

**RELACIÓN MASA-RADIO PARA ESTRELLAS ENANAS
BLANCAS A TEMPERATURA CERO.**

DIEGO ARMANDO MADERO RAMÍREZ

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA**

2006

**RELACIÓN MASA-RADIO PARA ESTRELLAS ENANAS
BLANCAS A TEMPERATURA CERO.**

DIEGO ARMANDO MADERO RAMÍREZ

Tesis para optar al título de Físico

Director

JORGE IVAN ZULUAGA, Ph. D.

Físico

Codirector

ARTURO PLATA, Ph. D.

Físico



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2006

Sería un descuido imperdonable, el no mencionar el amor, paciencia, cariño y apoyo de mis padres Alberto Madero y Marcela Ramírez. Muchas gracias a los dos por esa confianza.

A mis hermanas, Anguie y Angela Madero. Por ese apoyo y motivación para salir adelante.

A todos mis familiares.

Gracias.

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos:

Al Dr. Jorge Ivan Zuluaga. Por haber aceptado sin condiciones ni compromisos dirigir este trabajo de grado, además, por su dedicación, colaboración e iniciativa académica y gran calidez humana.

Al Dr. Arturo Plata. Por su motivación, paciencia y colaboración para llevar a cabo este proyecto, además por ese entusiasmo desinteresado de sembrar en nuestra comunidad académica una nueva cultura y campo de estudio basado en la astronomía.

Al Grupo Halley de Astronomía y Ciencias Aeroespaciales. Por esa lucha conjunta durante más de 20 años, hacia la búsqueda de espacios para el desarrollo de una astronomía académica, además por su paciencia y amistad.

A mis compañeros de estudio. José Andrés Hernandez, Vladimir Peña, Jorge Enrique Guerrero, Vivina Rosero y Grupo GAC. Por esa constante motivación, preocupación, amistad, curiosidad científica y ese tesón en la defensa de nuestros logros y éxitos tanto académicos como personales.

A mis compañeros de Física. Por el empuje, lucha y unión por el desarrollo de nuestros proyectos individuales.

Y a todos ellos que de manera directa o indirecta, me brindaron su apoyo en algún momento cuando este compañero se encontraba a la deriva. Muchas gracias y de corazón les deseo a todos, solo cielos despejados.

TÍTULO : DETERMINACIÓN DE LA RELACIÓN MASA-RADIO PARA ESTRELLAS ENANAS BLANCAS A TEMPERATURA CERO. *

AUTORES : MADERO RAMÍREZ, Diego Armando †

PALABRAS CLAVES : Estrellas Magnéticas, Evolución Estelar, Materia Degenerada, Enanas Blancas.

DESCRIPCIÓN : En este trabajo se determinara numéricamente la relación masa-radio gracias al uso de librerías GSL exclusivas de la programación en C bajo ambiente Linux; al incorporar uno a uno los efectos físicos estudiados en los trabajos de Hamada-Salpeter, Mathew-Suh, en las ecuaciones de la estructura estelar. Los efectos estudiados son: variaciones de la composición química de la estrella analizando los casos de Helio, Carbón y Hierro, consideraremos las correcciones electrostáticas coulombianas debidas al apantallamiento de la repulsión electrónica por efecto de la distribución no uniforme de los núcleos atómicos, siendo en este caso la presión total del sistema como la adición de la presión debida a la degeneración electrónica y la coulombiana, luego de observar los efectos anteriores en la relación masa-radio, analizamos las consecuencias presentes en el gas estelar al interactuar este con un campo magnético homogéneo y estático según Ostriker; observando límites para la masa estelar a medida que el campo magnético aumenta, finalmente realizamos una corrección a la ecuación de equilibrio hidrostático modificándola por la encontrada por Tollmann-Oppenheimer-Volkoff usando como soporte teórico la teoría de la relatividad General. Del trabajo directamente se observa el límite de Chandrasekhar para cada una de las estrellas compuestas por elementos específicos. Para el caso del campo magnético realizaremos una expansión de Euler-Maclaurin de las variables termodinámicas alrededor de la variación de los niveles cuánticos accesibles permitidos.

*Trabajo de Grado.

†Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Jorge Ivan Zuluaga. (Director).

TITLE : DETERMINATION OF THE MASS-RATIO RELATION FOR A WHITE DWARF STARS TO ZERO TEMPERATURE*

AUTHOR : DIEGO ARMANDO MADERO RAMÍREZ †

KEY WORDS : Magnetic star, evolution stellar, degenerate matter, white dwarf.

DESCRIPTION : In this work the mass-radius relation was determined numerically thanks to the use of the GNU GSL of programming in C under Linux atmosphere; when incorporating one by one the studied physical effects in the works of Hamada-Salpeter, Mathew-Suh, in the equations of the stellar structure. The studied effects are: variations of the chemical composition of the star analyzing the cases of Helium, Carbon and Iron, we will consider the coulombian electrostatic corrections due to the screening of the electronic repulsion by effect of the distribution does not uniform of the atomic nuclei, being in this case the total pressure of the system as the addition of the pressure due to the electronic degeneration and the coulombian, after observing the previous effects in the mass-radius relation, we analyzed the present consequences in the stellar gas interacting with a homogenous and static magnetic field, according to Ostriker; observing limits for the stellar mass as the magnetic field increases. Finally we made a correction to the equation of hydrostatic balance modifying it by found by Tollmann-Oppenheimer-Volkoff using like theoretical support the General relativity theory. Of the work directly the limit of Chandrasekhar for each one of stars composed by specific elements is observed. For the case of the magnetic field we will make an expansion of Euler-Maclaurin of the thermodynamic variables around the variation of the accessible or allowed quantum levels.

*Senior tesis project

†Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Jorge Ivan Zuluaga. (Director).

