

**INTRODUCCIÓN AL CAOS A PARTIR DE LOS
SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS**

NAYIBE CAROLINA GÓMEZ FLÓREZ

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULDADE DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2005

**INTRODUCCIÓN AL CAOS A PARTIR DE LOS
SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS**

NAYIBE CAROLINA GÓMEZ FLÓREZ

**Trabajo presentado para optar el título de
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS**

**Directora
SONIA MARLENI SABOGAL PEDRAZA**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2005

A MIS PADRES.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por:

- la oportunidad dada para estudiar lo que deseaba;
- los medios puestos a mi disposición;
- mi familia;
- las personas que me colaboraron desinteresadamente;
- el amor.

Todo lo anterior me facilitó el camino.

Agradezco a los profesores que con paciencia y sabiduría me escucharon, enseñaron y ayudaron. Tuve la fortuna de estar bajo la tutoría de excelentes profesionales. Aprendí de ellos.

Muchas gracias.

TITLE: INTRODUCCION TO CHAOS BY MEANS THE
DISCRETE DYNAMICS SYSTEMS*

AUTHOR: NAYIBE CAROLINA GÓMEZ FLÓREZ**

KEY WORDS: DISCRETE DYNAMICAL SYSTEM, ORBIT, PERIODIC POINT, ATTRACTING & REPELLING, TENT MAP, CHAOS, TOPOLOGICAL TRANSITIVITY, SENSITIVE DEPENDENCE ON INITIAL CONDITIONS. .

DESCRIPTION

This material introduces to the chaos theory, through the discrete dynamical systems, frequently unidimensional, providing basic knowledges about this theme.

It's done due to significative development and applicability of the discrete dynamical systems theory in various areas as: meteorology, economy, physics, chemistry, sociology, philosophy, and so on, and for to collaborate with the divulgation of the science to a ampler sector, provided that it's written in a simple form, in spanish and it offers tool for its comprehension.

This material falls into three chapters. The first is called **Preliminaries** includes previous concepts, which are used in proofs, examples, remarks and exercises seen in the other two chapters. The second, titled **Discrete dynamical systems** presents definitions, that facilitate us the study of dynamic of a system, as: fixed, periodic, eventually fixed and eventually periodic, asymptotely fixed and asymptotely periodic, aperiodic points; orbit, graphical analysis, stable set or basin of a attracting periodic point, a map of special importance wellknown as the tent, examples, theorems, propositions, lemmas and some resolved exercises. Finally, the chapter three: **Chaotic dynamic system** (CDS) shows the definition of CDS proposed by Robert Devaney, explaining before three indispensable concepts for its comprehension (density of periodic points, topological transitivity and sensitive dependence on initial conditions); some results about this theory are presented too.

*Degree Work

** FACULTY OF SCIENCES, MATHEMATICS LICENCIATURE.
DIRECTORA SONIA MARLENI SABOGAL PEDRAZA.

TÍTULO: INTRODUCCIÓN AL CAOS A PARTIR DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS*

AUTOR: NAYIBE CAROLINA GÓMEZ FLÓREZ**

PALABRAS CLAVES: SISTEMA(S) DINÁMICO(S) DISCRETO(S), ÓRBITA(S), PUNTO(S) PERIÓDICO(S), ATRACTOR(RES) Y/O REPULSOR(ES), FUNCIÓN TIENDA, CAOS, TRANSITIVIDAD TOPOLÓGICA, SENSIBILIDAD A CONDICIONES INICIALES..

DESCRIPCIÓN

Este material introduce a la teoría del caos, mediante los sistemas dinámicos discretos, casi siempre unidimensionales, proporcionando conocimientos básicos sobre el tema.

Se produce debido al desarrollo significativo y a la aplicabilidad de la teoría de los sistemas dinámicos en diversas áreas como: meteorología, economía, física, medicina, química, sociología, filosofía, etc. y para colaborar con la divulgación de la ciencia a un sector más amplio, dado que está escrito en forma sencilla, en español y brinda herramientas para su comprensión.

Está compuesto por tres capítulos. El primero llamado **Preliminares** incluye conceptos previos los cuales son utilizados en demostraciones, ejemplos, observaciones y ejercicios vistos en los otros dos capítulos. El segundo, titulado **Sistema dinámico discreto** presenta definiciones que nos facilitan el estudio de la dinámica de un sistema, tales como: puntos fijos, periódicos, eventualmente fijos y eventualmente periódicos, asintóticamente fijos y asintóticamente periódicos, aperiódicos, órbita, análisis gráfico, conjunto estable o cuenca de un punto periódico atractor, una función de especial importancia conocida como *la tienda*, ejemplos, teoremas, proposiciones, lemas y algunos ejercicios resueltos. Por último el capítulo tres, **Sistema dinámico caótico** (SDC) muestra la definición de SDC propuesta por Robert Devaney, explicando antes tres conceptos indispensables para su comprensión (densidad de los puntos periódicos, transitividad topológica y sensibilidad a condiciones iniciales); también se presentan algunos resultados sobre esta teoría.

*Trabajo de Grado

** FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTORA SONIA MARLENI SABOGAL PEDRAZA.

Contenido

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Algo sobre los números reales	3
1.2. Espacios métricos y topológicos	5
1.3. La topología de \mathbb{R}	7
1.4. Sucesiones	8
1.5. Continuidad y teorema del valor intermedio	10
1.6. Homeomorfismo	12
1.7. Derivación y teorema del valor medio	13
1.8. Densidad	14
2. Sistema dinámico discreto	16
2.1. Análisis gráfico	18
2.2. Puntos fijos	20
2.3. Puntos periódicos	28
2.4. La función tienda T	34
2.5. Puntos eventualmente fijos y eventualmente periódicos	39
2.6. Puntos asintóticamente fijos y asintóticamente periódicos	41
2.7. Puntos aperiódicos	43
2.8. Ejercicios resueltos	45
3. Sistema dinámico caótico	60

3.1. $Per(f)$ y densidad	60
3.2. Transitividad topológica	61
3.3. Estabilidad y sensibilidad a condiciones iniciales	63
3.4. Definición de caos	65

Introducción

Vivimos rodeados de sistemas dinámicos: las empresas, el mercado, los ecosistemas, el clima, nuestro cuerpo, la población y sus interacciones con el medio, son algunos ejemplos. Estos sistemas son dinámicos por los cambios que presentan con el paso del tiempo, dicho de otra forma, por su movimiento.

El movimiento o dinámica del sistema exhibe ciertas características dependiendo del espacio donde se dé, el tiempo (discreto o continuo) en el que se analice y la regla que lo rige. El estudio del movimiento se remonta a la época de Newton (1.643-1.727) con el estudio del movimiento de los cuerpos por la acción de la gravedad.

A finales del siglo XIX Henri Poincaré propuso un método nuevo (más cualitativo que cuantitativo) para estudiar sistemas dinámicos: en este se analiza el comportamiento global de todas las soluciones ([G-S]). En 1.908 escribió: "... el verdadero método para predecir el futuro ... consiste en estudiar su historia y estado actual." ([Mc] pág. 41)

Pocos científicos mostraron interés en su trabajo, hasta que el estudio moderno de los sistemas caóticos comenzó en la década de los sesentas con los trabajos de Steve Smale sobre dinámica simbólica y el descubrimiento del caos en el modelo simplificado del clima de Edward Lorenz.

Luego, en la década de los ochentas se da otro importante avance con trabajos de Robert Devaney y otros ([M1]). En esta época se inicia la difusión entre un gran número de personas (cercanas o no a las matemáticas) de conceptos como *función caótica* entre otros. A causa de la interdisciplinariedad en el estudio del tema, surgieron aplicaciones en diversas áreas como: economía, meteorología, sociología, química, biología, física, medicina, etc.

Debido al importante desarrollo y aplicabilidad de la teoría de los sistemas dinámicos caóticos, se produce este material introductorio, basado en sistemas dinámicos discretos casi siempre unidimensionales; compuesto por tres capítulos y escrito en forma sencilla para hacerlo accesible a personas con algún conocimiento en topología y análisis matemático.

El primer capítulo, llamado **Preliminares**, incluye conceptos previos para la comprensión de las demostraciones, ejemplos, observaciones y ejercicios vistos en los otros dos capítulos; el segundo, titulado **Sistema dinámico discreto** presenta conceptos básicos sobre estos sistemas, una función de especial importancia es conocida como *la tienda* y ejercicios resueltos; algunos de los cuales fueron estudiados en un seminario realizado en el primer semestre académico de 2004, por un grupo de alumnos de pregrado, un profesor de la Escuela de economía y los profesores Sonia M. Sabogal, Rafael Isaacs, Edilberto Reyes y Javier Camargo de la Escuela de matemáticas; por último el capítulo tres, **Sistema dinámico caótico** incluye conceptos necesarios para la comprensión de la definición de sistema dinámico caótico presentada en este trabajo y propuesta por Devaney.

Cabe anotar que debido a delimitación temática, queda mucha teoría relacionada con el tema excluida de esta monografía, la cual podría tomarse como objeto de estudio para otros trabajos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se enuncian algunas definiciones, teoremas y resultados que se utilizarán en los siguientes capítulos, con el fin de que el lector se devuelva a éste si no comprende o quiere verificar algo. Las demostraciones que no aparecen pueden encontrarse en [B-S].

1.1. Algo sobre los números reales

A continuación enunciaremos algunos resultados sobre el conjunto \mathbb{R} de los números reales, que se van a usar posteriormente.

Teorema 1.1.1. *Si $a \in \mathbb{R}$ es tal que $0 \leq a < \varepsilon$ para todo número positivo ε , entonces $a = 0$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que $a > 0$, entonces $0 < \frac{a}{2} < a$. Ahora bien, si se hace $\varepsilon = \frac{a}{2}$, entonces se tiene que $\varepsilon > 0$ y $a > 0$. Por lo tanto, es falso que $a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Se concluye que $a = 0$. □

Definición 1.1.1. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}$.*

*i) Se dice que un número $u \in \mathbb{R}$ es una **cota superior** de S si y sólo si $s \leq u \forall s \in S$.*

*ii) Se dice que un número $w \in \mathbb{R}$ es una **cota inferior** de S si y sólo si $w \leq s \forall s \in S$.*

Se dice que S está **acotado por arriba** si tiene una cota superior, **acotado por abajo** si tiene una cota inferior y **acotado** si está acotado por arriba y abajo.

Definición 1.1.2. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$.

i) Si S está acotado por arriba, entonces se dice que una cota superior u es un **supremo** (o una **mínima cota superior**) de S , si ningún número menor que u es cota superior de S . Si u existe entonces se notará $\sup S = u$.

ii) Si S está acotado por abajo, entonces se dice que una cota inferior w es un **ínfimo** (o una **máxima cota inferior**) de S , si ningún número mayor que w es cota inferior de S . Si w existe entonces se notará $\inf S = w$.

Observaciones

- Si el supremo(o ínfimo) existe es único.
- Si se aplican las definiciones anteriores al conjunto vacío \emptyset , cualquier número real es cota superior de \emptyset , pues dado $r \in \mathbb{R}$, no existe un $s \in \emptyset$ tal que $s > r$, entonces no habrá una mínima cota superior. De manera similar, cualquier número real es cota inferior de \emptyset , por lo que no existe el ínfimo de \emptyset .

Una propiedad importante de \mathbb{R} es la siguiente:

Todo conjunto no vacío de números reales que tiene una cota superior tiene un supremo en \mathbb{R} (propiedad del supremo en \mathbb{R}).

Esta propiedad es equivalente a la siguiente:

Todo conjunto no vacío de números reales que tiene una cota inferior tiene un ínfimo en \mathbb{R} (propiedad del ínfimo en \mathbb{R}).

Ejemplo 1.1.1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con α, β y $c \in \mathbb{R}$, con $\alpha \in A \subseteq \mathbb{R}$ y A definido como sigue

$$A = \{x \in [\alpha, \beta] : f(x) = c\} = [\alpha, \beta] \cap f^{-1}(c).$$

Es claro que, $A \subseteq [\alpha, \beta]$; luego A está acotado y $A \neq \emptyset$, entonces A tiene ínfimo y supremo, además, como A es cerrado tales ínfimo y supremo serán el mínimo y el máximo de A respectivamente¹.

Una consecuencia importante de la propiedad del supremo en \mathbb{R} es la propiedad de Arquímedes o arquimediana.

Propiedad de Arquímedes. *Si $x \in \mathbb{R}$, entonces existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_x$.*

La propiedad de Arquímedes se puede enunciar de varias maneras. Se presentan a continuación algunas.

Corolario 1.1.1. *Sean y y z números reales positivos. Entonces:*

- a) *existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z < ny$;*
- b) *existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < y$;*
- c) *existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq z < n$.*

1.2. Espacios métricos y topológicos

Intuitivamente un espacio métrico es un conjunto en el que se puede hablar o trabajar con la distancia entre sus elementos debido a que el conjunto tiene una función de distancia o métrica. Más formalmente tenemos la siguiente definición:

Definición 1.2.1. *Una **métrica** en un conjunto X , es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, que satisface las siguientes propiedades $\forall x, y, z \in X$.*

- a) $d(x, y) \geq 0$ (positividad);
- b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (precisión);
- c) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría);
- d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ (desigualdad del triángulo).

¹Este ejemplo se usa en el ejercicio 2.2.

Un **espacio métrico** (X, d) es un conjunto X junto con una métrica d en X .

Ejemplo 1.2.1. a) (\mathbb{R}, d_u) con $d_u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_u(x, y) = |x - y|$, para $x, y \in \mathbb{R}$, es un espacio métrico y d_u se llama la distancia o **métrica usual** en los reales.

b) Sea $X \neq \emptyset$. Para $x, y \in X$ se define la **métrica discreta** como

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Entonces (X, d) se llama **espacio métrico discreto**.

Si (X, d) es un espacio métrico y $A \subseteq X$, es fácil ver que al restringir la función d al conjunto $A \times A$, se obtiene que (A, d) también es un espacio métrico.

La métrica usual en \mathbb{R} y la métrica discreta generan, respectivamente, la topología usual en \mathbb{R} y la topología discreta, las cuales se definirán en el ejemplo 1.2.3.

Definición 1.2.2. Sea (X, d) un espacio métrico; $a \in X$ y $\varepsilon > 0$, se define la **bola** con centro en a y radio ε , notada $B_\varepsilon(a)$ como sigue

$$B_\varepsilon(a) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}.$$

Ejemplo 1.2.2. Si (X, d) es el espacio métrico discreto, entonces

$$B_\varepsilon(a) = \begin{cases} \{a\} & \text{si } \varepsilon \leq 1, \\ X & \text{si } \varepsilon > 1. \end{cases}$$

Veamos ahora la noción de espacio topológico.

Definición 1.2.3. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{T} \subseteq \mathbf{P}(X)$, (X, \mathcal{T}) es un **espacio topológico** si:

a) $\emptyset \in \mathcal{T}$;

b) $X \in \mathcal{T}$;

c) $A \cap B \in \mathcal{T}$ para todo $A, B \in \mathcal{T}$;

d) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ es una familia de conjuntos donde $A_\alpha \in \mathcal{T}$ para toda $\alpha \in \Delta$ entonces $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}$.

En tal caso \mathcal{T} se dice una **topología** en X y si $A \in \mathcal{T}$ se dice que A es un **conjunto abierto**.

Ejemplo 1.2.3. a) $X = \{1, 2, 3\}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, X\}$ entonces (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico.

b) Si (X, d) es un espacio métrico entonces la familia de las bolas genera una topología en X de la siguiente manera: la colección de subconjuntos de X que son uniones de bolas, es una topología, es decir, no es difícil demostrar que:

$$\mathcal{T}_d =: \{\bigcup_{\alpha \in \Delta} B_{\varepsilon_\alpha}(a_\alpha) \mid a_\alpha \in X, \varepsilon_\alpha \in \mathbb{R}^+, \alpha \in \Delta, \Delta \text{ conjunto}\}$$

es una topología en X , llamada la topología generada por la métrica d .

c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ con $\mathcal{T}_u = \{\bigcup_{i \in J} (a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{R} \text{ y } a_i < b_i \forall i \in J, J \text{ conjunto}\}$ es un espacio topológico (\mathcal{T}_u es la topología generada por d_u) y \mathcal{T}_u es llamada la **topología usual** en \mathbb{R} .

d) Dado X conjunto, la **topología discreta** sobre X , notada \mathcal{T}_{dis} se define por $\mathcal{T}_{dis} = \mathbf{P}(X)$ y \mathcal{T}_{dis} es la topología generada por la métrica discreta.

1.3. La topología de \mathbb{R}

Puesto que los sistemas dinámicos que se estudian en este trabajo son en su mayoría sistemas dinámicos en \mathbb{R} entonces los siguientes conceptos se restringirán al espacio topológico de los reales, es decir, a \mathbb{R} con su topología usual.

Definición 1.3.1. Sea $\varepsilon > 0$. El conjunto $V_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon\}$ es una **ε -vecindad** de x .

Nota. $|x - y| < \varepsilon$ si y sólo si $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. entonces $V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Nótese además que $V_\varepsilon(x)$ no es otra cosa que la bola con centro en x y radio ε .

Proposición 1.3.1. El conjunto U es **abierto** si y sólo si $(\forall x \in U) (\exists V_\varepsilon(x))$ tal que $V_\varepsilon(x) \subseteq U$. El conjunto F es **cerrado** si $F^c = \mathbb{R} \setminus F$ es abierto.

Ejemplo 1.3.1. a) El conjunto $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ es abierto.

Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, se puede tomar $\varepsilon := 1$ y $(x - 1, x + 1) \subset \mathbb{R}$.

b) Cualquier intervalo abierto $J := (a, b)$ es un conjunto abierto.

Si $a < x < b$ se hace $\varepsilon_x := \min\{x - a, b - x\}$ entonces $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subseteq J$. De manera similar $(-\infty, a)$ y (b, ∞) son conjuntos abiertos.

c) El conjunto $I = [0, 1]$ es cerrado.

$I^c = \mathbb{R} \setminus [0, 1] = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ es abierto pues la unión arbitraria de abiertos es abierta, y $(-\infty, 0), (1, \infty)$ son abiertos.

Si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico y $A \subseteq X$, es fácil ver que la familia:

$$\mathcal{T}_A =: \{O \cap A \mid O \in \mathcal{T}\}$$

es una topología en A . En tal caso (A, \mathcal{T}_A) se dice un **subespacio** (topológico) de (X, \mathcal{T}) .

1.4. Sucesiones

Definición 1.4.1. Sea $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que asigna a cada natural un número real de la forma $X_{(n)} = x_n$ entonces $X = (x_n)$ es una **sucesión** en \mathbb{R} . La sucesión (x_n) **converge** a $x \in \mathbb{R}$ si $(\forall \varepsilon > 0) (\exists k_\varepsilon \in \mathbb{N})$ tal que si $n \geq k_\varepsilon$, entonces $|x - x_n| < \varepsilon$.

La sucesión **converge al infinito** si para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $k_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k_\alpha$, entonces $x_n > \alpha$.

Cuando (x_n) converge a x se escribe $\lim(x_n) = x$ o también $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$

Ejemplo 1.4.1. a) La sucesión $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ converge a cero.

Veamos, dado $\varepsilon > 0$ se tiene $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ y por la propiedad arquimediana $\exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $k_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq k_\varepsilon$ se tiene $n > \frac{1}{\varepsilon}$, luego $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Es decir, si $n \geq k_\varepsilon$ entonces $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

b) Si $c > 1$, entonces $\lim(c^n) = \infty$.

Sean $c := 1 + b$, donde $b > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $k_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $k_\alpha > \frac{\alpha}{b}$.

Si $n \geq k_\alpha$, por la desigualdad de Bernoulli² se sigue que

$$c^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb > 1 + \alpha > \alpha.$$

Por lo tanto, $\lim(c^n) = \infty$.

Teorema 1.4.1. Sean $A = (a_n)$ y $X = (x_n)$ sucesiones de números reales y sea $x \in \mathbb{R}$.

Si para algún $c > 0$ y algún $m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|x_n - x| < c|a_n| \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq m,$$

y si $\lim(a_n) = 0$, entonces se deduce que $\lim(x_n) = x$.

Ejemplo 1.4.2. Si $0 < c < 1$ entonces $\lim(c^n) = 0$.

Puesto que $0 < c < 1$ entonces $1 < \frac{1}{c}$, luego $a = \frac{1}{c} - 1 > 0$; por consiguiente se puede escribir $c = \frac{1}{(1+a)}$. Por la desigualdad de Bernoulli se tiene

$$0 < c^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na},$$

luego

$$|c^n - 0| < \frac{1}{a} \left| \frac{1}{n} \right|.$$

Como $\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ y $\frac{1}{a} > 0$, entonces $\lim(c^n) = 0$.

