ORIGAMI Y NÚMEROS REALES

Carmen Viviana Ardila Maestre

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2006

ORIGAMI Y NÚMEROS REALES

Carmen Viviana Ardila Maestre

Monografía presentada como requisito para optar el
título de Licenciada en Matemáticas

Director
Edilberto José Reyes
Msc en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA
2006

A mi padre Pedro Ardila Luna, por su acompañamiento y apoyo

AGRADECIMIENTOS

Doy mi más profundo agradecimiento:

- A **Dios**,
- A **mis padres Pedro y Ana, mis hermanos Marco, Julio y Turro**,
- A **mis Tíos Pedro y Patricia**,
- A **Carlos por su amor y su gran apoyo**,
- Al profesor **Edilberto Jose Reyes**,
- A **los profesores**, por su contribución en mi formación académica.
- A **mis familiares y amigos**, que de una u otra forma estuvieron conmigo, brindándome su compañía, ayuda y cooperación en el transcurso de mi carrera .
- A la **UIS**, institución que me dio la oportunidad de formarme profesionalmente.

TÍTULO: ORIGAMI Y NUMEROS REALES*

AUTOR: ARDILA MAESTRE Carmen Viviana**

PALABRAS CLAVES: Par origami, Números Origami, Puntos Construibles, Números Totalmente Reales, Polinomios Simetricos, Números Algebraicos, Campos.

DESCRIPCIÓN

Origami es el antiguo arte japonés del plegado de papel, este arte es apasionante para quienes sienten placer en la construcción de figuras geométricas en el plano y en el espacio, formalizaremos ahora estas construcciones para desarrollar la teoría origami aquí presentada; en donde los pliegues en nuestra hoja de papel serán representados por rectas en el plano y las esquinas del papel son solo puntos donde dichos puntos resultan de la intersección de dos rectas (pliegues).
El presente trabajo se basa en decidir que figuras se pueden construir y cuales no se pueden construir usando origami, para esto se desarrolla una teoría formal, se definen en R conceptos como: par origami, números origami, n´meros totalmente reales y algunas propiedades en los cuales son el pilar para el desarrollo de este escrito, también se tiene en cuenta algunos resultados del algebra para caracterizar los conceptos anteriomente mencionados. A medida que se va desarrollando la teoría se muestran varias construcciones geométricas y algunos ejercicios de aplicaci´n. En el último capitulo se muestra que es imposible construir un cubo con dos veces el volumen de un cubo dado usando origami.
Este articulo es el resultado de un proyecto de investigación de un estudiante de ultimo semestre de la Universidad de Texas bajo el asesoramiento de un mentor de la facultad y se tiene que nuestra caracterización origami esta muy relacionada con el problema 17 de David Hilbert

*Monografía

**Facultad de Ciencias. Escuela de matemáticas. Director: Edilberto Jose Reyes.

TITLE: ORIGAMI AND REAL NUMBERS*

AUTHOR: ARDILA MAESTRE Carmen Viviana**

KEY WORDS: Origami pairs, Origami numbers, construtible points, totally real numbers, symemtric polynomials, algebraic numbers, fields.

DESCRIPTION

Origami is the ancient Japanese of the paper folding. This is a fascinating art for whom fell pleasure in the construction of geometric figures in the plane and in the space. Now will formalize these constructions to develop the origami theory here presented; in which the folding in our sheet of paper will be represented by straight lines in the plane and the paper corners are just points which are the result of the two straight lines intersection (folding).

This work is based in deciding which figures can be constructed using origami and which cannot. For this to happen, a formal theory is developed. There are concepts in R defined as: Origami pair, origami numbers, totally real numbers, and some properties which are the pillar for the development of this text. Some algebra results are also taken into account to characterize the previously mentioned concepts. As the theory is being developed, several geometric constructions and some application exercises are shown. At the last chapter, it is shown that it is impossible to construct a cube with twice the volume of a given cube using origami.

This article is the result of an investigation project done by a last semester student from the University of Texas under the consultancy of a faculty mentor. We know that our origami characterization is much related to the David Hilbert's problem number 17.

---

*Monograph

**Faculty of sciences. Mathematics school. Director: Edilberto Jose Reyes.

ÍNDICE GENERAL

Introducción

El origami es una ocupación apasionante para aquel que siente placer en las figuras y las formas. Por esto, la particularidad de esta técnica es la transformación del papel en formas de distintos tamaños y simbología, partiendo de una base inicial cuadrada o rectangular que pueden ir desde sencillos modelos hasta plegados de gran complejidad.

Este trabajo pretende desarrollar una teoría formal para llegar a decidir que figuras se pueden construir y cuales no se pueden construir usando origami;
En el capitulo 1 se muestran algunas definiciones ya conocidas del algebra y se demuestran algunos teoremas de geometría que son utilizados en gran parte para el desarrollo de este escrito.

En el segundo capitulo se definen conceptos como par origami, números origami, puntos construibles y se muestran construcciones geométricas basadas en ellos, se tienen varios ejercicios resueltos y se dan ciertas proposiciones que nos sirven para hallar mas clases de números origami.

Para terminar en el tercer capitulo se trabaja con los números totalmente reales y sus operaciones, se demuestra un resultado muy importante en donde este se utiliza para demostrar la final caracterización de los números origami y por ultimo se muestran dos ejercicios en donde se ve que dos figuras no se pueden construir usando origami.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Definicion 1.1.

Dos triángulos $\triangle\ ABC$ *y* $\triangle\ DEF$ *son congruentes si hay una correspondencia entre sus vertices de manera que cada par de lados y ángulos correspondientes son congruentes.*

Definicion 1.2.

Dos triángulos $\triangle\ ABC$ *y* $\triangle\ DEF$ *son semejantes si sus ángulos son respectivamente iguales, es decir* $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ *y sus lados son proporcionales* $\left(\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}\right)$.

Definicion 1.3.

Ángulos correspondientes: Son aquellos que están en el mismo lado de la transversal. Uno de los ángulos es un ángulo exterior y el otro es un ángulo interior.

Definicion 1.4.

La distancia entre un punto y una recta es la longitud del segmento trazado desde el punto perpendicular a la recta.

1.1. Teorema de Pitágoras

Si $\triangle\ ABC$ es un triángulo rectángulo entonces el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Demostración.

Dado el $\triangle\ ABC$ con longitud de hipotenusa c y con longitudes de catetos $a\ y\ b$. Debemos demostrar que $c^2 = a^2 + b^2$.

Si se construye un cuadrado sobre $\triangle\ ABC$ como el que se muestra en la figura 1.1

El cuadrado sobre c tendrá area de c^2.

El cuadrado sobre el lado c consta de cuatro triángulos congruentes con $\triangle\ ABC$ y un cuadrado. La figura muestra que la longitud de un lado del cuadrado pequeño es $a - b$. Puede encontrarse el area del cuadrado grande sumando las areas de los cuatro triángulos y el area del cuadrado pequeño.

El area de los triángulos es $\frac{ab}{2}$ y el area del cuadrado es $(a - b)^2$. Así:

$c^2 = 4(\frac{ab}{2}) + (a - b)^2.$

$c^2 = 2ab + (a^2 - 2ab + b^2)$

$c^2 = a^2 + b^2.$

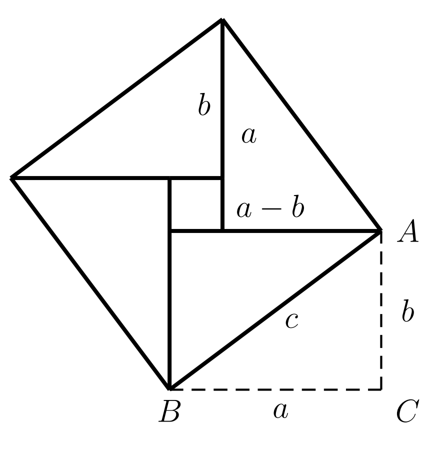


Figura 1.1

1.2. Rectas

1.2.1. Rectas paralelas

Definicion 1.5.

Las rectas paralelas son rectas que están en el mismo plano y no se intersecan.

Teorema 1.1.

Dos rectas no verticales L_1 y L_2 son paralelas si y solo si, sus pendientes m_1 y m_2 son iguales. $(L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2\ )$

Demostración.

$\Rightarrow)$ *Consideremos dos rectas L_1 y L_2, ninguna de ellas paralelas al eje Y. Sean m_1 y m_2 las pendientes de L_1 y L_2, respectivamente.*

Si $L_1 \parallel L_2$, entonces $\beta_1 = \beta_2$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas (ver figura 1.2). Como $\beta_1 = \beta_2$, entonces $\tan\beta_1 = \tan\beta_2$ y por tanto $m_1 = m_2$.

$\Leftarrow)$ *Si $m_1 = m_2$ entonces $\tan\beta_1 = \tan\beta_2$, lo que nos permite concluir que $\beta_1 = \beta_2$ ya que la inclinación de una recta esta restringida $0 \leq \beta < \pi$.*

Como $\beta_1 = \beta_2$ entonces podemos concluir que $L_1 \parallel L_2$.

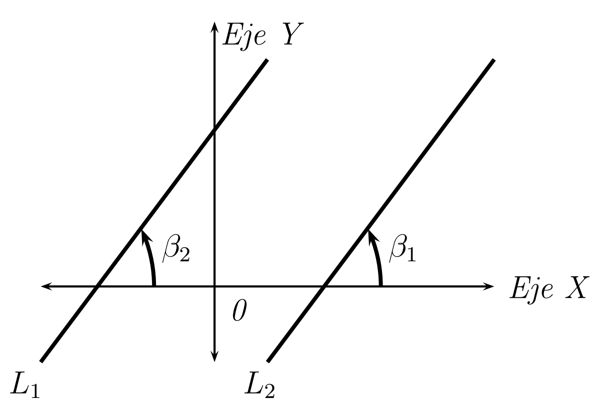


Figura 1.2

1.2.2. Rectas perpendiculares

Definicion 1.6.

Dos rectas son perpendiculares si al intersecarse forman ángulos rectos congruentes.

Teorema 1.2.

Dos rectas no verticales L_1 y L_2 son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es igual a menos uno. $(\ L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \ )$

Demostración

$\Rightarrow)$ *Si las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares como lo muestra la figura 1.3, entonces $\beta_2 = \beta_1 + 90°$ (la medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes).*

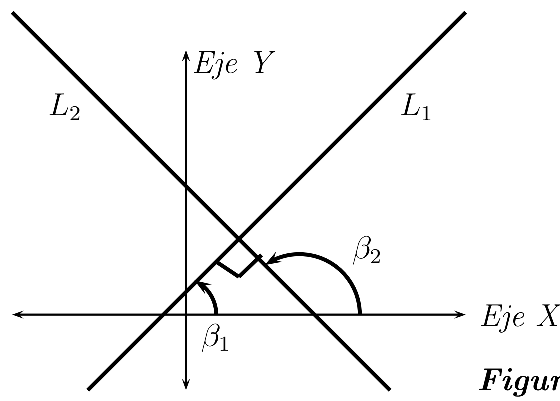


Figura 1.3

Si $\beta_2 = \beta_1 + 90°$, *entonces :*

$$\begin{aligned} \tan\beta_2 &= \tan(\beta_1 + 90°) \\ &= -\cot\beta_1 \\ &= -\tfrac{1}{\tan\beta_1} \end{aligned}$$

Como $\tan\beta_2 = m_2$ *y* $\tan\beta_1 = m_1$, *obtenemos:*

$m_2 = -\frac{1}{m_1}$. *entonces*

$m_1 \cdot m_2 = -1.$

Recíprocamente tenemos:

$\Leftarrow)$ *Si* $m_1 \cdot m_2 = -1$ *entonces* $\tan\beta_1 \cdot \tan\beta_2 = -1$ *tal que* $\tan\beta_1 > 0$ *y* $\tan\beta_2 < 0$

Como $\tan\beta_1 \cdot \tan\beta_2 = -1$ *entonces* $\tan\beta_2 = -\frac{1}{\tan\beta_1} = -\cot\beta_1$.

Sabemos que $\tan(\beta_1 + 90°) = -\cot\beta_1$ *entonces* $\tan\beta_2 = \tan(\beta_1 + 90°)$ *luego tenemos que* $\beta_2 = \beta_1 + 90°$ *y* β_2 *lo podemos considerar como el ángulo exterior a un triángulo que tiene como ángulos internos no adyacentes a ángulos de medidas* β_1 *y* $90°$*. Con esto concluimos que* $L_1 \perp L_2$*.*

1.2.3. Distancia entre dos puntos

Sea $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos en $\mathbb{R}^2$.

La distancia entre los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es el módulo del vector PQ :

$d(P,Q) = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Queremos encontrar la longitud del segmento $\overline{PQ}$ (figura 1.4) en términos de las coordenadas conocidas de P y Q.

