

**COMPARACIÓN DE UNA SOLUCIÓN ANALÍTICA EXTERIOR Y  
UNA NUMÉRICA INTERIOR QUE DESCRIBEN EL CAMPO  
GRAVITACIONAL DE UNA ESTRELLA DE NEUTRONES  
RÁPIDAMENTE ROTANTE**

**LEONARDO AUGUSTO PACHÓN CONTRERAS**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA**

**2005**

**COMPARACIÓN DE UNA SOLUCIÓN ANALÍTICA EXTERIOR Y  
UNA NUMÉRICA INTERIOR QUE DESCRIBEN EL CAMPO  
GRAVITACIONAL DE UNA ESTRELLA DE NEUTRONES  
RÁPIDAMENTE ROTANTE**

Trabajo de grado, que para  
obtener el título de físico, presenta

**LEONARDO AUGUSTO PACHÓN CONTRERAS**

Dirigido por  
**Dr. JOSÉ DAVID SANABRIA GÓMEZ**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA**

**2005**

*A la memoria de mi abuelo*

*Gilberto Pachón Pérez*

*A mis hermanos*

*César, Leonela, Luis Carlos y Gerardo Andrés*

*A mis padres*

*César Augusto y Norma Asunción*

---

*Agradecimientos*

*El autor expresa sus agradecimientos:*

*Al Dr. José David Sanabria Gómez por acogerme en su grupo de investigación y por su colaboración durante la realización de este trabajo. Con él quedo profundamente agradecido.*

*Al Dr. Guillermo Alfonso González Villegas, un gran físico, pero antetodo un gran señor.*

*A los grandes seres humanos y físicos que tuve como profesores, en especial al profesor Luis Fernando Castellanos Pulido, a quien considero como mi primer maestro y al cual aprecio mucho, pues siento que fue él quien de cierta manera modeló mi caracter y me ayudó a sentar las bases sobre las cuales hoy construyo. El profesor Luis Fernando es una de esas personas difícil de olvidar. Al profesor Ilya Mikhailov, a quien respeto y admiro por su dedicación y dominio de la física, un hombre siempre dispuesto al diálogo.*

*A mi familia, en especial a mis padres, a mis hermanos y a mi abuela María de los Angeles Carreño de Pachón por su apoyo, paciencia y apoyo incondicional.*

*A la Familia Valdés Solano, Don James, Doña Julia, Bethoven y Diana Milena, quien fué mi novia durante casi toda mi carrera, con quien aprendí a compartir, a valorar las cosas simples de la vida y a olvidarme de mi egocentrismo, este trabajo es también para ella.*

*A las personas con las que compartí las aulas de clase, mis ratos de ocio, mis alegrías y en especial a las pocas con las que me permití y me permitieron ser parte de sus vidas, entre ellas a Ella Karina López Suárez, Alba Johanna Castillo Rojas, Fredy Fabián Parada Becerra y John Jairo Lozada Vera.*

*Al Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación, en especial mis compañeros Jorge Armando Rueda Hernández y Gustavo Emilo Ramírez Caballero con quienes compartí toda mi etapa de formación como físico y como profesional y a los cuales siempre he considerado como grandes amigos.*

*A la Universidad Industrial de Santander*

---

**TÍTULO :** COMPARACIÓN DE UNA SOLUCIÓN ANALÍTICA EXTERIOR Y UNA NUMÉRICA INTERIOR QUE DESCRIBEN EL CAMPO GRAVITACIONAL DE UNA ESTRELLA DE NEUTRONES RÁPIDAMENTE ROTANTE \*

**AUTOR :** Leonardo Augusto Pachón Contreras \*\*

**Palabras Claves :** Estrellas de neutrones, Ecuación de estado, Simetría ecuatorial, Órbita marginalmente estable.

**DESCRIPCIÓN :** La descripción analítica del espacio tiempo alrededor de una estrella de neutrones rápidamente rotante es aun un problema abierto. Encontrar una solución analítica exterior para una estrella de este tipo es importante, pues permite simplificar cálculos como la obtención de geodésicas alrededor de la fuente, el radio y la frecuencia de partículas que orbitan en la región marginalmente estable, las propiedades de discos de acreción como las frecuencias epicíclicas y otras. En este trabajo se estudió la solución analítica exterior de Manko, Martín & Ruiz (MMRb) [29] como un posible modelo para el campo gravitacional exterior de una estrellas de neutrones rápidamente rotante. El estudio se basó en la comparación de propiedades del espacio tiempo descrito por la solución MMRb con las obtenidas por Berti & Stergioulas [9] para cinco diferentes modelos interiores de este tipo de estrellas. Los parámetros físicos que se compararon fueron los momentos multipolares de masa y rotación, y el radio de la órbita marginalmente estable (ROME). Se encontró que la solución MMRb describe adecuadamente estrellas de neutrones descritas por ecuaciones de estados como la APRb y la AU en secuencias de masa entre 1,7 a 3  $M_{\odot}$ . Se concluye además que el parámetro de momento octupolar de rotación, en esta solución analítica, no influye considerablemente en el valor de las propiedades dinámicas del espacio tiempo.

---

\*Trabajo de Grado

\*\*Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Director: José David Sanabría Gómez

---

**TITLE :** COMPARISON BETWEEN AN ANALYTICAL EXTERIOR SOLUTION AND A NUMERICAL INTERIOR ONE THAT DESCRIBE THE GRAVITATION FIELD OF A RAPIDLY ROTATING NEUTRON STAR \*

**AUTHOR :** Leonardo Augusto Pachón Contreras\*\*

**KEY WORDS:** Neutron star, State equation, Equatorial symmetry, Marginally Stable Orbit.

**DESCRIPTION :** The analytical description of the space time around a rapidly rotating neutron star is even an open problem. To find an exterior analytical solution for a star of this type is important, because it allows to simplify calculations like the obtaining of geodesic around the source, the radius and the frequency of particles that they orbit in the marginally stable region, the disk properties of accretion like the epicyclic frequencies and others. In this work the analytical exterior solution of Manko, Martín was studied & Ruiz (MMRb) [29] as a possible model for the exterior field of gravitation of rapidly rotating neutron stars. The study was based on the comparison of properties of the space time described by the solution MMRb with the ones obtained by Berti & Stergioulas [9] for five different inner models from this type of stars. The physical parameters that were compared were the multipolar moments of mass and rotation, and the radius of the marginally stable orbit (ROME). It was found that the solution MMRb solution describes the gravitational field of a neutron stars the one that is modeled by equations of state like the APRb and the AU in sequences of mass between 1,7 to 3  $M_{\odot}$ . One concludes in addition that the parameter of the octupolar moment of rotation, in this analytical solution, does not influence considerably in the value of the dynamic properties of the space time.

---

\*Work of Degree

\*\*Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Director: José David Sanabría Gómez

# TABLA DE CONTENIDO

---

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2. LAS ESTRELLAS DE NEUTRONES</b>	<b>5</b>
2.1. VIAJE AL INTERIOR DE UNA ESTRELLA DE NEUTRONES	5
2.2. MODELOS DE ESTRELLAS DE NEUTRONES . . . . .	9
<b>3. CAMPOS ESTACIONARIOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS</b>	<b>11</b>
3.1. EL FORMALISMO DE ERNST . . . . .	12
3.2. MOMENTOS MULTIPOLARES . . . . .	14
3.3. ÓRBITA MARGINALMENTE ESTABLE . . . . .	16
<b>4. SOLUCIÓN N SOLITÓNICA</b>	<b>21</b>
4.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	21
4.2. CÁLCULO DEL POTENCIAL $\mathcal{E}(\rho, z)$ . . . . .	21
4.3. CÁLCULO DE LAS FUNCIONES MÉTRICAS . . . . .	27
4.4. LA SOLUCIÓN MMRb . . . . .	31

---

<b>5. OBTENCIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS</b>	<b>37</b>
5.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	37
5.2. COMPARACIÓN DE LOS MOMENTOS MULTIPOLARES . . . . .	38
5.3. COMPARACIÓN DEL ROME . . . . .	40
5.3.1. Caso Corrotante . . . . .	40
5.3.2. Caso Contrarrotante . . . . .	41
5.4. INFLUENCIA DE LA ROTACIÓN . . . . .	44
<b>6. CONCLUSIONES</b>	<b>47</b>
<b>A. TABLAS DE VALORES CÁLCULADOS PARA <math>S_3</math> Y PARA ROME</b>	<b>49</b>

## LISTA DE FIGURAS

---

2.1. Estructura interna de una estrella de neutrones . . . . .	7
5.1. Errores en el valor del ROME corrotante para la primera secuencia de masa .	42
5.2. Errores en el valor del ROME corrotante para la primera secuencia de masa .	42
5.3. Errores en el valor del ROME corrotante para la primera secuencia de masa .	42
5.4. Errores en el valor del ROME contrarrotante para la primera secuencia de masa	43
5.5. Errores en el valor del ROME contrarrotante para la segunda secuencia de masa	43
5.6. Errores en el valor del ROME contrarrotante para la tercera secuencia de masa	43
5.7. ROME para las soluciones MMRb, MMRb0 y de Berti usando la EOS A y $M_b = 1,589M_\odot$ . . . . .	44
5.8. ROME contrarrotante para las soluciones de MMRb, MMRb0 y de Berti us- ando la EOS APRb y $M_b = 2,672M_\odot$ . . . . .	44
5.9. ROME en contrarrotación para las soluciones de Berti, MMRb y MMRb0 con EOS AU y $M_b = 2,799M_\odot$ . . . . .	45
5.10. ROME corrotante para las soluciones de Berti, MMRb y MMRb0 con EOS APRb y $M_b = 2,800M_\odot$ . . . . .	45

## LISTA DE TABLAS

---

2.1.	Algunas propiedades relevantes de una estrella de neutrones . . . . .	6
2.2.	Algunas ecuaciones de estado que describen el comportamiento de la materia en una NS . . . . .	9
5.1.	Errores porcentuales en el momento octupolar de rotación, $S_3$ . . . . .	39
5.2.	Estudio de la influencia de la arbitrariedad del momento octupolar de rotación	41
A.1.	Valores de $S_3$ y del ROME para la soluciones MMRb, MMRb0 y de Berti usando una EOS tipo A . . . . .	50
A.2.	Valores de $S_3$ y del ROME para la soluciones MMRb, MMRb0 y de Berti usando una EOS tipo AU . . . . .	51
A.3.	Valores de $S_3$ y del ROME para la soluciones MMRb, MMRb0 y de Berti usando una EOS tipo FPS . . . . .	52
A.4.	Valores de $S_3$ y del ROME para la soluciones MMRb, MMRb0 y de Berti usando una EOS tipo L . . . . .	53
A.5.	Valores de $S_3$ y del ROME para la soluciones MMRb, MMRb0 y de Berti usando una EOS tipo APRb . . . . .	54

# 1 INTRODUCCIÓN

---

El estudio del comportamiento e interacción de la materia en condiciones de densidad aun mayores que la nuclear, a temperaturas y presiones altísimas, es de interés en relatividad general, al menos en ciertos aspectos, pues en este tipo de condiciones coexisten las partículas que forman los objetos estelares. Desde el punto de vista de la física nuclear las estrellas relativistas son el escenario perfecto para el estudio de la materia en estas condiciones, un laboratorio natural para poner a prueba modelos subnucleares. Y para la relatividad general estos objetos son parte de su esencia accidental y por qué no de su esencial causal. Los objetos estelares como las estrellas de neutrones, estrellas de quarks y los agujeros negros presentan propiedades y estructuras muy complejas. Las estrellas de neutrones son objetos compactos de masas gigantescas, producto de altísimas densidades, con periodos de rotación de algunas milésimas de segundos y formadas en su mayoría por las partículas más abundante en los núcleos atómicos usuales y con una región central sobre la cual no se conoce mucho. Estas propiedades han originado en los últimos años extensos estudios tanto teóricos como observacionales, pues además podrían proveer información sobre la ecuación de estado de la materia bajo estas condiciones de temperatura, presión y densidad.

El comportamiento de la materia en condiciones extremas, como las ya descritas, es un problema abierto a la discusión y sobretodo a la especulación. Los físicos nucleares se encargan de diseñar modelos basados en diferentes extrapolaciones de resultados experimentales y teóricos, formulando así diversas ecuaciones de estado para la materia en estas condiciones, pero estos trabajos necesitan de respaldo, de comprobación directa o indirecta, la cual se realiza utilizando modelos de objetos estelares como las estrellas de neutrones. Los observables que se comparan son generalmente propiedades como el radio de la órbita marginalmente estable, el corrimiento al rojo gravitacional, momento angular, periodo de rotación y los momentos multipolares. Una reseña más detallada de estas propiedades puede encontrarse en la tabla 2.1.

El estudio del campo de una fuente masiva se realiza generalmente en dos regiones, en el interior y en el exterior de la fuente. En el caso de cuerpos de gran masa, como las estrellas de neutrones, el cálculo del campo debe desarrollarse en el ámbito de la relatividad general. Éste se obtiene solucionando el sistema de ecuaciones de campo de Einstein, un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas no lineales de segundo orden, no homogéneo. Este sistema se debe solucionar de manera independiente en cada región. En la región interior, en presencia de materia, encontrar solución a éste requiere conocer, o en su defecto suponer, expresiones que describan la interacción y la clase de partículas que forman la fuente, además describir el sistema bajo equilibrio hidrodinámico, incluir funciones de densidad, entre otras propiedades termodinámicas y características propias de la materia a altas presiones y temperaturas, es decir, conocer la ecuación de estado (EOS) del sistema en estudio. Por esta razón encontrar soluciones interiores es un trabajo desarrollado en la mayoría de los casos a través de algoritmos numéricos y no por vías analíticas. En el caso de la región exterior, en ausencia de materia, el sistema de ecuaciones de Einstein es homogéneo, pero encontrar solución de éste no deja de ser complicado y para solucionarlos actualmente se recurre a modernas técnicas analíticas de generación de soluciones.

La descripción analítica del espacio tiempo alrededor de una estrella de neutrones rápidamente rotante es aun un problema abierto. El caso lentamente rotante está relacionado con la solución analítica encontrada por Kerr [20], la cual ha sido ampliamente estudiada, ejemplo de esto son los trabajos de Hartle y Hartle & Thorne. Encontrar una solución analítica exterior para una estrella de neutrones rápidamente rotante es importante por varias razones [10], pues permite simplificar cálculos como la obtención de geodésicas alrededor de la fuente, el radio y la frecuencia de partículas que orbitan en la región marginalmente estable, las propiedades de discos de acreción como las frecuencias epíciclicas, acreción de luminosidad y otras.

Con el desarrollo de este trabajo se pretendió analizar la solución analítica exterior de Manko, Martin y Ruiz [29] como un posible modelo de estrellas de neutrones rápidamente rotante. El estudio se llevó a cabo de manera indirecta; es decir, comparando las propiedades de esta solución con las de modelos provenientes de la física nuclear y la relatividad numérica para la solución interior de este sistema, mas exactamente con los modelos propuestos por Berti y Stergiolaus [9]. La comparación se realizó analizando dos criterios: el valor de los momentos multipolares de masa y rotación y del radio de la órbita marginalmente estable en el ecuador de la fuente (ROME).

