Ambiente virtual de aprendizaje en GeoGebra para dependencia e independencia lineal sobre campos finitos: una experiencia con estudiantes de licenciatura en matemáticas

Maicol Fabian Picón Lizarazo

Trabajo de Grado para Optar al Título de Licenciado en Matemáticas

Director

Alexander Betancur Sánchez

Magister en Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2024

Dedicatoria

A mi padre Dios, mi mejor amigo, y apoyo incondicional en todos los estadios que me encontré durante el tránsito de este bello camino académico que apenas se ve iniciado.

A mis padres, Emilce Lizarazo y James Barreto, por su apoyo incondicional, los consejos que me dieron en todo este proceso con mucho cariño y la motivación que día a día me brindaron en la construcción de esta meta. Espero estén orgullosos de mí.

A Laura Susana Duran Blanco, quien sin comerlo ni beberlo, cambio la manera en que, hasta el momento en que tuve la oportunidad de conocerla, tenia de la vida en algunos aspectos muy importantes.

A María Alejandra Aldana Picón quien, en este último año académico, se encargó de brindarme una motivación genuina que contribuyó a el logro de esta gran meta.

A todos mis amigos y profesores que en la construcción del licenciado que hoy aspiro a ser y los conocimientos que pude adquirir fueron participes tanto en inspiración como acompañantes.

Agradecimientos

Al profesor Alexander Betancur Sánchez, quien, con su experiencia como docente, me brindo grandes consejos y motivación, importantes para que este proyecto se lograra realizar. Mi admiración total hacia su trabajo y pasión por la enseñanza.

A mis evaluadores Alexander Holguín Villa y Jorge Enrique Fiallo por las aportaciones y sugerencias realizadas siendo valiosos ingredientes para enriquecer este trabajo.

A la Universidad Industrial de Santander por ser mi segunda casa en todo este proceso, y permitirme llevar a cabo este proyecto de grado formando parte de su comunidad educativa.

A los estudiantes del curso de Algebra lineal en donde realizamos las implementaciones, gracias por ser parte de este esfuerzo por aportar a la enseñanza de las matemáticas en específico el Algebra Lineal.

Finalmente, extiendo mis más sinceros agradecimientos a todas aquellas personas, que de una manera u otra hicieron parte de las experiencias que enriquecieron la realización de este trabajo. Cada una de ellas fue de alta importancia para mi formación tanto académica como personal.

Tabla de contenido

Tabla de figuras

Lista de Tablas

Lista de apéndices

Resumen

Título: Ambiente virtual de aprendizaje en GeoGebra para dependencia e independencia lineal sobre campos finitos: una experiencia con estudiantes de licenciatura en matemáticas *

Autor: Maicol Fabian Picón Lizarazo **

Palabras Clave: APOE, Campos finitos, Dependencia e independencia lineal, GeoGebra.

Descripción:

El presente estudio emerge de un trabajo de grado en la modalidad práctica en docencia con el objetivo de crear un Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA) mediante applets de GeoGebra consolidados en un libr[1]o de GeoGebra para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de losconceptos de dependencia e independencia lineal de conjuntos de vectores sobre un campo finito.El lente teórico y metodológico usado para la práctica en docencia fue la perspectiva de la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema). Particularmente, se enmarca en los estudios desarrollados por la teoría APOE sobre desarrollo cognitivo apoyado con el paradigma de investigación y desarrollo curricular. La implementación del AVA se realizó en un curso de álgebra lineal con estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas. Los resultados de lapráctica en docencia dejan como producto un Libro de GeoGebra con applets interactivos para favorecer la construcción de conocimientos previos y el aprendizaje de la dependencia e independencia lineal sobre campos finitos. A partir de las evidencias obtenidas de la implementación en el aula se consolidan elementos relacionados con una descomposición genéticapara el aprendizaje de dichos conceptos.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Director: Alexander Betancur Sánchez. Magister en Educación Matemática.

Abstract

Title: Virtual learning environment in GeoGebra for linear dependence and independence on finite fields: an experience with undergraduate mathematics students *

Author(s): Maicol Fabian Picón Lizarazo

Key Words: APOE, Finite fields, Linear dependence and independence, GeoGebra

Description:[2]

The present study emerges from a degree work in the practical teaching modality with the objective of creating a Virtual Learning Environment (VLE) through GeoGebra applets consolidated in a GeoGebra book to favor the process of teaching and learning concepts of the linear dependence and independence of sets of vectors over a finite field. The theoretical and methodological lens used for teaching practice was the APOS (Action-Process-Object-Scheme) theory perspective. Particularly, it is framed in the studies developed by the APOS theory on cognitive development supported by the research and curricular development paradigm. The implementation of the VLE was carried out in a linear algebra course with students from the Bachelor of Mathematics program. The results of the teaching practice leave as a product a GeoGebra Book with interactive applets to promote the construction of prior knowledge and the learning of linear dependence and independence on finite fields. From the evidence obtained from the implementation in the classroom, elements related to a genetic decomposition for the learning of said concepts are consolidated.

* Degree work

** Faculty of Sciences.School of Mathematics. Bachelor of Mathematics. Director:Alexander Betancur Sánchez. Master in Mathematical Education.

Introducción

Este trabajo se encuentra inscrito dentro de la línea de investigación de Didáctica de la Matemática, en particular, la didáctica del Álgebra Lineal del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. Este estudio busca la innovación en el aula características a partir de la creación de un Libro de GeoGebra (AVA) con applets interactivos, para favorecer los conocimientos previos y el aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal en conjuntos de vectores sobre un campo finito.

La investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal ha sido un tema de creciente interés en la comunidad de investigadores (Trigueros y Possani, 2013; Stewart et al, 2018). En relación con lo anterior este estudio centra su intención en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal sobre campos finitos y toma como base los resultados considerados y propuestos por Ballesteros (2020) en el contexto local de la Universidad Industrial de Santander, quien reporta que el uso de softwares como GeoGebra favorece la comprensión de los conceptos de dependencia e independencia lineal, pero en $\mathbb{R}^n$. El uso de GeoGebra para la creación de appletsse hace ya que integra diferentes vistas que favorecen la conexión de representaciones de objetos matemáticos y además por su naturaleza de acceso abierto (Anaya-Puebla, 2020).

Harel (2019) expresa que las representaciones geométricas son una necesidad intelectual para la comprensión del álgebra lineal, aún más, en ausencia de una imagen conceptual o geométrica que ilustre la definición de un concepto, los estudiantes son incapaces de retener tal concepto durante un largo periodo de tiempo. Por su parte, Anaya Puebla (2020) refiere que el usode recursos dinámicos e interactivos de apoyo para la instrucción y el aprendizaje de los estudianteses importante. En este sentido, el estudio pretende contribuir con recursos para el aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal en conjuntos de vectores sobre un campo finito.

El presente informe de la práctica en docencia está organizado en 9 capítulos: en el primero se presenta el planteamiento del problema en donde se formula la necesidad de involucrar las tecnologías dentro de la enseñanza de conceptos algebraicos en específico los correspondientes a la dependencia e independencia lineal. El capítulo 2, ofrecen con los antecedentes una revisión sobre investigaciones reportadas alrededor de la enseñanza de los conceptos de dependencia e independencia lineal con y sin el uso de tecnología digital. El tercer capítulo corresponde a la justificación, aquí se expone y sustenta la necesidad de diseñar un AVA orientado a el aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal sobre campos finitos. Por su parte, en el cuarto capítulo se presentan los objetivos generales y específicos del estudio.

Ahora, el quinto capítulo aborda el lente teórico, teoría APOE, donde se precisan algunas características generales de la teoría APOE, y consideraciones sobre el AVA. El capítulo 6 presenta el diseño metodológico, donde se definen las características de los participantes y el proceso metodológico orientado por una adaptación realizada al ciclo metodológico propuesto en Betancur(2020) y acompañado por las evidencias de la prueba piloto realizada en 2022-2. El reporte de la implementación, algunas evidencias y comentarios interpretativos de análisis sobre la implementación del libro de GeoGebra (AVA) se organizan en el capítulo 7. Finalmente, el capítulo 8 expone elementos para una DG sobre el aprendizaje de los conceptos de dependencia eindependencia lineal sobre Campos finitos, aspectos de mejora y contribuciones a la docencia. Finalmente, se dejan los anexos del estudio.

1. Planteamiento y formulación del problema

El álgebra lineal es un tema vital en las áreas de Ciencia, Tecnología, Ingeniería, y Matemáticas (STEM). La incursión de tecnología computacional en la enseñanza del álgebra lineal ha motivado oportunidades profesionales en ciencia de datos, procesamiento de señales, criptografía, informática, computación cuántica, entre otras (Stewart et al., 2022).

La comunidad de investigadores que ha trabajado en álgebra lineal ha consolidado avances importantes sobre la enseñanza y aprendizaje de conceptos clave como: sistema de ecuaciones lineales, transformaciones lineales, matrices, valores y vectores propios, espacios vectoriales, dependencia lineal e independencia lineal, entre otros (Stewart et al., 2018), sin embargo, hay grandes desafíos en los cuales se requiere aunar esfuerzos.

En relación a los conceptos de dependencia e independencia lineal se han realizado estudios desde una perspectiva geométrica en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (Parraguez y Bozt, 2012; Ballesteros, 2020) con el propósito de introducir los conceptos de manera concreta para los estudiantes. También hay investigaciones sobre la enseñanza de la dependencia e independencia con situaciones de modelación (Trigueros y Possani, 2013; Salgado 2015). Asimismo, Kú, Trigueros y Oktaç (2008) Oropeza y Lezama (2007) muestran evidencia que incluso los estudiantes exitosos en los cursos de Álgebra Lineal tienen dificultades con la comprensión de los conceptos de dependencia e independencia, en particular, en espacios vectoriales distintos a $\mathbb{R}^n$. En términos de Harel (2017), lo anterior puede deberse a que los estudiantes han retenido sobre el concepto de dependencia e independencia lineal meros residuos de un procedimiento restringido a vectores de $\mathbb{R}^n$ y de manera memorística. En la literatura revisada a la fecha son escasos los estudios que abordan la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal en espacios vectoriales diferentes a $\mathbb{R}^n$ salvo dos publicaciones reportadas a la fecha del presente estudio: Oropeza y Lezama (2007) y Weller et al., (2002). En el primero, se analizan las producciones de estudiantes sobre tareas que involucran la dependencia e independencia lineal en $\mathbb{R}^2$ y el espacio de los polinomios de grado menor o igual a n (P_n- en adelante). Por otra parte, en Weller et al., (2002) se reportan tareas para la enseñanza de conceptos de álgebra lineal diseñadas por miembros del RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) usando el lenguaje deprogramación ISTEL, en particular, se presentan tareas para la enseñanza de la dependencia e independencia lineal de espacios vectoriales sobre campos finitos ($\mathbb{Z}_p^n - p$ primo), $\mathbb{R}^2$ y otras en P_n, sin embargo, no se reporta evidencia sobre la implementación en el aula y las construcciones mentales realizadas por los estudiantes.

Por otra parte, De Vries y Arnon (2004) en un estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje del conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales, recomiendan el trabajo con campos finitos con el propósito de favorecer una comprensión más profunda sobre el concepto, incluir progresivamente la abstracción y vincular tecnología computacional en las tareas o situaciones deaprendizaje.

En relación a lo anterior, algunos investigadores (Carlson et al., 1993; Stewart et al., 2022) miembros del grupo Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG, por sus siglas en inglés) sugieren que el inicio de los cursos de álgebra lineal puede fundamentarse en objetos concretos que tienen los estudiantes, manteniendo un equilibrio entre manipulaciones concretas, aplicaciones y abstracción.

La investigación en educación matemática sobre la dependencia e independencia lineal (Trigueros y Possani, 2013; Salgado 2015; Ballesteros, 2020) muestra que los estudiantes requieren unas construcciones mentales previas sobre las operaciones de suma y múltiplo por un escalar en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, uso de la variable, conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales y combinación lineal. Aún más, la dependencia e independencia lineal es clave en la construcción de significados de las operaciones de espacio vectorial (Parraguez, 2020), base (Kú et al., 2008) transformaciones lineales (Roa- Fuentes y Oktaç, 2010), entre otros, sin embargo, su aprendizaje resulta ser difícil para los estudiantes (Salgado, 2015). La situación se agrava cuando la enseñanza de este concepto se torna mecánica y repetitiva, sin promover significados, conexiones y contextos de aplicación (Oktaç, 2019).

El uso de tecnología digital para la enseñanza y aprendizaje de dependencia e independencia lineal se reporta en algunos estudios (Weller et al., 2002; Hernández y Ayala, 2018; Ballesteros, 2020), entre estos, el software GeoGebra es usado con frecuencia para la creación de Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA) por la integración de diferentes vistas que favorecen la conexión de representaciones de objetos matemáticos y además por su naturaleza de acceso abierto (Anaya-Puebla, 2020).

Las instituciones educativas que buscan la innovación educativa desarrollan estrategias variadas para brindar a los profesores y estudiantes mejores oportunidades de enseñanza y aprendizaje (Cruz et al., 2020). La formación de profesores en matemáticas y el conocimiento especializado de su labor es clave en la investigación de la educación matemática, en particular, en álgebra lineal. Al respecto, entre lo que se espera de los profesores es una comprensión profunda sobre los conceptos matemáticos que enseña; esto involucra reconocimiento y uso de representaciones, contextos de aplicación, entre otras. (Vasco y Climent, 2018). En este orden de ideas, la pregunta que guía el presente estudio es: ¿Cómo favorece la comprensión de los conceptos de dependencia e independencia lineal sobre campos finitos el uso de situaciones y tareas en un AVA con GeoGebra para profesores de matemáticas en formación?

2. Antecedentes del estudio

En este apartado se precisan algunos aspectos considerados clave en el presente estudio sobre la dependencia e independencia lineal y en cada caso se relacionan reportes de investigación al respecto. Tales aspectos son: uso de tecnología computacional y enfoque geométrico, comprensión de la dependencia e independencia lineal y recomendaciones por (LACSG).

2.1 Uso de tecnología computacional y enfoque geométrico

El uso de tecnología computacional ha sido incluido en las iniciativas de enseñanza y aprendizajedel álgebra lineal desde hace un par de décadas. En particular, podemos destacar la propuesta delgrupo RUMEC sobre principios del siglo XXI reportado en Weller et al. (2002) para elaborar tareas con ITSEL (Lenguaje de programación en matemáticas) en relación a conceptos como: vectores, espacios vectoriales, sistemas de ecuaciones lineales, matrices y entre estos los conceptosde dependencia e independencia lineal. Las consideraciones en tal diseño de las tareas fue que mediante el trabajo con ITSEL el estudiante tuviera un acercamiento concreto al concepto de estudio y luego una mirada más abstracta. Algunos espacios vectoriales considerados en las tareasfueron: $\mathbb{Z}_2^4$, $\mathbb{Z}_3^4$, y $\mathbb{Z}_5^4$. La propuesta planteada extiende conexiones con espacios vectoriales como $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con $\mathbb{Z}_2^3$, $\mathbb{Z}_3^3$, etc. y motiva la reflexión a otros espacios como P_n.

Desde la epistemología del álgebra lineal se puede identificar el vínculo entre la representación geométrica, aritmética y algebraica de los conceptos (Konyalioglu et al., 2011). Al respecto, Oropeza y Lezama (2007a) proponen unas tareas para el aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal partiendo desde representaciones geométricas en espacios vectoriales como $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y otras tareas en el espacio P_2, donde se relaciona las gráficas de tres polinomios de grado menor o igual a 2 con el wronskiano para caracterizar el conjunto de polinomios como linealmente dependiente o independiente. En otro estudio, Oropeza y Lezama (2007b) destacan la necesidad de reconocer e involucrar el isomorfismo entre espacios vectorialespara el estudio de dichos conceptos en espacios vectoriales como P_n, en particular, entre P_n y $\mathbb{R}^{n+1}$. Tal acercamiento pretende que el estudiante use sus construcciones previas y establezca conexiones para comprender los conceptos de dependencia e independencia lineal en otrosespacios diferentes a $\mathbb{R}^n$.

Por su parte, Parraguez y Bozt (2012) usan los modos de pensamiento del álgebra lineal (Sierpinska, 2000) los cuales son: Sintético-Geométrico (SG), Analítico-Aritmético (AA) y Analítico-Estructural (AE) para estudiar las conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal y sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con estudiantes de licenciatura en matemáticas y pedagogía en matemáticas. Algunos de los aspectos más relevantes correspondena la prevalencia del modo Analítico-Aritmético en los estudiantes aún en tareas o situaciones quefavorecen el modo Sintético-Geométrico. Así mismo, Dogan-Duplan (2010) investiga sobre los modos de pensamiento para los conceptos de dependencia e independencia lineal y en correspondencia con el estudio Parraguez y Bozt (2012) muestra evidencia que el modo de pensamiento geométrico no reemplazan los modos analíticos o algebraico. Aún más las formas depensamiento geométrico ayudan a los estudiantes a considerar representaciones y razonamiento sobre los conceptos en cuestión.

Aún más las formas de pensamiento geométrico ayudan a los estudiantes a considerar representaciones y razonamiento sobre los conceptos en cuestión.

En otro estudio, Ballesteros (2020), investiga sobre el aprendizaje de la dependencia lineal a partirde objetos concretos en estudiantes universitarios de primer año con una mirada desde la teoría APOE. Las tareas diseñadas en el estudio involucraron el uso de GeoGebra para la exploración dinámica de relaciones geométricas entre vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. El trabajo de los estudiantes orientada por la investigadora permitió el reconocimiento de características de conjuntos de vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$; esto es ser colineales o coplanares. La colinealidad y coplanaridad era el insumo concreto para vincular el concepto de combinación lineal y de esta manera la dependenciae independencia lineal de vectores.

De acuerdo a lo anterior, como lo expresa Harel (2019) las representaciones geométricas son unanecesidad intelectual para la compresión del álgebra lineal, aún más, en ausencia de una imagen conceptual o geométrica que ilustre la definición de un concepto los estudiantes son incapaces deretener tal concepto durante un largo periodo de tiempo. También, el uso de recursos dinámicos e interactivos de apoyo para la instrucción y el aprendizaje favorecen su firmeza a lo largo del tiempo (Anaya-Puebla, 2020).

2.2 Sobre la comprensión de la dependencia e independencia lineal

La comprensión alrededor de los conceptos de dependencia e independencia lineal ha sido en los últimos años un punto de anclaje para la investigación realizada en la enseñanza y aprendizaje delálgebra lineal. Algunos de los estudios expresan los siguiente:

Saldanha (1995) propone tres formas distintas en las que un estudiante puede comprenderlos conceptos de dependencia y independencia lineal, particularmente en uno de estos casos refiriendo a características geométricas:

1) *Entender el concepto tomando como referencia la definición formal:*

Un conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de un espacio vectorial W sobre un campo K es linealmente independiente $\Leftrightarrow$ $(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0 \Rightarrow c_1 = \cdots c_n = 0)$ para $c_1, \ldots c_n \in K$. Un conjunto de vectores de un espacio vectorial es linealmente independiente si y sólo si no es linealmente dependiente. (Saldanha, 1995, p.31).

2) *Considerar el concepto como una relación entre vectores de un espacio vectorial W de esta manera:* El conjunto formado por dos o más vectores de W, $\{v_1, ..., v_n\}$ es linealmente dependiente si y sólo si por lo menos uno de los vectores puede expresarse como una combinación de los otros. El conjunto formado por dos o más vectores de W, $\{v_1, ... , v_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si ninguno de los vectores puede expresarse como una combinación de los otros. (Saldanha, 1995, p.39-40).

3) Por otra parte, refiriendo a una característica geométrica de tal situación:

Dos vectores en el plano son linealmente dependientes, si y sólo si, son colineales. Del mismo modo tres vectores en el espacio tridimensional son linealmente dependientes, si y sólo si, son coplanares. Dos vectores en el plano son linealmente independientes, si y sólo si, tienen distintas direcciones. Así mismo dos vectores en el espacio tridimensional son linealmente independientes, si y solo si, no son coplanares. (Saldanha, 1995, p.43-44).