Definición 1.4.2. Sea $X = (x_n)$ una sucesión de números reales.

Se dice que X es **creciente** si satisface las desigualdades

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$$

²Si $x > -1$, entonces $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Se dice que X es **decreciente** si satisface las desigualdades

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots$$

Se dice que X es **no decreciente** si satisface

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$$

Se dice que X es **no creciente** si satisface

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$$

Se dice que X es **monótona** si es decreciente o creciente o no decreciente o no creciente.

Teorema 1.4.2 (de convergencia monótona). *Una sucesión monótona de números reales es convergente si y sólo si está acotada. Además:*

a) si $X = (x_n)$ es una sucesión no decreciente acotada, entonces

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n\};$$

b) si $Y = (y_n)$ es una sucesión no creciente acotada, entonces

$$\lim(y_n) = \inf\{y_n\}.$$

Definición 1.4.3. Sea $X = (x_n)$ una sucesión en \mathbb{R} , es decir $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $K : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ creciente (es decir: $\forall m, n \in \mathbb{N}, n < m \Rightarrow K(n) < K(m)$).

Entonces $X \circ K : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama una **subsucesión** de X y se nota (x_{k_n}) .

Teorema 1.4.3. Si una sucesión $X = (x_n)$ converge a un número real x entonces cualquier subsucesión de X también converge a x .

1.5. Continuidad y teorema del valor intermedio

Definición 1.5.1. Sean (X, \mathcal{T}) y (Y, μ) espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Diremos que f es **continua** si y sólo si $\forall G \in \mu$, se tiene que $f^{-1}(G) \in \mathcal{T}$ (es decir f devuelve abiertos en abiertos).

La definición anterior se puede particularizar fácilmente para funciones entre espacios métricos.

Proposición 1.5.1. Sean (X, d) y (Y, m) espacios métricos, $f : X \rightarrow Y$ y $c \in X$. Se dice que f es continua en c si dada cualquier bola $B_\varepsilon(f(c))$, existe una bola $B_\delta(c)$ tal que $f(B_\delta(c)) \subseteq B_\varepsilon(f(c))$.

Proposición 1.5.2. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in A$. Se dice que f es continua en c si, dada cualquier ε -vecindad $V_\varepsilon(f(c))$ de $f(c)$, existe una δ -vecindad $V_\delta(c)$ de c tal que si x es cualquier punto de $A \cap V_\delta(c)$, entonces $f(x) \in V_\varepsilon(f(c))$ (note que δ depende de ε y c).

Proposición 1.5.3. Se dice que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en A si es continua en todo punto de A .

Teorema 1.5.1. Sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en un punto $a \in X$ y $f(a) < g(a)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$ con $|x - a| < \delta$.

Corolario 1.5.1. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua en un punto $a \in X$ y $k \in \mathbb{R}$ una constante. Si $f(a) < k$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < k$ para todo $x \in X$ con $|x - a| < \delta$.

Demostración. Sea $f(a) < k$ y $\varepsilon = k - f(a) > 0$. Por la definición de continuidad, a este ε le corresponde un $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta$ implica $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Como $f(a) + \varepsilon = k$, se tiene que para todo punto $x \in X$, cuya distancia al punto a sea menor que δ cumple $f(x) < k$. □

Un resultado análogo³ es:

si $f(a) > k$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > k$ para todo $x \in X$ con $|x - a| < \delta$.

Teorema 1.5.2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, sean f y g funciones de A a \mathbb{R} . Supóngase que $c \in A$ y que f y g son continuas en c . Entonces

$$f + g, \quad f - g, \quad fg \quad \text{y} \quad bf$$

son continuas en c (combinación de funciones continuas).

³[L],pág 176

Teorema 1.5.3. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subseteq B$. Si f es continua en $c \in A$ y g es continua en $b = f(c) \in B$, entonces la composición $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en c (composición de funciones continuas).

Teorema 1.5.4. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua en A y sea $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ continua en B . Si $f(A) \subseteq B$, entonces la función compuesta $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en A .

Teorema 1.5.5 (del valor intermedio⁴). Sea $I = [a, b]$ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua en I . Si k es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un $c \in I$, tal que $f(c) = k$.

Definición 1.5.2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es **uniformemente continua** en A si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $x, y \in A$ son números cualesquiera que satisfacen $|x - y| < \delta_\varepsilon$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (note que δ solo depende de ε).

Definición 1.5.3. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Si existe una constante $k > 0$ tal que $|f(x) - f(u)| \leq k|x - u|$ para toda $x, u \in A$, entonces se dice que f es una **función de Lipschitz** (o que satisface una condición de Lipschitz) en A .

Teorema 1.5.6. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Lipschitz, entonces f es uniformemente continua en A .

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ se puede tomar $\delta := \frac{\varepsilon}{k}$. Si $x, u \in A$ satisfacen $|x - u| < \delta$, entonces $|f(x) - f(u)| < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$. Por lo tanto f es uniformemente continua en A . \square

1.6. Homeomorfismo

Definición 1.6.1. Sea $f : J \rightarrow K$ con $J, K \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que f es un **homeomorfismo** si f es continua en J , es biyectiva y $f^{-1} : K \rightarrow J$ es continua en K .

Ejemplo 1.6.1. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dada por $f(x) = \arctan(x)$ es un homeomorfismo (ver figura 1.1).

⁴Usaremos la sigla TVI para abreviar teorema del valor intermedio.

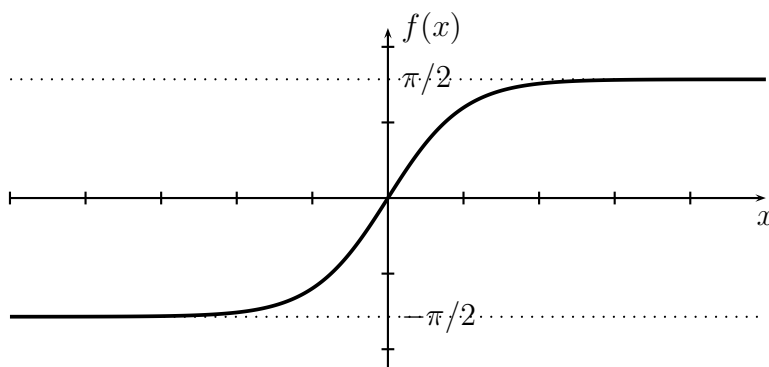


Figura 1.1: $f(x) = \arctan x$ con $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$.

1.7. Derivación y teorema del valor medio

Definición 1.7.1. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in I$. f es **derivable en a** si el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. En este caso, tal límite se denota $f'(a)$ y se lee: la **derivada de f en a** . Una función es **derivable** (o **diferenciable**) si es derivable en cada punto de su dominio.

Teorema 1.7.1. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $c \in I$, entonces f es continua en c .

Teorema 1.7.2 (del valor medio⁵). Supóngase que f es continua en el intervalo cerrado $I := [a, b]$ y que f es derivable en el intervalo abierto (a, b) . Entonces existe al menos un punto c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Teorema 1.7.3. Sea $f : I \rightarrow I$ derivable en el intervalo I , entonces:

a) f es no decreciente en I si y sólo si $f'(x) \geq 0 \forall x \in I$.

b) f es no creciente en I si y sólo si $f'(x) \leq 0 \forall x \in I$.

Cuando f es creciente o decreciente (desigualdades estrictas) se aplica el teorema con desigualdades estrictas.

Ejemplo 1.7.1. Sea $f(x) = \sqrt{x}$ con $f : I \rightarrow I$ donde $I = [0, \infty)$. f es creciente en I . De hecho $f'(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} > 0, \forall x \in I$, entonces por el teorema anterior f es creciente.

⁵Usaremos la sigla TVM para abreviar Teorema del valor medio.

1.8. Densidad

Definición 1.8.1. Sea K un conjunto ordenado⁶ y $J \subseteq K$. Diremos que J es **denso** en K si es posible hallar un elemento de J entre cualquier par de elementos distintos de K .

Proposición 1.8.1. Sea $J \subseteq K \subseteq \mathbb{R}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) J es denso en K .
- b) $\forall x \in K$ y $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in J$ tal que $|x - y| < \varepsilon$.
- c) Para cualquier intervalo abierto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ con $(a, b) \neq \emptyset$ y $(a, b) \cap K \neq \emptyset$ se tiene $(a, b) \cap J \neq \emptyset$.

Ejemplo 1.8.1. Sea \mathbb{Q} el conjunto de los números racionales, entonces \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} . Veamos: sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$, entonces $b - a > 0$, luego por la propiedad arquimediana obtenemos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < b - a$ de donde $1 < n(b - a)$ y por consiguiente $nb - na > 1$. Cómo $na > 0$ por el corolario 1.1.1 inciso (c), se obtiene $m \in \mathbb{N}$ tal que $m - 1 \leq na < m$, ya que $m \leq na + 1 < nb$, entonces $m < nb$. Por tanto $na < m < nb$, de donde $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ y satisface $a < r < b$.

Proposición 1.8.2. Si $J \subseteq K$, K infinito y J denso en K , entonces J es infinito.

Demostración. Supongamos que J es finito, entonces $J = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Tomemos un $x \in K \setminus J$ (tal x existe porque K es infinito) y hacemos

$$\delta = \min\{|x - \alpha_i| \text{ con } \alpha_i \in J, i = 1, 2, \dots, k\}.$$

Cómo J es finito y está contenido en K , δ existe y además $\delta > 0$; haciendo $\varepsilon = \frac{\delta}{2} > 0$ se tiene que $V_\varepsilon(x) \cap J = \emptyset$ luego J no es denso en K , lo cual contradice la hipótesis. Por consiguiente J es infinito. \square

Observe que el conjunto de los números naturales \mathbb{N} es infinito y está contenido en \mathbb{Q} . Aunque $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ y \mathbb{Q} sea denso en \mathbb{R} , el conjunto \mathbb{N} no es denso en \mathbb{Q} ni en \mathbb{R} .

⁶Es decir dotado de una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Proposición 1.8.3. Sea $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Si A es denso en I y $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq A$, entonces $A \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ es denso en I para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Cómo I es infinito y A es denso en I , entonces por la proposición anterior A es infinito. Probaremos por inducción matemática que si se quita un número finito de puntos a A , este nuevo subconjunto de A es denso en I .

Tomemos cualquier conjunto O abierto en I con $O \neq \emptyset$, entonces:

Si $k = 1$; $(A \setminus \{x\}) \cap O = (A \cap \{x\}^c) \cap O \neq \emptyset$ porque $\{x\}^c \cap O$ es abierto no vacío en I y A es denso en I .

Ahora supongamos que la proposición es verdadera para algún $n \in \mathbb{N}$ y veamos que se cumple para $k = n + 1$, entonces

$$\begin{aligned} (A \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}) \cap O &= [(A \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \setminus \{x_{n+1}\}] \cap O \\ &= (A \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \cap \{x_{n+1}\}^c \cap O \neq \emptyset, \end{aligned}$$

ya que $\{x_{n+1}\}^c \cap O$ es abierto no vacío en I y $A \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es denso en I , por la hipótesis de inducción. Entonces $A \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ es denso en I para todo $k \in \mathbb{N}$. \square

Proposición 1.8.4. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq A \subseteq I$ tal que B es denso en A y A es denso en I , entonces B es denso en I (transitividad de la densidad).

Demostración. Si O es cualquier abierto de \mathbb{R} con $O \cap I \neq \emptyset$ debemos probar que

$$B \cap (O \cap I) \neq \emptyset.$$

Como $O \cap I$ es abierto no vacío en I y A es denso en I entonces $A \cap (O \cap I) \neq \emptyset$, pero $A \cap (O \cap I) = O \cap (A \cap I) = O \cap A$, luego $O \cap A$ es abierto no vacío en A , entonces $B \cap (O \cap A) \neq \emptyset$. Pero $B \cap (O \cap A) \subseteq B \cap (O \cap I)$, por tanto $B \cap (O \cap I) \neq \emptyset$ como se quería ver. \square

Capítulo 2

Sistema dinámico discreto

Si (X, d) es un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función, llamaremos las **iteradas** de f a las funciones en X , que resultan de la repetida composición de f con si misma. Estas se notan así:

$$f^0 = I_d, f, f^2, f^3, \dots, f^n, \dots$$

donde n está en función del tiempo t , con $n \in \mathbb{N}$, luego en $t = k$ la posición de algún punto inicial x_0 dado en $t = 0$ (condición inicial) está dada por la k -ésima iterada de f sobre x_0 de la forma $f^k(x_0) = x_k$, la siguiente posición se da en $t = k + 1$ por¹

$$f^{k+1}(x_0) = f_0 f^k(x_0) = f_{(x_k)} = x_{k+1}.$$

t	0	1	2	... n ...
posición o valor	$f^0(x_0) = x_0$	$f(x_0) = x_1$	$f^2(x_0) = x_2$... $f^n(x_0) = x_n$...

Tabla 2.1: Recorrido de x_0 bajo f .

Matemáticamente un **sistema dinámico discreto** (S.D.D.) se caracteriza por una función f de X en X continua y sus iteradas sobre un espacio métrico (X, d) .

Escribiremos $\{X, f\}$ para notar un S.D.D.

La **órbita** o trayectoria de x_0 se define como una sucesión de la siguiente forma:

$$o(x_0, f) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\} = (f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}.$$

¹Ver los incisos a y c del ejercicio 2.1

En algunas ocasiones, abusando del lenguaje, al hablar de la cardinalidad de la órbita nos referiremos a ella como conjunto. Las órbitas de cada punto del espacio describen la dinámica del sistema.

Un S.D.D. es unidimensional si $X \subseteq \mathbb{R}$, a menudo trabajaremos en $\{I, f\}$ donde $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ con la métrica y la topología usual en \mathbb{R} .

Para analizar la evolución de una población determinada, Malthus (1766-1834) desarrolló un modelo llamado exponencial en el cual, el crecimiento de la población es proporcional a la población existente, este es:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha x_k = (1 + \alpha)x_k = \beta x_k \text{ donde } \beta = \alpha + 1.$$

Si $\beta > 1$ la población crece indefinidamente, si $\beta = 1$ se mantiene constante y se extingue si $\beta < 1$.

Luego Verhulst (1804-1849) analizando que el crecimiento de la población es proporcional tanto a la población existente, como al “espacio” disponible, entonces propone la siguiente curva:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha x_k(1 - x_k) = (1 + \alpha)x_k - \alpha x_k^2$$

donde la población máxima admisible es 1 (normalizado), si $x_k > 1$ el crecimiento se hace negativo.

En 1976 el biólogo Robert May para estudiar una población de insectos en un ecosistema cerrado modificó la curva de Verhulst de la siguiente manera:

$$x_k + 1 = cx_k(1 - x_k).$$

Esta ecuación es conocida como: el modelo logístico.

Ejemplo. Por medio de los modelos exponencial y logístico, analicemos el crecimiento de una pequeña población de conejos, la cual se incrementa aproximadamente un 10 % cada año. Tengamos en cuenta que los conejos se encuentran en un espacio limitado. Si nuestra población inicial $x_0 = 8$ conejos ocurre lo siguiente:

En un año $x_1 = x_0 + 0,1x_0 = 1,1x_0$, en dos años $x_2 = x_1 + 0,1x_1 = 1,1x_1 = 1,1^2x_0$, en tres años $x_3 = x_2 + 0,1x_2 = 1,1x_2 = 1,1^3x_0$, entonces por inducción, después de n años $x_n = 1,1^n x_0$; haciendo $f(x) = 1,1x$ y $x_0 = 8$ tenemos:

Años(n)	0	10	20	50	100 ...
Población(f^n)	8	$f^{10}(8) = 1,1^{10}(8) = 21$	$f^{20}(8) = 54$	$f^{50}(8) = 939$	110.245 ...

Tabla 2.2: La población crece sin límite, ignorando el espacio, los recursos y otros factores que influyen en este crecimiento.

Ahora si aceptamos que de acuerdo a las condiciones necesarias para el mantenimiento de los conejos, la población límite es de 1000 y tomamos el modelo logístico con $r = 1,112$ y $x_0 = 0,008$ que equivale a 8 de 1000 o al 0,8 % de la población límite (1 normalizado) tenemos $L(x) = 1,112x(1 - x)$ y los siguientes datos aproximados:

Años(n)	0	1	2	3	4	10	20	100	800 ...
Población(L^n)	0.008	0.009	0.01	0.011	0.012	0.02	0.043	0.101	0.101 ...
Población	8	9	10	11	12	20	43	101	101 ...

Tabla 2.3: La población crece proporcionalmente tanto a la población existente, como al espacio disponible ([H] pág. 5).

2.1. Análisis gráfico

Ver la trayectoria de un punto hace más comprensible el estudio de su dinámica.

Una representación gráfica conocida es el “trazo de una telaraña” (*cobweb plot*) en el plano cartesiano. Al dibujarse asemeja a una telaraña, de allí su nombre; para este se dibuja sobre el plano la recta $y = x$ que corresponde a la función identidad $Id(x) = x$ y bosquejamos la gráfica de la función f dada en el mismo plano. Ubicamos x_0 en el eje x , luego nos desplazamos verticalmente hasta $f(x_0)$, el cual queda justo en la gráfica de f ; ahora como debemos aplicar f a $f(x_0)$ necesitamos $f(x_0)$ en el eje x como punto de entrada; para esto nos movemos horizontalmente hasta interceptar $y = x$ (si f está por encima de Id , nos moveremos hacia la derecha, si f está por debajo de Id nos moveremos a la izquierda), lo cual se da en $(f(x_0), f(x_0))$ de esta forma insertamos a $f(x_0)$ como punto de entrada y repetimos el proceso sin necesidad de ir hasta el eje x .

Ejemplo 2.1.1. Sea $L : I \rightarrow I$ definida por $L(x) = 4x(1 - x)$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$, entonces las órbitas de algunos puntos iniciales se ven en las figuras 2.1 y 2.2

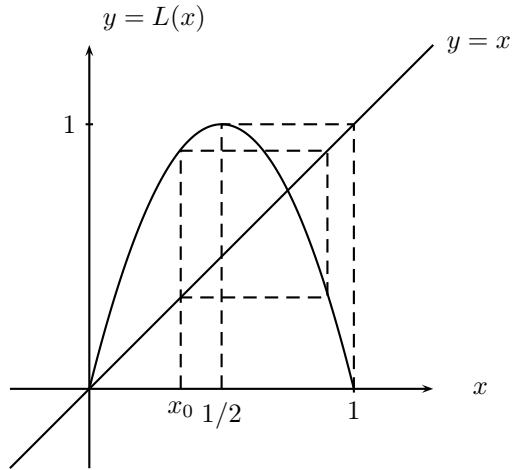


Figura 2.1: Función logística $L = 4x(1 - x)$

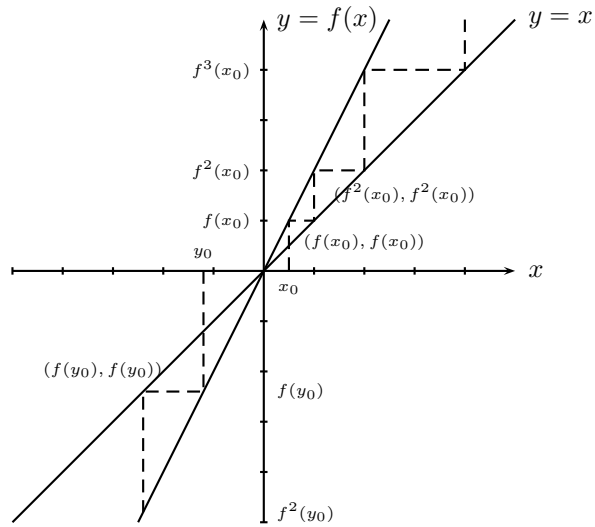


Figura 2.2: Función lineal $f(x) = 2x$

En la figura 2.1 aparece la función logística. Se ve que $o(x_0, L) = \{x_0, L(x_0)\}$ es un ciclo, pues $L^2(x_0) = x_0$. Si $x_0 = 0$ entonces $L(x_0) = 0$ luego $o(0, L) = \{0\}$, que vista como sucesión sería $o(0, L) = (0, 0, 0, \dots)$.

Las órbitas anteriores son periódica y fija respectivamente, mientras que las órbitas bajo f a excepción de $o(0, f) = \{0\}$ son asintóticamente infinitas, es decir, la sucesión

$$|x_0|, |f(x_0)|, |f^2(x_0)|, |f^3(x_0)|, \dots \text{ crece sin límite.}$$

Al conjunto de puntos que tienden hacia el infinito en valor absoluto, bajo iteración de f se conoce como el **conjunto estable del infinito** y se nota como $W^s(\infty)$.