Por P se traza una paralela al eje X y por Q una paralela al eje Y. Estas dos rectas se intersecan en un punto R. La abscisa de R es la misma que la abscisa de Q, esto es, x_2 y la ordenada de R es la misma ordenada de P, es decir y_1. Por tanto las coordenadas de R son (x_2, y_1).

El triángulo PRQ es rectángulo, ahora aplicando el teorema de pitágoras y por la figura sabemos que $PR = x_2 - x_1$ y $RQ = y_2 - y_1$ tenemos:

$$(PQ)^2 = (PR)^2 + (RQ)^2$$

$$(PQ)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \qquad \text{despejando PQ tenemos}$$

$$(PQ) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se ha tomado el signo positivo puesto que se trata de la medida de una distancia. PQ es entonces, la medida de la distancia, que llamamos d(P,Q), lugo se tiene

$d(P,Q) = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

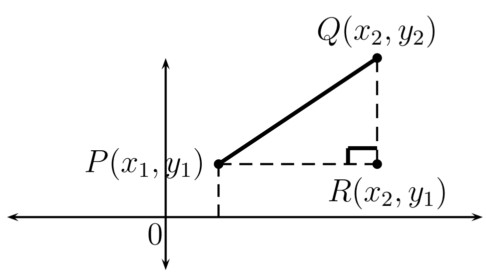


Figura 1.4

1.3. Conceptos elementales de algebra

Definicion 1.7.

Un conjunto $\mathbf{G}$ *con una operación binaria* $*$ *en el definida se dice que es un* **grupo** *si se cumplen las siguientes propiedades:*

i. La operación binaria $*$ *es cerrada en* $\mathbf{G}$, *esto es,*
Si $g_1, g_2 \in \mathbf{G} \Rightarrow g_1 * g_2 \in \mathbf{G}$

ii. La operación binaria $*$ *es asociativa, esto es,*
$g_1 * (g_2 * g_3) \ = \ (g_1 * g_2) * g_3 \quad \forall\ g_1, g_2, g_3 \in \mathbf{G}$

iii. Existe un elemento neutro $e \in \mathbf{G}$ *tal que:*
$e * g \ = \ g * e \quad \forall g \in \mathbf{G}.$

iv. Para todo elemento $g \in \mathbf{G}$ *existe un elemento* $g' \in \mathbf{G}$, *denominado inverso de* g, *tal que:* $g * g' \ = \ g' * g \ = \ e$

Si $(\mathbf{G}, *)$ es un grupo y la operación binaria $*$ posee la siguiente propiedad $g_1 * g_2 \ = \ g_2 * g_1 \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbf{G}$, se llama propiedad conmutativa, diremos que $(\mathbf{G}, *)$ es un grupo conmutativo o grupo abeliano.

Definicion 1.8.

Dado un grupo $(\mathbf{G}, *)$ *y un subconjunto* H *de* $\mathbf{G}$.
Diremos que H *es un* **subgrupo** *de* $(\mathbf{G}, *)$ *y escribiremos* $(H, *) \leq (\mathbf{G}, *)$, *si* H *es un grupo con respecto a la operación* $*$ *definida en* $\mathbf{G}$.
Puesto que la operación $*$ *es asociativa en* $\mathbf{G}$, *esta operación también sera asociativa en cualquier subconjunto* H *de* $\mathbf{G}$; *se tiene entonces que:*
$(H, *)$ *es un subgrupo de* $(\mathbf{G}, *)$ *si se cumplen las tres condiciones siguientes:*

1. $*$ *es cerrada en* H

2. *El elemento neutro de* $\mathbf{G}$ *pertenece a* H

3. *Si* $x \in H$, *su inverso,* x^{-1}, *también pertenece a* H.

Definicion 1.9.

Un conjunto A dotado de dos operaciones binarias cerradas que escribiremos (+) suma y $(\cdot)$ producto, se llama **Anillo** *si se cumplen las siguientes propiedades:*

i. (A,+) es un grupo Abeliano.

ii. El producto $(\cdot)$ es asociativo.

iii. Se cumplen las propiedades distributivas, es decir

$$a \cdot (b + c) \ = \ a \cdot b + a \cdot c \qquad (b + c) \cdot a \ = \ b \cdot a + c \cdot a \quad \forall\ a, b, c \in A$$

- Si el producto es conmutativo es decir:
  Si $a \cdot b \ = \ b \cdot a$, se dice que A es un anillo conmutativo.

- Si existe un elemento, que simbolizaremos 1 tal que para todo $a \in A$ se cumple que $a \cdot 1 \ = \ 1 \cdot a$, se dice que A es un anillo con unidad, el elemento 1 recibe el nombre de elemento unidad y es único.

Definicion 1.10.

Un anillo conmutativo con unidad $(A, +, \cdot)$ se dice que es un **campo** *si el conjunto A^* formado por todos los elementos de A excepto el neutro de la suma es un grupo con respecto a la segunda operación.*

1.4. Polinomios

Definicion 1.11.

Sea **F** *un campo. Llamaremos anillo de polinomios sobre* **F** *en la indeterminada x y lo representaremos por $\mathbf{F}[x]$ es decir $p(x) \in \mathbf{F}[x]$ si $p(x) \ = \ a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ donde n puede ser cualquier entero no negativo y los coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$ están todos en* **F**.

Definicion 1.12.

$$\begin{aligned} \text{Si } \; p(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^n \quad\quad y \\ q(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \quad\quad \textit{están ambos en } \mathbf{F}[x] \textit{ entonces} \end{aligned}$$

$p(x) = q(x) \Leftrightarrow$ *para todo entero* $i \geq 0$, $a_i = b_i$.

Definicion 1.13.

$$\begin{aligned} \text{Si } \; p(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^n \quad\quad y \\ q(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \quad\quad \textit{están ambos en } \mathbf{F}[x] \textit{ entonces} \\ p(x) + q(x) &= c_0 + c_1x + \cdots + c_tx^t \quad\quad \textit{donde para cada } \; c_i = a_i + b_i. \end{aligned}$$

Definicion 1.14.

$$\begin{aligned} \text{Si } \; p(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^n \quad\quad y \\ q(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \quad\quad \textit{están ambos en } \mathbf{F}[x] \textit{ entonces} \\ p(x) \cdot q(x) &= c_0 + c_1x + \cdots + c_tx^t \quad\quad \textit{donde para cada } c_t = a_tb_0 + a_{t-1}b_1 + \cdots + a_0b_t. \end{aligned}$$

Definicion 1.15.

Un polinomio $p(x) \in \mathbf{F}[x]$ *se dice que es irreducible sobre* $\mathbf{F}[x]$ *siempre que* $p(x) = a(x)b(x) \in \mathbf{F}[x]$, *entonces uno de los dos,* $a(x)$ *o* $b(x)$ *tienen grado cero (es decir es una constante).*

1.4.1. Polinomios sobre el campo $\mathbb{Q}$

Definicion 1.16.

Se dice que el polinomio $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ *donde* $a_0, a_1, \cdots, a_n$ *son enteros, es primitivo si el máximo común divisor de* $a_0, a_1, \cdots, a_n$ *es uno.*

Definicion 1.17.

Un polinomio se dice que es entero mónico si todos sus coeficientes son enteros y su coeficiente mas alto es uno.

CAPÍTULO 2

NÚMEROS ORIGAMI

2.1. Origami

Origami es el arte de origen japonés del plegado de papel que en español también se conoce como "papiroflexia", el origen de la palabra procede de los vocablos japoneses "*oru*" que significa plegar y "kami"que designa papel, su técnica es basada en el doblado de papel para crear estimulantes y bellas figuras bi y tridimensionales.

En este escrito no trabajaremos el origami como tal, sino lo que haremos es desarrollar una teoría con el fin de poder demostrar que figuras se pueden construir y cuales no se pueden construir usando origami, para esto utilizaremos definiciones como par origami, números origami, números totalmente reales, entre otras definiciones mas que se irán desarrollando en el transcurso del trabajo con el fin de llegar a la caracterización de los números origami.

Una de las cosas mas interesantes que se muestra es, que: es imposible usando origami construir un cubo con dos veces el volumen de un cubo dado.
Nuestra caracterización algebraica origami, esta muy relacionada con el problema 17 de David Hilbert.

Los problemas de Hilbert se plantearon en el primer congreso Internacional de matemáticas realizado en Paris en el año 1900, allí el dio una lista muy influyente de 23 problemas sin resolver, se reconoce de forma general que esta es la recopilación de problemas abiertos mas exitosa y de profunda consideración producida por un único matemático.

El problema 17 de Hilbert pide esencialmente demostrar que cualquier función racional no negativa se puede expresar como una suma de cuadrados perfectos de funciones racionales. Este problema fue resuelto por Emil Artin en 1927, es importante notar que la demostración es existencial, porque demuestra que existe alguna suma de cuadrados de funciones racionales que la expresa pero no dice como construir esa suma.
En 1957, Georg Kreisel exhibió un método para construir la deseada suma de funciones racionales utilizando el análisis no estándar de Abraham Robinson.

Entre otras cosas, Sundara Rows en sus lecturas muestra construcciones para los problemas 5 y 17 de Hilbert y la duplicación de un cubo. Sus construcciones, sin embargo usa mas técnicas generales del plegado de papel que las que nosotros mismos consideramos aquí. Felix Klein cita los trabajos de Rows en sus lecturas sobre problemas seleccionados en geometría elemental.

El articulo "*Totally real origami and imposible paperfolding*" es el resultado del proyecto de investigación de un estudiante de ultimo semestre de la universidad de Texas bajo el asesoramiento de un mentor de la facultad en el programa Junior Fellows.

Ahora para empezar, mostraremos algunas reglas de construcciones origami, primero consideraremos una hoja cualquiera de papel. Nuestro trabajo con la hoja de papel servirá como un modelo intuitivo para llegar a nuestra definición de construcciones origami en el plano euclidiano.

Para comenzar hay cuatro métodos generales de doblar una pieza de papel. Estas construcciones servirán como base para definir un par origami.

1 ▲ Para construir la recta ℓ_1 hacemos un pliegue a través de dos esquinas opuestas del papel como en la figura 2.1.

2▲ Se construye la recta ℓ_2 haciendo coincidir dos esquinas opuestas, esto es, en la figura 2.1 podemos hacer coincidir por ejemplo, las esquinas A y C y el pliegue formado por ℓ_2 sera la bisectriz perpendicular del segmento $\overline{AC}$ construido en 1 ▲.

3▲ Otra construcción natural consiste en hacer coincidir dos rectas. Por ejemplo, supongamos que $\overline{BC}$ es el borde de la hoja de papel y ℓ_2 es la recta construida en 2▲, por tanto tenemos que $\overline{BC}$ y ℓ_2 son dos rectas en el plano, si hacemos coincidir $\overline{BC}$ con ℓ_2 y formamos el pliegue obtenemos a ℓ_3 que divide el ángulo formado por $\overline{BC}$ y ℓ_2 en dos partes iguales.

En particular, si tenemos dos rectas paralelas y las hacemos coincidir obtendremos precisamente una recta paralela entre estas dos.

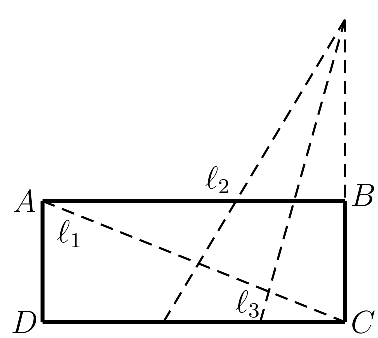


Figura 2.1

4▲ En esta construcción iniciamos con dos rectas sobre la hoja de papel como en la primera parte de la figura 2.2, hacemos un pliegue a lo largo de la recta ℓ_1, nótese que la recta ℓ_2 se encuentra sobre la hoja de papel, sin desdoblar el papel doblemos a lo largo de la recta ℓ_2 y se obtiene un nuevo pliegue en la hoja debajo de ℓ_2, si llamamos a este nuevo pliegue ℓ_3 y desdoblamos la hoja de papel, entonces es fácil ver en la segunda parte de la figura 2.2 que ℓ_3 es la imagen o reflexión de ℓ_2 sobre ℓ_1.

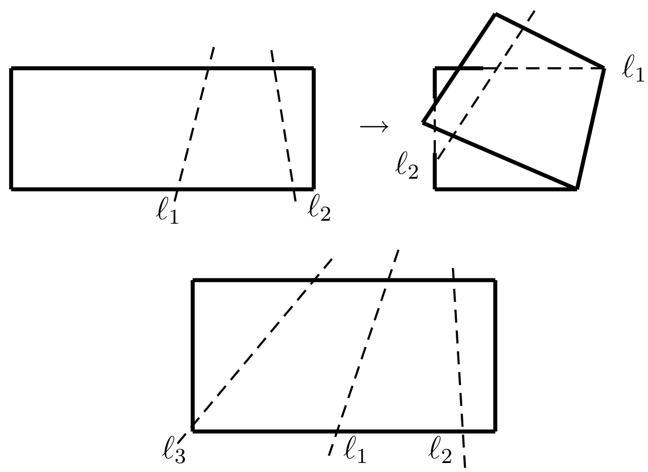


Figura 2.2

Nosotros ahora formalizarlos estas construcciones para definir un par origami en el plano. Los pliegues en nuestra hoja de papel son solo rectas en el plano y las esquinas del papel estarán representadas por puntos, donde dichos puntos se formaran por la intersección de dos rectas (pliegues).