Estos criterios fueron escogidos basados en los hechos de que los momentos multipolares son propiedades globales del espacio tiempo descrito por la fuente; además, si dos soluciones poseen idénticos momentos multipolares deben describir la misma fuente, al menos a grandes distancias [39]. El estudio de la estabilidad de las órbitas circulares en el plano ecuatorial de una fuente que describe un espacio tiempo estacionario y axialmente simétrico es de interés físico, al menos en dos contextos: primero, un modelo idealizado de galaxias planas es un disco delgado hecho de partículas (estrellas) que viajan en órbitas circulares en el campo gravitacional producido por la suave distribución de materia de las mismas partículas. Una condición necesaria para que estos modelos sean una aproximación de un sistema físico plausible es que las órbitas de partículas individuales sean estables. En segundo lugar y la razón por la que se adoptó este criterio, es que el estudio de las partículas con órbitas circulares alrededor de una objeto compacto (agujero negro o una estrellas de neutrones) ha jugado un papel importante en el estudio de cómo la materia que es acretaada está relacionada con la energía radiada.

El estudio no se limitó a comparar las dos soluciones, además se analizó la influencia de la arbitrariedad del octupolo de rotación en la solución de Manko para los cálculos de la órbita marginalmente estable. Una descripción mas detallada puede leerse en el capítulo 5.

El trabajo está presentado como se describe a continuación. Los capítulos 2 y 3 están dedicados a la revisión bibliográfica de algunos temas concernientes y de interés físico como algunos modelos de estrellas de neutrones, sus ecuaciones de estado y los campos estacionarios axialmente simétricos, en particular al sistema de ecuaciones de Einstein, a las soluciones a éste en este contexto, de los momentos multipolares en relatividad general y de las condiciones para la existencias de órbitas marginalmente estables. Una vez expuestos los argumentos teóricos y físicos se da paso al capítulo 4, en el cual desarrolla un pequeño estudio de las soluciones N solitónica. En este capítulo se presenta, como un logro de este trabajo, la solución N solitónica de electrovacío con simetría ecuatorial utilizando el método de Sibgatullin; además, se presentan las condiciones que deben satisfacer los potenciales de Ernst sobre el eje de simetría para este caso y se muestra la solución analítica exterior de Manko, Martin y Ruiz ó solución MMRb [29], como una particularización de la solución N solitónica, y se hace una descripción de ésta a través de su estructura multipolar justificando su escogencia para el desarrollo del presente trabajo. Los resultados y su análisis se exponen en el capítulo 5. Finalmente el capítulo 6 presenta las conclusiones y aportes de este trabajo.

En el Apéndice A se muestran todos los valores obtenidos para el ROME y para el

---

octupolo de momento angular. Las expresiones y ecuaciones en este trabajo están escritas en el sistema de unidades naturales; es decir,  $c = 1$  y  $G = 1$ , el valor de la masa del sol  $M_{\odot}$  es aproximado a  $1,475Km$

## 2 LAS ESTRELLAS DE NEUTRONES

---

### 2.1 VIAJE AL INTERIOR DE UNA ESTRELLA DE NEUTRONES

El estudio de las estrellas de neutrones abarca diversas líneas de investigación en física como la física nuclear, la física de altas energías, la termodinámica y la relatividad general, pues su evolución cuasiestacionaria aislada se puede estudiar considerando secuencias de equilibrio a lo largo de las cuales la masa en reposo permanece constante mientras el momento angular varía. Tal evolución se puede analizar como una pérdida adiabática de energía y de momento angular a través de radiación electromagnética o gravitacional.

Las estrellas de neutrones son restos de gran densidad de las estrellas de enorme masa que, al acabarse su combustible nuclear y cesar la presión interna provocada por reacciones atómicas, se volvieron supernovas. El fenómeno llamado supernova causa que se lance hacia el espacio parte de la corteza estelar mientras que la materia del núcleo se comprime en el mismo suceso hasta a densidades de  $10^{15}g/cm^3$ . A estas densidades la mayoría de los protones y electrones se han combinado formando neutrones, de modo que cerca del 100% del corazón de estas estrellas está compuesto de neutrones. Este resto estelar no puede seguir colapsando debido a que los neutrones son partículas que cumplen el Principio de Exclusión de Pauli. Ésto produce la llamada Presión de Degeneración de Fermi que frena el colapso gravitacional producido por la gran masa de la estrella. Las propiedades físicas más relevantes de una estrella en general se presentan a continuación

Cantidad física	Definición
$\epsilon_c$	Densidad total de energía central ( $10^{15} gcm^{-3}$ )
$\Omega$	Velocidad angular de la estrella ( $10^3 s^{-1}$ )
$I$	Momento de inercia ( $10^{45} gcm^2$ )
$M_0$	Masa gravitacional
$T/W$	Relacion entre la energía rotacional y la de enlace
$R_e$	Radio de la estrella en el ecuador ( $Km$ )
$r_+$	Altura desde el ecuador al Rome co-rotante ( $Km$ )
$r_-$	Altura desde el ecuador al Rome contra-rotante ( $Km$ )
$M_b$	Masa en reposo de la estrella
$M_2$	Momento cuadrupolar de masa ( $Km^3$ )
$J_1$	Momento angular total de la estrella ( $Km^2$ )
$S_3$	Octupolo de momento angular ( $Km^4$ )

Tabla 2.1: Algunas propiedades relevantes de una estrella de neutrones

Los púlsares suelen interpretarse como estrellas de neutrones en rotación. Del mismo modo, el objeto compacto que produce la acreción de materia de una estrella compañera en un sistema binario se considera también una estrella de neutrones, excepto en los pocos casos en los que se trata de un agujero negro.

Tal vez el término de "estrella" no es el más preciso para clasificar a estos objetos, dado que las características que se les ha podido distinguir las difiere sustancialmente de una estrella de rango común. Pero además, esa diferencia no solamente se da entre estrellas, sino que también en la estructura de su materia en relación a la que nos es común aquí en la Tierra.

A través del estudio de los púlsares binarios se ha podido medir la masa de varias estrellas de neutrones (abreviado NS), éstos llegan a valores cercanos a  $1,44 M_{\odot}$ . Su radio, todavía no se ha podido medir con exactitud, pero modelos teóricos como los desarrollados por Wilson (1972), Bonazzola & Ipser (1975,1976), Butterworth (1976, 1979), Friedman, Ipser & Parker (1986), Komatsu, Eriguchi & Hachisu (1989) y Cook, Shapiro & Teukolsky [10] orientan a que podría comportar valores que se ubican en el rango de 6 a 10 km. Con un alto realismo teórico podemos considerar que una estrella de neutrones no es más ni menos que un núcleo atómico del porte de una ciudad de la Tierra.

La figura 2.1 representa la estructura global de una estrella de neutrones, en

ella se distinguen las dos principales partes de su constitución: corteza y núcleo. Ambas partes se diferencian sustancialmente. La corteza es sólida, semejante a la de la Tierra, pero de poco espesor, quizás entre uno y unos cuantos metros de profundidad, está compuesta principalmente por elementos con núcleos atómicos usuales. Por otra parte, en el núcleo la densidad es tan extrema que genera la fusión de los núcleos atómicos produciendo un material muy homogéneo y licuado, el cual es reconocido con el nombre de líquido cuántico y sobre el cual parece flotar la corteza. Casi el 98 % de la estructura de la estrella corresponde al núcleo.

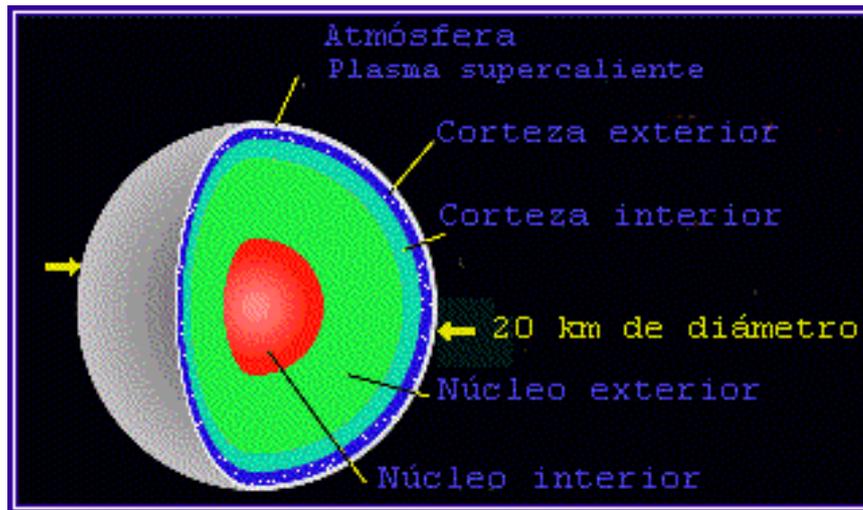


Figura 2.1: Estructura interna de una estrella de neutrones

No existe seguridad teórica sobre la composición material que podría comportar la superficie de la corteza de una estrella de neutrones, pero de una cosa casi se está seguro: la parte superior de la corteza, a densidades del orden de  $10 \text{ g/cm}^3$ , debe ser de hierro, pero no se descarta la presencia, a densidades más bajas, de elementos más ligeros como el hidrógeno, helio, carbono u oxígeno. Esta capa superior envolvente de la corteza es de muchísima importancia observacional. También se puede dar la situación, como piensan muchos físicos, que la superficie sólida de una estrella de neutrones podría estar recubierta de un envoltorio gaseoso de poco espesor (unos cuantos cm) semejante a una atmósfera y bajo ésta se daría la existencia de una capa líquida, como un océano de pocos metros de profundidad, soportada por un casco sólido.

Adentrándose más en la estrella, es decir avanzando en densidad, aparecen núcleos atómicos más exóticos y con más neutrones, pero estables en la corteza gracias a la presión y densidad a que están expuestos. Mas hacia el interior de la corteza de la estrella llegamos al nivel de densidad de  $4,3 * 10^{11} \text{ g/cm}^3$ . En ese tramo, nos encontramos con un material imposible de ser reproducido en nuestros laboratorios. Aparte de los núcleos y electrones se encuentra un líquido superfluido

de neutrones transitando entre los núcleos. Tenemos así un material muy extraño compuesto por un cristal nucleico inmerso en un líquido.

La parte inferior de la corteza se encuentra a un rango de densidad de aproximadamente  $1,3 * 10^{14} g/cm^3$ . En ella se hallan núcleos deformados, pues su volumen ha sido reducido por líquido de neutrones. Esta forma que adquieren los núcleos se asemejan a los aglomerados nucleares, ya que primero se alargan como un elástico; luego se aplastan en capas nucleares como membranas ocupando la mayor parte del volumen anfitrión y empujan al líquido de neutrones hasta cohabitar como burbujas. A baja densidad, los núcleos de hierro están constituidos por neutrones en un 55 % y por protones en un 45 %; mientras, los aglomerados nucleares presentan un 95 % de neutrones y un 5 % de protones. Ahora, en cuanto al líquido de neutrones, éste está constituido obviamente exclusivamente por neutrones, pero con una ligera densidad menor a la que tienen los aglomerados nucleares. La densidad del líquido de neutrones "libres" va aumentando a medida que el centro de la estrella está mas cerca, ésta aumenta hasta alcanzar la densidad de la materia en los aglomerados y las burbujas de neutrones desaparecen. Se ha llegado al núcleo de la estrella.

En el espacio entre el límite de la parte inferior de la corteza y el núcleo la composición también podría ser de aglomerados nucleares, pero además de los núcleos de neutrones y protones la estrella posee electrones en toda su estructura. El núcleo es un fluido y puede considerarse seccionado en dos partes: una sección exterior constituida principalmente de neutrones, protones y los electrones necesarios para mantener la carga eléctrica nula, y una sección interior. Describir la sección exterior del núcleo, teóricamente no conlleva problemas, debido a que la densidad que se da es muy cercana a la de los núcleos atómicos usuales unos  $2,8 * 10^{14} g/cm^3$ . Distinto es el caso cuando se estudia la sección interior, allí es como estar dentro de un juego de azar teórico.

Algunos físicos creen que la parte más profunda del núcleo de una NS lo forma un condensado piónico, un nuevo estado de la materia. Los piones son partículas subnucleares detectadas en laboratorios de aceleración de partículas y son los mediadores en la interacción nuclear. En condiciones extremas como son las que se deben dar en la sección interior del núcleo de una estrella de neutrones, los piones se condensan formando una especie de gas capaz de sustentar un peso que, a escala terrenal, casi parece inconmensurable. Las condiciones extremas que se dan en el interior de una estrella de neutrones llevan a los físicos a los límites mismos de su conocimiento de la física subnuclear. Algunos sospechan que el interior del núcleo de una estrella de neutrones está formado por elementos quárquicos constitutivos

de las partículas nucleares.

Queda claro, entonces, que el conocimiento sobre las estrellas de neutrones no es tan amplio como se quisiera, pero ésto es lo que motiva trabajos como el presente.

## 2.2 MODELOS DE ESTRELLAS DE NEUTRONES

Una estrella de neutrones se debe modelar con base en la hidrodinámica, la relatividad general, la física nuclear y la física de neutrinos en un escenario de lagrangianos 3D totalmente paralelos, sistemas autogravitantes, radiación gravitacional, dependencia temporal de las propiedades, compleja estructura nuclear y radiación de neutrinos de multiples sabores. Existe una gran cantidad de modelos aproximados de estrellas de neutrones, cada uno está caracterizado por una ecuación de estado, la cual modela la interacción de la materia en equilibrio dentro de la fuente bajo algunas condiciones específicas de temperatura, presión, etc. Las ecuaciones de estado más estudiadas en este contexto se describen brevemente en la siguiente tabla

EOS	Descripción
A	Reid Soft core. Pandharipande (1971a)
B	Reid core with hiperons. Pandharipande (1971a)
C	Bethe y Jhonson (1974). Modelo I
D	Bethe y Jhonson (1974). Modelo V
E	Moszkowski (1974)
F	Arponen (1972)
G	Canuto y Chitre (1974)
L	Mean field. Pandharipande y Smith (1975b)
M	Tensor interaccion. Pandharipande y Smith (1975b)
N	Relativistic mean field. Serot (1979)
AU	AV14 + UVII Wiringa, Fiks y Fabrocini (1988)
UU	UV14 + UVII Wiringa, Fiks y Fabrocini (1988)
UT	UV14 + TNI Wiringa, Fiks y Fabrocini (1988)
FPS	UV14 + TNI Lorenz, Ravenhall y Pethick (1993)
APRb	Akmal, Pandharipande y Ravenhall (1998)

Tabla 2.2: Algunas ecuaciones de estado que describen el comportamiento de la materia en una NS

Recientemente se ha volcado la atención hacia algunas ecuaciones de estado en especial, pues se presume que éstas describirían correctamente a una estrella de neutrones. Entre éstas tenemos las cinco utilizadas por Berti & Stergioulas en su trabajo y descritas brevemente a continuación.

Ecuación de estado A:

Propuesta por Pandharipande en 1971. Las densidades superan los  $6,97 \cdot 10^{14} g/cm^3$ . Estas estrellas se componen únicamente de neutrones y su interacción es de tipo (Reid Soft core) adaptado a materia nuclear, la teoría que describe la interacción entre las partículas componentes es el principio variacional aplicado a la función de correlación.

Ecuación de estado L:

Propuesta por Pandharipande y Smith en 1975. El rango de densidades supera los  $4,386 \cdot 10^{11} g/cm^3$ . Estas estrellas se componen únicamente de neutrones y su interacción de atracción nuclear se debe al intercambio escalar.

Ecuación de estado FPS

Emplea la interacción nucleon a dos y tres cuerpos, las interacciones son descritas según el modelo de Skyrme.