Para la función anterior f se tiene $W^s(\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.2. Puntos fijos

Si el espacio en el que trabajamos es infinito, tendremos infinitos puntos y por ende infinitas órbitas por analizar. Para facilitar y optimizar este trabajo utilizaremos algunos conceptos y resultados sobre puntos y órbitas.

Un punto es **fijo** si al aplicar la función sobre él, no se mueve. Más formalmente:

Definición 2.2.1. *Sea $f : X \rightarrow X$ y $x_0 \in X$. Decimos que x_0 es un **punto fijo** de f si $f(x_0) = x_0$. En este caso $o(x_0, f) = \{x_0\}$.*

Como se vio en el ejemplo 2.1.1 cero es punto fijo de L y f . En la gráfica de L se ve otro punto fijo ² para hallarlo hacemos $L(x) = x$ y resolvemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 4x(1-x) = x &\implies 4x - 4x^2 - x = 0 \implies 3x - 4x^2 = 0 \\ &\implies x(3-4x) = 0 \implies x = 0 \text{ ó } 3-4x = 0. \end{aligned}$$

luego en 0 y $\frac{3}{4}$ se dan los dos únicos puntos fijos de L .

Si f está definida en un intervalo cerrado contenido en \mathbb{R} , entonces existe un punto fijo.

El siguiente teorema muestra esto.

²Geoméricamente, los puntos fijos de f corresponden a los puntos de corte de la gráfica de f con la recta $y = x$.

Teorema 2.2.1. Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado en \mathbb{R} y $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ una función continua. Entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.

Demostración. Si $f(a) = a$ o $f(b) = b$ termina la prueba. Si $f(a) \neq a$ y $f(b) \neq a$, como $f(a)$ y $f(b)$ están en $[a, b]$, entonces $f(a) > a$ y $f(b) < b$, luego $f(a) - a > 0$ y $f(b) - b < 0$. Sea $g(x) = f(x) - x$ función continua en $[a, b]$, entonces $g(b) < 0 < g(a)$, luego por T.V.I. existe un $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$, por consiguiente $f(c) = c$. \square

El siguiente teorema nos muestra condiciones suficiente para la unicidad del punto fijo.

Teorema 2.2.2. Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado en \mathbb{R} y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable que satisfice $[a, b] \subseteq f[a, b]$ y $|f'(x)| < 1 \forall x \in I$, entonces f tiene un único punto fijo. Además, si $x, y \in [a, b]$ con $x \neq y$, entonces $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

Demostración. Se probará la segunda parte y esta se utilizará para probar la primera.

Sean $x, y \in [a, b]$ con $x \neq y$ y supongamos $x < y$. Como f es derivable en $[a, b]$, entonces f es derivable en $[x, y]$, luego por TVM existe $c \in [x, y]$ tal que $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|$.

Como $[x, y] \subset [a, b]$ se tiene $|f'(c)| < 1$ por hipótesis, luego $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

Ahora, sean x_0 un punto fijo³ y $x \in [a, b] - \{x_0\}$, entonces por lo anterior se tiene

$$|x_0 - f(x)| = |f(x_0) - f(x)| < |x_0 - x|,$$

luego la distancia de x_0 a $f(x)$ es menor que la distancia entre x_0 y x . Por lo tanto $f(x) \neq x$ para todo $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$. \square

La siguiente definición es necesaria para la comprensión de la proposición que sigue.

Definición 2.2.2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Decimos que x es un **punto atrapado** si su órbita bajo f es un conjunto acotado. Al conjunto de todos los puntos atrapados lo denotamos así:

$$A(f) = \{x \mid o(x, f) \text{ está acotada}\}.$$

Proposición 2.2.1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en \mathbb{R} . Si $A(f) \neq \emptyset$, entonces f tiene un punto fijo.

³ x_0 existe por la condición $[a, b] \subset f([a, b])$ de f , ver ejercicio 2.3 inciso i).

Demostración. Supongamos que f no tiene un punto fijo, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > x \quad \text{o} \quad f(x) < x$$

- Si $f(x) > x$ veamos que $o(x, f)$ es creciente y no acotada.

Supongamos que $f^2(x) < f(x)$ y sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(y) = f(y) - y, \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

g es continua, $g(x) = f(x) - x > 0$ y $g(f(x)) = f(f(x)) - f(x) = f^2(x) - f(x) < 0$.

Por tanto, aplicando el TVI a la función g en el intervalo $[x, f(x)]$ podemos asegurar que existe un c en dicho intervalo tal que $g(c) = 0$ lo que implica $f(c) = c$ y esto contradice nuestra suposición de que f no tiene un punto fijo. Por lo tanto $f^2(x) > f(x)$ (si fuera $f^2(x) = f(x)$, $f(x)$ sería un punto fijo de f). Análogamente se prueba que $f^3(x) > f^2(x)$, $f^4(x) > f^3(x)$, ... luego se tiene:

$$x < f(x) < f^2(x) < \dots < f^n(x) < f^{n+1}(x) < \dots$$

y $o(x, f)$ es creciente.

Ahora supongamos que $o(x, f)$ es acotada, entonces por el Teorema 1.4.2 existe $y = \lim f^n(x)$ de donde $f(y) = f(\lim f^n(x))$ y puesto que f es continua se tiene:

$$f(y) = \lim f^{n+1}(x) = \lim f^n(x) = y,$$

lo que nuevamente contradice que f no tiene punto fijo. Así $o(x, f)$ no es acotada.

- Si $f(x) < x$ se puede hacer un razonamiento parecido al anterior para concluir que $o(x, f)$ es decreciente y no acotada.

Por lo anterior $\forall x \in \mathbb{R}$, $o(x, f)$ no está acotada, contradiciendo la hipótesis. □

Ejemplo 2.2.1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definida por $f(x) = \arctan x$ (ver Figura 1.1), se tiene $A(f) = \mathbb{R}$.

Note que si $x < 0$ entonces $x < f(x) < f^2(x) < f^3(x) < \dots < 0$, luego $o(x, f)$ es creciente y acotada. Ahora si $x > 0$ se tiene $x > f(x) > f^2(x) > \dots > 0$, entonces $o(x, f)$ es decreciente y acotada. Además $f(0) = \arctan 0 = 0$, luego 0 es punto fijo de f .

No todos los puntos fijos se comportan de manera parecida. Algunos se caracterizan por “atraer” y otros por “alejar” con el paso del tiempo a los puntos que se encuentran “cerca”. Un **punto fijo atractor (o sumidero)** se define como sigue.

Definición 2.2.3. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f : I \rightarrow I$ con x_0 punto fijo de f . Decimos que x_0 es un **punto fijo atractor (o sumidero)** de f si $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in V_\delta(x_0)$ se tiene $\lim f^n(x) = x_0$.

El **conjunto estable (o cuenca)** de un sumidero, está formado por los puntos que tienden hacia él, mediante la iteración de la función. Si x_0 es el sumidero, la cuenca se denota $W^s(x_0)$. Note que si $x \in W^s(x_0)$, entonces x es un punto atrapado.

Ejemplo 2.2.2. Sea $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ con f de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Se tiene $f(3) = 3$, luego 3 es punto fijo de f . Si tomamos $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ por T.V.M. existe $c_1 \in \mathbb{R}$ con c_1 entre x y 3 tal que

$$|f(x) - 3| = |f(x) - f(3)| = |f'(c_1)||x - 3|,$$

como

$$\left| f'(x) = \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

entonces

$$|f(x) - f(3)| = \frac{1}{2}|x - 3|.$$

Aplicando nuevamente TVM se encuentran c_2 y c_3 en \mathbb{R} tales que

$$|f^2(x) - f^2(3)| = |f'(c_2)||f(x) - f(3)| = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}|x - 3| \right) = \frac{1}{2^2}|x - 3|$$

y

$$|f^3(x) - f^3(3)| = |f'(c_3)||f^2(x) - f^2(3)| = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^2}|x - 3| \right) = \frac{1}{2^3}|x - 3|$$

Continuando por inducción, se obtiene que

$$|f^n(x) - f^n(3)| = \frac{1}{2^n}|x - 3|$$

ya que $f^n(3) = 3 \forall n \in \mathbb{N}$, entonces

$$|f^n(x) - 3| = \frac{1}{2^n}|x - 3|.$$

Como $\frac{1}{2} < 1$ entonces por el ejemplo 1.4.2. $\lim \frac{1}{2^n} = 0$ y como $|x - 3| > 0$ por Teorema 1.4.1. se tiene $\lim f^n(x) = 3$, luego 3 es un punto fijo atractor ⁴ de f y $W^s(3) = \mathbb{R}$. Una visualización de lo anterior se presenta en la Figura 2.3).

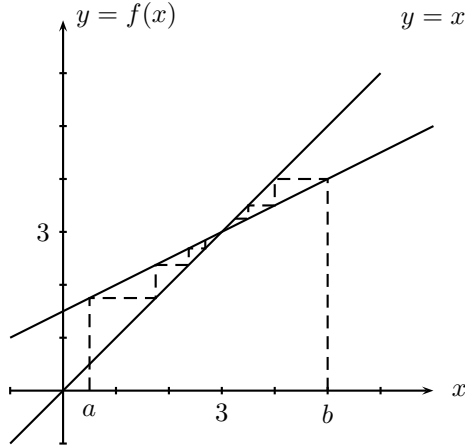


Figura 2.3: Ilustración de la atracción que ejerce 3 sobre dos puntos.

La definición de **punto fijo repulsor (o fuente)** no es la negación de la definición de punto fijo atractor, veamos:

Definición 2.2.4. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f : I \rightarrow I$ con x_0 punto fijo de f . Decimos que x_0 es un **punto fijo repulsor (o fuente)** de f si $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in V_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$, existe $n \in \mathbb{N}$ (n depende de x) tal que $f^n(x)$ no está en $V_\delta(x_0)$.

La definición dice que todos los puntos que pertenezcan a la δ -vecindad del punto fijo repulsor, excepto él mismo, “saldrán” eventualmente de ella. Note que la definición no niega que en algún momento pueden retornar (ver [H] ,pág. 98).

Ejemplo 2.2.3. Sea $f(x) = -2x + 9$ con $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se tiene $f(3) = 3$, luego 3 es punto fijo de f . Si tomamos $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ por TVM existe $c_1 \in \mathbb{R}$, con c_1 entre x y 3 tal que $|f(x) - f(3)| = |f'(c_1)||x - 3|$, como $|f'(x) = -2| = 2 \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $|f(x) - f(3)| = 2|x - 3|$.

Aplicando nuevamente TVM se encuentran c_2 y c_3 en \mathbb{R} tales que

$$|f^2(x) - f^2(3)| = |f'(c_2)||f(x) - f(3)| = 2(2|x - 3|) = 2^2|x - 3|$$

⁴En este ejemplo para cualquier $\delta > 0$ se satisfacen las condiciones de la definición 2.2.3

y

$$|f^3(x) - f^3(3)| = |f'(c_3)| |f^2(x) - f^2(3)| = 2^2|x - 3| = 2^3|x - 3|$$

Continuando por inducción se obtiene que

$$|f^n(x) - 3| = |f^n(x) - f^n(3)| = 2^n|x - 3|.$$

Como $2 > 1$, entonces $\lim 2^n = \infty$, por consiguiente $o(x, f)$ crece sin límite $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, entonces todo $x \neq 3$ se aleja de 3, luego 3 es un punto fijo repulsor⁵ (ver la figura 2.4).

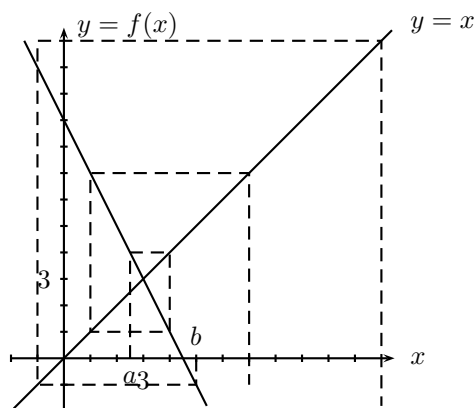


Figura 2.4: Ilustración de la influencia de 3 sobre algunos puntos. Note que las iteradas de f se alternan de un lado del 3 al otro, debido al valor negativo de f' .

Teorema 2.2.3. Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, una función de clase $C^1(I)$ ⁶. Sea $x_0 \in I$ un punto fijo de f , se tiene:

i) si $|f'(x_0)| < 1$, entonces x_0 es un punto fijo atractor,

ii) si $|f'(x_0)| > 1$, entonces x_0 es un punto fijo repulsor.

Demostración. i) Sea $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x_0)| < M < 1$; como f' es continua $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se tiene $|f'(x)| < M$. Por T.V.M. existe c entre x y x_0 tal que $|f(x) - f(x_0)| = |f'(c)| |x - x_0|$, como $c \in V_\delta(x_0)$, entonces $|f'(c)| < M$, luego $|f(x) - x_0| < M|x - x_0|$. Como $M < 1$ se tiene que la distancia de $f(x)$

⁵Nuevamente en este ejemplo para cualquier δ se cumple la definición 2.2.4.

⁶ $f \in C^1(I)$ significa que f' existe y es continua en I . Sin embargo en [H], págs. 51, 175, 176 se demuestra que el teorema es verdadero aún si f' no es continua, aunque la demostración resulta menos sencilla que si se asume la continuidad de f' .

a x_0 es menor que la distancia de x a x_0 , entonces $f(x) \in V_\delta(x_0)$ y por lo tanto $|f^2(x) - x_0| < M|f(x) - x_0| < M(M|x - x_0|) = M^2|x - x_0|$. Por inducción se tiene $\forall n \in \mathbb{N}, |f^n(x) - x_0| < M^n|x - x_0|$. Como $0 < M < 1$, entonces $\lim M^n = 0$ y dado que $|x - x_0| > 0$, se tiene $\lim f^n(x) = x_0$, luego x_0 es un punto fijo atractor.

ii) Sea $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x_0)| > M > 1$; como f' es continua $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in V_\delta(x_0)$ se tiene $|f'(x)| > M$. Por TVM existe c entre x y x_0 tal que

$$|f(x) - f(x_0)| = |f'(c)||x - x_0|,$$

como $c \in V_\delta(x_0)$, entonces $|f'(c)| > M$, luego $|f(x) - x_0| > M|x - x_0|$. Como $M > 1$ se tiene que la distancia entre $f(x)$ y x_0 es mayor que la distancia de x a x_0 , luego si $f(x)$ no está en $V_\delta(x_0)$ termina la prueba, pues bajo una iteración de f , $o(x, f)$ deja $V_\delta(x_0)$. Si $f(x) \in V_\delta(x_0)$ entonces

$$|f^2(x) - x_0| > M|f(x) - x_0| > M^2|x - x_0|,$$

y así, siempre que $f^n(x) \in V_\delta(x_0)$ se tendrá $|f^n(x) - x_0| > M^n|x - x_0|$, como $M > 1$ entonces $\lim M^n = \infty$, y puesto que $|x - x_0| > 0$, debe existir un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x)$ no está en $V_\delta(x_0)$, luego x_0 es punto fijo repulsor. \square

Observación. En el inciso (i) la relación $|f'(x_0)| = M < 1$ proporciona una estimación de la velocidad de convergencia de $f^n(x)$ a x_0 para $x \in V_\delta(x_0)$.

En caso de que $f'(x_0) = 0$ se dice que x_0 es un punto fijo **superatractivo**.

Utilizando el Teorema 2.2.3 en el Ejemplo 2.2.2 para $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ se tiene que 3 es un punto fijo atractor, pues $|f'(3)| = \frac{1}{2} < 1$.

Ahora usándolo en el Ejemplo 2.2.3 para $f(x) = -2x + 9$ se tiene que 3 es un punto fijo repulsor, pues $|f'(3)| = 2 > 1$.

Los puntos fijos cuyas derivadas en valor absoluto son diferentes de uno son llamados **puntos fijos hiperbólicos**, en ellos se encuentran sumideros y fuentes.

Si la derivada en el punto fijo es 1 ó -1 , este es llamado un **punto fijo neutral** o **no hiperbólico**. Para este tipo de puntos no se puede hacer una predicción sobre la trayectoria de puntos cercanos.

Ejemplo 2.2.4. a) Sea $f : [-1, -1] \rightarrow [-1, -1]$ definida por $f(x) = x - x^3$, se tiene entonces que 0 es punto fijo neutral de f , pues $f'(x) = 1 - 3x^2$, luego $|f'(0)| = 1$. Pero 0 se comporta como un punto fijo atractor en $[-1, 1]$ (ver la figura 2.5). En algunos libros lo llaman **atractor débil** (Ver [H], pág. 54).

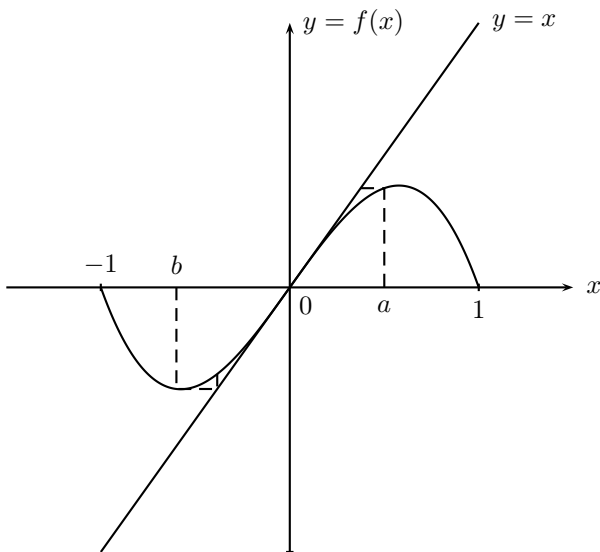


Figura 2.5: Comportamiento de $o(x, f)$ con $x \in [-1, 1] = W^s(0)$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + x^3$, entonces se tiene que 0 es punto fijo neutral de f . Pero 0 se comporta como un punto fijo repulsor, también llamado **repulsor débil** (ver la figura 2.6).

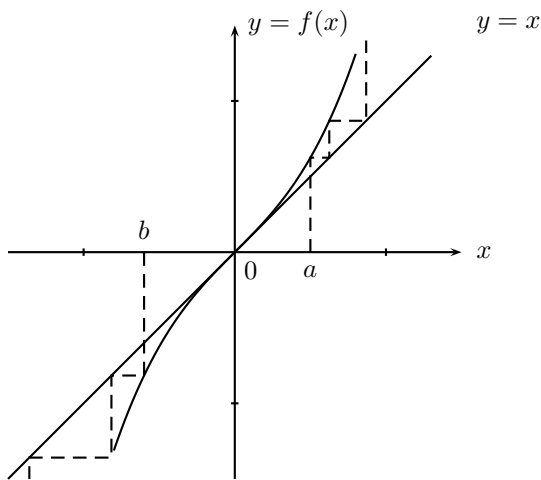


Figura 2.6: Comportamiento de algunas órbitas \mathbb{R} .

c) Sea $f(x) = e^x - 1$ con f de \mathbb{R} en \mathbb{R} . 0 es punto fijo neutral de f . Pero 0 no se

comporta como atractor ni como repulsor. La figura 2.7 muestra que $W^s(0) = (-\infty, 0]$ y $W^s(\infty) = (0, \infty)$.

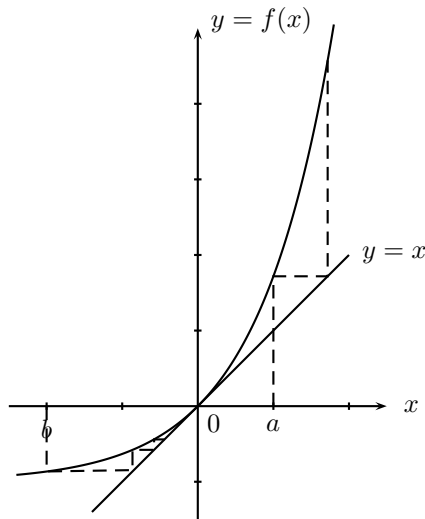


Figura 2.7: Todo $a > 0$ se aleja del 0 y todo $b < 0$ se acerca al 0.

2.3. Puntos periódicos

Un punto se llama **periódico** si después de algunos “brincos” bajo iteración de f , vuelve a su posición inicial. Formalmente:

Definición 2.3.1. Sea $f : X \rightarrow X$ y $x_0 \in X$. Decimos que x_0 es un **punto periódico** de f de periodo k , si existe $k \in \mathbb{N}$: $f^k(x_0) = x_0$ y para cada j con $1 \leq j < k$, $f^j(x_0) \neq x_0$. En este caso

$$o(x_0, f) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)\};$$

vista como conjunto esta órbita es finita con cardinal k .

De la definición anterior podemos decir que un punto periódico de f de periodo k , es un punto fijo de f^k , la k -ésima iterada de f , y que un punto fijo es un punto periódico de periodo uno.

Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotaremos $Per(f)$.

Ejemplo 2.3.1. Sea $f : I \rightarrow I$ definido por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{3}{2} - x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

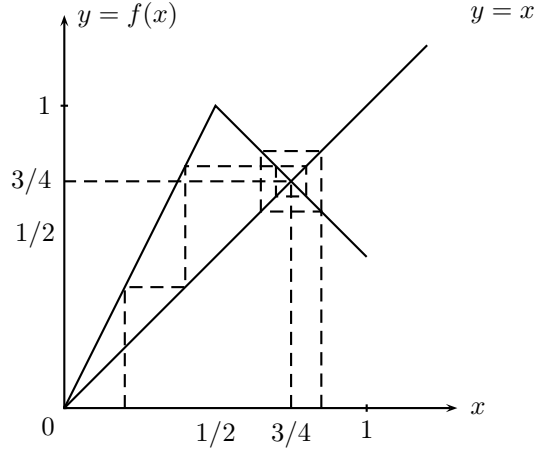


Figura 2.8: Comportamiento de algunas órbitas de I bajo f

Como $|f'(x)| = 2$ para $x \in [0, \frac{1}{2}]$ y cero es punto fijo de f , entonces cero es punto fijo repulsor de f . Por esta razón $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$ para todo $x \in (0, \frac{1}{2}]$. Dado que si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ entonces $f(x) = \frac{3}{2} - x$ y $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ implica $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} - x \leq 1$ por tanto $f^2(x) = f(\frac{3}{2} - x) = \frac{3}{2} - (\frac{3}{2} - x) = x$, luego todos los puntos de $[\frac{1}{2}, 1]$ son de periodo dos, excepto $\frac{3}{4}$ que es punto fijo. Se tiene que $Per(f) = \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 1]$.

Lema 2.3.1. *Si x es un punto periódico de f de periodo k entonces $f^m(x) = x$ si y sólo si m es múltiplo de k .*

Demostración. Supongamos que m no es múltiplo de k . Como $k, m \in \mathbb{N}$ entonces por el algoritmo de Euclides para la división $m = ks + r$ con $s, r \in \mathbb{N}$ y $0 < r < k$, luego $f^m(x) = f^{ks+r}(x) = f^{r+ks}(x) = f^r \circ f^{ks}(x) = f^r(f^{ks}(x)) = f^r(x)$. Por hipótesis $f^m(x) = x$ entonces $f^r(x) = x$ y $r < k$, lo que contradice que k sea el periodo de x entonces $k|m$.

Ahora si m es múltiplo de k , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m = nk$. Demostremos por inducción sobre n , que $f^{nk}(x) = x$.

Para $n = 1$ se tiene que $f^k(x) = x$ por hipótesis. Supongamos ahora que $f^{nk}(x) = x$ y probemos que $f^{(n+1)k}(x) = x$. Tenemos:

$$f^{(n+1)k}(x) = f^{nk+k}(x) = f^{nk}(f^k(x)) = f^{nk}(x) = x$$

por hipótesis de inducción. □

Definición 2.3.2. *Dos órbitas se dirán **distintas** si son ajenas como conjuntos, o sea que su intersección sea vacía.*

Ejemplo 2.3.2. Sea $L : I \rightarrow I$ la función logística $L(x) = 4x(1 - x)$.

i) ¿Tiene L puntos periódicos de período dos?, ¿cuántos?

ii) ¿Tiene L puntos periódicos de período tres?, ¿cuántos?

Solución. i) 0 y $\frac{3}{4}$ son puntos fijos repulsores de L . Como $L[0, 1] = [0, 1]$, $L(\frac{1}{2}) = 1$ y $L(1) = 0$ entonces $L^2(\frac{1}{2}) = 0$. Además ya que $L(a) = \frac{1}{2}$ para algún $0 < a < \frac{1}{2}$ se sigue que $L^2(a) = L \circ L(a) = L(\frac{1}{2}) = 1$.

Similarmente existe otro número b con $\frac{1}{2} < b < 1$ tal que $L(b) = \frac{1}{2}$ (L es una parábola, no es 1-1) entonces $L^2(b) = 1$.

En la figura 2.9 se ve que L^2 tiene cuatro puntos fijos; pero 0 y $\frac{3}{4}$ son puntos fijos de L , luego solo dos de los cuatro son puntos periódicos de período dos de L estos son $\frac{5-\sqrt{5}}{8}$ y $\frac{5+\sqrt{5}}{8}$ y ellos forman una sola órbita.

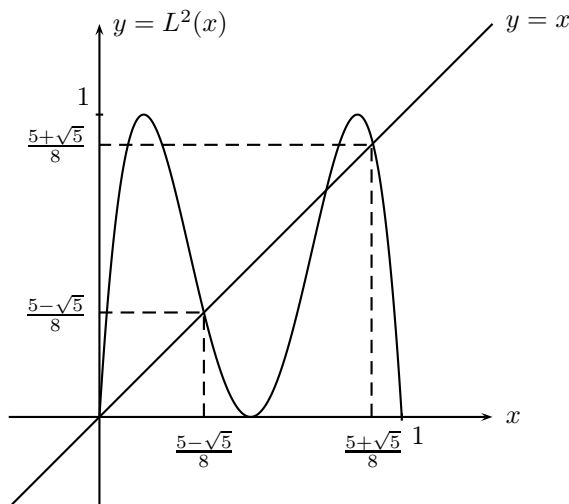


Figura 2.9: Gráfica de L^2

ii) Como $L^2(a) = 1 \Rightarrow L^3(a) = 0$ igual con b ; cómo $L^2(b) = 1 \Rightarrow L^3(b) = 0$, luego en 0 , a , $\frac{1}{2}$, b y 1 , L^3 tiene raíces, las cuales se separan por los cuatro máximos relativos que tiene L^3 en I .

Existe $a < d < \frac{1}{2}$ tal que

$$L(c) = a \Rightarrow L^2(c) = L(a) = \frac{1}{2} \Rightarrow L^3(c) = L^2(a) = L(\frac{1}{2}) = 1.$$

Análogamente para un d, e y f con $a < d < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < e < b$, $b < f < 1$.

L^3 tiene 8 puntos fijos de los cuales dos son conocidos: 0 y $\frac{3}{4}$ que son los puntos fijos de L ; los dos puntos de período dos no aparecen como puntos de período tres porque si p es de período dos, entonces $L^2(p) = p$ y $L^3(p) = L(p) \neq p$ debido a que si p es de período dos no es fijo (ver lema 2.3.1). Entonces L tiene $8 - 2 = 6$ puntos de período tres, con los cuales se forman dos órbitas de período tres.

Así como hay puntos fijos hiperbólicos, existen **puntos periódicos hiperbólicos** (atractores o repulsores), pues si x_0 es un punto periódico de f con periodo k , entonces x_0 es un punto fijo de f^k , luego la siguiente definición y el siguiente teorema no son más que una extensión de la definición y el teorema análogos para puntos fijos hiperbólicos.

Definición 2.3.3. *Sea f una función derivable y x_0 un punto periódico de f con periodo k , entonces:*

*i) si $|(f^k)'(x_0)| \neq 1$, entonces x_0 es un **punto periódico hiperbólico** de f ;*

*ii) si $|(f^k)'(x_0)| = 1$, entonces x_0 es un **punto periódico neutral o no hiperbólico** de f .*

Si x_0 es un punto periódico de período k , entonces la definición de **punto periódico atractor** y **repulsor** de f , si x_0 es el punto periódico de periodo k ; es la misma definición de punto fijo atractor y repulsor⁷ de f , tomando a x_0 como punto fijo de f^k .

Definición 2.3.4. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f : I \rightarrow I$ con x_0 punto fijo de f^k . Decimos que x_0 es un **punto periódico atractor** de f^k si $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in V_\delta(x_0)$ se tiene $\lim f^{kn}(x) = x_0$.*

Definición 2.3.5. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f : I \rightarrow I$ con x_0 punto fijo de f^k . Decimos que x_0 es un **punto periódico repulsor** de f^k si $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in V_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$, existe $n \in \mathbb{N}$ (n depende de x) tal que $f^{kn}(x)$ no está en $V_\delta(x_0)$.*

⁷Definiciones 2.2.3 y 2.2.4

Un criterio para distinguir un punto periódico hiporbólico como atractor o repulsor se presenta en el siguiente teorema. Téngase en cuenta que funciona para la derivada de la k -ésima iterada de f evaluado en x_0 y no para la k -ésima iterada de la derivada de f en x_0 . La demostración del Teorema 2.3.1 es análoga a la del Teorema 2.2.3.

Teorema 2.3.1. *Sea x_0 un punto periódico de f con periodo k , entonces:*

*i) si $|(f^k)'(x_0)| < 1$, entonces x_0 es un **punto periódico atractor** de f ;*

*ii) si $|(f^k)'(x_0)| > 1$, entonces x_0 es un **punto periódico repulsor** de f .*

Nota. x_0 es un punto periódico atractor (repulsor) de f si y sólo si es un punto fijo atractor (repulsor) de f^k . En este caso todos los puntos de $o(x_0, f)$ son puntos fijos atractores (repulsores) de f^k .

Si el punto periódico x_0 es atractor, su **conjunto estable** $W^s(x_0)$ es el conjunto de puntos que tienden hacia él bajo iteración de f^k .

Un resultado importante dice, que los conjuntos estables de puntos periódicos distintos no se intersectan, el cual se muestra a continuación.

Teorema 2.3.2. *Si $x_1, x_2 \in Per(f)$ con $x_1 \neq x_2$, entonces*

$$W^s(x_1) \cap W^s(x_2) = \emptyset.$$

Demostración. Sean k_1 y k_2 los periodos de x_1 y x_2 respectivamente.

Supongamos $W^s(x_1) \cap W^s(x_2) \neq \emptyset$, entonces existe $x \in W^s(x_1) \cap W^s(x_2)$, luego

$$x \in W^s(x_1) \text{ y } x \in W^s(x_2).$$

Por lo tanto $\lim(f^{k_1})^n(x) = x_1$ y $\lim(f^{k_2})^n(x) = x_2$.

Entonces por definición de límite de una sucesión $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{si } n \geq N_1 \text{ entonces } |x_1 - (f^{k_1})^n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

si $n \geq N_2$ entonces $|x_2 - (f^{k_2})^n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tomando $M = \max\{N_1, N_2\}$ se tiene que si $n \geq M$, entonces

$$|x_1 - (f^{k_1})^n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |x_2 - (f^{k_2})^n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por la desigualdad triangular tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq |x_1 - x_2| &= |x_1 - f^{nk_1k_2}(x) + f^{nk_1k_2}(x) - x_2| \\ &\leq |x_1 - (f^{k_1})^{nk_2}(x)| + |x_2 - (f^{k_2})^{nk_1}(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

luego $0 \leq |x_1 - x_2| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, entonces $x_1 = x_2$ (ver Teorema 1.1.1). □

Ejemplo 2.3.3. Sea $f = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{3x - x^3}{2}$, los puntos fijos son -1 , 0 y 1 . Por el Teorema 2.2.3, -1 y 1 son atractores y 0 es repulsor. Intentemos determinar las cuencas de los dos sumideros. La Figura 2.10 muestra que $I_1 = (0, \sqrt{3}) \subset W^s(1)$. Note que $f(\sqrt{3}) = 0 = f(-\sqrt{3})$. También se ve que $f(I_2 = [-2, -\sqrt{3})) = (0, 1] \subset I_1$, entonces $I_2 \subset W^s(1)$ (note que $f(-2) = 1$), luego $I_1 \cup I_2 \subset W^s(1)$.

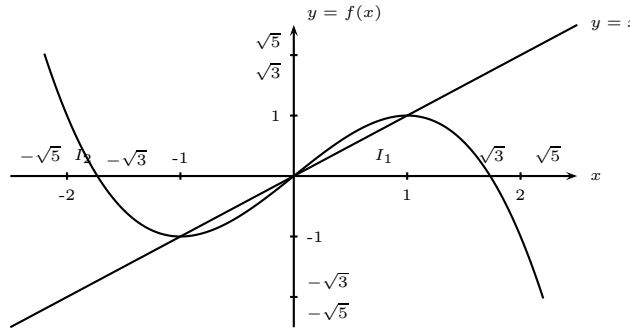


Figura 2.10: $f(x) = \frac{3x - x^3}{2}$

Hallar $W^s(1)$ completa no es sencillo porque la gráfica muestra un pequeño intervalo I_3 de puntos a la derecha del 2 que entran al intervalo I_2 , luego $I_3 \subset W^s(1)$ y también un pequeño intervalo I_4 a la izquierda de -2 tal que $f(I_4) \subseteq I_3$, luego $I_4 \subset W^s(1)$ y así sucesivamente. Estos intervalos están todos separados y los vacíos entre ellos corresponden a intervalos semejantes pertenecientes a $W^s(-1)$. Los I_n intervalos se hacen más pequeños a medida que n crece y todos ellos están entre $-\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$, ya que $f(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$ y $f(-\sqrt{5}) = \sqrt{5}$ donde ninguno está en $W^s(1)$ o $W^s(-1)$. Note que $W^s(1) \cap W^s(-1) = \emptyset$.

2.4. La función tienda T

En la esta sección presentamos una función de especial importancia para este trabajo.

La **función tienda** T con $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ se define por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2 - 2x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

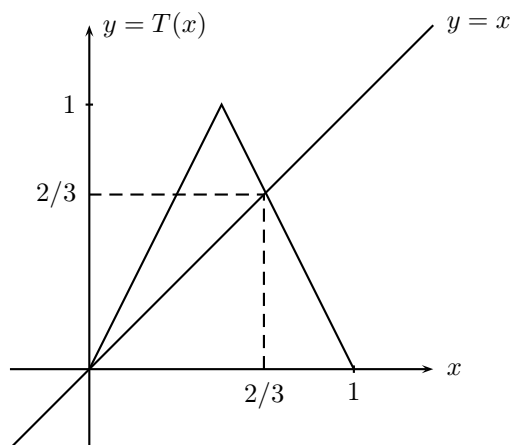


Figura 2.11: $2/3$ es punto fijo de T

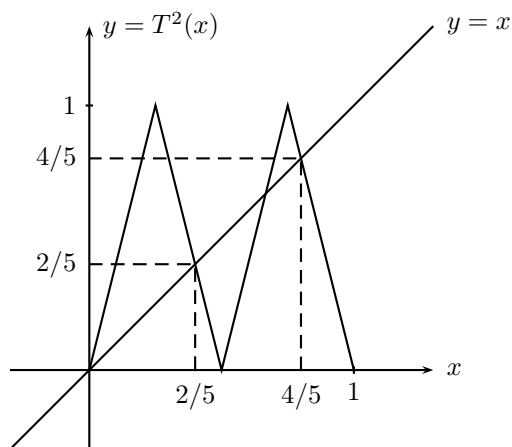


Figura 2.12: $2/5$ y $4/5$ son los puntos de periodo dos de T .

De la gráfica de T se puede deducir el porqué de su nombre.

Se ve que T^2 hace en $[0, \frac{1}{2}]$ (una tienda), lo que T hace en $[0, 1] = I$ (se tiene $T^2[0, \frac{1}{2}] = T(I) = I$), la diferencia es que la tienda es más angosta. Entonces $T^2[0, \frac{1}{2}] = T[0, 1]$ y

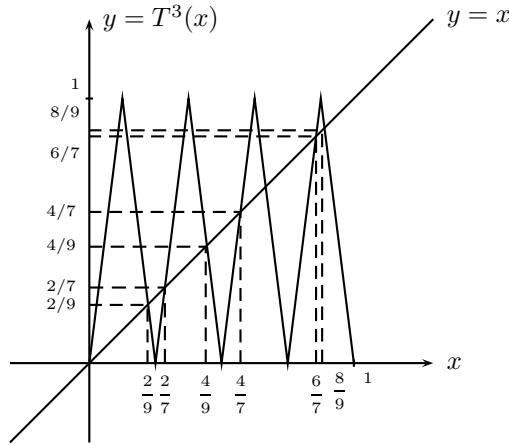


Figura 2.13: $2/9, 2/7, 4/9, 4/7, 6/7$ y $8/9$ son los puntos de periodo tres de T .

$T^2[\frac{1}{2}, 1] = T[0, 1]$, luego T^2 tiene (dos tiendas) dos picos. Ahora $[0, \frac{1}{4}] \rightarrow [0, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, 1]$ entonces $T^3[0, \frac{1}{4}] = T(I) = I$, luego T^3 hace en $[0, \frac{1}{4}]$ lo que T hace en I , con la diferencia que T^3 tiene las tiendas comprimidas en bases de longitud $\frac{1}{4}$ luego T^3 tiene (cuatro tiendas) $4 = 2^2$ picos.

Como iterar T consiste en partir la base en la mitad y sacar dos tiendas de la que había con la misma altura (1) y base igual a la mitad de la anterior, entonces T^4 tiene el doble de tiendas de T^3 con bases de longitud $\frac{1}{8}$. Entonces T^4 tiene $2^3 = 8 = 2 \times 2^2$ (tiendas) picos.

n	T^n	# de tiendas o picos	puntos fijos de T^n
1	T	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$
2	T^2	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$
3	T^3	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$
4	T^4	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
k	T^k	2^{k-1}	2^k

Tabla 2.4: T^k tiene 2^{k-1} picos (o tiendas) de altura uno, base $\frac{1}{2^{k-1}}$ y 2^k puntos fijos.

¿Cómo están repartidos los puntos periódicos de T ?

Entendiendo por T^k la k -ésima iterada de la función tienda T , tenemos lo siguiente: en cada intervalo de la forma $[\frac{j}{2^{k-1}}, \frac{j+1}{2^{k-1}}]$ con $j = 0, 1, 2, \dots, 2^{k-1} - 1$, la función T^k tiene un pico (o tienda estrecha de altura 1 y base $\frac{1}{2^{k-1}}$), luego en la “subida” hay un punto fijo y en la “bajada” otro. Entonces en cada mitad de dicho intervalo (ver figura 2.14), T^k

tiene un punto fijo y por tanto T tiene un punto periódico.

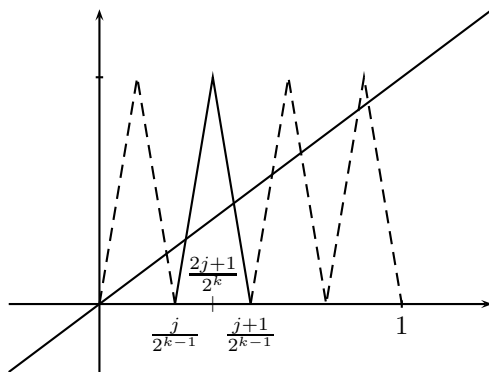


Figura 2.14: Punto medio entre $\frac{j}{2^{k-1}}$ y $\frac{j+1}{2^{k-1}}$.

El punto medio entre $\frac{j}{2^{k-1}}$ y $\frac{j+1}{2^{k-1}}$ es $\frac{\frac{j}{2^{k-1}} + \frac{j+1}{2^{k-1}}}{2} = \frac{2j+1}{2^k} = \frac{2j+1}{2^k}$. Si hacemos $l = 2j+1$ tenemos:

$$\frac{j}{2^{k-1}} = \frac{l-1}{2^k}, \quad \frac{2j+1}{2^k} = \frac{l}{2^k} \quad \text{y} \quad \frac{j+1}{2^{k-1}} = \frac{l+1}{2^k},$$

con $l = 0, 1, 2, \dots, 2(2^{k-1} - 1) = 2^k - 1$. Entonces en cada intervalo de la forma $[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]$ la función T tiene al menos un punto periódico.

Obsérvese que para cada $k \in \mathbb{N}$, el intervalo $[0, 1]$ se puede “particionar” en 2^k subintervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{2^k}$, como se muestra en la figura 2.15.

Se inicia dividiendo el intervalo $[0, 1]$ en dos subintervalos de longitud $\frac{1}{2}$: $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$, y luego, en cada paso se dividen por la mitad cada uno de los subintervalos obtenidos en el paso anterior.

¿Cuántos puntos fijos de T^{2^n} son puntos periódicos de T de periodo 2^n ?

Si tomamos las iteraciones de T que son potencias de 2, tenemos la siguiente tabla.