Las construcciones anteriores, motivan la siguiente definición.

2.2. Par Origami

Definicion 2.1.

Sea $\mathbf{P}$ *un subconjunto de puntos en* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbf{L}$ *una colección de rectas en* $\mathbb{R}^2$*.*

Decimos que $(\mathbf{P}, \mathbf{L})$ *es un par origami si:*

I. *El punto de intersección de cualquiera dos rectas no paralelas en* $\mathbf{L}$ *es un punto en* $\mathbf{P}$*.*

II. *Dados cualesquier dos puntos distintos en* $\mathbf{P}$*, hay una recta en* $\mathbf{L}$ *que pasa a través de ellos.*

III. *Dados cualesquier dos puntos distintos en* $\mathbf{P}$*, la bisectriz perpendicular del segmento que une los dos puntos es una recta en* $\mathbf{L}$*.*

IV. *Si* ℓ_1 *y* ℓ_2 *son rectas en* $\mathbf{L}$ *entonces la recta equidistante de* ℓ_1 *y* ℓ_2 *es una recta en* $\mathbf{L}$*.*

V. *Si* ℓ_1 *y* ℓ_2 *son rectas en* $\mathbf{L}$ *entonces existe una recta* ℓ_3 *en* $\mathbf{L}$ *tal que* ℓ_3 *es la imagen o reflexión de* ℓ_2 *sobre* ℓ_1*.*

Definicion 2.2.
Un subconjunto $\mathbf{P}$ *de* $\mathbb{R}^2$*, es cerrado bajo construcciones origami, si existe una colección de rectas en* $\mathbb{R}^2$*, tal que* $(\mathbf{P}, \mathbf{L})$ *es una par origami.*

En el siguiente lema damos un ejemplo de una construcción origami análoga a muchas construcciones con regla y compás denominada construcción de rectas paralelas.

Lema 2.1.
Es posible construir una recta paralela a una recta dada a través de cualquier punto dado usando origami.

Demostración.
En la figura 2.3, por hipótesis tenemos una recta ℓ dada y un punto P, tomamos dos puntos P_1 y P_2 sobre ℓ. Por la propiedad II en la definición de par origami, podemos construir rectas ℓ_1 y ℓ_2 que pasan a través de P_1,P y P_2,P respectivamente.

Por la propiedad V en la definición podemos reflejar ℓ_1 y ℓ_2 a través de ℓ para obtener ℓ_3 y ℓ_4. Ahora la intersección de ℓ_3 y ℓ_4 es un punto construible. De este modo hay una recta, ℓ_5 a través de este punto y el punto dado P, por la propiedad I y II.
Llamaremos al punto donde ℓ_5 y ℓ se intersecan P_3.

Para terminar la construcción usemos la propiedad III, para construir una bisectriz perpendicular a P y P_3, luego ℓ se refleja a través de esta bisectriz por la propiedad V y se obtiene la esperada recta ℓ_6.

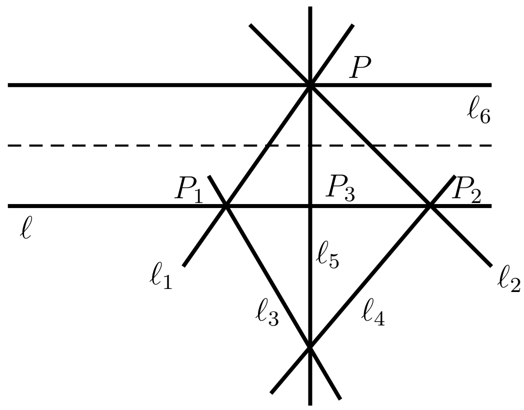


Figura 2.3

Mediante la definición de par origami, el siguiente lema muestra como construir un triángulo rectángulo si se conoce la hipotenusa y uno de sus lados.

Lema 2.2. *Dados cuatros puntos distintos* A, B, C, D *construir un punto* F *tal que* A, B, F *son los vertices del triángulo rectángulo con lados* $\overline{AB}$ *y* $\overline{BF}$ *donde la longitud de* $\overline{BF}$ *es igual a la longitud de* $\overline{CD}$.

Demostración.

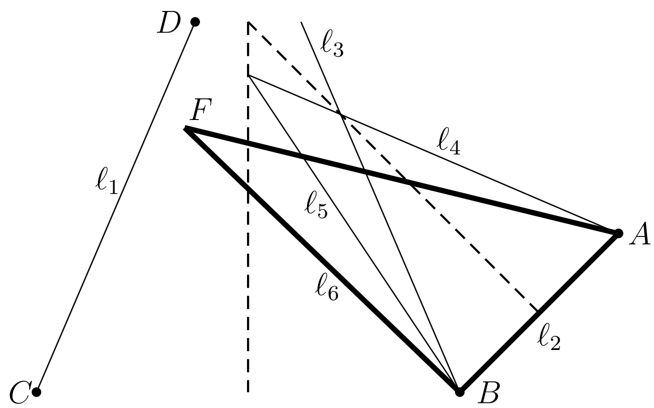


Figura 2.4

Por hipótesis tenemos cuatro puntos A, B, C, D, *por la propiedad* II *en la definición de par origami podemos construir rectas* ℓ_1 *y* ℓ_2 *a través de* C,D *y* A, B *respectivamente.*

Ahora por la propiedad III *construimos una bisectriz perpendicular a los puntos* C, B *y reflejamos a* ℓ_1 *a través de esta bisectriz y obtenemos a* ℓ_3 *por la propiedad* V. *Usando nuevamente la propiedad* III *construimos una bisectriz perpendicular a los puntos* A, B *y reflejamos a* ℓ_3 *a través de esta bisectriz por la propiedad* V *y se obtiene* ℓ_4.
Ahora la intersección de ℓ_4 *y la bisectriz perpendicular de* C, B *es un punto construible por la propiedad* I. *Luego por la propiedad* II *podemos construir una recta a través del punto construible y* B*, llamaremos a esta recta* ℓ_5. *Por la propiedad* V*, reflejamos a* ℓ_3 *a través de* ℓ_5 *y obtenemos a* ℓ_6.
Ahora como B *es un punto exterior a la bisectriz* B, A *podemos construir una recta paralela a ella que pase por* B*, utilizando el lema 2.1. Tenemos que la recta* ℓ_2 *corta a las dos paralelas, luego sus ángulos correspondientes son congruentes, como una paralela es bisectriz perpendicular a* ℓ_2 *luego sus ángulos son de* 90^0*, por lo tanto el ángulo que forma la paralela que pasa por* B *con* ℓ_2 *es de* 90^0 *tenemos entonces que esta paralela se interseca en muchos puntos con* ℓ_6*, llamemos al ultimo punto donde* ℓ_6 *se interseca con la paralela "*F*" luego construimos una recta a través de* F, A *por la propiedad* II *en la definición y obtenemos el deseado triángulo rectángulo con vertices* A, B, F *y* $\overline{BF} = \overline{CD}$.

En este trabajo veremos que puntos pueden ser construidos a partir de dos puntos usando solamente las construcciones origami descritas anteriormente. Llamaremos a esa colección de puntos el conjunto origami de puntos construibles.

Definicion 2.3.

El conjunto $\mathbf{P}_0$ *definido por:*

$\mathbf{P}_0 = \bigcap\{\mathbf{P} | (0,0), (0,1) \in \mathbf{P}$ *y* $\mathbf{P}$ *es cerrado bajo construcciones origami*$\}$ *se llama* ***conjunto origami de puntos construibles*** .

Ahora que tenemos una mejor idea de algunas construcciones origami. Se desarrollan herramientas para mostrar que figuras son o no construibles. Lo primero que necesitamos es la noción de números origami.

Definicion 2.4. *Decimos que* $\alpha \in \mathbb{R}$ *es un número origami si existe un par origami* $(\mathbf{P}, \mathbf{L})$ *y* $v_1, v_2 \in \mathbf{P}$ *tal que* $|\alpha| = d(v_1, v_2)\}$.
El conjunto $\mathbf{F}_0 = \{\alpha \in \mathbf{R} |\ \alpha$ *es un número origami*$\}$ *se llama*
conjunto de números origami.

Es fácil ver que $(x, y) \in \mathbf{P}_0$ si y solo si x y y pertenecen a $\mathbf{F}_0$. Probaremos a continuación que los números $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}...$ son números origami.

Proposición 2.1. *La pareja* $(x, y) \in \mathbf{P}_0 \Leftrightarrow x$ *y* y *pertenecen a* $\mathbf{F}_0$

Demostración.
Vamos a demostrar esta doble implicación:
i) Si $(x, y) \in \mathbf{P}_0 \Rightarrow x$ y y pertenecen a $\mathbf{F}_0$

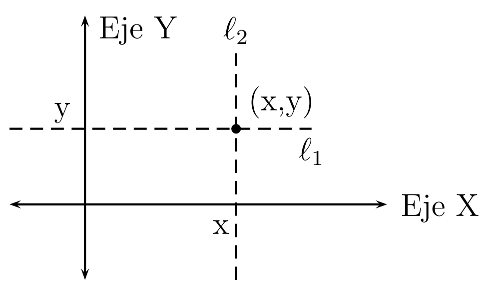


Figura 2.5

Como $(x, y) \in \mathbf{P}_0$, entonces (x, y) es un punto construible. En la figura 2.5 tenemos el punto (x, y) exterior al eje X y al eje Y respectivamente, utilizando el lema 2.1 construimos líneas paralelas ℓ_1 y ℓ_2 a través del punto (x, y), donde ℓ_1 es paralela al eje X y ℓ_2 es paralela al eje Y.
Ahora ℓ_1 interseca al eje Y en $(0, y)$ y ℓ_2 interseca al eje X en $(x, 0)$ por propiedad I de la definición de par origami, luego $(x, 0)$ y $(0, y)$ son puntos construibles entonces

$$d((x, 0), (0, 0)) = |x| \tag{2.1}$$

$$d((0, y), (0, 0)) = |y| \tag{2.2}$$

Se concluye por (2.1) y (2.2) que x y $y \in \mathbf{F}_0$.

$ii)$ Si $x,\, y \in \mathbf{F}_0 \Rightarrow (x, y) \in \mathbf{P}_0$

Si $x,\, y \in \mathbf{F}_0 \Rightarrow \exists\ \upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4 \in \mathbf{P}$ tal que

$d(\upsilon_1, \upsilon_2) = |x|$

$d(\upsilon_3, \upsilon_4) = |y|,$

Utilizando la hipótesis del lema 2.2, podemos construir un triángulo rectángulo con los cuatro puntos dados $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4$ y un punto construible υ_5 donde $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_5$ son los vertices del triángulo rectángulo y $\overline{\upsilon_2\upsilon_5} = \overline{\upsilon_3\upsilon_4}$.

Como por hipótesis tenemos que $\overline{\upsilon_3\upsilon_4} = |y|$ entonces $\overline{\upsilon_2\upsilon_5} = |y|$ ahora

1) Si $\upsilon_1 = (0, 0)$

Tenemos que $\upsilon_5 = (x, y)$ y como υ_5 es un punto construible entonces $(x, y) \in \mathbf{P}_0$.

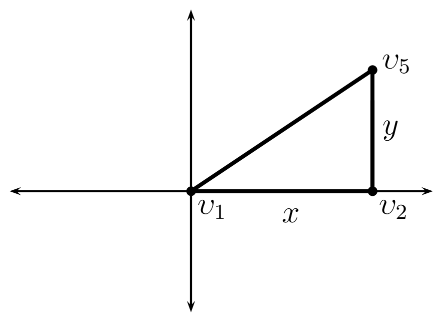


Figura 2.6

2) Si $\upsilon_1 \neq (0, 0)$

Trasladamos el triángulo rectángulo al punto $(0, 0)$ y aplicamos lo obtenido en el punto 1).

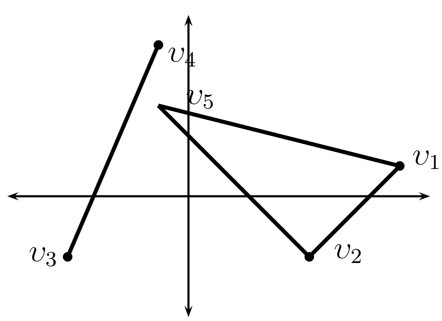


Figura 2.7

2.3. Otros Números Origami

Proposición 2.2. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$*... son números origami.*

Demostración.