Ecuación APRb

Adopta una interacción moderna entre dos nucleones con correcciones de boost, así como el potencial UIX de interacción de tres nucleones. Para esta ecuación de estado se define la presión como

$$P(\tilde{\rho}) = P(\tilde{\rho}_I) + (\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_I)$$

con

$$\rho = \rho_I \sqrt{\frac{\tilde{\rho} + \frac{1}{2}(P_I - \tilde{\rho}_I)}{\tilde{\rho}_I + \frac{1}{2}(P_I - \tilde{\rho}_I)}}$$

donde  $\rho$  denota la densidad de número y  $\rho_I$  es el límite incompresible de densidad y la velocidad del sonido se ha aproximado a la velocidad de la luz.

### 3 CAMPOS ESTACIONARIOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS

---

"El espacio dice a la materia como debe moverse;  
la materia dice al espacio como debe curvarse"

ALBERT EINSTEIN

A través de la relatividad general se puede calcular el campo gravitacional exterior de una fuente masiva; además, suponiendo alguna ecuación de estado, se puede encontrar una expresión para el campo al interior de ésta. El campo de una fuente en ausencia de campo electromagnético está descrito por la solución del sistema de ecuaciones de Einstein (3.1)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi T_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

siendo  $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía momento,  $R_{\mu\nu}$  el tensor de Ricci y  $R$  el escalar de Ricci. Para soluciones de vacío basta con solucionar

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.2)$$

Encontrar una solución general del sistema de ecuaciones diferenciales parciales descritas en (3.1) es prácticamente imposible, por esta razón se resuelve para sistemas con simetrías bien definidas como la esférica o cilíndrica. La complejidad de solucionar estos sistema ha forzado el desarrollo técnicas que faciliten este proceso. Las técnicas modernas de generación de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, están basadas en las simetrías internas de la mismas [14].

### 3.1 EL FORMALISMO DE ERNST

El elemento de línea de un espacio tiempo estacionario axialmente simétrico, en general se describe a través de la métrica conocida como métrica de Lewis-Wyel-Papapetrou y expuesta a continuación

$$ds^2 = -f(\rho, z) (dt - \omega(\rho, z)d\phi)^2 + f^{-1}(\rho, z) [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2], \quad (3.3)$$

Resolver el sistema de ecuaciones de Einstein, en realidad, consiste en encontrar las funciones métricas  $f$ ,  $\omega$  y  $\gamma$ , las cuales determinan totalmente el elemento de línea que describe el espacio tiempo.

El formalismo de Ernst ([12, 13]) es un procedimiento que permite reformular el problema de resolver el sistema de Einstein en otro relativamente más sencillo. Este formalismo fue desarrollado para el caso estacionario axialmente simétrico. Por medio del formalismo de Ernst las ecuaciones de Einstein (3.1) pueden reformularse, en el caso de vacío, como sigue:

$$(\text{Re } \mathcal{E}) \Delta \mathcal{E} = (\nabla \mathcal{E}) \cdot \nabla \bar{\mathcal{E}}, \quad (3.4)$$

con

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z},$$

donde  $\hat{\rho}$  y  $\hat{z}$  son los vectores unitarios de este sistema de coordenadas,  $\text{Re } \mathcal{E}$  denota la parte real de  $\mathcal{E}$  y  $\bar{\mathcal{E}}$  denota complejo conjugado.

La ecuación (3.4) se debe solucionar para  $\mathcal{E}$ , pues este potencial permite calcular las funciones métricas  $f$ ,  $\omega$  y  $\gamma$ , a través las siguientes expresiones

$$f = \text{Re } \mathcal{E}, \quad (3.5)$$

$$\omega_{,\rho} = -\rho f^{-2} \text{Im } (\mathcal{E}_{,z}), \quad (3.6)$$

$$\omega_{,z} = \rho f^{-2} \text{Im } (\mathcal{E}_{,\rho}), \quad (3.7)$$

$$\gamma_{,\rho} = \frac{\rho}{4 (\text{Re } \mathcal{E})^2} [\mathcal{E}_{,\rho} \bar{\mathcal{E}}_{,\rho} - \mathcal{E}_{,z} \bar{\mathcal{E}}_{,z}], \quad (3.8)$$

$$\gamma_{,z} = \frac{\rho \text{Re } [\mathcal{E}_{,\rho} \bar{\mathcal{E}}_{,z}]}{2 (\text{Re } \mathcal{E})^2}. \quad (3.9)$$

Como se observa el problema de resolver el sistema de Einstein (3.1) se reduce a solucionar (3.4) para el potencial  $\mathcal{E}(\rho, z)$ . La mayoría de trabajos destinados a esto y citados arriba plantean transformaciones de soluciones ya conocidas, soluciones semilla, para generar nuevas soluciones. En el caso de fuentes cargadas el problema es aun más complicado, pues al sistema de ecuaciones de Einstein deben añadirse las ecuaciones de Maxwell, esto hace necesaria la definición de un nuevo potencial  $\Phi(\rho, z)$ , el cual modifica la expresión (3.4) e introduce otra, además de modificar notablemente las expresiones (3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9), en este trabajo no se estudiará este caso.

La formulación original de Ernst para el caso de ecuaciones de Einstein-Maxwell con dos vectores de Killing, posteriormente fué trabajado por muchos autores, en el caso de las ecuaciones de Einstein por: Kinnersley [21], Belinskii y Zakharov [8], Harrison [16], Neugebauer [32], Maison [26], en el caso de las ecuaciones de Einstein-Maxwell por: Kinnersley & Chitre [22], Hauser y Ernst [17], Kramer y Neugebauer [25].

## 3.2 MOMENTOS MULTIPOLARES

En esta sección se incluye una rápida revisión de la definición de los momentos multipolares en relatividad general, puesto que serán necesarios en capítulos subsiguientes. Una nueva solución no es más que un resultado matemático si no se es capaz de interpretarla desde el punto de vista físico. No existe un único método para encontrar el campo gravitacional descrito por una métrica, sin embargo del cálculo del límite Newtoniano se puede obtener información, debido a que la teoría de gravitación newtoniana está contenida en la teoría de Einstein como un caso especial. El límite Newtoniano permite calcular los momentos multipolares de la fuente, los cuales en la teoría Newtoniana determinan un único campo gravitacional.

El procedimiento para calcular el límite newtoniano no es único y depende de la escogencia de las coordenadas [34]. La forma clásica de calcular los momentos multipolares se basa en una expansión en series de potencias inversas de la coordenada radial en la que se describe el sistema, en relatividad general este procedimiento no es del todo válido, pues no es independiente de las coordenadas, por ejemplo si aplicáramos este método para calcular los momentos multipolares de masa a la solución de Schwarzschild [34], solución que describe el campo de una masa puntual, encontraríamos que en coordenadas de Weyl los momentos multipolares corresponderían a los de una varilla de longitud igual a dos veces la masa, en coordenadas isotrópicas los momentos multipolares tampoco describen la simetría esférica de la fuente, sólo en coordenadas esferiodales, coordenadas adaptadas la geometría del problema, los momentos multipolares describen correctamente la fuente. Por esta razón fué necesario desarrollar un procedimiento invariante de las coordenadas para calcular los momentos multipolares, al respecto fueron muchos los esfuerzos, intentos y redefiniciones. El primer tratamiento completo de los momentos gravitacionales de un campo estacionario se debe a Geroch [15] y Hansen y la inclusión en el formalismo de los momentos electromagnéticos fue lograda por Simon . El procedimiento standard utilizado actualmente es el descrito en el trabajo de Fodor, Hoenselaers y Perjés [19], el cual se describe brevemente a continuación en el caso de vacío.

Los momentos multipolares de Geroch-Hansen de masa y momento angular se calculan de la siguiente manera: se define el potencial  $\xi(\rho, z)$  en la forma

$$\xi(\rho, z) = \frac{1 - \mathcal{E}(\rho, z)}{1 + \mathcal{E}(\rho, z)},$$

dado que la distribución de masa, en estas coordenadas, puede considerarse como si estuviera sobre el eje  $\rho = 0$ , entonces es posible definir  $\xi$  como función de  $z$  solamente de la siguiente manera

$$e(z) := \mathcal{E}(\rho = 0, z). \quad (3.10)$$

A continuación se realiza la transformación conforme

$$z \mapsto \frac{1}{\bar{z}},$$

de manera que  $\xi$  se puede escribir en función de la nueva coordenada de la siguiente manera

$$\tilde{\xi}(\bar{z}) = \frac{1}{(\bar{z})} \xi = \frac{1 - e(\bar{z})}{1 + e(\bar{z})}.$$

Expandiendo el potencial  $\tilde{\xi}(\bar{z})$  alrededor de  $\bar{z} = 0$ , entonces éste se puede expresar como

$$\tilde{\xi}(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [C_{MJ}]_k \bar{z}^k,$$

con  $C_{MJ}$  definido como

$$[C_{MJ}]_k = \left. \frac{d^k \tilde{\xi}(\bar{z})}{d\bar{z}^k} \right|_{\bar{z}=0}.$$

Los momentos multipolares de masa se definen como

$$M_k = \text{Re} [C_{MJ}]_k,$$

donde  $M_0$  representa el monopolo,  $M_1$  el dipolo,  $M_2$  el cuadrupolo,  $M_3$  el octupolo de masa, etc.

Los momentos multipolares de rotación, los cuales no poseen análogo newtoniano,

se definen como

$$J_k = \text{Im}[C_{MJ}]_k,$$

donde  $J_0$  se asocia como el parámetro NUT de una solución ó con la planitud asintótica del espacio tiempo asociado a la fuente en estudio, si la solución no tiene parámetro NUT entonces  $J_0 = 0$ . El momento angular de la fuente está dado por el parámetro  $J_1$ , si la fuente tiene momento angular total igual a cero, entonces  $J_1 = 0$ . Los momentos multipolares de orden superior están relacionados con rotaciones diferenciales de regiones de materia dentro de la fuente [18]. Para fuentes con simetría ecuatorial los momentos multipolares pares de masa y los impares de rotación deben ser cero [23].

### 3.3 ÓRBITA MARGINALMENTE ESTABLE

La dinámica del movimiento de las partículas en relatividad general se estudia a través de la métrica. Las partículas pueden presentar diversos tipos de trayectorias, en general acotadas y no acotadas. Esto depende de la energía y del momento angular de la partícula antes de la interacción. En este trabajo se analizan las condiciones que deben satisfacerse para que una partícula en el plano ecuatorial describa una trayectoria circular. Como se verá en esta sección en la región del plano ecuatorial exterior donde se satisfacen estas condiciones las partículas siguen geodésicas que son inestables a perturbaciones radiales.

Esta región de inestabilidad rodeada por la última órbita estable existe alrededor de las estrellas de neutrones en rotación lenta. Pero si la estrella gira muy rápido, la estrella se deforma tanto a causa de la fuerza centrífuga que incluye la última órbita estable en su cuerpo, haciéndola desaparecer. La existencia de una última órbita estable se atribuye, generalmente, al intenso campo gravitatorio de este tipo de estrellas. Este hecho se evidencia en las tablas del apéndice A, donde para algunos valores de  $M_0$  aparece el símbolo “-” en lugar de un valor numérico, lo cual quiere decir que la órbita marginalmente estable está dentro de la estrella.

El interés por calcular la última órbita estable se basa en el hecho de que ésta determina el borde interno de un posible disco de acreción alrededor de la estrella.

Las observaciones de oscilaciones cuasi-periódicas en estrellas binarias de rayos X pueden interpretarse como una señal de que existe un borde interior en el disco de acreción que rodea el objeto compacto (una estrella de neutrones o una estrella extraña). El radio de la trayectoria de las partículas que orbitan la estrella será diferente si el sistema está en corrotación, la fuente y la partícula que la orbita rotando en el mismo sentido, o en contrarrotación, la fuente y la partícula que la orbita rotando en sentido contrario. Un método práctico para el cálculo de este radio es el descrito en el trabajo de Bardeen [6].

Sobre el plano ecuatorial en  $z = 0$ , el elemento de línea (3.3) se reduce a

$$ds^2 = -f (dt - \omega d\phi)^2 + f^{-1} [e^{2\gamma} d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2]. \quad (3.11)$$

donde

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\lambda}, \quad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\lambda}, \quad \dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\lambda}.$$

Se define  $\lambda$  como un parámetro a fin o como el parámetro de evolución del sistema, entonces

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = -f (\dot{t} - \omega \dot{\phi})^2 + f^{-1} [e^{2\gamma} \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2], \quad (3.12)$$

y

$$2\mathcal{L} = \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2, \quad (3.13)$$

como el lagrangiano del sistema. Considérese ahora una partícula de masa unitaria, es decir  $m_t = 1$ , con energía por unidad de masa  $E$  y momento angular por unidad de masa alrededor del eje de simetría  $L$  y moviéndose en el plano ecuatorial de la fuente. Para estas consideraciones, y utilizando la ecuación de Euler-Lagrange las ecuaciones de movimiento para las coordenadas ignorables  $x_0 = t$  y  $x_3 = \phi$  pueden escribirse como

$$-f \left( \dot{t} - \omega \dot{\phi} \right)^2 = -E, \quad (3.14)$$

$$\omega f \left( \dot{t} - \omega \dot{\phi} \right) + f^{-1} \rho^2 \dot{\phi} = L, \quad (3.15)$$

donde  $E$  y  $L$  son constantes de movimiento que caracterizan la energía y momento angular total respectivamente.

Resolviendo (3.14) y (3.15) para  $\dot{t}$  y  $\dot{\phi}$  se obtiene

$$\dot{t} = \frac{E f^{-2} \rho^2 - \omega^2 E - \omega L}{f^{-1} \rho^2} \quad (3.16)$$

$$\dot{\phi} = \frac{L - \omega E}{f^{-1} \rho^2} \quad (3.17)$$

De (3.16) y (3.17) y considerando que  $\left( \frac{ds}{d\lambda} \right)^2 = -1$  se obtiene en (3.11)

$$\frac{E^2}{f} - \frac{f}{\rho^2} (L - E\omega)^2 - 1 = \frac{e^{2\gamma} \dot{\rho}^2}{f}, \quad (3.18)$$

Se define  $V(\rho)$  como un potencial efectivo de la siguiente manera

$$V(\rho) = \frac{E^2}{f} - \frac{f}{\rho^2} (L - E\omega)^2 - 1, \quad (3.19)$$

el cual permite estudiar las geodésicas de las partículas que orbitan la fuente. En el caso de órbitas circulares se debe cumplir

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\lambda} = 0. \quad (3.20)$$

De (3.20) en (3.18) y considerando la definición de  $V(\rho)$  dada en (3.19) se tiene

$$V(\rho) = 0. \quad (3.21)$$

De (3.16) y (3.17) en (3.12) y en (3.13)

$$2\mathcal{L} = -\frac{E^2}{f} + \frac{e^{2\gamma}\dot{\rho}^2}{f} + \frac{f}{\rho^2}(L - E\omega)^2. \quad (3.22)$$

Introduciendo este Lagrangiano en la ecaución de movimiento para  $x_1 = \rho$  se obtiene

$$\frac{d}{d\rho} \left\{ \frac{E^2}{f} - \frac{f}{\rho^2}(L - E\omega)^2 - 1 \right\} = 0,$$

es decir

$$\frac{dV(\rho)}{d\rho} = 0, \quad (3.23)$$

Escribiendo (3.21) y (3.23) de manera explícita se obtiene

$$\frac{E^2}{f} - \frac{f}{\rho^2}(L - E\omega)^2 - 1 = 0, \quad (3.24)$$

$$\frac{dV(\rho)}{d\rho} = \left[ \frac{2f}{\rho^3} - \frac{f_{,\rho}}{\rho^2} + \frac{2Ef}{\rho^2}\omega_{,\rho} \right] (L - E\omega)^2 - \frac{E^2 f_{,\rho}}{f^2} = 0 \quad (3.25)$$

