T|$*, entonces* $|S| = |T|$*.*
(Ver [15], Proposición 4.6.4 pág 213)

Ahora se presenta el Teorema de la descomposición polar de un operador lineal continuo.

Teorema 1.2.1. ***(Descomposición polar)****. Sean* $\mathcal{H}$ *e* $\mathcal{I}$ *espacios de Hilbert y* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$*. Entonces existe una única isometría parcial* $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ *tal que* $T = W \circ |T|$*. Además;*

(i) $Ker(W) = Ker(T) = Ker(|T|)$*.*
(ii) $(Ker(W))^{\perp} = \overline{|T|(\mathcal{H})}$ *y* $W(\mathcal{H}) = \overline{T(\mathcal{H})}$*.*
(Ver [15], Teorema 4.6.5 pág 214)

Por último presentamos propiedades adicionales

Proposición 1.2.3. *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $T = W \circ |T|$ la descomposición polar de T, entonces;*

(i) $\;W^* \circ W = P$ *donde P es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\overline{|T|(\mathcal{H})}$.*
(ii) $\;W \circ W^* = Q$ *donde Q es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\overline{T(\mathcal{H})}$.*
(iii) $\;|T| = W^* \circ T$.
(iv) $\;T^* = |T| \circ W^*$.
(v) $\;|T^*| = W \circ |T| \circ W^*$.
(Ver [15], Proposición 4.6.6 pág 215)

1.3. INTEGRAL DE BOCHNER

La integral de Bochner extiende la definición de la integral de Lebesgue a funciones que toman valores en un espacio de Banach y se define como el límite de integrales de funciones simples.

Definición 1.3.1. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medición y B un espacio de Banach, una* ***función simple*** *es cualquier suma finita de de la forma*

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) b_i,$$

donde los E_i son elementos disjuntos de la σ-álgebra Σ, los b_i son elementos distintos de B, y χ_E es la función característica de E.

Si $\mu(E_i)$ y $b_i \neq 0$, entonces la función simple es integrable y la integral se define por

$$\int_{\Omega} s(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) b_i \tag{1.2}$$

Definición 1.3.2. ***(Integral de Bochner)*** *Una función medible $f : \Omega \to B$ es Bochner integrable si existe una sucesión de funciones simples integrables s_n tal que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\|f-s_n\|_B d\mu=0, \tag{1.3}$$

donde la integral del lado izquierdo es un integral de Lebesgue ordinaria.

En este caso, la integral de Bochner se define por

$$\int_{\Omega} f d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} s_n d\mu. \tag{1.4}$$

Una caracterización conveniente para las funciones Bochner integrables es dado en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.1. *Una funcion $f:\Omega\to B$ μ-medible es Bochner integrable si y solo si* $\int_{\Omega}\|f\|_B d\mu<+\infty$ (ver [6], Teorema 2. pág 45).

El conjunto de todas las funciones $f:\Omega\to B$ μ-medibles y Bochner integrables se denotará por $L_1(\mu,B)$.

1.4. RESULTADOS QUE SE UTILIZARÁN EN EL CAPÍTULO 3

Teorema 1.4.1. *Sea Γ un conjunto infinito. Entonces son válidos:*

(i) $\ell_1(\Gamma)$ es isomorfo ó $\ell_1(\Gamma)\oplus\ell_1(\Gamma)$.
(ii) c_0 no es isomorfo a un subespacio de $\ell_1(\Gamma)$.

Demostración:

(i) Como Γ es infinito, existen subconjuntos Γ_1 y Γ_2 tal que $|\Gamma_1|=|\Gamma|$ y $|\Gamma_2|=|\Gamma|$ y $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ (ver [20]). También es claro que si $|\Gamma_1|=|\Gamma|$ entonces $\ell_1(\Gamma)$ es isomorfo a $\ell_1(\Gamma_1)$, vemos que:

$$
\begin{aligned}
\ell_1(\Gamma) &= \ell_1(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \\
&= \ell_1(\Gamma_1) \oplus \ell_1(\Gamma_2) \sim \ell_1(\Gamma) \oplus \ell_1(\Gamma).
\end{aligned}
$$

(En nuestro caso Γ puede ser tomada enumerable y tomar Γ_1 como el conjunto de los pares y Γ_2 los impares).

(ii) Ver [12]. pág 148.

Teorema 1.4.2. ***(Pelzynski-Semadeni)*** *Sea K un interválo de ordinales. Si ξ pertenece a $C(K)^*$ entonces existen sucesiones $(a_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ y $(t_n)_{n\geq 1}$ en K tal que*

$$
\xi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \xi(t_n) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty.
$$

En particular $C(\alpha)^* \sim \ell_1(\langle 0, \alpha\rangle)$.

Demostración: (ver [13], pág 215-217).

Definición 1.4.1. *Si X y X' son dos espacios de Banach, la distancia de Banach-Mazur entre X y X' es*

$$
d(X, X') = \text{ínf}\left\{\|T\|\|T^{-1}\| : T : X \to X' \text{ es un isomorfismo sobreyectivo}\right\}.
$$

Definición 1.4.2. *Si X es un espacio de Banach, decimos que X contiene ℓ_∞^n uniformemente, si existe una sucesión de subespacios $(E_n)_{n\geq 1}$ de dimensión finita de X tal que*

$$
\sup_{n\in\mathbb{N}} d(E_n, \ell_\infty^n) < +\infty.
$$

Observación 1.4.1. *En* [2], P. Cembranos y J. Mendoza *establece una definición equivalente a la dada anteriormente. Ellos demuestran que un espacio de Banach* X *contiene a* ℓ_∞^n *uniformemente si y solo si existen sucesiones* $(E_n)_{n\geq 1}$, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *donde* E_n *son subespacios de dimesión finita de* X, $\mu_n : E_n \to \ell_\infty^n$ *y* $v_n : \ell_\infty^n \to E_n$ *son operadores lineales limitados con* $\|\mu_n\| \leq 1$ *y* $\|v_n\| = 1$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Un ejemplo clásico de un espacio de Banach* X *que contiene* ℓ_∞^n *uniformemente es el espacio* $X = (\ell_\infty^1 \oplus \ell_\infty^2 \oplus \cdots \oplus \ell_\infty^n \oplus \cdots)_{\ell_1}$. *Para demostrar esto basta tomar* $E_n = \ell_\infty^n$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\mu_n = v_n = identidad$.

La próxima definición nos ayuda a decir cuando un espacio contiene ℓ_∞^n uniformemente solo calculando un número real.

Definición 1.4.3. *Sea* p *un número real positivo con* $1 \leq p \leq \infty$ *y* X *es un espacio de Banach. Decimos que* X *tiene cotipo* p *si existe una constante positiva* C *tal que para cualquier conjunto finito* $(x_j)_{j\geq 1}$ *en* X *es válida:*

$$C \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n \gamma_j(r) x_j \right\| dr \geq \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $(\gamma_j)_{j\geq 1}$ *son las funciones de Rademacher.*

Observación 1.4.2. *Suponiendo que* $1 \leq p < \infty$ *en* ([22], Teorema II.A.23, pág 98) *se demuestra que* ℓ_p *tiene cotipo* $\text{máx}\{2, p\}$. *En particular* ℓ_1 *tiene cotipo 2.*

Teorema 1.4.3. *Sea* X *un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X *no tiene cotipo finito*
(ii) X *contiene* ℓ_∞^n *uniformemente.*

Demostración: (ver [4], pág 299).

Capítulo 2

OPERADORES NUCLEARES

En este capítulo estudiaremos algunos resultados sobre los operadores nucleares definidos en espacios de Banach, comentando las características que comparten con los operadores compactos. Estas condiciones son importantes ya que por largo tiempo los especialistas en esta rama han buscado construir una teoría para los operadores nucleares que sea semejante a la teoría de los operadores compactos, ya que esta última presenta aplicaciones a la teoría de ecuaciones diferenciales.

Utilizaremos la descomposición polar de un operador continuo para caracterizar a los operadores nucleares en espacios de Hilbert con ayuda de los operadores de Hilbert-Schmidt, resaltando el origen del concepto nuclear a partir de los operadores de *clase-trazo*.

En resumen este capítulo es una compilación de resultados sobre los operadores nucleares que busca destacar la importancia de estos en análisis funcional.

2.1. OPERADORES NUCLEARES EN ESPACIOS DE BANACH

El concepto de operadores nucleares fue introducido a principios de los años cincuenta por dos razones. Inspirado por la teoría de distribuciones, Grothendieck trabajando con productos tensoriales de espacios vectoriales localmente convexos, descubrió una versión abstracta del teorema del núcleo de Schwartz, el cuál expresa que casi todos los operadores que aparecen en análisis, se pueden representar por un núcleo distribucional. Esto explica el término nuclear.

Por otro lado, Ruston (1951) [17] y Grothendieck (1956) [8] extendieron la teoría de determinantes de Fredholm a operadores en espacios de Banach. Para este fin necesitaban una clase de operadores más amplia para la cual el concepto de traza sea significativo, dando origen a los operadores nucleares de traza cero.

Para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, la clase de Schatten-von Neumann conocida como operadores de *clase-trazo*, resultaba ser apropiada. Luego esta fue la vía indicada para espacios de Banach generales.

Observación 2.1.1. *Sean X y Y espacios de Banach. Si $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones en X' y Y respectivamente tal que $\sum_{n=1}^{+\infty}\|f_n^*\|\,\|y_n\| < +\infty$, entonces*

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=n}^{m} f_i^*(x)y_i\right\| &\leq \sum_{i=n}^{m}|f_i^*(x)|\,\|y_i\| \leq \sum_{i=n}^{m}\|f_i^*\|\,\|x\|\,\|y_i\| \\ &\leq \left(\sum_{i=n}^{m}\|f_i^*\|\,\|y_i\|\right)\|x\| \qquad \textit{para todo } x\in X \textit{ y } m>n\end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación

$$Tx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i^*(x)y_i\right); \qquad x\in X, \tag{2.1}$$

define un operador de X a Y, dado que este límite converge en la norma de T.

Observación 2.1.2. *No todo operador lineal T se puede expresar en esta forma. Esto llevó a Grothendieck a definir los operadores nucleares.*

Definición 2.1.1. ***(Operador nuclear)*** *Un operador $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ es llamado* ***operador nuclear*** *si existen sucesiones $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X' y Y respectivamente tal que*

(i) $Tx = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} f_n^*(x)y_n. \quad \forall x\in X.$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^*\| \, \|y_n\| < +\infty$.

Observación 2.1.3. *El conjunto de todos los operadores nucleares entre los espacios X y Y se notará por $\mathcal{N}(X,Y)$. Cuando $X = Y$, por simplicidad se escribirá $\mathcal{N}(X)$.*

Teorema 2.1.1. *El conjunto de los operadores nucleares $\mathcal{N}(X,Y)$ es un espacio vectorial normado con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$, llamada la **norma nuclear** definida por;*

$$\|T\|_{\mathcal{N}} = \text{ínf} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^*\| \, \|y_n\| : Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^*(x) y_n, \;\; x \in X \right\} \tag{2.2}$$

Demostración:

(N1) Demostremos que si $\|T\|_{\mathcal{N}} = 0$ entonces $T = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de norma nuclear existen sucesiones $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tal que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x) y_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^*\| \|y_n\| < \infty.$$

Además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^*\| \|y_n\| < \|T\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon = 0 + \varepsilon.$$

Luego

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x) y_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^*\| \|y_n\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in X$$

Así $\|T\| \leq \varepsilon \; \forall \varepsilon > 0$. Por tanto $T = 0$.

Recíprocamente, suponga que $T = 0$. Claramente $\|T\|_{\mathcal{N}} \geq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^*(x) y_n = 0$ y por tanto,

$$\|T\|_{\mathcal{N}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\theta_n^*\| \|y_n\| = 0 \implies \|T\|_{\mathcal{N}} \leq 0.$$

Por tanto $\|T\|_{\mathcal{N}} = 0$.

(N2) Sea $\lambda \neq 0$, $\varepsilon > 0$ y $T \in \mathcal{N}(X, Y)$.

Existen sucesiones $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X' e Y respectivamente tal que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x) y_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^*\| \|y_n\| < \|T\|_{\mathcal{N}} + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Ahora

$$\lambda T x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda f_n^*(x) y_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x) z_n \quad \text{donde} \quad z_n = \lambda y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así por definición de $\|\lambda T\|_{\mathcal{N}}$ y dado que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x) z_n$ es una representación del operador λT tenemos que

$$\begin{aligned} \|\lambda T\|_{\mathcal{N}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^*\| \|z_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^*\| \|y_n\| |\lambda| < \left(\|T\| + \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \right) |\lambda| \\ < |\lambda| \|T\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \|\lambda T\|_{\mathcal{N}} \leq |\lambda| \|T\|_{\mathcal{N}}. \end{aligned}$$

Esto muestra que si T es operador nuclear y $\lambda \neq 0$ entonces λT es operador nuclear y $\|\lambda T\|_{\mathcal{N}} \leq |\lambda| \|T\|_{\mathcal{N}}$.

Recíprocamente. Sea $\varepsilon > 0$ por definición de operador nuclear y de norma nuclear tenemos que existen sucesiones $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X' e Y respectivamente tal que

$$\lambda T x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x) z_n; \quad y_n = \frac{z_n}{\lambda},$$

$$Tx = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x) z_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x) y_n.$$

Y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^*\| \|z_n\| < \|\lambda T\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon.$$

Así,

$$\|T\|_{\mathcal{N}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^*\| \|y_n\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^*\| \|z_n\| < \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda T\|_{\mathcal{N}} + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Por lo tanto $|\lambda| \|T\|_{\mathcal{N}} < \|\lambda T\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon$, esto es $|\lambda| \|T\|_{\mathcal{N}} \leq \|\lambda T\|_{\mathcal{N}}$.

De lo anterior se tiene que $|\lambda| \|T\|_{\mathcal{N}} = \|\lambda T\|_{\mathcal{N}}$.