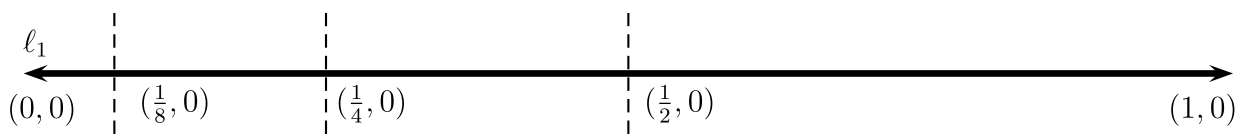


Figura 2.8

Tenemos los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$, por la propiedad II de la definición de par origami construimos una recta ℓ_1 a través de ellos, luego construimos la bisectriz perpendicular a los puntos dados por la propiedad III y tenemos que la bisectriz interseca a ℓ_1 en $(\frac{1}{2},0)$, por tanto $(\frac{1}{2},0)$ es un punto construible por la propiedad I entonces por la proposición 2.1 se concluye que $\frac{1}{2}$ es un numero origami.

Ahora por la propiedad III, construimos una bisectriz perpendicular al segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(\frac{1}{2},0)$, luego la intersección de este segmento y la bisectriz forma un punto construible en $(\frac{1}{4},0)$ por la propiedad I, como $(\frac{1}{4},0)$ es un punto construible entonces $\frac{1}{4}$ es un numero origami por proposición 2.1.

Nuevamente construimos una bisectriz perpendicular al segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(\frac{1}{4},0)$ por la propiedad III entonces la bisectriz perpendicular interseca al segmento en $(\frac{1}{8},0)$ por la propiedad II, luego este es un punto construible y por tanto $\frac{1}{8}$ es un numero origami.

Y si seguimos haciendo infinitamente estas construcciones quedara demostrado que $\frac{1}{2^n}$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$, son números origami.

Ejercicio 2.1.

Demostrar que $\frac{1}{5}$ *es un número origami.*

Demostración.

En la figura 2.9 tenemos los puntos $(0, \frac{5}{8})$ *y* $(1, 0)$ *luego por la propiedad* II *de la definición par origami construimos una linea* ℓ *que pasa por los dos puntos. Ahora tenemos el punto construible* $(0, \frac{1}{8})$ *y por el lema 2.1 construimos una recta* ℓ_2 *paralela a* ℓ *que pasa por este punto. Luego* ℓ_2 *interseca al eje* X *en* $(\frac{1}{5}, 0)$ *por la propiedad* I *entonces* $(\frac{1}{5}, 0)$ *es un punto construible y por lo tanto* $\frac{1}{5}$ *es un número origami por proposición 2.1.*

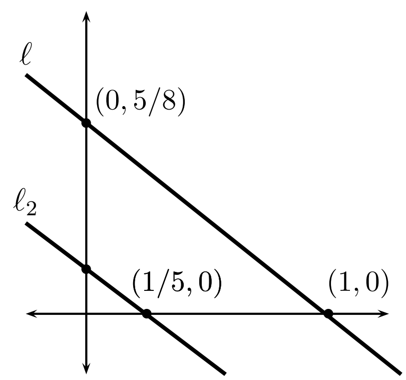


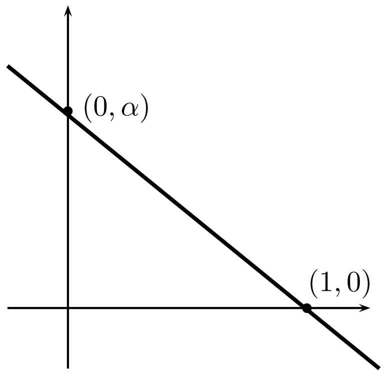
Figura 2.9

Otra clase de números origami puede generalizarse por una simple construcción geométrica. Comenzaremos con un segmento cualquiera, donde es posible construir un triángulo rectángulo como en la figura 2.11. De esto se sigue:

Proposición 2.3. $\sqrt{1+\alpha^2}$ *es un número origami para cualquier* α*, donde* α *es un número origami.*

Demostración.

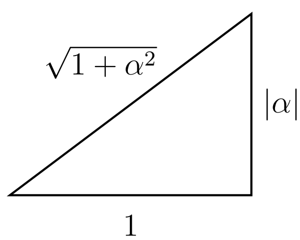
Como α *y* 0 *son números origami entonces* $(0, \alpha)$ *es un punto construible por la proposición 2.1, tenemos también que* $(1, 0)$ *es un punto construible luego por la propiedad* II *de la definición de par origami construimos una recta a través de ellos luego:*



$$
\begin{aligned}
d((0,0),(1,0)) &= |1| \\
d((0,0),(0,\alpha)) &= |\alpha|
\end{aligned}
$$

Figura 2.10

Utilizaremos el teorema de pitágoras para hallar la distancia entre $(0,\alpha)$ *y* $(1,0)$



$$
\begin{aligned}
h^2 &= (|\alpha|)^2 + 1^2 \\
h &= \sqrt{1+\alpha^2}
\end{aligned}
$$

Figura 2.11

Como $d((0,\alpha),(1,0)) = \sqrt{1+\alpha^2}$, *y* $\sqrt{1+\alpha^2} \in \mathbb{R}$ *entonces por la definición 2.4 concluimos que* $\sqrt{1+\alpha^2}$ *es un número origami.*

Corolario 2.1. $\sqrt{n}$ *es un número origami,* $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$

Demostración.

$\sqrt{2} = \sqrt{1+1^2}$ *Por la proposición 2.3,* $\sqrt{2}$ *es un número origami, porque 1 también lo es.*

$\sqrt{3} = \sqrt{1+(\sqrt{2})^2}$ *Por la proposición 2.3,* $\sqrt{3}$ *es un número origami, porque* $\sqrt{2}$ *también lo es.*

$$\sqrt{4} = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2}$$ *Por la proposición 2.3, $\sqrt{4}$ es un número origami, porque $\sqrt{3}$ también lo es.*

$\vdots$

$$\sqrt{n-1} = \sqrt{1+(\sqrt{n-2})^2}$$ *Por la proposición 2.3, $\sqrt{n-1}$ es un número origami porque $\sqrt{n-2}$ también lo es.*

$$\sqrt{n} = \sqrt{1+(\sqrt{n-1})^2}$$ *Por la proposición 2.3, $\sqrt{n}$ es un número origami porque $\sqrt{n-1}$ también lo es.*

Luego $\sqrt{n}$ es un número origami, $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$

2.4. Operaciones entre números origami

Proposición 2.4. *Si $\alpha, \beta \in \mathbf{F}_0 \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathbf{F}_0$*

Demostración.

Como $\alpha, \beta \in \mathbf{F}_0 \Rightarrow\ \exists\ v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbf{P}$ tal que:

$$dis(v_1, v_2) = |\alpha|$$
$$dis(v_3, v_4) = |\beta|,$$

Entonces como tenemos cuatro puntos v_1, v_2, v_3, v_4 con sus respectivas distancias, por el lema 2.2 podemos construir un triángulo rectángulo como el de la figura 2.12, donde $d(v_2, v_5) = |\beta|$ y v_5 es un punto construible (por las construcciones hechas en el lema 2.2).

Ahora por la propiedad II *de la definición par origami construimos una recta ℓ_5 a través de v_3, v_2, si reflejamos a ℓ_3 a través de ℓ_5 obtenemos otra recta ℓ_6 por la propiedad* V.

Como v_5 es un punto exterior a la bisectriz perpendicular de v_3, v_2 podemos construir una recta paralela a la bisectriz que pase por v_5 a esta recta la llamaremos ℓ_7, ahora la intersección de ℓ_6 y ℓ_7 es un punto construible v_6.

En la figura 2.12 podemos ver claramente que: $d(v_1, v_6) = |\alpha+\beta|$ *por lo tanto* $\alpha+\beta \in \mathbf{F}_0$

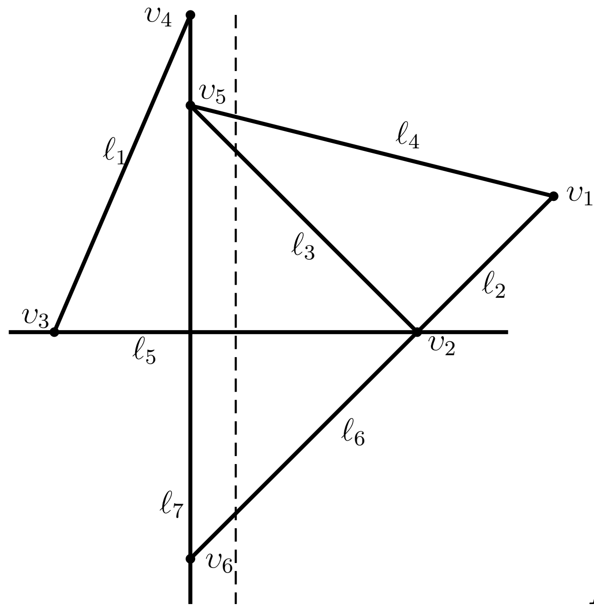


Figura 2.12

Proposición 2.5. *Si* $\alpha, \beta \in \mathbf{F}_0 \Rightarrow \beta - \alpha \in \mathbf{F}_0$

Demostración.

Como $\alpha, \beta \in \mathbf{F}_0 \Rightarrow\ \exists\ v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbf{P}$ *tal que:*

$dis(v_1, v_2) = |\alpha|$

$dis(v_3, v_4) = |\beta|,$

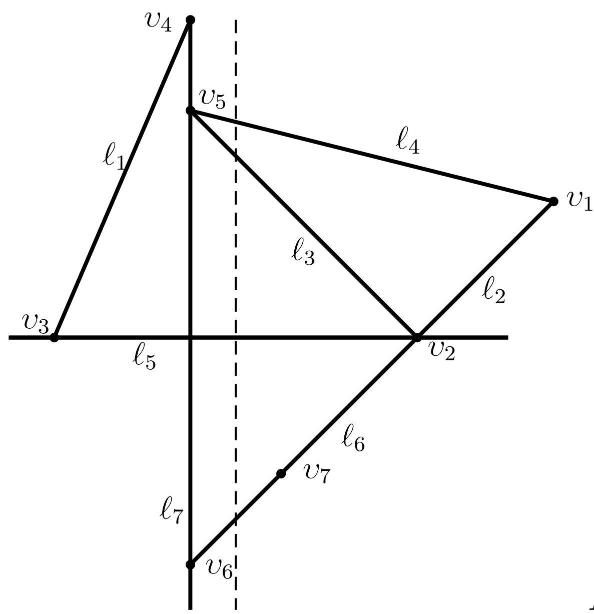


Figura 2.13

Por la proposición 2.4 tenemos las construcciones ya dadas en la figura 2.13.

Si reflejemos a ℓ_2 a través de ℓ_3 por la propiedad II de la definición par origami vemos que ℓ_2 interseca a ℓ_6 en v_7 por la propiedad I entonces de la figura 2.13 podemos ver que:

$d(v_6, v_7) = |\beta - \alpha|$, por lo tanto $\beta - \alpha \in \mathbf{F}_0$

Proposición 2.6. *Si* $\alpha, \beta \in \mathbf{F}_0 \Rightarrow \alpha * \beta \in \mathbf{F}_0$

Demostración.

Tenemos que $0, 1, \alpha, \beta$ *son números origami por lo tanto* $(0,0), (1,0), (|\beta|, 0), (1, |\alpha|)$ *son puntos construibles por la proposición 2.1, luego construimos un triángulo rectángulo por el lema 2.2 y vemos que:*

$$d((0,0),(1,0)) = |1| \tag{2.3}$$

$$d((1,0),(1,|\alpha|)) = |\alpha| \tag{2.4}$$

$$d((0,0),(|\beta|,0)) = |\beta| \tag{2.5}$$

$$\tag{2.6}$$

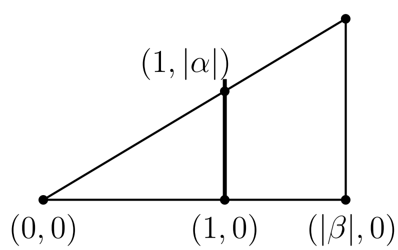


Figura 2.14

Utilizando la definición de triángulos semejantes para hallar la distancia entre dos puntos del triángulo rectángulo, tenemos que:

$$\frac{d((0,0),(1,0))}{d((0,0),(|\beta|,0))} = \frac{d((1,0),(1,|\alpha|))}{d((|\beta|,0),(|\beta|,x))} \quad \textit{luego por (2.3), (2.4), (2.5) tenemos:}$$

$$\frac{1}{|\beta|} = \frac{|\alpha|}{d((|\beta|,0),(|\beta|,x))} \quad \textit{entonces}$$

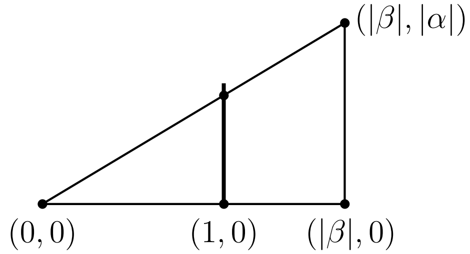
$$d((|\beta|,0),(|\beta|,x)) = |\alpha\beta|$$

Como $|\alpha\beta|$ es la distancia entre dos puntos y aplicando la definición 2.4 podemos concluir que: $\alpha * \beta \in \mathbf{F}_0$.