De $T^{2^n}(x) = x$ tenemos que el periodo de x es 2^n o un divisor de 2^n ⁸. Como 2^n tiene $n+1$ divisores que son $D_{2^n} = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^n\}$, entonces los puntos que tienen como periodo $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}\}$ son puntos fijos de $T^{2^{n-1}}$, luego la cantidad de puntos periódicos de T

⁸Ver lema 2.3.1

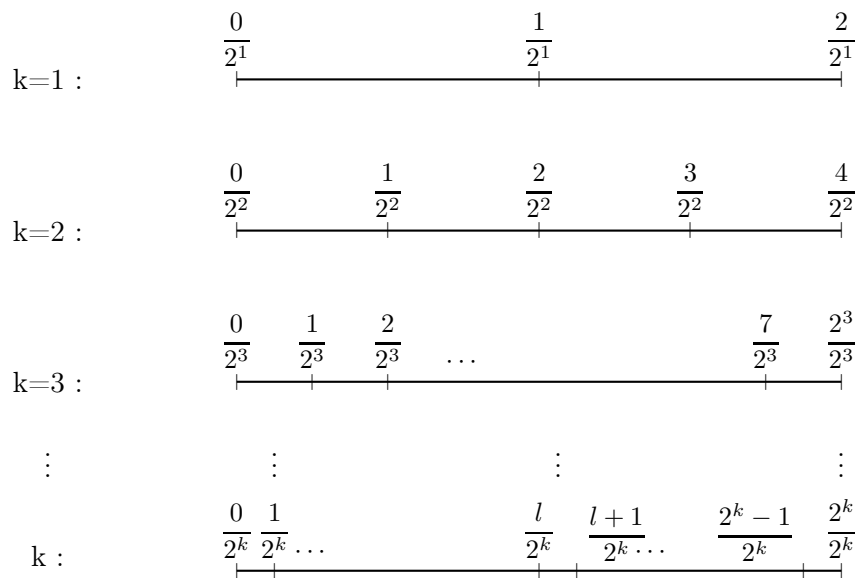


Figura 2.15: Partición de $[0, 1]$ en 2^k intervalos de la forma $\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k} \right]$.

Potencia 2^n	# de puntos fijos de T^{2^n}
$2^0 = 1$	$2 = 2^{2^0}$
$2^1 = 2$	$4 = 2^{2^1}$
$2^2 = 4$	$16 = 2^{2^2}$
$2^3 = 8$	$256 = 2^{2^3}$
\vdots	\vdots
2^k	2^{2^k}

Tabla 2.5: Todo $x \in I$ tal que $T^{2^n}(x) = x$ es punto periódico de T de período 2^n o menor (divisor de 2^n).

de periodo 2^n es

$$|\{\text{puntos fijos de } T^{2^n}\}| - |\{\text{puntos fijos de } T^{2^{n-1}}\}| = 2^{2^n} - 2^{2^{n-1}}.$$

Ahora podemos ampliar la tabla 2.5 con una casilla para el número de puntos periódicos de periodo 2^n , como se muestra a continuación:

Potencia 2^n	iterada T^{2^n}	# puntos fijos de T^{2^n}	# puntos 2^n -periódicos de T	# órbitas distintas de período 2^n
2^0	T	2^{2^0}	$2^{2^0} = 2$	2
2^1	T^2	2^{2^1}	$2^{2^1} - 2^{2^0} = 2$	1
2^2	T^4	2^{2^2}	$2^{2^2} - 2^{2^1} = 12$	3
2^3	T^8	2^{2^3}	$2^{2^3} - 2^{2^2} = 240$	30
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
2^k	T^{2^k}	2^{2^k}	$2^{2^k} - 2^{2^{k-1}}$	$(2^{2^k} - 2^{2^{k-1}})/2^k$

Tabla 2.6: Note que en el primer renglon de la columna de # puntos 2^n -periódicos de T no se tomó $2^{2^{0-1}}$ ya que esta potencia de 2 no es \mathbb{N} .

¿Cuántas órbitas distintas de periodo tres tiene T ?

Las figuras 2.11 y 2.13 muestran T y T^3 . Observe que los puntos fijos de T aparecen como puntos fijos de T^3 (uno divide a todo natural por tanto los puntos fijos de una función aparecerán como puntos periódicos de cualquier periodo); luego se podrían tomar erróneamente como puntos periódicos de T de periodo 3.

De los ocho puntos fijos de T^3 , dos son puntos fijos de T , entonces hay exactamente seis $(8 - 2)$ puntos periódicos de T de periodo tres. Como

$$T^3(x) = \begin{cases} 8x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{8}], \\ -8x + 2 & \text{si } x \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}], \\ 8x + 2 & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{8}], \\ -8x + 4 & \text{si } x \in [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}], \\ 8x + 4 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}], \\ -8x + 6 & \text{si } x \in [\frac{5}{8}, \frac{3}{4}], \\ 8x + 6 & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, \frac{7}{8}], \\ -8x + 8 & \text{si } x \in [\frac{7}{8}, 1]. \end{cases}$$

entonces resolviendo $T^3(x) = x$ se obtiene

$$0, \frac{2}{9}, \frac{2}{7}, \frac{4}{9}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{6}{7} \text{ y } \frac{8}{9}.$$

Ya que 0 y $\frac{2}{3}$ son soluciones de $T(x) = x$ entonces los seis puntos periódicos de T de periodo 3 son

$$\frac{2}{9}, \frac{2}{7}, \frac{4}{9}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7} \text{ y } \frac{8}{9}.$$

Además $T(\frac{2}{9}) = \frac{4}{9}$, $T(\frac{4}{9}) = \frac{8}{9}$ y $T(\frac{8}{9}) = \frac{2}{9}$ luego $o(\frac{2}{9}, T) = \{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\}$, y como $T(\frac{2}{7}) = \frac{4}{7}$, $T(\frac{4}{7}) = \frac{6}{7}$ y $T(\frac{6}{7}) = \frac{2}{7}$, entonces $o(\frac{2}{7}, T) = \{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\}$. Como $o(\frac{2}{9}, T) \cap o(\frac{2}{7}, T) = \emptyset$, se tiene que son las dos órbitas periódicas distintas de periodo tres.

Para saber si estos son puntos periódicos hiperbólicos de T derivamos T^3 . Entonces

$$(T^3)'(x) = \begin{cases} 8 & \text{si } x \in (0, \frac{1}{8}) \cup (\frac{1}{4}, \frac{3}{8}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{5}{8}) \cup (\frac{3}{4}, \frac{7}{8}), \\ -8 & \text{si } x \in (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{8}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{5}{8}, \frac{3}{4}) \cup (\frac{7}{8}, 1). \end{cases}$$

y $|(T^3)'(x)| = 8 > 1$ para $x \in \{\frac{2}{9}, \frac{2}{7}, \frac{4}{9}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}\}$. Luego los seis puntos periódicos de T de periodo tres son puntos periódicos repulsores de T .

2.5. Puntos eventualmente fijos y eventualmente periódicos

Un punto se llama **eventualmente fijo**, si después de n “brincos” no se mueve más; y **eventualmente periódico** si después de n “brincos” su trayecto se vuelve cíclico o dicho de otro modo, se vuelve periódico. Formalmente:

Definición 2.5.1. Sea $f : X \rightarrow X$ y $x_0 \in X$, x_0 es un punto **eventualmente fijo**⁹ de f si existe N tal que $f^{n+1}(x_0) = f^n(x_0)$ siempre que $n \geq N$.

En este caso la órbita vista como conjunto es finita y se ve así:

$$o(x_0, f) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

⁹En [M2], pág 13 se excluyen los puntos fijos de la definición, para hablar de los que se vuelven fijos después de algún tiempo.

y como sucesión

$$o(x_0, f) = (x_0, x_1, \dots, x_N, x_N, x_N, \dots) \text{ converge a } x_N.$$

Ejemplo 2.5.1. En el ejemplo 2.1.1 para $L(x) = 4x(1 - x)$, $\frac{1}{2}$ no es punto fijo de L pero después de dos iteraciones se fija en 0 pues $L(\frac{1}{2}) = 1$ y $L^2(\frac{1}{2}) = L(1) = 0$, como 0 es punto fijo de L se tiene que si $n \geq 2$ entonces $L^{n+1}(\frac{1}{2}) = L^n(\frac{1}{2})$, luego $\frac{1}{2}$ es un punto eventualmente fijo de L y su órbita $o(\frac{1}{2}, L) = \{\frac{1}{2}, 1, 0\}$ es finita. Por esto no se debe deducir que la imagen de 0 es $\frac{1}{2}$, osea que la órbita es cíclica, o que $\frac{1}{2}$ es un punto periódico de periodo tres. La órbita como sucesión sería

$$o\left(\frac{1}{2}, L\right) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, \dots\right) \longrightarrow 0.$$

Definición 2.5.2. Sea $f : X \longrightarrow X$ y $x_0 \in X$, x_0 es un punto *eventualmente periódico*¹⁰ de f con periodo m , si existe N tal que $f^{n+m}(x_0) = f^n(x_0)$ siempre que $n \geq N$.

En este caso la órbita como conjunto es finita y se ve como sigue:

$$o(x_0, f) = \{x_0, x_1, \dots, x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots, x_{N+m-1}\}$$

y cómo sucesión

$$o(x_0, f) = (x_0, x_1, \dots, x_N, x_{N+1}, \dots, x_{N+m-1}, x_N, x_{N+1}, \dots, x_{N+m-1}, \dots)$$

diverge.

Nota. x_0 es eventualmente fijo si y sólo si es eventualmente periódico de periodo $m = 1$.

Ejemplo 2.5.2. Sea $f : I \longrightarrow I$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{3}{2} - x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Si $A = \{\text{puntos eventualmente fijos de } f, \text{ no fijos}\}$ ¹¹ entonces $A \subseteq (0, \frac{1}{2})$ (ver Figura 2.8), luego $(0, \frac{1}{2}) \setminus A$ es el conjunto de puntos eventualmente periódicos de f (no periódicos), pues bajo iteración de f se van a $[\frac{1}{2}, 1] \setminus \{\frac{3}{4}\}$ donde todos son puntos periódicos de período

¹⁰ibid

¹¹ver ejercicio refer11

dos. Por ejemplo, para $x = \frac{1}{4}$, $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$, $f^2(\frac{1}{4}) = 1$ y $f^3(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$, luego $\frac{1}{4}$ es un punto eventualmente periódico de período $m = 2$ ya que $f^{n+2}(\frac{1}{4}) = f^n(\frac{1}{4})$ para $n \geq 1$, su órbita como sucesión sera

$$o\left(\frac{1}{4}, f\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \dots\right).$$

2.6. Puntos asintóticamente fijos y asintóticamente periódicos

Un punto es asintóticamente fijo, si este se acerca a un punto fijo a medida que se itera la función.

Definición 2.6.1. Sea $f : I \rightarrow I$; $x \in I$ es un **punto asintóticamente fijo** de f y su órbita es **asintóticamente fija** si existe $x_0 \in I$, con x_0 punto fijo de f tal que $\lim f^n(x) = x_0$.

Nótese que si x es asintóticamente fijo, entonces $x \in W^s(x_0)$, y que $o(x, f)$ vista como sucesión converge a x_0 . Además los puntos fijos o eventualmente fijos, son puntos asintóticamente fijos.

En el ejemplo 2.2.2 vimos que 3 es un punto fijo atractor con $W^s(3) = \mathbb{R}$, luego \mathbb{R} es el conjunto de puntos asintóticamente fijos.

Ejemplo 2.6.1. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = \frac{-x}{2} + \frac{9}{2}$.

Se tiene que $g(3) = 3$, luego 3 es punto fijo de g y cómo $|g'(3)| < 1$, entonces 3 es un punto fijo atractor. Por un razonamiento análogo al del ejemplo 2.2.2, se llega a $\lim g^n(x) = 3 \forall x \in \mathbb{R}$, luego todo $x \in \mathbb{R}$ es punto asintóticamente fijo (ver la figura 2.16).

Las órbitas que convergen a una órbita periódica (en el sentido de la definición 2.6.2), se llaman órbitas asintóticamente periódicas y sus puntos son asintóticamente periódicos.

Definición 2.6.2. Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in I$ es un **punto asintóticamente periódico** de f si existe $x_0 \in Per(f)$ tal que $\lim |f^j(x) - f^j(x_0)| = 0$.

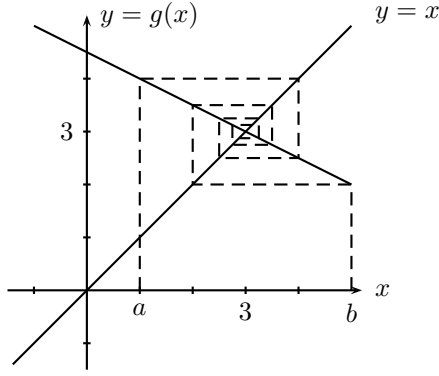


Figura 2.16: $o(x, f)$ se alterna de un lado al otro del 3 debido al signo negativo de g' .

Recuerde que $o(x_0, f)$ es finita y cíclica.

Si el período de x_0 es k , entonces $o(x, f^k) = (x, f^k(x), f^{2k}(x), f^{3k}(x), \dots)$ converge a x_0 , pues si x es asintóticamente periódico bajo f a $o(x_0, f)$, entonces x es asintóticamente fijo para f^k . En otras palabras $\lim (f^k)^n(x) = x_0$. Tenemos entonces el siguiente teorema:

Teorema 2.6.1. *Si $f : I \rightarrow I$ con $I \in \mathbb{R}$ y $x \in I$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i) $\exists x_0 \in \text{Per}(f)$ tal que $\lim |f^j(x) - f^j(x_0)| = 0$.

ii) $\exists x_0 \in \text{Per}(f)$ tal que $\lim (f^k)^n(x) = x_0$, donde k es el período de x_0 .

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$. Por definición de límite de una sucesión se tiene $\forall \varepsilon > 0 \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\forall j \geq k_\varepsilon$ se cumple $||f^j(x) - f^j(x_0)| - 0| = |f^j(x) - f^j(x_0)| < \varepsilon$.

Por la propiedad arquimediana $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 k \geq k_\varepsilon$ donde k es el período de x_0 , luego $\forall n \geq n_0$ se tiene $|f^{nk}(x) - f^{nk}(x_0)| < \varepsilon$ y cómo $f^{nk}(x_0) = x_0$, entonces $|f^{nk}(x) - x_0| < \varepsilon$, por consiguiente $\lim (f^k)^n(x) = x_0$.

$ii) \Rightarrow i)$. Por definición de límite de una sucesión se tiene que $\forall \varepsilon > 0 \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq k_\varepsilon$ se cumple $|f^{nk}(x) - x_0| < \varepsilon$. Si hacemos $j = kn \forall n \geq k_\varepsilon$, se tiene $j \geq k_\varepsilon$, entonces $|f^j(x) - f^j(x_0)| < \varepsilon$. Ya que $f^j(x_0) = x_0$ y cómo $|f^j(x) - f^j(x_0)| = ||f^j(x) - f^j(x_0)| - 0|$, concluimos que $\lim |f^j(x) - f^j(x_0)| = 0$. \square

Nota. Si x_0 es un punto periódico atractor, y si $x \in W^s(x_0)$, entonces x es un punto

asintóticamente periódico, pues si $x = x_0$ o x es un punto eventualmente periódico, se puede decir que x es asintóticamente periódico.

Ejemplo 2.6.2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 1$. Tenemos $x_0 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ son los dos puntos fijos de f . Al resolver $f^2(x) = x$ obtenemos cuatro soluciones de las cuales dos son soluciones de $f(x) = x$, luego f tiene dos puntos periódicos de período dos: -1 y 0 . Como $f^2(x) = x^4 - 2x^2$ tenemos $(f^2)'(x) = 4x^3 - 4x$, luego $(f^2)'(-1) < 1$ y $(f^2)'(0) < 1$ y por el Teorema 2.3.1 se tiene que -1 y 0 son puntos periódicos atractores de f , entonces $W^s(-1) \cup W^s(0)$ es un conjunto de puntos asintóticamente periódicos de f . En la figura 2.17 se ve que $(2x_0, x_0) \cup (-x_0, -2x_0) \subseteq W^s(-1)$ y $(x_0, -x_0) \subseteq W^s(0)$.

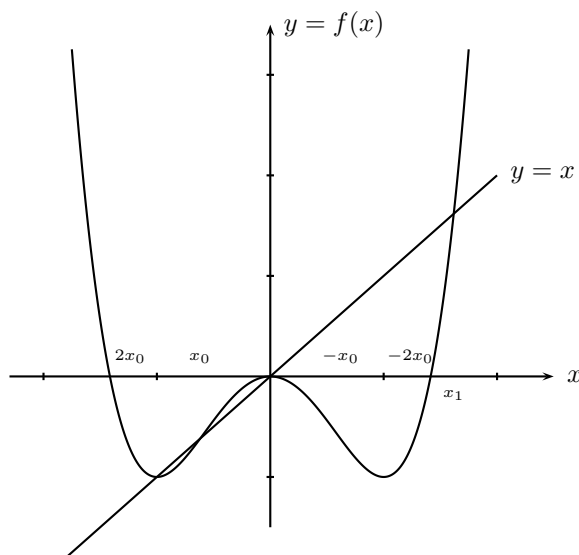


Figura 2.17: Gráfica de $f^2 = x^4 - 2x^2$.

2.7. Puntos aperiódicos

Un punto es aperiódico si su comportamiento bajo f no es ninguno de los ya vistos, es decir:

Definición 2.7.1. Sea $f : X \rightarrow X$, con $x \in X$, decimos que x es un **punto aperiódico** de f , o que tiene **órbita aperiódica**, si x no es punto periódico, ni eventualmente periódico, ni asintóticamente periódico.

Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, $x \in X$. Entonces $o(x, f)$ es acotada si x es periódico, eventualmente periódico o asintóticamente periódico. Luego si f no tiene puntos fijos en X , de la Proposición 2.2.1 se deduce que $A(f) = \emptyset$, es decir no existe $x \in X$ donde $o(x, f)$ este acotada, entonces f no tiene puntos periódicos, ni eventualmente periódicos, ni asintóticamente periódicos, solo tiene puntos aperiódicos con órbitas no acotadas.

Ejemplo 2.7.1. La función de \mathbb{R} en \mathbb{R} definida por $f(x) = x + 2$, claramente no tiene puntos fijos, por lo tanto todos los puntos de su domonio son aperiódicos.

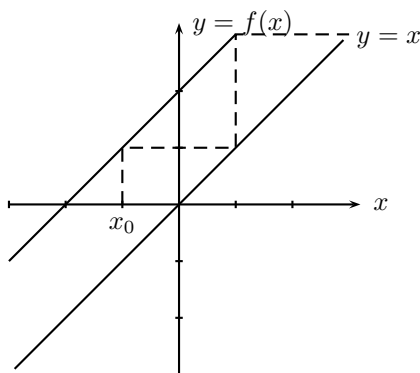


Figura 2.18: Todas las órbitas $o(x, f)$ son no acotadas.

En la sección 2.3 se mostró que los seis puntos periódicos de T de período tres eran repulsores y los dos puntos fijos de T , también son repulsores. Cómo se verá en el capítulo 3, en la parte de sensibilidad T no puede tener puntos periódicos atractores, entonces todos los puntos periódicos de T son repulsores y a su vez forman un conjunto denso¹² en I . Entonces si tomamos un punto $x \in I$, que no sea periódico o eventualmente periódico (no será asintóticamente periódico, por el caracter repulsivo de los puntos periódicos), la $o(x, f)$ debe alejarse de los puntos periódicos que tiene cerca (están por todas “lados”, pues $Per(T)$ es denso en I como se verá en el capítulo 3) y $o(x, f) \subseteq I$; entonces $o(x, f)$ pasa por todas “partes”, alejándose de lo periódico, presentando un comportamiento irregular todo el tiempo. Luego x es un punto aperiódico y su órbita $o(x, f)$ está acotada. Concluimos que existen puntos aperiódicos con órbitas acotadas.

¹²Ver la sección 1.8. y la proposición 3.1.2

2.8. Ejercicios resueltos

En esta sección se resuelven algunos ejercicios propuestos en [M1] y [M2].

Er 2.1. Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $f : X \rightarrow X$ una función en X . Mostrar que:

a) $f^n \circ f^m = f^{n+m}$;

b) $(f^n)^m = f^{nm}$;

c) $f^n \circ f^m = f^m \circ f^n$ (conmutatividad de composición entre iteradas de f);

d) $(f^n)^m = (f^m)^n$.