(N3) Sean S y T dos operadores nucleares, y sea $\varepsilon > 0$. Por definición de $\|S\|_{\mathcal{N}}$ y $\|T\|_{\mathcal{N}}$ existen sucesiones $(g_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$, $(f_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ en X' y $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en Y tal que

$$Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^*(x) y_n \quad \text{y} \quad Sx = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n^*(x) z_n,$$

con

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n^*\| \|z_n\| < \|S\|_{\mathcal{N}} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^*\| \|y_n\| < \|T\|_{\mathcal{N}} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como

$$\begin{aligned}(S+T)x &= \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^*(x) y_n + \sum_{n=1}^{+\infty} g_n^*(x) z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n^*(x) y_n + g_n^*(x) z_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n^*(x) w_n,\end{aligned}$$

con $\theta_n^*(x) = 1$ y $w_n = f_n^*(x) y_n + g_n^*(x) z_n$. Entonces,

$$\|S+T\|_{\mathcal{N}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|\theta_n^*(x)\|\|w_n\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n^*\|\|z_n\| + \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^*\|\|y_n\| < \|S\|_{\mathcal{N}} + \|T\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon,$$

esto es, $\|S+T\|_{\mathcal{N}} \leq \|S\|_{\mathcal{N}} + \|T\|_{\mathcal{N}}$. ∎

Veamos ahora que los operadores nucleares comparten propiedades con los operadores compactos presentadas en el Teorema 1.1.3.

Teorema 2.1.2. *Sean X, Y y Z espacios de Banach, entonces*

(i) $\mathcal{N}(X,Y)$ *es un subespacio lineal de* $\mathcal{L}(X,Y)$.

(ii) *Si S es un operador limitado y T es nuclear entonces $S \circ T$ es operador nuclear. También, si T es un operador limitado y S es nuclear entonces $S \circ T$ es operador nuclear.*

Demostración:

(i) Sean S, $T \in \mathcal{N}(X,Y)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego existen sucesiones (g_n^*), (f_n^*) en X' y (z_n), (y_n) en Y tales que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n^*\|\|z_n\| < +\infty \text{ y } \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^*\|\|y_n\| < +\infty, \tag{2.3}$$

con

$$Sx = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n^*(x) z_n \text{ y } Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^*(x) y_n. \tag{2.4}$$

Como

$$\lambda Tx = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^*(x) y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda f_n^*(x) y_n$$

y además

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|\lambda f_n^*\| \|y_n\| = |\lambda| \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^*\| \|y_n\| < +\infty,$$

tenemos que $\lambda T \in \mathcal{N}(X, Y)$.

Por otra parte, definamos $h_n^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h_n^*(x) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como todas las funciones h_n^* son continuas (al ser constantes), entonces $h_n^* \in X'$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así,

$$\begin{aligned}
(S+T)x = Sx + Tx &= \sum_{n=1}^{+\infty} g_n^*(x) z_n + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^*(x) y_n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (g_n^*(x) z_n + f_n^*(x) y_n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} h_n^*(x)(g_n^*(x) z_n + f_n^*(x) y_n) \quad \text{para } x \in X.
\end{aligned}$$

Definamos $w_n = (g_n^*(x) z_n + f_n^*(x) y_n)$. Así $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Y, por lo tanto,

$$(S+T)x = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n^*(x) w_n \quad \text{para } x \in X.$$

También

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \|h_n^*\| \|w_n\| = \sum_{n=1}^{+\infty} \|h_n^*\| \|g_n^*(x) z_n + f_n^*(x) y_n\| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|h_n^*\| \|g_n^*(x) z_n\| + \|h_n^*\| \|f_n^*(x) y_n\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n^*\| \|z_n\| + \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^*\| \|y_n\| < +\infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $S+T \in \mathcal{N}(X,Y)$.

(ii) Supongamos que $T \in \mathcal{N}(Y,Z)$. Entonces existen sucesiones $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y' y Z tal que $Ty = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^*(y)z_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^*\|\|z_n\| < +\infty$. Por lo tanto,

$$(T\circ S)x = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^*(Sx)z_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(f_n^*\circ S)(x).$$

Como S es limitado, entonces $f_n^*\circ S \in X'$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^*\circ S\|\|z_n\| &\le \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^*\|\|S\|\|z_n\| \\ &= \|S\| \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^*\|\|z_n\| \\ &= K < +\infty.\end{aligned}$$

Por tanto $T\circ S \in \mathcal{N}(X,Z)$.

Supongamos ahora que $S \in \mathcal{N}(X,Y)$. Entonces existen sucesiones $(g_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ en X' y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tal que $Sx = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n^*(x)y_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n^*\|\|y_n\| < +\infty$. Así

$$(T\circ S)x = T\left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n^*(x)y_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n^*(x)Ty_n = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n^*(x)z_n,$$

donde $z_n = Ty_n$ pertenece a Z para todo $n \in \mathbb{N}$. Consecuentemente,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n^*\|\|z_n\| = \sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n^*\|\|Ty_n\| \le \sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n^*\|\|T\|\|y_n\| = \|T\| \sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n^*\|\|y_n\| < +\infty.$$

Por lo tanto $T\circ S \in \mathcal{N}(X,Z)$ ∎

Proposición 2.1.1. *Sean X, Y y Z espacios de Banach. Entonces.*

(i) Si $T : Y \to Z$ es un operador nuclear y $S : X \to Y$ es un operador limitado entonces $T \circ S$ es nuclear y $\|T \circ S\|_{\mathcal{N}} \leq \|T\|_{\mathcal{N}}\|S\|$.

(ii) Si $S : X \to Y$ es un operador nuclear y $T : Y \to Z$ es un operador limitado entonces $T \circ S$ es nuclear y $\|T \circ S\|_{\mathcal{N}} \leq \|T\|\|S\|_{\mathcal{N}}$.

Demostración:

(i) En efecto, supongamos que $T \in \mathcal{N}(Y, Z)$ y $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operador lineal limitado con $\|S\| \neq 0$, luego dado que T es operador nuclear existen sucesiones $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y' y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Z, tales que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^*\|\|z_n\| < \|T\|_{\mathcal{N}} + \frac{\varepsilon}{\|S\|} \quad \text{y} \quad Ty = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^*(y)z_n \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|T \circ S\|_{\mathcal{N}} &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^* \circ S\|\|z_n\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^*\|\|S\|\|z_n\| \\
&= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^*\|\|z_n\| \right) \|S\| \\
&< \|T\|_{\mathcal{N}}\|S\| + \varepsilon \quad \forall\varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|T \circ S\|_{\mathcal{N}} \leq \|T\|_{\mathcal{N}}\|S\|$.

(ii) Por otro lado, supongamos que $S \in \mathcal{N}(X, Y)$ y $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$ un operador lineal limitado con $\|T\| \neq 0$. Dado que S es un operador nuclear existen sucesiones $(g_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ en X' y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y, tales que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n^*\|\|y_n\| < \|S\|_{\mathcal{N}} + \frac{\varepsilon}{\|T\|} \quad \text{y} \quad Sx = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n^*(x)y_n \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Entonces, al definir $z_n = Ty_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y dado que $T \circ S$ es operador nuclear por Teorema 2.1.2 tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|T \circ S\|_{\mathcal{N}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n^*\| \|z_n\| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n^*\| \|T\| \|y_n\| \\
&= \|T\| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n^*\| \|y_n\| \right) \\
&< \|T\| \|S\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\|T \circ S\|_{\mathcal{N}} \leq \|T\| \|S\|_{\mathcal{N}}$.

Como otra propiedad importante notemos que todo operador nuclear es operador compacto la cual se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.3. *Sean X y Y espacios de Banach. Entonces todo operador nuclear $T : X \longrightarrow Y$ es compacto, esto es, $\mathcal{N}(X, Y) \subseteq \mathcal{K}(X, Y)$.*

Demostración: Sea $T \in \mathcal{N}(X, Y)$, luego existen sucesiones $(f_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en X' y Y respectivamente tal que $Tx = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i^*(x) y_i$ y $\sum_{i=1}^{+\infty} \|f_i^*\| \|y_i\| < +\infty$.

Luego, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ tenemos que

$$
\sum_{i=n}^{+\infty} \|f_i^*\| \|y_i\| < \varepsilon \qquad \text{para todo } x \in X.
$$

Definamos el operador T_n por

$$
T_n x = \sum_{i=1}^{n} f_i^*(x) y_i, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}
$$

Note que $\mathrm{Im}(T_n) \subseteq \mathrm{Span}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, y por tanto $\dim T_n \leq \dim \mathrm{Span}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} < +\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto T_n tiene rango finito. Y dado que

$$
\|T_n x - Tx\| = \|Tx - T_n x\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{+\infty} f_i^*(x) y_i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} \|f_i^*\| \|y_i\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N,
$$

tenemos que $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Así, por Corolario 1.1.1, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ ■

Observación 2.1.4. *Como hecho importante a destacar todo operador nuclear es continuo al ser también operador compacto.*

Los operadores de rango finito juegan un papel importante en el estudio de la teoría de los operadores compactos y operadores nucleares. Aquí presentamos algunos resultados acerca de ellos.

Teorema 2.1.4. *Sean X y Y espacios de Banach, entonces $\mathcal{L}^f(X,Y) \subseteq \mathcal{N}(X,Y) \subseteq \overline{\mathcal{L}^f(X,Y)}$, esto es, el conjunto de los operadores de rango finito es denso en $(\mathcal{N}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$.*

Demostración: Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador de rango finito. Entonces $\mathrm{Im}T$ tiene dimesión finita. Luego existe $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ una base de $\mathrm{Im}T$. Por el teorema del Sistema Biortogonal existen $f_1, f_2, \ldots, f_n \in Y'$ tal que $f_i(y_j) = \delta_{ij}$ y cada $y \in \mathrm{Span}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ se tiene que $y = \sum_{i=1}^{n} f_i(y) y_i$. Ahora, definamos $g_i = f_i \circ T$ como T es de rango finito entonces T es compacto y por tanto limitado.

Luego $g_i \in X'$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Además si $x \in X$ entonces $Tx \in \mathrm{Im}T = \mathrm{Span}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Luego

$$
\begin{aligned}
Tx &= \sum_{i=1}^{n} f_i(Tx) y_i = \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ T)(x) y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} g_i(x) y_i.
\end{aligned}
$$

Así si tomamos $g_i = 0$, para todo $i > n$, obtenemos que T es operador nuclear.

Sea $T \in \mathcal{N}(X,Y)$, luego existen $f_n^* \in X'$, $y_n \in Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$
\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^*\| \|y_n\| < +\infty \quad \text{y} \quad Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^*(x) y_n \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad x \in X.
$$

Luego,como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^*\| \|y_n\|$ converge tenenemos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \in \mathbb{N}$ y $m \geq N$ entonces

$$\sum_{k=m}^{+\infty} \|f_k^*\|\|y_k\| < \varepsilon \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Así para cada $m \in \mathbb{N}$, definamos

$$T_m x = \sum_{k=1}^{m} f_k^*(x) y_k \qquad \text{para todo } x \in X,$$

luego T_m es de rango finito para cada $m \in \mathbb{N}$ y

$$Tx - T_m x = \sum_{k=m+1}^{+\infty} f_k^*(x) y_k \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Por definición 2.2, concluimos que

$$\|T - T_m\|_{\mathcal{N}} \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \|f_k^*\|\|y_k\| < \varepsilon \qquad \text{para todo } m \geq N.$$

Por lo tanto, $\|T_m - T\|_{\mathcal{N}} \longrightarrow 0$ cuando $m \longrightarrow \infty$, luego T es límite de una sucesión de operadores de rango finito ■

Observación 2.1.5. *El resultado anterior es una propiedad de los operadores nucleares con la norma nuclear, que comparte con los operadores compactos vistos como subespacio del espacio de los operadores continuos y expuesta en el Corolario* 1.1.1.

Como $\mathcal{L}^f(X,Y) \subseteq \mathcal{N}(X,Y) \subseteq \mathcal{K}(X,Y)$ los operadores nucleares son los operadores construibles de la forma más elemental que contienen a los operadores de rango finito. En el próximo teorema demostraremos que el conjunto de los operadores nucleares junto a lo norma nucleares un Espacio de Banach.

Teorema 2.1.5. *Sean X e Y espacios de Banach. Entonces*

(i) *Si $T \in \mathcal{N}(X,Y)$, entonces $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{N}}$.*
(ii) *$(\mathcal{N}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$ es un espacio de Banach.*

Demostración:

(i) Sea $\varepsilon > 0$, luego existen sucesiones $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X' e Y tal que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^*\|\|y_n\| < \|T\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon \quad \text{y} \quad Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^*(x)y_n, \quad \forall x \in X.$$

Entonces

$$\|Tx\| = \left\|\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^*(x)y_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n^*\|\|x\|\|y_n\| < \|T\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Luego si $\|x\| = 1$ tenemos que $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, así $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{N}}$.

b. Ahora desmostremos que $(\mathcal{N}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$ es completo. Sea $\varepsilon > 0$ y $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{N}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$. Entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si m, $n \geq N_0$, entonces $\|T_n - T_m\|_{\mathcal{N}} < \varepsilon$. Por item (i), tenemos que $\|T_n - T_m\| \leq \|T_n - T_m\|_{\mathcal{N}} < \varepsilon$ luego $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio completo $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$, por tanto existe $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\|T_n - T\| \to 0$.

Como $\|T_n - T_m\| \leq \|T_n - T_m\|_{\mathcal{N}} < \varepsilon$, para todo $n, m \geq N_0$ cuando $m \to \infty$ tenemos

$$\|T_n - T\| \leq \|T_n - T\|_{\mathcal{N}} < \varepsilon.$$

Luego $\|T_n - T\|_{\mathcal{N}} \to 0$.