Proposición 2.7. *Si $\alpha, \beta \in \mathbf{F}_0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbf{F}_0$ con $\beta \neq 0$.*

Demostración.

Tenemos los puntos $(0,0), (1,0), (|\beta|,0), (|\beta|,|\alpha|)$ donde $0, 1, \alpha, \beta$ son números origami. Como tenemos cuatro puntos construimos un triángulo rectángulo con las características dadas en el lema 2.2, utilizando la definición de triángulos semejantes tenemos:



$$d((0,0),(1,0)) = |1| \qquad (2.6)$$

$$d((|\beta|,0),(|\beta|,|\alpha|)) = |\alpha| \qquad (2.7)$$

$$d((0,0),(|\beta|,0)) = |\beta| \qquad (2.8)$$

Figura 2.15

Utilizando semejanza entre triángulos se tiene que:

$$\frac{d((0,0),(1,0))}{d((0,0),(|\beta|,0))} = \frac{d((1,0),(1,x))}{d((|\beta|,0),(|\beta|,\alpha))} \qquad \textit{luego por (2.6), (2.7), (2.8) tenemos}:$$

$$\frac{1}{|\beta|} = \frac{d((1,0),(1,x))}{|\alpha|} \qquad \textit{entonces}$$

$$d((1,0),(1,x)) = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

Como $|\frac{\alpha}{\beta}|$ es la distancia entre dos puntos y aplicando la definición 2.4 podemos concluir que: $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbf{F}_0$ con $\beta \neq 0$.

Con estas ultimas cuatro proposiciones queda demostrada las operaciones entre números origami y a continuación probaremos que el conjunto de números origami es un campo cerrado bajo la operación $\alpha \longrightarrow \sqrt{1+\alpha^2}$.

2.5. Estructura de los números origami

Teorema 2.1. *El conjunto de números origami* $\mathbf{F}_0$ *es un campo cerrado bajo la operación* $\alpha \longrightarrow \sqrt{1+\alpha^2}$.

Demostración.

Para demostrar que $\mathbf{F}_0$ *es un campo,* $\mathbf{F}_0$ *debe cumplir que:*

I. $(\mathbf{F}_0, +)$ *es un grupo abeliano.*

II. $(\mathbf{F}_0, *)$ *es un grupo abeliano.*

I) *Para que* $(\mathbf{F}_0, +)$ *sea un grupo abeliano basta demostrar que:*

$*)$ *Si* $\alpha, \beta \in \mathbf{F}_0 \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathbf{F}_0$ *(Se cumple por la proposición 2.4)*

$**)$ *Si* $\alpha \in \mathbf{F}_0 \Rightarrow -\alpha \in \mathbf{F}_0$.

Para hacer esta demostración utilizaremos la figura 2.16. Tenemos que $0, 1, \alpha$ *son números origami luego por la proposición 2.1 se tiene que* $(0,0), (1,0), (1,\alpha)$ *son puntos construibles, ahora utilizando la propiedad* II *de la definición par origami construimos rectas* ℓ_1, ℓ_2 *a través de* $(0,0), (1,\alpha)$ *y* $(1,0), (1,\alpha)$ *respectivamente, si reflejamos a* ℓ_1, ℓ_2 *a través del eje* X *por la propiedad* III *obtenemos a* ℓ_3, ℓ_4, *luego la intersección de* ℓ_3 *y* ℓ_4 *es un punto construible por propiedad* I *entonces tenemos que* $(1, -\alpha)$ *es un punto construible por tanto* $-\alpha$ *es un número origami por la proposición 2.1, luego se tiene que* $-\alpha \in \mathbf{F}_0$.

Por $*)$ *y* $**)$ *concluimos que* $(\mathbf{F}_0, +)$ *es un grupo abeliano.*

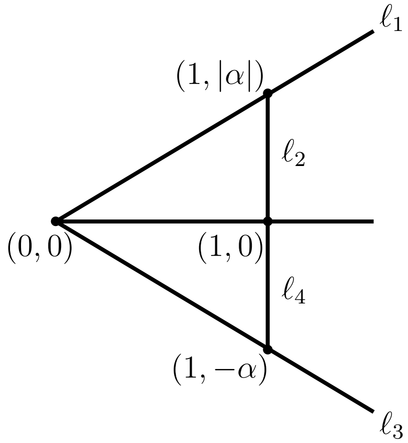


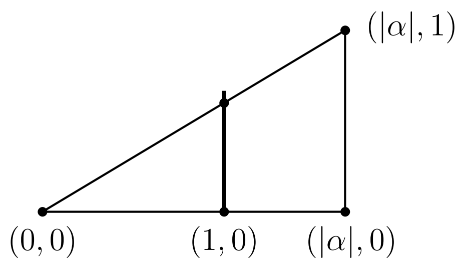
Figura 2.16

II) *Para que* $(\mathbf{F}_0, *)$ *sea un grupo abeliano basta demostrar que:*

$*)$ *Si* $\alpha, \beta \in \mathbf{F}_0 \Rightarrow \alpha * \beta \in \mathbf{F}_0$ *(Se cumple por la proposición 2.6)*

$**)$ *Si* $\alpha \in \mathbf{F}_0 \quad \Rightarrow \alpha^{-1} \in \mathbf{F}_0$.

Tenemos los siguientes puntos $(0,0), (1,0), (|\alpha|, 0), (|\alpha|, 1)$ *donde* $0, 1, \alpha$ *son números origami, ahora por el lema 2.2 se construye un triángulo rectángulo como el de la figura 2.17 con estos cuatro puntos dados, y utilizando la definición de triángulos semejantes y lo obtenido en (2.9), (2.10), (2.11) tenemos que:*



$$d((0,0),(1,0)) = |1| \qquad (2{,}9)$$

$$d((|\alpha|,0),(|\alpha|,1)) = |1| \qquad (2{,}10)$$

$$d((0,0),(|\alpha|,0)) = |\alpha| \qquad (2{,}11)$$

Figura 2.17

$$\frac{d((0,0),(1,0))}{d((|\alpha|,0),(0,0))} = \frac{d((1,0),(1,x))}{d((|\alpha|,0),(|\alpha|,1))} \qquad \textit{luego}$$

$$\frac{1}{|\alpha|} = \frac{d((1,0),(1,x))}{1} \qquad \textit{y como } \frac{1}{|\alpha|} = |\alpha^{-1}| \textit{ tenemos}$$

$$d((1,0),(1,x)) = |\alpha^{-1}|$$

Por tanto tenemos que $\alpha^{-1} \in \mathbf{F}_0$ *por la definición 2.4*

Por $*)$ *y* $**)$ *queda demostrado que* $(\mathbf{F}_0, *)$ *es un grupo abeliano.*

Por I) *y* II) *podemos concluir este teorema.*

Ahora que tenemos algunas operaciones algebraicas el cual producen números origami, es natural preguntarse si hay mas operaciones que produzcan números origami. Una vez que tengamos una lista de todas las formas para crear números origami y un método para probar si dado un número es o no origami, entonces conoceremos cuales figuras geométricas son construibles y cuales figuras no son construibles. Porque cualquier figura es construible si y solo si las coordenadas de todos los vertices son números origami.

Definicion 2.5. $\mathbf{F}_{\sqrt{1+x^2}}$ *es el subcampo mas pequeño de* $\mathbb{C}$ *cerrado bajo la operación* $x \longrightarrow \sqrt{1+x^2}$.

Teorema 2.2. $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_{\sqrt{1+x^2}}$.

Demostración.

Debemos probar que:

i) $\mathbf{F}_{\sqrt{1+x^2}} \subset \mathbf{F}_0$ *Se cumple por el teorema 2.1*

ii) $\mathbf{F}_0 \subset \mathbf{F}_{\sqrt{1+x^2}}$.

Para probar la segunda contenencia necesitamos demostrar que cualquier número origami puede ser expresado usando las operaciones usual de campo y la operación $x \longrightarrow \sqrt{1+x^2}$. *Es suficiente considerar las coordenadas de puntos origami construibles porque un número es un número origami si y solo si es una coordenada de un puntos construibles.*

Hay solamente cuatro formas distintas de construir un nuevo punto origami de un punto ya dado usando las propiedades de construcciones origami, estos son ilustrados en las figuras 2.18 y 2.19. La única forma que tenemos hasta ahora de tener puntos construibles es construir una recta que interseque a una ya dada.

Las cuatro formas de construir una recta son:

I. *Trazando una recta entre dos puntos existentes como en el segmento* $\overline{\alpha\beta}$ *en la figura 2.18.*

II. *Trazando la bisectriz perpendicular al segmento que resulta de los dos puntos* $\overline{\gamma\delta}$ *como en la segunda parte de la figura 2.18.*

III. *Reflejando a* $\overline{\alpha\beta}$ *como en la tercera parte de la figura 2.18.*

IV. *Formando un ángulo bisector como en la figura 2.19.*

Con los siguientes cuatro casos podemos obtener el punto construible deseado.

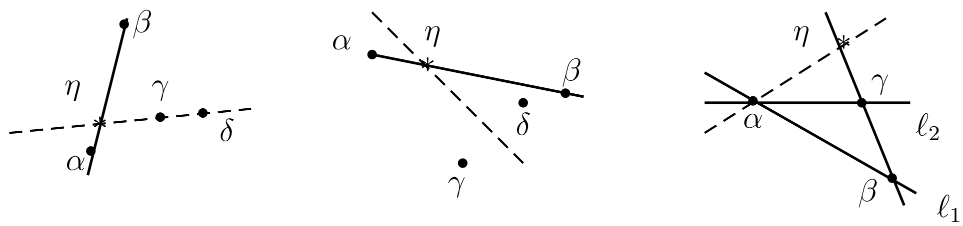


Figura 2.18

Caso I

Tenemos cuatro puntos dados $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *como en la primera parte de la figura 2.18 luego construimos líneas* ℓ_1 *y* ℓ_2 *a través de* α, β *y* γ, δ*, respectivamente por la propiedad* II *de la definición par origami, ahora la intersección de* ℓ_1 *y* ℓ_2 *es un punto construible y llamamos a este punto* η

Caso II

Tenemos cuatro puntos dados $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *como en la segunda parte de la figura 2.18, ahora por propiedad* II *de la definición par origami construimos una recta* ℓ_1 *a través de* α, β *luego usamos la propiedad* III *para construir la bisectriz perpendicular al* $\overline{\gamma\delta}$ *entonces la intersección de* ℓ_1 *y la bisectriz es un punto construible que lo denotaremos* η.

Caso III

Tenemos tres puntos dados α, β, γ *como en la tercera parte de la figura 2.18 por la propiedad* II *de la definición par origami se construyen rectas* ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 *a través de* α, β; $\alpha\gamma$; $\gamma\beta$, *respectivamente, ahora reflejamos a* ℓ_1 *a través de* ℓ_2 *y obtenemos a* ℓ_4 *por la propiedad* V *entonces* ℓ_3 *y* ℓ_4 *se intersecan en un punto luego este punto es construible por propiedad* I *y lo llamaremos* η.