Demostración. a) Consideremos $n \leq m$; por definición de composición o iteración de f tenemos:

$$f^0 = id, f^1 = f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f^2, \dots, f^k = f \circ f^{k-1} \text{ con } k \in \mathbb{N},$$

entonces

$$f^{n+m} = f \circ f^{n+m-1} = f \circ f \circ f^{n+m-2} = f \circ f \circ f \circ f^{n+m-3} = \dots = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-veces}} \circ f^{n+m-n} = f^n \circ f^m.$$

$$b) (f^n)^m = \underbrace{f^n \circ f^n \circ f^n \circ \dots \circ f^n}_{m\text{-veces}} = \overbrace{f^{n+n+\dots+n}}^{m\text{-veces}} = f^{nm}.$$

c) Como $n + m = m + n$ y $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k\text{-veces}}$; se tiene que $f^{n+m} = f^{m+n}$

y por el inciso a) se concluye que

$$f^n \circ f^m = f^m \circ f^n.$$

d) Análogo al inciso c) por la conmutatividad del producto de naturales y por definición de composición de f con si misma se tiene que $f^{nm} = f^{mn}$ y por b) se obtiene

$$(f^n)^m = (f^m)^n. \quad \square$$

Er 2.2. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $[a, b]$ y $[c, d]$ dos intervalos tales que $[c, d] \subset f([a, b])$. Demostrar que existe un subintervalo de $[a, b]$, digamos $[e, h]$, tal que $f([e, h]) = [c, d]$.

Demostración. Como $[c, d] \subset f([a, b])$ existen α y $\beta \in [a, b]$ tales que $f(\alpha) = c$ y $f(\beta) = d$. Consideremos el caso en que $\alpha < \beta$. Pueden existir puntos diferentes en $[\alpha, \beta]$ tales que al aplicarles f caen en c (podrían existir $x < \alpha$ tales que $f(x) = c$, pero nos interesa sacar el más pequeño intervalo tal que al aplicarle f de $[c, d]$).

Sea

$$A = \{x \in [\alpha, \beta] : f(x) = c\} = [\alpha, \beta] \cap f^{-1}(c).$$

Como A es cerrado (dado que es intersección de cerrados) y acotado entonces tiene máximo y mínimo. Sea $e = \max A$; como f es continua en $[e, \beta]$, $f(e) = c$ y $f(\beta) = d$, entonces dado $y \in [c, d]$ existe por el TVI un $x \in [e, \beta]$ tal que $f(x) = y$ entonces $y \in f([e, \beta])$ luego $[c, d] \subset f([e, \beta])$. Sea ahora,

$$B = \{x \in [e, \beta] : f(x) = d\} = [e, \beta] \cap f^{-1}(d).$$

Como B es cerrado y acotado entonces tiene máximo y mínimo. Sea $h = \min B$, veamos que $f([e, \beta]) \subset [c, d]$.

Si $f(x) \in f([e, \beta])$ con $x \in [e, h]$, luego $e \leq x \leq h$ y si $x = e$, entonces $f(x) = c \in [c, d]$ o si $x = h$, entonces $f(x) = d \in [c, d]$.

Ahora si $e < x < h$, entonces $f(x) \neq c$ y $f(x) \neq d$ en esta parte se tienen tres casos para $f(x)$.

1. Si $c < f(x) < d$ entonces $f(x) \in [c, d]$ y termina la prueba.
2. Si $f(x) < c$. Como $c < d = f(h)$ y f es continua en $[x, h]$ por el TVI existe $y \in [x, h]$ tal que $f(y) = c$ y $\alpha \leq e < x \leq y \leq h \leq \beta$, entonces $y \in [\alpha, \beta]$ $e < y$ lo que contradice que $e = \max A$.
3. Si $d < f(x)$. Como $f(e) = c < d < f(x)$ y f es continua en $[e, x]$ por el TVI existe $y \in [e, x]$ tal que $f(y) = d$, entonces $e \leq y \leq x < h < \beta$, luego $y \in [e, \beta]$ y $f < y$ contradiciendo la elección de h .

Entonces $f([e, h]) \subseteq [c, d]$. Recíprocamente sea $y \in [c, d]$ entonces $f(e) = c \leq y \leq d = f(h)$ y como f es continua en $[e, h]$, por el TVI existe $x \in [e, h]$ tal que $f(x) = y$, entonces $y \in f([e, h])$, luego $[c, d] \subseteq f([e, h])$ y por tanto $f([e, h]) = [c, d]$. \square

Er 2.3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Demostrar:

i) si $[a, b] \subseteq f([a, b])$ entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.

ii) Si $[a, b] \supseteq f([a, b])$ entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.

Demostración. i) Como $[a, b] \subseteq f([a, b])$ existen c y d en $[a, b]$ tal que $f(c) = a$ y $f(d) = b$, Si $c = a$ o $d = b$ ya se tendría un punto fijo; de lo contrario $a < c < b$ y $a < d < b$.

Si definimos $g(x) = f(x) - x$ entonces $g(c) = f(c) - c < 0$ ya que $f(c) = a$ y $a < c$, análogamente $g(d) = f(d) - d > 0$ ya que $f(d) = b$ y $b > d$.

Como g es continua (diferencia de continuas) y $g(c) < 0 < g(d)$ se tiene por el TVI que existe un e entre c y d tal que $g(e) = 0$, entonces $g(e) = f(e) - e = 0$, luego $f(e) = e$.

ii) Ya que $f([a, b]) \subseteq [a, b]$, si $f(a) = a$ o $f(b) = b$ ya estaría la prueba.

Si $f(a) \neq a$ y $f(b) \neq b$, entonces $f(a) > a$ pues $f(a) \in [a, b]$ y $f(b) < b$ ya que $f(b) \in [a, b]$.

Definamos $g(x) = f(x) - x$. Dado que las funciones f e Id son continuas, g es continua.

Como $g(a) = f(a) - a > 0$ y $g(b) = f(b) - b < 0$ por el TVI existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$ entonces $f(c) = c$. \square

Er 2.4. Supongamos que para algún $x \in X$ se tiene que $\lim f^n(x) = x_0$ con $x_0 \in X$ y $f : X \rightarrow X$. Demostrar que x_0 es un punto fijo de f .

Demostración. Por hipótesis $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ converge a x_0 , entonces $(f^{n+1}(x))_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ subsucesión de $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, converge a x_0 .

Por lo anterior y por la continuidad de f se tiene que

$$\lim f^n(x) = x_0 = \lim f^{n+1}(x) = \lim f \circ f^n = f(\lim f^n(x)) = f(x_0)$$

luego $f(x_0) = x_0$, entonces x_0 es punto fijo de f . \square

Er 2.5. Sea $f : I[0, 1] \longrightarrow I$ definida por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Probar que todas las órbitas en $I \setminus \{\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ son de período dos.

Prueba. Al hacer $f(x) = x$ tenemos

$$\sqrt{1 - x^2} = x \Rightarrow 1 - x^2 = x^2 \Rightarrow 1 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}},$$

como $x \in [0, 1]$, entonces $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ es el único punto fijo de f .

Para hallar los puntos de período dos de f hacemos $f^2(x) = x$ y resolvemos de la siguiente forma:

$$f^2(x) = \sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^2})^2} = \sqrt{1 - (1 - x^2)} = \sqrt{x^2} = x;$$

luego $f^2(x) = x \forall x \in [0, 1]$ entonces los puntos periódicos de f de período dos son todos los del conjunto $[0, 1] \setminus \{\frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

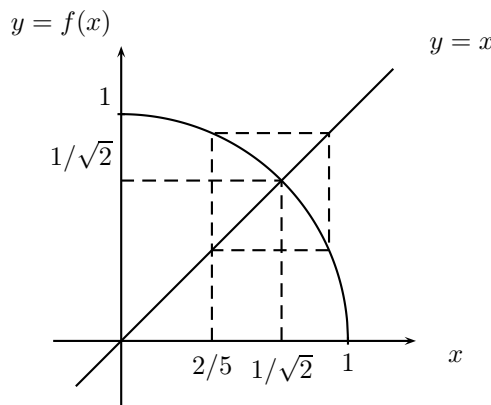


Figura 2.19: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Er 2.6. Mostrar una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} que tenga un punto fijo en $x = 1$ tal que las órbitas de todos los puntos (excepto 1) no converjan a él.

Solución. Una recta que pase por el punto $(1, 1)$ y que tenga pendiente $m > 1$. tendría la forma

$$f(x) = mx + 1 - m;$$

$$f^2(x) = m(mx + 1 - m) + 1 - m = m^2x + 1 - m^2;$$

\vdots

$$f^n(x) = m^n x + 1 - m^n = m^n(x - 1) + 1,$$

entonces

$$\lim f^n(x) = \lim m^n(x-1) + 1 = (x-1) \lim m^n + 1.$$

Como $m > 1$ se obtiene que $\lim m^n = \infty$, luego

$$\lim f^n(x) = \pm\infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Er 2.7. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e inyectiva, $[a, b]$ y $[c, d]$ dos intervalos tales que $[c, d] \subset f([a, b])$ y $[a, b] \subset f([c, d])$ con $[c, d] \cap [a, b] = \emptyset$. Demostrar que f tiene un punto periódico de periodo dos.

Demostración. Por hipótesis $[c, d] \subset f([a, b])$ entonces por el ejercicio 2.2 $\exists [e, h] \subset [a, b]$ tal que $f([e, h]) = [c, d]$ y como $[a, b] \subset f([c, d])$, entonces $[e, h] \subset [a, b] \subset f([c, d])$ luego $[c, d] = f([e, h]) \subset f([a, b]) \subset f^2([c, d])$ por tanto $[c, d] \subset f^2([c, d])$ y por el ejercicio 2.3 inciso i) f^2 tiene un punto fijo en $[c, d]$, luego $\exists x_0 \in [c, d] : f^2(x_0) = x_0$.

Ahora, si suponemos $f(x_0) = x_0$, como $x_0 \in [c, d]$, entonces $f(x_0) \in [c, d] = f([e, h])$ esto a su vez implica que $x_0 \in [e, h] \subseteq [a, b]$ es decir que $x_0 \in [a, b]$, luego $[a, b] \cap [c, d] \neq \emptyset$, lo que contradice la hipótesis, por lo tanto x_0 es un punto periódico de f de periodo dos. \square

Er 2.8. Sea J un intervalo en \mathbb{R} y $f : J \rightarrow J$ una función tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ $\forall x, y \in J$ donde $c \in \mathbb{R}$ tal que $0 < c < 1$. Demostrar que :

- i) f es uniformemente continua en J .
- ii) Existe a lo más un punto fijo en J .
- iii) Si existe un punto fijo en J entonces $o(x, f)$ es convergente a dicho punto fijo $\forall x \in J$.

Demostración. i) Dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{c} > 0$ y si $x, y \in J$ satisfacen

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq c|x - y| < c\delta = c \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon,$$

entonces f es uniformemente continua (f es una función de Liptchiz).

ii) Si J es cerrado o si f se puede restringir a un $K \subset \mathbb{R}$ con K cerrado tal que $f|_K : K \rightarrow K$ entonces por el Teorema 2.2.1 f tiene un punto fijo. Sea este x , entonces por

hipótesis $|f(x) - f(y)| = |x - f(y)| \leq c|x - y|$, como $0 < c < 1$ se tiene $|x - f(y)| < |x - y|$, luego la distancia entre $f(y)$ y x es menor que la distancia entre y y x . Por tanto $f(y) \neq y \forall y \in J \setminus \{x\}$, y x será el único punto fijo de f .

Nota. Obsérvese que f podría no tener punto fijo, por ejemplo $f : (0, b] \rightarrow (0, b]$ con $b < \frac{1}{2}$ y $f(x) = x^2$, f no tiene punto fijo en $(0, b]$ y sin embargo

$$|f(x) - f(y)| \leq 2b|x - y| \forall x, y \in (0, b] \text{ con } 0 < c = 2b < 1.$$

iii) Sea x_0 el único punto fijo de f , por hipótesis se tiene

$$|f(x) - x_0| = |f(x) - f(x_0)| \leq c|x - x_0|.$$

Como $0 < c < 1$ entonces $f(x)$ está más cerca a x_0 que x .

Aplicando nuevamente la hipótesis a $f(x)$ tenemos

$$|f^2(x) - x_0| = |f^2(x) - f^2(x_0)| \leq c|f(x) - f(x_0)| \leq c^2|x - x_0|$$

entonces $|f^2(x) - x_0| \leq c^2|x - x_0|$ luego $f^2(x)$ está más cerca a x_0 que a x . Así, por inducción se tiene $|f^n(x) - x_0| \leq c^n|x - x_0|$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ya que $|x - x_0| > 0$ y $0 < c < 1$, entonces $\lim c^n = 0$, luego $\lim f^n(x) = x_0$, así $o(x, f) \rightarrow x_0 \forall x \in J$. \square

Er 2.9. Mostrar que la cardinalidad de $o(x, f)$ es finita si y sólo si x es un punto periódico o eventualmente periódico de f .

Demostración. Si $o(x, f) = \{x, f(x), \dots, f^k(x)\}$ para algún $k \geq 0$, entonces $f^{k+1}(x) = f^N(x)$ para algún $N \in \{0, 1, \dots, k\}$. Se presentan dos casos, $N = 0$ o $N \neq 0$.

1. Si $N = 0$ entonces $f^{k+1}(x) = f^0(x) = x$. Como $f^j(x) \neq x$ para cada j con $1 \leq j \leq k$ entonces x es un punto periódico (de periodo $k + 1$).
2. Si $N \neq 0$ entonces $N \in \{1, 2, \dots, k\}$. Si $k + 1 > N$ entonces $k + 1 = N + m$ para algún $m > 0$ y se tiene que

$$f^{k+1}(x) = f^{N+m}(x) = f^N(x) \Rightarrow f^{(N+1)+m}(x) = f^{N+1}(x), f^{(N+2)+m}(x) = f^{N+2}(x), \dots$$

$$\Rightarrow f^{n+m}(x) = f^n(x) \forall n \geq N.$$

Entonces x es un punto eventualmente periódico (de período $m = (k + 1) - N$).

Ahora si x es periódico, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$ y $\forall j < n$ se tiene $f^j(x) \neq x$, luego $o(x, f) = \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$. Por tanto $|o(x, f)| = n$ y $o(x, f)$ es finita.

Si x es eventualmente periódico de período m , entonces existe N tal que $f^{n+m}(x) = f^n(x) \forall n \geq N$ y $o(x, f) = \{x, f(x), \dots, f^N(x), f^{N+1}(x), \dots, f^{N+(m-1)}(x)\}$ (pues $f^{N+m}(x) = f^N(x), f^{(N+1)+m}(x) = f^{N+1}(x), \dots$) luego $|o(x, f)| = N + m$. \square

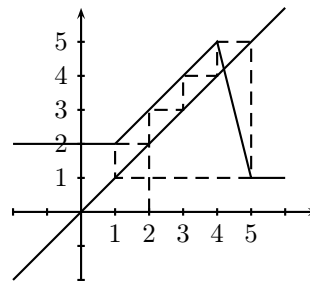
Er 2.10. Mostrar una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} tal que:

- a) tenga un punto de período 5;
- b) tenga un punto de período 6;
- c) tenga un punto de período 3;
- d) tenga una órbita de período 5 con recorrido diferente al del inciso a).

Solución. Utilizar funciones lineales a pedazos es una forma sencilla de hacerlo.

a)

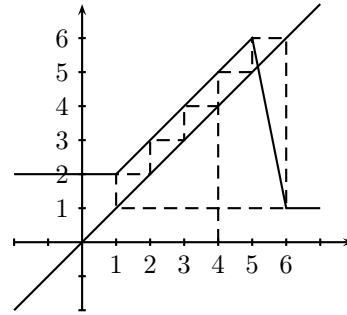
$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 1, \\ x + 1, & \text{si } 1 \leq x \leq 4, \\ -4x + 21, & \text{si } 4 \leq x \leq 5, \\ 1 & \text{si } x \geq 5. \end{cases}$$



$o(2, f) = \{2, 3, 4, 5, 1\}$ luego 2 es un punto periódico de período 5.

b)

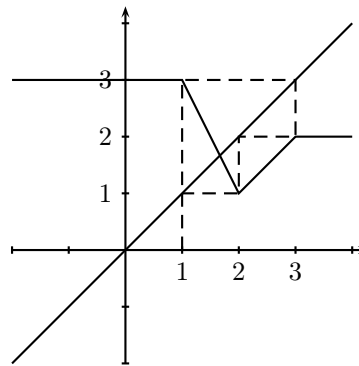
$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 1, \\ x + 1, & \text{si } 1 \leq x \leq 5, \\ -5x + 31, & \text{si } 5 \leq x \leq 6, \\ 1 & \text{si } x \geq 6. \end{cases}$$



$o(4, f) = \{4, 5, 6, 1, 2, 3\}$ luego 4 es un punto periódico de periodo 6.

c)

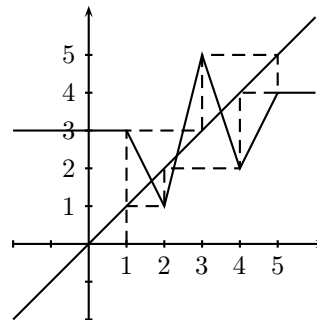
$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x \leq 1, \\ -2x + 5, & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ x - 1, & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \\ 2 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$



$o(1, f) = \{1, 2, 3\}$ luego 1 es un punto periódico de periodo 3

d)

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x \leq 1, \\ -2x + 5, & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 4x - 7, & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \\ -3x + 14 & \text{si } 3 \leq x \leq 4, \\ 2x - 6 & \text{si } 4 \leq x \leq 5, \\ 4 & \text{si } x \geq 5. \end{cases}$$



$o(1, f) = \{1, 3, 5, 4, 2\}$

Er 2.11. Sea $f : I = [0, 1] \rightarrow I$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{3}{2} - x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

(Observar el Ejemplo 2.3.1 y la Figura 2.8).

a) ¿Cuál es la cardinalidad del conjunto de puntos eventualmente fijos? Es decir, ¿cuál es

la cardinalidad del siguiente conjunto:

$$\{x \in I : (\exists n \in \mathbb{N}); (f^n(x) = \frac{3}{4} \text{ o } f^n(x) = 0)\}?$$

b) ¿ Para cuales puntos y en I se tiene que la cardinalidad del conjunto

$$\{x \in I : (\exists n \in \mathbb{N}); (f^n(x) = y)\} \text{ es finita?}$$

Solución. a) Por la definición de punto eventualmente fijo, se debe entender que si $f^n(x) = \frac{3}{4}$ o $f^n(x) = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces eso se cumple para todo $m \geq n$ con $m \in \mathbb{N}$.

Ahora como se analizó en el Ejemplo 2.3.1, para todo $x \in (0, \frac{1}{2}]$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \geq \frac{1}{2}$ y como $f([\frac{1}{2}, 1]) = [\frac{1}{2}, 1]$ se tiene $f^k(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$ para todo $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ y para todo $k \in \mathbb{N}$, luego no existe un $x \in (0, 1]$ tal que $f(x)^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Los candidatos a fijarse en $\frac{3}{4}$ después de algunos “brincos” estan en $(0, \frac{1}{2})$, ya que excepto por $\frac{3}{4}$ en $[\frac{1}{2}, 1]$ todos son puntos periódicos de periodo dos.

En $(0, \frac{1}{2})$ $f(x) = 2x$ y si $f(x) = \frac{3}{4}$, entonces $x = \frac{3}{8}$. Luego $\frac{3}{8}$ es eventualmente fijo ya que $f(\frac{3}{8}) = \frac{3}{4}$ entonces $\forall n \geq 1$ $f^n(\frac{3}{8}) = f^{n+1}(\frac{3}{8}) = \frac{3}{4}$.

Ahora si $f(x) \in (0, \frac{1}{2})$ y $f^2(x) = \frac{3}{4}$, entonces $x = \frac{3}{16}$ es eventualmente fijo $\forall n \geq 2$.

Si $f^2(x) \in (0, \frac{1}{2})$ y $f^3(x) = \frac{3}{4}$, entonces $x = \frac{3}{32}$ es otro punto eventualmente fijo $\forall n \geq 3$.

Por inducción tenemos $\forall n \geq 1$ $\exists x \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $f^n(x) = 2^n x = \frac{3}{4}$ entonces en $x = \frac{3}{2^{n+2}}$ se da un punto eventualmente fijo de f y cómo $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ se tiene $|A = \{x \in I : \exists n \in \mathbb{N}; f^n(x) = \frac{3}{4} \text{ o } f^n(x) = 0\}| \geq \aleph_0$ donde la igualdad se da si $x = \frac{3}{2^{n+2}} \forall n \in \mathbb{N}$ son los únicos puntos eventualmente fijos de f .

Veamos esto: supongamos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = \frac{3}{4}$. Entonces $x = \frac{3}{4}$ (cuando $n = 1$) o $x \in (0, \frac{1}{2})$ (pues ya se probó que todos los puntos de $[\frac{1}{2}, 1] \setminus \{\frac{3}{4}\}$ son periódicos de periodo dos). Sean $x \in (0, \frac{1}{2})$ y n el menor natural tal que $f^n(x) = \frac{3}{4}$. Entonces $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\} \subset (0, \frac{1}{2})$ (ya que si fuera $f^j(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$ para algún $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, entonces, por la escogencia de n se tendría $f^j(x) \neq \frac{3}{4}$ y $f^j(x)$ sería periódico de periodo dos, de lo cual nunca se obtendría $f^n(x) = \frac{3}{4}$). De esta manera podemos afirmar que $f^n(x) = 2^n x$, luego $\frac{3}{4} = 2^n x$ de donde $x = \frac{3}{2^{n+2}}$.