En relación a la tercera forma de entender el concepto que presenta Saldanha (1995) relaciona características geométricas asociadas a la condición de dependencia e independencia lineal y bajo esta premisa destacan algunos autores como Sierpinska (2000) dado que sus investigaciones sobre los modos de pensamiento en álgebra lineal, mencionados en secciones anteriores, y las formas de representación (Alves Días y Artigue,1995; Hillel, 2000) son problemáticas que han recibido la atención de varios investigadores. Parraguez y Bozt (2012) quienes afirman que el tránsito por estos modos de pensamiento favorece particularmente la comprensión de los conceptosde dependencia e independencia lineal, cuando se observa que aquellos estudiantes que lograron transitar entre los distintos modos de pensamiento mostraron formas de pensar más cercanas a la definición formal y abstracta del concepto, lo que representa un avance significativo.

Por otra parte, Anaya Puebla (2020) luego de realizar y aplicar un AVA para la enseñanza y el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución, bajo el enfoque de la teoría APOE, considera pertinente usar diferentes representaciones (lenguaje verbal, gráfico, algebraico) para el aprendizaje de los conceptos, al igual que otros investigadores (Ochoviet 2009; Ramírez-Palacios et al., Segura 2004).

En el contexto local, Ballesteros (2020) realizó una encuesta a profesores encargados del primer curso de álgebra lineal. Los resultados mostraron que cerca del 76% de 17 profesores encuestadosafirmaron incluir los conceptos de dependencia e independencia lineal dentro de su curso de álgebra lineal, dedicando alrededor de 3 horas de las 64 disponibles. A partir de lo anterior, Ballesteros (2020) diseña actividades para el aprendizaje de la dependencia lineal usando GeoGebra y notó que la concepción sobre la dependencia lineal en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ fue más profunda, algunos estudiantes mostraron evidencias de una concepción Objeto de acuerdo a la teoría APOE. En relación a lo propuesto por Saldanha (1995), la manera de abordar la instrucción en el aula inicio usando la tercera forma: referido a la forma geométrica de entender el concepto.

En contraste con la propuesta de Ballesteros (2020), Aydin (2014) afirma cuando hay un énfasisen los procedimientos algorítmicos los estudiantes tienden a quedarse con operaciones sobre una matriz aumentada al trabajar dependencia e independencia lineal, sin entender las implicaciones y argumentar sobre el concepto. Al respecto, Harel (2017) expresa que los estudiantes tienden a recordar sin mucho éxito el procedimiento, suelen considerar el sistema $Ax = 0$ pero en algunas ocasiones no logran determinar con facilidad si tiene o no única solución y por lo tanto que implicación tiene en términos de ser linealmente dependiente o independiente.

Otros acercamientos para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal los han liderado Trigueros y Possani (2013) involucrando situaciones de modelación y un modelo cognitivo a la luz de la teoría APOE. Del modelo cognitivo destacan la importancia de realizar acciones sobre vectores usando la suma y multiplicación por un escalar para considerar un caso de interés que corresponde a estudiar el vector cero como una combinación lineal de los vectores involucrados. Así mismo, refieren la necesidad de que los estudiantes tenga una concepción Proceso sobre el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.

El acercamiento considerado por Trigueros y Possani (2013) es continuado por Salgado (2015) donde se analiza la comprensión de los conceptos de combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generador y espacio generado usando situaciones de modelación y el modelo cognitivo reportado en Trigueros y Possani (2013). Los resultados de esta propuesta didáctica muestran que favorece la comprensión de los conceptos de álgebra lineal.

2.3 Recomendaciones del LACSG

En 1993, Carlson, Johnson, Lay y Porter integrantes del primer grupo LACSG examinaron recomendaciones sobre el diseño de los cursos de álgebra lineal. Estas recomendaciones han sidode alto impacto tanto a nivel nacional como internacional.

Recientemente se ha publicado una nueva versión de recomendaciones por los miembros actuales del grupo LACSG 2.0 (Stewart et al., 2022).

A continuación, se realiza un breve contraste entre las recomendaciones reportadas en Carlson et.,(1993) y Stewart et al., (2022).

Las recomendaciones dadas en 1993 fueron referidas para un primer curso de álgebra lineal y algunos tópicos opcionales. En la propuesta de 2022 se consideran recomendaciones para dos cursos, en el primer curso se hace referencia a dependencia e independencia lineal en $\mathbb{R}^n$ y para elsegundo curso considerarlos ahora en espacios vectoriales abstractos. En relación a la incorporación de tecnología en el aula de clase y la importancia de atender las necesidades de aprendizaje en los estudiantes, Stewart et al., (2022) enfatiza en la importancia de investigar el uso y rol de las tecnologías emergentes para la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal.

En particular, se propone que los estudiantes que realicen un segundo curso de álgebra lineal puedandesarrollar estudios sobre aplicaciones en diferentes áreas de la ciencia (aunque no se menciona las aplicaciones con códigos lineales y juegos lineales finitos, actualmente son un campo de interés). Además, también se desafía a las instituciones de educación superior a formar a sus estudiantes de álgebra lineal según las demandas de las empresas, industrias u otra necesidad del contexto (Stewart et al., 2022).

Un aspecto importante en la última versión de recomendaciones, se relaciona con el énfasis que se hace en la inclusión de aplicaciones en diversas situaciones con los conceptos del álgebra lineal con el propósito de proporcionar a los estudiantes motivación para investigar en álgebra lineal. De acuerdo a las consideraciones recogidas en ambos artículos es importante el uso adecuado de las tecnologías de la información y la comunicación durante el desarrollo de la clase, una participación activa de los estudiantes mediante situaciones de modelación con tecnología computacional. Todo lo anterior demanda que para el docente y los estudiantes sea accesible recursos, aplicativos, applets, etc. en relación con los diferentes conceptos del álgebra en particular, dependencia e independencia lineal de vectores sobre campos finitos.

3. Justificación

Los antecedentes mostrados anteriormente (Dogan-Dunlap, 2010; Parraguez y Bozt, 2012; Trigueros y Possani, 2013; Salgado, 2015; Harel 2017; Ballesteros, 2020) en la presente propuestarelacionaron evidencia importante para la llevar la enseñanza- aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal, sin embargo, se han ocupado principalmente en $\mathbb{R}^n$.

Aunado a lo anterior, Vasco y Climent (2018) se refieren a la necesidad de una buena fundamentación matemática y didáctica de los maestros en formación, en particular, sobre los conceptos de dependencia e independencia lineal; un conocimiento para profesor de los conceptosmatemáticos que involucre esto involucre diferentes representaciones, significados, contextos de aplicación, entre otras.

Desde el contexto local, la Universidad Industrial de Santander (1982) refiere en su reglamento depregrado la posibilidad que los futuros profesionales realicen su trabajo de grado bajo la modalidadde práctica en docencia. Dicha modalidad busca favorecer entre otras cosas, la innovación en el aula en relación a nuevas metodologías y el diseño de AVA´s. El presente estudio considera el trabajo de investigación previo en el contexto local (Ballesteros, 2020), la ausencia deexperienciasde enseñanza de los conceptos de dependencia e independencia lineal en campos finitos, la necesidad de diseñar AVA’s para usar en los cursos de álgebra lineal y las recomendaciones dadaspor Carlson et al., (1993) y Stewart et al., (2022).

Así, el estudio aquí reportado consideró los siguientes objetivos generales y específicos.

4. Objetivos del estudio

4.1 Objetivo general

Diseñar e implementar un Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA) para la enseñanza yaprendizaje del concepto de dependencia e independencia lineal sobre campos finitos con estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

4.2 Objetivos específicos

- Rediseñar y diseñar tareas y situaciones reportadas en la literatura sobre dependencia e independencia lineal sobre campos finitos usando GeoGebra.
- Elaborar un AVA con Libro GeoGebra con tareas y situaciones interactivas que favorezca elaprendizaje de dependencia e independencia lineal sobre campos finitos y sus conocimientos previos.
- Identificar elementos importantes asociados a la construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal sobre campos finitos en términos de la teoría APOE.

5. Elementos teóricos

En este apartado se exponen los elementos clave en los que se soportaron el presente estudio. Como se ha referido en secciones anteriores el nombre de la teoría APOE corresponde al acrónimo de las estructuras mentales Acción-Proceso-Objeto-Esquema propuestas por Dubinsky (1991) y presentada en detalle en Arnon et al., (2014).

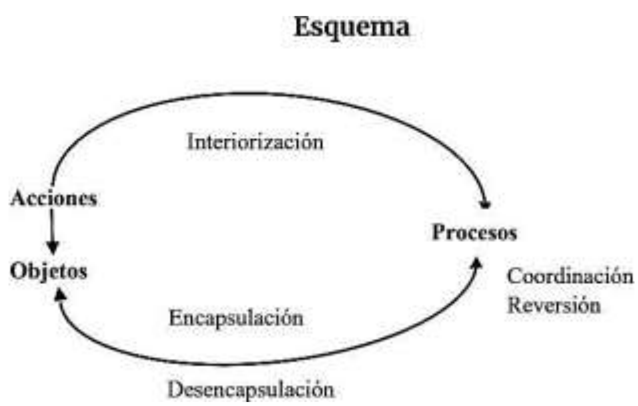
A continuación, se destaca la postura de la teoría APOE en relación a cómo ocurre el aprendizajede un objeto matemático en la mente de un estudiante. Para ello se usa los conceptos de dependencia e independencia lineal sobre $\mathbb{R}^n$ reportado en Trigueros y Possani (2013) y Ballesteros (2020). También se delimitan aspectos en relación al ciclo de enseñanza propuesto porla teoría para realizar la instrucción.

5.1 La teoría APOE: estructuras y mecanismos mentales

La referencia epistemológica de la teoría APOE se basa en las ideas de Piaget sobre la abstracción reflexiva, razón por la cual Dubinsky (1991) la consideró como un mecanismo indispensable en laconstrucción de conocimiento matemático. Así desde la teoría APOE se entiende que los estudiantes generan significado de los conceptos matemáticos cuando construyen y usan ciertas estructuras mentales (Acción-Proceso- Objeto-Esquema); estas surgen mediante instancias de abstracción reflexiva, las cuales consisten de mecanismos mentales tales como interiorización, encapsulación, coordinación, reversión, desencapsulación y tematización (Arnon et al., 2014).

Figura 1.

Estructuras y mecanismos mentales



Nota. Este ciclo de estructuras y mecanismos mentales ha sido tomado de Arnon et al., (2014)

En la figura 1 se ilustra la interacción entre las estructuras y los mecanismos mentales.

Desde APOE se consideran clave las construcciones previas para avanzar en el aprendizaje. Así, la comprensión de un concepto puede iniciar por realizar acciones sobre Objetos construidos previamente que mediante el mecanismo de interiorización el estudiante puede tener una concepción Proceso. Una concepción Proceso se distingue de la Acción en el sentido que el estudiante deja de ser dependiente de indicaciones externas y ahora puede hacer acciones en su mente y argumentar sin necesidad de recurrir, por ejemplo, a realizar operaciones en su cuaderno.También una concepción Proceso puede tener lugar mediante el mecanismo de coordinación o el mecanismo de reversión. Cuando el estudiante ha reflexionado sobre el Proceso y puede verlo como un todo se dice que ha sido encapsulado en un Objeto. En esta concepción el estudiante puede ver el Objeto como algo estático para realizar nuevas acciones sobre éste. De esta manera, un Esquema es el conjunto de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas subyacentes que el estudiante puede involucrar para razonar en determinada situación presentada.[3]

Los Esquemas se caracterizan a través de niveles definidos por la tríada intra [elementos aislados,sin relaciones], inter [relaciones y transformaciones] y trans [pertinencia y alcance] (Arnon et al., 2014). La construcción del conocimiento es dinámica lo cual un Esquema puede estar en constanteacomodación y re-equilibración para ampliar su conocimiento y relación de un concepto matemático con otros.

Para hacer operativa la teoría se considera una descomposición genética que funge como un modelo cognitivo para el aprendizaje de los estudiantes y como referente la preparación de la enseñanza por el docente (Arnon et al., 2014).

A continuación, se describen brevemente características de las estructuras Acción, Proceso y Objeto para los conceptos de dependencia e independencia lineal.

Acción: Esta estructura se caracteriza por la dependencia de indicaciones externas o seguimiento paso a paso. Al considerar un conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$, por ejemplo, de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ se recurre a considerar la combinación lineal $c_1v_1 + \ldots + c_nv_n = 0$ resolviendo dicho

Una concepción difiere de estructura, en el sentido en que la primera es propia del sujeto, y la segunda es consenso de la comunidad matemática (McDonald, Mathews & Strobel, 2000) sistema para determinar si el sistema tiene única o infinitas soluciones. Un estudiante con una concepción Acción no puede anticipar que un vector se combinación del otro o relaciones geométricas ser colineal o coplanar para determinar la dependencia e independencia lineal; necesita recurrir a la representación geométrica de los vectores para poder reconocer dichas relaciones (Trigueros y Possani, 2013; Ballesteros, 2020).

Proceso: Considerando el conjunto de vectores referido anteriormente $\{v_1, \ldots, v_n\}$, en esta estructura las acciones ocurren en la mente del estudiante, no hay tanta dependencia de indicaciones externas, puede anticipar las características del conjunto solución de $c_1v_1 + \ldots + c_nv_n = 0$. De esta manera, es posible discriminar usando relaciones geométricas de colinealidad o coplanaridad (en general, la existencia de una combinación lineal para escribir un vector en términos de los otros) para reconocer que el conjunto es linealmente dependiente (Trigueros y Possani, 2013; Ballesteros, 2020).

Objeto: esta estructura se caracteriza por ser estática ypoder realizar acciones sobre el objeto construido. Así, considerando el conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$, el cual se ha estado usando para ejemplificar, si se ha determinado que el conjunto es linealmente dependiente o independientealgunas acciones que se pueden considerar es aplicarle cierta transformación lineal T y analizar siel conjunto $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$, es linealmente dependiente o independiente (Ballesteros, 2020).

5.2 Consideraciones sobre la enseñanza

La teoría APOE propone un ciclo de enseñanza que consta de tres componentes: (A) Actividades; (C) discusión en el aula; (E) Ejercicios. Este ciclo se denominado ciclo de enseñanza ACE (por las siglas en ingles de las tres componentes). Desde la teoría APOE no se especifica un contexto para el diseño de situaciones para la enseñanza, sin embargo, en investigaciones como Salgado y Trigueros (2015) y Betancur (2020) distinguen situaciones de modelación y tareas específicas.

La figura 2 muestra la adaptación que se realizó para efectos del estudio del ciclo ACE propuestoen Arnon et al., (2014) e inspirado en Betancur (2020). Consideramos que el ciclo de enseñanza puede iniciar desde cualquiera de los tres momentos, ya sea situaciones de modelación, tareas específicas o discusiones grupales o generales. En una sesión de clase se puede involucrar más deuno delos momentos o posiblemente se realicen todos. La situación de modelación introduce a los estudiantes a la construcción del concepto o permite avanzar en la construcción del mismo, promueve las discusiones en pequeños grupos y discusiones generales con el fin de negociar los acercamientos. El profesor identifica los momentos clave para liderar conversaciones generales con todo el grupo y también el tipo de tareas específicas diseñadas bajo el lente teórico para promover el desarrollo de las construcciones emergentes en el trabajo con el modelo. Las tareas específicas pueden tener lugar en diferentes espacios como el salón de clases, tutorías o consultas con el docente (Betancur, 2020).

A continuación, se presenta el diseño metodológico que siguió el presente estudio.

Figura 2.

Adaptación del ciclo ACE

Nota. Ciclo metodológico del estudio adaptado de Arnon et al., (2014) Considerando que el presente estudio es de práctica en docencia, según lo contempla el Reglamento para los estudiantes de pregrado de la Universidad Industrial de Santander y lo presentado en el capítulo 3 del presente escrito, el estudio busca la innovación en el aula en relación a nuevas metodologías y el diseño de AVA´s. A continuación, se presentan algunas delimitaciones en relación a la elaboración de los applets enGeoGebra para la configuración del AVA mediante la opción de libro de GeoGebra.

5.3 Consideraciones sobre AVA

La gestión del aprendizaje por las instituciones educativas ha sufrido una constante evolución debido a la tecnología digital y las diversas herramientas que se pueden ejecutar en computadoras,teléfonos inteligentes y tabletas. Desde el involucramiento de los Sistemas de Gestión de Aprendizaje – Learning Management Systems– (LMS) o como comúnmente se les llama Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA) las instituciones educativas lo han involucrado con el finde favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje en los estudiantes y profesores (Cruz et al., 2020). Los AVA’s pueden ser usados en escenarios de aprendizaje sincrónico y asincrónico, es decir, puede ser usado en salón de clases como un laboratorio de aprendizaje y además los estudiantes pueden continuar sus reflexiones y aprendizajes en tareas asignadas, posibilitando queel profesor oriente las interacciones que realizan los estudiantes Anaya-Puebla (2020).

La práctica en docencia realizada involucró el uso de GeoGebra para elaborar applets y organizar la enseñanza en el aula mediante la opción de libro de GeoGebra.

A continuación, se presenta una tabla donde se refieren los tipos de applets en GeoGebra los cuales se consideraron en el diseño del AVA para los conceptos de dependencia e independencia lineal de conjuntos de vectores sobre campos finitos.

Tabla 1.

Tipología de applets utilizada en el estudio propuesta por Anaya-Puebla (2020)

Applets dedicados a conjetura	**Applets evaluativos**
Ejemplificar hipótesis o supuestos asociados a un objeto o situación, de manera que, a partir de su exploración se ratifiquen o invaliden los supuestos planteados *Sus características son:* -Ausencia de textos que indiquen el proceso aseguir. -No se dan instrucciones al usuario. -Se encuentran activas tanto la vista algebraica como la vista de ejecución (gráfica 3D, tabla o CAS) -No hay botones ni casillas de ingreso. -Si hay deslizadores, aparecen en su forma visual	Se conforman de actividades que le permiten al docente evaluar procesos, conocimientos o habilidades. *Sus características son:* -Contienen preguntas de selección múltiple, numéricas, emparejar, completar, graficar, entre otras. -Se define la variable Grade (en su mayoría). Contiene una breve retroalimentación (puede ser una nota, o comentario)
Applets de aprendizaje autónomo	**Applets calculadores**
El usuario caracteriza algún concepto o procedimiento sin acompañamiento obligatorio deun docente; en general se evidencia un esfuerzo adicional en el diseño de la interfaz. *Sus características son:* -En su diseño se incluyen botones o casillas que lepermiten al usuario interactuar con el applet. -Se incluyen indicaciones para el uso del applet. -Su construcción permite al usuario reproducir unaamplia gama de casos. -No aparece la vista algebraica	Le permiten al usuario efectuar diversos tipos de cálculos en los diferentes camposdisciplinarios que el software ofrece. *Sus características son:* -Su diseño incluye botones y casillas. -Permite realizar una gran cantidad decálculos. -Contiene indicaciones breves acerca desu uso. -Se particularizan funciones de GeoGebra para que el usuario no asuma elproceso de programa

Nota. Tipología de applets para la enseñanza de conceptos matemáticos. Tomado de Anaya-Puebla (2020)

A partir de las consideraciones anteriores sobre los elementos teóricos, a continuación, se refiere el diseño metodológico del presente estudio.

6. Diseño metodológico

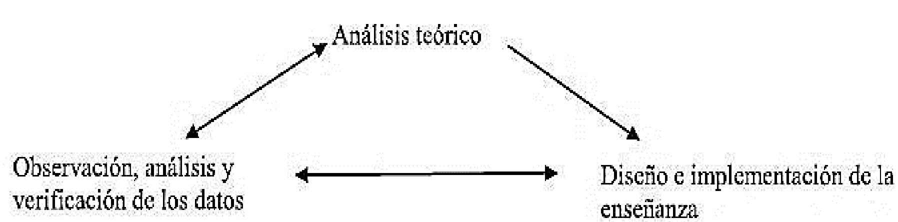
El estudio es de corte cualitativo y se enmarca en los estudios desarrollados por la teoría APOE sobre desarrollo cognitivo, dado que si bien hay investigaciones sobre la dependencia e independencia lineal de vectores en $\mathbb{R}^n$, no hay estudios sobre la dependencia e independencia lineal de vectores sobre un campo finito. De acuerdo al paradigma de investigación de la teoría APOE, mediante la instrucción y evidencias de la misma se puede reconocer posibles caminos deconstrucción de un concepto matemático. En este capítulo se presentan las fases del estudio, las delimitaciones en relación a la población en la que se hizo la práctica en docencia, así como los diferentes momentos en los que se hizo la intervención y sus consideraciones.