TABLA DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN	1
2. GENERALIDADES	4
2.1. TEORÍA CINÉTICA	4
2.2. DEGENERACIÓN DE LA MATERIA	6
2.3. FORMACIÓN DE UNA ENANA BLANCA	7
2.4. CORRECCIONES COULOMBIANAS	8
3. MODELO PARA UNA ENANA BLANCA A TEMPERATURA CE- RO	11
3.1. MODELO ESTELAR, SIN CAMPO MAGNÉTICO CON CORREC- CIONES COULOMBIANAS CLÁSICAS	12
3.1.1. ECUACIONES DE EQUILIBRIO HIDROSTÁTICO	12
3.1.2. ECUACIÓN DE ESTADO	13
3.1.3. MODELO MATEMÁTICO	16
3.1.4. RESULTADOS	19

3.1.5. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE DATOS	20
3.2. CON CAMPO MAGNÉTICO ADEMÁS DE LAS CORRECCIONES ELECTROSTÁTICAS	22
3.2.1. ECUACIÓN DE ESTADO	22
3.2.2. MODELO MATEMÁTICO	26
3.2.3. RESULTADOS	31
3.2.4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE DATOS	32
4. CONCLUSIONES	34
5. ANEXOS	36
5.1. EXPANSIÓN EULER MACLAURIN	36
5.2. EXPANSIÓN DE EULER-MACLAURIN PARA LA DENSIDAD DE ELECTRONES	38
REFERENCIAS	41

LISTA DE FIGURAS

2.1. <i>Representación de la red de usando la aproximación de Wigner-Seitz</i>	8
2.2. <i>Aproximación de Winger-Seitz para una celda individual.</i>	9
3.1. Relación masa-radio de distintas composiciones despreciando las correcciones Coulombicas y campo magnético; ($y_e = \frac{Z}{A}$)	19
3.2. Comparación de la relación masa-radio de distintas composiciones considerando las correcciones Coulombicas y las obtenidas por Hamada-Salpeter.	19
3.3. Comparación de la relación masa-radio de distintas composiciones con y sin correcciones Coulombicas	20
3.4. Relación masa-radio para estrella compuesta de Helio en presencia de campo magnético interno, se compara con la curva de Hamada-Salpeter.	31
3.5. Relación masa-radio para estrella compuesta de Carbón en presencia de campo magnético interno, se compara con la curva de Hamada-Salpeter.	31
3.6. Relación masa-radio para estrella compuesta de Hierro en presencia de campo magnético interno, se compara con la curva de Hamada-Salpeter.	32

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Desde tiempos inmemoriales el hombre a estado conectado con el Cosmos, quizás de alguna manera mágica o sencillamente es atraído por ese sentimiento que inspira el solo hecho de pensar en la perfección y armonía del universo. Es esto, lo que durante siglos ha sembrado en las mentes y por que no decirlo en nuestros corazones, el interés por descifrar ese código, esas fórmulas, leyes o tal vez ese toque divino que por sencillo o complejo que sea logro que se formaran estrellas, que se estructuren galaxias de diversas formas, que existan cuerpos tan bastos e inimaginables que bagan por el espacio-tiempo devorando todo lo que encuentre a su paso... Y otros objetos que presentan propiedades y características aun desconocidas.

Este proyecto pretende conocer gracias a abstracciones físicas, mecanismos que logren explicar el comportamiento de la relación masa-radio de una Enana Blanca(EB). La importancia radica, que gracias a la obtención de dicha relación podemos extrapolar, información de otras magnitudes físicas que definen a las EB[1]. Además gracias a la cantidad considerable de estrellas EB como lo dice D. Winget es sus trabajos [2], la relación masa-radio nos permitiría encontrar una relación acerca de la distribución espacial de estas en nuestra galaxia, deducir información indirecta acerca de su proceso de formación y determinar la edad promedio del disco galáctico.

Las Enanas Blancas EB son un tipo especial de objetos compactos que se sostienen contra la gravedad gracias a la presión de degeneración de los electrones, se caracterizan por presentar radios que oscilan entre 5000km a 10000Km, su densidad promedio es

de 10^6grcm^{-3} , presentan masas muy próximas a la masa Solar y además sus núcleos internos están compuestos por nuclidos como el ${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{56}\text{Fe}$ entre otros. Su formación es consecuencia directa del proceso de evolución estelar de estrellas menores de $9M_{\odot}$ aquellas que son denominadas Estrellas de Baja Masa (EBM)[3].

El primer investigador interesado por descifrar los mecanismos físicos por la cual una EB logra sostenerse contra la gravedad es Fowler hacia 1926[4], mientras que su contemporáneo Adams[5] logra determinar ciertas propiedades observacionales de estos cuerpos. Estos dos personajes abren las puertas para el modelamiento físico de una EB y es hacia 1931 donde se publica el trabajo propuesto por el astrofísico S. Chandrasekhar [6] quien considera cinemática relativista para la ecuación de estado, tomando como base que el sistema esta compuesto por un gas de electrones degenerados a temperatura cero. Además deduce teóricamente un límite superior para la masa de estos objetos denominado el límite de Chandrasekhar [12] y es 1932 que el Físico D. Landau logra brindar una explicación física para este límite [7].

Una segunda propuesta que pretende explicar la estructura interna de las EB's, que junto con el de Chandrasekhar son considerados bases teóricas fundamentales para aquellos modelos actuales, es el desarrollado por Hamada y Salpeter [11] quienes derivan para distintas densidades centrales modelos matemáticos que tienen en cuenta efectos coulombianos de los cuales se rescatan: las correcciones electrostáticas clásicas, correcciones de Thomas-Fermi entre otras. Uno de los resultados teóricos más importantes de su modelo es la determinación de que algunas de estas correcciones no afectan considerablemente en la estructura de la EB, cuando estas presentan densidades centrales bajas. Esta propuesta, toma como pilar fundamental el trabajo desarrollado por Salpeter [8] quien determina la energía y presión para un plasma de electrones libres degenerados a una temperatura cero.

En nuestro proyecto analizaremos los efectos que presentaría la relación masa-radio para una EB al considerar variaciones de composición química, presencia de campos magnéticos, correcciones coulombianas. Finalmente modificaremos la ecuación de equilibrio Hidrostático por la de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)[10] que ilustraría los

efectos debidos a la relatividad general sobre la estructura de la EB.