Caso IV

El punto (x, y) *es un punto construible, ya que resulta de la intersección de* ℓ_1 *y* ℓ_2 *donde* ℓ_2 *se construye por la propiedad* IV *de la definición.*

Se tiene que $x, y \in \mathbf{F}_0$ *porque* (x, y) *es un punto construible, demostraremos entonces que el punto* (x, y) *solo depende de las operaciones usual de campo para concluir la prueba de este teorema.*

Supongamos que (a_1, a_2)=$(0, 0)$ *por traslación porque el punto* (x, y) *es el resultado de la adición de* (a_1, a_2) *y el punto trasladado.*

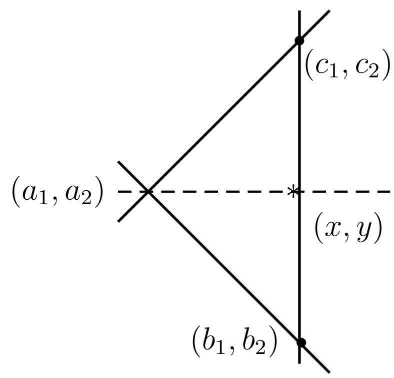


Figura 2.19

De igual manera (b_1, b_2) *puede asumirse como* $(1, 0)$ *por la siguiente rotación:*
$(x, y) \longrightarrow (b_1 x - b_2 y, b_2 x + b_1 y)$ *envía el punto* $(1, 0)$ *a* (b_1, b_2). *Ahora*

Sea $\theta = \angle cab$, *con las siguientes suposiciones,*

$$\cot\theta = \frac{c_1}{c_2}$$
$$\csc\theta = \sqrt{(c_1^2 + c_2)^2 / c_2} = \sqrt{1 + (c_2/c_1)^2}.$$

Tenemos que la pendiente de la recta es $m = \tan(\theta/2) = (\csc\theta - \cot\theta)$*,*
el cual solamente depende de las operaciones prescritas.
Ahora hallemos la pediente de la segunda recta

$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{c_2 - 0}{c_1 - 1} = \frac{c_2}{c_1 - 1}$ *evaluada en el punto* $(1, 0)$ *y* (c_1, c_2)

Luego utilizando la ecuación de la recta y evaluando nuevamente el punto $(1,0)$ *en la ecuación tenemos:*

$$\begin{aligned} (y-y_0) &= m_1(x-x_0) & \quad & \textit{como} \;\; (x_0,y_0) = (1,0) \;\; \textit{luego} \\ (y-0) &= m_1(x-1) & & \\ y &= m_1(x-1) & & \textit{donde} \;\; m_1 = \frac{c_2}{(c_1-1)} \end{aligned}$$

Como el punto (x,y) *es el punto de la intersección de las dos rectas,*
$y = mx$ *y* $y = [c_2/(c_2-1)](x-1)$ *podemos igualar las ecuaciones para hallar el valor de* x *y* y*,*

igualandolas tenemos:

$$mx = \tfrac{c_2}{(c_1-1)}\,(x-1)$$

$$mx = \tfrac{c_2x-c_2}{c_1-1}$$

$$mx = \tfrac{c_2x}{c_1-1} - \tfrac{c_2}{c_1-1}$$

$$\tfrac{c_2}{c_1-1} = \tfrac{c_2x}{c_1-1} - mx$$

$$\tfrac{c_2}{c_1-1} = x\left(\tfrac{c_2}{c_1-1} - m\right) = x\left(\tfrac{c_2-m(c_1-1)}{c_1-1}\right)$$

$$x = \tfrac{c_2(c_1-1)}{c_2(c_1-1)-m(c_1-1)^2}$$

$$x = \tfrac{c_2}{c_2-m(c_1-1)}$$

Como $y = mx$ *y* $x = \frac{c_2}{c_2-m(c_1-1)}$ *tenemos por lo tanto que:*

$$y = \tfrac{mc_2}{c_2-m(c_1-1)} \qquad y \qquad x = \tfrac{c_2}{c_2-m(c_1-1)}$$

Podemos entonces concluir que los valores de x *y* y *solamente depende de las operaciones descritas ya demostradas y por tanto* $(x,y) \in \mathbf{F}_{\sqrt{1+x^2}}$ *entonces se tiene que* $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_{\sqrt{1+x^2}}$.

El precedente teorema da una descripción algebraica del campo de números origami y en principio ayuda a decidir que figuras son construibles y cuales no son construibles usando origami.
En practica esto es sin embargo difícil para decidir si dado un número decir si es o no es un número origami. Por ejemplo.

Ejercicio 2.2.
$\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ *es un número origami?*

Tenemos que $\sqrt{4+2\sqrt{2}} = \sqrt{1+(1+\sqrt{2})^2}$
Pero que sabemos de $(1+\sqrt{2})$***?***,

Sabemos de antemano que 1 *y* $\sqrt{2}$ *son números origami por el corolario 2.1 entonces* $(1+\sqrt{2})$ *es un número origami por la proposición 2.4.*

Se puede afirmar por la proposición 2.3 que $\sqrt{1+(1+\sqrt{2})^2}$ *es un número origami y como* $\sqrt{4+2\sqrt{2}} = \sqrt{1+(1+\sqrt{2})^2}$ *por lo tanto se puede concluir que* $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ *es un número origami.*

Para hallar mas números origami necesitamos una mejor caracterización de ellos. Ahora procederemos a revisar algunas definiciones de Algebra Moderna.

CAPÍTULO 3

NÚMEROS TOTALMENTE REALES

3.1. Algunas definiciones

Definicion 3.1. *Un número α es un número algebraico si este es raíz de un polinomio con coeficientes racionales.*

Cualquier número algebraico α es raíz de un único polinomio mónico irreducible en $\mathbb{Q}[\boldsymbol{x}]$, denotado por $P_\alpha(x)$. Este polinomio además divide cualquier polinomio en $\mathbb{Q}[\boldsymbol{x}]$ que tenga a α como raíz.

Definicion 3.2.

Los conjugados de α son las raíces del polinomio $P_\alpha(x)$. Un número algebraico α es totalmente real si todos sus conjugados son reales. $\mathbf{F}_{\boldsymbol{TR}}$ *denota el conjunto de los números totalmente reales.*

Ejercicio 3.1.

Probar si $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ ***es totalmente real.***

Para que $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ *sea totalmente real todos sus conjugados deben ser reales.*

Sea

$$P_{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\,(x) \;=\; x^4 - 8x^2 + 8$$

Tenemos que $P_{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\,(x)$ *es un polinomio que tiene a* $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ *como raíz.*
Ahora los conjugados de $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ *son las raíces del polinomio* $P_{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\,(x)$.
Luego las raíces de $P_{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(x)$ *son:*

$x^4 - 8x^2 + 8 \;=\; 0$

$x^4 - 8x^2 + 16 \;=\; 8$

$(x^2-4)^2 \;=\; 8$

$(x^2-4) \;=\; \pm\sqrt{8}$

$(x^2-4) \;=\; \pm 2\sqrt{2}$

$x^2 \;=\; 4 \pm 2\sqrt{2}$

$x \;=\; \pm\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}}$

Como podemos ver las cuatro raíces de $P_{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(x)$ *son reales y como son conjugados de* $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$, *se puede concluir que* $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ *es totalmente real.*

Ejercicio 3.2.

Probar si $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ ***es totalmente real***.

Para que $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ *sea totalmente real todos sus conjugados deben ser reales.*
Sea $P_{\sqrt{1+\sqrt{2}}}(x) \;=\; x^4 - 2x^2 - 1,$
Las raíces de este polinomio son los conjugados de $\sqrt{1+\sqrt{2}}$, *luego:*

$x^4 - 2x^2 - 1 \;=\; 0$

$x^4 - 2x^2 + 1 \;=\; 2$

$(x^2-1)^2 \;=\; 2$

$(x^2-1) \;=\; \pm\sqrt{2}$

$x^2 \;=\; 1\pm\sqrt{2}$

$x \;=\; \pm\sqrt{1\pm\sqrt{2}}$

Tenemos que $\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$ *son dos raíces reales de* $P_{\sqrt{1+\sqrt{2}}}(x)$, *pero* $\pm\sqrt{1-\sqrt{2}}$ *son dos raíces imaginaria del polinomio por lo tanto* $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ *no es totalmente real.*

Pasado estos ejercicios de aplicación vamos a seguir revisando unas definiciones mas que nos darán mas herramientas necesarias para llegar a la final caracterización de números origami.

3.2. Polinomios Simétricos

Definicion 3.3.

Sea $\mathbb{R}$ *un anillo arbitrario, sea* $\mathfrak{f}(x_1, x_2, ..., x_n)$ *un polinomio en* $\mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n]$*.*

$\mathfrak{f}$ *es un polinomio simétrico si:*

$\mathfrak{f}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}) \;=\; \mathfrak{f}(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad$ *donde* $\sigma_k \in \mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n]$

Equivalentemente, $\mathfrak{f}$ *es simétrico si:*

$\sigma[\mathfrak{f}(x_1, x_2, ..., x_n)] \;=\; \mathfrak{f}(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Tenemos por ejemplo que $(x_1^2 + x_2^2)$ es un polinomio simétrico en dos variables porque al intercambiar x_1 por x_2 el valor del polinomio no cambia.

Sin embargo $(x_1^2 - x_2^2)$ no es un polinomio simétrico porque $(x_1^2 - x_2^2) \neq (x_2^2 - x_1^2)$.

Una importante clase de polinomios simétricos son los polinomios simétricos elementales.

Definicion 3.4.

Si $\prod_{k=1}^{n}(t + x_k)$ *se extiende, obtenemos que:*

Sea $\mathfrak{g}(x) \;=\; \prod_{k=1}^{n}(t + x_k)$, *luego*

$\mathfrak{g}(x) \;=\; (t + x_1)(t + x_2)\ldots(t + x_n), \qquad$ *este polinomio puede escribirse de la forma:*

$\mathfrak{g}(x) \;=\; t^n + \sigma_1 t^{n-1} + \ldots + \sigma_n t^{n-n} \qquad$ *donde los coeficientes* $\sigma_k \in \mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n]$ *y están dados por:*

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\
\sigma_\ell &= \textstyle\sum_{i<j} \; x_i x_j, \ldots, \\
\sigma_n &= x_1.x_2.....x_n
\end{aligned}$$

Estos son llamados polinomios simétricos elementales en la variable x_i*.*

★ El algebra de polinomios simétricos sobre $\mathbb{R}$ es generado por los polinomios simétricos elementales. Esto es, cualquier polinomio simétrico es una combinación lineal de productos de polinomios simétricos elementales.   Ver demostración en [4], pág 191.

Ahora con todas las herramientas adquiridas comenzaremos al fin la caracterización de números origami. Pasa que todo número origami es totalmente real. Para probar esto, es necesario demostrar que la suma, la diferencia, el producto y el cociente de números totalmente reales es totalmente real y que $\sqrt{1+\alpha^2}$ es totalmente real siempre que α sea totalmente real. Esto se demostrara en base a la definición de polinomios simétricos y el siguiente lema.

Lema 3.1.
$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(t - x_i y_j) \ = \ det(tI - AB)$
Donde A y B son matrices en las cuales sus términos están expresados en polinomios simétricos elementales en las variables x_i o y_j respectivamente.
Demostración.
Sea
$P_A(t) \ = \ \prod_{k=1}^{n}(t - x_k) \ = \ \sum_{l=0}^{n}(-1)^l \sigma_l(x) t^{n-l}$
$P_B(t) \ = \ \prod_{j=1}^{n}(t - y_j) \ = \ \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \sigma_j(y) t^{m-j}$

Sea $\overline{A}$ una matriz n x n,

$$\overline{A} \ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n+1}\sigma_n(x) & (-1)^n\sigma_{n-1}(x) & & & & \cdots & \sigma_1(x) \end{bmatrix}$$

Ahora, sea A una matriz nm x nm:

$$A = \begin{bmatrix} \overline{A} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{A} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \overline{A} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \overline{A} \end{bmatrix}$$

Sea

$$V_{k,l} \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 \\ x_k \\ x_k^2 \\ \vdots \\ x_k^{n-1} \\ y_l \\ x_k y_l \\ x_k^2 y_l \\ \vdots \\ x_k^{n-1} y_l \\ y_l^2 \\ x_k y_l^2 \\ \vdots \\ x_k^{n-1} y_l^2 \\ y_l^3 \\ \vdots \\ y_l^{m-1} \\ x_k y_l^{m-1} \\ x_k^2 y_l^{m-1} \\ \vdots \\ x_k^{n-1} y_l^{m-1} \end{bmatrix}$$

Luego tenemos que:

$P_A(t) \;=\; \prod_{k=1}^{n}(t-x_k) \;=\; (t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_n)$

$P_A(t) \;=\; (t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_n) \;=\; t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \sigma_2 t^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n.$

Donde los polinomios simétricos elementales son:

$\sigma_1 \;=\; x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$\sigma_\ell \;=\; \sum_{i<j} \; x_i x_j, \dots,$

$\sigma_n \;=\; x_1.x_2 \dots x_n.$

Si evaluamos a x_k *en* $P_A(t)$ *encontramos que:*

$P_A(x_k) \;=\; (x_k - x_1).(x_k - x_2)\dots(x_k - x_k)\dots(x_k - x_n) \;=\; x_k^n - \sigma_1 x_k^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n.$

$0 \;=\; x_k^n - \sigma_1 x_k^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n.$

$x_k^n \;=\; \sigma_1 x_k^{n-1} - \dots + (-1)^n \sigma_n.$

$x_k^n \;=\; \sum_{l=1}^{n} \; (-1)^{l+1} \; \sigma_l(x) x_k^{n-l}. \qquad \textit{(3.1)}$

Ahora sustituimos la matriz $\overline{A}$ *en la matriz* A *y obtenemos la siguiente matriz nm x nm :*

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
(-1)^{n+1}\sigma_n(x) & (-1)^n \sigma_{n-1}(x) & & \cdots & \sigma_1(x) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
0 & 0 & 0 & & 0 & (-1)^{n+1}\sigma_n(x) & (-1)^n \sigma_{n-1}(x) & & \cdots & \sigma_1(x)
\end{bmatrix}$$