De estas dos últimas expresiones es posible calcular  $E(\rho)$  y  $L(\rho)$ , así

$$E(\rho) = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{1 - \frac{f^2\chi^2}{\rho^2}}} \quad (3.26)$$

$$L(\rho) = E(\omega + \chi) \quad (3.27)$$

donde

$$\chi = \frac{\rho \left[ -\omega_{,\rho} f^2 - \sqrt{\omega_{,\rho}^2 f^4 + f_{,\rho} \rho (2f - f_{,\rho} \rho)} \right]}{f (2f - f_{,\rho} \rho)}$$

Para garantizar la estabilidad de cualquier órbita se debe dar que

$$\frac{d^2 V(\rho)}{d\rho^2} < 0.$$

La órbita será marginalmente estable cuando

$$\frac{d^2 V(\rho)}{d\rho^2} = 0,$$

es decir

$$\begin{aligned} & \{ \omega_{,\rho} \omega_{,\rho\rho} f^5 (2f - f_{,\rho} \rho) + \omega_{,\rho}^2 f^4 [2f^2 + (-f_{,\rho}^2 + f_{,\rho\rho}) \rho^2] + \\ & \omega_{,\rho} f^2 \sqrt{\omega_{,\rho}^2 f^4 + f_{,\rho} \rho (2f - f_{,\rho} \rho)} [2f^2 - f_{,\rho}^2 \rho^2 - f_{,\rho} \rho (4f_{,\rho} + f_{,\rho\rho})] + \\ & \rho (2f - f_{,\rho} \rho) [3f_{,\rho} f^2 - 8f_{,\rho} f_{,\rho} \rho + f_{,\rho}^3 \rho^2 + \\ & f^2 (f_{,\rho\rho} \rho - f_{,\rho\rho} \sqrt{\omega_{,\rho}^2 f^4 + f_{,\rho} \rho (2f - f_{,\rho} \rho)})] \} / f^2 \rho^2 \{ \omega_{,\rho}^2 f^4 + \\ & 3f_{,\rho} f_{,\rho} \rho - f_{,\rho}^2 \rho^2 - f^2 [2 + \omega_{,\rho}] \sqrt{\omega_{,\rho}^2 f^4 + f_{,\rho} \rho (2f - f_{,\rho} \rho)} \} = 0, \quad (3.28) \end{aligned}$$

donde ya se han sustituido las expresiones para la energía y el momento angular (3.26) y (3.27). De esta última condición sobre el potencial efectivo  $V(\rho)$  se calcula el radio de la órbita marginalmente estable.

## 4 SOLUCIÓN N SOLITÓNICA

---

### 4.1 INTRODUCCIÓN

La obtención de la solución N solitónica de electrovacío fue objeto de estudio durante las décadas de los años 80 y 90, produciendo resultados como los mostrados en los trabajos de Aleksejev [2], Neugebauer [33], Manko *et al* [27, 28]. Las soluciones dadas en [2, 33] presentan el inconveniente que solo admiten interpretación como descripción del campo exterior de objetos superextremos [4, 35]. La solución mostrada en [27, 28] describe los campos gravitacional y electromagnético de fuentes estacionarias axialmente simétricas de cualquier tipo, ésta solución se obtuvo usando el método de Sibgatullin. Esta solución no da información sobre la manera en la que se deben escoger los potenciales de Ernst sobre el eje de simetría para casos particulares y de interés astrofísico, además no está calculada explícitamente en el caso con simetría ecuatorial. En este trabajo se calcula la solución N solitónica con simetría ecuatorial utilizando el método de Sibgatullin.

### 4.2 CÁLCULO DEL POTENCIAL $\mathcal{E}(\rho, z)$

La relatividad general plantea dos grandes problemas, el primero es la obtención de soluciones exactas de los sistemas de ecuaciones de Einstein ó Einstein-Maxwell y el segundo es la interpretación de estas soluciones. El método de Sibgatullin ofrece, en el caso estacionario axialmente simétrico, una solución a ambos problemas como se expondrá en esta sección.

El método de Sibgatullin es un método integral construido para encontrar soluciones del sistema de ecuaciones para los potenciales de Ernst a partir de la suposición o el conocimiento de éstos sobre el eje de simetría. Esta técnica permite encontrar soluciones exteriores conociendo de antemano el objeto que se va a de-

scribir. Esto es, a través del conocimiento de los momentos multipolares de la fuente.

La escogencia de éste se hace de tal forma que la expansión multipolar [19] de  $e(z)$  coincida con las propiedades del objeto a describir. En astrofísica y astronomía las fuentes más estudiadas son fuentes con simetría ecuatorial. En este trabajo se encontró que la forma general que debe tener el potencial  $e(z)$  en este caso de interés físico es

$$e(z) = \frac{z^N + \sum_{j=1}^N (-1)^j C_j z^{N-j}}{z^N + \sum_{j=1}^N \bar{C}_j z^{N-j}}, \quad (4.1)$$

con  $C_j = a_j + ib_j$ , donde  $a_j$  y  $b_j$  son constantes reales,  $\bar{C}_k$  denota conjugación compleja. En el caso de fuentes cargadas se hace necesario introducir un nuevo potencial  $\Phi(z, \rho)$  el cual debe escogerse sobre el eje de simetría de la siguiente manera

$$f(z) = \frac{\sum_{j=1}^N L_j z^{N-j}}{z^N + \sum_{j=1}^N P_j z^{N-j}}, \quad (4.2)$$

donde

$$L_{2k+1} = Q_k, \quad (4.3)$$

$$L_{2k} = iB_k, \quad (4.4)$$

con el objetivo de garantizar que la fuente que se está describiendo tiene simetría ecuatorial. Los parámetros  $Q_k$  y  $B_k$  están relacionados con las propiedades eléctricas y magnéticas de la fuente respectivamente. Los parámetros  $a_j$  y  $b_j$  no admiten

una interpretación tan directa, pero puede decirse que están relacionados con la masa y la rotación de la fuente respectivamente. La definición de potenciales de Ernst sobre el eje de simetría  $e(z)$  y  $f(z)$  a través de las expresiones (4.1) y (4.2) son resultados de este trabajo. Estos potenciales satisfacen las relaciones

$$e(z) = \frac{1}{\tilde{e}(-z)}, \quad (4.5)$$

$$f(z) = -\tilde{f}(-z)e(z), \quad (4.6)$$

las cuales pueden ser interpretadas como condiciones sobre los potenciales para describir fuentes con simetría ecuatorial, la relación (4.6) es también un resultado de este trabajo. La comprobación de esta condición para el caso de soluciones solitónicas es inmediata, para casos más generales hace falta una demostración formal, la cual aun es objeto de estudio. Esta demostración se está desarrollando de manera similar al procedimiento usado por Kordas en [23]. Este procedimiento plantea la verificación de las condiciones (4.6, 4.5) a partir de la condición de que las funciones métricas posean simetría ecuatorial, es decir que sean funciones pares de  $z$ . Las propiedades electromagnéticas de las estrellas no serán consideradas, pues los modelos con los que se comparará describen el campo de estrellas sin carga eléctrica ni corrientes magnéticas, por esta razón la solución se obtendrá en el caso de vacío.

Con el objetivo de facilitar los cálculos  $e(z)$  puede escribirse de la siguiente manera

$$e(z) = 1 + \sum_{j=1}^N \frac{e_j}{z - \beta_j}, \quad (4.7)$$

donde

$$e_j = \frac{\sum_{l=1}^N \{(-1)^l C_l - \bar{C}_l\} \beta_j^{N-l}}{\prod_{l=1}^N (\beta_j - \beta_l)} \quad j \neq l, \quad (4.8)$$

Una importante relación de los parámetros viene dada por la ecuación

$$e(z) + \tilde{e}(z) + 2f(z)\tilde{f}(z) = 0, \quad (4.9)$$

llamada ecuación de Sibgatullin, cuyas raíces pueden ser escogidas adecuadamente para construir soluciones con objetos sub-extremos (pares de raíces reales distintas), extremos (raíces reales de multiplicidad dos) o super-extremos (pares de raíces complejas conjugadas). Esta relación también es importante, pues su descubrimiento dió por primera vez una poderosa “receta” general para la introducción de parámetros físicos en las soluciones de electrovacío, removiendo así todas las dificultades de la aplicación de técnicas de generación de soluciones a este caso. En el vacío, dado que  $f(z) = 0$ , entonces

$$e(z) + \tilde{e}(z) = 0, \quad (4.10)$$

o, de forma explícita,

$$2 + \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{e_j}{z - \beta_j} + \frac{\bar{e}_j}{z - \bar{\beta}_j} \right\} = \frac{2 \prod_{k=1}^{2N} \{z - \alpha_k\}}{\prod_{l=1}^N (z - \beta_l)(z - \bar{\beta}_l)} = 0, \quad (4.11)$$

donde las  $\alpha_k$  son las  $2N$  raíces del numerado de  $e(z) + \tilde{e}(z)$ , llamadas las raíces de la ecuación de Sibgatullin

El método se basa en la extensión analítica de Riemann-Hilbert para la construir los potenciales de Ernst  $\mathcal{E}(\rho, z)$  y  $\Phi(\rho, z)$  en todo el plano complejo. Éstos se contruyen a través de las siguientes expresiones:

$$\mathcal{E}(\rho, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma)e(\xi)}{\sqrt{1 - \sigma^2}} d\sigma, \quad (4.12)$$

$$\Phi(\rho, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma)f(\xi)}{\sqrt{1 - \sigma^2}} d\sigma, \quad (4.13)$$

donde  $\xi = z + i\rho\sigma$  y  $\eta = z + i\rho\tau$ , siendo  $z$  y  $\rho$  son las coordenadas de Weyl Pappapetrou y  $\sigma, \tau \in [-1, 1]$ . La función  $\mu_1(\sigma)$  introducida debe satisfacer la condición integral

$$\oint_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma) [e(\xi) + \tilde{e}(\eta) + 2f(\xi)\tilde{f}(\eta)]}{(\xi - \eta)\sqrt{1 - \sigma^2}} d\sigma = 0 \quad (4.14)$$

junto con la condición de normalización

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma)}{\sqrt{1 - \sigma^2}} d\sigma = 1, \quad (4.15)$$

donde  $\oint$  denota el valor principal de Cauchy de la respectiva integral.

Por convención se emplea  $\tilde{e}(\eta) = \overline{e(\bar{\eta})}$  y  $\tilde{f}(\eta) = \overline{f(\bar{\eta})}$ , donde la barra significa complejo conjugado. La función  $\mu_1(\sigma)$  se escoge según la forma de los potenciales sobre el eje de simetría. Cuando los potenciales  $e(z)$  y  $f(z)$  se escogen como funciones racionales se tiene que

$$\mu_1(\sigma) = A_0 + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \frac{A_{jk}}{[\xi - \alpha_j]^k}, \quad (4.16)$$

donde  $M$  es la multiplicidad de cada una de las  $N$  raíces de las ecuación de Sibgatullin y las  $A_{jk}$  son funciones de  $\rho$  y  $z$ , las cuales se determinan a través de las condiciones (4.14, 4.15). Ésta es escogida así para garantizar que los potenciales  $\mathcal{E}(\rho, z)$  y  $\Phi(\rho, z)$  sean bien comportadas y para simplificar cálculos. En el caso de la solución N solitónica, raíces simples,  $\mu_1(\sigma)$  puede ser escogida de la siguiente manera

$$\mu_1(\sigma) = A_0 + \sum_{j=1}^{2N} \frac{A_j}{\xi - \alpha_j}, \quad (4.17)$$

Introduciendo (4.17) en las expresiones integrales (4.14), (4.15) y haciendo cero los

coeficientes de las potencias independientes de  $\eta$  se obtiene el siguiente sistemas lineal de ecuaciones algebraicas para las  $2N + 1$  funciones  $A_l$

$$A_0 + \sum_{k=1}^{2N} \frac{A_k}{\beta_j - \alpha_k} = 0, \quad (4.18)$$

$$\sum_{k=1}^{2N} \left\{ \frac{\bar{e}_j A_k}{(\alpha_k - \bar{\beta}_j) r_k} \right\} = 0, \quad (4.19)$$

$$A_0 + \sum_{k=1}^{2N} \frac{A_k}{r_k} = 1 \quad (4.20)$$

donde

$$r_k = \sqrt{\rho^2 + (z - \alpha_k^2)}. \quad (4.21)$$

Introduciendo  $\mu_1(\sigma)$  en (4.12) y con ayuda de (4.18,4.19, 4.20) se obtiene

$$\mathcal{E} = 2A_0 - 1 \quad (4.22)$$

Resolviendo el sistema formado por (4.18), (4.19) y (4.20) y sustituyendo  $A_0$  y  $A_k$  en la expresión para  $\mathcal{E}(\rho, z)$  dada en (4.22) se obtiene

$$\mathcal{E} = \frac{\mathbb{E}_+}{\mathbb{E}_-}, \quad (4.23)$$

donde

$$\mathbb{E}_{\pm} = \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \\ \pm 1 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \pm 1 & & & & & \\ 0 & & \mathbf{C} & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array} \right| \quad (4.24)$$

con

$$\mathbf{C} = \left| \begin{array}{cccc} \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_1} & \cdots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_N} & \frac{r_1}{\alpha_2 - \beta_N} & \cdots & \frac{r_1}{\alpha_{2N} - \beta_N} \\ \frac{\bar{e}_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{\bar{e}_2}{\alpha_2 - \beta_1} & \cdots & \frac{\bar{e}_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\bar{e}_1}{\alpha_1 - \beta_N} & \frac{\bar{e}_2}{\alpha_1 - \beta_N} & \cdots & \frac{\bar{e}_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_N} \end{array} \right|. \quad (4.25)$$

### 4.3 CÁLCULO DE LAS FUNCIONES MÉTRICAS

Para obtener la solución N solitónica se deben encontrar las funciones métricas  $f$ ,  $\omega$  y  $\gamma$  de la métrica Lewis-Wyel-Papapetrou descrita en (3.3). La función métrica  $f$  se calcula a partir del potencial  $\mathcal{E}(\rho, z)$  de la siguiente manera

$$f(\rho, z) = \text{Re}\mathcal{E}, \quad (4.26)$$

de manera explícita

$$f = \frac{\mathbb{E}_+ \bar{\mathbb{E}}_- + \mathbb{E}_- \bar{\mathbb{E}}_+}{2\mathbb{E}_- \bar{\mathbb{E}}_-}, \quad (4.27)$$

La función métrica  $\gamma$  está descrita por la expresión

$$e^{2\gamma} = \frac{\mathbb{E}_+ \bar{\mathbb{E}}_- + \mathbb{E}_- \bar{\mathbb{E}}_+}{2\mathbb{K}_0 \bar{\mathbb{K}}_0 \prod_{k=1}^{2N} r_k}, \quad (4.28)$$

donde

$$\mathbb{K}_0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{1}{\alpha_2 - \beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_{2N} - \beta_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_1 - \beta_N} & \frac{1}{\alpha_2 - \beta_N} & \cdots & \frac{1}{\alpha_{2N} - \beta_N} \\ \frac{\bar{e}_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{\bar{e}_2}{\alpha_2 - \beta_1} & \cdots & \frac{\bar{e}_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\bar{e}_1}{\alpha_1 - \beta_N} & \frac{\bar{e}_2}{\alpha_1 - \beta_N} & \cdots & \frac{\bar{e}_{2N}}{\alpha_{2N} - \beta_N} \end{vmatrix} \quad (4.29)$$