6.1 Fases del estudio

Las fases del estudio se inspiran en el paradigma de investigación y desarrollo curricular propuesto por la teoría APOE (Arnon et al., 2014). En la figura 3 se presentan sus componentes y la maneraen que interactúan.

Figura 3

Ciclo de investigación y desarrollo curricular



Nota. Interacción y componentes del ciclo de investigación y desarrollo curricular tomado de Arnon et al., (2014)

En el análisis teórico se hizo una revisión de la literatura en relación a investigaciones sobre el concepto de dependencia e independencia lineal, algunos fueron referidos en el capítulo 2. También se revisaron libros de texto como Poole (2011) y Del Valle (2011), en relación a como se presentaba situaciones con campos finitos, vectores en $\mathbb{Z}^n$ y aplicaciones.

La revisión permitió identificar formas de presentar los conceptos, situaciones o tareas para rediseñar o diseñar, orientaciones para planificación el AVA y la implementación de la enseñanza. Ahora bien, el Diseño e implementación de actividades se dio en cuatro momentos principales: observación de aula y diseño de situaciones de modelación y tareas mediadas con GeoGebra, implementación piloto, construcción del libro de GeoGebra e implementación final. Mediante la observación en elaula se reconoció posibilidades de diseñar applets en GeoGebra para favorecer la enseñanza. La implementación Piloto tenía el propósito de conocer la pertinencia de algunas situaciones o tareas, así como su secuencia y pertenencia de los applets preparados para el AVA. La construcción del libro de GeoGebra se hizo a partir de los ajustes de la implementación piloto para proceder con laimplementación final.

A continuación, se precisa la población y más detalles de los momentos metodológicos.

6.2 Población de estudio

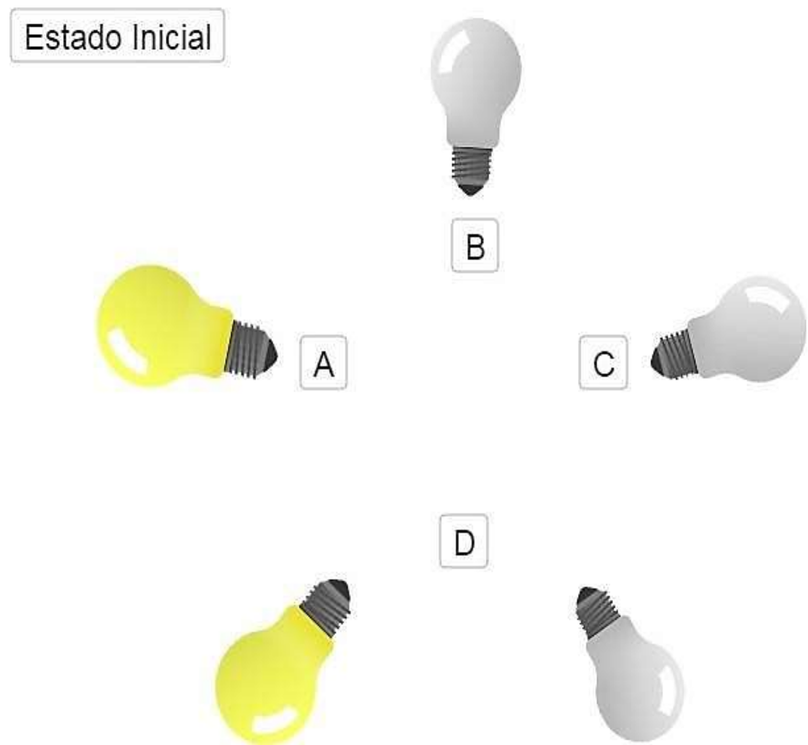
El presente estudio de práctica en docencia se desarrolló con 17 estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander en un curso de Álgebra Lineal con una intensidad horaria de 6 horas semanales de clase y 2 horas relacionadas a Tutorías grupales.

6.3 Prueba Piloto:

Para efectos de poner a prueba algunos diseños de applets para la práctica en docencia e identificarla posible estructura del AVA, se realizó una prueba piloto en el semestre 2022-2 en un curso de Álgebra Lineal para la Licenciatura en Matemáticas.

Figura 4.

Applet utilizado durante la prueba piloto, periodo semestral 2022-2



La prueba piloto fue de una clase de 2 horas y se usó un Applet para la enseñanza de los conceptos de dependencia e independencia lineal de campos finitos. El Applet simulaba la conexiónde una “red de bombillas” (ver figura 4) ubicadas de forma circular con interruptores que afectabanlos estados (encendido-apagado) y se esperaba que los estudiantes involucraran algunos conceptosdel álgebra lineal, en particular, la dependencia e independencia lineal de vectores sobre $\mathbb{Z}_2^5$ para argumentar sobre los estados de las bombillas al oprimir ciertos interruptores.

El diseño y ajuste de la situación “red de bombillas” correspondía a un aspecto clave parala elaboración del libro de GeoGebra (AVA), por lo tanto, en la prueba piloto se realizó la videograbación de la sesión de clase y se recolectaron las hojas de trabajo (producción escrita) para obtener evidencia sobre las construcciones de los estudiantes y la estructura a considerar en el libro de GeoGebra (AVA).

Ahora bien, durante la aplicación de la prueba piloto se lograron observar algunos elementos importantes para ser considerados en el diseño del libro en GeoGebra (AVA), como lossiguientes:

6.3.1 Algunas producciones de los estudiantes en la prueba piloto

Para la implementación de la prueba piloto el aula se organizó en 7 grupos ($Grupo$ 1, … , $Grupo$ 7) de 3 o 4 estudiantes, mediante la exploración del applet los estudiantes reconocían la manera enque estaban conectadas las bombillas y como cada interruptor afectaba el estado de las bombillas. Algunas orientaciones generales presentadas fueron:

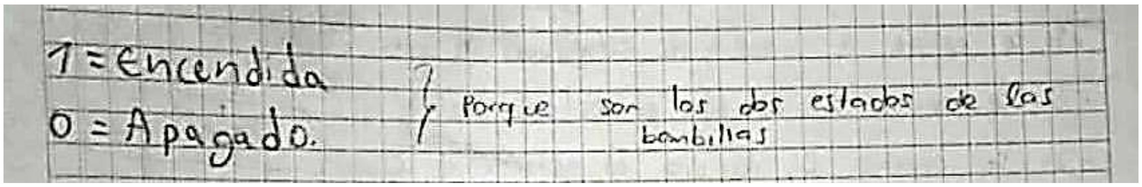
- Describa el efecto de oprimir cada interruptor, si es el caso describirla de diferentes maneras. Piense si tales efectos se pueden describir usando el lenguaje matemático.
- Explique cómo es posible obtener el estado final propuesto partiendo del estado inicial dado. En caso contrario, justifique porque no puede se puede obtener. Presente información detallada y amplia.

Durante 15 minutos aproximadamente cada grupo exploraba la conexión de la red de bombillas enel Applet, posteriormente cada grupo seleccionó una configuración (Final) del sistema y se solicitó que cada grupo retara a otro grupo a explicar cómo obtener dicha configuración a partir de una configuración dada (inicial) o si no era posible explicar el porqué. En cada grupo durante 75 minutos aproximadamente se trabajó en el reto propuesto vinculando elementos matemáticos, en particular del álgebra lineal. A continuación, se destacan los conceptos emergentes en la soluciónal reto propuesto por algunos grupos.

La noción de **campo escalar** ($\mathbb{Z}_p$) emergió en el intento de codificar los estados de las bombillas de la red y matematizar el reto propuesto. En particular, en la figura 5 se observa como el grupo 3 especifica la manera de hacer la codificación, 1: Encendida; 0: Apagada.

Figura 5

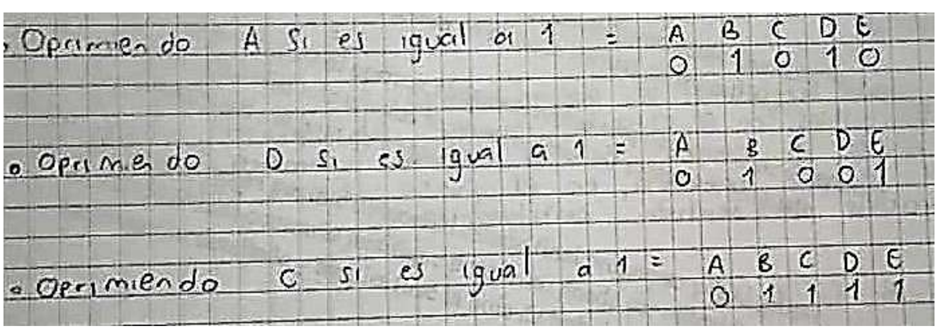
Evidencia Grupo 3 para codificar los estados



Al considerar la codificación presentada y las etiquetas para los interruptores, los estudiantes interpretan los estados de las bombillas de la red como una "lista ordenada", es decir, se evidenciauna intención de usar vectores de $\mathbb{Z}^5$ para referir la configuración de la red (estados de cada bombillade la red en el orden ABCD). Al oprimir algunos interruptores, por ejemplo, A, los estudiantes delgrupo 3 afirman que "si es 1", es decir, la bombilla está encendida, pero al oprimir A el estado ahora es "0". De lo anterior se percibe un modo de aritmética sobre $\mathbb{Z}_2$ de tal manera que 1 + 1 = 0 (ver figura 6).

Figura 6

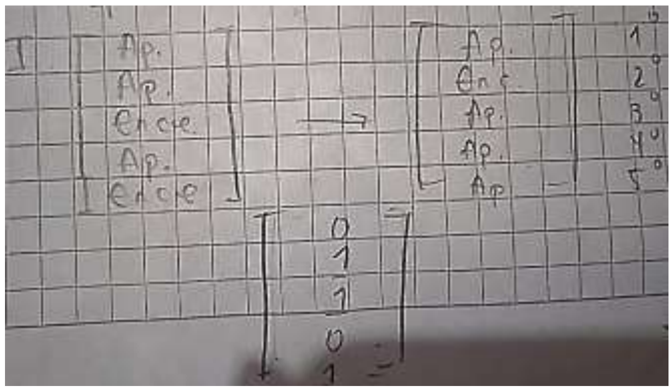
Evidencia grupo 3 con una intención de hacer aritmética sobre $\mathbb{Z}_2$.



Además de usar vectores de $\mathbb{Z}_2^5$ para referir la configuración de la red, los estudiantes interpretan el oprimir interruptores con vectores en $\mathbb{Z}_2^5$. Aunque en la evidencia en físico del grupo3 no se especifica qué significado tiene 0 y 1 en algunos grupos, en la revisión de las grabaciones y las producciones del grupo 4, se identifica que para los estudiantes significa: 1 como cambiar deestado y 0 dejarlo invariante (Ver figura 7).

Figura 7

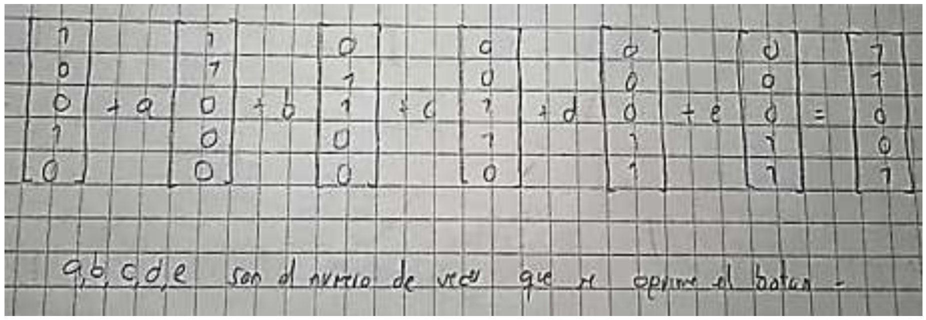
Evidencia grupo 4 para interpretar la acción de oprimir un interruptor.



En el trabajo de otros grupos, por ejemplo, el grupo 6 se involucra los vectores que describen la configuración de la red y el efecto de oprimir los interruptores mediante la suma y lamultiplicación por un escalar. Las producciones de los estudiantes muestran una manera de pensar en la combinación lineal como elemento clave para interpretar y abordar el reto propuesto. El grupo 6 interpreta la situación considerando los coeficientes a, b, c, d y e como las veces que es oprimido cada uno de los interruptores respectivamente (ver figura 7). En relación al primer vector[1,0,0,1,0] es interpretado como el estado inicial y el último [1,1,0,0,1] como el estado final. En lacombinación lineal propuesta se integra tanto los vectores que describen el efecto de oprimir cadainterruptor como los vectores que describen el estado de las bombillas (inicial – final) [ver figura 8].

Figura 8

Evidencia Grupo 6 de combinación lineal que modela el problema de las bombillas.



En un momento de retroalimentación general, en particular estudiantes del grupo 6, explican susrazonamientos para resolver el reto propuesto. En el diálogo desarrollado se destaca lo siguiente: Estudiante 3: este es el estado inicial (señalando el primer vector de izquierda a derecha de la figura 8), entonces iniciamos de ahí, luego vamos a ver cuántas veces vamos a oprimir el botón A, cuántasveces vamos a oprimir el botón B, cuántas veces vamos a oprimir el botón C, cuántas veces vamosa oprimir el botón D, y cuantas veces vamos a oprimir el botón E, para llegar a lo que queremos (estado final de las bombillas)".

A partir de las evidencias de la prueba piloto se identifica que los conceptos de Campo escalar, vector y combinación lineal fueron utilizados en conjunto para representar e intentar solucionar la situación. En la producción escrita por el grupo 6, los estudiantes lo reconocen comoun sistema de ecuaciones lineales e intentan resolverlo. En algunos de los grupos, los estudiantes hacen las operaciones elementales para resolver el sistema sobre el campo $\mathbb{Z}_2$. Si bien los estudiantes no evocan la independencia o dependencia lineal entre los vectores del conjunto S: $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ condición para cumplir cualquier reto propuesto, refieren que la razón de no haber solución en algunos retos está en el hecho que hay dos interruptores que “hacen lo mismo”; tal como se puedever en los dos últimos vectores del conjunto S. Cuando hacen referencia a que son los mismos vectores está implícito en el discurso de los estudiantes que el conjunto S es linealmente dependiente.

6.3.2 Consideraciones para el diseño de Applets en el AVA

De la prueba piloto, en particular, en la sección 6.3.1 se mostró evidencia que los estudiantes codifican (con escalares en un campo finito) y usan vectores (con entradas de un campo finito) para interpretar y actuar sobre la situación propuesta. En relación a lo anterior, se considera necesario en la construcción del AVA diseñar tareas con Applets que involucren el codificar usando campos finitos, en este sentido, también es necesario involucrar Applets que permitan explorar y aprender la aritmética en campos finitos. Así mismo, se pueden usar secuencias de bombillas en forma lineal según su estado (ejemplo, apagado-encendido) para involucrar el trabajocon vectores más allá de sus operaciones, es decir, en situaciones de aplicación.

En la aplicación de la prueba piloto, la configuración de la red de bombillas involucraba un conjunto de vectores linealmente dependiente. En este sentido, para el diseño del AVA se considera pertinente crear otras situaciones con redes de bombillas donde el conjunto de vectores relacionado involucre conjuntos de vectores linealmente dependientes o independientes.

6.3.3 Sobre los conocimientos previos

La prueba piloto, como se mostró en 6.3.1, permitió reconocer conocimientos previos para el aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal en campos finitos.

Desde la perspectiva de la teoría APOE, lo anterior se relaciona con las estructuras y mecanismos mentalesnecesarios para iniciar el aprendizaje de dichos conceptos. Según la revisión de la literatura, para el caso de la dependencia e independencia lineal en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (Trigueros y Possani, 2013; Salgado 2015; Ballesteros, 2020), algunos de los conceptos importantes que se ha identificado es el uso dela variable (sobre un campo escalar), conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales y combinación lineal. Así mismo, otros estudios como Weller et al., (2002) presentan para la enseñanza de la dependencia e independencia lineal sobre campos finitos, actividades que involucran, crear vectores (ejemplo, con entradas en $\mathbb{Z}_3$), realizar combinaciones de vectores (suma y multiplicación por un escalar), comparar conjuntos de vectores en relación a la cantidad de maneras de combinar el vector cero en cada caso.

En relación a las evidencias referidas de la prueba piloto y los reportes de la literatura se consideraque entre los conocimientos previos de estudiante para el aprendizaje de dependencia e independencia lineal sobre campos finitos está una concepción proceso de Campo Escalar (finito),de combinación lineal (Vectores sobre un campo finito) y una concepción objeto de vector (sobrecampos finitos) y de variable (sobre campos finitos).

A partir de las consideraciones anteriores se definió la organización del curso para la implementación en el periodo 2023-1 en núcleos conceptuales. A continuación, se presenta una breve descripción del mismo.

6.4 Estructura del curso

El curso de Álgebra Lineal con una intensidad de 6 horas se organizó en 3 núcleos conceptuales principales: Campos escalares y vectores, Sistemas de ecuaciones lineales y Matrices y Transformaciones Lineales y determinantes, Campos finitos y Vectores: en este núcleo se consideran los conjuntos numéricos (Reales y complejos), se estudian sus operaciones básicas y un contraste de sus propiedades. Se introduce la aritmética modular para comparar las propiedadesque se cumplen en contraste con $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ para abstraer la estructura de cuerpo. Por otra parte, se estudian las características geométricas y propiedades algebraicas de los vectores en $\mathbb{R}^n$ para haceralgunas generalizaciones importantes y caracterizar lugares en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ como rectas y planos. Además, se hacen algunas consideraciones sobre vectores en $\mathbb{Z}_p$, Sistemas de ecuaciones lineales (SEL) y Matrices: en este núcleo se considera los conceptos de vector y combinación lineal en relación a la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Emergenlos conceptos de dependencia e independencia lineal, así como conjunto generador y espacio generado como referentes importantes para entender el conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^n$(se involucran algunas situaciones con sistemas de ecuaciones lineales sobre $\mathbb{Z}_p$). El estudio de las operaciones de suma y multiplicación por un escalar para las matrices se hace enfocada en contrastar las propiedades con los vectores de $\mathbb{R}^n$ y abstraer el concepto de espacio vectorial. Los conceptos de dependencia e independencia lineal, generados, entre otros, se extienden de $\mathbb{R}^n$ al espacio de matrices, al mismo tiempo que se reconocen diferentes propiedadesde las matrices y algunas aplicaciones.

Finalmente, el núcleo correspondiente a Transformaciones Lineales y determinantes se sitúa a partir del producto matriz por vector para abordar las transformaciones lineales (particular los operadores lineales) para describir ciertas deformaciones mediante el determinante y los subespacios como rango y kernel de una transformación lineal. El estudio de las transformaciones lineales se ocupa de otros espacios vectoriales como el espacio de matrices y de polinomios. En elestudio de las transformaciones lineales se caracterizan las deformaciones mediante los eigenvalores y eigenvectores. En este núcleo se definen productos internos (distintos al producto punto) en algunos espacios vectoriales para estudiar la ortogonalidad.