Si multiplicamos la matriz A por la matriz $V_{k,l}$ *se obtiene esta matriz de (nm x 1)*

$$A.V_{k,l} = \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^2 \\ \vdots \\ x_k^{n-1} \\ \left((-1)^{n+1}\sigma_n(x) + (-1)^n\sigma_{n-1}(x)x_k + \cdots + \sigma_1(x)x_k^{n-1}\right) \\ x_k y_l \\ x_k^2 y_l \\ \vdots \\ x_k^{n-1} y_l \\ \left((-1)^{n+1}\sigma_n(x)y_l + (-1)^n\sigma_{n-1}(x)x_k y_l + \cdots + \sigma_1(x)x_k^{n-1}y_l\right) \\ x_k y_l^2 \\ x_k^2 y_l^2 \\ \vdots \\ x_k^{n-1} y_l^2 \\ \left((-1)^{n+1}\sigma_n(x)y_l^2 + (-1)^n\sigma_{n-1}(x)x_k y_l^2 + \cdots + \sigma_1(x)x_k^{n-1}y_l^2\right) \\ y_l^3 \\ \vdots \\ y_l^{m-1} \\ x_k y_l^{m-1} \\ x_k^2 y_l^{m-1} \\ \vdots \\ x_k^{n-1} y_l^{m-1} \\ \left((-1)^{n+1}\sigma_n(x)y_l^{m-1} + (-1)^n\sigma_{n-1}(x)x_k y_l^{m-1} + \cdots + \sigma_1(x)x_k^{n-1}y_l^{m-1}\right) \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\left((-1)^{n+1}\sigma_n(x)+(-1)^n\sigma_{n-1}(x)x_k+\cdots+\sigma_1(x)x_k^{n-1}\right) = \sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+1}\sigma_l(x)x_k^{n-l}$$

En el numeral (3.1) se tiene que $\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+1}\sigma_l(x)x_k^{n-l} = x_k^n$ *entonces utilizando esta afirmación podemos concluir lo siguiente:*

$$\left((-1)^{n+1}\sigma_n(x)+(-1)^n\sigma_{n-1}(x)x_k+\cdots+\sigma_1(x)x_k^{n-1}\right) = x_k^n \qquad (3.2)$$

$$\left((-1)^{n+1}\sigma_n(x)+(-1)^n\sigma_{n-1}(x)x_k+\cdots+\sigma_1(x)x_k^{n-1}\right)y_l = x_k^n\ y_l \qquad (3.3)$$

$$\left((-1)^{n+1}\sigma_n(x)+(-1)^n\sigma_{n-1}(x)x_k+\cdots+\sigma_1(x)x_k^{n-1}\right)y_l^2 = x_k^n\ y_l^2 \qquad (3.4)$$

$$\vdots$$

$$\left((-1)^{n+1}\sigma_n(x)+(-1)^n\sigma_{n-1}(x)x_k+\cdots+\sigma_1(x)x_k^{n-1}\right)y_l^{m-1} = x_k^n\ y_l^{m-1} \qquad (3.5)$$

Luego por (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) tenemos:

$$A.V_{k,l} \quad = \quad \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^2 \\ \vdots \\ x_k^{n-1} \\ x_k^n \\ x_k y_l \\ x_k^2 y_l \\ \vdots \\ x_k^{n-1} y_l \\ x_k^n y_l \\ x_k y_l^2 \\ x_k^2 y_l^2 \\ \vdots \\ x_k^{n-1} y_l^2 \\ x_k^n y_l^2 \\ y_l^3 \\ \vdots \\ y_l^{m-1} \\ x_k y_l^{m-1} \\ x_k^2 y_l^{m-1} \\ \vdots \\ x_k^{n-1} y_l^{m-1} \\ x_k^n y_l^{m-1} \end{bmatrix} \quad = \quad x_k \begin{bmatrix} 1 \\ x_k \\ x_k^2 \\ \vdots \\ x_k^{n-1} \\ y_l \\ x_k y_l \\ x_k^2 y_l \\ \vdots \\ x_k^{n-1} y_l \\ y_l^2 \\ x_k y_l^2 \\ \vdots \\ x_k^{n-1} y_l^2 \\ y_l^3 \\ \vdots \\ y_l^{m-1} \\ x_k y_l^{m-1} \\ x_k^2 y_l^{m-1} \\ \vdots \\ x_k^{n-1} y_l^{m-1} \end{bmatrix} \quad = \quad x_k.V_{k,l}$$

Por lo tanto tenemos que: $A.V_{k,l} \;=\; x_k.V_{k,l}$ *donde* A *es independiente de* k *y* ℓ*.*

De manera similar se trabaja con la matriz B como se hizo para la matriz A lo único que cambia en lo anterior es x por y entonces se tiene que:

$P_B(t) \;=\; \prod_{j=1}^{n}(t-y_j) \;=\; (t-y_1)(t-y_2)\ldots(t-y_n)$

$P_B(t) \;=\; (t-y_1)(t-y_2)\ldots(t-y_n) \;=\; t^n-\sigma_1 t^{n-1}+\sigma_2 t^{n-2}-\ldots+(-1)^n\sigma_n.$

Donde los polinomios simétricos elementales son:

$\sigma_1 \;=\; y_1+y_2+\ldots+y_n$

$\sigma_\ell \;=\; \sum_{i<j}\; y_i y_j,\ldots,$

$\sigma_n \;=\; y_1 * y_2 * \ldots * y_n.$

Esto implica de igual manera y con un proceso similar como se hizo para la matriz A, que:

$B.V_{k,l} \;=\; y_\ell.V_{k,l},$

Como $A.V_{k,l} \;=\; x_k.V_{k,l}$ *tenemos*

$A\;B.V_{k,l} \;=\; A.y_\ell.V_{k,l}$

$A\;B.V_{k,l} \;=\; y_\ell.A.V_{k,l}$

$A\;B.V_{k,l} \;=\; y_\ell.x_k.V_{k,l}$

$A\;B.V_{k,l} \;=\; x_k.y_\ell.V_{k,l}$

Luego $x_k y_\ell$ *son nm raíces distintas del det(tI-AB) el cual es un polinomio mónico irreducible de grado nm, por tanto se cumple que:*

$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(t-x_i y_j) \;=\; det(tI-AB)$

Con la ayuda de este lema podemos demostrar que el conjunto de números totalmente real forman un campo cerrado bajo la operación $x \rightarrow \sqrt{1+x^2}$, además también probaremos que la suma, la diferencia, el producto y el cociente de números totalmente reales son totalmente real de igual manera como se hizo para los números origami.

3.3. Operaciones entre números totalmente reales

Proposición 3.1. *Si α es totalmente real entonces $\sqrt{1+\alpha^2}$ es totalmente real.*

Demostración

Sea $q_{\sqrt{1+\alpha^2}}\ (t) = \prod_{i=1}^{n}(t^2-1-\alpha_i^2)$ *Si extendemos esta productoria obtenemos:*

$$q_{\sqrt{1+\alpha^2}}\ (t) = (t^2-1-\alpha_1^2).(t^2-1-\alpha_2^2)\dots(t^2-1-\alpha_n^2)$$

$$q_{\sqrt{1+\alpha^2}}\ (t) = t^{2n}-t^{2n-2}(n+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2)+t^{2n-4}[3n-6+n-1(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2)+$$

$$\sum_{i<j}\alpha_i^2\alpha_j^2,...,]+\cdots+(1+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2)+(\sum_{i<j}\alpha_i^2\alpha_j^2+\sum_{i<j<k}\alpha_i^2\alpha_j^2\alpha_k^2+$$

$$+\cdots+\sum_{i<j<\cdots<n}\alpha_i^2\alpha_j^2\cdots\alpha_n^2)\ +\alpha_1^2\alpha_2^2\cdots\alpha_n^2.$$

Podemos ver claramente que los coeficientes de t^k son polinomios simétricos en la variable α_i. Por tanto ellos pueden ser expresados como polinomios racionales en combinación con los polinomios simétricos elemental por ★ pág 41.

Luego $(-1)^l\sigma_l(\alpha)$ son los coeficientes del polinomio minimal con respecto a α por lo tanto podemos concluir que $q_{\sqrt{1+\alpha^2}}\ (t) \in \mathbb{Q}[\boldsymbol{t}]$.

Es claro que $\sqrt{1+\alpha^2}$ es raíz del polinomio $q_{\sqrt{1+\alpha^2}}\ (t)$ por tanto $\sqrt{1+\alpha^2}$ es un número algebraico por definición 3.1, además cualquier número algebraico es raíz de un único polinomio mónico irreducible en $\mathbb{Q}[\boldsymbol{t}]$ lo denotaremos $p_{\sqrt{1+\alpha^2}}\ (t)$ este polinomio mónico además divide a cualquier polinomio que tenga a $\sqrt{1+\alpha^2}$ como raíz luego $p_{\sqrt{1+\alpha^2}}\ (t)$ divide a $q_{\sqrt{1+\alpha^2}}\ (t)$.

Por hipótesis tenemos que si α es totalmente real implica que todos sus conjugados α_i son reales. Tenemos que 1 y α_i^2 son reales y positivos por lo tanto $1+\alpha_i^2$ es real y positivo entonces $\pm\sqrt{1+\alpha_i^2}$ son todos real. Como $\sqrt{1+\alpha_i^2}$ es un número algebraico y todos sus conjugados son reales esto implica que $\sqrt{1+\alpha_i^2}$ es totalmente real por definición 3.2.

Proposición 3.2. *Si α es totalmente real entonces $-\alpha$ es totalmente real.*

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\textit{Sea} \quad q_{-\alpha}\ (t) &= \prod_{i=1}^{n}(t+\alpha_i) \qquad \textit{Si extendemos esta productoria obtenemos:}\\
q_{-\alpha}\ (t) &= (t+\alpha_1)(t+\alpha_2)\dots(t+\alpha_n)\\
q_{-\alpha}\ (t) &= t^n+\sigma_1 t^{n-1}+\cdots+\sigma_n,
\end{aligned}
$$

Donde los coeficientes de t_k son:

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\\
\sigma_l &= \sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j,\cdots,\\
\sigma_n &= \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n
\end{aligned}
$$

Vemos claramente que los coeficientes de t^k son polinomios simétricos en la variable α_i. Por ★ ellos pueden ser expresados como polinomios racionales en combinación con los polinomios simétricos elemental.
Luego $(-1)^l\sigma_l(\alpha)$ son los coeficientes del polinomio minimal con respecto a α entonces se tiene que $q_{-\alpha}\ (t)\in\mathbb{Q}[\boldsymbol{t}]$.

Es claro que $-\alpha$ es raíz de $q_{-\alpha}\ (t)$ por la definición 3.1, tenemos que $-\alpha$ es un número algebraico además cualquier número algebraico $-\alpha$ es raíz de un único polinomio mónico irreducible que lo denotaremos $p_{-\alpha}\ (t)$, este polinomio mónico además divide a cualquier polinomio que tenga a $-\alpha$ como raíz, por tanto $p_{-\alpha}\ (t)$ divide a $q_{-\alpha}\ (t)$.

Ahora como α es totalmente real implica que todos sus conjugados α_i son reales. Tenemos que todos los α_i son reales de este modo los $-\alpha_i$ también son reales y como los $-\alpha_i$ son raíces de $q_{-\alpha}\ (t)$ con esto concluimos que todas las raíces de $q_{-\alpha}\ (t)$ son reales y por tanto $-\alpha$ es totalmente real según la definición 3.2.

Proposición 3.3. *Si α es totalmente real entonces α^{-1} es totalmente real.*

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\textit{Sea} \qquad q_{\alpha^{-1}}\ (t) &= \prod_{i=1}^{n}(t-\alpha_i^{-1})(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i) \\
q_{\alpha^{-1}}\ (t) &= [(t-\alpha_1^{-1})(t-\alpha_2^{-1})\dots(t-\alpha_n^{-1})]\ (\alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_n) \\
q_{\alpha^{-1}}\ (t) &= t^n\sigma_1 - t^{n-1}\sigma_2 + \cdots + t\sigma_n,
\end{aligned}
$$

Donde los coeficientes de t_k son:

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= \alpha_1.\alpha_2.\cdots.\alpha_n \\
\sigma_l &= \sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j, \cdots, \\
\sigma_n &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n
\end{aligned}
$$

Los coeficientes de t^k son polinomios simétricos en la variable α_i, nuevamente por ★ podemos expresar este polinomio en polinomios racionales en combinación con los polinomios simétricos elemental.

Luego $(-1)^l\sigma_l(\alpha)$ son los coeficientes del polinomio minimal con respecto a α por tanto $q_{\alpha^{-1}}\ (t) \in \mathbb{Q}[\boldsymbol{t}]$.