El método de Sibgaullin proporciona también una expresión para el cálculo de la función métrica  $\omega$ ,

$$\omega(\rho, z) f(\rho, z) = \frac{1}{2} [H_{12} + \bar{H}_{21}] + \Phi \bar{\Phi}_2 - iz, \quad (4.30)$$

donde  $H_{12}$ ,  $H_{21}$  y  $\Phi_2$  están definidos de la siguiente manera:

$$H_{12} = \frac{2i}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\xi \mu_1(\sigma)}{\sqrt{1 - \sigma^2}} d\sigma, \quad (4.31)$$

$$H_{21} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_2(\sigma) e(\xi)}{\sqrt{1 - \sigma^2}} d\sigma, \quad (4.32)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_2(\sigma) f(\xi)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma. \quad (4.33)$$

En las dos últimas expresiones se ha introducido una función auxiliar  $\mu_2(\sigma)$  que debe satisfacer las siguientes relaciones integrales:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_2(\sigma) \left[ e(\xi) + \tilde{e}(\eta) + 2f(\xi)\tilde{f}(\eta) \right]}{(\xi - \eta)\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma = -2i\pi, \quad (4.34)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_2(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma = 0. \quad (4.35)$$

Esta función auxiliar puede tomarse como se muestra a continuación, esta elección se efectúa por razones similares a las descritas para la función  $\mu_1(\sigma)$

$$\mu_2(\sigma) = -i\xi + B_0 + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \frac{B_{jk}}{[\xi - \alpha_j]^k}, \quad (4.36)$$

Para la solución N solitónica  $\mu_2(\sigma)$  toma la forma

$$\mu_2(\sigma) = -i\xi + B_0 + \sum_{j=1}^{2N} \frac{B_j}{\xi - \alpha_j}, \quad (4.37)$$

Las condiciones para los coeficientes  $B_j$  se encuentran análogamente como se encontraron las condiciones para las funciones  $A_j$  y están dadas por las expresiones

$$B_0 + \sum_{k=1}^{2N} \frac{B_k}{\beta_j - \alpha_k} = i\beta_j \quad (4.38)$$

$$\sum_{k=1}^{2N} \left\{ \frac{\bar{e}_j B_k}{(\alpha_k - \bar{\beta}_j) r_k} \right\} = i\bar{e}_j \quad (4.39)$$

$$B_0 + \sum_{k=1}^{2N} \frac{B_k}{r_k} = iz. \quad (4.40)$$

Los potenciales auxiliares  $H_{12}$ ,  $H_{21}$  y  $\Phi_2$  están dados por las siguientes expresiones

$$H_{12} = 2i \left\{ z + \sum_{k=1}^{2N} \frac{\Gamma_k + \alpha_k - z}{\Gamma_k} A_k \right\} \quad (4.41)$$

$$H_{12} = 2B_0 - i \left\{ 2z + \sum_{j=1}^N (e_j + \bar{e}_j) \right\} \quad (4.42)$$

$$\Phi_2 = 0 \quad (4.43)$$

De estos resultados puede escribirse la función métrica  $\omega$  como

$$\omega = \frac{2\text{Im} [\bar{\mathbb{H}}\mathbb{E}_- - \mathbb{G}\bar{\mathbb{E}}_-]}{\mathbb{E}_+\bar{\mathbb{E}}_- + \mathbb{E}_-\bar{\mathbb{E}}_+}, \quad (4.44)$$

con  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{G}$  definidos de la siguiente manera

$$\mathbb{G} = \left| \begin{array}{cccc} 0 & (r_1 + -\alpha_1 - z) & (r_2 + \alpha_2 - z) & \cdots & (r_{2N} + \alpha_{2N} - z) \\ -1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ -1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right| \quad \mathbf{C} \quad (4.45)$$

$$\mathbb{H} = \left| \begin{array}{cccc} z & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\beta_1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ -\beta_N & & & & \\ \bar{e}_1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ \bar{e}_N & & & & \end{array} \right| \quad \mathbf{C} \quad (4.46)$$

#### 4.4 LA SOLUCIÓN MMRb

La solución obtenida por Kerr [20] posee dos parámetros arbitrarios que son la masa y el momento angular. Esta es una solución que describe el campo de una fuente masiva, rotante y con deformación no arbitraria, pues está fijada por los valores de masa y de momento angular, es decir no posee cuadrupolo de masa arbitrario. El problema de encontrar soluciones con parámetro cuadrupolar de masa arbitrario es importante pues éstas representan soluciones que describen objetos astrofísicos más reales y aunque no se ha estudiado suficiente ya existen algunas soluciones al respecto tanto analíticas como numéricas. Las soluciones de Aguirregabiria *et al.* [1] y la MMRb [29], son ejemplos de soluciones analíticas. Poder estudiar la influencia de las rotaciones diferenciales de la fuente es interesante,

pero las soluciones con octupolo de rotación arbitrario no son abundantes. La solución MMRb posee estas características como se verá a continuación.

Una solución que describa una fuente con sus primeros cuatro momentos multipolares de masa y rotación arbitrarios bajo consideraciones de simetría ecuatorial y en el caso de vacío debe calcularse a partir de un potencial dos solitónico. La utilización de potenciales de orden superior evidentemente es válida, pero la condición de que sólo los cuatro primeros momentos multipolares sean arbitrarios implica que estos potenciales de orden superior se reducen al potencial dos solitónico.

El potencial en dos solitones con simetría ecuatorial en el caso general, según lo expuesto anteriormente puede ser escrito como

$$e(z) = \frac{z^2 - c_1 z + c_2}{z^2 + \bar{c}_1 z + \bar{c}_2}, \quad (4.47)$$

con

$$c_j = a_j + ib_j \quad j = 1, 2.$$

Para obtener la solución en términos de parámetros físicos de la fuente es necesario definir los parámetros  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  y  $b_2$  en términos de los momentos multipolares, es decir, escribir el potencial (4.47) en términos los parámetros  $m$ ,  $j$ ,  $q$  y  $s$  que representan la masa, el momento angular, el cuadrupolo de masa y el octupolo de rotación respectivamente, para esto es necesario aplicar la siguiente transformación

$$a_1 = m,$$

$$a_2 = -\frac{q^2 + js}{j^2 + mq}, \quad (4.48)$$

$$b_1 = \frac{-jq + ms}{j^2 + mq}$$

$$b_2 = -j + \frac{m(-jq + ms)}{j^2 + mq}.$$

Trabajar directamente con potencial  $e(z)$  escrito a través de la anterior transformación es muy complicado, por esta razón se hace necesario una redefinición de los parámetros. La solución MMRb utilizada en este trabajo se obtiene a través

de la transformación de los parámetros  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  y  $b_2$  de siguiente la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 a_1 &= m, \\
 a_2 &= ab - k, \\
 b_1 &= a - b, \\
 b_2 &= -bm.
 \end{aligned}
 \tag{4.49}$$

Las relaciones entre los parámetros  $m$ ,  $a$ ,  $k$  y  $b$  con los momentos mutipolares  $M_0$ ,  $J_1$ ,  $M_2$  y  $J_3$  están dadas por la expresión (4.51). De tal manera que cualquier “otra” solución, en este contexto, puede obtenerse a través de una transformación similar a la expuesta en (4.49), lo cual implica que cualquier solución de este tipo puede presentarse como la solución MMRb a través de una nueva redefinición de parámetros.

El potencial de Ernst  $e(z)$  de la solución MMRb está dado por

$$e(z) = \frac{(z - m - ia)(z + ib) - k}{(z + m - ia)(z + ib) - k},
 \tag{4.50}$$

El significado físico de los parámetros involucrados en (4.50) se obtiene del estudio de las expresiones para los primeros momentos multipolares relativistas de Geroch, los cuales se calculan a través del procedimiento de Hoenselaers-Perjés descrito en la sección 3.2. Para los primeros momentos multipolares de masa, rotación se obtuvieron las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned}
 M_0 &= m, & M_1 &= 0, & M_2 &= m(k - a^2), & M_3 &= 0 \\
 J_0 &= 0, & J_1 &= ma, & J_2 &= 0, & J_3 &= m(k(2a - b) - a^3).
 \end{aligned}
 \tag{4.51}$$

De las anteriores expresiones y del significado de cada momento momento multipolar se obtiene que  $m$  y  $a$  representan la masa total y el momento angular total por unidad de masa de la fuente; los parámetros  $k$  y  $b$  están asociados respectivamente con el momento cuadrupolar de masa y el octupolar de rotación. También se observa la simetría ecuatorial de la fuente, según el criterio de Neugebauer [33].

De la ecuación de Sibgatullin se tiene

$$z^4 - [m^2 - a^2 - b^2 + 2k] z^2 + (k - ab)^2 - b^2 m^2 = 0. \quad (4.52)$$

Resolviendo se obtienen cuatro raíces de la siguiente forma:

$$\alpha_1 = -\alpha_3 = \alpha_+, \quad (4.53)$$

$$\alpha_2 = -\alpha_4 = \alpha_-, \quad (4.54)$$

donde

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{p \pm \sqrt{p^2 - 4[(k - ab)^2 - b^2 m^2]}}, \quad (4.55)$$

con  $p = m^2 - a^2 - b^2 + 2k$ .

Puede probarse que las  $\alpha_{\pm}$  pueden reescribirse como

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{2}(\kappa_+ \pm \kappa_-), \quad (4.56)$$

con

$$\kappa_{\pm} = \sqrt{m^2 - a^2 - b^2 + 2k \pm 2d},$$

siendo

$$d = \sqrt{(k - ab)^2 - b^2 m^2}.$$

Con el objetivo de utilizar la solución general descrita en el capítulo anterior,  $e(z)$  puede escribirse en la forma

$$e(z) = 1 + \frac{e_1}{z - \beta_1} + \frac{e_2}{z - \beta_2}, \quad (4.57)$$

a través de la siguiente parametrización

$$e_1 = \frac{2m(\beta_1 + ib)}{\beta_2 - \beta_1}, \quad (4.58)$$

$$e_2 = \frac{2m(\beta_2 + ib)}{\beta_1 - \beta_2}, \quad (4.59)$$

$$\beta = \frac{-(m - ia) \pm \sqrt{(m - ia)^2 - 4k^2}}{2}. \quad (4.60)$$

Las funciones métricas correspondientes al potencial (4.50) se obtienen escogiendo  $N = 2$  en la solución  $N$  solitónica. Después de una serie de redefiniciones de parámetros, las funciones métricas  $f$ ,  $\omega$ , y  $\gamma$  descritas por (4.27), (4.28) y (4.44) pueden expresarse de la siguiente manera

$$f = \frac{A - B}{A + B},$$

$$e^{2\gamma} = \frac{A^2 - B^2}{(r_+ + r_-)^4 r_+^2 r_-^2},$$

$$\omega = -\frac{2mC}{A - B},$$

donde

$$A = R_-^2 R_+ - K,$$

$$B = R_- [R_+ + r - \beta^2 - K],$$

$$C = R_- [\alpha (R_+ + r - \beta^2 - K) - \beta K] + K (\alpha - \beta),$$

$$R_- = r_+ + r_-,$$

$$R_+ = r_+ r_-,$$

$$r_{\pm} = \frac{\sqrt{4\tau + \left(\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2-2K+2\delta} \pm \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2-2K-2\delta}\right)^2}}{2},$$

$$\alpha = \frac{a}{m} \quad \beta = \frac{b}{m} \quad K = \frac{k}{m^2} \quad r = \frac{\rho^2}{m^2},$$

$$\delta = \sqrt{(K + \alpha\beta)^2 - \beta^2},$$

Fué necesario introducir esta última presentación de las funciones métricas para optimizar el proceso de computo en la solución numérica de la ecuación (3.28), la cual permite encontrar el ROME.

# 5 OBTENCIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

---

"Dos métricas con la misma estructura multipolar describen  
la misma geometría a grandes distancias de la fuente"

VAN DER BERGH AND WILL, 1985

## 5.1 INTRODUCCIÓN

La cantidad de trabajos en los que se comparan soluciones numéricas con exactas no es grande, pero existen esfuerzos y resultados importantes como los de Cook, Shapiro & Teukolsky [10] un trabajo clásico en esta área, en el cual se presentan catorce diferentes modelos de estrellas de neutrones, el de Berti & Stergioulas [9], donde calculan soluciones numéricas para el caso de una estrella de neutrones rápidamente rotante considerando cinco ecuaciones de estado realistas, las cuales fueron descritas en la sección 2.2. Los resultados se compararon con los obtenidos para la solución de Kerr, de Manko *et al.* ([30]) y de Shibata & Sasaki [36], estos últimos plantearon una expansión en series de las funciones métricas en términos

de los momentos multipolares de la fuente.

## 5.2 COMPARACIÓN DE LOS MOMENTOS MULTIPOLARES

Con el objetivo de analizar la influencia de la arbitrariedad en el valor del momento octupolar de rotación en el vacío, es necesario condicionar la estructura multipolar de la solución MMRb descrita por (4.51) para que describa una fuente con octupolo de rotación no arbitrario. Para lograr esto el potencial de Ernst sobre el eje de simetría debe expresarse de la siguiente manera

$$e(z) = \frac{(z - m - ia)z - k}{(z + m - ia)z - k}, \quad (5.1)$$

es decir, debe escogerse el parámetro  $b = 0$ . A la solución MMRb con parámetro  $b$  nulo se denominará solución MMRb0. Para este caso particular, los primeros momentos multipolares toman la forma

$$\begin{aligned} M_0 = m, & \quad M_1 = 0, & \quad M_2 = m(k - a^2), & \quad M_3 = 0, \\ J_0 = 0, & \quad J_1 = ma, & \quad J_2 = 0, & \quad J_3 = ma(2k - a^2), \end{aligned} \quad (5.2)$$

El significado físico de los parámetros es el mismo. La comparación de los momentos multipolares se llevó a cabo de la siguiente manera: de las expresiones dadas en (5.2) se observa que sólo los tres primeros momentos multipolares de masa y de rotación son arbitrarios bajo consideraciones de simetría ecuatorial. En ese orden de ideas es posible construir un sistema de tres ecuaciones para  $m$ ,  $a$  y  $k$ , el cual se muestra a continuación

$$M = m, \quad J = ma, \quad M_2 = km - ma^2, \quad (5.3)$$

donde  $M$ ,  $J$  y  $M_2$  son los momentos multipolares calculados numéricamente por Berti y Stergioulas en su trabajo. De esta forma se obtuvieron los valores para  $m$ ,  $a$  y  $k$  que hicieran que los tres primeros momentos multipolares de ambas soluciones fueran iguales. El octupolo de rotación, denotado ahora como  $S_3$ , se obtiene de la expresión descrita anteriormente

$$S_3 = 2mak - ma^3 \quad (5.4)$$

El valor calculado para  $S_3$  se comparó con el calculado para la solución numérica obteniendo así un primer punto de comparación entre las dos soluciones, la numérica y la analítica, los errores porcentuales se muestran a continuación

	$M_b$	$\Delta S_3$
	$1,589M_0$	10,28 %
EOS A	$1,948M_0$	10,00 %
	$2,038M_0$	11,49 %
	$1,578M_0$	8,89 %
EOS AU	$2,636M_0$	8,39 %
	$2,799M_0$	10,03 %
	$1,561M_0$	15,23 %
EOS FPS	$2,105M_0$	10,44 %
	$2,226M_0$	12,15 %
	$1,510M_0$	9,43 %
EOS L	$3,232M_0$	8,98 %
	$3,470M_0$	12,82 %
	$1,551M_0$	10,01 %
EOS APRb	$1,672M_0$	8,19 %
	$2,800M_0$	10,19 %

Tabla 5.1: Errores porcentuales en el momento octupolar de rotación,  $S_3$ .

donde  $\Delta S$  denota la diferencia porcentual del valor del octopolo de rotación entre las soluciones numéricas y el de la solución MMRb0. Las tablas mostradas en este trabajo y en el de Berti & Stergioulas presentan tres secuencias de masa para cada ecuación de estado. La primera secuencia de masa está descrita en el límite no rotante y es la de menor masa en reposo, la segunda presenta el máximo valor de masa posible en el límite no rotante y la tercera es una secuencia supermasiva y alta rotación,  $M_b$  denota el valor de la masa para diferentes secuencias

Del análisis de la tabla 5.1 se observa que la diferencia entre el octupolo de rotación calculado numéricamente en el trabajo de Berti & Stergioulas [9] y el predicho por la expresión 5.4 es de alrededor de la décima parte del valor del primero para cualesquiera de las ecuación de estado utilizadas. Basándose en este primer criterio, los resultados permiten afirmar que la solución analítica MMRb0 describiría mejor el modelo de estrellas de neutrones rápidamente rotante dado según la ecuación de estado AU y no tan bien para el modelo con una ecuación de estado tipo FPS.