Se ha demostrado entonces que:

$$A = \{0\} \cup \left\{ \frac{3}{2^{n+2}} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

y por lo tanto $|A| = \aleph_0$.

b) Para $\frac{3}{4}$ ya se vio en el inciso a).

$$\begin{aligned} \text{Si } 0 < y \leq 1 &\Rightarrow 0 < \frac{y}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{y}{2}\right) = 2\left(\frac{y}{2}\right) = y. \\ &\Downarrow \\ 0 < \frac{y}{2^2} \leq \frac{1}{2^2} &\Rightarrow f^2\left(\frac{y}{2^2}\right) = f \circ f\left(\frac{y}{2^2}\right) = f\left(\frac{y}{2}\right) = y \\ &\Downarrow \\ &\vdots \\ &\Downarrow \\ \forall n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{y}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} &\leq \frac{1}{2} \Rightarrow f^n\left(\frac{y}{2^n}\right) = y \end{aligned}$$

Ya que $\frac{y}{2}, \frac{y}{2^2}, \dots$, son diferentes dos a dos ($y \neq 0$), entonces $\forall y \in (0, 1]$ se tiene que $|\{x \in I : (\exists n \in \mathbb{N}); (f^n(x) = y)\}|$ es infinita, y solamente para $y = 0$ se tendrá:

$$|\{x \in I : (\exists n \in \mathbb{N}); (f^n(x) = 0)\}| = |\{0\}| = 1 \text{ es finita}$$

Er 2.12. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin x$.

- a) Sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in [-1, 1] = J$. Demostrar que f es creciente en J .
- b) Demostrar que $x = 0$ es el único punto fijo de f .
- c) De a) se sigue que si $x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq \sin x \leq \sin 1$. Demostrar que si $0 < x \leq 1$ entonces $0 < \sin x < x$, luego $o(x, f)$ es una sucesión decreciente.
- d) Demostrar que si $-1 \leq x < 0 \Rightarrow x < \sin x < 0$.
- e) Demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene $\lim f^n(x) = 0$.
- f) Describir el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : (\exists n \in \mathbb{N}); (f^n(x) = 0)\}$.

Solución. a) Como $f(x) = \sin x$ con $x \in [-1, 1]$, entonces $f'(x) = \cos x > 0 \forall x \in [0, 1]$ luego f es creciente en J .

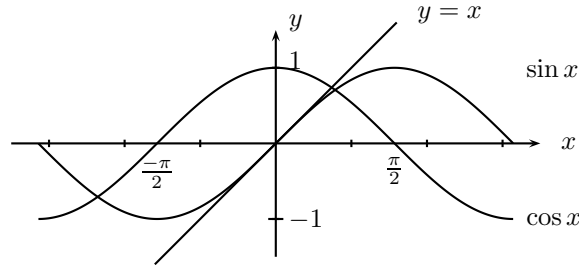


Figura 2.20: $Id(x)$, $\sin x$, y $\cos x$

b) Como $-1 \leq f(x) \leq 1$ analicemos $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, entonces $0 < f'(x) \leq 1$ donde la igualdad se da en $x = 0$ y sabemos que $\sin 0 = 0$ entonces cero es un punto fijo de f . Tomemos $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ y veamos si puede ser punto fijo. En $[-1, 1] \setminus \{0\}$ se tiene $0 < f'(x) < 1$ luego:

1. si $x, y \in [-1, 0]$ con $x < y$ por el TVM se tiene que $\exists c \in (x, y)$ tal que $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|$, entonces $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, luego $|f(x) - f(0)| < |x - 0|$, en consecuencia $|f(x) - 0| < |x - 0|$, y por consiguiente $f(x) \neq x$.

2. Si $x, y \in [0, 1]$ con $x < y$ aplicamos nuevamente el TVM y resulta $f(x) \neq x$ (análogo al punto 1).

c) Si hacemos $g(x) = x - f(x) \forall x \in (0, 1]$ tenemos $g'(x) = 1 - f'(x)$. Como $|f'(x)| < 1 \forall x \in (0, 1]$ entonces $g'(x) > 0$ luego g es creciente en $(0, 1]$. Si $0 < x$ entonces $g(0) = 0 < g(x) = x - f(x)$, y por tanto $f(x) < x$. Por el inciso a) f es creciente en $(0, 1]$, de donde $0 = f(0) < f(x)$ y así $0 < \sin x < x$. Aplicando nuevamente f tenemos que $0 < f^2(x) < f(x)$, y por inducción $0 < f^{n+1}(x) < f^n(x) \forall n \in \mathbb{N}$, luego $o(x, f)$ es decreciente ($x > f(x) > f^2(x) > f^3(x) > \dots$).

d) Como $f(x)$ es una función impar, se tiene que $f(-x) = -f(x)$ y como vimos en el inciso c), si $0 < x \leq 1$ entonces $0 < \sin x < x$, luego si $-1 \leq x < 0$ entonces $0 < -\sin x < -x$ multiplicando por -1 obtenemos $0 > \sin x > x$ luego $x < f(x) < 0$ para todo $x \in [-1, 0)$.

e) Como f es derivable en \mathbb{R} y $|f'(x)| < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ($f'(k\pi) = \pm 1$).

Sea $0 < |f'(x)| < M < 1$ con $M \in \mathbb{R}$, por el TVM $\exists c_1$ entre 0 y x tal que $|f(x) - f(0)| = |f'(c_1)||x - 0|$, entonces $|f(x) - 0| < M|x - 0|$. Como $M < 1$ $f(x)$ está más cerca de cero que x , luego por TVM $\exists c_2$ entre 0 y $f(x)$ tal que

$$|f^2(x) - f^2(0)| = |f'(c_2)||f(x) - f(0)|,$$

entonces

$$|f^2(x) - 0| < M|f(x) - 0| < MM|x - 0| = M^2|x - 0|.$$

Por inducción

$$|f^n(x) - 0| < M^n|x - 0| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $0 < M < 1$ entonces $\lim M^n = 0$, luego

$$\lim f^n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ahora si $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ se tiene $o(x, f) = (k\pi, 0, 0, 0, \dots) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

f) En el conjunto en cuestión están los puntos eventualmente fijos de la forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (notar que el único punto fijo está incluido). Luego es claro que

$$\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, f^n(x) = 0\} = A.$$

Veamos que $A \subseteq \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ para mostrar que $A = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Probemos que si $x \in \mathbb{R}$ tal que $f^n(x) = 0$ entonces $x = k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Prueba. Si $n = 1$ entonces $f(x) = 0$ implicando que $x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Si $n = i$ y $f^i(x) = 0$ entonces $x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ (hipótesis de inducción).

Si $f^{i+1}(x) = 0$ entonces $f^i(f(x)) = 0$ luego $f(x) \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ por la hipótesis de inducción. Luego $f(x) = k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ entonces $-1 \leq k\pi \leq 1$ entonces $-1 < \frac{-1}{\pi} \leq k \leq \frac{1}{\pi} < 1$ entonces $k = 0$ de modo que $f(x) = 0$ y por tanto $x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Así concluimos que $A = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

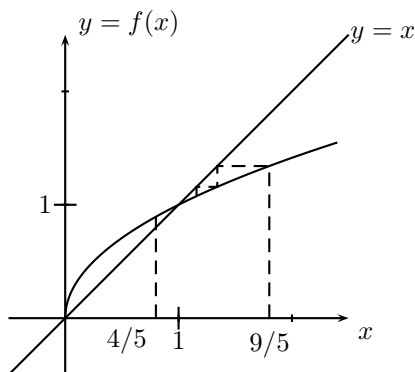
Er 2.13. Sea $I = [0, \infty)$ y $f : I \rightarrow I$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Demostrar que:

a) $\forall x > 1$ se tiene que $1 < f(x) < x$.

b) $\forall x \in (0, 1)$ se tiene que $x < f(x) < 1$.

c) $\forall x \neq 0$ se tiene que $\lim f^n(x) = 1$.

d) 0 es un punto fijo repulsor.



Solución. a) Como f es creciente (si $\sqrt{x} > \sqrt{y} \Rightarrow x > \sqrt{x}\sqrt{y}$ y $\sqrt{x}\sqrt{y} > y$ luego $x > y$, otra forma se ve en el ejemplo 1.7.1) y $x > 1 \Rightarrow \sqrt{x} > \sqrt{1} = 1$ luego $\sqrt{x}\sqrt{x} > \sqrt{x}$ así $1 < f(x) < x$.

b) Como $0 < x < 1$ y f es creciente se tiene $0 < \sqrt{x} < 1$ luego $\sqrt{x}\sqrt{x} < \sqrt{x} \Rightarrow x < \sqrt{x}$ luego $x < f(x) < 1$.

c) Tenemos:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^{\frac{1}{2}} \\
 f^2(x) &= (x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2^2}} \\
 f^3(x) &= (x^{\frac{1}{2^2}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2^3}} \\
 &\vdots \\
 f^n(x) &= x^{\frac{1}{2^n}}
 \end{aligned}$$

entonces $\forall x \in I \setminus \{0\}$ se tiene

$$\lim f^n(x) = \lim x^{\frac{1}{2^n}} = x^0 = 1.$$

(Note que por lo anterior 1 es un punto fijo atractor de f).

d) 0 es un punto fijo. Si $x \in (0, \frac{1}{2})$ y dado que $\lim f^n(x) = 1$, para $\delta = \frac{1}{2} > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m > n$ se tiene $f^m(x) \in (1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2})$ entonces $\frac{1}{2} < f^m(x) < \frac{3}{2}$ luego $f^m(x)$ no está en $[0, \frac{1}{2})$, entonces 0 es un punto fijo repulsor de f .

Er 2.14. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $l \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 2^k - 1\}$. Entonces (T es la función tienda definida en la sección 2.4)

$$T^k : \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k} \right] \longrightarrow [0, 1]$$

es un homeomorfismo. Además, si $x \in \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k} \right]$, entonces $T^k(x) = px + q$ donde $|p| = 2^k$ y $q \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $A = \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k} \right]$, observemos T^k cuando $k = 2$. Entonces $l \in \{0, 1, 2, 3\}$ y $2^k = 4$.

- Si $l = 0 \Rightarrow T^2 : [0, \frac{1}{4}] \longrightarrow [0, 1]$ con $T^2(x) = 4x$.
- Si $l = 1 \Rightarrow T^2 : [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \longrightarrow [0, 1]$ con $T^2(x) = -4x + 2$.
- Si $l = 2 \Rightarrow T^2 : [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \longrightarrow [0, 1]$ con $T^2(x) = 4x - 2$.
- Si $l = 3 \Rightarrow T^2 : [\frac{3}{4}, 1] \longrightarrow [0, 1]$ con $T^2(x) = -4x + 4$.

Note que si l es par $T^k|_A$ es un segmento de recta con pendiente positiva, y si l es impar $T^k|_A$ es un segmento de recta con pendiente negativa (se puede observar en las figuras 2.11 y 2.13 que lo anterior se cumple para $k = 1$ y $k = 3$).

- Si l es par la ecuación de la recta que pasa por los puntos $\left(\frac{l}{2^k}, 0\right)$ y $\left(\frac{l+1}{2^k}, 1\right)$ es $T^k(x) = 2^k x - l$. Por ser la ecuación de una recta es inyectiva, continua y su inversa es continua. Como la pendiente es $2^k > 0$, T^k es creciente y el rango será $\left[T^k\left(\frac{l}{2^k}\right), T^k\left(\frac{l+1}{2^k}\right)\right] = [0, 1]$, entonces T^k es sobreyectiva.

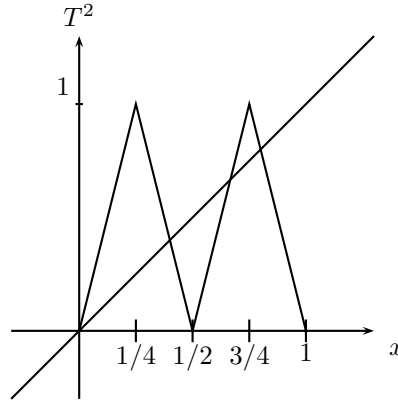


Figura 2.21: Gráfica de T^2 con $T : I \rightarrow I$.

- Si l es impar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $\left(\frac{l}{2^k}, 1\right)$ y $\left(\frac{l+1}{2^k}, 0\right)$ es $T^k(x) = -2^k x + l + 1$. Nuevamente es inyectiva, continua y su inversa es continua, dado que es la ecuación de una recta. Como la pendiente es $-2^k < 0$, T^k es decreciente y el rango será $\left[T^k\left(\frac{l+1}{2^k}\right), T^k\left(\frac{l}{2^k}\right)\right] = [0, 1]$, entonces T^k es sobreyectiva.

Por lo anterior se tiene que $T^k : \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \rightarrow [0, 1]$ la cual está definida por $T^k(x) = px + q$ con $|p| = 2^k$ y $q \in \mathbb{Z}$ es un homeomorfismo. \square

Er 2.15. Sea $(a, b) \subseteq I$ con $a < b$. Demostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(a, b) = I$ con $I = [0, 1]$ y T la función definida anteriormente.

Demostración. Como el intervalo $[0, 1]$ se puede particionar en subintervalos de la forma $\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]$ arbitrariamente pequeños, ya que dado cualquier $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \frac{1}{k} < \varepsilon$. La idea es entonces considerar el intervalo (a, b) cuya longitud es $b - a > 0$ y encontrar una partición de $[0, 1]$ en subintervalos de la forma anterior, suficientemente pequeños para que al menos uno de ellos quede contenido en el intervalo (a, b) . Bastaría entonces tomar un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \frac{b-a}{3}$ para garantizar la existencia de un intervalo de la forma $\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \subset (a, b) \subset I$ y sea $T^k : \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \rightarrow I$ definida como en el ejercicio anterior, entonces $T^k\left(\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]\right) = I$ luego $I \subset T^k(a, b) \subset I$. Por consiguiente $T^k(a, b) = I$. \square

Capítulo 3

Sistema dinámico caótico

Un sistema dinámico se dirá caótico según R. Devaney, si presenta tres características las cuales mencionaremos antes de formalizar la definición de S.D.C.¹

En este capítulo $f : I = [0, 1] \rightarrow I$ siempre será continua.

3.1. $Per(f)$ y densidad

Sea $\{X, f\}$ un S.D.D. El conjunto de puntos periódicos de la función f , $Per(f)$, es **denso** en X si y sólo si para todo subconjunto $U \neq \emptyset$ abierto en X , se tiene que $U \cap Per(f) \neq \emptyset$.

Proposición 3.1.1. *Sea $f : I \rightarrow I$ con $x \in I$. Si $o(x, f)$ es un conjunto denso en I , entonces el conjunto de puntos en I que tienen órbita densa, forman a su vez un conjunto denso en I .*

Demostración. Sea $A = o(x, f)$. Como A es denso en I , entonces $A \setminus \{x\} = o(f(x), f)$ también es denso en I . De hecho, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$A \setminus \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\} = o(f^n(x), f)$$

es denso en I^2 .

Sea $M = \{y \in I : o(y, f) \text{ es densa en } I\} \subseteq I$ y supongamos que M no es denso en I ,

¹Usaremos esta sigla para abreviar sistema dinámico discreto.

²ver proposición 1.8.4

entonces existe un intervalo abierto diferente de vacío $(a, b) \subseteq I$ tal que $(a, b) \cap M = \emptyset$. Como $x \in M$, entonces x no está en (a, b) . Dado que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^n(x)$ está en M , se tiene $o(x, f) \cap (a, b) = \emptyset$, lo que nos lleva a una contradicción, luego M es denso en I . \square

Nota. Si $Per(f)$ es denso en X , entonces los puntos periódicos de f están “totalmente bien esparcidos y distribuidos” en X , de tal forma que no existe un “lugar” (abierto no vacío) en X donde no haya un punto periódico.

Proposición 3.1.2. $Per(T)$ es denso en I .

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $(a, b) \subseteq I$, por la propiedad de Arquímedes existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \frac{b-a}{3}$. Entonces existe un intervalo $[\frac{L}{2^k}, \frac{L+1}{2^k}]$ para algún $L = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$ contenido en (a, b) . Como existe $y \in [\frac{L}{2^k}, \frac{L+1}{2^k}]$ con $y \in Per(T)$, entonces $y \in (a, b)$, luego $Per(T) \cap (a, b) \neq \emptyset$. Como (a, b) es arbitrario se tiene que $Per(T)$ es denso en I . \square

3.2. Transitividad topológica

Dado un S.D.D. $\{X, f\}$, decir que es **topológicamente transitivo** (o **transitivo**) en X bajo f significa intuitivamente que dadas dos zonas cualesquiera del espacio X , existe un punto en una de ellas, que visita a la otra bajo iteraciones de f . Ya que podemos tomar esas zonas tan pequeñas como se quiera (diferentes del vacío), entonces f transitiva en X significa (intuitivamente) que existen “muchos” puntos $x \in X$, que recorren todo el espacio X . Formalmente tenemos:

Definición 3.2.1. Sea $\{X, f\}$ es un S.D.D. Se dice que $\{X, f\}$ es **topológicamente transitivo** o que f es **topológicamente transitiva en X** si y sólo si dados U y V abiertos cualesquiera de X , no vacíos, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Una forma equivalente de expresar la noción de transitividad topológica se establece en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1. Un S.D.D. $\{X, f\}$ es topológicamente transitivo si y sólo si $\forall x, y \in X$ y $\forall \varepsilon > 0$, $\exists z \in X$ tal que $d(z, x) < \varepsilon$ y $d(f^n(z), y) < \varepsilon$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Veamos que la Definición 3.2.1 implica la Proposición 3.2.1.

Sean $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $U = B_\varepsilon(x)$ y $V = B_\varepsilon(y)$. Entonces U y V son abiertos en X , no vacíos. Por hipótesis existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Entonces existe $t \in f^n(U) \cap V$, luego $t \in f^n(U)$ y $t \in V$, por lo que $t \in f^n(B_\varepsilon(x))$ y $t \in B_\varepsilon(y)$, lo que implica que exista $z \in B_\varepsilon(x)$ tal que $t = f^n(z)$. Entonces $d(z, x) < \varepsilon$ y $d(f^n(z), y) = d(t, y) < \varepsilon$. Ahora probemos que la Proposición 3.2.1 implica la Definición 3.2.1.

Sean U y V abiertos en X , no vacíos, entonces existen $x \in U$ y $y \in V$, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ y $B_\varepsilon(y) \subseteq V$ (porque U y V son abiertos en X). Por hipótesis existen $z \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $z \in B_\varepsilon(x) \subseteq U$ y $f^n(z) \in B_\varepsilon(y) \subseteq V$, entonces $z \in U$ y $f^n(z) \in V$, luego $f^n(z) \in f^n(U)$. Por tanto $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. \square

Proposición 3.2.2. *La función tienda T , es topológicamente transitiva en I .*

Demostración. Tomemos dos intervalos abiertos cualesquiera, diferentes de vacío y contenidos en I . Sean (a, b) con $a < b$ y (c, d) con $c < d$ tales intervalos. Por el Ejercicio 2.15 sabemos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n[(a, b)] = I$, luego $T^n[(a, b)] \cap (c, d) \neq \emptyset$. \square

Proposición 3.2.3. *Sea $f : I \rightarrow I$ y $x \in I$. Si $o(x, f)$ es un conjunto denso en I , entonces f es topológicamente transitiva en I .*

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos de I abiertos y distintos del vacío. Como la $o(x, f)$ es densa en I existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in A$. De la densidad de $o(f^n(x), f)$ (ver proposición 1.8.4.), existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(f^n(x)) \in B$; luego $f^m(A) \cap B \neq \emptyset$. \square

Note que si $o(x, f)$ es densa en I , entonces x visita todo lugar de I bajo iteraciones de f . Además, como I es infinito x no puede ser un punto periódico, pues esto implicaría que $o(x, f)$ sea finito, contradiciendo la densidad de $o(x, f)$.

Proposición 3.2.4. *$f : X \rightarrow X$ topológicamente transitiva. Entonces X es conjunto infinito o X es la órbita de un punto periódico.*

Demostración. Supongamos que X es finito y $q \in X$. Sea $\varepsilon > 0$ la menor distancia entre dos elementos distintos de X , (ε existe porque X es finito.) y $y \in X$. Como f es transitiva

en X , existen $z \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(q, z) < \varepsilon$ y $d(f^n(z), y) < \varepsilon$. Para el $\varepsilon > 0$ escogido, lo anterior implica $q = z$ y $f^n(z) = y$ por tanto $f^n(q) = f^n(z) = y$ luego $f^n(q) = y$, así $y \in o(q, f)$. Como y es arbitrario se tiene que $X = o(q, f)$.