Demostremos ahora que $T \in \mathcal{N}(X,Y)$. Como $T_n \in \mathcal{N}(X,Y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por Teorema 2.1.4, tenemos que existen $T_n^{(k)}$ en $\mathcal{L}^f(X,Y)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n^{(k)} - T_n\|_{\mathcal{N}} \to 0$, luego existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N_1$, entonces

$$\|T_n^{(k)} - T_n\|_{\mathcal{N}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

También existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$ entonces

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{N}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definamos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Entonces si $k, n \geq N$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|T_n^{(k)} - T\|_{\mathcal{N}} &\leq \|T_n^{(k)} - T_n\|_{\mathcal{N}} + \|T_n - T\|_{\mathcal{N}} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así, al hacer $k \to \infty$ y $n \to \infty$, tenemos que $\|T_n^{(k)} - T\|_{\mathcal{N}} \to 0$, y por Teorema 2.1.3. $T \in \mathcal{N}(X, Y)$. Por lo tanto $(\mathcal{N}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$ es completo. ∎

Si Y es un subespacio vectorial de un espacio de Banach Z y si T es operador nuclear. Entonces T, considerándolo como un operador lineal continuo de X a Z, es un operador nuclear de X a Z por Teorema 2.1.2(ii) ya que T es la composición de un operador nuclear y un embebimiento canónico ($T = j_Y \circ T$, donde $j_Y : Y \to Z$ es el embebimiento canónico). El recíproco también es válido; primero demostraremos un Lema preliminar.

Lema 2.1.1. *Sean Z un espacio de Banach y Y un subespacio denso de Z. Entonces si $z \in Z$ y $\delta > 0$, existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tal que*

$$z = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k \qquad y \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \|y_k\| < (1+\delta)\|z\|. \tag{2.6}$$

Demostración: Como Y es denso en Z, entonces $\overline{Y} = Z$, luego dado $z \in Z$ y $n \in \mathbb{N}$ existe un $a_n \in B\left(z, \frac{\delta}{2^{n+1}}\|z\|\right) \cap Y$, para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es,

$$\|z - a_n\| < \frac{\delta}{2^{n+1}}\|z\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definamos la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recursivamente por

$$y_1 = a_1 \qquad \text{y} \qquad y_n = a_n - a_{n-1} \quad \text{para } \; n > 1.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} y_k &= a_1 + \sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) \\ &= a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_n.\end{aligned}$$

Por tanto tenemos que

$$z = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k.$$

Además, por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}\|y_1\| = \|a_1\| &= \|a_1 - z + z\| \\ &\leq \|z - a_1\| + \|z\| < \frac{\delta}{2^2}\|z\| + \|z\| \\ &= \left(1 + \frac{\delta}{4}\right)\|z\|.\end{aligned}$$

También tenemos

$$\begin{aligned}\|y_n\| &= \|a_n - a_{n-1}\| = \|a_n - z + z - a_{n-1}\| \\ &\leq \|z - a_n\| + \|z - a_{n-1}\| < \frac{\delta}{2^{n+1}}\|z\| + \frac{\delta}{2^n}\|z\| \\ &= \left(\frac{\delta}{2^{n+1}} + \frac{\delta}{2^n}\right)\|z\|.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|y_1\| < \left(1 + \frac{\delta}{4}\right)\|z\| \qquad \text{y} \qquad \|y_n\| < \delta\|z\|\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n}\right) \; \text{ para } \; n > 1.$$

Finalmente, utilizando la serie convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ para $|a| < 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}\right) &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\\ &= \frac{3}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{3}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}-1-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(2-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\|y_n\| &= \|y_1\| + \sum_{n=2}^{+\infty}\|y_n\|\\ &< \left(1+\frac{\delta}{4}\right)\|z\| + \delta\|z\|\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}\right)\\ &= \left(1+\frac{\delta}{4}+\frac{3\delta}{4}\right)\|z\| = (1+\delta)\|z\|.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{+\infty}\|y_n\| < (1+\delta)\|z\|$. ■

Presentamos ahora la demostración del teorema citado anteriormente.

Teorema 2.1.6. *Sean X y Z espacios de Banach y sea Y un subespacio vectorial denso de Z, y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Si $T \in \mathcal{N}(X,Z)$, entonces $T \in \mathcal{N}(X,Y)$.*

Demostración: Sean $T \in \mathcal{N}(X,Z)$ y $\delta > 0$, luego existen sucesiones $(f_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en X' y Z respectivamente, tales que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\|f_k^*\|\|z_k\| < \|T\|_{\mathcal{N}(X,Z)} + \delta \quad \text{y} \quad Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k^*(x) z_k, \quad x \in X.$$

Para cada z_k, por Lema 2.1.1, y como Y es un subespacio denso en Z, existe una sucesión $(y_{k,m})_{m\in\mathbb{N}}$ en Y tal que

$$z_k = \sum_{m=1}^{+\infty} y_{k,m} \quad \text{y} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \|y_{k,m}\| < (1+\delta)\|z_k\|.$$

Sea $f^*_{k,m} = f^*_k$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Entonces

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} f^*_k(x) z_k = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} y_{k,m} f^*_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} f^*_{k,m}(x) y_{k,m} \qquad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Por definición de $\|T\|_{\mathcal{N}(X,Y)}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\|T\|_{\mathcal{N}(X,Y)} &\leq \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \|f^*_{k,m}\|\|y_{k,m}\| \\
&< \sum_{k=1}^{+\infty} \|f^*_k\|(1+\delta)\|z_k\| \\
&= (1+\delta)\sum_{k=1}^{+\infty} \|f^*_k\|\|z_k\| \\
&< (1+\delta)(\|T\|_{\mathcal{N}} + \delta).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|T\|_{\mathcal{N}(X,Y)} < +\infty$ y así T es operador nuclear de X en Y ■

Como resultado análogo al Teorema 1.1.7, presentamos a continuación un teorema parecido en el caso que T sea operador nuclear.

Teorema 2.1.7. *Sean X, Y espacios de Banach, si $T \in \mathcal{N}(X,Y)$, entonces $T^* \in \mathcal{N}(Y', X')$ y $\|T^*\|_{\mathcal{N}} \leq \|T\|_{\mathcal{N}}$ (utilizaremos $\|T^*\|_{\mathcal{N}}$ para referirnos a la norma de T^* en el espacio $\mathcal{N}(Y', X')$). Si además, el espacio Y es reflexivo, entonces $T \in \mathcal{N}(X,Y)$ si y solo si $T^* \in \mathcal{N}(Y', X')$; en este caso $\|T^*\|_{\mathcal{N}} = \|T\|_{\mathcal{N}}$.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$, como $T : X \to Y$ es nuclear existen sucesiones $(f^*_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X' e Y respectivamente, tales que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|f^*_k\|\|y_k\| < \|T\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon \qquad \text{y} \qquad Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} f^*_k(x) y_k, \quad x \in X.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, el funcional $F_k : X' \to \mathbb{R}$, por $F_k(y^*) = y^*(y_k)$. Por la definición de operador adjunto tenemos

$$\begin{aligned} T^* y^* &= y^* \circ T \\ &= y^* \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k^* y_k \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} y^*(y_k) f_k^* \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} F_k(y^*) f_k^* \qquad \forall y^* \in Y'. \end{aligned}$$

Además,

$$\|F_k\| = \sup_{\|g\|=1} |F_k(g)| = \sup_{\|g\|=1} |g(y_k)| = \|y_k\|.$$

Lo anterior por teorema de Hanh-Banach. Así

$$\|T^*\|_{\mathcal{N}} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|F_k\| \|f_k^*\| = \sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k^*\| \|y_k\| < \|T\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon.$$

Y por lo tanto $T^* \in \mathcal{N}(Y', X')$ y $\|T^*\|_{\mathcal{N}} \leq \|T\|_{\mathcal{N}}$.

Supongamos ahora que Y es reflexivo. Entonces Y'' es isométrico a Y (esto es, $J_Y : Y \to Y''$ isometría continua y sobreyectiva). Ahora supongamos que $T^* \in \mathcal{N}(Y', X')$, entonces $T^{**} \in \mathcal{N}(X'', Y'')$ y $\|T^{**}\|_{\mathcal{N}(X'',Y'')} \leq \|T^*\|_{\mathcal{N}(X',Y')}$ por la primera parte. Sea $J_X : X \to X''$ el operador evaluación, luego tenemos que

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "T^{**}"] \arrow[dr, "J_Y^{-1} \circ T^{**}"'] & Y'' \\ & Y. \arrow[u, "J_Y"'] \end{tikzcd}$$

Como J_Y^{-1} es limitado y T^{**} es operador nuclear, entonces $J_Y^{-1} \circ T^{**} \in \mathcal{N}(X'', Y)$ y $\|J_Y^{-1} \circ T^{**}\| \leq \|J_Y^{-1}\| \|T^{**}\|_{\mathcal{N}(X'',Y'')} = \|T^{**}\|_{\mathcal{N}(X'',Y'')}$ ya que $\|J_Y^{-1}\| = 1$. Además $T = J_Y \circ \left(J_Y^{-1} \circ T^{**}\right) \circ J_X$ y $J_Y^{-1} \circ T^{**}$ es nuclear y al ser J_Y y J_X limitados concluimos que T es nuclear y

$$\|T\|_{\mathcal{N}} \leq \|J_Y\| \|J_Y^{-1} \circ T^{**}\|_{\mathcal{N}} \|J_X\| \leq \|T^{**}\|_{\mathcal{N}} \leq \|T^*\|_{\mathcal{N}}$$

y así $\|T^*\|_{\mathcal{N}} = \|T\|_{\mathcal{N}}$. ∎

Observación 2.1.6. *Entenderemos por $\ell_1 c_0$ como el conjunto de todas las sucesiones $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n = x_n \cdot y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.*

Primero se demostrará el siguiente Lema.

Lema 2.1.2. $\ell_1 = \ell_1 c_0 = \{\mu\eta : \mu \in \ell_1 \ \text{ y } \ \eta \in c_0\}$.

Demostración: "$\subseteq$" Sea $z \in \ell_1 c_0$ entonces $z = \mu\eta$ con $\mu \in \ell_1$ y $\eta \in c_0$. Como $\mu \in \ell_1$ entonces

$$\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{+\infty} |\mu_i| < +\infty.$$

Ahora, como $\eta \in c_0$ entonces

$$\eta = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \lim_{i\to\infty} \eta_i = 0.$$

Como $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es limitada y por tanto existe $M > 0$ tal que $|\eta_i| \leq M$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Así

$$\|z\|_1 = \|\mu\eta\|_1 = \sum_{i=1}^{+\infty} |\mu_i \cdot \eta_i| \leq M \sum_{i=1}^{+\infty} |\mu_i| < +\infty.$$

Por lo tanto $z \in \ell_1$.

"$\supseteq$" Recíprocamente debemos demostrar que si $\alpha \in \ell_1$, existen $\mu \in \ell_1$ y $\eta \in c_0$ tal que $\alpha = \mu\eta$.

Considere $S_n = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$, como la serie $\sum_{i=1}^{+\infty} |\alpha_i|$ converge ya que $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, entonces la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Para $\varepsilon = \frac{1}{4^k}$ existe un natural $N_k \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq N_k$ se tiene que

$$\|S_n - S_m\| \leq \frac{1}{4^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definamos $n_1 = N_1$ y para $k \geq 1$ definamos $n_k = \max\{n_{k-1}+1, N_k\}$. La sucesión $(n_k)_{k\geq 1}$ es estrictamente creciente y $n_k \geq N_k$ para todo $k \geq 1$. Luego

$$\frac{1}{4^k} > \|S_{n_{k+1}} - S_{n_k}\| = \sum_{i=1}^{n_{k+1}} |\alpha_i| - \sum_{i=1}^{n_k} |\alpha_i| = \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}} |\alpha_i| \quad \text{para todo} \quad k \geq 1.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}} |\alpha_i| < \frac{1}{4^k} \quad \forall k \geq 1.$$

Definamos ahora

$$\eta_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \leq i < n_1 \\ \\ \frac{1}{2^k} & \text{si} \quad n_k \leq i < n_{k+1}. \end{cases}$$

Entonces $\eta = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$ ya que $\lim_{i\to\infty} \eta_i = 0$, y también

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{+\infty} |\alpha_i|\eta_i^{-1} &= \sum_{i=1}^{n_1} |\alpha_i| + \sum_{i=n_1}^{n_2} |\alpha_i| 2 + \sum_{i=n_2}^{n_3} |\alpha_i| 2^2 + \cdots \\
&< \sum_{i=1}^{n_1} |\alpha_i| + \left(\frac{2}{4}\right)^1 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^3 + \cdots \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} |\alpha_i| + \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\
&< \sum_{i=1}^{+\infty} |\alpha_i| + 1 < +\infty
\end{aligned}$$

Luego la sucesión $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$, definida por

$$\mu_i = \alpha_i \eta_i^{-1} \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad i \geq 1.$$

Pertenece a ℓ_1 y por tanto $\alpha_i = \mu_i \eta_i$ para todo $i \geq 1$, esto es $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} = \mu\eta \in \ell_1 c_0$. ∎

Teorema 2.1.8. *Sean X y Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Entonces $T \in \mathcal{N}(X,Y)$ si y solo si T se puede factorizar de la siguiente manera*

$$X \xrightarrow{T_1} c_0 \xrightarrow{T_2} \ell_1 \xrightarrow{T_3} Y,$$

es decir $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$ donde T_1 y T_3 son operadores continuos y $T_2 \in \mathcal{N}(c_0, \ell_1)$.

Demostración: La condición suficiente es clara por el Teorema 2.1.2(ii), pues la compuesta de un operador nuclear con un operador limitado es un operador nuclear. Para probar la condición necesaria, podemos tomar, por Lema 2.1.2 y la definición de operador nuclear, una sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ y dos sucesiones limitadas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X' y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y respectivamente tal que

$$Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n f_n(x) y_n.$$

Como $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, entonces $\sum_n |\lambda_n| < +\infty$ y por tanto $\lim |\lambda_n| = 0$ y como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es limitado y la serie $\sum_n |\lambda_n| \|f_n\| \|y_n\| < +\infty$ ya que T es operador nuclear, entonces $\|f_n\| \to 0$ luego para cada $x \in X$ tenemos que $|f_n(x)| \leq \|f_n\| \|x\|$ por lo tanto $f_n(x) \to 0$ para cada $x \in X$, así que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.