Para hacerlo escribimos una serie de programas de computador que valiéndose de integradores numéricos apropiados nos permitan obtener dicha relación. Los resultados obtenidos se compararan con los trabajos de Hamada-Salpeter[8] y algunos resultados de modelos propuestos por Ostriker y Hartwick[15] que servirán como pilares para validar nuestros resultados obtenidos.

Capítulo 2

GENERALIDADES

Este capítulo, hace referencia a las leyes y teorías físicas fundamentales para el desarrollo del proyecto que servirán como contextualización.

2.1 TEORÍA CINÉTICA

En la Teoría Cinética la densidad en el espacio de fases para cada especie de partículas nos provee una descripción total del sistema. Equivalentemente, especificar una función de distribución en el espacio de fases representara la misma información. Estos conceptos físicos se relacionan:

$$\frac{d\eta}{d^3x d^3p} = \frac{g}{h^3} f \quad (2.1)$$

Donde h^3 es el volumen de una celda en el espacio de fases (h =constante Planck); y g es el peso estadístico, que representa el número de estados de una partícula con un valor de momento, definiéndose por $g = 2S + 1$ donde (S =espin). f es la función de distribución para el número de celdas en el espacio de fases.

La densidad de cada especie de partículas en el espacio de fases se obtiene por:

$$n = \int_0^p \frac{d\eta}{d^3x d^3p} d^3p \quad (2.2)$$

La densidad de energía se puede obtener por:

$$\epsilon = \int_0^p E \frac{d\eta}{d^3x d^3p} d^3p \quad (2.3)$$

El valor de E representa la energía de una partícula. Por ejemplo si la partícula es un electrón libre $E = (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}$, m=masa en reposo del electrón.

Para determinar la presión lo podemos hacer usando la relación:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^p p v \frac{d\eta}{d^3x d^3p} d^3p \quad (2.4)$$

Donde la v representa la velocidad de las partículas.

para un gas ideal en equilibrio, f tiene la forma simple:

$$f = \frac{1}{\exp[(E - \mu)/kT] \pm 1} \quad (2.5)$$

Donde el signo superior hace referencia a fermiones (estadística de Fermi-Dirac) y el inferior para los bosones (Estadística de Bose-Einstein). Aquí k es la constante de Boltzmann y μ es el potencial químico.

Si tenemos sistemas donde $T \rightarrow 0$ y densidades altas, $f(E)$ se reduce a:

$$f(E) = 1, \text{ si } E \geq E_f \text{ ó } f(E) = 0, \text{ si } E < E_f$$

2.2 DEGENERACIÓN DE LA MATERIA

El fenómeno de degeneración aparece debido al principio de exclusión de Pauli que en tres dimensiones se expresa por:

$$dx dy dz dp_x dp_y dp_z \geq h^3 \quad (2.6)$$

donde h es la constante de Planck y dp_x, dp_y, dp_z son las tres componentes de la cantidad de movimiento p . Si las partículas son forzadas a ocupar un volumen más y más pequeño que suele suceder durante las etapas de evolución estelar, llega un momento en el que la única forma de hacerlo es aumentando la cantidad de movimiento es decir, su velocidad. Notemos que no hay ninguna fuerza que empuje a esas partículas, van cada vez más rápido porque están limitadas a un volumen cada vez más pequeño o equivalentemente, a una densidad cada vez más alta. Esta es la propiedad básica del gas degenerado.

Una característica importante es que la degeneración se establece primero en los electrones que en las partículas más pesadas. Supongamos equipartición de energía, $1/2 m_N v_N^2 \sim 1/2 m_e v_e^2$, donde N se refiere a los núcleos y e a los electrones, podemos ver que

$$\frac{V_N}{V_e} \sim \left(\frac{m_N}{m_e} \right)^{3/2} \sim 10^6 \quad (2.7)$$

donde V es el volumen en el espacio de los momentos, $V \propto p^3$. Es decir, los núcleos tienen disponibles en el espacio de los momentos 10^6 más celdas que los electrones, por lo que la degeneración ocurrirá a densidades 10^6 veces más altas en los núcleos que en los electrones.

Las condiciones para que se degenera totalmente un gas es que su temperatura tienda a cero. En estas circunstancias y si tenemos un gas de electrones la función de distribución es la definida por Fermi-Dirac.

2.3 FORMACIÓN DE UNA ENANA BLANCA

En una EBM ubicada en la SPEC (Secuencia Principal de Edad Cero) se presenta el quemado de H al He por medio de la fusión nuclear, esto se logra cuando el núcleo de la estrella ha alcanzado una temperatura aproximada de $10^7 K$. Cuando se agota el H completamente en el centro éste colapsa aumentando gradualmente la temperatura del gas. Cuando la temperatura es suficiente, comienzan las reacciones nucleares en las conchas que rodea al centro (estas conchas se denominan activas), mientras el centro sigue colapsando. La estrella abandona la SPEC, la envoltura exterior a la concha activa se expande y la estrella se mueve hacia la zona de las Gigantes Rojas (GR). Algo muy importante en la transformación a GR, es que la estrella se degenera parcialmente, esto implica que la presión ya no dependerá de la temperatura sino de su densidad [19]. En este caso los electrones se degeneran y su presión podría detener el colapso del centro, aunque no totalmente, por lo que la temperatura sigue aumentando.

Eventualmente, la temperatura llega a $T \approx 10^8 K$, comenzando las reacciones $3 - \alpha$ con gran producción de energía ($\epsilon \propto T^{30}$). Como la conducción de energía es tan alta, aumenta la temperatura; esto no implica un aumento de la presión debido al fenómeno de degeneración, esta fase se le denomina FLASH DE HELIO. Después del flash, la estrella se contrae y se mueve hacia la RAMA HORIZONTAL, en la que permanece mientras quema el He en su centro recubierto por una capa de He inerte y este es rodeado por una zona de H. La situación es muy dinámica, tanto en el centro como en la zona de He inerte pues ellas aumentan en masa debido a la quema continua en el centro y la zona de transición de He-H.