Vemos claramente que α^{-1} es raíz de $q_{\alpha^{-1}}\ (t)$, como $q_{\alpha^{-1}}\ (t)$ es un polinomio con coeficientes racionales y según la definición 3.1 tenemos que α^{-1} es un número algebraico por tanto el polinomio minimal de α^{-1}, $p_{\alpha^{-1}}\ (t)$ divide a $q_{\alpha^{-1}}\ (t)$.

Como α es totalmente real implica que todos sus conjugados α_i son reales. Por tanto α^{-1} son todos reales, sabemos que α_i^{-1} es un número algebraico y todos sus conjugados α_i^{-1} son todos real. Con esto concluimos que α^{-1} es totalmente real.

Proposición 3.4. *Si α, β son totalmente real entonces $\alpha+\beta$ es totalmente real.*

Demostración.

Sea $$q_{\alpha+\beta}(t) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(t-\alpha_i-\beta_j)$$

y $$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(t-\alpha_i-\beta_j) = det(tI-A-B).$$

Donde A y B son matrices expresadas en términos de polinomios simétricos elementales. Con esto podemos expresar este polinomio en un polinomio con coeficientes racionales entonces tenemos que $q_{\alpha+\beta}(t) \in \mathbb{Q}[\boldsymbol{t}]$.

Claramente $\alpha+\beta$ es una raíz de $q_{\alpha+\beta}(t)$ entonces $\alpha+\beta$ es un número algebraico luego el polinomio minimal de $\alpha+\beta$, $p_{\alpha+\beta}(t)$ divide a $q_{\alpha+\beta}(t)$.

Ahora el hecho de que α y β son totalmente real implica que todos sus conjugados α_i, β_i respectivamente son reales, luego concluimos que todas las raíces de $q_{\alpha+\beta}(t)$ son reales por tanto $\alpha+\beta$ es totalmente real.

Proposición 3.5. *Si α, β son totalmente real entonces $\alpha\beta$ es totalmente real.*

Demostración.

Sea $$q_{\alpha\beta}(t) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(t-\alpha_i\beta_j),$$ *por el lema 3.1 tenemos que:*

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(t-\alpha_i\beta_j) = det(tI-AB).$$

Donde A y B son matrices expresadas en términos de polinomios simétricos elementales para los α_i y β_i respectivamente. Por este lema podemos concluir claramente que $q_{\alpha\beta}(t) \in \mathbf{Q}[\boldsymbol{t}]$. Ahora $\alpha\beta$ es una raíz de $q_{\alpha\beta}(t)$ entonces $\alpha\beta$ es un numero algebraico por lo tanto es raíz de un polinomio minimal que lo denotaremos $p_{\alpha\beta}(t)$ además este polinomio divide a cualquier polinomio que tenga a $\alpha\beta$ como raíz, por lo tanto $p_{\alpha\beta}(t)$ divide a $q_{\alpha\beta}(t)$.

Luego como α y β son totalmente real implica que todos los conjugados de α los α_i son reales y los conjugados de β los β_j son reales entonces se puede decir que los $\alpha_i\beta_j$

son reales, con esto concluimos que todas las raíces de $q_{\alpha\beta}(t)$ *son reales y por lo tanto* $\alpha\beta$ *es totalmente real.*

Estas proposiciones son muy interesantes porque nos dan una manera practica para decidir que figuras puedo construir usando origami.

3.4. Algunas aplicaciones de los números origami y de los números totalmente reales

Ejercicio 3.3.

No es posible, usando origami, construir dos cubos tal que el volumen del segundo cubo sea dos veces el volumen del primer cubo.

Si esta construcción fuera posible, $\sqrt[3]{2}$ *seria un número origami y por lo tanto* $\sqrt[3]{2}$ *seria totalmente real.*

Sin embargo, encontramos que los conjugados de $\sqrt[3]{2}$ *son:* $\sqrt[3]{2}(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ *y* $\sqrt[3]{2}$, *pero los dos primeros conjugados no son reales y por tanto no se puede construir un cubo con dos veces el volumen del primer cubo, de este modo* $\sqrt[3]{2}$ *no es un número origami.*

Anteriormente tenemos que:

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+1^2} \qquad \sqrt{2} \text{ es un número origami por el corolario 2.1}$$

$$\sqrt{4+2\sqrt{2}} = \sqrt{1+(1+\sqrt{2})^2} \qquad \text{Es un número origami por el ejercicio 2.2}$$

¿Pero que sabemos de $\sqrt{2+\sqrt{2}}$***)? ¿Es un número origami?***

Tenemos que $\sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(-1)}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

se tiene que $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ *es un número origami y* $\sqrt{2}^{(-1)}$ *también lo es por la proposición 2.7, tenemos que el producto de números origami es origami por la proposición 2.6,* *con esto podemos concluir que* $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ *es un número origami ya que* $\sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(-1)}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

Por consiguiente veamos este corolario.

Corolario 3.1.

No es posible construir un triángulo rectángulo, con la hipotenusa y un lado arbitrariamente dados, usando origami.

Demostración.

Si esto fuera posible, se podría construir un triángulo rectángulo con hipotenusa $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ *y lado* 1*, donde* $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ *y* 1 *son números origami. Ahora, la longitud del otro lado del triángulo seria..., utilizando el apreciado teorema de pitágoras:*

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2+b^2 \\ (\sqrt{2+\sqrt{2}})^2 &= 1^2+b^2, \quad \textit{donde} \\ b &= \sqrt{(\sqrt{2+\sqrt{2}})^2-1^2} \\ b &= \sqrt{1+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Como vimos en el ejercicio 3.2 este número no es totalmente real, por tanto no se puede hacer esta construcción.

El siguiente corolario y el siguiente teorema es una consecuencia de la ley algebraica "descripción de construcciones con regla y compás".

Corolario 3.2.

Todas las figuras que son construibles con origami son construibles con regla y compás, pero lo inverso no es verdadero.

Necesitamos extender la relación entre construcciones con regla y compás y las construcciones en origami para demostrar este corolario.

Revisemos las construcciones con regla y compás.

Sea $\mathbf{F}_{\sqrt{x}}$ el mas pequeño subcampo de $\mathbb{C}$ cerrado bajo la operación $x \longrightarrow \sqrt{x}$ entonces $\mathbf{F}_{\sqrt{x}} \bigcap \mathbb{R}$ es la colección de números el cual son construibles con regla y compás.

De nuestro trabajo tenemos que los números origami $\mathbf{F_0}$ están contenidos en $\mathbf{F}_{\sqrt{x}} \bigcap \mathbf{F}_{\boldsymbol{TR}}$.

★★ Si k es una extension algebraica real finita de $\mathbb{Q}$ entonces un elemento de k es una suma de cuadrados en k si y solo si todos sus conjugados son reales positivo. Ver demostración [4], pág 457.

3.4.1. Caracterización de los Números Origami

Teorema 3.1. $\mathbf{F_0} = \mathbf{F}_{\sqrt{\mathbf{1+\boldsymbol{x}^2}}} = \mathbf{F}_{\sqrt{\boldsymbol{x}}} \bigcap \mathbf{F}_{\boldsymbol{TR}}$

Demostración.

I. $\mathbf{F_0} = \mathbf{F}_{\sqrt{\mathbf{1+\boldsymbol{x}^2}}}$ Esta demostrado en el teorema 1.2

II. $\mathbf{F}_{\sqrt{\mathbf{1+\boldsymbol{x}^2}}} \subset \mathbf{F}_{\sqrt{\boldsymbol{x}}} \bigcap \mathbf{F}_{\boldsymbol{TR}}$

III. $\mathbf{F}_{\sqrt{\boldsymbol{x}}} \bigcap \mathbf{F}_{\boldsymbol{TR}} \subset \mathbf{F}_{\sqrt{\mathbf{1+\boldsymbol{x}^2}}}$

Tenemos anteriormente demostrado que $\mathbf{F_0} = \mathbf{F}_{\sqrt{\mathbf{1+\boldsymbol{x}^2}}}$ y se tiene que $\mathbf{F_0} \subset \mathbf{F}_{\sqrt{\boldsymbol{x}}} \bigcap \mathbf{F}_{\boldsymbol{TR}}$, Solo necesitamos demostrar que: $\mathbf{F}_{\sqrt{\boldsymbol{x}}} \bigcap \mathbf{F}_{\boldsymbol{TR}} \subset \mathbf{F}_{\sqrt{\mathbf{1+\boldsymbol{x}^2}}}$, y se da por concluido la prueba.

Si $\alpha \in (\mathbf{F}_{\sqrt{\boldsymbol{x}}} \bigcap \mathbf{F}_{\boldsymbol{TR}})$ entonces existe una secuencia de números totalmente reales lo denotaremos $\{\beta_i\}_{i=1}^{n}$ y una secuencia de campos totalmente reales $\{K_j\}_{j=0}^{n-1}$ tal que
$K_0 = \mathbf{Q}$
$K_i = k_{i-1}(\beta_k), \quad \alpha = \beta_n$ y cada β_i tiene grado dos sobre K_{i-1}.
Como β_i tiene grado dos sobre K_{i-1}, β_i es raíz de un polinomio de la forma $x^2 + c_i x + d_i$, donde $c_i, d_i \in K_{i-1}$.

Por consiguiente $(\beta_i + \frac{c_i}{2})^2 = \frac{c_i^2}{4-d_i}$, por ★★ conocemos que todo conjugado de $(\beta_i + \frac{c_i}{2})^2$ es el cuadrado de algún conjugado de $(\beta_i + \frac{c_i}{2})$.

Luego cada uno de los conjugados de $(\beta_i + \frac{c_i}{2})^2$ son positivos y $(\beta_i + \frac{c_i}{2})^2$ es una suma de cuadrados de elementos en K_{i-1}.

Decimos que:

$$\begin{aligned}
(\beta_i + \tfrac{c_i}{2})^2 &= r_{i,1}^2 + r_{i,2}^2 + ... + r_{i,m}^2 \qquad \text{entonces} \\
[(\beta_i + \tfrac{c_i}{2})^2]^{\frac{1}{2}} &= [r_{i,1}^2 + r_{i,2}^2 + ... + r_{i,m}^2]^{\frac{1}{2}} \\
\beta_i + \tfrac{c_i}{2} &= \sqrt{r_{i,1}^2 + r_{i,2}^2 + ... + r_{i,m}^2} \\
\beta_i &= \sqrt{r_{i,1}^2 + r_{i,2}^2 + ... + r_{i,m}^2} - \tfrac{c_i}{2} \\
\beta_i &= \sqrt{r_{i,1}^2(1 + \tfrac{r_{i,2}^2}{r_{i,1}^2} + ... + \tfrac{r_{i,m}^2}{r_{i,1}^2})} - \tfrac{c_i}{2} \\
\beta_i &= r_{i,1}\sqrt{1 + [\tfrac{r_{i,2}}{i,1}\sqrt{1 + [\tfrac{r_{i,3}}{r_{i,2}}\sqrt{...}]^2}]^2} - \tfrac{c_i}{2}
\end{aligned}$$

Esto demuestra que cualquier número totalmente real en $\mathbf{F}_{\sqrt{x}}$ es un número origami.

□

Esta caracterización de números origami esta muy relacionada con el problema 17 de David Hilbert.

En 1927 Artin resolvió este problema de Hilbert. La idea clave de Artin fue la noción de totalmente positivo . Un elemento de un campo es totalmente positivo si es positivo en todo orden en el campo.

Artin probo que un elemento es totalmente positivo si y solo si este se puede expresar como una suma de cuadrados. Esta fue la gran idea que usaron para llegar a la caracterización de los números origami.

Al terminar este trabajo nos damos cuenta que estamos en condiciones suficientes para decidir que figuras se pueden construir y cuales no se pueden construir usando origami porque se tienen las herramientas necesarias y sabemos que cualquier figura es construible si y solo si las coordenadas de todos los vertices son números origami y sabemos cuando si dado un número decir si es o no origami.

BIBLIOGRAFÍA

[1] **DORRONSORO J, HERNANDEZ Eugebio.** *Numeros, grupos y anillos.* **Addison Wesley Iberoamericana, 1996.**

[2] **CLEMENS S, O'DAFFER Phares.** *Geometria.* **Addison Wesley Longman, Primera Edicion, 1998.** pp 174-226.

[3] **BROWDER F.** *Mathematical developments arising from Hilbert problems in: procedings of symposia in pure mathematics.* **American Mathematical Society. 1976.**

[4] **LANG S.** *Algebra.* **Addison Wesley, Tercera Edicion, 1993. pp 191 y 457. .**

[5] **HERSTEIN. I.N** *Algebra Moderna* **Mexico. Editorial Trillas, 1974.**

[6] **ROW Sundara.** *Geometric exercises in paper folding.* **Dover, 1966.**

[7] **AUCKLY David, CLEVELAND John** *Totally Real Origami and Impossible Paper Folding.* **American math. Monthly. Vol 102, No 3, 1995.** pp 215-226.