Consideremos entonces el operador $T_1 : X \to c_0$ definido por

$$T_1 x = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{para todo} \;\; x \in X.$$

Como $\sup_{n\geq 1} |f_n(x)| < +\infty$ para todo $x \in X$ y por el Teorema de Banach-Steinhaus, concluimos que $\|f_n\|$ es limitado y si $M = \sup_n \|f_n\|$ entonces

$$|f_n(x)| \leq M\|x\| \quad \text{para todo} \;\; x \in X.$$

Así $\|T_1 x\| \leq M\|x\|$ entonces $\|T_1\| \leq M$ luego T_1 es limitado y por tanto continuo.

Consideremos también el operador $T_2 : c_0 \to \ell_1$ definido por

$$T_2((\eta_n)) = (\lambda_n \eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{para todo } (\eta_n) \in c_0.$$

Y por último definamos el operador $T_3 : \ell_1 \to Y$ definido por

$$T_3((\mu_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n y_n \quad \text{para todo } (\mu_n) \in \ell_1.$$

Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es limitada existe $M > 0$ tal que $\|y_n\| \leq M$, así

$$\begin{aligned}\|T_3((\mu_n))\| &= \left\|\sum_{i=1}^{+\infty} \mu_n y_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|\mu_n y_n\| \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} |\mu_n|\|y_n\| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} |\mu_n| \\ &= M\|(\mu_n)\|_1.\end{aligned}$$

Luego $\|T_3((\mu_n))\| \leq M\|(\mu_n)\|_1$ así $\|T_3\| \leq M$, luego T_3 es limitado y por tanto continuo.

Entonces T_1, T_2 y T_3 son operadores lineales y $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$. Dado que ℓ_1 es el espacio dual de c_0, se sigue que

$$T_2((\eta_n)) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \langle (\eta_n), e_i \rangle e_i,$$

donde e_i son los elementos unitarios en ℓ_1. Por lo tanto $T_2 \in \mathcal{N}(c_0, \ell_1)$. ■

2.2. OPERADORES DE HILBERT-SCHMIDT

Introducimos a continuación los operadores de Hilbert-Schmidt los cuales serán importantes en la caracterización de los operadores nucleares en espacios de Hilbert.

Definición 2.2.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita con una base ortonormal $\{e_n\}$ y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Si $\sum_{n=1}^{+\infty} \|Te_n\|^2 < +\infty$, entonces T es llamado operador de **Hilbert-Schmidt**.*

El siguiente teorema muestra que la definición es independiente de la base que se escoja además demuestra ciertas propiedades que cumplen los operadores de *Hilbert-Schmidt*.

Teorema 2.2.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita y sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ bases ortonormales para $\mathcal{H}$. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces*

(i)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|Ta_n\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|T^*b_n\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|Tb_n\|^2,$$

donde los valores de las series pueden ser finitos o infinitos. Esto significa que la condición de ser operador de Hilbert-Schmidt no depende de la elección de la base ortonormal de $\mathcal{H}$.

(ii) *T es Hilbert-Schmidt si y solo si T^* es Hilbert-Schmidt.*

(iii) *Si T es Hilbert-Schmidt entonces T es compacto.*

(iv) *El conjunto de los operadores de Hilbert-Schmidt es un subespacio lineal de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Demostración:
(i) Observemos que;

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \|Ta_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \|\langle Ta_n, b_m\rangle b_m\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|\langle a_n, T^*b_m\rangle b_m\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \|\langle T^*b_m, a_n\rangle b_m\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} |\langle\langle T^*b_m, a_n\rangle b_m, b_m\rangle|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} |\langle T^*b_m, a_n\rangle\langle b_m, b_m\rangle|^2 = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle T^*b_m, a_n\rangle|^2 \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \|T^*b_m\|^2 .
\end{aligned}
$$

Notemos también que

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{+\infty} \|T^*b_m\|^2 &= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle T^*b_m, b_n\rangle|^2 = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle b_m, Tb_n\rangle|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} |\langle Tb_n, b_m\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|Tb_n\|^2 .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\sum_{n=1}^{+\infty} \|Ta_n\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|T^*b_n\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|Tb_n\|^2 .
$$

(ii) Es consecuencia directa de la parta (a), escogiendo $\{a_n\} = \{b_n\}$, luego $\sum_{n=1}^{+\infty} \|Ta_n\|^2 < +\infty$ si y solo si $\sum_{n=1}^{+\infty} \|T^*a_n\|^2 < +\infty$, lo cual prueba la parte (b).

(iii) Dado que $\{a_n\}$ es una base ortonormal, para cualquier $x \in \mathcal{H}$ tenemos que $x = \sum_{n=1}^{+\infty}\langle x, a_n\rangle a_n$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definamos el operador $T_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ de la siguiente forma;

$$
T_k x = T\left(\sum_{n=1}^{k}\langle x, a_n\rangle a_n\right) = \sum_{n=1}^{k}\langle x, a_n\rangle Ta_n,
$$

por lo tanto $\dim T_k(\mathcal{H}) \leq k$ y así $T_k \in \mathcal{L}^f(\mathcal{H})$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

También, para cualquier $x \in \mathcal{H}$;

$$\begin{aligned}
\|T_k x - Tx\| &= \left\| \sum_{n=1}^{k} \langle x, a_n \rangle T a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, a_n \rangle T a_n \right\| \\
&\leq \sum_{n=k+1}^{+\infty} |\langle x, a_n \rangle| \, \|T a_n\| \\
&\leq \left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} |\langle x, a_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} \|T a_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(Des. de Cauchy-Schwarz)} \\
&= \|x\| \left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} \|T a_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|T_k - T\| \leq \left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} \|T a_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Y como la serie de la derecha es convergente tenemos que $\|T_k - T\| \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow +\infty$. Por lo tanto por Corolario 1.1.1, $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

(iv) Si S, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ son operadores *Hilbert-Schmidt* y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|\alpha T a_n\|^2 = |\alpha|^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \|T a_n\|^2 < +\infty,$$

y además,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \|(S+T) a_n\|^2 &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} (\|S a_n\| + \|T a_n\|)^2 \\
&\leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \|S a_n\|^2 + \|T a_n\|^2 < +\infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto αT y $S+T$ son *Hilbert-Schmidt* entonces el conjunto de los operadores de *Hilbert-Schmidt* es un subespacio lineal de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ∎

Ejemplo 2.2.1. *Los operadores de Hilbert-Schmidt juegan un papel importante por la siguiente propiedad. Si* $(\Omega, \mathcal{M}; \mu)$ *es un espacio de medición dotado de una medida* μ *y* $\mathcal{H} = L^2(\mu)$ *y* $K(x,y) \in L^2(\mu \otimes \mu)$*, entonces el operador*

$$Tf(x) = \int_{\Omega} K(x,y) f(y) d\mu(y) \tag{2.7}$$

es un operador de Hilbert-Schmidt.

Recíprocamente, cada operador de Hilbert-Schmidt en $L^2(\mu)$ *es de la forma* (2.7) *para algún* $K(x,y) \in L^2(\mu \otimes \mu)$ (ver [15], Teorema 4.8.4 pág 226).

2.3. OPERADORES NUCLEARES EN ESPACIOS DE HILBERT

La traza de un operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es la traza de la matriz de T con respecto a una base de $\mathbb{R}^n$. Esta definición no se afecta si la matriz es representada por una base diferente. La definición de la traza de un operador en los espacios de Hilbert de dimensión infinita es más complicada. Por ejemplo, si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable con una base ortonormal $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, la matriz de T respecto a esta base será $(\alpha_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, con $\alpha_{mn} = \langle Ta_n, a_m\rangle$. Se trata de una matriz infinita y al definir

$$tr(T) = \sum_n \alpha_{nn} = \sum_n \langle Ta_n, a_n\rangle$$

como la traza de T presenta el problema de la posible no convergencia de la serie de los elementos diagonales. Además si es el caso quela serie sea convergente, se encuentra la difilcultad de saber si la serie de los elementos diagonales respecto a cualquier base es convergente. Estos problemas pueden resolverse en el caso de los operadores nucleares.

Teorema 2.3.1. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) $T \in \mathcal{N}(\mathcal{H})$.

(ii) $\sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda_\gamma < +\infty$, *donde* λ_γ *son los valores propios del módulo* $|T|$ *de* T.

(iii) T *admite una representación de la forma*

$$Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle d_n \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n < +\infty,$$

donde $\lambda_n \geq 0$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *son sucesiones ortonormales en* $\mathcal{H}$.

(iv) $|T| \in \mathcal{N}(\mathcal{H})$.

(v) $|T|^{\frac{1}{2}}$ *es un operador de Hilbert-Schmidt.*

(vi) T *es la composición de dos operadores de Hilbert-Schmidt.*

(vii) Existe una base ortonormal $\{u_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *en* $\mathcal{H}$ *tal que* $\sum_{\gamma\in\Gamma} \|Tu_\gamma\| < +\infty$.

Demostración: $(i) \Longrightarrow (ii)$ Como los operadores nucleares son compactos, tenemos por Teorema 1.2.1 de la representación polar que

$$Tx = W \circ |T|x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle d_n,$$

donde $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones ortonormales en $\mathcal{H}$, $\lambda_n > 0$ y $|T|e_n = \lambda_n e_n$, W es la isometría parcial y $d_n = We_n$. Por otra parte, dado que T es operador nuclear, existen sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$ tales que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|\|y_n\| < +\infty \quad \text{y} \quad Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, x_n\rangle y_n \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Por las desigualdades de Cauchy-Schwartz y Bessel tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n &= \sum_{k=1}^{+\infty} \langle |T|e_k, e_k\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle (W|T|)e_k, We_k\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \langle Te_k, d_k\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \langle e_k, x_n\rangle\langle y_n, d_k\rangle \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_k |\langle e_k, x_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k |\langle y_n, d_k\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|\|y_n\| < +\infty.
\end{aligned}$$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Se sigue de la representación polar de un operador, Teorema 1.2.1.

$(iii) \implies (iv)$ Sea $T = W \circ |T|$ la descomposición polar del operador T. Esta representación es posible dado que (c) implica que $T \in \mathcal{N}(\mathcal{H})$ luego por Proposición 1.2.3(iii), $|T| = W^* \circ T$, y por lo tanto $|T| \in \mathcal{N}(\mathcal{H})$.

$(iv) \implies (v)$ Sean $\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una base ortonormal de vectores propios de $|T|$ y $(\lambda_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ la familia de valores propios correspondientes. Como $|T|$ es hermitiano y $|T|a_\gamma = \lambda_\gamma a_\gamma$, entonces

$$\lambda_\gamma = \langle |T|a_\gamma, a_\gamma\rangle = \langle |T|^{\frac{1}{2}}a_\gamma, |T|^{\frac{1}{2}}a_\gamma\rangle = \left\| |T|^{\frac{1}{2}}a_\gamma \right\|^2,$$

y por consiguiente $\sum_\gamma \left\| |T|^{\frac{1}{2}}a_\gamma \right\|^2 = \sum_\gamma \lambda_\gamma < +\infty$. Por lo tanto $|T|^{\frac{1}{2}}$ es operador de Hilbert-Schmidt.

$(v) \implies (vi)$ La representación polar de $T = W \circ |T|$, donde W es la isometría parcial. Claramente $W \circ |T|^{\frac{1}{2}}$ es un operador de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{H}$ a $\mathcal{I}$, por lo tanto al hacer $T_1 = |T|^{\frac{1}{2}}$ y $T_2 = W \circ |T|^{\frac{1}{2}}$ obtenemos la representación deseada.

$(vi) \implies (i)$ Sea $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en $T_1(\mathcal{H})$, y sea $x \in \mathcal{H}$. Entonces tenemos

$$Tx = T_2 \circ T_1 x = T_2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\langle T_1x, d_n\rangle d_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\langle T_1x, d_n\rangle T_2 d_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\langle x, T_1^* d_n\rangle T_2 d_n.$$

Como T_1^* es un operador de Hilbert-Schmidt, se sigue que la desigualdad de Cauchy-Schwarz que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\|T_1^* d_n\|\|T_2 d_n\| \le \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\|T_1^* d_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\|T_2 d_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Por lo tanto $T \in \mathcal{N}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$.

$(ii) \implies (vii)$ Sea $T = W \circ |T|$ su descomposición polar. Sea $\{u_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ una base ortonormal conformada solamente por vectores propios de $|T|$ y $(\lambda_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ la familia de los valores propios correspondientes. Si $\lambda_\gamma \neq 0$, entonces $u_\gamma \in \overline{|T|(\mathcal{H})}$ puesto que $|T|u_\gamma = \lambda_\gamma u_\gamma$. Luego, ya que W es una isometría sobre $\overline{|T|(\mathcal{H})}$, $\|Wu_\gamma\| = 1$ si $\lambda_\gamma > 0$ y

$$\sum_{\gamma} \|Tu_\gamma\| = \sum_{\gamma} \|W \circ |T|u_\gamma\| = \sum_{\gamma} \|W(\lambda_\gamma u_\gamma)\|$$
$$= \sum_{\gamma} \lambda_\gamma \|Wu_\gamma\| = \sum_{\gamma} \lambda_\gamma < +\infty.$$

$(vii) \implies (v)$ Supongamos que $\sum_\gamma \|Tu_\gamma\| < +\infty$ para alguna base ortonormal $\{u_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$. Entonces

$$\left\| |T|^{\frac{1}{2}} u_\gamma \right\|^2 = \left\langle |T|^{\frac{1}{2}} u_\gamma, |T|^{\frac{1}{2}} u_\gamma \right\rangle = \langle |T|u_\gamma, u_\gamma \rangle$$
$$\leq \| |T|u_\gamma\| = \|W \circ |T|u_\gamma\| = \|Tu_\gamma\|.$$

Por lo tanto, $\sum_\gamma \left\| |T|^{\frac{1}{2}} u_\gamma \right\|^2 \leq \sum_\gamma \|Tu_\gamma\| < +\infty$. Así, $|T|^{\frac{1}{2}}$ es un operador de Hilbert Schmidt. ■

Un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ que cumpla alguna de las propiedades equivalentes precedentes es llamado **operador de clase trazo**.