Consumido el He en el centro, el núcleo queda formado por carbono inerte, rodeado de dos conchas muy delgadas donde ocurren reacciones de He-C(interna) y de H-He(externa), rodeadas por una zona de He inerte. Debido a que las conchas son delgadas el quemado de He ocurre de manera explosiva, y que la estrella sufra lo que se denomina pulsos térmicos. La estrella expulsa su envoltura y lo que queda de ella es el centro degenerado de C, que contiene la mayor parte de la masa remanente, rodeado por una

capa donde el He se quema en C, que provee la luminosidad de la estrella, y de una pequeña envolvente rica en H. Las temperaturas que alcanzan estos cuerpos llegan a los cientos de miles de grados K. Con estas temperaturas, hay suficientes fotones con longitudes de onda menores de 912\AA como para ionizar el material eyectado en fases anteriores. El material ionizado se denomina NEBULOSA PLANETARIA.

Al disiparse la envolvente ya no existen reacciones nucleares, lo que queda es una configuración sostenida por degeneración de electrones, con una masa menor al Limite de Chandrasekhar. Estas son las llamadas ENANAS BLANCAS. Las EB constituyen el estado final de la mayoría de las estrellas en el universo. Por lo general estas estrellas tienen degeneración no relativista.

2.4 CORRECCIONES COULOMBIANAS

La principal característica de las correcciones coulombianas proviene de que las cargas positivas no son distribuidas uniformemente en el gas pero son concentradas en núcleos individuales de carga Z . Como la temperatura del gas $T \rightarrow 0$, los núcleos son localizados en una red que maximiza la separación inter-nuclear[10]. Si consideramos que la celdas de la red sean esferas en el espacio con un volumen $V_{\text{celda}} = \frac{4\pi r_0^3}{3} = \frac{1}{n_N}$, donde n_N define la densidad de núcleos *aproximación de Wigner-Seitz*[10], el gas es imaginado como esferas neutras de radio r_0 alrededor de cada núcleo, que contienen Z electrones cercanos al núcleo; no debe ser olvidado que la distribución de estos núcleos no es uniforme.

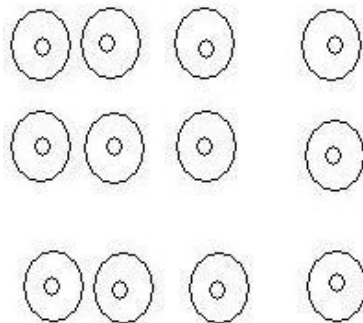


Figura 2.1: *Representación de la red de usando la aproximación de Wigner-Seitz*

La energía electrostática total para cada una de estas esferas es la suma de las energías potenciales debidas a la interacción electrón-electrón (e-e) y interacción electrón-núcleo (e-n). Para ensamblar una esfera uniforme que contiene Z electrones requiere una energía de:

$$E_{e-e} = \int_0^{r_0} \frac{q dq}{r} \quad (2.8)$$

donde:

$$q = -Ze \frac{r^3}{r_0^3} \quad (2.9)$$

Que representa la carga total en el radio r .

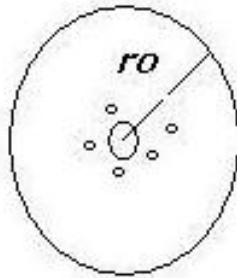


Figura 2.2: Aproximación de Winger-Seitz para una celda individual.

Al efectuar la integral:

$$E_{e-e} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{r_0} \quad (2.10)$$

La energía potencial de interacción e-n viene dada por:

$$E_{e-n} = Ze \int_0^{r_0} \frac{dq}{r} = -\frac{3}{2} \frac{Z^2 e^2}{r_0} \quad (2.11)$$

Entonces la energía total Coulombiana estará dada por la expresión:

$$E_c = E_{e-e} + E_{e-n} = -\frac{9}{10} \frac{Z^2 e^2}{r_0} \quad (2.12)$$

Como las esferas son neutras, la interacción entre electrones y núcleos de otras celdas son despreciadas. La energía negativa representa que es mayor la atracción electrón núcleo que la repulsión electrón-electrón.

La energía electrostática por electrón es:

$$\frac{E_c}{Z} = -\frac{9}{10} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n_e^{1/3} \quad (2.13)$$

donde hemos usado:

$$n_e = \frac{Z}{4\pi r_0^3/3} \quad (2.14)$$

La presión correspondiente es negativa y se obtiene usando la relación[7]:

$$P_c = n_e^2 \frac{d(E_c/Z)}{dn_e} = -\frac{3}{10} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n_e^{4/3} \quad (2.15)$$

Capítulo 3

MODELO PARA UNA ENANA BLANCA A TEMPERATURA CERO

La idea central del proyecto es determinar las variaciones que presenta la relación masa-radio de una EB, al introducir poco a poco diversos parámetros físicos justificados por los siguientes trabajos: acerca de las correcciones coulombianas Hamada y Salpeter[11], campo magnético Suh and Mathews[9] y finalmente analizar las correcciones a la ecuación de equilibrio hidrostático usando la ecuación de Tollmann-Oppenheimer-Volkoff [19].

Observaremos cada efecto en particular, y es por eso que inicialmente analizaremos un modelo de EB sin tener en cuenta el efecto del campo magnético ni la corrección a la ecuación de equilibrio hidrostático, concentrándonos en determinar el efecto de una composición química homogénea, refiriéndose a una estrella compuesta de un determinado elemento y las correcciones electrostáticas coulombianas. Luego observaremos los efectos de un campo magnético homogéneo uniforme y finalmente la corrección de la ecuación de equilibrio hidrostático.

3.1 MODELO ESTELAR, SIN CAMPO MAGNÉTICO CON CORRECCIONES COULOMBIANAS CLÁSICAS

Las típicas consideraciones básicas para el modelo que realizaremos soportadas por los modelos encontrados en la literatura son: que la estrella posee simetría esférica, no rota, esta aislada, inicialmente despreciaremos efectos magnéticos y se encuentra en equilibrio tanto hidrostático como termodinámico, además la estrella esta conformada por un gas de electrones totalmente degenerados a temperatura cero.