La afirmación anterior no debe entenderse como una conclusión de este trabajo, pues lo que se podría concluir hasta este punto es que la solución MMRb0 podría describir cualesquiera de los cinco modelos utilizados en [9] con una tolerancia en el margen de error similar en todos los casos. El hecho de que la desviación en el valor del octupolo de rotación en todos los casos sea similar, dentro de un rango de cuatro puntos porcentuales, puede atribuirse a que los modelos numéricos y la solución analítica tienden a describir un objeto con las mismas características, es decir, ecuatorialmente simétrico, rotante y deformado. Estas características limitan la libre escogencia de ecuaciones de estado y condiciones de contorno para llevar a cabo los cálculos numéricos, lo que conlleva a encontrar resultados similares a que a pesar de cada modelo de campo gravitacional propone para la fuente diferentes tipos de partículas constituyentes e interacciones entre éstas.

### 5.3 COMPARACIÓN DEL ROME

Como segundo criterio de comparación se calculó el radio de la órbita marginalmente estable, el cual se obtuvo encontrando solución de la ecuación (3.28) y utilizando los valores de los parámetros  $m$ ,  $a$ ,  $k$  y  $b$  ajustados a los momentos multipolares presentados en [9], las diferencias porcentuales se plasman en la tabla 5.2.

#### 5.3.1. Caso Corrotante

Del análisis de los resultados presentados en la tabla 5.2 y esquematizados en las figuras de la página 42, queda claro que la solución de MMRb0, representada por las barras rojas, presenta un menor margen de error en el cálculo del radio de las órbitas marginalmente estables en todos los casos excepto para la ecuación de estado AU, pero lo que aun mas notable es el hecho de que los errores arrojados para el valor del ROME sean iguales dentro de un margen de menos del 3% para la solución MMRb y MMRb0, lo cual expone la poca dependencia de esta solución ante variaciones del parámetro octupolar, las cuales como se observó están cercanas al 10%. De las figuras 5.1 la 5.6 puede verse que para la primera secuencia de masa el error es bastante grande comparados con las otras dos secuencia, es decir las soluciones MMRb y MMRb0 se ajustan mejor para valores de masa mayores a  $2M_{\odot}$ .

	$M_b$	$\Delta r_{+b=0}$	$\Delta r_+$	$\Delta r_{-b=0}$	$\Delta r_-$
	$1,589M_0$	9,69 %	10,12 %	9,77 %	9,86 %
EOS A	$1,948M_0$	11,08 %	7,96 %	4,25 %	4,43 %
	$2,038M_0$	11,64 %	9,29 %	3,48 %	3,58 %
	$1,578M_0$	7,42 %	7,58 %	12,02 %	12,30 %
EOS AU	$2,636M_0$	10,58 %	9,79 %	2,09 %	2,18 %
	$2,799M_0$	13,09 %	10,90 %	1,77 %	1,67 %
	$1,561M_0$	15,23 %	8,03 %	15,77 %	13,42 %
EOS FPS	$2,105M_0$	7,70 %	8,53 %	4,67 %	4,79 %
	$2,226M_0$	10,32 %	11,48 %	3,91 %	4,02 %
	$1,510M_0$	26,23 %	26,34 %	24,90 %	18,85 %
EOS L	$3,232M_0$	8,14 %	8,88 %	4,52 %	4,50 %
	$3,470M_0$	12,98 %	15,24 %	3,84 %	3,87 %
	$1,551M_0$	15,25 %	15,60 %	16,48 %	16,80 %
EOS APRb	$1,672M_0$	7,01 %	8,14 %	1,90 %	1,95 %
	$2,800M_0$	8,35 %	9,85 %	1,68 %	1,75 %

Tabla 5.2: Estudio de la influencia de la arbitrariedad del momento octupolar de rotación

En la tabla anterior  $\Delta r_+$ ,  $\Delta r_{+b=0}$ ,  $\Delta r_-$ , y  $\Delta r_{-b=0}$  denotan el valor del radio de la órbita marginalmente estable en el caso corrotante (+) y en el caso contrarrotante (-) para la solución MMRb y para la solución MMRb0 respectivamente.

### 5.3.2. Caso Contrarrotante

En promedio el margen de error disminuyó en todos los casos, como lo muestran las figuras de la página 43. Se evidencia nuevamente el hecho de que las soluciones analíticas se ajusten mejor a los valores de masas mayores al utilizado para la primera secuencia de masa; es más, el margen de error disminuyó al aumentar la masa de la estrella, esto sumado a lo expuesto anteriormente para el caso corrotante permite afirmar que las soluciones MMRb y MMRb0 presentan un mejor comportamiento para estrella de gran masa, es decir por encima de  $2M_\odot$ .

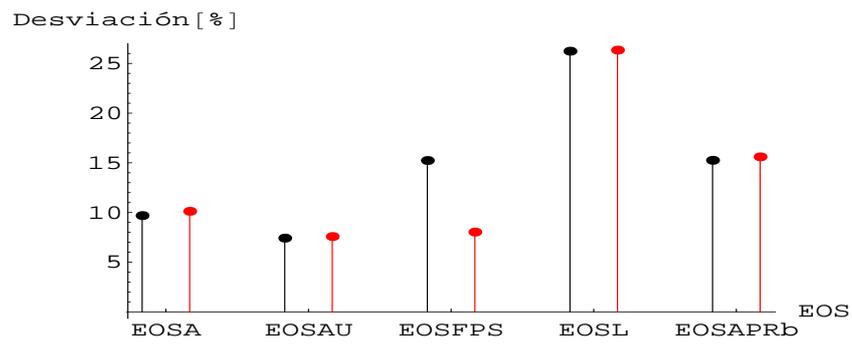


Figura 5.1: Errores en el valor del ROME corrotante para la primera secuencia de masa

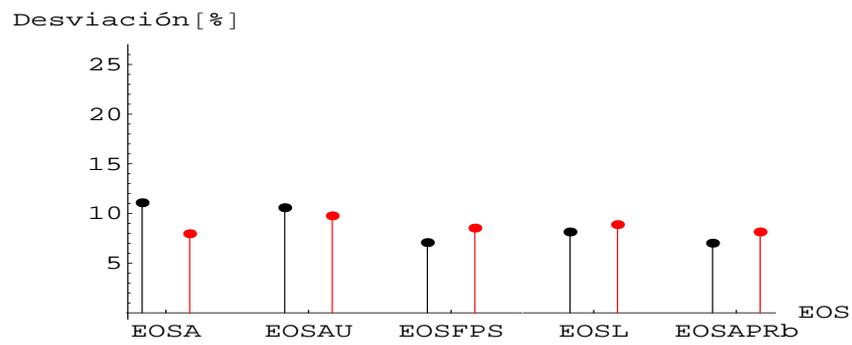


Figura 5.2: Errores en el valor del ROME corrotante para la primera secuencia de masa

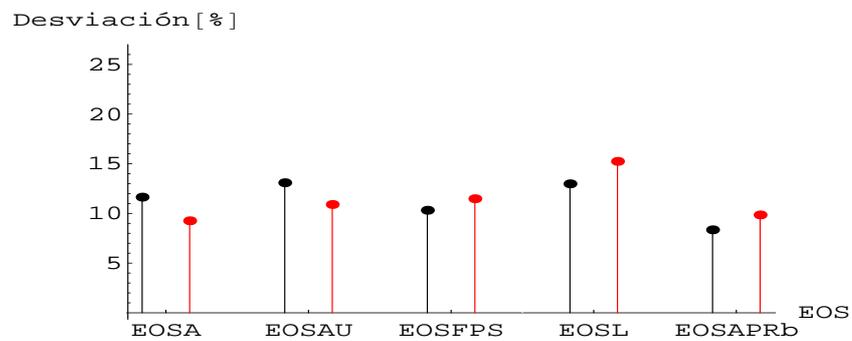


Figura 5.3: Errores en el valor del ROME corrotante para la primera secuencia de masa

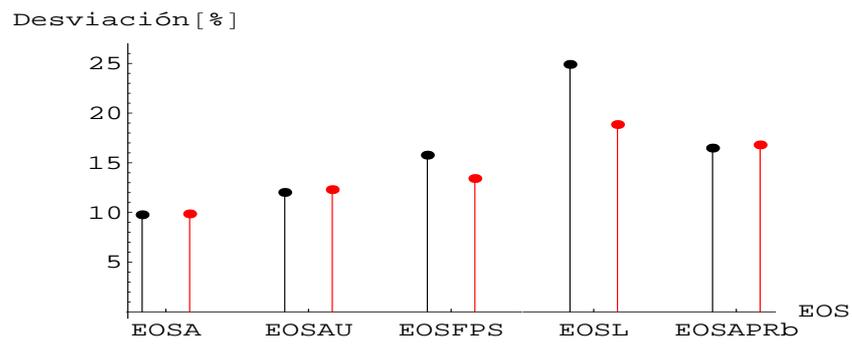


Figura 5.4: Errores en el valor del ROME contrarrotante para la primera secuencia de masa

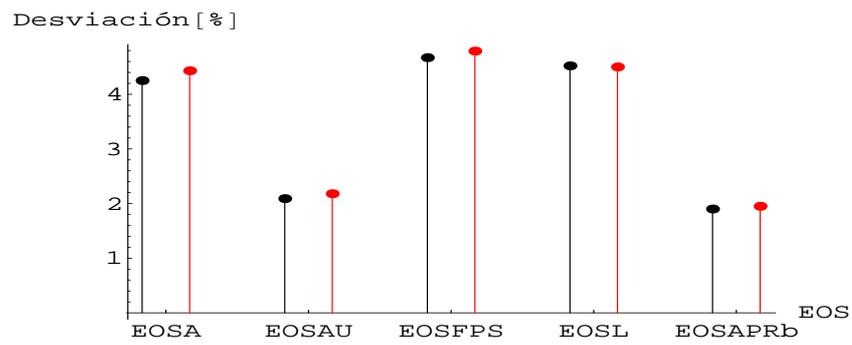


Figura 5.5: Errores en el valor del ROME contrarrotante para la segunda secuencia de masa

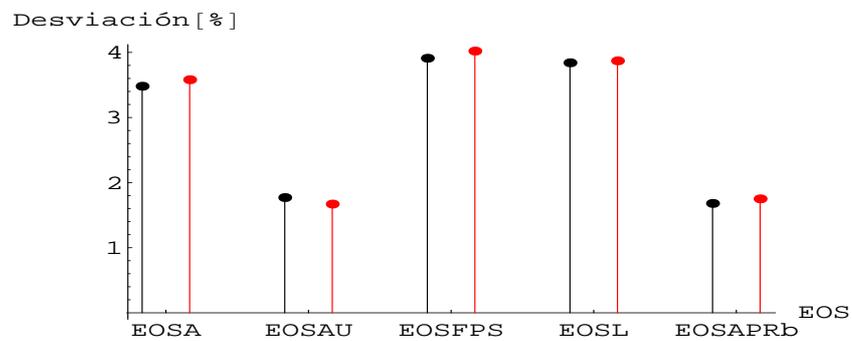


Figura 5.6: Errores en el valor del ROME contrarrotante para la tercera secuencia de masa

## 5.4 INFLUENCIA DE LA ROTACIÓN

Ya se estudió el rango de validez de la solución respecto a la masa de las estrellas, ahora es necesario estudiarlas respecto a la rotación, para esto se introduce un parametro adimensional  $j$  definido de la siguiente  $j = J_1/M^2$ . Se dice que una estrella es rápidamente rotante cuando  $j > 0,5$ . De las tablas de apéndice A queda claro en todos los casos el margen de error aumenta al aumentar la rotación de la fuente.

Para la primera secuencia de masa las soluciones se ajustan apenas aceptablemente, pues los resultados de las dos soluciones analíticas MMRb y MMRb0 presentan una tendencia contraria a la solución obtenida por Berti & Stergioulas como se muestra en la figura 5.7, presentando un mejor comportamiento en el caso contrarrotante que en el corrotante.

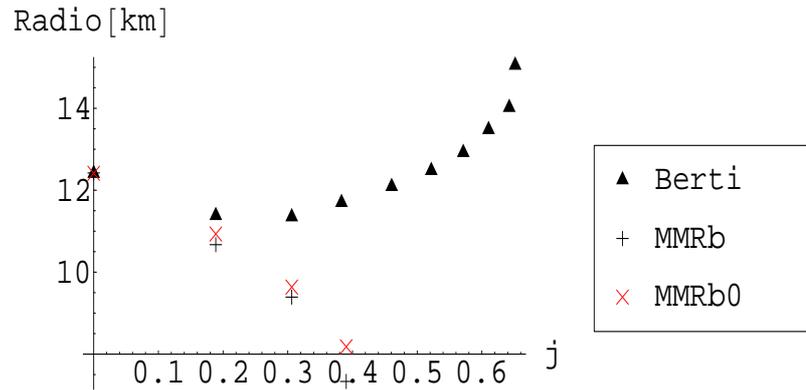


Figura 5.7: ROME para las soluciones MMRb, MMRb0 y de Berti usando la EOS A y  $M_b = 1,589M_\odot$

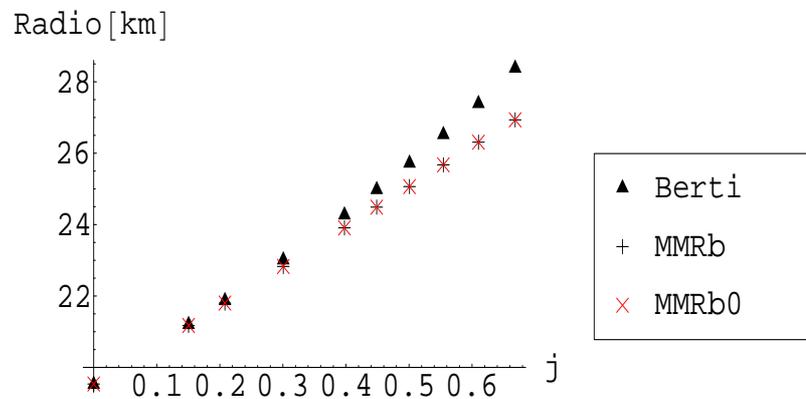


Figura 5.8: ROME contrarrotante para las soluciones de MMRb, MMRb0 y de Berti usando la EOS APRb y  $M_b = 2,672M_\odot$

En la segunda secuencia de masa las soluciones se ajustan casi perfectamente en el caso contrarrotante utilizando las ecuaciones de estado A, APRb y AU y presentan un muy buen ajuste para FPS y L, en la figura 5.8 se plasma la situación para el caso de la ecuación de estado APRb. En el caso corrotante el ajuste es muy bueno para las ecuaciones de estado A, APRb, AU y L para la EOS FPS apenas sí es bueno.