Además de las equivalencias anteriores, mostraremos en el siguiente teorema un condición más de nuclearidad en espacios de Hilbert, la cual justificará el concepto de traza en espacios de Hilbert en dimesión infinita.

Teorema 2.3.2. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es nuclear si y solo si existe una constante $m \geq 0$ tal que $\sum_\gamma |\langle Ta_\gamma, b_\gamma \rangle| \leq m$ para todas las parejas de bases ortonormales $\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ y $\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Además, el supremo de todos estos números es*

$$\sup \left\{ \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle Ta_\gamma, b_\gamma \rangle| \right\} = \sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda_\gamma, \tag{2.8}$$

donde $\{\lambda_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es el conjunto de valores propios del operador $|T|$.

Demostración: $(\implies)$ Supongamos que $T \in \mathcal{N}(\mathcal{H})$ y sea $T = W \circ |T|$ su descomposición polar. Sean $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una base ortonormal conformada por vectores propios de $|T|$ y $\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ y $\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ bases ortonormales arbitrarias de $\mathcal{H}$. Entonces tenemos que $Te_\beta = W \circ |T|e_\beta = W|T|e_\beta = \lambda_\beta We_\beta$ y

$$
\begin{aligned}
\sum_\gamma |\langle Ta_\gamma, b_\gamma\rangle| &= \sum_\gamma \left| \left\langle \sum_\beta \langle a_\gamma, e_\beta\rangle Te_\beta, b_\gamma \right\rangle \right| = \sum_\gamma \left| \left\langle \sum_\beta \langle a_\gamma, e_\beta\rangle \lambda_\beta W e_\beta, b_\gamma \right\rangle \right| \\
&= \sum_\gamma \left| \sum_\beta \langle \langle a_\gamma, e_\beta\rangle \lambda_\beta W e_\beta, b_\gamma\rangle \right| = \sum_\gamma \left| \sum_\beta \lambda_\beta \langle a_\gamma, e_\beta\rangle \langle W e_\beta, b_\gamma\rangle \right| \\
&\leq \sum_\gamma \sum_\beta \lambda_\beta |\langle a_\gamma, e_\beta\rangle| |\langle W e_\beta, b_\gamma\rangle| \\
&\leq \sum_\gamma \sum_\beta \lambda_\beta \frac{1}{2} \left(|\langle a_\gamma, e_\beta\rangle|^2 + |\langle W e_\beta, b_\gamma\rangle|^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_\beta \lambda_\beta \sum_\gamma \left(|\langle a_\gamma, e_\beta\rangle|^2 + |\langle W e_\beta, b_\gamma\rangle|^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_\beta \lambda_\beta \left(\|a_\lambda\|^2 + \|W e_\beta\|^2 \right) = \sum_\beta \lambda_\beta = m < +\infty.
\end{aligned}
$$

Lo anterior dado que por Teorema 1.2.1(ii) $(\ker(W))^\perp = \overline{|T|(\mathcal{H})}$ y por ser W isometría parcial, W es isometría sobre $\overline{|T|(\mathcal{H})}$ y por tanto $\|We_\gamma\| = \|e_\gamma\| = 1$.

($\Longleftarrow$) Supongamos ahora que existe una constante positiva m que satisface (2.8). Observemos que por Teorema 1.2.1(ii) y dado que $e_\gamma \in |T|(\mathcal{H})$ si $\lambda_\gamma \neq 0$, entonces

$$
\lambda_\gamma = \langle |T| e_\gamma, e_\gamma\rangle = \langle W \circ |T| e_\gamma, W e_\gamma\rangle = \langle T e_\gamma, W e_\gamma\rangle.
$$

Sea $p_\gamma = We_\gamma$. Si $\lambda_\gamma \neq 0$ y dado que $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ forma una base ortonormal del complemento ortogonal de $W(\mathcal{H}) = \overline{T(\mathcal{H})}$, por Teorema 1.2.1($ii$), se tiene que

$$
\sum_\gamma \lambda_\gamma = \sum_\gamma \langle T e_\gamma, p_\gamma\rangle \leq m
$$

lo que demuestra que $T \in \mathcal{N}(\mathcal{H})$ por Teorema 2.3.1(ii).

Por otro lado, en la primera parte de la demostración se obtuvo que

$$
\sum_\gamma |\langle Ta_\gamma, b_\gamma\rangle| \leq \sum_\gamma \lambda_\gamma,
$$

y como $\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ y $\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ eran bases arbitrarias tenemos que

$$\sup \left\{ \sum_{\gamma} |\langle Ta_\gamma, b_\gamma \rangle| \right\} \leq \sum_{\gamma} \lambda_\gamma.$$

Ahora, como

$$\sum_{\gamma} \lambda_\gamma = \sum_{\gamma} \langle Te_\gamma, p_\gamma \rangle \leq \sum_{\gamma} |\langle Te_\gamma, p_\gamma \rangle| \leq \sup \left\{ \sum_{\gamma} |\langle Ta_\gamma, b_\gamma \rangle| \right\},$$

por lo tanto,

$$\sup \left\{ \sum_{\gamma} |\langle Ta_\gamma, b_\gamma \rangle| \right\} = \sum_{\gamma} \lambda_\gamma \quad \blacksquare$$

El concepto de traza de un operador en $\mathbb{R}^n$ puede ahora generalizarse a los operadores nucleares en un espacio de Hilbert.

Definición 2.3.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, la* ***traza*** *de un operador nuclear $T \in \mathcal{N}(\mathcal{H})$, es el número real*

$$tr(T) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle Tu_\gamma, u_\gamma \rangle \tag{2.9}$$

donde $\{u_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es una base ortonormal.

Observación 2.3.1. *La serie en* (2.9) *es convergente por el* Teorema 2.3.2. *Además, la definición de la traza no depende de la base ortonormal utilizada. Esto se debe a que todo operador nuclear se puede descomponer en dos operadores de Hilbert-Schmidt por* Teorema 2.3.1(vi) *y por* Teorema 2.3.1(i) *los operadores de Hilbert-Schmidt no dependen de la base ortonormal escogida para su representación.*

Definición 2.3.2. *Sea $T \in \mathcal{N}(\mathcal{H})$. Se define $\| \cdot \|_{tr}$, la cual se denomina* ***norma de la traza*** *por $\|T\|_{tr} = tr(|T|) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_\gamma$, donde los λ_γ son los valores propios del operador $|T|$.*

Observación 2.3.2. *Si* $T \in \mathcal{N}(\mathcal{H})$, *entonces* $\|T\|_{\mathcal{N}} = \|T\|_{tr}$.

En efecto, por descomposición polar de un operador tenemos que

$$Tx = W \circ |T|x = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle d_n,$$

donde $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones ortonormales en $\mathcal{H}$ y además $We_n = d_n$ con $|T|e_n = \lambda_n e_n$. Luego

$$\|T\|_{\mathcal{N}} \leq \sum_n |\lambda_n \langle x, e_n \rangle| \|d_n\| \leq \sum_n \lambda_n \|x\| \|e_n\| = \sum_n \lambda_n = \|T\|_{tr},$$

dado que $\|f_n^*\| = \sup_{\|x\|=1}\{|f_n^*(x) = \lambda_n \langle x, e_n \rangle|\}$ con $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ el conjunto de valores propios de $|T|$, y así $\|T\|_{\mathcal{N}} \leq \|T\|_{tr}$.

Por otro lado, sea $\varepsilon > 0$ luego existen sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$ tal que $\sum_n \|x_n\|\|y_n\| < \|T\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon$, así por la desigualdad de Cauchy-Schwartz y de Bessel

$$\begin{aligned}
\|T\|_{tr} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n &= \sum_{k=1}^{+\infty} \langle |T|e_k, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle (W|T|)e_k, We_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \langle Te_k, d_k \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \langle e_k, x_n \rangle \langle y_n, d_k \rangle \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_k |\langle e_k, x_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k |\langle y_n, d_k \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|\|y_n\| < \|T\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Entonces $\|T\|_{tr} \leq \|T\|_{\mathcal{N}}$.

Ahora presentamos un ejemplo de un operador nuclear en el espacio $\mathcal{L}^2[0, 1]$.

Ejemplo 2.3.1. *Sea* $K : \mathcal{L}^2[0, 1] \longrightarrow \mathcal{L}^2[0, 1]$ *definido por*

$$(Kf)(t) = \int_0^1 k(t, s) f(s) ds$$

donde $k(t,s) = \min\{t,s\}$ *con* $s,t \in [0,1]$.

Como $k(s,t) = \overline{k(s,t)}$ y $k(s,t)$ es una función continua, el operador K es compacto y Hermitiano. Entonces el $\lim_n |\lambda_n| = 0$ donde $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el conjunto de los valores propios de K. Supongamos $\lambda y = Ky$. Esto significa que

$$\lambda y(t) = \int_0^t sy(s)ds + t\int_t^1 y(s)ds. \tag{2.10}$$

Tomando derivada dos veces obetenemos

$$\lambda y'(t) = ty(t) + \int_t^1 y(s)ds - ty(t) = \int_t^1 y(s)ds, \tag{2.11}$$

$$\lambda y''(t) = -y(t). \tag{2.12}$$

Claramente $\lambda \neq 0$; en otro caso $y = 0$ ó $\ker(K) = 0$. Tenemos la ecuación diferencial $\lambda y'' + y = 0$ con condiciones de frontera $y'(1) = y(0) = 0$. (Esto se debe a (2.10) y (2.11)).

Demostremos que $\lambda > 0$. Multiplicando la ecuación diferencial por $\overline{y}$ e integrando de 0 a 1, obtenemos

$$(1) \quad \lambda \int_0^1 y''(t)\overline{y}(t)dt + \|y\|^2 = 0$$

Integrando por partes obtenemos

$$(2) \quad \lambda \left(y'\overline{y}\Big|_0^1 - \int_0^1 |y'|^2 dt \right) + \|y\|^2 = 0.$$

Por las condiciones de frontera, $-\lambda \int_0^1 |y'|^2 dt + \|y\|^2 = 0$ y así $\lambda > 0$.

Las solución general de la ecuación diferencial es

$$y(t) = C_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}t\right).$$

De las condiciones de frontera se obtiene que $C_1 = 0$ y $C_2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$ y por tanto $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ y los valores propios de K son

$$\lambda_n = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

con vectores propios

$$\varphi_n(t) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}t\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como K es hermitiano obtenemos que $\|K\| = \text{máx}_n |\lambda_n| = |\lambda_1| = \frac{4}{\pi^2}$ y como k es positivo, por el Teorema de Mercer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n = \int_0^1 k(t,t)dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto por Teorema 2.3.1(ii) $K \in \mathcal{N}(\mathcal{L}^2[0,1])$. ■

Capítulo 3

LOS ESPACIOS $\mathcal{N}(C(Q))$ Y $\mathcal{K}(C(Q'))$

En este capítulo se definirá el producto tensorial entre dos espacios de Banach, la relación que existe entre el producto tensorial y los operadores nucleares, además se demostrarán algunos resultados que se utilizarán para el objetivo principal del capítulo, demostrar que no existe un isomorfismo entre $\mathcal{N}(C(Q))$ y un subespacio de $\mathcal{K}(C(Q'))$ con Q y Q' espacios métricos compactos y enumerables.

3.1. PRODUCTO TENSORIAL ENTRE ESPACIOS DE BANACH

Para definir el concepto de producto tensorial se hará por medio de los operadores bilineales los cuales se definen como sigue.

Definición 3.1.1. *Sean X, Y y Z espacios de Banach sobre $\mathbb{R}$, el operador $T : X \times Y \to Z$ es llamado bilineal si para todo $(x, y) \in X \times Y$ el operador parcial $T_x : y \to T(x, y)$ y el operador parcial $T_y : x \to T(x, y)$ son lineales. Notamos por $B^*(X, Y; Z)$ el espacio vectorial de todos los operadores bilineales, si $Z = \mathbb{R}$ se notarán por $B^*(X, Y)$ y se llamarán formas bilineales.*

Observación 3.1.1. *Sean X, Y y Z espacios de Banach sobre $\mathbb{R}$ y sea $\omega \in B^*(X, Y; Z)$. Decimos que X y Y son ω-disjuntos linealmente si el subconjunto $\{\omega(x_i, y_j) : 1 \leq i \leq m;\ \ 1 \leq j \leq n\} \subseteq Z$ es linealmente independiente siempre* *y cuando* $\{x_i : 1 \leq i \leq m\} \subseteq X$ *y* $\{y_j : 1 \leq j \leq n\} \subseteq Y$ *son subconjuntos linealmente independientes.*

Definición 3.1.2. *Sean* X, Y *y* M *espacios de Banach. El producto tensorial entre* X *y* Y *se define como el par* (M, ω), *donde* $\omega \in B^*(X, Y; M)$, *satisfaciendo las siguientes dos condiciones:*

(i) $M = \mathrm{Span}\{\omega(X \times Y)\}$ *y* (ii) X *y* Y *son* ω*-disjuntos linealmente.*

El producto tensorial de X *y* Y *es denotado por* $X \otimes Y$*; y escribimos*

$$\omega(x, y) = x \otimes y \quad \text{para todo} \quad x \in X \text{ y } y \in Y$$

y ω *es llamado* ***mapeo canónico****. Se puede demostrar que el producto tensorial entre dos espacios* X *e* Y *siempre existe,* (ver [7] ó [21])

A continuación se presenta un ejemplo de producto tensorial entre espacios de Banach.