Para tener en cuenta los efectos electrostáticos coulombianos, usaremos los resultados y las consideraciones presentadas en el capítulo de generalidades.

La presión total del gas será la suma de los términos de presión de degeneración electrónica y la presión coulombiana. Esto lo expresamos por la expresión:

$$P = P_e + P_c \quad (3.1)$$

3.1.1. ECUACIONES DE EQUILIBRIO HIDROSTÁTICO

Las ecuaciones de la estructura estelar estarán representadas por la relación de conservación de masa y la relación de equilibrio hidrostático newtoniana que nos dice que en la estrella, cada punto de materia, la fuerza de gravedad es balanceada por la presión. Estas ecuaciones son:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho(r) \quad (3.2)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (3.3)$$

G representa la constante universal gravitacional, M_r y ρ_r son la masa y densidad encerradas dentro de un radio r en el interior de la estrella.

Como ya había sido comentado en el capítulo anterior, al degenerarse la materia durante el proceso de evolución estelar para la formación de una EB, la presión, variable termodinámica, dependerá de la densidad, esta relación se obtiene apartir de la ecuación de estado para el sistema ($P = P(\rho)$), y la expresaremos de la siguiente forma:

$$\frac{dP}{dr} = \left(\frac{dP}{d\rho} \right) \left(\frac{d\rho}{dr} \right) \quad (3.4)$$

Para poder solucionar esta ecuación debemos encontrar la relación de la presión total con la densidad.

3.1.2. ECUACIÓN DE ESTADO

En nuestro sistema los núcleos contribuirán casi a toda la masa de este, pero no a la presión pues recordemos que la degeneración se establece primero en los electrones y esta es suficiente para contrarrestar a la gravedad, mientras que los electrones contribuyen totalmente a la presión y no a la masa[3]. Estas características recuerdan a los modelos de gases de Fermi tratados con cinemática relativista.

La composición química estelar es un parámetro que consideramos homogéneo. Analizaremos los casos para una estrella EB compuesta por Helio, Carbón y Hierro. Este parámetro lo relacionamos con el número densidad de electrones por la ecuación:

$$n_e = Y_e \frac{\rho}{M_p} \quad (3.5)$$

Donde M_p es la masa del protón y Y_e parámetro de composición que representa la razón entre el número de protones y el número de nucleones.

Desde el punto de vista de la Teoría Cinética, el número de densidad de electrones será:

$$n_e = \int_0^{p_f} \frac{2}{\hbar^3} \frac{d^3p}{2\pi^2} \quad (3.6)$$

Se evalúa hasta un p_f ya que este es el máximo valor permitido.

Al definir:

$$x = p/mc \quad (3.7)$$

Llamado parámetro relativista podemos reescribir el número de densidad de electrones como:

$$n_e = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 x^3 \quad (3.8)$$

La densidad de energía que se calcula usando las relaciones (2.14, 3.8), estará dada en función del parámetro relativista por:

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi^2} mc^2 \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 \left[x(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right] \quad (3.9)$$

La presión debida al gas de electrones, se calcula al relacionar las ecuaciones(2.15, 3.8), por:

$$P_e = \frac{1}{24\pi^2} mc^2 \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 \left[x\sqrt{x^2 + 1}(2x^2 - 3) + 3\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right] \quad (3.10)$$

En la expresión anterior observamos que la presión electrónica esta en función del parámetro relativista.

Usando las relaciones del capítulo anterior de correcciones electrostáticas, la presión coulombica como función del parámetro x estara dada por:

$$P_c = -\frac{3}{10} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n_e^{4/3} = -\frac{3}{10} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \left(\frac{1}{3\pi^2}\right)^{4/3} Z^{2/3} e^2 \left(\frac{mc}{\hbar} x\right)^4 \quad (3.11)$$

De las ecuaciones (3.10, 3.11) obtenemos de forma directa la presión total de nuestro sistema. Y se expresa por:

$$P = \frac{1}{24\pi^2} mc^2 \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \left[x\sqrt{x^2+1}(2x^2-3) + 3\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \right] - \frac{3}{10} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{3\pi^2} \right)^{4/3} Z^{2/3} e^2 \left(\frac{mc}{\hbar} x \right)^4 \quad (3.12)$$

El objetivo inicial es encontrar la presión total como función de la densidad. Una forma de hacerlo es relacionando la densidad con el parámetro x.

Para esto usamos las ecuaciones (3.7, 3.8) obteniendo:

$$x = \left(\frac{3\pi^2 n_e \hbar^3}{m^3 c^3} \right)^{1/3} \quad (3.13)$$

Podemos definir n_0 como:

$$n_0 = 3\pi^2 \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^3 \quad (3.14)$$

Usando esta relación podemos expresar a x como:

$$x = \left(\frac{n_e}{n_0} \right)^{1/3} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/3} \quad (3.15)$$

Donde ρ_0 lo definimos:

$$\rho_0 = \left(\frac{M_p n_0}{Y_e} \right) \quad (3.16)$$

de las relaciones (3.12,3.15) vemos que los terminos de la ecuación (3.4) se pueden escribir como:

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{dp}{dx} \frac{dx}{d\rho} \quad (3.17)$$

y además, como la densidad la tenemos como función del parámetro x :

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{d\rho}{dx} \frac{dx}{dr} \quad (3.18)$$

De las ecuaciones (3.2, 3.17, 3.18) podemos ver:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{dx} \frac{dx}{dr} \Rightarrow \frac{dx}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \frac{x^3}{\rho_0} \left(\frac{dP}{dx} \right)^{-1} \quad (3.19)$$

3.1.3. MODELO MATEMÁTICO

la descripción matemática que nos permitan para este modelo inicial, caracterizar la relación masa-radio de una estrella EB a temperatura cero se especificaran en las siguientes subsecciones:

ECUACIONES DIFERENCIALES DEL MODELO

En la sección anterior encontramos la relación entre la presión y el parámetro relativista luego el término $\frac{dP}{dx}$ estará dado por:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} = \frac{1}{24\pi^2} mc^2 \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 & \left[(6x^2 - 3)\sqrt{x^2 + 1} + (2x^4 - 3x^2)(x^2 + 1)^{-1/2} + 3 \left(\frac{1 + x(x^2 + 1)^{1/2}}{(x + \sqrt{x^2 + 1})} \right) \right] \\ & - \frac{9}{10} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{3\pi^2} \right)^{4/3} Z^{2/3} e^2 \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^4 x^3 \quad (3.20) \end{aligned}$$

Las ecuaciones diferenciales que solucionaremos por medio de un programa en lenguaje C utilizando como herramientas librerías GSL para desarrollar el método de RK4 (Runge-Kutta 4) son:

$$F(0) = \frac{dx}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \frac{x^3}{\rho_0} \left(\frac{dP}{dx} \right)^{-1} \quad (3.21)$$

$$F(1) = \frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \frac{x^3}{\rho_0} \quad (3.22)$$

La solución de estas ecuaciones nos brindaran información directa acerca de la relación masa-radio. EL conjunto de ecuaciones se caracterizan por ser no lineales de primer orden.

PARÁMETROS

Los parámetros, variables de entrada que durante el proceso de solución permanecen constantes, variándolas para diferentes casos específicos, y de las cuales depende nuestro modelo son: por un lado la cantidad ρ_0 que depende de la composición de la estrella, además la densidad central que al relacionarla con la ecuación (3.15) nos permite calcular un valor para x_c de la siguiente forma:

$$x_c = \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^{1/3} \quad (3.23)$$

donde ρ_c estará acotado para valores desde (1×10^7) hasta (2×10^{13}) . La composición como ya fue comentado tomara características para átomos de Helio, Carbón y Hierro. Esto implica valores de $y_e = 0,5$ para el carbón, helio y $y_e = 0,443$ para el hierro.

CONDICIONES INICIALES PARA LAS VARIABLES A INTEGRAR

En el centro de la estrella ($r=0$), la masa $M_r = 0$ y la densidad un valor igual ρ_c (densidad central), luego el parámetro relativista vendría siendo la cantidad x_c . Además las funciones $F(1)$ y $F(2)$ evaluadas tendrían valores de cero, esto se ve sencillamente a reemplazar $r=0$ en las ecuaciones (3.21, 3.22).

Los resultados teóricos obtenidos en la sección anterior representa las relaciones que se usaran para escribir un programa en lenguaje C que nos permitirá deducir numéricamente una relación masa-radio.

3.1.4. RESULTADOS

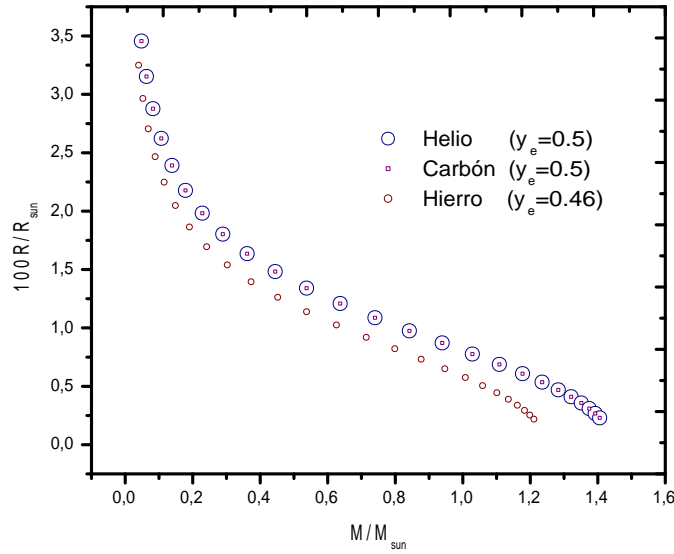


Figura 3.1: Relación masa-radio de distintas composiciones despreciando las correcciones Coulombicas y campo magnético; ($y_e = \frac{Z}{A}$)

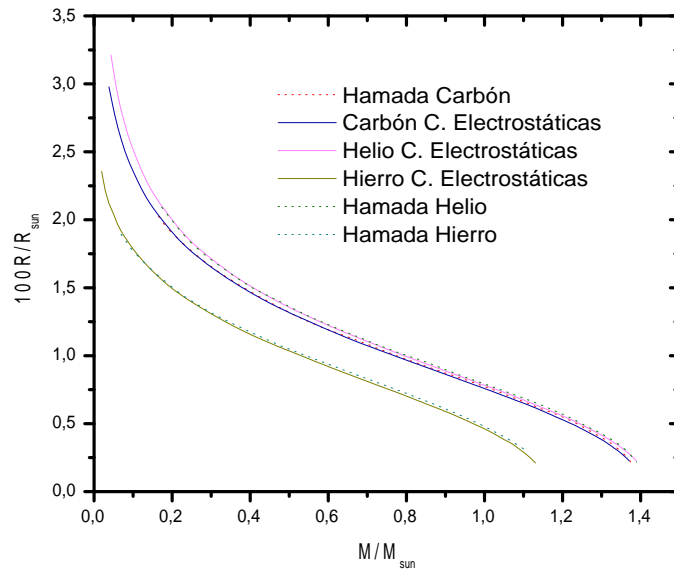


Figura 3.2: Comparación de la relación masa-radio de distintas composiciones considerando las correcciones Coulombicas y las obtenidas por Hamada-Salpeter.