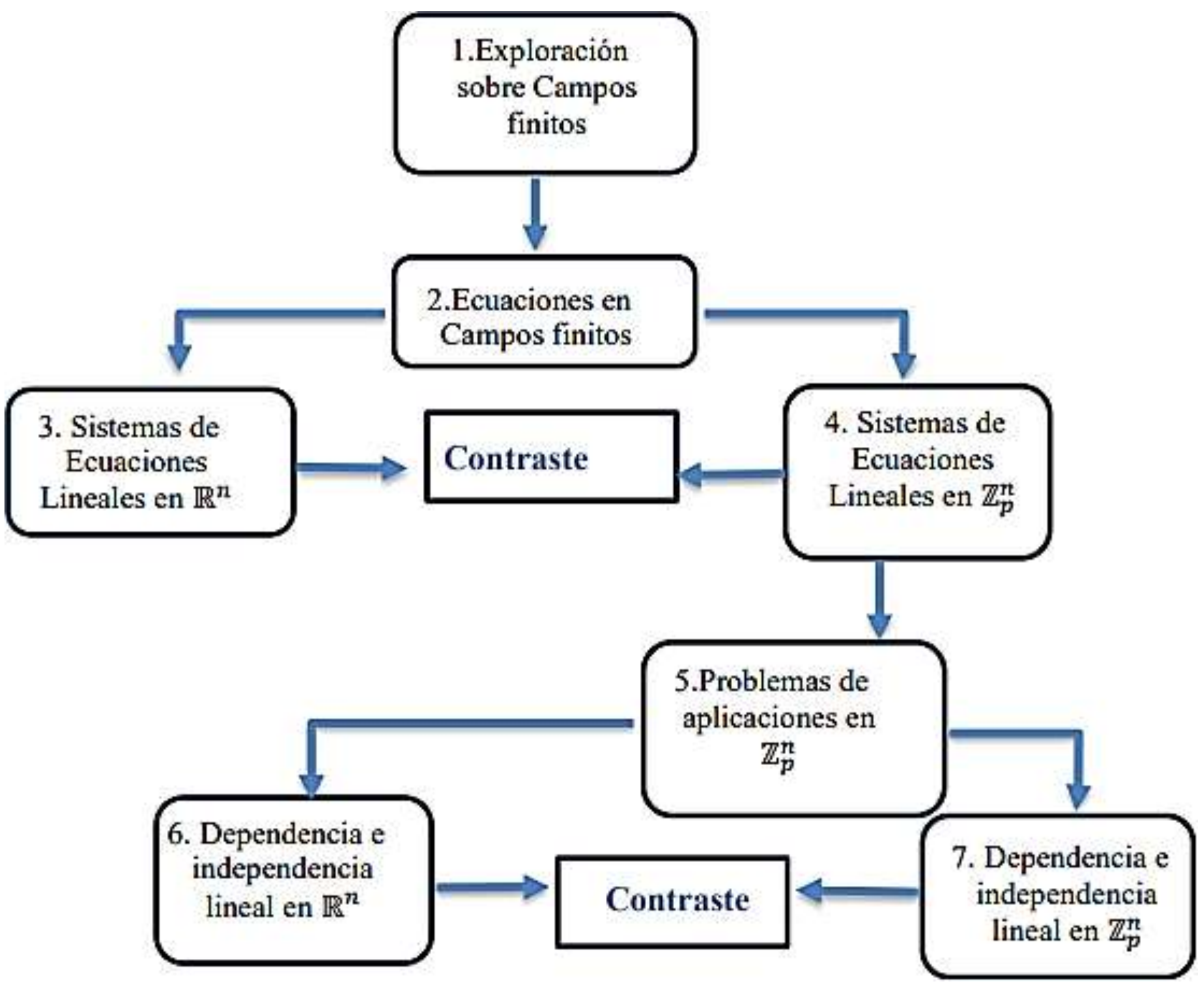
De esta manera, anclado a la organización anterior del curso, se traza la ruta del AVA de la siguiente manera.

6.5 Estructura del AVA

El diseño de los applets en el AVA, se hizo progresivamente y algunos Applets se usaron para la implementación en el aula. Según lo referido en la sección 6.3.2 y 6.3.3 los conocimientos previos para la dependencia e independencia lineal de vectores sobre un campo finito y la manera dearticularlos en el desarrollo del curso se ilustra en la figura 9.

Figura 9

Proyección de la estructura del Libro de GeoGebra AVA



6.5.1 Organización del libro de GeoGebra para el AVA

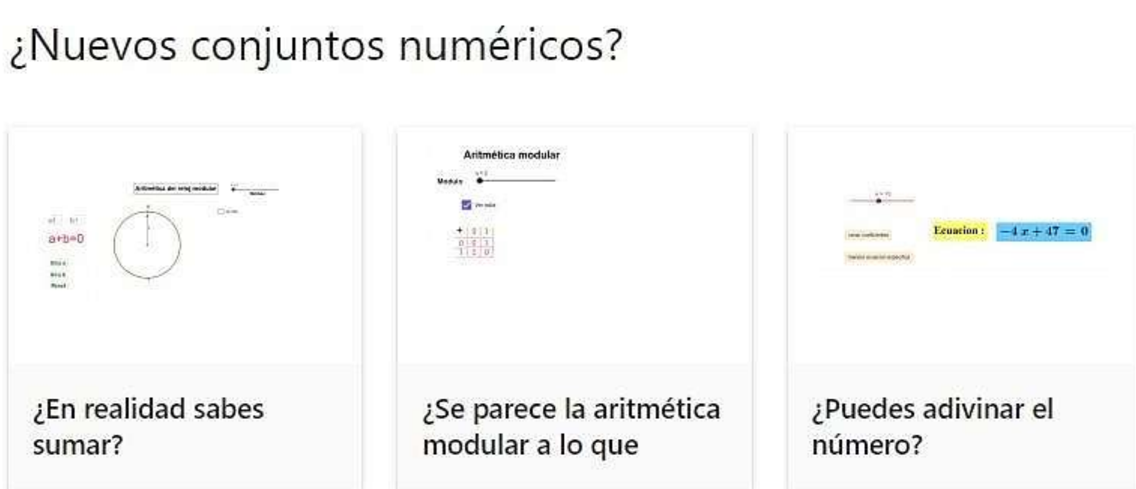
En diseño del libro se definió en 4 capítulos (ver anexo 1- se muestra capítulo por capítulo), orientados por una pregunta problematizadora. Así mismo, dentro de cada capítulo se definieron unas secciones con correspondiente preguntas clave. A continuación, se presenta una descripciónbreve de cada uno de los capítulos propuestos.

6.5.2 Capítulo 1: ¿Nuevos conjuntos numéricos?

La figura 10 muestra la interfaz gráfica del capítulo con sus correspondientes secciones: ¿En realidad sabes sumar?, ¿se parece la aritmética modular a lo que vimos en la escuela? Y ¿puedes adivinar el número?

Figura 10

Secciones del capítulo 1 del Libro de GeoGebra para el AVA.



Enlace directo a el Capítulo 1:https://www.geogebra.org/m/hz8maupa#chapter/847949

Objetivo: el énfasis del primer capítulo está en fundamentar la aritmética sobre los campos finitos$\mathbb{Z}_n$ con $n \in \mathbb{Z}$ y $n > 1$. Algunos Applets presentados son de exploración para reconocer características de la suma y producto en módulo n. Además, las preguntas que le acompañan y elhilo conductor el capítulo se centra en reconocer que $\mathbb{Z}_p$ con p primo, junto con la suma y multiplicación son un campo escalar. Posteriormente, la atención se centra en determinar soluciones a ecuaciones lineales en algún módulo n dado.

Origen de los applets incorporados en el Capítulo 1: Dentro de la estructura del capítulo 1, etiquetando cada uno de los applets propuestos allí dado su objetivo e intensión, se relacionan aquellos utilizados y su origen intelectual:

Applet 1: Residuo modulo n de un entero (Diseño propio elaborado en colaboración con el director Alexander)

Applet 2: Sumas dentro de un campo escalar (Rediseño realizado a recurso libre en colaboración con el director Alexander)

Applet 3: Suma dentro de un campo escalar, algunas particularidades (Rediseño realizado a recurso libre en colaboración con el director Alexander)

Applet 4: Inversos aditivos dentro de un campo escalar (Diseño propio en colaboración con el director Alexander)

Applet 5: Multiplicación dentro de un campo escalar, algunas particularidades (Rediseño realizado a recurso libre en colaboración con el director Alexander)

Applet 6: Inversos multiplicativos dentro de un campo escalar, algunas particularidades (Rediseño realizado a recurso libre en colaboración con el director Alexander)

Applet 7: Interpretación de ecuaciones lineales dentro de un campo escalar (Diseño propio en colaboración con el director Alexander)

Applet 8: Interpretación de ecuaciones lineales dentro de un campo escalar, recurso evaluativo (Diseño propio en colaboración con el director Alexander)

Applet 9: Connotación de solubilidad de ecuación lineal sobre un campo escalar

(Diseño propio en colaboración con el director Alexander)

6.5.3 Capítulo 2: ¿Simples listas de números?

La figura 11 muestra ahora interfaz gráfica del capítulo 2 con sus correspondientes secciones: ¿Quédestinos puedes visitar?, ¿Lo puedes describir de otra manera? Y Describa el efecto con la codificación.

Figura 11

Secciones del capítulo 2 del Libro de GeoGebra para el AVA.

Enlace directo al capítulo 2: https://www.geogebra.org/m/hz8maupa#chapter/960339

Objetivo: en el segundo capítulo el objetivo principal es permitirle al estudiante pensar en los vectores más allá de una coordenada relativa a un desplazamiento en un sistema de referencia. Enparticular, algunos Applets de exploración autónomos y evaluativos tienen la intención de motivar al estudiante a definir una codificación usando un campo finito, en particular $\mathbb{Z}_2$ para interpretar los estados de bombillas en fila con listas ordenadas (vectores). En suma, se espera que el estudiante pueda reconocer a los elementos de $\mathbb{Z}^n$ como vectores y además los use de manera práctica.

Origen de los applets incorporados en el Capítulo 2: Dentro de la estructura del capítulo 2, etiquetando cada uno de los applets propuestos allí dado su objetivo e intensión, se relacionan aquellos utilizados y su origen intelectual

Applet 1: Percepción de las coordenadas de un punto, particularidades de un sistema dereferencia (Rediseño realizado a recurso libre en colaboración con el director Alexander)

Applet 2: Percepción visual de la combinación lineal de dos vectores, algunas particularidades (Diseño propio en colaboración con el director Alexander)

Applet 3: Codificación de red lineal de cuatro bombillas en dos estados diferentes (Diseñopropio en colaboración con el director Alexander)

6.5.4 Capítulo 3: ¿Qué hay detrás de una combinación lineal?

En el capítulo 3 las secciones consideradas fueron: ¡Más que simples ecuaciones! y ¿De cuántasforma se puede combinar el vector cero?, tal como se muestra en la figura 12

Figura 12

Secciones del capítulo 3 del Libro de GeoGebra para el AVA.

Enlace directo al capítulo 3: https://www.geogebra.org/m/hz8maupa#chapter/847969

Objetivo: Para este capítulo del AVA, la intención fue poder centrar la atención en la combinación lineal como un elemento clave al tener un sistema de ecuaciones lineales. En particular, se pretende establecer relaciones con el espacio $\mathbb{R}^2$ al considerar sistemas de ecuaciones lineales y analizar elconjunto solución en $\mathbb{R}^2$ con tener un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes enteros y mirar el conjunto solución sobre un campo finito $\mathbb{Z}_p$.

Finalmente, el capítulo 4 buscaba dar el espacio para abordar situaciones con un sistema (red) de bombillas con determinadas conexiones e interruptores con la intención de propiciar las condiciones para los conceptos de dependencia e independencia lineal.

Origen de los applets incorporados en el Capítulo 3: Dentro de la estructura del capítulo 3, etiquetando cada uno de los applets propuestos allí dado su objetivo e intensión, se relacionan aquellos utilizados y su origen intelectual

Applet 1: Percepción geométrica preliminar a la solubilidad de un sistema de ecuaciones,particularidades de un sistema de referencia (Diseño propio en colaboración con el director Alexander)

Applet 2: Recurso evaluativo y retroalimentación geométrica acerca de la solubilidad de un sistema de ecuaciones. (Rediseño a recurso libre en colaboración con el director Alexander)

Applet 3: variación del recurso anterior evaluando la decisión del estudiante a la percepción soluble o no de un sistema de ecuaciones aludiendo a la característica geométrica. (Rediseño a recurso libre en colaboración con el director Alexander)

Applet 4: Relación entre rectas y la matriz asociada a un sistema deecuaciones, algunas particularidades (Rediseño a recurso libre en colaboración con el director Alexander)

Applet 5: Evaluación de estrategia para considerar vectores paralelos en $\mathbb{R}^2$ (Diseño propioen colaboración con el director Alexander)

Applet 6: Evaluación de percepción a la pregunta ¿De cuantas maneras se puede combinar el vector 0? sobre $\mathbb{R}^2$ (Rediseño a recurso libre en colaboración con el director Alexander)

Applet 7: Evaluación de percepción a la pregunta ¿De cuantas maneras se puede combinar el vector 0? Sobre $\mathbb{R}^3$ (Rediseño a recurso libre en colaboración con el director Alexander)

6.5.5 Capítulo 4: ¿Qué relación hay entre un sistema de bombillas y el Algebra lineal?

En el capítulo 4 las secciones consideradas fueron: ¿Puedes encender las bombillas necesarias? y ¿Puedes darles el color necesario?, tal como se muestra en la figura 13.

Enlace directo al capítulo 4: https://www.geogebra.org/m/hz8maupa#chapter/847972

Objetivo: El objetivo central de este capítulo era propiciar situaciones de redes de bombillas simuladas mediante Applets de exploración y evaluación donde el estudiante se le invitada a matematizar la situación y en dicho proceso se esperaba poner en articulación los conocimientos previos de los capítulos precedentes y que emergiera los conceptos de Dependencia lineal e Independencia lineal sobre campos finitos como condiciones clave para justificar y explicar las posibles configuraciones de la red de bombillas en cada caso.

Figura 13

Secciones del capítulo 4 del Libro de GeoGebra para el AVA.

Origen de los applets incorporados en el Capítulo 4: Dentro de la estructura del capítulo 4,

etiquetando cada uno de los applets propuestos allí dado su objetivo e intensión, se relacionan aquellos utilizados y su origen intelectual

Applet 1: Red de cinco bombillas involucrando los conceptos de dependencia e independencia lineal (Rediseño propio a recurso libre en colaboración con el director Alexander)

Applet 2: Red de 6 bombillas con 3 estados involucrando las nociones de dependencia e independencia lineal. (Diseño propio en colaboración con el director Alexander)

7. Implementación del AVA y análisis

El presente capítulo inicialmente refiere los aspectos involucrados para la presentación del informede la implementación de la práctica en docencia y el análisis, seguidamente se muestran algunas evidencias por cada capítulo del AVA acompañada con figuras que ilustran y contextualizan lo realizado, así como comentarios interpretativos a luz del lente teórico.

7.3 Instrumentos, técnicas del estudio y consideraciones sobre la práctica en docencia

La práctica en docencia se organizó en 4 momentos principales: observación, diseño de applets, tutorías e implementación en el aula de clase. En el semestre 2022-2 se hizo observación de 4 clases sobre campos finitos y sistemas de ecuaciones lineales. La mayoría de horas de trabajo independiente a la semana de la práctica en docencia se enfocó en el diseño de applets, donde inicialmente se buscó y exploró la manera de generar applets interactivos y autónomos. En el periodo 2023-1 el docente en formación de la práctica en docencia fue tutor del curso correspondiente donde se hacía la práctica, por lo tanto, semanalmente tenía 2 horas de encuentrocon los estudiantes para orientar el aprendizaje sobre los conceptos vistos en clase. Finalmente, laimplementación en el aula se hizo de manera progresiva en el curso hasta la consolidación del Libro de GeoGebra (AVA) el cuál terminó su implementación al cierre del semestre correspondiente al periodo 2023-1.

Los instrumentos y técnicas usadas para la recolección de las evidencias en la implementación fueron: respuestas de cada estudiante en el libro de GeoGebra para los capítulos 1-3, encuesta de valoración y comentarios de los capítulos 1-3 en formularios de Google, hojas de producción escrita de los estudiantes sobre las preguntas y situaciones del 4 capítulo del Libro de GeoGebra yvideograbaciones de la implementación del mismo. En relación a las respuestas de los estudiantesen el libro de GeoGebra y las producciones escritas para los primeros 3 capítulos se hizo un escrutinio y revisión de cada uno para identificar casos representativos de respuestas. Por otra parte, después de revisar varias veces la video grabación en relación a la implementación del capítulo 4 del libro de GeoGebra se seleccionaron fragmentos clave en relación al conocimiento matemático involucrado para resolver la situación a los cuales se le hizo transcripción.

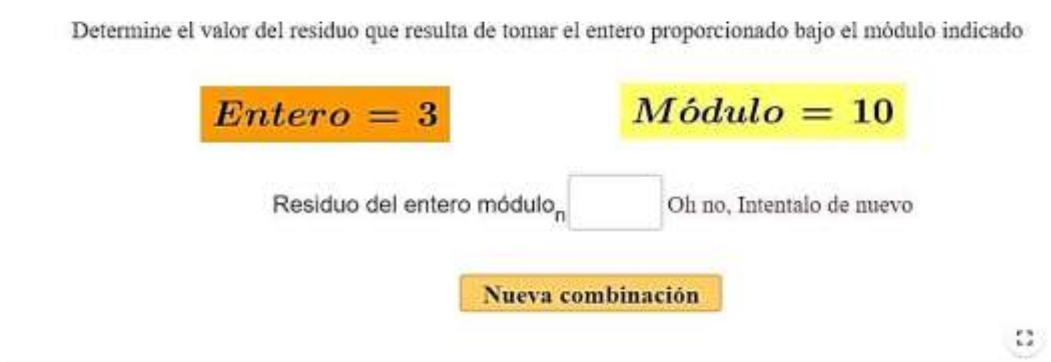
Para efectos de la presentación en este informe sobre la práctica en docencia y su correspondiente análisis se organiza por los capítulos del libro de GeoGebra (AVA). Cada apartado tiene algunas imágenes que muestra la interfaz gráfica de las secciones del libro de GeoGebra y los applets. Los comentarios interpretativos se enfocan en la construcción del conocimiento, es decir, las posibles estructuras y mecanismos mentales involucrados.

7.4 Evidencias del capítulo 1 del AVA y análisis

En la sección 6.5.2 se refirió el objetivo principal del capítulo 1 del libro de GeoGebra, en particular la figura 14 muestra un applet autónomo y de evaluación. El estudiante debía encontrar el residuo de un número x en módulo n tal como se muestra en los botones de la interfaz gráfica, además recibe validación del applet cuando ha insertado correcta o incorrectamente la respuesta del residuo. La interacción es dinámica dado que oprimir el botón nueva combinación, se pueden generar más combinaciones [Entero, módulo] dónde el estudiante puede seguir practicando y reflexionando sobre las estrategias y relaciones existentes en la tarea de encontrar el residuo módulo n.

Figura 14

Applet autónomo y de evaluación sección 1 Capitulo 1 del AVA para encontrar el residuo de un entero x módulo n.



La sección 1 del capítulo 1 invitaba al estudiante a reflexionar sobre la Acción de encontrar el residuo de un entero x módulo n. Algunas de las preguntas son: Al encontrar el residuo de diferentes números enteros bajo un determinado módulo, ¿Qué hallazgos pudo encontrar después de varios intentos?,¿Qué estrategia puede usar si necesita determinar el residuo de un número entero negativo cuando el módulo es 5? A tales preguntas en la hoja de respuesta del libro de GeoGebra se identificaron 3 respuestas representativas por parte de los estudiantes. A continuación, se relaciona textualmente las respuestas de los estudiantes.

E1: *Para la división entre un entero negativo en cierto módulo, se debe sumar al entero negativo un múltiplo del módulo que sea mayor al valor absoluto del entero negativo para así volverlo positivo y dividir dicho número en el módulo.*

E2: *Que el residuo es siempre menor que el módulo o mayor o igual a 0.*

E3: *Cuando el entero es menor al módulo el residuo es el mismo, pero si el entero y el módulo soniguales su residuo es cero y cuando el entero es negativo debemos convertirlo positivo con los múltiplos del módulo.*

En las respuestas de los estudiantes puede identificarse la construcción de estrategias y características después de hacer varios intentos. En particular, E2 está evocando a partir de la reflexión sobre la Acción de encontrar el residuo de un entero x módulo n la característica que tiene el residuo r módulo n, es decir, $0 \leq r < n$. Por otra parte, la reflexión sobre los diferentes ejemplos abordados les ha permitido a algunos estudiantes organizar tres casos si x es el entero y n el módulo: i. $x > n$, ii. $0 < x < n$ y iii. $x < 0$. En particular, para el caso iii. algunos estudiantes reconocen que en los múltiplos de n el residuo módulo n es 0, por lo tanto, se intuye una manera de operar con el 0 módulo n. En la sección 1 algunas preguntas particulares de lo anterior son:

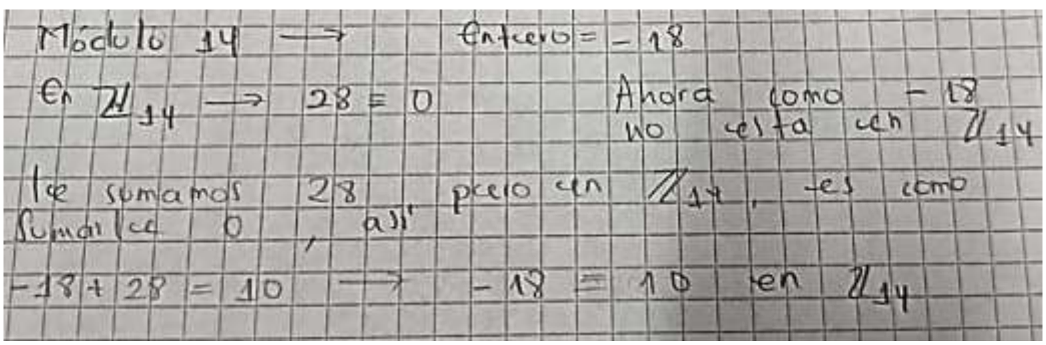
¿Qué estrategia puede usar si necesita determinar el residuo de un número entero

negativosi el módulo es 5? a lo que los estudiantes respondieron similarmente a lo expresado anteriormente, agregarle al entero un múltiplo escalar del módulo que supere al valor absoluto del entero propuesto.