Ejemplo 3.1.1. *Sean* X *e* Y *espacios de Banach y sean* X' *e* Y' *los espacios duales de* X *e* Y *respectivamente. Definamos el operador*

$$\omega : X' \times Y \to \mathcal{L}^f(X, Y) \quad \text{tal que} \quad \omega(f^*, y)(x) = f^*(x)y \quad \forall x \in X.$$

Demostremos primero que ω *es un operador bilineal, en efecto:*

1.(a) *Sea* $\omega_{f^*} : y \to \omega(f^*, y)(x)$ *para* $f^* \in X'$ *fijo. Entonces para* y_1 *e* $y_2 \in Y$, α *y* $\beta \in \mathbb{R}$ *tenemos que*

$$\begin{aligned}\omega(f^*, \alpha y_1 + \beta y_2)(x) &= f^*(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha f^*(x)y_1 + \beta f^*(x)y_2 \\ &= \alpha\omega(f^*, y_1)(x) + \beta\omega(f^*, y_2)(x)\end{aligned}$$

1.(b) *Sea* $\omega_y : f^* \to \omega(f^*, y)(x)$ *para* $y \in Y$ *fijo. Entonces para* f^* *y* $g^* \in X'$, α *y* $\beta \in \mathbb{R}$ *tenemos que*

$$\begin{aligned}\omega(\alpha f^* + \beta g^*, y)(x) &= (\alpha f^* + \beta g^*)(x)y = [\alpha f^*(x) + \beta g^*(x)]y \\ &= \alpha f^*(x)y + \beta g^*(x)y = \alpha\omega(f^*, y)(x) + \beta\omega(g^*, y)(x).\end{aligned}$$

2. *X' e Y son ω-disjuntos linealmente.*

Sean $\{f_i^* : 1 \leq i \leq m\}$ y $\{y_j : 1 \leq j \leq n\}$ subconjuntos de X' e Y linealmente independientes y sea $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$. Consideremos

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij}\omega(f_i^*, y_j)(x) = 0, \text{ entonces} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} f_i^*(x) y_j = 0.$$

como $\{y_j : 1 \leq j \leq n\}$ es L.I. tenemos que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} f_i^*(x) = 0$ y así $\lambda_{ij} = 0$ dado que $\{f_i^* : 1 \leq i \leq m\}$ es L.I. Por lo tanto X' e Y son ω-disjuntos linealmente.

3. *Demostremos que* $\mathrm{Span}\{\omega(X' \times Y)\} = \mathcal{L}^f(X, Y)$ *el conjunto de los operadores de rango finito.*

"$\subseteq$" Como $\omega(X' \times Y) \subseteq \mathcal{L}^f(X, Y)$ tenemos que $\mathrm{Span}\{\omega(X' \times Y)\} \subseteq \mathcal{L}^f(X, Y)$.

"$\supseteq$" Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador de rango finito. Entonces $\mathrm{Im}T$ *tiene dimesión finita. Luego existe $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ una base de* $\mathrm{Im}T$*. Por el teorema del Sistema Biortogonal existen $f_1, f_2, \ldots, f_n \in Y'$ tal que $f_i(y_j) = \delta_{ij}$ y para cada $y \in \mathrm{Span}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ se tiene que $y = \sum_{i=1}^{n} f_i(y)y_i$. Ahora, defina $g_i^* = f_i \circ T$ como T es de rango finito entonces T es compacto y por tanto limitado.*

Luego $g_i^* \in X'$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Además si $x \in X$ entonces $Tx \in \mathrm{Im}T = \mathrm{Span}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Luego

$$\begin{aligned}Tx &= \sum_{i=1}^{n} f_i(Tx)y_i = \sum_{i=1}^{n}(f_i \circ T)(x)y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} g_i^*(x)y_i = \sum_{i=1}^{n} \omega(g_i^*, y_i)(x).\end{aligned}$$

Por tanto $T \in \mathrm{Span}\{\omega(X' \times Y)\}$ *y así* $X' \otimes Y$ *es isomorfo algebraicamente a* $\mathcal{L}^f(X,Y)$.

Observación 3.1.2. *Por el ejemplo anterior cada* $T \in \mathcal{L}^f(X,Y)$ *puede ser identificado con* $\sum_{i=1}^{n} f_i^* \otimes y_i$*, obtenido de la ecuación*

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} f_i^*(x) y_i \quad \forall x \in X.$$

Bajo esta identificación cada $\sum_{i=1}^{n} f_i^* \otimes y_i$ *es un operador lineal continuo de* X *sobre* Y *de rango finito. Como los elementos en* $\mathcal{L}^f(X,Y)$ *son operadores nucleares por* Teorema 2.1.4*, cada* $\sum_{i=1}^{n} f_i^* \otimes y_i$ *es de la forma* $\sum_{k=1}^{+\infty} g_k^*(x) v_k$ *para todo* $x \in X$*, con* $(g_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ *y* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sucesiones en* X' *e* Y *respectivamente tal que* $\sum_{k=1}^{+\infty} \|g_k^*\|\|v_k\| < +\infty$.

También por Teorema 2.1.4 *se tiene que cada* $T \in \mathcal{N}(X,Y)$ *es de la forma*

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^* \otimes y_n, \tag{3.1}$$

para $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesión en* X' *y* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesión en* Y *tal que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n^*\|\|y_n\| < +\infty$*. La serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^* \otimes y_n$ *es llamada la representación nuclear de* T.

3.2. PRODUCTO TENSORIAL PROYECTIVO y ESPACIOS DE OPERADORES NUCLEARES

En esta sección discutiremos la teoría del producto tensorial proyectivo y mostraremos como la misma puede ser utilizada para estudiar los espacios de operadores nucleares; también demostraremos una fórmula de Grothendieck para el cálculo del producto tensorial proyectivo entre $\ell_1(\mathbb{N})$ y E un espacio de Banach la cual es una herramienta indispensable para nuestro trabajo.

Observación 3.2.1. *El operador* $\omega : X \times Y \to (B^*(X,Y))^*$*, definido por*

$$\omega(x,y)(f) = f(x,y) \quad \forall f \in B^*(X,Y), \tag{3.2}$$

es un operador bilineal tal que X y Y son ω-disjuntos linealmente (ver [23], pág 239)*, por lo tanto el subespacio de $(B^*(X,Y))^*$ generado por $\omega(X \times Y)$ es isomorfo algebraicamente con $X \otimes Y$.*

Observación 3.2.2. *En* ([23], pág 240-242) *a patir de la ecuación* (3.2) *se define la norma proyectiva en $X \otimes Y$.*

Definición 3.2.1. ***(Norma Proyectiva)*** *Para $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ se define la norma proyectiva de $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ la cual se notará $\|\cdot\|_\pi$ de la siguiente manera*

$$\|u\|_\pi = \sup\{|f(u)| : f \in B(X,Y), \|f\| \leq 1\}. \tag{3.3}$$

El espacio $(X \otimes Y, \|\cdot\|_\pi)$ se notará $X \otimes_\pi Y$ y su espacio completante se notará $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ y se llamará ***producto tensorial proyectivo****.*

Observación 3.2.3. *En* ([23], Teorema 4.1.3 pág 246) *se demuestra que una forma equivalente de definir la norma proyectiva es*

$$\|u\|_\pi = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right\}. \tag{3.4}$$

Definición 3.2.2. ***(Propiedad de aproximación)*** *Un espacio de Banach X posee la propiedad de aproximación si para cada subconjunto compacto K de X y todo $\varepsilon > 0$, existe un operador $T : X \to X$ de rango finito tal que $\|Tx - x\| < \varepsilon$ para todo $x \in K$.*

Teorema 3.2.1. *Si X es un espacio de Banach con una base de Schauder entonces X posee la propiedad de aproximación.*

Demostración: En efecto, sea $(x_n)_{n \geq 1}$ una base de Schauder de X. Entonces existen funcionales lineales biortogonales $(f_n)_{n \geq 1}$ en X^* tales que:

$$f_n(x) = f_n\left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i x_i\right) = a_n \quad \forall n \geq 1.$$

Consideremos los operadores lineales $P_n : X \to X$ definidos por

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i.$$

Vemos que los $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son operadores de rango finito uniformemente limitados y $P_n(x) \to x$ siempre que $n \to +\infty$ para todo $x \in X$. Luego X posee la propiedad de aproximación $\blacksquare$

Observación 3.2.4. *Si X es un espacio de Banach con una base de Schauder, entonces X posee la propiedad de aproximación* (ver [3], pág 59). *En particular, los espacios c_0 y ℓ_p con $1 \leq p < +\infty$ poseen la propiedad de aproximación.*

El siguiente teorema dado por Grothendieck describe los subconjuntos compactos de $X\widehat{\otimes}_\pi Y$. Se omite la demostración, el lector puede consultar en (ver [3], Teorema 3.4 pág 31-33).

Teorema 3.2.2. *Si X e Y son espacios de Banach y K es un subconjunto compacto de $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ entonces existen subcojuntos compactos K_X, K_Y de X e Y respectivamente tal que K está contenido en la envolvente convexa cerrada de $K_X\widehat{\otimes}_\pi K_Y$.*

Teorema 3.2.3. *Si X e Y son espacios de Banach con la propiedad de aproximación entonces $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ tiene la propiedad de aproximación.*

Demostración: Sean X e Y espacios de Banach con la propiedad de aproximación y K un subconjunto compacto de $X\widehat{\otimes}_\pi Y$, entonces por Teorema 3.2.2 existen subconjuntos compactos K_X, K_Y de X e Y respectivamente tal que K esta contenido en la envolvente convexa cerrada de $K_X\widehat{\otimes}_\pi K_Y$.

Como X e Y tienen la propiedad de aproximación existen operadores $T_1 : X \to X$ y $T_2 : Y \to Y$ de rango finito tales que

$$\|x - T_1 x\| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|y - T_2 y\| < \varepsilon \quad \text{para cada } x \in X \text{ e } y \in Y.$$

Definimos $V = T_1 \widehat{\otimes} T_2 : X \widehat{\otimes}_\pi Y \longrightarrow X \widehat{\otimes}_\pi Y$ entonces V es un operador lineal limitado de rango finito en $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ y:

$$\begin{aligned}
\|V(x \widehat{\otimes}_\pi y) - x \widehat{\otimes}_\pi y\|_\pi &= \|(T_1 x - x) \widehat{\otimes}_\pi T_2 y + x \widehat{\otimes}_\pi (T_2 y - y)\|_\pi \\
&\leq \|(T_1 x - x) \widehat{\otimes}_\pi T_2 y\|_\pi + \|x \widehat{\otimes}_\pi (T_2 y - y)\|_\pi \\
&\leq \|T_1 x - x\| \, \|T_2 y\| + \|x\| \, \|T_2 y - y\| \\
&\leq \varepsilon \|T_2\| \sup_{y \in K_Y} \|y\| + \varepsilon \sup_{x \in K_X} \|x\| \\
&\leq \varepsilon M.
\end{aligned}$$

Lo que muestra que $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ posee la propiedad de aproximación ■

Teorema 3.2.4. *Sean X e Y espacios de Banach y E, F subespacios de X, Y respectivamente tal que E es complementado en X y F es complementado en Y, entonces $E \widehat{\otimes}_\pi F$ es un subespacio complementado de $X \widehat{\otimes}_\pi Y$.*

Demostración: Sean E, F subespacios complementados de X, Y respectivamente y considere $P : X \to X$, $Q : Y \to Y$ proyecciones lineales sobre E y F respectivamente, luego tenemos que $P \otimes Q$ es una proyección sobre $E \otimes F$.

Sea $z \in E \otimes F$ y representamos por $\|z\|_\pi$ la norma proyectiva de z sobre $X \otimes Y$. Escribimos $z = \sum_{i \geq 1} x_i \otimes y_i$ una representación de z como elemento de $X \otimes Y$, como $z = (P \otimes Q)(z)$ entonces $\sum_{i \geq 1} P x_i \otimes Q y_i$ es una representación de z como elemento de $E \otimes F$ y por tanto

$$\|z\|_{E \otimes F} \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \|P x_i\| \|Q y_i\| \leq \|P\| \|Q\| \sum_{i=1}^{+\infty} \|x_i\| \|y_i\|$$

Luego $\|z\|_\pi \leq \|z\|_{E\otimes F} \leq \|P\|\|Q\|\|z\|_\pi$ y por tanto $E\widehat{\otimes}_\pi F$ es un subespacio complementado de $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ $\blacksquare$

Observación 3.2.5. *Z. Semadeni muestra que si $X \sim Y$ e $X_1 \sim Y_1$ entonces $X\widehat{\otimes}_\pi X_1 \sim Y\widehat{\otimes}_\pi Y_1$. Por tanto usando esta afirmación y el teorema anterior obtenemos que:*

(a) *Si $E \overset{c}{\hookrightarrow} X$ y $F \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ entonces $E\widehat{\otimes}_\pi F \overset{c}{\hookrightarrow} X\widehat{\otimes}_\pi Y$.*

(b) *Si $Z \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ entonces $X\widehat{\otimes}_\pi Z \overset{c}{\hookrightarrow} X widehat \otimes_\pi Y$.*

El próximo teorema relaciona el espacio de las funciones Bochner integrables y el espacio $L_1(\mu)\widehat{\otimes}_\pi E$.