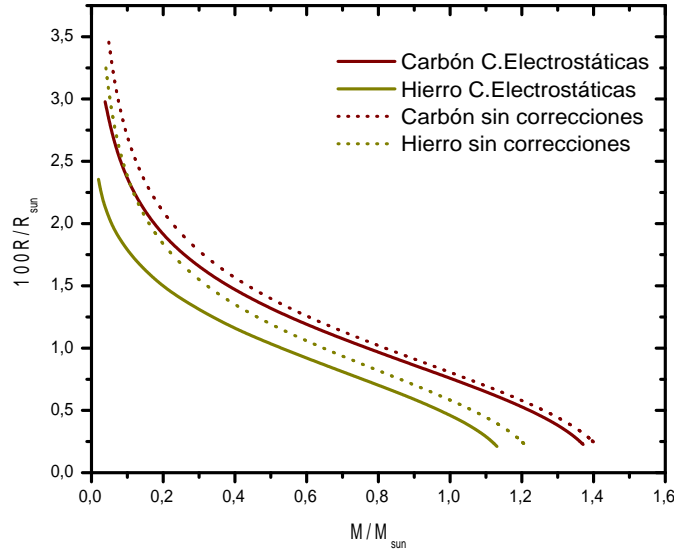


Figura 3.3: Comparación de la relación masa-radio de distintas composiciones con y sin correcciones Coulombicas .

3.1.5. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE DATOS

Primero se analiza la relación masa-radio al deshabilitar de nuestro programa principal, la intervención de las correcciones Coulombicas, campo magnético y la corrección debida a la ecuación de equilibrio hidrostático TOV. Dicha relación queda dependiendo únicamente del parámetro de composición (y_e). La información relaciona las variables adimensionales para el radio y la masa.

Al observar la figura 3.1 observamos, que cuando el parámetro de composición (y_e) aumenta, el volumen de la estrella también lo hace al incrementar su radio. Esto es evidente si observamos que para una masa adimensional fija por ejemplo de (1) el correspondiente radio adimensional equivalente es aproximadamente (0.6) si ésta tiene un parámetro de composición $y_e = 0,46$, mientras para una estrella con el mismo valor de masa adimensional, pero con un registro de $y_e = 0,5$ el radio asociado es de (0.8).

La interpretación física a este comportamiento radica en que como la densidad electrónica es inversamente proporcional a el parámetro y_e , (esta relación se observa en las ecuaciones (3.15, 3.16)), al incrementarse éste parámetro, la densidad estelar disminu-

ye, luego la presión electrónica también. Como la estrella se encuentra en equilibrio hidrostático para que se siga conservando este principio la fuerza gravitacional debe disminuir en magnitud y esto ocurre al aumentar el radio.

Otra característica importante es que si tenemos estrellas de distinta composición pero con un ye (recordando que el termino representa la razón entre el número atómico y la masa atómica) igual por ejemplo lo que sucede con el Helio y Carbón, la relación masa-radio para cada composición individual es la misma.

Ahora se observo el efecto de las correcciones coulombianas al ser habilitadas en nuestro programa:

Como primera medida analizamos la figura 3.2 donde comparamos las curvas para estrellas EB's con igual composición, diferenciandolas por la habilitación en algunas de ellas de las correcciones coulombianas, observamos que aquellas donde se desprecian estas correcciones tienden a presentar propiedades de menor densidad puesto que para masas específicas se les asocia radios más grandes. Esto se explica ya que el efecto de las correcciones coulombianas es apantallar la repulsión electrostática entre electrones, gracias a la distribución no uniforme de núcleos a través de la red[10], logrando que la repulsión sea mas débil que la atracción. Esto indica que la densidad electrónica aumenta, ya que la repulsión electrónica es mas débil que la atracción núcleo-electrón. La evidencia de esto se observa al disminuir los radios estelares.

Otro fenómeno que observamos al analizar la figura 3.3 es que el efecto de las correcciones es mas evidente en las estrellas compuestas por Hierro; esto tiene relación con el hecho de que la presión Coulombiana depende de la potencia a la $2/3$ del número atómico luego si este es más grande, indicando que la estrella esta compuesta por elementos más pesados, dicha presión es mayor aumentando más la densidad. Otro punto importante es que las curvas de Helio y Carbón al considerarse las correcciones Coulombiana ya se distinguen pues como el Carbón es más pesado que el Helio presenta características de cuerpos estelares más densos.

3.2 CON CAMPO MAGNÉTICO ADEMÁS DE LAS CORRECCIONES ELECTROSTÁTICAS

En esta sección miraremos como afecta la presencia de un campo magnético en la estructura interna de una EB más específicamente en su relación masa-radio. El origen de dicho campo no es tema principal del proyecto sino que de acuerdo con las observaciones donde se registran campos con intensidades que oscilan entre $(10^5 - 10^8)G$ [20], supondremos su existencia.

El procedimiento a seguir para encontrar nuestro modelo matemático, parte de la especificación del comportamiento de un electrón sujeto a la interacción de un campo magnético uniforme externo; esto se logra al solucionar la ecuación de Dirac, solucionada en los trabajos de Jhomsom y Lippmann[18]. Teniendo en cuenta lo anterior junto con las condiciones de que la estrella se considera un sistema gas de electrones a temperatura cero, podemos obtener a partir de la teoría de distribución de Fermi-Dirac el comportamiento de dicho gas calculando directamente la presión, densidad de electrones, y otras variables termodinámicas que servirán para caracterizar nuestro sistema de estudio.

3.2.1. ECUACIÓN DE ESTADO

Las características del electrón en un campo magnético externo han sido estudiadas por Landau, Canuto, Chiu, entre otros. La energía de estados del electrón son cuantizados modificando sus propiedades. El espectro energético de un electrón sujeto a la interacción con un campo magnético estático y homogéneo además por simplicidad, consideraremos que dicho campo actúa a lo largo del eje Z, lo tomamos de los trabajos de Johnson y Lippmann 1949[18] donde la dispersión para la energía, esta representada por:

$$E_n = [p^2 c^2 + m^2 c^4 + 2\hbar c e B n]^{1/2} \quad (3.24)$$

Donde $n = j + \frac{1}{2} + s_z$, ($n = 0, 1, \dots$), j es el número cuántico principal de los niveles de Landau, s representa el espín del electrón, e su carga, c es la velocidad de la luz, \hbar la constante de Planck reducida, $p \equiv p_z$ representa el momentum del electron a lo largo del eje z , y m la masa en reposo del electrón.