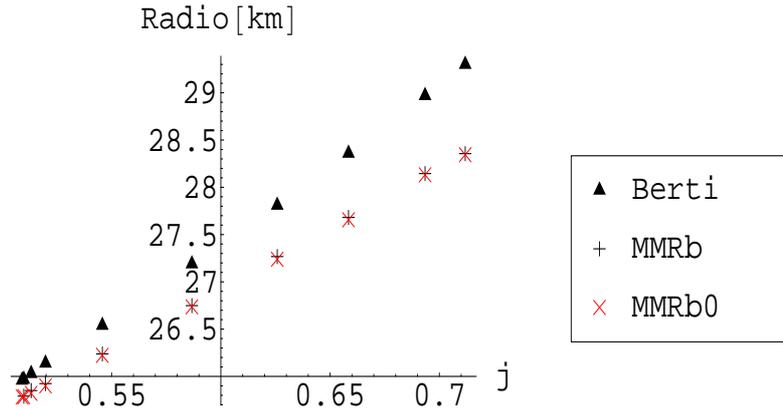


Figura 5.9: ROME en contrarrotación para las soluciones de Berti, MMRb y MMRb0 con EOS AU y  $M_b = 2,799M_\odot$

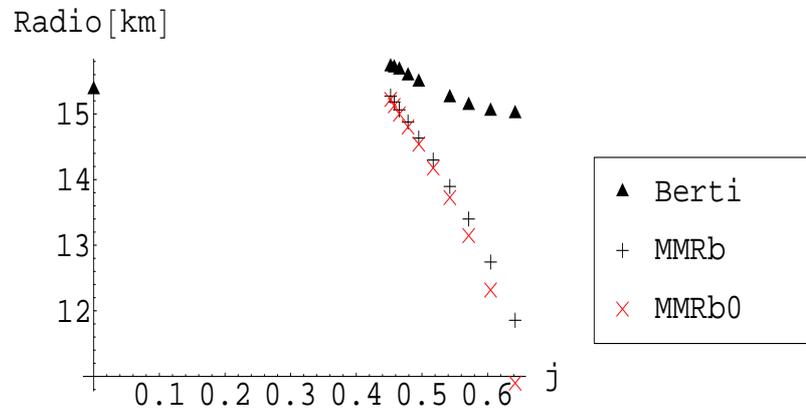


Figura 5.10: ROME corrotante para las soluciones de Berti, MMRb y MMRb0 con EOS APRb y  $M_b = 2,800M_\odot$

Para tercera secuencia de masa el ajuste, en el caso contrarrotante, es bueno sólo cuando se compara con los resultados de las ecuaciones de estado AU y APRb, en la figura 5.9 puede analizarse el caso de la ecuación de estado AU. En el caso corrotante la situación en general es mala, pues las soluciones presentan un comportamiento similar al descrito para la primera secuencia de masa, como puede verse en la figura 5.10. En resumen las soluciones MMRb y MMRb0 se ajustan con las ecuaciones de estado A, APRb y AU con un margen de error de alrededor

del 10 % en el caso corrotante y de mejor que con las otras dos. Presentando para la EOS FPS el mejor ajuste para la solución de Manko. Al comparar las gráficas del ROME contra el parámetro  $j$  entre la soluciones MMRb, MMRb0 y Kerr, las dos primeras presentan un mejor ajuste a los valores propuestos por Berti & Stergioulas en su trabajo que los resultados para la solución de Kerr.

## 6 CONCLUSIONES

---

Se dedujeron expresiones generales para los potenciales de Ernst sobre el eje de simetría  $e(z)$  y  $f(z)$ , los cuales describen fuentes masivas, rotantes, cargadas y magnetizadas con simetría ecuatorial. Además de una expresión que condiciona la existencia de este tipo de simetría para los potenciales electromagnéticos de soluciones solitónicas.

Del primer criterio de comparación, es decir el valores de los momentos multipolares, podría afirmarse la solución MMRb0 puede describir el campo gravitacional exterior de cualesquiera de los cinco modelos para estrellas de neutrones utilizados por [9] con un margen de error similar en todos los casos y cercano al 10%. La comparación de los valores del radio de la órbita marginalmente estable arrojó como resultado que tanto la solución MMRb y la MMRb0 describen mejor la geometría del espacio tiempo alrededor de una estrella de neutrones con masa entre 1,7 a 3  $M_{\odot}$ . Es decir, se obtienen mejores resultados para el ajuste cuando se estudian estrellas en la secuencia de masa de 1,7 a 3  $M_{\odot}$ , además los valores de las soluciones empiezan a no coincidir apreciablemente para valores del parámetro  $j$  mayores 0.3 o 0.4 utilizando las ecuaciones L o FPS, de lo cual puede afirmarse que las soluciones MMRb y la MMRb0 no describen adecuadamente el campo cuerpos descritos por estas ecuaciones de estado. Para las demás ecuaciones de estado este valor crítico de discrepancia oscila alrededor de 0.5 y 0.6, lo cual permite afirmar que las soluciones analíticas utilizadas describen adecuadamente el campo de una estrella de neutrones rápidamente rotante descrita, por ejemplo, según la ecuación de estado AU o APRb.

Se encontró que la arbitrariedad en el valor del parámetro que describe las rotaciones diferenciales de la fuente, es decir, el octupolo de momento angular no tiene gran influencia en el cálculo de propiedades de la fuente, al menos para la solución MMRb.

A pesar de que las soluciones MMRb y MMRb0 no presentan un mejor ajuste a

---

los datos propuestos por Berti [9] a medida que aumenta la rotación, al menos sí describen más adecuadamente el caso rápidamente rotante que la solución de Kerr, que es la más utilizada para describir cuerpos rotantes de gran masa.

Además se está trabajando en un artículo sobre los ajustes numéricos en relatividad general y en particular sobre el desarrollado en este trabajo, pues se trabajó con una solución que se ajusta muy bien a algunos modelos de estrellas de neutrones rápidamente rotantes, lo cual es un hecho importante para el modelamiento analítico de las propiedades de las estrellas de neutrones, en especial para el estudio de los discos de acreción alrededor de la estrella.

# A TABLAS DE VALORES CÁLCULADOS PARA $S_3$ Y PARA ROME

---

La nomenclatura utilizada en las tablas está descrita a continuación

Símbolo	Denota
$M_b$	el valor de la masa para diferentes secuencias
$m$	el valor de la masa de la estrella
$r_{star}$	el valor del radio de la estrella
$r_{+num}$ y $r_{-num}$	el valor del radio de la órbita marginalmente estable en el caso corrotante (+) y en el caso contrarrotante (-) para la solución numérica de Berti,
$r_+$ y $r_-$	para la solución MMRb y
$r_{+b=0}$ y $r_{-b=0}$	para la solución MMRb0
$S_{3num}$ y $S_{3anal}$	el valor numérico y el obtenido para la solución de MMRb0 para el octupolo de rotación

$m$ $M_\odot$	$j$	$S_{3num}$ $Km^4$	$S_{3anal}$ $Km^4$	$r_{+num}$ $Km$	$r_+$ $Km$	$r_{+b=0}$ $Km$	$r_{-num}$ $Km$	$r_-$ $Km$	$r_{-b=0}$ $Km$
$M_b = 1.589M_0$									
1,402	0,0000	0,000	0,000	12,4110	12,421	12,414	12,411	12,421	12,414
1,405	0,1887	-0,727	-0,659	11,3501	10,936	10,931	13,856	13,558	13,556
1,410	0,3061	-3,158	-2,847	10,9640	9,668	9,636	14,906	14,161	14,152
1,415	0,3903	-6,694	-6,006	10,8450	8,329	8,180	15,714	14,552	14,534
1,419	0,4605	-11,230	-10,309	10,8610	-	-	16,416	14,842	14,813
1,424	0,5218	-16,770	-14,916	-	-	-	17,071	15,082	15,038
1,428	0,5713	-22,500	-19,939	-	-	-	17,603	15,257	15,198
1,432	0,6103	-28,100	-24,026	-	-	-	18,053	15,387	15,312
1,435	0,6423	-33,350	-29,337	-	-	-	18,421	15,483	15,393
1,435	0,6514	-34,880	-30,676	-	-	-	18,523	15,498	15,404
$M_b = 1.948M_0$									
1,658	0,0000	0,000	0,000	13,0630	14,689	14,690	14,675	14,690	14,690
1,662	0,1637	-0,376	-0,341	12,5160	13,345	13,344	16,055	15,983	15,983
1,668	0,2593	-1,637	-1,475	11,9530	12,490	12,481	16,939	16,729	16,725
1,676	0,3505	-4,4590	-4,001	11,5230	11,558	11,529	16,841	17,426	17,417
1,686	0,4384	-9,667	-8,625	11,4340	10,456	10,360	18,777	18,081	18,066
1,694	0,5023	-15,720	-13,958	11,4210	9,368	9,083	19,503	18,532	18,517
1,701	0,5549	-22,640	-20,013	11,5130	7,842	-	20,126	18,891	18,870
1,708	0,5889	-28,760	-25,333	11,4550	-	-	20,556	19,139	19,102
1,714	0,6324	-37,530	-32,902	-	-	-	21,099	19,419	19,369
1,719	0,6592	-44,000	-38,406	-	-	-	20,472	19,601	19,543
$M_b = 2.038M_0$									
1,742	0,3926	-4,943	-4,398	12,3350	11,795	11,761	18,809	18,537	18,530
1,742	0,3951	-5,221	-4,648	12,3400	11,748	11,711	18,844	18,546	18,537
1,743	0,4005	-5,654	-5,034	12,3260	11,673	11,633	18,911	18,583	18,577
1,744	0,4092	-6,266	-5,579	12,2980	11,559	11,514	19,011	18,645	18,641
1,745	0,4211	-7,082	-6,307	12,2580	11,405	11,352	19,144	18,735	18,726
1,751	0,4601	-10,240	-9,097	12,1320	10,885	10,793	19,596	19,055	19,034
1,765	0,5443	-20,130	-17,782	11,9930	9,438	9,039	20,620	19,711	19,685
1,773	0,5929	-28,430	-25,001	12,0170	7,917	-	21,230	20,068	20,037
1,780	0,6313	-36,780	-32,195	12,1160	-	-	21,750	20,352	20,310
1,782	0,6444	-40,030	-34,955	12,1610	-	-	21,92	20,429	20,395

Cuadro A.1: Valores de  $S_3$  y del ROME para la soluciones MMRb, MMRb0 y de Berti usando una EOS tipo A

$m$ $M_\odot$	$j$	$S_{3num}$ $Km^4$	$S_{3anal}$ $Km^4$	$r_{+num}$ $Km$	$r_+$ $Km$	$r_{+b=0}$ $Km$	$r_{-num}$ $Km$	$r_-$ $Km$	$r_{-b=0}$ $Km$
$M_b = 1.578M_0$									
1,402	0,0000	0,000	0,000	12,410	12,421	12,421	12,410	12,421	12,421
1,405	0,2022	-1,126	-1,035	11,366	10,715	10,708	14,022	13,567	13,564
1,409	0,3130	-4,168	-3,807	11,117	9,288	9,244	15,068	14,05	14,043
1,415	0,4118	-9,564	-8,682	-	-	-	16,067	1,4343	14,411
1,418	0,4747	-14,660	-13,256	-	-	-	16,724	14,631	14,600
1,422	0,5287	-20,44	-18,310	-	-	-	17,312	14,804	14,752
1,426	0,5769	-26,870	-24,069	-	-	-	17,855	14,940	14,869
1,429	0,6152	-32,870	-29,342	-	-	-	18,285	15,033	14,944
1,431	0,6508	-39,200	-34,881	-	-	-	18,692	15,102	14,99
1,432	0,6613	-41,320	-36,701	-	-	-	18,819	15,124	1,006
$M_b = 2.636M_0$									
2,136	0,0000	0,000	0,000	18,912	18,925	18,925	18,912	18,925	18,925
2,145	0,1933	-1,031	-0,951	17,008	16,947	16,943	20,999	20,961	20,956
2,158	0,3090	-4,622	-4,246	15,975	15,718	15,707	22,360	22,224	22,208
2,174	0,4052	-11,440	-10,469	15,212	14,629	14,592	23,570	23,289	23,280
2,190	0,4838	-21,240	-19,345	14,696	13,636	13,547	24,630	24,177	24,170
2,205	0,5487	-33,570	-30,457	14,356	12,648	12,490	25,550	24,933	24,912
2,219	0,6022	-47,710	43,010	14,161	11,733	11,316	26,330	25,553	25,530
2,231	0,6437	-62,160	-55,868	14,086	0,812	9,6878	26,980	26,064	26,010
2,240	0,6754	-75,490	-67,539	14,083	9,834	-	27,490	26,416	26,370
2,249	0,7053	-90,560	-80,623	14,133	-	-	27,980	26,752	26,706
$M_b = 2.799M_0$									
2,297	0,5090	-19,560	-17,627	14,807	-	14,341	25,960	-	25,783
2,297	0,5098	-19,950	-18,015	14,814	-	14,35	25,970	25,792	25,785
2,298	0,5132	-20,990	-18,964	14,806	14,305	14,248	26,030	25,850	25,821
2,300	0,5197	-22,550	-20,366	14,783	14,218	14,141	26,140	25,924	25,810
2,308	0,5458	-28,610	-25,872	14,649	13,847	13,727	26,540	26,238	26,223
2,320	0,5867	-39,800	-35,455	14,460	13,234	13,029	27,190	26,749	26,736
2,333	0,6258	-52,040	-46,844	14,316	12,586	12,230	27,810	27,268	27,239
2,344	0,6584	-65,120	-58,395	14,251	11,965	11,344	28,360	27,682	27,656
2,357	0,6935	-82,460	-73,628	14,231	11,153	9,627	28,970	28,145	28,132
2,364	0,7118	-93,170	-82,911	14,258	10,631	-	29,300	28,356	28,345

Cuadro A.2: Valores de  $S_3$  y del ROME para la soluciones MMRb, MMRb0 y de Berti usando una EOS tipo AU