La figura 15 muestra la producción escrita de un estudiante en la que entiende que, por ejemplo, $28 \equiv 0 \ mod \ 14$, dado que 28 es múltiplo de 14. En particular se considera 28 para sumarse con -18 y así obtener que $-18 + 28 = 10$, lo cual es un elemento de $\mathbb{Z}_{14}$ y la estudiante termina concluyendo que $-18 \equiv 10 \ mod \ 14$. Dicha forma de pensar suma evidencia adicional a las respuestas obtenidas de las preguntas del libro de GeoGebra.

Figura 15

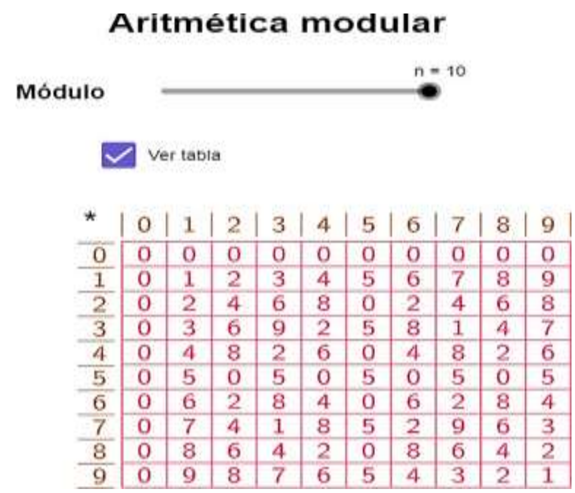
Evidencias sobre determinar el residuo de un entero x módulo n.



Para favorecer el trabajo sobre la aritmética modular se diseñaron applets tipo calculadora. En la figura 16 se muestra un applet donde los estudiantes podían variar el deslizador n para ver en la pantalla las tablas de multiplicar. En tal sección se orientaba el uso de applet con preguntas como: *¿Qué pares de números al multiplicar da como resultado 1 en módulo 10 (por referir un ejemplo)? ¿Qué sucede en otros módulos?* Las preguntas y orientaciones dadas al estudiante teníanla intención de que pudiera reconocer el elemento neutro con la suma y neutro con la multiplicación en módulo n. Así mismo, favorecer el reconocimiento de inversos aditivos y multiplicativos para luego usar dicho conocimiento en otras situaciones o tareas.

Figura 16

Applet calculadora sección 2 Capitulo 1 del AVA multiplicación módulo n.

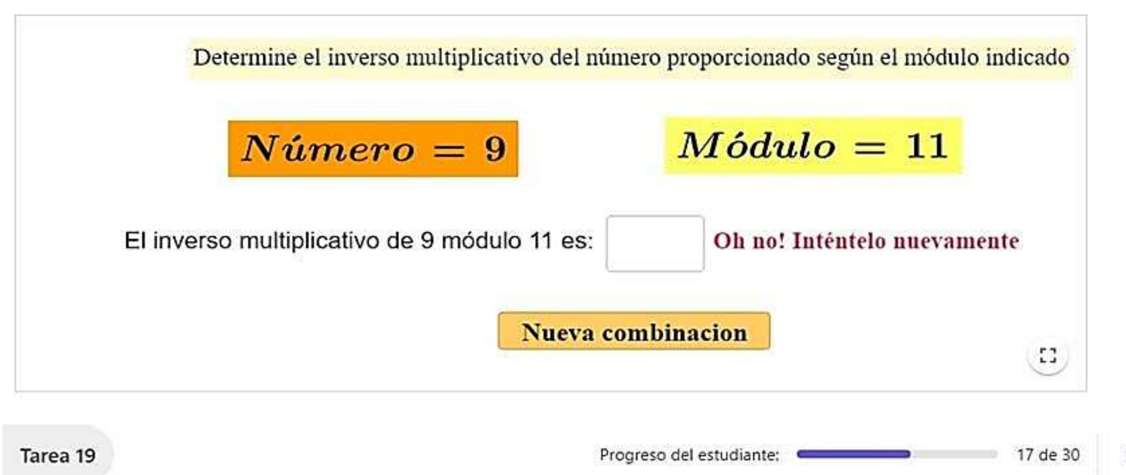


*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Considerando la construcción del inverso aditivo y multiplicativo en la sección 2 del capítulo 1 sediseñan otros applets autónomos y de evaluación. En figura 17 se presenta la interfaz gráfica de un applet usado para el inverso multiplicativo de un entero x módulo n.

Figura 17

Applet autónomo y de evaluación sección 2 Capitulo 1 del AVA sobre el inverso multiplicativo módulo n.



En el applet mostrado en la figura 17 el estudiante puede observar los botones de "número" y "Módulo", en la casilla de entrada debe insertar el inverso multiplicativo de cierto número x dadoen módulo n que se muestre en la pantalla. La retroalimentación automática le permite reflexionare ir identificando relaciones o características. Una pregunta de la sección relacionada con el appletes: *¿Qué estrategia usa para determinar el inverso multiplicativo de un número x módulo n?* Escriba en detalle sus razonamientos. En el seguimiento y caracterización de las respuestas de losestudiantes se identificó lo siguiente:

E1: *Multiplico x por varios escalares hasta que me dé un número $n + 1$ o $n(t) + 1$ o sea, un múltiplo de n más 1, luego lo divido en n y eso da el inverso multiplicativo.*

E2: *Un número que al multiplicarse y dividirse entre el número que indica el módulo me genere uno.*

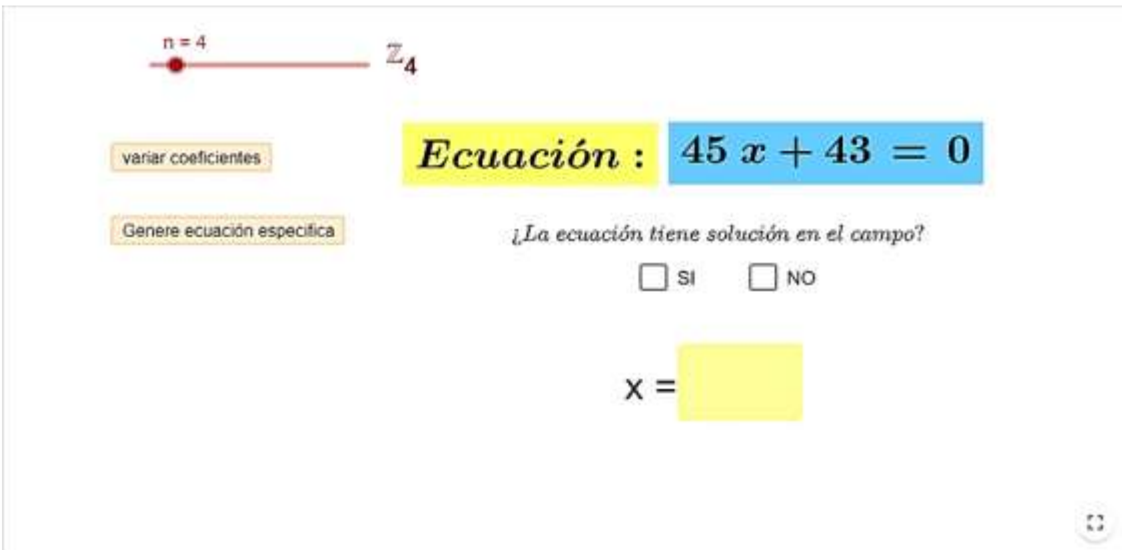
E3: *Primero asegurarse que n es primo después buscó un número que multiplicado por x sea igual a uno (1) en el módulo n.*

E4: *Restarle el número al módulo.*

De las respuestas anteriores se pueden identificar que algunos estudiantes se confundieron con el inverso aditivo de un x en $\mathbb{Z}_n$, sin embargo, tal aspecto fue retroalimentado después en el aula. Lasrespuestas de E1, E2 y E3 permiten entrever ciertas similitudes con lo que la mayoría identificó tras la interacción con el applet sobre encontrar el inverso multiplicativo de un número un campo finito, en contraste con lo que se haría en $\mathbb{R}$. La respuesta de E1 deja ver la necesidad de hacer pruebas con algunos elementos de $\mathbb{Z}_n$ tal que $ax = 1$ (mod n), es decir, la evidencia muestra que reflexión sobre la Acción de determinar el inverso multiplicativo mediada por el applet permite definir una estrategia usando la aritmética modular. Dicha estrategia parece hacerse en algunos casos completamente en la mente, lo que desde la perspectiva de la teoría APOE el mecanismo deinteriorización permite dar paso hacia una concepción proceso.

Figura 18.

Applet autónomo y de evaluación sección 3 Capitulo 1 del AVA para encontrar soluciones de una ecuación lineal sobre un campo finito



.Ahora bien, en correspondencia con lo referido en las líneas precedentes en la sección 3 del capítulo 1 las formas de pensar de los estudiantes sobre el inverso multiplicativo y aditivo le permite considerar situaciones para determinar las soluciones de ecuaciones lineales sobre un campo finito. En la figura 18 se muestra la interfaz gráfica del applet para determinar soluciones de una ecuación lineal sobre un campo finito dado. La interacción con el applet invita al estudiantehacer una acción totalmente mental para determinar si existe solución en el campo. En los appletsanteriores se visualizan en los botones números aleatorios de proporciona el applet al proponer una nueva combinación, sin embargo, en este applet se motiva a analizar y determinar si la ecuación lineal presentada tiene soluciones en $\mathbb{Z}_n$.

El applet favorece la interpretación de la ecuación lineal con coeficientes en $\mathbb{Z}_n$, además al variar el deslizador en la parte superior izquierdapuede pensar en la manera en la que se afecta la solución si se cambia el campo finito donde se desea encontrar la solución. De esta manera, al pensar en la existencia de solución o no puede marcar en la casilla de control “Si” o “No” recibiendo retroalimentación inmediata y que posterior a ello se podrá insertar el valor de la incógnita x o bien no hacerlo cuando se verifica que no hay solución. En relación a este applet y la tarea que involucra en el libro de GeoGebra se deja la siguiente pregunta para saber que aprendizajes y reflexiones se ha generado en los estudiantes: Al intentar encontrar la solución a las ecuaciones que constantemente iba generando *¿Qué hallazgos pudo encontrar después de varios intentos?* Las respuestas de algunos estudiantes fueron las siguientes:

E1: *En los módulos impares todas las ecuaciones tienen solución, pero en los módulos pares no.*

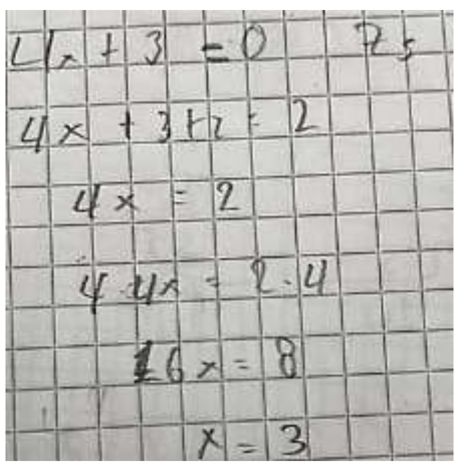
E2: *Que en los módulos primos siempre hay solución de la ecuación.*

E3: *Que la solución de la ecuación está en el campo cuando el módulo es primo.*

E4: *Es lo del inverso multiplicativo y aditivo.*

Figura 19

Evidencias sobre las soluciones de una ecuación lineal sobre $\mathbb{Z}_n$.



Por otra parte, considerando las respuestas de los estudiantes a la encuesta referida en la sección 7.1 sobre su percepción y aporte de los applets al aprendizaje de los conceptos, las respuestas dadas por los estudiantes fueron:

“mediante los applets teníamos múltiples ejemplos con retroalimentación inmediata, se

podía experimentar y probar diferentes combinaciones en los ejemplos y las preguntas ayudaban a pensar en lo que estaba pasando en el applet".

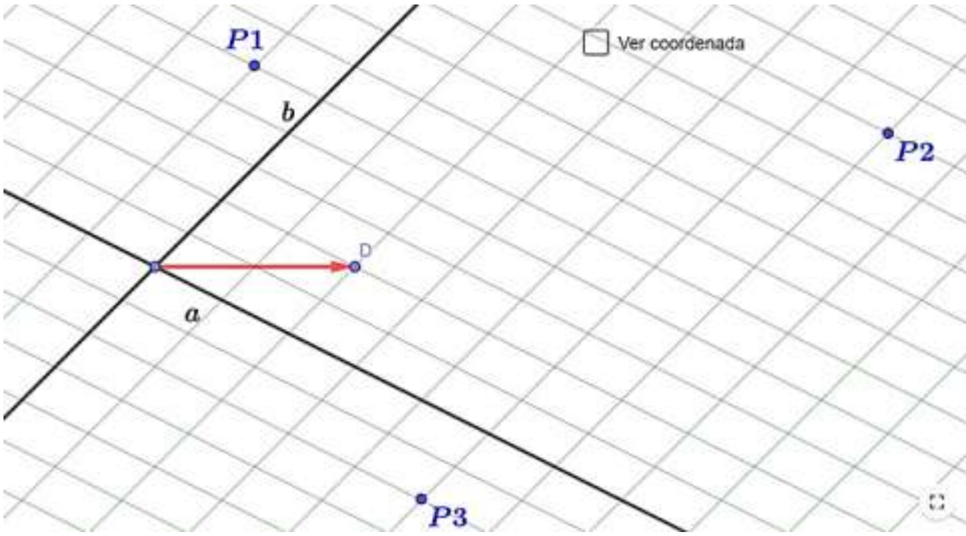
Las respuestas anteriores de los estudiantes muestran el potencial de la interacción con el applet alpoder experimentar con múltiples combinaciones de casos, por ejemplo, determinar el residuo deun entero según el módulo dado, encontrar el inverso aditivo y multiplicativo de un elemento de $\mathbb{Z}_n$ y decidir sobre la existencia de soluciones de ecuaciones lineales en algún $\mathbb{Z}_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Desde la teoría APOE la abstracción reflexiva es el mecanismo principal para la construcción de conocimiento, en este caso los estudiantes perciben que la interacción con el applet, los múltiples casos propuestos, su retroalimentación al introducir la respuesta en la caja de entrada y las diferentes preguntas favorece la reflexión sobre el concepto matemático en cuestión. En particular, favorece la interiorización de una Acción en un Proceso.

7.5 Implementación del capítulo 2 y 3 del AVA y análisis

En esta sección se presentará de forma conjunta applets del capítulo 2 y 3 del libro de GeoGebra dada su estrecha relación, los instrumentos usados y las evidencias obtenidas de las produccionesde los estudiantes. Para el capítulo 2 del libro de GeoGebra, el objetivo principal es permitirle al estudiante pensar en los vectores más allá de una coordenada relativa a un desplazamiento en un sistema de referencia, tal como se ha referido en la sección 6.5.3. Por su parte, el capítulo 3 la atención principal estaba en la combinación lineal de vectores en particular sobre $\mathbb{R}^n$ para luego analizar el caso de vectores en $\mathbb{Z}_p^n$. A continuación, se destacan algunos apartados de lo propuestoen el capítulo 2 y los razonamientos de los estudiantes registrados en la hoja de GeoGebra.

Figura 20

Applet sección 1 Capítulo 2, vector de coordenadas relativo a un sistema de referencia.



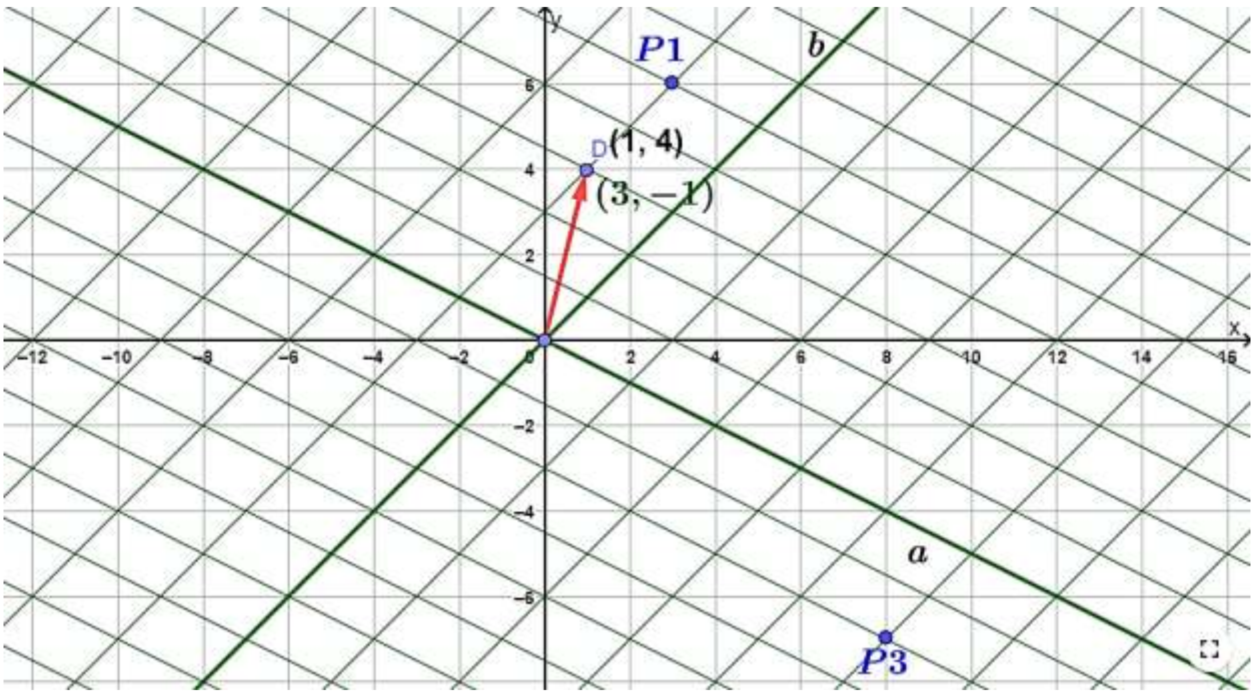
En la figura 20 se muestra la interfaz gráfica de un applet de tipo autónomo y de conjetura dondemediante preguntas en el libro de GeoGebra se invitaba a describir el vector de coordenadas de diferentes puntos según el sistema de referencia presentado. En las respuestas de las estudiantes registradas en el libro se pudo notar que para la mayoría fue fácil referir la coordenada relativa del punto, sin embargo, hubo casos de estudiantes que las pautas presentadas en la tarea y el mismo applet les causó confusión

La interacción con el applet de la figura 20 estaba relacionado con una nueva versión que se muestra en la figura 21, donde los estudiantes podían contrastar el vector de coordenadas relativasal sistema de referencia usual (base canónica) y otro sistema de referencia dado por una base diferente a la canónica para $\mathbb{R}^2$. Algunas preguntas en particular usadas fueron como: *si el destinoen el sistema de referencia xyes (0,9), ¿Cuál es el vector de coordenadas respecto $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ para llegar al destino?* En relación a tales preguntas algunos estudiantes movían el mouse para viajar sobre la cuadricula y responder. En este sentido, luego usaban el applet de la figura

21 para validar su respuesta.