Teorema 3.2.5. *Dado (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, existe una isometría entre el espacio $L_1(\mu)\widehat{\otimes}_\pi E$ y el espacio $L_1(\mu, E)$ de las funciones Bochner integrables de Ω a E.*

Demostración: Dado $z = \sum_{i=1}^n f_i \otimes y_i$ en $L_1(\mu) \otimes E$, sea la aplicación $F_z : \Omega \to E$ definida por $F_z(s) = \sum_{i=1}^n f_i(s) y_i$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\|F_z\|_1 &= \int_\Omega \|F_z(s)\| d\mu \\
&= \int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^n f_i(s) y_i \right\| d\mu \\
&\leq \int_\Omega \sum_{i=1}^n |f_i(s)| \|y_i\| d\mu \\
&= \sum_{i=1}^n \|y_i\| \int_\Omega |f_i(s)| d\mu = \sum_{i=1}^n \|f_i\| \|y_i\| < +\infty.
\end{aligned}$$

Luego por Teorema 1.3.1 tenemos que $F_z \in L_1(\mu, E)$ y por la igualdad (3.4) $\|F_z\|_1 \leq \|z\|_\pi$. Por tanto, el operador lineal $z \to F_z$ se extiende continuamente al espacio $L_1(\mu)\widehat{\otimes}_\pi E$ y la extensión también satisface que $\|F_z\|_1 \leq \|z\|_\pi$.

Para demostrar que la extensión es una isometría resta demostrar que $\|z\|_\pi \leq \|F_z\|_1$. Supongamos que F_z es una función simple y tomemos $\{E_i\}_{i=1}^n$ subconjuntos disjuntos de Ω tales que $\sum_{i=1}^n \chi_{E_i} = 1$, vemos que,

$$\begin{aligned}
\|z\|_\pi &= \left\| \sum_{i=1}^n \chi_{E_i} \widehat{\otimes}_\pi y_i \right\|_\pi \leq \sum_{i=1}^n \|\chi_{E_i} \widehat{\otimes}_\pi y_i\|_\pi \\
&= \sum_{i=1}^n \|\chi_{E_i}\| \|y_i\| = \sum_{i=1}^n \mu(E_i) \|y_i\| \\
&= \sum_{i=1}^n \int_\Omega |\chi_{E_i}(s)| \|y_i\| d\mu = \int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(s) y_i \right\| d\mu = \|F_z\|_1.
\end{aligned}$$

El resultado se obtiene debido a la densidad de las funciones simples en $L_1(\mu)$ ■

Observación 3.2.6. *Podemos sustituir $L_1(\mu)$ en el* Teorema 3.2.5 *por $\ell_1(\Gamma)$ donde Γ es un conjunto infinito. De hecho, si Γ es un conjunto infinito numerable, considere Σ la σ-álgebra formada por los subconjuntos de Γ y definiendo una medida sobre Σ de la siguiente manera; $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$ tal que $\mu(A) = \mathrm{Car}(A)$ para todo $A \in \Sigma$, donde* Car(A) *es el cardinal de A.*

Luego $L_1(\mu, E)$ es isomorfo al espacio $\ell_1(\Gamma, E)$ y por el Teorema 3.2.5 *tenemos que*

$$\ell_1(\Gamma)\widehat{\otimes}_\pi E \cong \ell_1(\Gamma, E). \tag{3.5}$$

Por último el siguiente teorema ofrece una importante relación entre los espacios de operadores nucleares $\mathcal{N}(X, Y)$ y el producto tensorial inyectivo de X' e Y. La demosración de esta se encuentra en ([3], Corolario 1 pág 65).

Teorema 3.2.6. *Sean X e Y espacios de Banach. Si X' o Y poseen la propiedad de aproximación, entonces $X'\widehat{\otimes}_\pi Y$ es isomorfo isométricamente a $\mathcal{N}(X, Y)$.*

3.3. PRODUCTO TENSORIAL INYECTIVO Y ESPACIOS DE OPERADORES COMPACTOS

En esta sección discutiremos la teoría del producto tensorial inyectivo y mostraremos como la misma puede ser utilizada para estudiar los espacios de operadores compactos; también demostraremos una fórmula de Grothendieck para el cálculo del producto tensorial inyectivo entre $C(K)$ con K conjunto compacto y E un espacio de Banach la cual es una herramienta indispensable para nuestro trabajo.

Observación 3.3.1. *El operador $\omega : X \times Y \to B^*(X', Y')$ definido por*

$$\omega(x,y)(x^*,y^*) = x^*(x)y^*(y) \quad \forall x^* \in X', \ \forall y^* \in Y' \tag{3.6}$$

es operador bilineal tal que X y Y son ω-disjuntos linealmente (ver [23], pág 239)*, por lo tanto el subespacio vectorial $B^*(X', Y')$ generado por $\omega(X \times Y)$ es isomorfo algebraicamente con $X \otimes Y$.*

Observación 3.3.2. *En* ([23], pág 240-242) *a patir de la ecuación* (3.6) *se define la norma inyectiva en $X \otimes Y$.*

Definición 3.3.1. ***(Norma inyectiva)*** *Para $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ se define la norma inyectiva de $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ la cual se notará $\|\cdot\|_\varepsilon$ de la siguiente manera*

$$\|u\|_\varepsilon = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^n x^*(x_i)y^*(y_i)\right| : x^* \in B_{X^*}, y^* \in B_{Y^*}\right\}. \tag{3.7}$$

*El espacio $(X \otimes Y, \|\cdot\|_\varepsilon)$ se notará $X \otimes_\varepsilon Y$ y su espacio completante se notará $X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ y se llamará **producto tensorial inyectivo**.*

El siguiente Teorema muestra una propiedad del producto tensorial inyectivo.

Teorema 3.3.1. *Sean E un espacio de Banach. Si K es un espacio topológico compacto, entonces el espacio $C(K)\widehat{\otimes}_\varepsilon E$ es isomorfo isométricamente al espacio $C(K,E)$ de todas las funciones continuas de K sobre E.*

Demostración:

Dado $z = \sum_{i=1}^n f_i \otimes y_i$ en $C(K) \otimes E$ y sea la aplicación $F_z : K \to E$ definida por $F_z(s) = \sum_{i=1}^n f_i(s) y_i$. Tenemos que;

$$\begin{aligned}
\|z\|_\varepsilon &= \sup_{\|\psi\|=1} \left\| \sum_{i=1}^n \psi(y_i) f_i \right\| \\
&= \sup_{\|\psi\|=1} \sup_{s\in K} \left| \sum_{i=1}^n \psi(y_i) f_i(s) \right| \\
&= \sup_{s\in K} \sup_{\|\psi\|=1} \left| \psi\left(\sum_{i=1}^n f_i(s) y_i \right) \right| \\
&= \sup_{s\in K} \|F_z(s)\| = \|F_z\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto el operador $z \to F_z$ se puede extender continuamente al espacio $C(K)\widehat{\otimes}_\varepsilon E$ y la extensión también satisface $\|F_z\| = \|z\|_\varepsilon$.

Resta probar que la imagen de $C(K) \otimes E$ es densa en $C(K,E)$. De hecho, para cualquier $f \in C(K,E)$ y $\varepsilon > 0$, la continuidad uniforme de f asegura que existe una covertura abierta $\{G_i : i = 1, 2, \cdots, n\}$ de K tal que

$$\|f(s) - f(t)\| < \varepsilon \quad \forall (s,t) \in G_i \times G_i \;\; (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Ahora sea f_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ elementos positivos en $C(K)$ tal que $\sum_{i=1}^n f_i(k) = 1$, con $k \in K$ y $f_i(k) = 0$ para todo $k \in G_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

Si $y_i \in f(G_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ y definimos $z = \sum_{i=1}^n f_i \otimes y_i$ que pertenece a $C(K) \otimes E$, entonces para cualquier $k \in K$

$$\begin{aligned}\|f(k) - F_z(k)\| &= \left\| f(k) - \sum_{i=1}^{n} f_i(k) y_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(k)(f(k) - y_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} f_i(k) \|f(k) - y_i\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Luego $\|f - F_z\| < \varepsilon$, así $C(K) \otimes E$ es denso en $C(K, E)$. Por lo tanto $C(K)\widehat{\otimes}_\varepsilon E$ es isométricamente isomorfo a $C(K, E)$ ■

Observación 3.3.3. *En el caso que si $C(K)$ es isomorfo a c_0 y E es un espacio de Banach entonces el* Teorema 3.3.1 *muestra que:*

$$C(K)\widehat{\otimes}_\varepsilon E \sim c_0\widehat{\otimes}_\varepsilon E \sim c_0(E).$$

Vemos inmediatamente que

$$C(K)\widehat{\otimes}_\varepsilon \ell_1 \sim c_0\widehat{\otimes}_\varepsilon \ell_1 \sim c_0(\ell_1).$$

Como el caso de los operadores nucleares, si X' o Y poseen la propiedad de aproximación entonces se puede identificar el producto tensorial inyectivo de X' e Y con el espacio de los operadores compactos $\mathcal{K}(X, Y)$. El próximo teorema muestra este hecho cuya prueba puede ser encontrada en (ver [3], pág 60-61).

Teorema 3.3.2. *Sean X e Y espacios de Banach. Si X' o Y poseen la propiedad de aproximación entonces $X'\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ es isomorfo isométricamente al espacio de los operadores compactos definidos sobre X y que toman valores en Y, $\mathcal{K}(X, Y)$.*

3.4. SOBRE EL ISOMORFISMO ENTRE $\mathcal{N}(C(Q))$ Y UN SUBESPACIO DE $\mathcal{K}(C(Q'))$

W.B. Johnson demostró en [10] que si X o Y poseen una esctructura local incondicional, entonces $\mathcal{N}(X,Y)$ es un subconjunto propio de $\mathcal{K}(X,Y)$. Antes de presentar la demostración del teorema principal, se necesitan resultados previos los cuales mostramos a continuación.

Teorema 3.4.1. *Sea α un ordinal, E un espacio de Banach y H un subespacio cerrado de $C(\alpha,E)$. Entonces $H \hookrightarrow C(n,E)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ ó H contiene una copia de c_0 complementado en $C(\alpha,E)$.*

Demostración: Demostraremos este resultado por medio de inducción transfinita sobre α. Si α es finito entonces no hay nada que demostrar. Suponga que α es infinito y la afirmación de teorema es verdadera para cada $\theta < \alpha$.

Sea $T : H \to C(\alpha,E)$ un isomorfismo sobre la imagen. Asumamos que $\alpha = \gamma + 1$ para algún ordinal γ. Sea ψ un isomorfismo de $C(\alpha,E)$ a $C(\gamma,E)$. Entonces $\psi \circ T$ es también un isomorfismo de H sobre la imagen. Por lo tanto por la hipótesis de inducción $H \hookrightarrow C(n,E)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ ó H contiene un subespacio H_1 isomorfo a c_0 y existe una proyección P de $C(\gamma,E)$ sobre $(\psi \circ T)(H_1)$. Así $\psi^{-1} \circ P \circ \psi$ es una proyección de $C(\alpha,E)$ sobre $T(H_1)$.

Asumamos a continuación que $\alpha \geq \omega$ así α es un ordinal límite. Sea $\varphi : C(\alpha,E) \to C_0(\alpha,E)$ determinado por $\varphi(f) = g$, donde $g(1) = f(\alpha)$ y $g(1+\theta) = f(\theta) - f(\alpha)$ para todo θ, $\theta \geq \alpha$. Ahora sea $T_1 = \varphi \circ T$ y denotemos por $P_\beta : C_0(\alpha,E) \to C(\beta,E)$ la proyección natural de $C_0(\alpha,E)$ en $C(\beta,E)$. Podemos considerar dos casos:

Caso 1: $P_\beta \circ T_1 : H \to C(\beta,E)$ es un isomorfismo sobre la imagen para algún $\beta < \alpha$. En este caso podemos aplicar la hipótesis de inducción para concluir que $H \hookrightarrow C(n,E)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ ó H contiene un subespacio H_1 isomorfo a c_0 y existe una proyección P de $C(\beta,E)$ sobre $P_\beta \circ T_1(H_1)$. Así, T restricto a H_1 es un isomorfismo sobre la imagen y $(P_\beta \circ \varphi)^{-1} \circ P \circ (P_\beta \circ \varphi)$ es una proyección de $C(\alpha,E)$ sobre $T(H_1)$. Ya que si $Q = (P_\beta\varphi)^{-1} \circ P \circ P_\beta\varphi$ entonces

$$
\begin{aligned}
Q^2 &= (P_\beta \varphi)^{-1} \circ P \circ (P_\beta \varphi) \circ (P_\beta \varphi)^{-1} \circ P \circ (P_\beta \varphi) \\
&= (P_\beta \varphi)^{-1} \circ P \circ P \circ (P_\beta \varphi) \\
&= (P_\beta \varphi)^{-1} \circ P \circ (P_\beta \varphi),
\end{aligned}
$$

lo que muestra que Q es una proyección de $C(\alpha, E)$ sobre $T(H_1)$.

Caso 2: $P_\beta \circ T_1 : H \to C(\beta, E)$ no es un isomorfismo sobre la imagen para cada $\beta < \alpha$.

Fije a, $b \in \mathbb{R}_+$ tal que $a\|h\| \leq \|T_1 h\| \leq b\|h\|$ para todo $h \in H$. Sea $\varepsilon > 0$ con $0 < \varepsilon < \frac{a}{16}$ y $c = \frac{a}{b}$ y tome $\beta_1 = 1$, entonces $P_{\beta_1} \circ T_1$ no es isomorfismo sobre su imagen es decir existe un $h_1 \in H$ con $\|h_1\| = 1$ tal que $\|P_{\beta_1} T_1(h_1)\| < \min\left\{\frac{a}{2}, \frac{\varepsilon}{2} c\right\}$. Ahora $\|T_1 h_1\| \geq a$ y por tanto,

$$
\|T_1 h_1 - P_{\beta_1}(T_1(h_1))\| \geq \|T_1 h_1\| - \|P_{\beta_1}(T_1(h_1))\| > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}.
$$

Como $\lim_{k\to\infty} P_{\beta_k}(T_1(h_1)) = T_1(h_1)$, (recuerde $P_\beta \circ \varphi = \varphi\big|_{\langle 1,\beta\rangle}$) entonces existe un $\beta_2 > \beta_1$ tal que $\|P_{\beta_2} T_1(h_1) - T_1(h_1)\| < r$ donde $r = \|T_1 h_1 - P_{\beta_1}(T_1(h_1))\| - \frac{a}{2}$ lo que implica

$$
\begin{aligned}
\|P_{\beta_2}(T_1(h_1)) - P_{\beta_1}(T_2(h1))\| &\geq \|P_{\beta_1}(T_1(h_1)) - T_1(h_1)\| - \|T_1(h_1) - P_{\beta_2}(T_2 h_1)\| \\
&> \|P_{\beta_1}(T_1(h_1)) - T_1(h_1)\| - r = \frac{a}{2}.
\end{aligned}
$$

Nuevamente, podemos escoger un $\beta_2 > \beta_1$ tal que $\|P_{\beta_2}(T_1(h_1)) - P_{\beta_1}(T_1(h_1))\| > \frac{a}{2}$ y $\|T_1(h_1) - P_{\beta_2}(T_1(h_1))\| < \min\left\{\frac{a}{2}, \frac{\varepsilon}{2^2} c\right\}$. Considerando que $P_{\beta_2} \circ T$ no es un isomorfismo sobre su imagen existe un $h_2 \in H$ tal que tal que $\|h_2\| = 1$ y $\|P_{\beta_2}(T_1(h_2))\| < \min\left\{\frac{a}{2}, \frac{\varepsilon}{2^2} c\right\}$.