Ahora para ver que q es periódico tomamos $y_0 \in X$ y por la transitividad de f , existen $t \in X$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $d(y_0, t) < \varepsilon$ y $d(q, f^m(t)) < \varepsilon$ entonces $y_0 = t$ y $q = f^m(t)$, luego $f^m(y_0) = f^m(t) = q$ por lo que $f^m(y_0) = q$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Como $X = o(q, f)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(q) = y_0$, por consiguiente $f^m(f^n(q)) = f^m(y_0) = q$ luego $f^{m+n}(q) = q$. Entonces si f es transitiva y X no es infinito se tiene que $X = o(q, f)$ con $q \in Per(f)$. \square

3.3. Estabilidad y sensibilidad a condiciones iniciales

Preguntarse por la estabilidad de un punto es importante, pues el mundo real está sujeto a constantes perturbaciones que pueden dificultar la observación de ciertos estados constantes. Una buena analogía de un estado constante estable es un balón en un valle, mientras que un balón en la punta de una montaña es inestable.

La siguiente definición relaciona los conceptos de punto fijo atractor visto en el capítulo 2, con el de punto fijo estable (pág 9, [A-S-Y]).

Definición 3.3.1. Sea x_0 un punto fijo de $f : I \longrightarrow I$. Decimos que x_0 es un **punto fijo estable** si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $\forall y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ se tiene que $|f^n(y) - x_0| < \varepsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.3.1. Sea $f : I \longrightarrow I$ definida por $f(x) = x^2$ tiene dos puntos fijos.

0 es un punto fijo estable de f , veamos (ver figura 3.1):

dado cualquier $\varepsilon > 0$, si hacemos $\delta = \varepsilon$ tenemos:

1. si $\varepsilon \leq 1 \Rightarrow \forall y \in (0 - \delta, 0 + \delta) \cap I = [0, \delta) \Rightarrow 0 \leq y < \delta < 1$.

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow |y^{2^n}| = 0 < \varepsilon.$$

$$\text{Si } 0 < y < \delta \Rightarrow 0 < y^{2^n} \leq y \text{ luego } |y^{2^n}| \leq |y| < \delta = \varepsilon.$$

2. Si $\varepsilon > 1 \Rightarrow \forall y \in (0 - \delta, 0 + \delta) \cap I = I \Rightarrow 0 \leq y \leq 1$.

$$\text{si } y = 1 \Rightarrow |y^{2^n}| = 1 < \varepsilon.$$

$$\text{si } 0 \leq y < 1 \Rightarrow 0 \leq y^{2^n} < 1 < \varepsilon \Rightarrow |y^{2^n}| < \varepsilon.$$

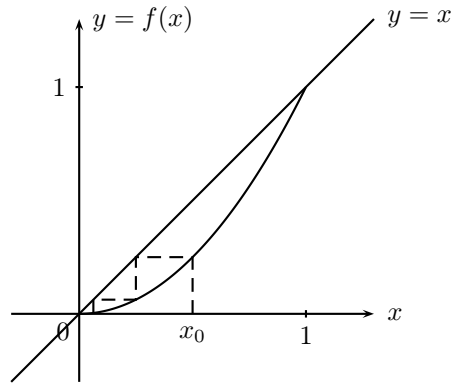


Figura 3.1: $o(x_0, f) \rightarrow 0$ con $x_0 \in I$.

Veamos el concepto de estabilidad de un punto, aún cuando este no sea fijo.

Definición 3.3.2. Sea $f : I \rightarrow I$ y $t \in I$. Decimos que $o(t, f)$ es estable si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que para todo punto $y \in (t - \delta, t + \delta) \cap I$ se tiene que $|f^n(y) - f^n(t)| < \varepsilon \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.3.2. Sea $f : I \rightarrow I$ dada por $f(x) = 1 - x$. La órbita de cualquier punto en I es estable ya que f es una isometría, osea preserva las distancias³(ver Figura 3.2).

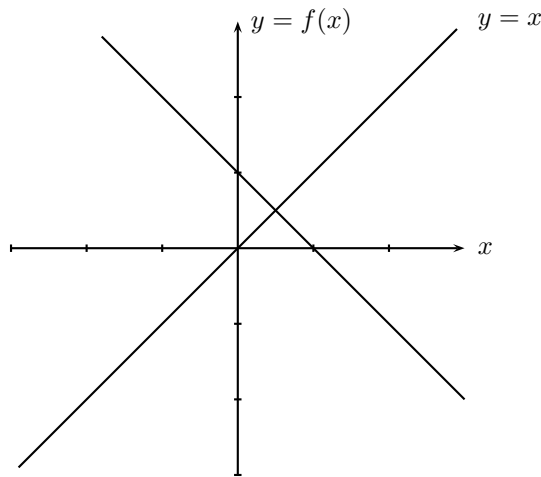


Figura 3.2: f es una isometría.

Se dice que el S.D.D. $\{X, f\}$ es **sensible a condiciones iniciales** en X bajo f si y sólo si para cualquier vecindad de cualquier $x \in X$, existe un y en dicha vecindad cuya órbita en

³si (X, d) es un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$, entonces f se dice una isometría si $\forall x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Luego dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = \varepsilon$ y se tendrá que $\forall y \in B_\delta(t)$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$d(f^n(y), f^n(t)) = d(f^{n-1}(y), f^{n-1}(t)) = \dots = d(y, t) < \delta = \varepsilon.$$

algún instante se aparta de $o(x, f)$ “suficientemente”. En este caso se dice que las órbitas de X son inestables. Una definición formal es la siguiente:

Definición 3.3.3. Sea $f : I \rightarrow I$. Decimos que f es **sensible a condiciones iniciales** (o **sensible**) en I si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in I$ y todo $\delta > 0$, existen $y \in (x - \delta, x + \delta) \cap I$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $|f^n(y) - f^n(x)| \geq \varepsilon$.

Nótese que si $\{X, f\}$ es sensible a condiciones iniciales, entonces no tiene puntos periódicos atractores, pues todos los puntos que estén en el conjunto estable del punto periódico, permanecerán en este bajo iteraciones de f .

Edward Lorentz ideó una analogía que ilustra la definición anterior: *el efecto mariposa*. Si existiera otro planeta idéntico a la Tierra y una mariposa desidiera batir sus alas en uno mientras que en el otro permaneciera quieta, las fluctuaciones creadas se irían magnificando exponencialmente hasta que, eventualmente, los patrones climáticos fueran distintos en ambos planetas. De esta analogía nació la idea de que una mariposa en Hong Kong podría causar un pequeño tornado en Kansas (pág 113, [Mc]).

Proposición 3.3.1. La función T es sensible en I .

Demostración. Consideremos $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Sean $x \in I$ y $\delta > 0$. Por el Ejercicio 2.15, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n[(x - \delta, x + \delta) \cap I] = I$. Por lo tanto existen $u, w \in (x - \delta, x + \delta) \cap I$ tales que $T^n(u) = 0$ y $T^n(w) = 1$. Como

$$1 = |T^n(u) - T^n(w)| \leq |T^n(u) - T^n(x)| + |T^n(x) - T^n(w)|,$$

entonces $|T^n(u) - T^n(x)| \geq \varepsilon$ o $|T^n(x) - T^n(w)| \geq \varepsilon$. □

3.4. Definición de caos

Robert Devaney es uno de los matemáticos que más ha trabajado en sistemas dinámicos. Su definición de caos propuesta en su libro *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* es una de las más conocidas y se presenta a continuación.

Definición 3.4.1. $\{X; f\}$ es un **sistema dinámico caótico** (o f es **caótica** en X) si cumple las tres condiciones siguientes:

- i) $Per(f)$ es denso en X ;
- ii) f es topológicamente transitiva en X ;
- iii) f es sensible a las condiciones iniciales en X .

Así, según las Proposiciones 3.1.2, 3.2.2 y 3.3.1 tenemos:

Proposición 3.4.1. La función tienda T , es caótica en I .

En abril de 1.992 se publicó (pág. 81, [H]) la demostración del siguiente hecho:

Para funciones continuas en un subconjunto infinito de \mathbb{R} las condiciones i) y ii) implican caos.

Teorema 3.4.1. Sea I un intervalo infinito de \mathbb{R} y $f : I \rightarrow I$ continua. Si $Per(f)$ es denso en I y f es topológicamente transitiva en I , entonces f es caótica en I .

Análisis. La demostración consiste en ver que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in I$, exista $q \in Per(f)$ con $|x - f^i(q)| \geq 4\varepsilon$ para todo i . Luego fijamos q . Tomamos δ tal que $0 < \delta < \varepsilon$ y cualquier $x \in I$ para probar que $\exists y \in I : |x - y| < \delta$ y $|f^n(x) - f^n(y)| > \varepsilon$ para algún $n \in \mathbb{N}$, con lo que se mostraría que f es sensible a las condiciones iniciales, y junto con la hipótesis se deduce que f es caótica en I .

Note que se puede hacer la restricción $\delta < \varepsilon$ (pues esto dificulta encontrar y). Si fuese $\varepsilon \leq \delta$, bastaría tomar un $\delta_0 < \varepsilon$ y usar lo que se probó para este caso.

Demostración. Como $Per(f)$ es denso en I entonces $Per(f)$ es infinito (proposición 1.8.2), lo que nos permite escoger $q_1, q_2 \in Per(f)$ con $q_1 \neq q_2$ tal que $f^n(q_1) \neq f^m(q_2) \forall n, m \in \mathbb{N}$ (q_1 y q_2 pertenecen a órbitas ajenas).

Sea ε el número más grande que satisface

$$\varepsilon \leq \frac{1}{8} |f^n(q_1) - f^m(q_2)| \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Claramente $\varepsilon > 0$, ya que q_1 y q_2 son periódicos, luego hay una cantidad finita de puntos de la forma $f^n(q_1)$ y $f^m(q_2)$ y de distancias de la forma $|f^n(q_1) - f^m(q_2)|$, entonces existe una distancia mínima y es positiva.

Si x es cualquier punto en I , entonces por la desigualdad triangular

$$\varepsilon \leq \frac{1}{8} |f^n(q_1) - f^m(q_2)| \leq \frac{1}{8} (|f^n(q_1) - x| + |x - f^m(q_2)|)$$

o

$$8\varepsilon \leq |f^n(q_1) - x| + |x - f^m(q_2)| \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

entonces

$$|x - f^n(q_1)| \geq 4\varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{o} \quad |x - f^m(q_2)| \geq 4\varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

así,

$$\exists q \in \text{Per}(f) : |x - f^i(q)| \geq 4\varepsilon \quad \forall i.$$

Ahora fijamos este $\varepsilon > 0$, encontrado por el criterio descrito (escoger $\varepsilon > 0$ de forma que $\forall x \in I \exists q \in \text{Per}(f)$, tal que q diste de x , 4ε o más, bajo toda iteración de f).

Sea $x \in I$ un punto arbitrario y $\delta > 0$ tal que $0 < \delta < \varepsilon$. Fijamos q tal que $|x - f^i(q)| \geq 4\varepsilon \quad \forall i$.

Observemos⁴ lo siguiente antes de seguir:

ob.1 Como $\text{Per}(f)$ es denso en I , podemos escoger un $p \in \text{Per}(f)$ con periodo k , tal que $|x - p| < \delta$. Lo escogemos y lo fijamos.

ob.2 Como f es continua en I , entonces f^i es continua en $I \quad \forall i \geq 0$, luego dado $\varepsilon > 0 \exists \mu > 0$ tal que $\mu \leq \varepsilon$ y dado $z \in I$ que satisface

$$|z - q| < \mu \Rightarrow |f^i(z) - f^i(q)| < \varepsilon \quad \forall i$$

con $0 \leq i \leq k$, donde k es el período de p como en ob.1

ob.3 Por la transitividad de f en I , existen $r \in I$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que

$$|x - r| < \delta \quad \text{y} \quad |f^m(r) - q| < \mu,$$

⁴Utilizaremos ob. para abreviar observación.

(con μ como en ob.2), entonces por la elección de r , m y por ob.2, se tiene

$$|f^{m+i}(r) - f^i(q)| = |f^i(f^m(r)) - f^i(q)| < \varepsilon, \quad \text{con } 0 \leq i \leq k.$$

ob.4 Dado m como en ob.3, $\exists n \in \mathbb{N} : m \leq n \leq m + k$ y $k \mid n$, es decir $n = ak$ con a el menor entero que cumple $a \geq \frac{m}{k}$.

Con m y r como en la ob.3 y n como en ob.4, y nuestra elección de ε

$$4\varepsilon \leq |x - f^{n-m}(q)| \leq |x - f^n(p)| + |f^n(p) - f^n(r)| + |f^n(r) - f^{n-m}(q)|.$$

Como k es el periodo de p (ob.1) y n es múltiplo de k (ob.4) tenemos $|x - f^n(p)| = |x - p|$.

Como además $0 \leq n - m \leq k$, entonces

$$|f^n(r) - f^{n-m}(q)| = |f^{n-m}(f^m(r)) - f^{n-m}(q)|.$$

Por ob.1 donde $\delta < \varepsilon$ y ob.3, se tiene

$$4\varepsilon < \varepsilon + |f^n(p) - f^n(r)| + \varepsilon \Rightarrow 2\varepsilon \leq |f^n(p) - f^n(r)|,$$

y por la desigualdad triagular

$$2\varepsilon \leq |f^n(p) - f^n(r)| \leq |f^n(p) - f^n(x)| + |f^n(x) - f^n(r)|,$$

entonces

$$|f^n(p) - f^n(x)| > \varepsilon \text{ o } |f^n(x) - f^n(r)| > \varepsilon.$$

Por ob.1. y ob.3. tenemos

$$|x - p| < \delta \text{ y } |x - r| < \delta,$$

luego

$$\exists y \in I, \text{ tal que } |x - y| < \delta \text{ y } |f^n(x) - f^n(y)| > \varepsilon \text{ para algún } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces f es sensible a condiciones iniciales, luego f es caótica. □

Proposición 3.4.2. *Si X es finito, entonces $\{X; f\}$ no es caótico.*

Observación. *La demostración consiste en ver que f no es sensible a las condiciones iniciales, y por ello, nunca será caótica. Tenga en cuenta que si X es finito, f es continua.*

Demostración. Si X es unitario claramente f no es sensible.

Si $|X| \geq 2$, Supongamos que f es sensible, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$ y todo $\delta > 0$ existen $y \in B_\delta(x) \cap X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(y)$ no está en $B_\varepsilon(f^n(x))$.

Sea $\alpha = \min\{d(x_i, x_j) : x_i, x_j \in X, i \neq j\}$ (existe porque X es finito) y tomamos $\delta = \frac{\alpha}{2} > 0$, entonces existe $y \in B_\delta(x) \cap X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(y)$ no está en $B_\varepsilon(f^n(x))$. Pero $d(x, y) < \delta = \frac{\alpha}{2}$ implica que $x = y$, luego,

$$d(f^n(x), f^n(y)) = d(f^n(x), f^n(x)) = 0 < \varepsilon \Rightarrow f^n(y) \in B_\varepsilon(f^n(x))$$

lo que nos lleva a una contradicción. □

Antes de dar la siguiente proposición, observemos lo siguiente:

el conjunto de las $n \in \mathbb{N}$, tales que existe un punto periódico de T de período n no es acotado.

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : \exists x \in Per(T) \text{ con período } n\}$. Supongamos que A es acotado, entonces A tiene supremo. Si $s = \sup A$ entonces $s \in \mathbb{N}$ (por la definición de A y la suposición anterior, A es cerrado, luego $s \in A$) y $n \leq s \forall n \in A$. Ya que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen⁵ exactamente $2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} \geq 2$ puntos periódicos de T de periodo 2^n y $2^s \in \mathbb{N}$ entonces $2^s \in A$ pero $2^s > s$ para cualquier $s \in \mathbb{N}$ lo que nos lleva a una contradicción, entonces A no es acotado.

Proposición 3.4.3. *Sea $f : I \rightarrow I$ una función caótica en I . Entonces los periodos de los puntos periódicos forman un conjunto no acotado.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos los siguientes n intervalos abiertos:

$A_i = (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$, $i = 1, 2, \dots, n$. Para cualquier par de conjuntos A_i, A_j con $i \neq j$ y $j, i \in \mathbb{N}$ se tiene $A_i \cap A_j = \emptyset$ (pues si $j < i \Rightarrow j + k = i$ para algún $k \in \mathbb{N}$ con $k < i$, luego $j = i - k$.

Entonces si $k = 1$ se tiene $j = i - 1$ luego $A_j \cap A_i = (\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}) \cap (\frac{i}{n}, \frac{i}{n}) = \emptyset$.

Ahora si $k > 1$, $j = i - k < i - 1$, entonces $A_j \cap A_i = (\frac{j-i}{n}, \frac{j}{n}) \cap (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}) = \emptyset$.

Tomando A_{n-1} y A_n abiertos, disjuntos y diferentes de vacío, por la transitividad de f se tiene $\exists k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_1}(A_{n-1}) \cap A_n \neq \emptyset$ lo que implica $A_{n-1} \cap f^{-k_1}(A_n) \neq \emptyset$. Como

⁵Ver sección 2.4

f es continua $f^{-k_1}(A_n)$ es abierto en I , luego $A_{n-1} \cap f^{-k_1}(A_n)$ es abierto en I . Tomando ahora A_{n-2} abierto en I , tenemos que $\exists k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_2}(A_{n-2}) \cap (A_{n-1} \cap f^{-k_1}(A_n)) \neq \emptyset$ luego $(A_{n-2}) \cap f^{-k_2}(A_{n-1} \cap f^{-k_1}(A_n)) \neq \emptyset$ y $(A_{n-2}) \cap f^{-k_2}(A_{n-1} \cap f^{-k_1}(A_n))$ es abierto en I . Entonces por inducción, por la continuidad de f y por la transitividad de f en I se tiene que existen $n - 1$ enteros positivos k_1, k_2, \dots, k_{n-1} tales que

$$\begin{aligned} A_{n-1} \cap f^{-k_1}(A_n) &\neq \emptyset, \\ A_{n-2} \cap f^{-k_2}(A_{n-1} \cap f^{-k_1}(A_n)) &\neq \emptyset, \\ A_{n-3} \cap f^{-k_3}(A_{n-2} \cap f^{-k_2}(A_{n-1} \cap f^{-k_1}(A_n))) &\neq \emptyset, \\ A_1 \cap f^{-k_{n-1}}(A_2 \cap (f^{-k_{n-2}}(A_3 \cap \dots))) &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Como $A_1 \cap f^{-k_{n-1}}(A_2 \cap (f^{-k_{n-2}}(A_3 \cap \dots)))$ es abierto en I , contiene un punto periodico de f ($Per(f)$ es denso en I), digamos x . Entonces el período de x no puede ser menor que n , ya que $o(x, f)$ recorre n conjuntos disjuntos dos a dos, para cada $n \in \mathbb{N}$, luego $\{n \in \mathbb{N} : \exists x \in Per(f) \text{ con período } n\}$ no es acotado. \square

Bibliografía

- [A-S-Y] ALLIGOOD K. T., SAUER T. D., and YORKE J. A., *Chaos an Introduction to Dynamical Systems*. Springer, (1996).
- [B-S] BARTLE Robert G. and SHERBERT Donald R., *Introducción al Análisis Matemático de una Variable*. 2^{da} edición, Limusa Noriega, (1999).
- [G-S] GIRALDO Antonio y SASTRE M. Asunción, *Sistemas Dinámicos Discretos y Caos. (Teoría, ejemplos y algoritmos)*. Universidad Politecnica de Madrid, (2002).
- [H] HOLMGREN A. Richard, *A First Course in Discrete Dynamical Systems*. Springer, (1996).
- [L] LIMA, *Curso de Analice*. Volumen 1, 5^{da} edición.
- [M1] MÉNDEZ L. Héctor, *Introducción a los Sistemas Dinámicos (artículo en preparación)*. Universidad Autónoma de Mexico, (2003).
- [M2] MÉNDEZ L. Héctor, *Iteración de Funciones (notas para un curso de introducción a los sistemas dinámicos discretos.)* Vínculos Matemáticos, Serie Textos, número 4, (2000).
- [Mc] MONROY O. César, *Teoría del Caos*. Serie Tecnologías Emergentes de Cómputo, Alfaomega, (1997).
- [M-L-P] MONTEALEGRE C. Mauro, LONDOÑO B. Gustavo y POLANÍA Q. Luis, *Fundamentos de los Sistemas Dinámicos*. Universidad Surcolombiana, (2002).