Figura 21

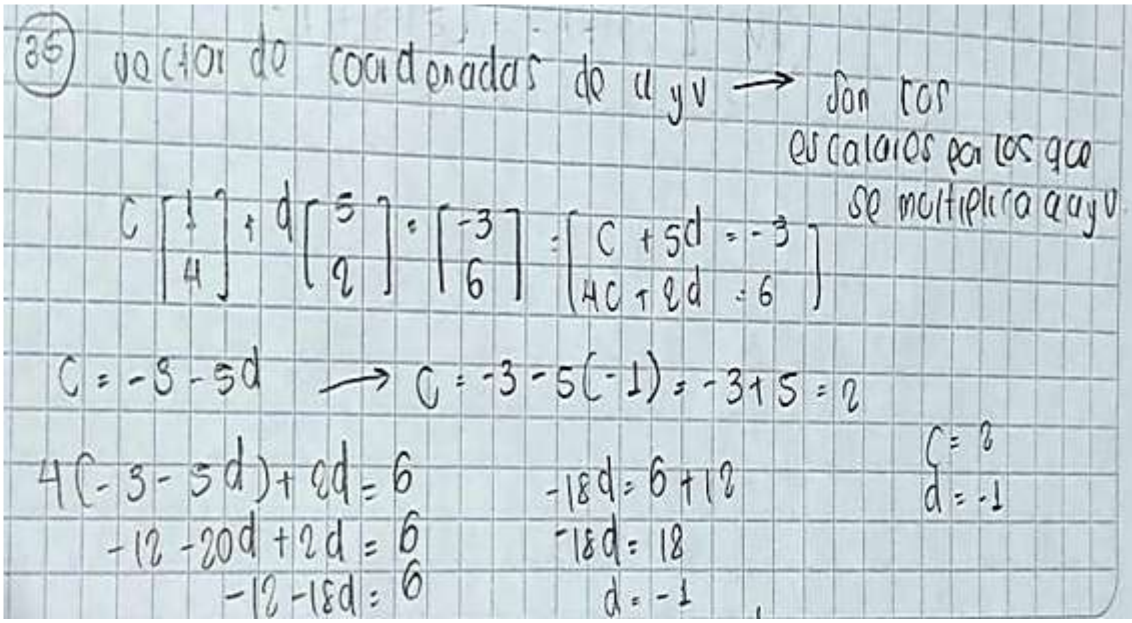
Applet sección 1 Capítulo 2, comparación vector de coordenadas relativos a los sistemas de referencia.



Dado que el concepto de vector y combinación lineal fue identificado clave en la revisión de la literatura en la construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal, en el capítulo 2 del libro de GeoGebra se usaron applets que motivaran a los estudiantes a usar y pensar de forma distinta sobre los vectores. En la figura 22 se presenta la producción de un estudiante donde se muestra evidencia del procedimiento que usa para determinar el vector de coordenadas de la ubicación $(-3,6)$ en el sistema de referencia xy relativo al nuevo sistema de referencia ab definido por los vectores que el estudiante llama u y v. Esta forma de pensar en el vector trata de alejar a los estudiantes la concepción de un vector como las coordenadas cartesianas relativas a los sistemas de referencia usuales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Figura 22

Producción de un estudiante para determinar el vector de coordenadas relativos a los vectores u y v.



Por otra parte, la producción presentada en la figura 22 deja ver el uso de la combinación lineal para determinar las coordenadas relativas a los vectores u y v. Esta forma de pensar relaciona la solución de un sistema de ecuaciones lineales con la existencia de la combinación lineal.

Para seguir considerando situaciones y usos diferentes de los vectores como listas ordenadas (n −uplas), en particular, se usaron applets de tipo trabajo autónomo y conjetura para permitirle a los estudiantes pensar en campos finitos para codificar y hacer listas de números para describir la configuración de una red de bombillas dispuestas de manera lineal.

Figura 23

Applet sección 2 Capítulo 2 para involucrar vectores en $\mathbb{Z}_2^4$.

En la figura 23 se muestra la interfaz gráfica del applet. El estudiante puede interactuar con las bombillas dispuestas en forma lineal al oprimir los interruptores asociados con los botones que tienen por texto 1,2,3 y 4 observando el efecto que tiene al oprimir alguno de ellos en el estado delas bombillas. Por su parte, el botón de estado inicial le permitía regresar al estado inicial en el quese encontraban las bombillas. De acuerdo a la intención del capítulo 2, se motivó con preguntas en el libro de GeoGebra a que el estudiante pudiera aborda con una mirada matemática la situación ofenómeno presentado en el applet.

Algunas preguntas consideradas fueron las siguientes: *¿Cómo codificas numéricamente el estadoque puede tomar las bombillas dispuestas en fila?* Si se requiere expresar el efecto de oprimir elinterruptor 1 usando una codificación numérica, *¿Cómo puedes describir el efecto que causa en elsistema de bombillas oprimir el interruptor 1 usando la codificación?* En relación a lo anterior, acontinuación, se presentan algunas respuestas dadas por los estudiantes en el libro de GeoGebra:

E1: *1010, siendo 1 el cambio de efecto y 0 dejarlo como estaba.*

E2: *Genera un cambio en las bombillas 1 y 3 en la cual se puede describir de la siguiente* *manera,sería como multiplicar por -1, de tal manera que si se encuentra en estado positivó está apagada ysi se encuentra en estado negativo está encendido, así se pueden hacer las diferentes combinacionesde tal manera que se puedan encender y apagar las bombillas a nuestro antojo.*

E3: *Se activa el bombillo 1 y el bombillo 3.*

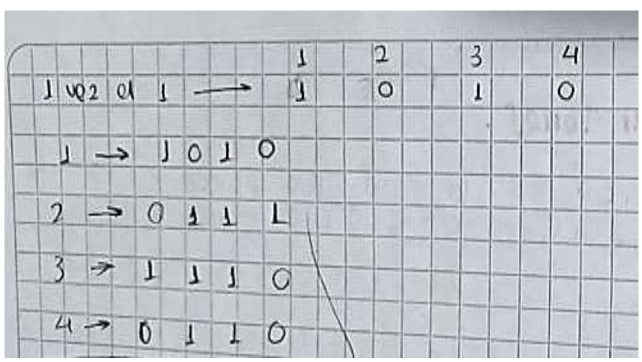
E4: *Si tomamos al bombillo encendido como 1 y el bombillo apagado 0, entonces la codificación numérica sería 1010.*

El caso de los estudiantes como E3 están en el plano de una descripción verbal y no proponen unacodificación. Por otra parte, las respuestas transcritas de E1, E2 y E4 permiten observar un intento por codificar el estado de las bombillas o efecto de oprimir el botón interruptor usado unacodificación numérica. Por otro lado, están los estudiantes que utilizan los elementos de $\mathbb{Z}_2$ parala codificación de los estados de las bombillas o describir el efecto de oprimir el interruptor. Sinembargo, en particular un estudiante, E2 propone una manera de codificar muy distinta, usandolos negativos y positivos para describir el estado de las bombillas. En el caso del estudiante E2 alrevisar su evidencia escrita, parece estar utilizando el vector $[-1,1,1,-1]$ multiplicado por aquelvector que etiqueta cada bombilla con una letra minúscula $[a, b, c, d]$ en el orden que aparecen lasbombillas. De esta manera, usa una “nueva” operación entre vectores para operar $[-1,1,1,-1]$ con$[a, b, c, d]$ y obtener $[-a, b, c, -d]$. En relación a tal respuesta se hace seguimiento de esta formade pensar y abordar el problema para las tareas y situaciones posteriores del libro de GeoGebra. En las respuestas de los estudiantes relacionados en la sección 7.2 dejan ver evidencia deusar laslistas ordenadas para relacionarlas con vectores, además, se amplía la posibilidad de elegir o usarescalares diferentes de los números reales para construir o usar listas ordenadas de números. Caberesaltar que en este caso la construcción de dichas listas ordenadas (n −uplas) emergen en elcontexto de una situación extra matemática.

Además, dejan ver la forma de repensar el conceptode vector arraigado a las coordenadas estándar como lo refiere Hillel (2000) y por otra parte, comolo refiere Arnon et al., (2014) pensar en las entradas de la n −upla considerando que se puederepetir y que el orden importa. En la figura 24 se muestra evidencia de un estudiante que defineuna codificación de 0 y 1 hace una lista ordenada del efecto que tiene oprimir cada interruptor (1,2, 3 y 4). Como se puede evidenciar en la figura 24, el estudiante plantea una lista ordenada alfrente de cada caso para indicar los cambios que va a efectuar en la hilera de bombillas oprimir losinterruptores. Aunque no queda explícito en la imagen, el 0 es interpretado como no hay cambio de estado y 1 como si hay cambio de estado.

Figura 24.

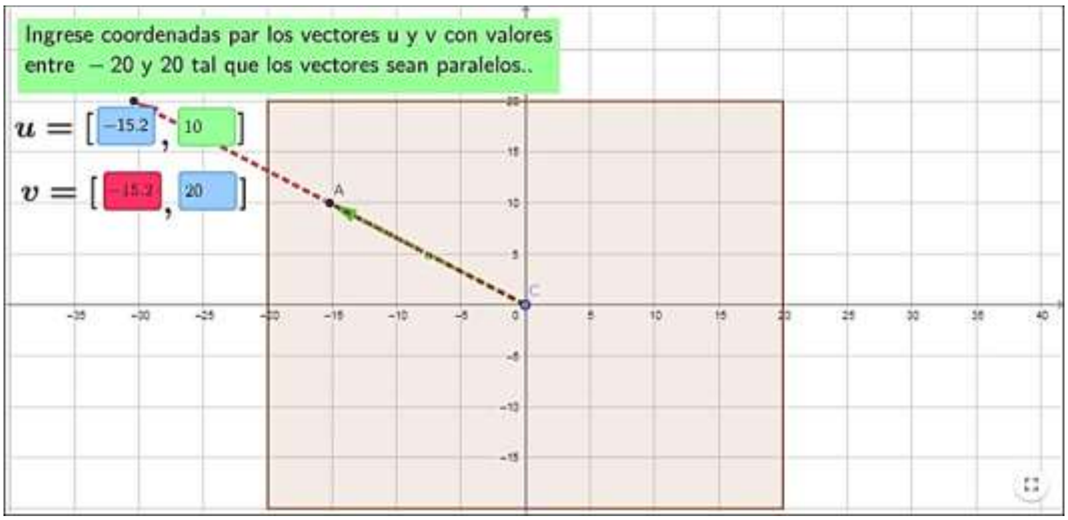
Producción escrita de un estudiante con la intención de involucrar vectores en $\mathbb{Z}_p^n$ *para describir el efecto de oprimir un interruptor.*



La intención de pensar en diferentes vectores en $\mathbb{Z}_p^n$ es tener la oportunidad de pensar en la combinación de tales vectores y realizar comparaciones entre conjuntos de dichos vectores para desencadenar en la dependencia lineal o independencia lineal como una característica asociada a conjuntos de vector. Si bien la construcción del concepto de espacio vectorial puede estar arraigadaa listas ordenadas de $\mathbb{R}^n$ donde se satisfacen ciertas propiedades, al considerar “nuevas listas ordenadas” y realizar las operaciones de suma y multiplicación por un escalar, se puede estar favoreciendo la asimilación y acomodación de nuevas construcciones mentales al esquema que pueda estar desarrollando el estudiante sobre espacio vectorial.

Figura 25

Applet sección 2, Capítulo 3. Exploración sobre dependencia lineal en $\mathbb{R}^2$.



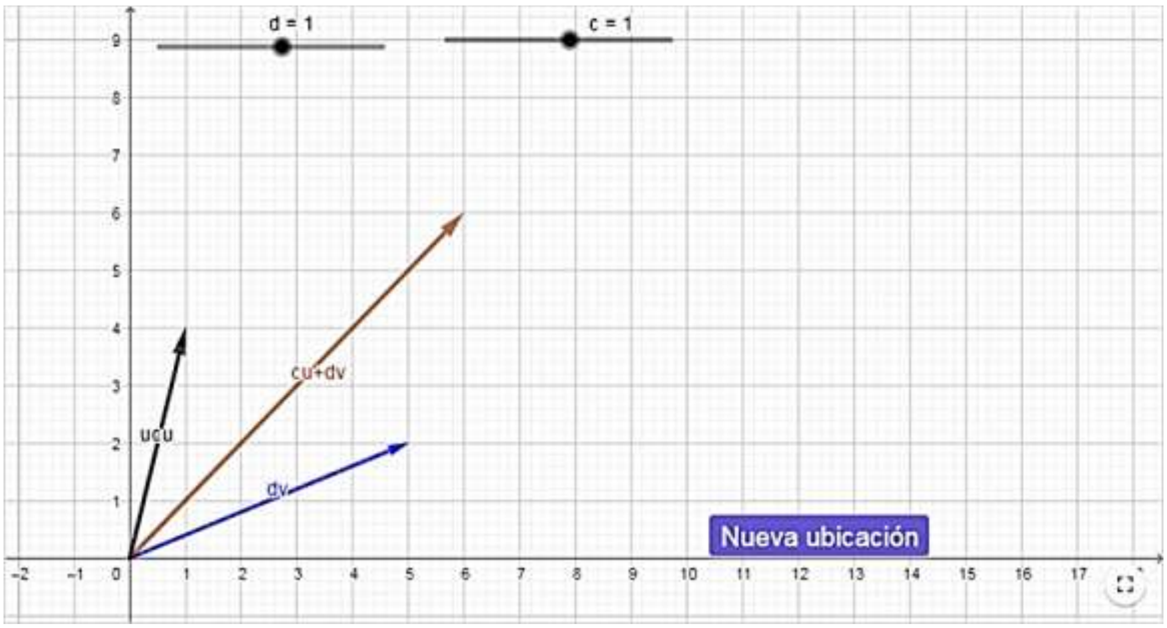
Por otra parte, en relación al capítulo 3 del libro de GeoGebra el énfasis fue considerar conjuntos de vectores en $\mathbb{R}^2$ y analizar sus características, en particular el ser paralelos o colineales.

Como se refirió en el 6.5.4 el capítulo 3 titulado del libro de GeoGebra tenía por título *¿Qué hay detrás de una combinación lineal?,* más enfáticamente en el capítulo se hizo énfasis en la pregunta

¿De cuántas formas se puede combinar el cero? En la figura 25 se muestra la interfaz del applet donde se refería ingresar pares de vectores paralelos, es decir, colineales. Las preguntas que posteriormente se hacían en el libro de GeoGebra a los estudiantes era *¿De cuántas formas se puede combinar* u *y* v *para producir el vector 0?* Las respuestas de los estudiantes ante esta pregunta los llevó a pensar en el escalar c tal que $v = cu$, este orden de ideas emergió varias formasde combinar el vector 0. $v - cu = 0$; $2v - 2cu = 0$ y así sucesivamente, es decir, se encontraron varias formas de combinar el vector cero. De lo cual los estudiantes concluyen que el conjunto devectores es linealmente dependiente.

Figura 26

Applet sección 2 Capítulo 3. Combinación lineal e independencia lineal



En particular, en la figura 26 se muestra la interfaz del applet donde se propone a los estudiantes determinar una ubicación en el plano como una combinación lineal de los vectores u y v. La interacción de los estudiantes con el applet se pudo dar de manera que éste pudiese observar en lapantalla dos deslizadores d y c, con los cuales el estudiante puede explorar la combinación lineal que corresponde a la ubicación propuesta en el applet.

Después de la exploración en GeoGebra se cuestionaba a los estudiantes lo siguiente: Escriba la estrategia (sin usar GeoGebra) que ha deducido para encontrar los escalares para multiplicar a losvectores de tal manera que pueda llegar a un destino cualquiera en el plano $\mathbb{R}^2$.

A continuación, se refieren algunas respuestas de los estudiantes:

E1: *Interpretar el problema con una matriz A de tamaño 2x2 aumentada donde sus vectores columna son el vector* u *y* v*. El vector que está en el espacio aumentado es el vector al que deseollegar la solución del sistema son los coeficientes de* u *y* v *necesarios para llegar a este punto.*

E2: *Planteando un sistema de ecuaciones lineales y usando una matriz aumentada la resuelvo paraencontrar lo valores.*

Las respuestas tomadas aquí, reflejan la relación que establecen los estudiantes con la combinación lineal y la solución de un sistema de ecuaciones lineales. En particular, los estudiantes refieren lamatriz aumentada para resolver el sistema y determinar la solución la cual dará los valores de la combinación lineal. Otras preguntas que acompañaron el capítulo 3 del libro de GeoGebra fue saber de cuántas formas se puede obtener la combinación lineal. En particular, los estudiantes notaron que si el conjunto de vectores es linealmente independiente entonces cada ubicación se puede determinar de manera única. En el caso de que la ubicación fuera el [0,0] entonces solo existe una manera de escribir la combinación lineal.

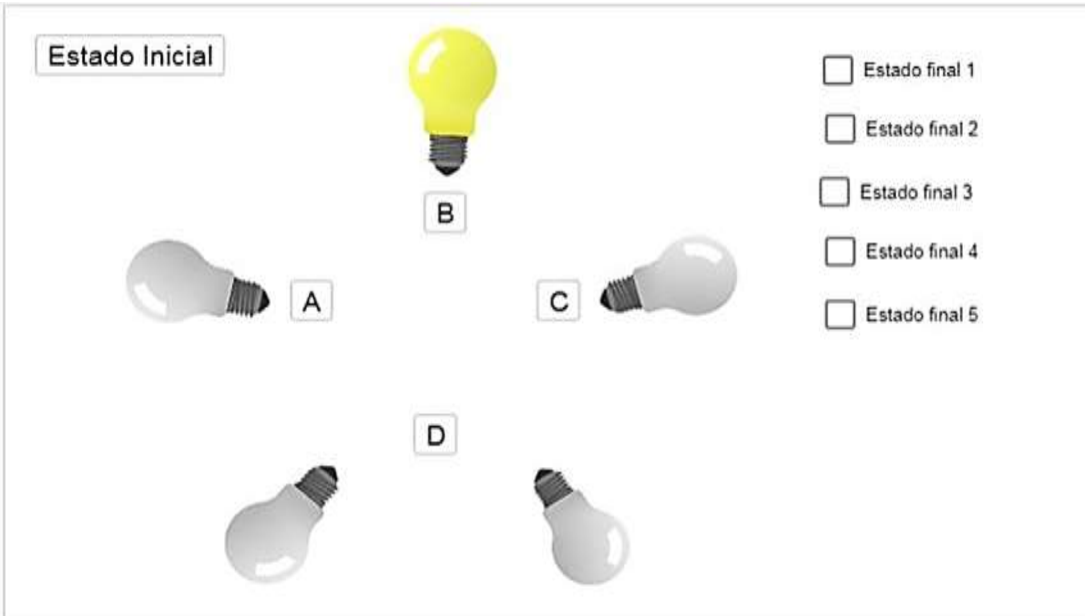
En las respuestas de los estudiantes en relación a los capítulos 2 y 3 en la encuesta realizada sobrelos aportes y aprendizajes que le deja la exploración y uso de los applets se destaca el reconocimiento de distintas formas de usar los vectores y combinarlos para resolver situaciones.

7.6 Sobre la implementación del capítulo 4 del AVA y análisis

La implementación del último capítulo del libro de GeoGebra para el AVA se desarrolló de formadiferente que los anteriores. En particular, se hizo un trabajo grupal para el desarrollo del mismo y se hicieron video grabaciones de la implementación. Aunque por cuestión de tiempo no fue posible hacer la implementación de todas las tareas diseñadas con las redes de bombillas, a continuación, se presentan detalles de la implementación y comentarios interpretativos.

Figura 27

Applet red de bombillas Capítulo 4 del AVA



La implementación del capítulo 4 se hizo en 2 secciones de clase de 120 minutos. En la figura 27 se muestra la interfaz gráfica del applet usado para presentar la situación clave relacionada con dependencia en independencia lineal para vectores sobre un campo finito. La red de bombillas como se muestra en la figura, está conformada por 5 bombillas dispuestas en forma circular, asociando a la red un conjunto de 4 interruptores, es decir (no se propuso para cada una un interruptor directo). Ahora bien, la interacción (Estudiante, Applet) se pensó y se dio de la siguiente manera: los estudiantes oprimían los interruptores intentando reconocer la manera en que los interruptores afectaban la red.