$m$ $M_\odot$	$j$	$S_{3num}$ $Km^4$	$S_{3anal}$ $Km^4$	$r_{+num}$ $Km$	$r_+$ $Km$	$r_{+b=0}$ $Km$	$r_{-num}$ $Km$	$r_-$ $Km$	$r_{-b=0}$ $Km$
$M_b = 1.561M_0$									
1,402	0,0000	0,000	0,000	12,410	12,421	12,421	12,410	12,421	12,421
1,404	0,2029	-1,241	-1,118	11,382	10,671	10,662	14,040	13,541	13,537
1,408	0,3001	-4,051	-3,628	-	9,391	9,3423	14,972	13,950	13,937
1,412	0,3830	-8,518	-7,590	-	7,332	-37,336	15,829	14,236	14,210
1,415	0,4529	-14,21	-12,608	-	-	-	16,583	14,426	14,383
1,419	0,5061	-20,16	-17,805	-	-	-	17,195	14,556	14,492
1,422	0,5559	-27,100	-23,835	-	-	-	17,766	14,642	14,553
1,425	0,6026	-35,060	-30,681	-	-	-	18,327	14,700	14,580
1,428	0,6340	-41,460	-36,138	-	-	-	18,719	14,733	14,584
1,430	0,6641	-48,260	-41,911	-	-	-	19,099	14,740	14,559
$M_b = 2.105M_0$									
1,802	0,0000	0,000	0,000	15,950	15,965	15,965	15,950	15,965	15,965
1,806	0,1631	-0,556	-0,503	14,619	14,501	14,499	17,449	17,357	17,359
1,813	0,2577	-2,402	-2,156	13,954	13,574	13,563	18,400	18,158	18,155
1,821	0,3484	-6,549	-5,851	13,451	12,538	12,504	19,390	18,900	18,884
1,831	0,4357	-14,180	-12,595	13,117	11,293	11,179	20,404	19,596	19,562
1,840	0,4989	-23,050	-20,370	13,007	10,042	9,6694	21,189	20,062	20,036
1,849	0,5609	-35,480	-31,144	13,041	-	-	22,006	20,509	20,469
1,855	0,6017	-46,220	-40,380	13,149	-	-	22,567	20,785	20,734
1,860	0,6325	-55,960	-48,695	13,275	-	-	22,999	20,988	20,927
1,864	0,6535	-63,670	-55,212	-	-	-	23,312	21,128	21,058
$M_b = 2.226M_0$									
1,914	0,0000	-9,594	-8,477	13,343	12,540	12,482	21,037	20,637	20,628
1,914	0,4278	-10,030	-8,868	13,338	12,495	12,435	21,030	20,632	20,622
1,915	0,4317	-10,720	-9,483	13,343	12,420	12,355	21,100	20,662	20,650
1,916	0,4380	-11,640	-10,200	13,335	12,311	12,238	21,180	20,708	20,695
1,918	0,4479	-12,980	-11,476	13,315	12,155	12,070	21,320	20,793	20,779
1,925	0,4917	-19,460	-17,165	13,219	11,416	11,249	21,900	21,158	21,135
1,936	0,5504	-31,210	-27,382	13,174	10,137	9,5645	22,700	21,651	21,613
1,946	0,6077	-47,060	-41,033	13,281	-	-	23,520	22,088	22,043
1,954	0,6466	-60,960	-52,830	13,432	-	-	24,100	22,333	22,333
1,955	0,6507	-63,670	-55,103	-	-	-	24,160	22,412	22,344

Cuadro A.3: Valores de  $S_3$  y del ROME para la soluciones MMRb, MMRb0 y de Berti usando una EOS tipo FPS

$m$ $M_\odot$	$j$	$S_{3num}$ $Km^4$	$S_{3anal}$ $Km^4$	$r_{+num}$ $Km$	$r_+$ $Km$	$r_{+b=0}$ $Km$	$r_{-num}$ $Km$	$r_-$ $Km$	$r_{-b=0}$ $Km$
$M_b = 1.510M_0$									
1,402	0,0000	0,000	0,000	-	-	-	14,830	14,830	12,421
1,404	0,2263	-3,554	-3,230	-	-	-	15,140	15,140	13,207
1,407	0,3477	-12,650	-11,446	-	-	-	16,121	16,121	13,057
1,410	0,4381	-24,960	-22,499	-	-	-	17,343	17,343	12,596
1,412	0,5052	-37,840	-33,985	-	-	-	18,269	18,269	-
1,415	0,5649	-52,650	-47,126	-	-	-	19,127	19,127	-
1,417	0,6211	-69,470	-61,942	-	-	-	19,930	19,930	-
1,420	0,6721	-88,000	-78,124	-	-	-	20,685	20,685	-
1,421	0,7150	-105,40	-93,312	-	-	-	21,303	21,303	-
1,422	0,7210	-108,40	-95,845	-	-	-	21,400	21,400	-
$M_b = 3.232M_0$									
2,713	0,0000	0,000	0,000	24,020	24,037	24,0344	24,020	24,037	24,034
2,720	0,1586	-2,558	-2,3457	22,068	21,911	21,9050	26,210	26,104	26,092
2,731	0,2682	-13,43	-12,235	20,910	20,287	20,2686	27,870	27,477	27,473
2,746	0,3658	-37,00	-33,579	20,078	18,618	18,5633	29,460	28,71	28,712
2,762	0,4507	-74,63	-67,458	19,567	16,826	16,6577	30,940	29,728	29,750
2,778	0,5216	-124,10	-111,69	19,339	14,741	14,11930	32,250	30,574	30,574
2,793	0,5812	-182,60	-163,67	19,329	-	-	33,420	31,308	31,270
2,806	0,6268	-243,80	-217,55	19,443	-	-	34,380	31,845	31,830
2,820	0,6765	-321,30	-285,24	19,688	-	-	35,380	32,369	32,341
2,850	0,6816	-353,80	-313,47	19,818	-	-	35,760	32,600	32,370
$M_b = 3.470M_0$									
2,929	0,4725	-69,250	-61,83	19,860	18,353	18,2240	32,820	32,137	32,163
2,929	0,4732	-71,550	-63,95	19,897	18,291	18,1570	32,850	32,126	32,163
2,931	0,4772	-76,100	-68,11	19,913	18,163	18,0163	32,950	32,172	32,166
2,932	0,4832	-81,190	-72,70	19,897	17,9920	17,8348	33,070	32,236	32,253
2,937	0,4988	-94,070	-84,25	19,849	17,596	17,3948	33,390	32,435	32,455
2,952	0,5495	-141,10	-126,21	19,719	16,170	15,6998	34,430	33,151	33,126
2,967	0,5965	-196,20	-174,99	22,691	14,276	12,3890	38,410	33,778	33,761
2,980	0,6352	-254,40	-226,19	19,759	-	-	36,260	34,296	34,262
2,995	0,6790	-334,20	-295,91	19,953	-	-	37,240	34,890	34,822
2,996	0,6806	-338,40	-299,45	19,963	-	-	37,280	34,912	34,844

Cuadro A.4: Valores de  $S_3$  y del ROME para la soluciones MMRb, MMRb0 y de Berti usando una EOS tipo L

$m$ $M_\odot$	$j$	$S_{3num}$ $Km^4$	$S_{3anal}$ $Km^4$	$r_{+num}$ $Km$	$r_+$ $Km$	$r_{+b=0}$ $Km$	$r_{-num}$ $Km$	$r_-$ $Km$	$r_{-b=0}$ $Km$
$M_b = 1.551M_0$									
1,403	0,0000	0,000	0,000	12,424	12,430	12,430	20,287	12,430	12,430
1,407	0,2166	-1,750	-1,579	11,810	10,453	10,440	14,235	13,575	13,570
1,409	0,2779	-3,673	-3,302	11,990	9,588	9,549	14,846	13,805	13,794
1,411	0,3290	-6,064	-5,448	12,180	8,595	8,478	15,375	13,970	13,952
1,412	0,3736	-8,852	-7,930	12,370	-	-	15,840	14,060	14,060
1,414	0,4133	-12,030	-10,744	12,580	-	-	16,279	14,182	14,146
1,418	0,4838	-19,500	-17,289	13,050	-	-	17,086	14317	14,253
1,422	0,5468	-28,490	-25,09	13,620	-	-	17,829	14,398	14,299
1,426	0,6047	-39,170	-34,207	14,410	-	-	18,539	14,433	14,283
1,428	0,6329	-45,320	-39,401	15,040	-	-	18,895	14,435	14,252
$M_b = 1.672M_0$									
2,205	0,0000	0,000	0,000	19,524	19,536	19,536	19,524	19,536	19,535
2,212	0,1504	-0,526	-0,5019	17,987	17,959	17,956	21,200	21,174	21,174
2,217	0,2081	-1,606	-1,480	17,433	17,333	17,331	21,870	21,802	21,802
2,228	0,3006	-5,299	-4,846	16,605	16,304	16,294	23,010	22,843	22,828
2,243	0,3976	-13,710	-12,463	15,838	15,117	15,079	24,270	23,900	23,909
2,253	0,4488	-20,930	-18,968	15,490	14,431	14,358	24,980	24,502	24,489
2,263	0,5008	-31,100	-28,084	15,203	13,642	13,499	25,720	25,084	25,065
2,276	0,5545	-45,570	-40,940	14,990	12,685	12,393	26,5200	25,697	25,674
2,290	0,6102	-66,310	-59,102	14,879	11,389	10,434	27,390	26,338	26,308
2,307	0,6683	-96,550	-85,200	14,937	-	-	28,380	29,982	26,934
$M_b = 2.800M_0$									
2,335	0,4523	-16,700	-15,041	15,718	15,272	15,222	25,780	25,585	25,573
2,336	0,4578	-17,930	-16,162	15,701	15,183	15,127	25,880	25,642	25,630
2,338	0,4656	-19,680	-17,734	15,669	15,063	14,999	26,000	25,730	25,720
2,342	0,4788	-22,320	-20,133	15,5800	14,877	14,802	26,200	25,914	25,873
2,346	0,4952	-25,970	-23,376	15,485	14,634	14,541	26,450	26,094	26,083
2,351	0,5172	-31,090	-27,989	15,370	14,299	14,177	26,790	26,341	26,354
2,358	0,5425	-38,030	-34,183	15,247	13,896	13,727	27,180	26,678	26,651
2,367	0,5713	-47,470	-42,540	15,130	13,400	13,147	27,650	27,036	27,010
2,377	0,6046	-60,540	-54,057	15,041	12,744	12,317	28,200	27,444	27,415
2,388	0,6420	-78,600	-69,790	15,004	11,856	10,898	28,830	27,904	27,881

Cuadro A.5: Valores de  $S_3$  y del ROME para la soluciones MMRb, MMRb0 y de Berti usando una EOS tipo APRb

## Bibliografía

---

- [1] Aguirregabiria J M, Chamorro A, Manko V S y Sibgatullin N R: “ Exterior gravitational field of a magnetized spinning source possessing an arbitrary mass-quadrupole moment”, *J. Math. Phys.* **48** (2) 622 (1993).
- [2] Aleksejev G A, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **32** 301 1980 [*JETP Lett.* **32** 277 1980]
- [3] Aleksejev G A, *Dolk. akad. Nauk SSSR* **283** 577 (1985)
- [4] Aleksejev G A, in General Relativity and Gravitation, Proceeding of the Eleventh International Conference, Stckholm, Sweden, 1986, edited by M. A. A. MacCallum (Cambridge University Press, New York 1987), p. 227
- [5] Aleksejev G A: “Gravitational Solitons and Monodromy Transform Approach to Soliton of Intregrable Reductions of Einstein Equations” *arXiv:gr-qc/0001012 v1 6 Jan 2000*.
- [6] Bardeen J M: “Stability of circular orbits in stacionary axisymmetric space-time”, *ApJ* **161**, 103 (1970)
- [7] Belinskii V A y Zakharov V E: “Integration of Einstein equations by means of the the inverse scattering problem technique and constructions of exact soliton solutions”, *Sov. Phys.-JETP* **48** (6) 985 (1978)
- [8] Belinskii V A y Zakharov V E: “Stacionary gravitational solitons with axial symmetry”, *Sov. Phys.-JETP* **50**(1) 001 (1979)
- [9] Berti E y Stergioulas N: ”Approximate matching of analytic and numerical solutions for rapidly rotating neutrons stars”, *arXiv:gr-qc/0310061 v2 16 Feb 2004*.
- [10] Cook G B, Shapiro D L y Teukolsky S A: “ Rapidly rotating neutrons stras in general relativity: realistic equations of state”, *Ap. J.* **424** 823 (1994).

- 
- [11] Cosgrove C M: "Relationship between the inverse scattering techniques of BelinskiiZakharov and HauserErnst in general relativity ", *J. Math. Phys.* **23** 615 (1982).
- [12] Ernst F J: "New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem", *Phys. Rev* **167** 1175 (1968).
- [13] Ernst F J: "New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem. II", *Phys. Rev*, **168** 1415 (1968).
- [14] Geroch R: "A Method for Generating Solutions of Einstein's Equations " *J. Math. Phys*, **12** 918 (1971), "A Method for Generating New Solutions of Einstein's Equation. II" *J. Math. Phys*, **13** 394 (1972).
- [15] Geroch R: "Multipole Moments. II. Curved Space", *J. Math. Phys.* **11** 2580 (1970).
- [16] Harrison B K, "Bäcklund Transformation for the Ernst Equation of General Relativity" *Phys. Rev. Lett.* **41** 1197 (1978).
- [17] Hauser I y Ernst F J "Integral equation method for effecting Kinnersley-Chitre transformations", *Phys. Rev. D* **20** 362 (1979).
- [18] Herrera L y Manko V S: "On the origin of Geroch's rotational multipole moments: differentail versus rigid rotation" *Phys. Lett. A* **178** 342 (1993).
- [19] Hoenselaers C, Perjés Z: "Multipole Moments of Axisymmetric Electrovacuum Spacetimes", *Class. Quantum Gravit.* **7**, 1819 (1990).
- [20] Kerr R P: "Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics" *Phys. Rev. Lett.* **11** 237 (1963).
- [21] Kinnersley W: "Symmetries of the stationary Einstein-Maxwell field equations. I " , *J. Math. Phys.* **18** 1529 (1977).
- [22] Kinnersley W y Chitre D M, "Symmetries of the stationary EinsteinMaxwell field equations. II" *J. Math. Phys.* **18** 1538 (1977).
- [23] Kordas P: "Reflection-symmetric, asymptotically flat solutions of the vacuum axistationary Einstein equations" *Class. Quantum Grav.* **12** 2037-2044 (1995).
- [24] Kramer D: "Equivalence of various pseudopotential approaches for Einstein-Maxwell fields" *J. Phys. A: Math. Gen.* **15** 2201 (1982).

- [25] Kramer D y Neugebauer G: "Prolongation structure and linear eigenvalue equations for Einstein-Maxwell fields ", *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** L333 (1981).
- [26] Maison D, "On the complete integrability of the stationary, axially symmetric Einstein equations"*J. Math. Phys.* **20** 871 (1979).
- [27] V. S. Manko , J. Martin y E. Ruiz: "Extended 6N parameter family of exact solutions of the Einstein-Maxwell equations", *Physics Letters A* **200** 77 (1995).
- [28] Manko V S , Martin J y Ruiz E: "Extended N-soliton solution of the Einstein-Maxwell equations", *Phys. Rev. D.* **51** 4192 (1995).
- [29] Manko V S , Martin J y Ruiz E: "Six- parameter solution of the Einstein-Maxwell equations possessing equatorial symmetry", *J. Math. Phys.* **36**(6) 3063 (1995).
- [30] Manko V S, Sanabria-Gómez J D y Manko O V: "Nine parameter electrovac metric involving rational functions", *Phys. Rev. D.* **62** 044048 (1999).
- [31] Manko V S y Sibgatullin N R: "Construction of exact solution of the Einstein-Maxwell equations corresponding to a given behaviour of the Ernst potentials on the symmetry axis", *Class. Quantum Grav.* **10**, 1383 (1993).
- [32] Neugebauer G, "Backlund transformations of axially symmetric stationary gravitational fields " *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** L67 (1979).
- [33] Neugebauer G y Kramer D: "Einstein-Maxwell solitons", *J. Phys. A* **16** 1927 (1983).
- [34] Quevedo H: "Multipole Moments in General Relativity" *Progress of Physics* **38** (10) 783 (1990)
- [35] Salazar H, "Some remarks on EinsteinMaxwell solitons", *J. Math. Phys.* **30** 1640 (1989).
- [36] Shibata M y Sasaki M: "Innermost stable circular orbits around relativistic rotating stars ", *Phys. Rev. D.* **58** 104011 (1998).
- [37] Sibgatullin N R, *Dolk. akad. Nauk SSSR* **271** 603 (1983)
- [38] Sibgatullin N R y Sunyaev R A: " The Disc Accretion in Gravitational Field of a Rapidly Rotating Neutron Star with a Rotationally Induced Quadrupole Mass Distribution", *Astronomy Letters* **24**(6) 774 (1998).

- 
- [39] Van Der Bergh N y Wils P: "The rotation axis for stationary and axisymmetric space-times" *Class. Quantum Grav.* **2** 229 (1985)