Haciendo el mismo razonamiento que hicimos con $P_{\beta_1} \circ T_1$ concluímos que existe $\beta_3 > \beta_2$ tal que $\|P_{\beta_3}(T_1(h_2)) - P_{\beta_2}(T_1(h_2))\| > \frac{a}{2}$ y $\|T_1 h_2 - P_{\beta_3}(T_1 h_2)\| < \min\left\{\frac{a}{2}, \frac{\varepsilon}{2^3} c\right\}$. Continuando así obtenemos una sucesión $(h_k)_{k\geq 1}$ en H con $\|h_k\| = 1$ para todo $k \geq 1$, una sucesión estrictamente creciente $1 = \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \alpha$ y

$y_k = (P_{\beta_k} - P_{\beta_{k-1}})(h_k)$ para $k > 1$ y $y_1 = P_{\beta_1}(h_1)$ tal que satisfacen

(i) $\|T_1(h_k) - y_k\| < \frac{\varepsilon}{2^k}c$ para $k \in \mathbb{N}$.
(ii) $y_k = (P_{\beta_k} - P_{\beta_{k-1}})(h_k)$ para $k > 1$ y $y_1 = P_{\beta_1}(h_1)$.
(iii) $\frac{a}{2} \leq \|y_k\| \leq b$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para (iii) es claro que $\|y_k\| \geq \frac{a}{2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, también note que $\|y_k\| = \|P_{\beta_k}(T_1(h_k)) - P_{\beta_{k-1}}(T_1(h_k))\| = \|(P_{\beta_k} - P_{\beta_{k-1}})(T_1(h_k))\| \leq \|T_1(h_k)\| \leq b\|h_k\| = b$, luego $\|y_k\| \leq b$.

Ahora, se sigue de $\frac{a}{2}|\lambda| \leq \|\lambda y_k\| \leq b|\lambda|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $k \in \mathbb{N}$ y de la afirmación (ii) que $(y_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión en $C_0(\alpha, E)$ equivalente a la base canónica de c_0. Además si $\beta = \lim \beta_k$ entonces $[(h_k)_{k\geq 1}] \subset C_0(\beta, E)$ donde $[(h_k)_{k\geq 1}]$ denotará el espacio generado por $(h_k)_{k\geq 1}$.

Note que el operador lineal continuo $L : c_0 \to [(y_k)_{k\geq 1}]$ definido por $L(e_k) = y_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ satisface que $\frac{a}{2} \leq \|L(e_k)\| \leq b$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y por tanto $\frac{a}{2} \geq \|L\| \geq b$. Luego $\frac{a}{2}\|L^{-1}x\| \leq \|x\|$ para todo $x \in [(y_k)_{k\geq 1}]$, es decir $\|L^{-1}\| \leq \frac{2}{a}$.

Denote por L^* el operador dual de L y tome $y_k^* \in [(y_k)_{k\geq 1}]^*$ tal que $L^*(y_k^*) = e_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $y_k^*(y_j) = L^*(y_k^*)e_j = \delta_{nj}$ y $\|y_k^*\| = \|(L^*)^{-1}e_k\| \leq \frac{2}{a}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $j \in \mathbb{N}$. Por el teorema de Hanh-Banach extendemos y_k^* a funcionales $(z_k^*)_{k\geq 1}$ en Y^* con $\|z_k^*\| \leq \frac{2}{a}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y tal que z_k^* restricto a $[(y_k)_{k\geq 1}]$ es igual a y_k^* para todo $k \in \mathbb{N}$. Ahora defina $R : C_0(\beta, E) \to [(y_k)_{k\geq 1}]$ por

$$R(f) = \sum_{k=1}^{+\infty} z_k^* \left(f\,|_{\langle \beta_{k-1}+1, \beta_k\rangle}\right) y_k.$$

Como se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|z_k^* \left(f\,|_{\langle \beta_{k-1}+1, \beta_k\rangle}\right)\right\| &\leq \frac{2}{a}\left\|f\,|_{\langle \beta_{k-1}+1, \beta_k\rangle}\right\| \\
&= \frac{2}{a}\sup\{\|f(\gamma)\| : \gamma \in \langle \beta_{k-1}+1, \beta_k\rangle\} \\
&= \frac{2}{a}\|P_{\beta_{k-1}}(f) - P_{\beta_n}(f)\| \qquad \forall f \in C_0(\beta, E), \quad \forall k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Entonces se sigue que $R(f)$ es bien definido y $\|R(f)\| \leq \frac{2}{a}b$. Además $R(y_k) = y_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y por tanto R es una proyección de $C_0(\beta, E)$ sobre el espacio generado por $(y_k)_{k\geq 1}$.

Denontemos ahora por $S : C_0(\alpha, E) \to C_0(\beta, E)$ la proyección dada por $S(f) = f\big|_{\langle 1,\beta\rangle} - f(\beta)$. Así $\|S(f)\| \leq \|f\| + \|f\| = 2\|f\|$ lo que implica que $\|S\| \leq 2$ y $P = R \circ S$ es una proyección de $C_0(\alpha, E)$ sobre $[(y_k)_{k\geq 1}]$ con $\|P\| \leq \|R\|\|S\| \leq 2 \cdot \frac{2}{a} \cdot b = \frac{4}{a}b$.

Finalmente, observe que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} \|T_1(h_k) - y_k\|\|y_k^*\|\|P\| &\leq \|P\| \sum_{k=1}^{+\infty} \|T_1(h_k) - y_k\|\|y_k^*\| \\ &\leq \frac{4}{a} \cdot b \cdot \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} c \\ &= \frac{8}{a^2} \cdot b \cdot \varepsilon \cdot \frac{a}{b} = \frac{8\varepsilon}{a} < \frac{8}{a} \cdot \frac{a}{16} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Entonces $(T_1(h_k))_{k\geq 1}$ es una sucesión básica equivalente a $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (ver [5], Teorema 9 pág 46) y existe una proyección equivalente a $(y_k)_{k\geq 1}$ y existe una proyección Q de $C_0(\alpha, E)$ sobre $[T_1(h_k)]_{k\geq 1}$ (ver [5], Teorema 12 pág 50). Por lo tanto $H_1 = [(h_k)_{k\geq 1}]$ es un subespacio de H isomorfo a c_0 y $\varphi^{-1} \circ Q \circ \varphi$ es una proyección de $C(\alpha, E)$ sobre $T(H_1)$ ∎

Finalmente se ha dado la teoría necesaria para mostrar el resultado principal el cual se enuncia a continuación.

Teorema 3.4.2. *Sean α y β dos ordinales contables, entonces $\mathcal{N}(C(\alpha))$ no es isomorfo a un subespacio de $\mathcal{K}(C(\beta))$.*

Demostración: Supongamos que existe un isomorfismo $T : \mathcal{N}(C(\alpha)) \to \mathcal{K}(C(\beta))$ como $C(\beta)$ es isomorfo a $C_0(\beta)$ entonces existe un isomorfismo de $\mathcal{N}(C(\alpha))$ en $\mathcal{K}(C_0(\beta))$. Sabemos que el dual de $C_0(\alpha)^*$ es isomorfo al espacio $\ell_1(\langle 0, \alpha\rangle)$ y este espacio posee la propiedad de aproximación por observación 3.2.4, entonces tenemos que por Teorema 3.2.6 y Teorema 3.2.5 tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(C(\alpha)) &\sim C(\alpha)^* \widehat{\otimes}_\pi C(\alpha) \\
&\sim \ell_1(\langle 0, \alpha\rangle) \widehat{\otimes}_\pi C(\alpha) \\
&\sim \ell_1(\mathbb{N}, C_0(\alpha)).
\end{aligned}
$$

Por otro lado, del Teorema 3.3.1 y del Teorema 3.3.2 tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}(C_0(\beta)) &\sim C_0(\beta)^* \widehat{\otimes}_\varepsilon C_0(\beta) \sim \ell_1(\langle 0, \beta\rangle) \widehat{\otimes}_\varepsilon C(\beta) \sim C_0(\beta) \widehat{\otimes}_\varepsilon \ell_1(\langle 0, \beta\rangle) \\
&\sim C(\beta) \widehat{\otimes}_\varepsilon \ell_1(\langle 0, \beta\rangle) \sim C(\langle 0, \beta\rangle, \ell_1\langle 0, \beta\rangle) \\
&\sim C_0(\langle 0, \beta\rangle, \ell_1\langle 0, \beta\rangle) \sim C_0(\beta, \ell_1).
\end{aligned}
$$

Por tanto existe un isomorfismo entre $\ell_1(\mathbb{N}, C_0(\alpha))$ y un subespacio de $C_0(\beta, \ell_1)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere X_n el subespacio de $C_0(\alpha)$ isométrico a ℓ_∞^n (restringir la función a $\langle 1, n\rangle$) y así $X = (\ell_\infty^1 \oplus \ell_\infty^2 \oplus \cdots \oplus \ell_\infty^n \oplus \cdots)_{\ell_1}$ es un subespacio de $\ell_1(\mathbb{N}, C_0(\alpha))$ y este subespacio no contiene un subespacio isomorfo a c_0 (ningún subespacio de ℓ_1 contiene un subespacio de c_0). Por tanto $T(X)$ es un subespacio de $C_0(\beta, \ell_1)$ que no contiene un subespacio isométrico a c_0 y por el teorema anterior (Teorema 3.4.1) $T(X)$ es un subespacio de $C_0(n, \ell_1)$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Como ℓ_1 es isomorfo a su cuadrado entonces $C_0(n, \ell_1) \sim \ell_1^n$ y así $C_0(n, \ell_1)$ es isomorfo a ℓ_1 y por tanto $T(X)$ es un subespacio de ℓ_1, luego X es isomorfo a un subespacio de ℓ_1. Pero X contiene a ℓ_∞^n uniformemente y como X es isomorfo a un subespacio de ℓ_1 entonces ℓ_1 contiene a ℓ_∞^n uniformemente esto es ℓ_1 no tiene cotipo finito , lo que contradice el hecho que ℓ_1 tiene cotipo 2 $\blacksquare$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer. New York (2010).

CEMBRANOS, P., MENDOZA, J. *Banach Spaces of vector-valued functions*. Lect Notes Math. Berlin-Heidelberg-New York. Springer (1997).

DEFANT, A., FLORET, K. *Tensor norms and operator ideals*. Math. Studies. 176. North-Holland. Amsterdam (1993).

DIESTEL, J. *Absolutely Summing Operators*. Cambridge Studies.

DIESTEL, J. *Sequences and series in Banach spaces*. Springer. Berlin- Heidelberg-New York. (1984).

DIESTEL, J. and UHL, J.J.Jr. *Vector Measures*. Mathematical Surveys 15. Amer. Math. Soc. Providence. RI (1977).

GREUB, W.H. *Linear Algebra*.

GROTHENDIECK, A. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Mem. Amer. Math.Soc. 16 (1955).

JECH, T. *Set Theory*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press.

JOHNSON, W.B. *On finite dimensional subspaces of Banach spaces with local unconditional structure*. Studia Math. **51**(1974).

KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons. (1978).

LINDESTRAUSS J., TZAFRIRI, L. *Classical Banach spaces I. Sequences Spaces*. Springer-Verlag. Berlin-New York (1977).

PELCZYNSKI, A., SEMADENI, Z. *Spaces of continuos functions (III)*. Studia Mathematica. (1959).

PIETSCH, A. *History of Banach spaces and linear operators*. Birkhäuser. Boston (2007).

RESTREPO, G. *Introducción al análisis funcional*. Univ. del Valle. Colección Libros de Texto. (2010).

RETHERFORD, J.R. and STEAGALL, C.P. *Fully nuclear and completely nuclear operators with applications to $\mathcal{L}$ and $\mathcal{L}_\infty$ spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 163, 457-492 (1972).

RUSTON, A.F. *On the Fredholm theory of integral equations for operators belonging to the trace class of general Banach space*. Proc. London Math. Soc. (2) 53. 109-124. (1951).

RYNNE, B.P. and YOUNGSON, M.A. *Linear Functional Analysis*. Second Edition. Springer-Verlag. London (2008).

SAMUEL, C. *On spaces of operators on $C(Q)$ spaces (Q countable metric space)*. Pro. Amer. Math. Soc. 137 (2009).

SCHAEFER, H.H. *Topological Vector Spaces*. Springer-Verlag. New York. (1971).

TREVES, F. *Topological Vector Spaces, distributions and kernel*, Acad. Press. New York and London (1967).

WOJTOSCYK, P. *Banach Spaces for analysts*. Cambridge University Press. (1991).

WONG, Y.C. *Scwartz Spaces, Nuclear Spaces and Tensor Product*. Springer-Verlag. New York. (1979).

YOSIDA, K. *Functional Analysis*. Sixth Edition. Springer-Verlag. New York. (1980).