En la implementación se establecieron 5 grupos de trabajo y en cada grupo se asignó un reto. Dada una configuración inicial de la red de bombillas determinar y explicar si es posible llegar a un estado final correspondiente. Después de la exploración en el applet los estudiantes abordaron cuestionamientos particulares, como el siguiente:

En la hoja de trabajo describa la codificación y acuerdos para describir cualquier configuración dela red de bombillas. Algunas respuestas ofrecidas por los estudiantes en los diferentes grupos se muestran a continuación:

G1: *Acuerdos: Tomar el efecto de los interruptores para la codificación sin importar en qué estadoestán las bombillas.*

G2: *Utilizamos 1 y 0 para describir los estados de las bombillas y también para caracterizar los interruptores.*

G3: *Para el efecto tomaremos el cero que no cambia y el 1 como cambio, sin embargo, para vectores estado tomaremos el cero como si estuviera apagado y el 1 encendido.*

En las respuestas de estos estudiantes se logró evidenciar la conexión que establecían con el capítulo 2 del libro de GeoGebra desarrollado. Sin embargo, en el capítulo 2, la disposición era lineal y ahora en el capítulo 4 la red de bombillas era en forma circular; por lo que definir el ordeny la manera de codificar era un aspecto clave para avanzar en el estudio y explicación dela situación propuesta. Enlos acuerdos para codificar se usa 1 y el 0, sin embargo, tienen doble connotación; una para describir el estado de la bombilla (Apagado – Encendido) y el efecto de oprimir un interruptor de la red (Cambia – no cambia). Posterior a ello se relaciona una pregunta que invitó a llevar ese acuerdo un poco más allá, a describir los efectos de cada uno delos interruptores dela siguiente manera: De acuerdo a lo explorado, analizado y *deducido ¿Qué vectores describen el efecto de oprimir el interruptor A, B, C y D en el sistema de bombillas?* Dicha pregunta era respondida por los grupos en el libro de GeoGebra a lo que la mayoría de grupos lograron relacionar un vector que describían el efecto sobre el sistema al oprimir los interruptores A, B, C o D. A = [0,1,0,1,1]; B = [0,1,1,0,1]; C = [0,0,1,1,0]; D = [1,0,1,0,1].

En la socialización de la propuesta de cada grupo se les interrogó la manera en la que estaban interpretando la codificación. A continuación, se muestra dos respuestas diferentes de dos estudiantes de grupos diferentes:

E1: *El 0 quiere decir que eh, no ha cambiado nada la bombilla y el 1 que sí hubo una modificación, ya sea que se haya encendido o que se haya apagado.*

E2: *Miramos que pasa si oprimo A, cambia el 2, el 4 y 5 y entonces para expresarlo hacemos un vector de cinco componentes y pues, eh vamos a notar que el 1, dirá que cambió, no importa el estado, y el 0 que se mantuvo.*

Como puede notarse, los alumnos refieren un fuerte intento por utilizar la estrategia caracterizada por el campo $\mathbb{Z}_2$, reconociendo vectores para describir matemáticamente la configuración del sistema y el efecto de oprimir los interruptores de la red.

El trabajo grupal continuó y ahora se invitaba a los estudiantes a considerar la manera de explicar con la interpretación propuesta de vectores como obtener un estado final al ir oprimiendo los interruptores de la red. Cada grupo considerando el estado inicial de la red se le solicitaba lo siguiente: ahora, imagina que a la configuración de la red de bombillas de la figura 27 si se oprime el interruptor B y D (de acuerdo los hallazgos encontrados). Responde las siguientes preguntas:

¿Qué vector describe la configuración resultante de la red de bombillas después de oprimir tales interruptores? Documenta ampliamente su respuesta.

A continuación, se relacionan algunas respuestas de los estudiantes en los grupos de trabajo.

E1: *Después de oprimir los interruptores se encontrará así [0,0,1,0,1]…*

E2: *[1,1,0,1,0] en donde 1 representa un bombillo apagado y 0 un bombillo encendido usando el orden de las componentes y el orden de los bombillos que inicia en el bombillo que está más cercaa el botón A y enumero en sentido horario de 1 a 5.*

E3: *[1,0,0,1,0] es el que describe como quedan.*

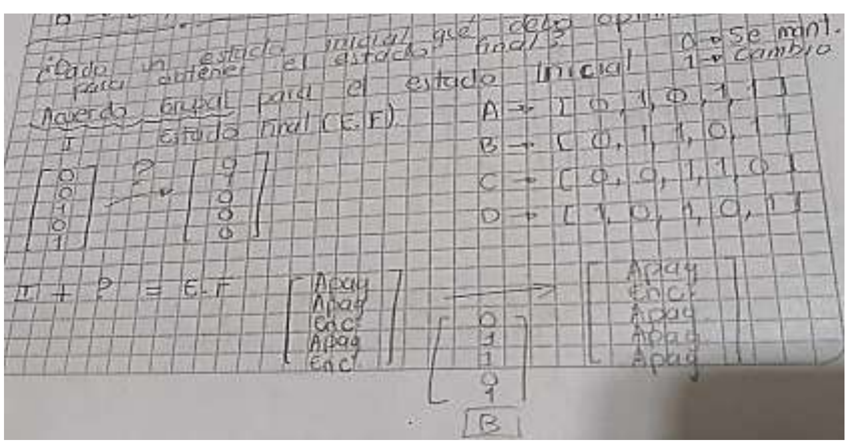
Ante las respuestas diferentes el docente pregunta a los estudiantes del porque las diferencias de las respuestas en los grupos a lo que un estudiante dice lo siguiente.

E4: *Pues en si es como si se hubiera corrido una bombilla, o sea solo se corren las componentes, todo depende del orden que establezcamos, porque ella tomó el B como el primero y yo tome fue el A [Se refiere al nombre del interruptor].*

Las respuestas de los estudiantes permitieron percibir la noción de efecto que recrearon en su mente. Un aspecto clave que emergió en la implementación fue el definir en común una codificación para entenderse los diferentes grupos y además acordar el orden en que se lista las bombillas para referir la lista ordenada que la describe. En las producciones de los estudiantes se nota la combinación de efectos que es relacionada con combinar vectores de .$\mathbb{Z}_2^5$

Figura 28.

Producción escrita del grupo 3.



En la producción escrita del grupo 3 se plantea la interpretación de relacionar el estado inicial y final mediante vectores. En particular, para el ítem B se analiza como transforma un vector de estados de bombillas a otro de estados de bombillas. Después de las interpretaciones anteriores los diferentes grupos abordan los siguiente: Comparte con tus compañeros si partiendo de cualquier estado inicial en la red de bombillas se puede llegar a cualquier configuración final solicitada.

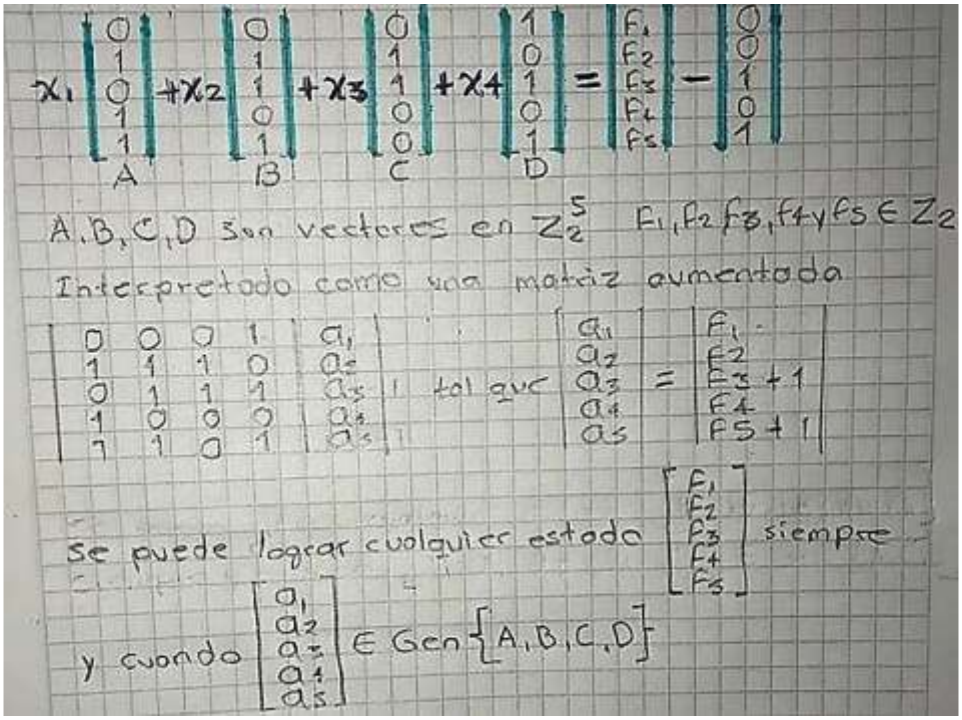
¿Cómo se puede justificar esto matemáticamente?

En la sección de clase los estudiantes trabajaron en la pregunta anterior, sin embargo, por cuestión de tiempo la actividad continuó en el tiempo extra clase y fue retomado en la sección siguiente.

En la figura 29 se presenta la producción del grupo 2 donde se puede observar la interpretación referida matemáticamente a la pregunta anterior. En la producción los estudiantes reconocen a los vectores A, B, C y D como elementos en $\mathbb{Z}_2^5$ donde se propone una combinación lineal que relaciona una configuración inicial con un estado final arbitrario. En particular, los estudiantes de dicho grupo pueden pensar en garantizar la combinación lineal al resolver el sistema de ecuaciones lineales, si bien no se resuelve el sistema paso a paso, se reconoce que el vector de la resta entre el vector final y el vector inicial en $\mathbb{Z}_2^5$ estén en el espacio generado de A, B, C y D.

Figura 29

Producción escrita del grupo 2 en relación con la red de bombillas.



Si bien el interés de la intervención en el aula era sobre la dependencia e independencia lineal de vectores sobre campos finitos, algunos grupos de estudiantes buscaron condiciones usando el concepto de conjunto generador y espacio generado. Un aspecto a notar en la producción de la figura 31 es que los estudiantes hacen la operación en $\mathbb{Z}_2$, sin embargo, otros grupos consideraronuna posición inicial arbitraria y destino final arbitraria para analizar la posibilidad de queoprimiendo los interruptores se pueda cumplir tal como se muestra en la figura 30.

Figura 30

Producción escrita del grupo 3 con relación a la red de bombillas

Posición inicial $\Rightarrow [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$

Posición destino $\Rightarrow [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 - x_1 &= z_1 \\ y_2 - x_2 &= z_2 \\ y_3 - x_3 &= z_3 \\ y_4 - x_4 &= z_4 \\ y_5 - x_5 &= z_5 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & z_1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & z_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & z_3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & z_4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & z_5 \end{array}\right]$$

En la segunda sección de clase de la intervención sobre la red de bombillas presentadas en las figuras 29 y 30 los grupos compartieron sus estrategias para abordar el problema. Además, se revisaba si el estado final solicitado se podía determinar. En el caso del grupo 3, aunque las operaciones elementales se hicieron no pensando en $\mathbb{Z}_2$, los estudiantes determinan la forma escalonada para explicar si es posible partir del estado inicial y llegar al estado final 3 indicado.

Figura 31.

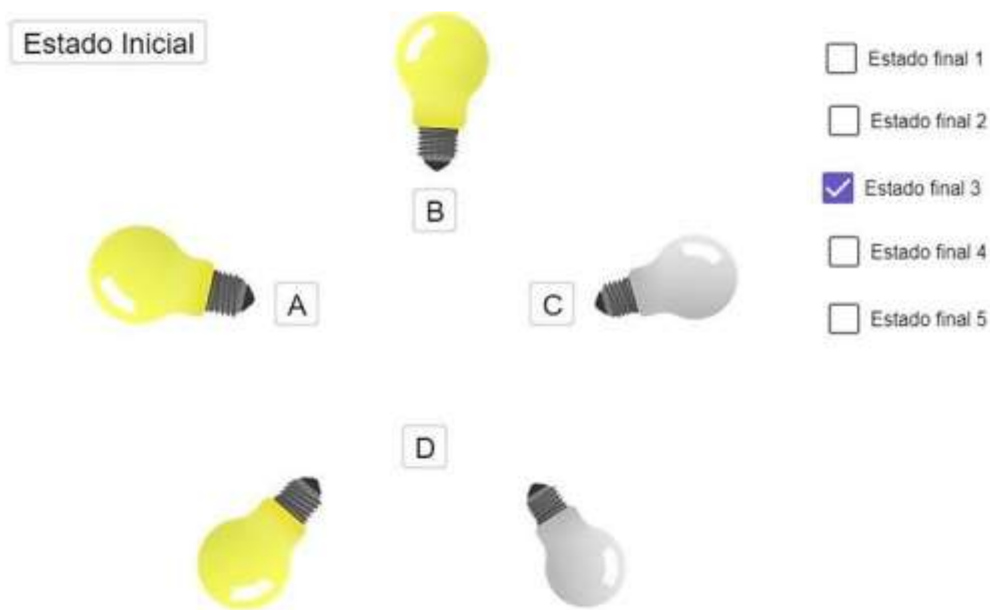
Solución del sistema en forma escalonada presentado en la figura 30 por el grupo 3.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & z_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & z_2 - z_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 - z_2 + z_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 - z_5 + z_2 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} z_3 - z_2 + z_4 &= 0 \\ z_1 - z_5 + z_2 &= 0 \end{aligned}$$

Por ejemplo, en la figura 31 se muestra la forma escalonada del sistema propuesto por el grupo 3.En colectivo se interpreta la solución es decir si el estado inicial es [0,1,0,0,0] y el final [1,1,0,0,1](ver figura 32).

Figura 32.

Red de bombillas con el estado final 3.



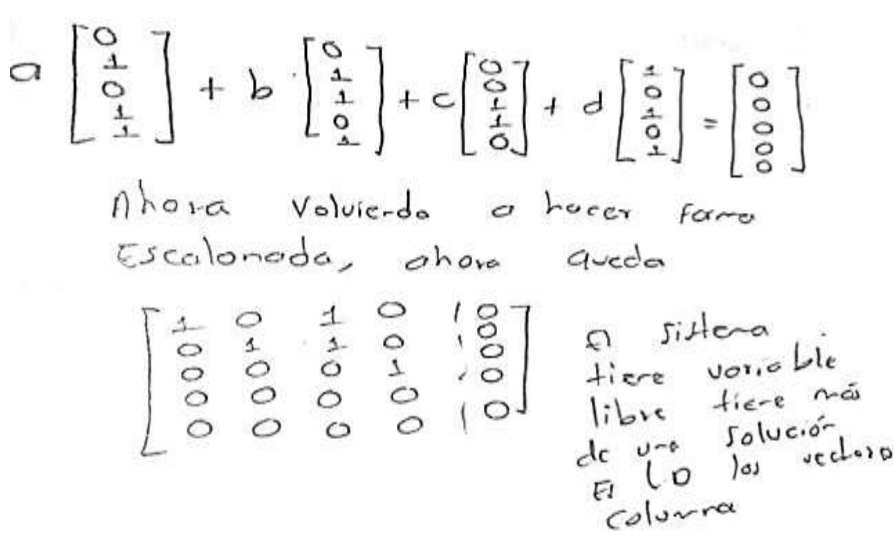
De acuerdo a la propuesta del grupo 3, los estudiantes consideraron la diferencia [0,1,0,0,0] - [1,1,0,0,1] = [1,0,0,0,1]. Con este último vector se verificó que cumplía las dos condiciones presentadas por el grupo 3 en la figura 32, por lo tanto, es posible obtener la configuración solicitada. Además, es posible obtener la configuración de más de una forma.

En la retroalimentación el docente oriento haciendo conexión con los capítulos anteriores en relación a la cantidad de combinaciones lineales con las que se puede obtener el vector cero, en este caso [0,0,0,0,0] de $\mathbb{Z}_2^5$.

Considerando la combinación lineal propuesta, los estudiantes analizan la cantidad decombinaciones en las que se puede producir [0,0,0,0,0] de $\mathbb{Z}_2^5$ mediante el conjunto de vectores S: $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$. Cabe resaltar que en la situación propuesta los estudiantes logran relacionar los escalares de la combinación lineal con la cantidad de veces que se debe oprimir el interruptor correspondiente. Se pudo notar que a algunos de los grupos regresar a los apuntes de la forma escalonada que ya había realizado en la clase anterior y darse cuenta de que lo que va a cambiar al tener un sistema homogéneo es el vector de términos independiente del sistema, es decir, será cero. Sus conocimientos sobre sistemas de ecuaciones lineales les permite referir la existencia de variable libre, aunque no se explicita en la producción escrita, en la videograbación se reconoce que evocan el teorema del Rank. En este orden de ideas, al ver que hay variable libre, es decir, más de una solución, relacionan sus conocimientos sobre dependencia e independencia lineal sobre $\mathbb{R}n$ para concluir que el conjunto de vectores es linealmente dependiente.

Figura 33

Reinterpretación del sistema en forma escalonada presentado por el grupo 3 en la figura 32 por el grupo 2.



Para el cierre de la implementación, el docente orientó a que pensaran en la posibilidad de ver de otra manera la razón de que el conjunto S: $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$. Es linealmente dependiente. A lo que algunos estudiantes notaron que $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$ y por lo tanto, lograron notar que, dado que un vector del conjunto era una combinación lineal de los otros, entonces el conjunto era linealmente dependiente. Lo anterior es una de las formas de entender la dependencia lineal segúnlo referido por Saldanha (1995).

Las orientaciones finales con el applet fue analizar qué hubiera pasado si el conjunto fuera linealmente independiente. Sin embargo, por cuestión de tiempo no fue posible completar la otra situación diseñada sobre la red de bombillas.

En las evidencias relacionadas sobre el capítulo 4 del AVA se logra identificar varios conceptos matemáticos movilizados por los estudiantes. En particular, se evidencia como el concepto de combinación lineal y su relación con el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales (ver figuras 29 y 31) hace parte de las construcciones necesarias para el concepto de dependenciae independencia lineal. Por otra parte, la reflexión sobre la solución de un sistema de ecuaciones lineales y su restricción sobre el campo escalar donde se define el espacio vectorial no emergió derápidamente en los estudiantes, más bien, de acuerdo a lo referido en las líneas anteriores, parece que el mecanismo de asimilación y acomodación sobre el esquema de espacio vectorial le permiteal estudiante usar ciertos razonamientos para la dependencia e independencia lineal de conjuntos de vectores sobre un campo finito (en particular $\mathbb{Z}_2$) con sus construcciones alrededor de dependencia e independencia lineal de conjuntos de vectores en $\mathbb{R}^n$.

8. Reporte y reflexiones a la implementación realizada

Este capítulo contiene reflexiones y conclusiones acerca de la implementación final realizada del AVA. De esta manera, en el capítulo se presenta una síntesis sobre cómo favoreció el uso del AVAdiseñado para el aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal sobre camposfinitos, además, aspectos para el diseño de una descomposición genética referida a dichosconceptos. Finalmente, se mencionan aspectos mejorables en el AVA a término posteriori y comentarios sobre los aportes que la práctica en docencia deja para el docente maestro en formación.

8.1 Aspectos favorables de la implementación del libro de GeoGebra (AVA)

El uso del AVA durante la implementación favoreció diferentes tareas y situaciones presentadas. En particular, se agrupan en dos aspectos: i). Múltiples ejemplos para la experimentación y reflexión. ii). Simulaciones, desarrollo de conjeturas y validación.

En relación a los múltiples ejemplos para la experimentación y reflexión, en las respuestas de los estudiantes se evidenció el reconocimiento del potencial de contar con múltiples intentos de interacción (aspecto ampliamente referido por los estudiantes) y práctica.

Al tener múltiples intentos interactivos y preguntas para motivar el estudio y la reflexión los estudiantes podían notarelementos conceptuales importantes en relación a campos finitos, vectores y combinaciones lineales. Durante los capítulos 1 y 2 se pudo notar el planteamiento de conjeturas en torno al trabajocon la aritmética modular y operaciones elementales sobre campos finitos. Las afirmaciones hacia él cómo encontrar el inverso aditivo de un elemento x dentro de un campo finito o el caso particularen que cualquier ecuación lineal tiene solución sobre un campo escalar $\mathbb{Z}_n$. En el capítulo 1 y el capítulo 4 se puede notar un intento por categorizar resultados particulares a partir de ciertas condiciones captadas durante una multiplicidad de intentos de práctica. Por destacar un caso particular, dado un elemento x de un campo escalar $\mathbb{Z}_n$ determinar el inverso aditivo. En esta situación emergieron categorías de la reflexión y exploración en: x negativo, o x menor que el módulo o x mayor al módulo.

En las explicaciones realizadas por los grupos de trabajo en la implementación, un aspecto valorado como favorable fue hacer simulaciones de situaciones en un contexto real; red de bombillas controladas por determinados interruptores. El AVA favoreció el matematizar situaciones donde aparentemente solo es un juego o reto. A lo largo de la implementación del AVAse observa como cobra sentido un campo finito para codificar los estados de las bombillas, los vectores en $\mathbb{Z}_2^5$ para describir el efecto de oprimir interruptores y el estado de las bombillas de la red en un momento especifico, la combinación lineal como una manera de describir el oprimir uninterruptor tras otro para llegar a la configuración dada, la solución del sistema de ecuaciones lineales para explicar la posibilidad de obtener la configuración dada y finalmente, los conceptos de conjunto generador, espacio generado, dependencia e independencia lineal para dar condicionesy explicaciones sobre las posibles configuraciones que se pueden lograr en la red de bombillas.

Las palabras de los estudiantes al refirieren el apoyo importante por tener la posibilidad de interactuar con las bombillas tal como si se tuvieran en físico. Lo anterior invita a considerar el apoyo de las TIC's, para el caso softwares dinámicos que permitan ambientar situaciones contextualmente reales contribuyendo a propiciar una comprensión profunda de conceptos matemáticos, en particular del álgebra lineal tal como lo expresa Stewart et al., (2022) en las recomendaciones curriculares para los cursos de álgebra lineal I y II.

Finalmente, el desarrollo de la práctica en docencia deja un aporte en relación a la estructura de futuros desarrollos de dicha modalidad de trabajo de grado. En el estudio la estructura usada fue: i). Observación de aula, ii). Diseño (Applets) y prueba piloto, iii). Implementación y recolección de evidencias y iv). Reflexión y análisis de la implementación.

8.2 Elementos para una DG sobre los conceptos de dependencia e independencia lineal sobre campos finitos

Esta sección presenta algunos elementos importantes que permite proponer la implementación final del AVA para el desarrollo y diseño una futura Descomposición Genética alrededor de los conceptos de dependencia lineal e independencia lineal sobre campos finitos.

Desde la teoría APOE se entiende que la construcción del conocimiento es dinámica, en particular la estructura Esquema. Consideramos que un aspecto clave en la construcción de la dependencia e independencia lineal de conjuntos de vectores en $\mathbb{Z}_p^n$ puede provenir de la interacción entre dos esquemas principales, espacio vectorial y campo escalar. A lo largo de la implementación se observa que la combinación lineal se convierte en un elemento clave que favorece la interacción entre dichos esquemas. La evolución del esquema de campo escalar puede darse a partir de la asimilación y acomodación de los axiomas de campo en un contraste entre las construcciones queel estudiante tiene de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ de manera que se ahora $(\mathbb{Z}_p, +, *)$ pueda ser visto como un campo escalar con la suma y la multiplicación. Por su parte, aunado a lo anterior el esquema de espacio vectorial mediante el mecanismo de asimilación, y acomodación en contraste con los axiomas quecumplen los elementos de $\mathbb{R}^n$ con la suma y la multiplicación por un escalar pueda entender que $(\mathbb{Z}_p^n, +, .)$ es un espacio vectorial, es decir, sus elementos son vectores. Una concepción Proceso de combinación lineal y de Objeto para vector, puede permitir que el estudiante realice Acciones de combinar conjuntos de vectores de $\mathbb{Z}_p^n$ y para determinar de cuántas maneras se puede combinar el vector cero de $\mathbb{Z}_p^n$. Mediante la interiorización de dicha acción y la coordinación con el Procesode conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales se pueda construir los conceptos de dependencia e independencia lineal de conjuntos de vectores sobre un campo finito.

Los mecanismos de asimilación y acomodación pueden permitir que el estudiante reflexione el contraste de conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^n$ que son linealmente dependientes o independientes y su implicación al analizarlos como elementos de $\mathbb{Z}_p^n$. Es decir, un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ puede ser linealmente independiente, sin embargo, no necesariamente es linealmente independiente sobre $\mathbb{Z}_p^n$ como es referido en Weller et, al. (2002).

Aunque lo anterior no es propiamente una DG consideramos que deja grandes aportes para su formulación y posterior refinación.

8.3 Aspectos considerables para factibles mejoras en el AVA

Algunos aspectos de mejora evocados de las evidencias del estudio durante su implementación son:

i). Funcionamiento de los applets, su intención y apoyo mediante las preguntas orientadora y reflexivas. En particular, algunos errores se encontraron en la opción de entrada de los estudiantesen los distintos applets. Algunas preguntas resultaron no tan claras para algunos de los estudiantes,las cuales fueron aclaradas en la implementación.

ii). La inclusión de un capítulo dentro del libro dedicado a las operaciones elementales de sistemas de ecuaciones lineales sobre campos finitos. Este es uno de los aspectos que no se logró incorporar en el AVA por cuestión de tiempo completamente. Lo anterior invita a incorporar una sección con tales características, dado que favorece una apropiación más amplia del aprendizajede los conceptos de dependencia e independencia lineal.

Finalmente, del desarrollo de la práctica en docencia se refieren aportes importantes para eldesarrollo de la docencia como futuro educador.

8.4 Aportes de la práctica en docencia a la formación como futuro educador matemático

En esta sección destacan tres aspectos principales que como estudiante en formación de la licenciatura en matemáticas ha dejado la experiencia docente bajo la modalidad de Práctica:

i). La articulación y trabajo práctico con un software de geometría dinámica como GeoGebrarepresentó uno de los aprendizajes más importantes que deja la práctica en docencia. La apropiación de lenguajes de programación y competencias en TIC proponen un enfoque potencialen relación a la interacción de los estudiantes con distintas situaciones, ambientadas por applets eneste caso. Por lo anterior la indagación, práctica y construcción del AVA se torna una de las experiencias más enriquecedoras que he llegado a tener como profesor en formación.

ii). Desde la perspectiva de profesor en formación la experiencia de enseñanza con jóvenes universitarios, se torna en una grata oportunidad que propició el desarrollo de esta práctica en docencia. Se destaca de lo anterior el que, al tratarse de licenciados en matemáticas en formación,la experiencia fue muy enriquecedora ya que responde al enfoque que como educador matemáticopretendo encaminar, con miras a ser futuro profesor de la universidad.

iii). La relación estrecha entre la docencia, el diseño de entornos educativos y la investigación. La acción de investigar encontrando elementos concurrentes dentro de la literatura asociada a la enseñanza de estos conceptos se torna como un aporte grande a mi formación como docente. El reconocer las relaciones entre distintos aportes hacia la enseñanza de determinados conceptos y trabajar sobre estos promueve mi labor como investigador, además de aludir positivamente a micredibilidad en esta labor.

Referencias Bibliográficas

Álvarez Macea, F., y Costa, V. A. (2019). Enseñanza del Álgebra Lineal en carreras de ingeniería: un análisis del proceso de la modelización matemática en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Eco Matemático, 10(2), 65-78.

Anaya - Puebla, J. (2020). Ambiente virtual de aprendizaje para la construcción del conceptoSistema de Ecuaciones Lineales fundamentado en la teoría APOE (Tesis de maestría). México.

Arévalo Duatrte, M. A., y Gamboa Suárez, A. (2015). TIC en el curriculo de matemáticas. Una orientación desde el marco de las políticas y proyectos educativos. Revista Interamericana de Investigación, Educación y Pedagogía, 8(1), 169-187.

Arnon, I., y DeVries, D. (2004). Solution--What Does It Mean? Helping Linear Algebra Students Develop the Concept While Improving Research Tools. International Groupfor the Psychology of Mathematics Education.

Arnon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K.(2014). APOS Theory a framework for research and curriculum education. New York: Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-1-4614-7966-6

Aydin, S. (2014). Using example generation to explore students' understanding of the concepts of linear dependence/independence in linear algebra. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45 (6), 813 - 826.

Ballesteros, S. J. (2020). Comprensión del concepto de dependencia lineal: una perspectiva de las estructuras y mecanismos mentales de estudiantes universitarios de primer año.Tesis de maestría no publicada. Universidad Industrial de Santander. Colombia.

Betancur, A. (2020). Construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector: una experiencia con estudiantes universitarios de primer año. Tesis de maestría no publicada. Universidad Industrial de Santander. Colombia.

Carlson, D., R. Johnson, C., C. Lay, D., Porter, A., y Watkins Ann. (1993). The linear algebra curriculum study group recommendations for the first course in linear algebra. The College Mathematics Journal 24, no. 1, 41–46. GGJAAAAAA

Cruz, C. E. Z., Colado, A. Z., Ocegueda, A. T. S., y Escobedo, R. M. V. (2020). Análisis crítico de ambientes virtuales de aprendizaje. Utopía y Praxis Latinoamericana, 25(11), 33-47.

DeVries, D., y Arnon, I. (2004). Solution--What Does It Mean? Helping Linear Algebra Students Develop the Concept While Improving Research Tools. Proceedings of the28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education

Dogan-Dunlap, H. (2010). Linear algebra students’ modes of reasoning: Geometric representations. Linear algebra and its applications, 432(8), 2141-2159.

Erazo Álvarez , J., y Narváez Zurita , C. (s.f.). Medición y gestión del capital intelectual en la industria del cuero - calzado en Ecuador. Revista Arbitrada Interdisciplinaria

Koinonía, 9(5), 437-467. http://dx.doi.org/10.35381/r.k.v5i9.662.

Harel, G. (2017). The learning and teaching of linear algebra: Observations and generalizations. The Journal of Mathematical Behavior, 46, 69-95.

Harel, G. (2019). Varieties in the use of geometry in the teaching of linear algebra. ZDM, 51,1031-1042.

Hernandez, J. G., y Zambrano Ayala, J. (2014). Dificultades inherentes en el aprendizaje lineal de los conceptos de dependencia e independencia lineal vectores en ℝ^2 y ℝ^3usando software dinámico. REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, 2 (2), 20 – 30.

Konyalioglu, A., Isik, A., Kaplan, A., Hizarci, S., y Durkaya, M. (2011). Visualization approach in the teaching process of linear algebra. Procedia - Social and Behavioral Sciences , 15 , 4040 - 4044.

Kú, D., Trigueros, M., y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. Educación matemática, 20(2), 65-89.

McDonald, M., Mathews, D. y Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. Research in Collegiate mathematics education IV. CBMS issues in mathematics education (Vol. 8, pp. 77–102). Providence, RI: American MathematicalSociety.

Oktaç, A. (2019). Mental constructions in linear algebra. ZDM Mathematics Education, 51,1043–1054. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01037-9.

Oropeza L.C., y Lezama A. J. (2007a). Dependencia e independencia lineal: una propuesta de actividades para el aula. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias2(1), 23-39. Recuperado desde http://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/reiec/article/ view/7363/6612

Oropeza, C., & Lezama, J. (2007). Dificultades en la interpretación geométrica de algunos conceptos en Álgebra Lineal. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 20, 9-14.

Parraguez González, M., y Bozt Ortíz, J. (2012). Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}2$ y $\mathbb{R}3$ desde el punto de vista de los modos de pensamiento.Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 7(1), 49-72

Roa-Fuentes, S., y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 13(1), 89-112.

Saldaña, L. (1995). The notions of linear independence/dependence: a conceptual analysisand students' difficulties (tesis de doctorado). Universidad de Concordia.

Universidad Industrial de Santander (1982). Reglamento de pregrado. Recuperado de https://uis.edu.co/wp-content/uploads/2022/05/reglamentoPregrado.pdf.

Salgado, H. (2015). El papel de la modelación en la enseñanza de conceptos abstractos del álgebra lineal. Instituto Politecnico Nacional, Mexico. DOI: 10.13140/RG.2.1.3617.8642

Stewart, S., Andrews-Larson, C., Berman, A., y Zandieh, M. (Eds.). (2018). Challenges andStrategies in Teaching Linear Algebra. Springer.

Stewart, S., Axler, S., Beezer, R., Boman, E., Catral, M., Harel, G., ... y Wawro, M. (2022). The Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG 2.0) Recommendations. Notices of the American Mathematical Society, 69(5).

Trigueros, M., y Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. Linear Algebra and its Applications, 438 (4), 1779 - 1792.

Vasco, D.., y Climent, N. (2018). El estudio del conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal. PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 12(3), 129-146.

Weller, K., Clark, J., Trigueros , M., Montgomery, A., Cottrill, J., y Arnon, I. (2002). Learning Linear Algebra with ISETL. Recuperado desde https://vdocuments.mx/learning-linear-algebra-with-isetl.html.

Zazkis, R., Dubinsky , E., y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4. Journal for Research in Mathematics Education, 435 - 457.

Apéndices

Durante esta sección podrán encontrarse el enlace directo a el AVA (Ambiente Virtual de Aprendizaje y algunas transcripciones realizadas a los comentarios e ideas que emergieron en los estudiantes del curso de Algebra lineal intervenido durante la implementación del AVA. El enlace del AVA se comparte con la intensión de que pueda ser utilizado cuando sea requerido en el desarrollo y apoyo del proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal sobre otros espacios vectoriales distintos a $\mathbb{R}^n$. Los estudiantes aquí involucrados estaban haciendo uso de el ambiente virtual facilitado por el AVA interactuando con los applets allí incorporados.

Para el desarrollo de las tareas propuestas dentro del AVA los estudiantes trabajaron de manera individual teniendo en cuenta algunos momentos de socialización para pasar en algunas tareas (las propuestas en el capítulo 4 de la lección) a formar grupos de trabajo para la discusión y construcción de explicaciones hacia el reto propuesto a cada uno de los grupos en interacción con los applets de bombillas (instancia final de la aplicación del AVA)

Las transcripciones realizadas se presentan en tablas de tres columnas. La primera columna indica el número de transcripción en se encontrará el lector, la segunda columna indica el sujeto que realiza el aporte o comentario (E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10 y P para indicar a los estudiantes y al profesor respectivamente) y la tercera indicará lo que el sujeto dice y el mensaje que intenta transmitir o las acciones que realiza con el comentario o evidencia que presenta.

Apéndice A. Link directo para revisión y utilización del AVA (libro de GeoGebra)

Haciendo clic en el siguiente enlace será redireccionado automáticamente a el AVA (Libro de GeoGebra) en pleno, donde podrá realizar una revisión de considerarlo necesario y/o utilizarlo para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje de estos conceptos dentro de la clase de Algebra lineal.	https://www.geogebra.org/m/hz8maupa

Apéndice B. Transcripciones tomadas durante las implementaciones en socialización de discusiones grupales

1	E1	Lo vi porque empecé a prenderlas y me daba cuenta por ejemplo que la forma en que yo lohabía hecho, me quedaba algo diferente, pero me llamo más la atención la parte de D porque cuando yo espicho D solo me queda encendida A, que quiere decir, que la codificación que yo tenía, no era esa, sino que solamente se verá reflejado, en por ejemplo, cuando espicho esta, tengo estas dos encendidas cuando yo espicho la D seapagan estas dos, ósea que estas tres quedan en 1 porque fueron las que generaron el cambio y estas dos quedan en cero, porque fueron las que quedaron quietas.
2	E1	“El cero quiere decir que eh, no ha cambiado nada la bombilla, y el 1 que si hubo una modificación ya sea que haya encendido o que se haya apagado”
3	P	¿Porque lo dices?
4	E2	Porque pues, si yo, yo empecé bueno, ya tenía un estado inicial, pero yo digamos que no lotome, entonces empecé a mirar fue el efecto que hacía cada interruptor, no, no me importaba el estado en el que estuviera, porque si confundía el estado con el efecto, me iba a dar una codificación diferente, entonces empecé a tomar fue los efectos, decada interruptor sin importar el estado en el que estuvieran las bombillas
5	E3	Miramos, que pasa si oprimo A, cambia el 2, el 4 y el 5 y entonces para expresarlo, hacemosun vector de 5 componentes y pues, eh, vamos a notar que el 1, dirá que cambio, no importa el estado y el 0 que se mantuvo
6	E3	Entonces el primero es (0,1,0,1,1)¿ Que pasa si el estado inicial no fuera ese? “Se supone” “Porque el efecto es ese” “Entonces según esto si yo oprimo A, lo que al aplicar A, lo que debería tener es esto, la suma entre los dos vectores”
7	P	¿Que significa para usted el vector A que ha escrito el compañero?
8	E4	Es como el cambio que hace al vector inicial, ósea lo que produce cuando se aplica al vectorinicial” “El vector inicial, ya se que es el vector inicial

		porque el compañero dijo que iba a tomar los ceros como cuando se mantuvieran apagadas o que no hubiese un cambio en las bombillas
9	E5	No, ósea que el estado inicial puede variar todo depende entonces al hacerla suma también puede cambiar
10	P	¿Qué le dicen los ceros y unos en el vector I?
11	E6	El cero en I me dice que esta apagado". El estado inicial es como si fuese un primer paso, en el que se acordara quetodas las bombillas hubieran estado apagadas, en un principio, entonces el estado inicial, sería el cambio que hubo en la tercera y quinta, por eso seria como tal un cambio si se toma como en un primer instante, que estaban todas apagadas, así se podría tomar como un cambio y no como un estado
12	E6	Profe, lo podría tomar también como , cada vez que le aplica A seria sumarle eso al vector inicial y cuando me de dos eso me va a mandar a cero en $\mathbb{Z}5$, entonces en cero, si porejemplo esta prendida y le aplico otra vez, eso me va a apagar la bombilla, me hago entender, entonces seria sumar vectores al vector inicial y cuando quede un cero estaráapagado y en 1 encendido" "Tengo un estado inicial, si se cada botón que hace, y al aplicarle eso, al estado inicial, me va a dar como va a quedar el resultado final, comova a quedar
13	P	¿Juan que le dice a usted el vector A?
14	E5	Que cambiaron las bombillas 2, 4 y 5 "yo agarre también desde aquí esta posición
15	E6	Yo empecé tomando la primera posición, la bombilla de arriba, es decir esta era mi posición1" ahora para ver cómo está funcionando entre esta, para pasar del estado inicial, a esta matriz A, vector A , entonces debe estar involucrado otro vector aquí en medio tal que al sumar ese con este vector, me produzca como el A y así sucesivamente
16	P	¿qué le dice el vector a que escribió Ryan y el de juliana?
17	E7	Es como si se hubiera corrido una bombilla osea solo se corren las componentes, todo depende del orden que establezcamos porque ella tomó la B como el primero y yo tomé también el A
18	E8	Propongo el vector $(-a, -a, a, a, a)$ donde a: encendido y -a: apagado, luego definí los cuatro vectores que son los botones donde serian igual a A = (1, −1,1, −1, −1) donde 1 es que se mantiene y -1 es que cambia y pues lo mismo para los otros tres botones B = (1, −1, −1,1, −1) , C = (1,1,1, −1,1) y D = (−1,1, −1,1, −1) y luego definí una operación donde coloco el vector de estado inicial y lo multiplico por A aplicando así A. "Más adelante estuve pensando en que esto también se puede hacer que escoger el vector de Estado inicial en cualquier estado en que se tenga y multiplicarlo por los botones y esto es igual a tener estado inicial y multiplicar por D*A*B no importa el orden van a quedar igual también si cumple la propiedad asociativa" EI*A*B*D = EI*B*A*D" y "$(EI * A) * B = EI * (A * B)$"
19	E9	En mi grupo, en efecto 1 significaba que cambiaba y 0 que se mantenía y el estado lo quesignificaba es que 1, estaba encendido y el 0 que estaba

		apagado" "Codificamos el estado inicial así nos quedaba (0,0,1,0,1), esta codificación depende paranosotros del patrón de Estado" "Nos dimos cuenta de que todos están apagados menos el segundo entonces lo codificamos por estado (0,1,0,0,0) partimos de ver la diferencia entre los vectores en $\mathbb{Z}2$ empezamos a mirar la diferencia entre ambos que había pasado allí si nos damos cuenta la primera componente queda igual no cambia entonces anotamos en la segunda hubo un cambio en la tercera hubo cambio en la cuarta se mantuvo y en la quinta hubo un cambio y así
20	E10	Como habíamos dicho que mi 1 es que cambia comenzando que A es mi 1 se aplica para 0 para 1, 1 para el segundo, 1 para el tercero, cero para el cuarto y 1 para el quinto donde sería mi 1 en el que cambia el color dependiendo
21	E9	Entonces pues nos dimos cuenta de que este era el interruptor B lo verificamos acá porque lo hicimos como suma de vectores verificando que sí nos da el estado final