El principal efecto de la presencia del campo magnético en el comportamiento del electrón radica en la modificación de la densidad de estados[7] y viene dada por:

$$\frac{2}{\hbar^3} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} = \frac{2}{\hbar^2} \sum [2 - \delta_{no}] \int \frac{eB}{(2\pi)^2} dp_z \quad (3.25)$$

δ_{no} es delta de Kronecker que cumple si $n = 0, \delta = 1$ y si $n \neq 0, \delta = 0$.

El modelo a desarrollar tiene como condición que la EB esta aislada y su temperatura es cero (totalmente degenerada) y la presión de degeneración del gas de electrones soporta en cada punto el colapso gravitacional. Con estas condiciones podemos definir usando la relación (49) la dispersión de la energía de Fermi del sistema como:

$$E_f = [p_f^2 c^2 + m^2 c^4 + 2\hbar c e B n]^{1/2} \quad (3.26)$$

donde p_f denota el momentum de Fermi.

El número de densidad electrones se obtiene a partir de la ecuación(2.13,3.26)por:

$$n_e = 2 \frac{\gamma}{(2\pi)^2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right) \zeta(\epsilon, n) \quad (3.27)$$

donde

$$\zeta(\epsilon, n) = \sum [2 - \delta_{no}] \sqrt{\epsilon_f^2 - (1 + 2\gamma n)} \quad (3.28)$$

las variables $\epsilon = E_f/mc^2$ y $\gamma = B/B_c$ son parámetros adimensionales; además la constante $B_c = m^2c^3/e\hbar = 4,414x10^3$

La sumatoria de las expresiones anteriores y siguientes van desde $n = 0$ a $n = n_f$ que se define como:

$$n_f = \frac{\epsilon_f^2 - 1}{2\gamma} \geq n \quad (3.29)$$

Esto se puede ver al analizar la raíz de la expresión (3.28) pues esta debe tener soluciones no complejas, lo que implica que debe ser mayor o igual a cero.

La presión viene dada por:

$$P_e = 2 \frac{\gamma}{4\pi^2} mc^2 \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \Phi(\epsilon_f, n) \quad (3.30)$$

donde

$$\Phi(\epsilon_f, n) = \frac{1}{2} \sum [2 - \delta_{no}] \left[\epsilon_f \sqrt{\epsilon_f^2 - 1(1 + 2\gamma n)} - (1 + 2\gamma n) \ln \left(\frac{\epsilon_f + \sqrt{\epsilon_f^2 - (1 + 2\gamma n)}}{\sqrt{1 + 2\gamma n}} \right) \right] \quad (3.31)$$

Al hacer una expansión de Euler-MacLaurin (*referirse al capítulo sobre generalidades*) de las variables termodinámicas, refiriéndonos a las ecuaciones (3.28, 3.31) podemos ver que de los resultados de esta, al hacer que el parámetro γ (*aquel que depende del campo magnético*) sea cero; las ecuaciones de la expansión recobran la estructura o forma de las ecuaciones sin campo magnético descritas en el capítulo anterior.

Los resultados de la expansión son (*ver apéndice*):

para el número de densidad de electrones:

$$n_e \simeq \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \zeta(x) = \frac{y_e \rho}{m_p} \quad (3.32)$$

donde:

$$\zeta(x) = x^3 + \gamma^2 \frac{1}{4x} + \vartheta(\gamma^4) + \dots \quad (3.33)$$

y las constantes y_e , m_p representan el parámetro de composición definida en el seccion anterior, y la masa del protón.

para la presión de degeneración de electrones:

$$P_e \simeq \frac{1}{24\pi^2} mc^2 \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \Phi(x) \quad (3.34)$$

donde:

$$\Phi(x) = \Phi_0 + \gamma^2 \Phi_B(x) + \vartheta(\gamma^4) \quad (3.35)$$

$$\Phi_0(x) = x\sqrt{x^2+1}(2x^2-3) + 3\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \quad (3.36)$$

$$\Phi_B(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + 2\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \left(1 + \frac{1}{x(x+\sqrt{x^2+1})} \right) \quad (3.37)$$

Vemos que tanto para la densidad de números de electrones y su presión son funciones del parámetro relativista y se incrementan al incrementar el parámetro γ (*campo magnético*).

Las ecuaciones (3.32 a 3.372) serán las que usamos para determinar el sistema de ecuaciones acopladas a solucionar y obtener la relación masa-radio.

Acerca de los parámetros, variaremos el campo magnético de tal forma que $\gamma \leq 1$ ($B \leq 4,4x10^{13}$), respecto a la composición miraremos las soluciones al considerándola uniforme, y analizaremos específicamente estrellas compuestas por ${}^3\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{56}\text{Fe}$ y ${}^{16}\text{O}$.

La presión total será la debida por la degeneración de electrones y la Coulombiana. Para determinar la presión Coulombiana revisamos los fundamentos del capitulo (0) y las ecuaciones (densidad y n_e , n_e con campo) expresándola como:

$$P_c = -\frac{3}{10} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/2} Z^{2/3} e^2 \left[\frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 \zeta(x) \right]^{4/3} \quad (3.38)$$

3.2.2. MODELO MATEMÁTICO

ECUACIONES DE ESTRUCTURA

Al observar los resultados de la sección anterior vemos que las variables termodinámicas están en función del parámetro relativista. La relación entre la densidad y x es compleja como para obtener de esta, el parámetro x en función de la densidad; lo más conveniente es expresar la variación de la presión respecto al radio usando como condición que $P(x)$ de la siguiente forma:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{dx} \frac{dx}{dr} \quad (3.39)$$

De esta relación y de la condición de equilibrio hidrostático podemos expresar la variación del parámetro relativista respecto al radio como:

$$\frac{dx}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \frac{x^3}{\rho_0} \left(\frac{dP}{dx}\right)^{-1} \quad (3.40)$$

El término dP/dx se calcula al derivar la presión tanto de degeneración electrónica y coulombiana por el parámetro x obteniendo:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{24\pi^2} mc^2 \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 \Phi(x) - \frac{3}{10} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/2} Z^{2/3} e^2 \left[\frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 \right]^{4/3} \zeta(x)^{1/3} \zeta(x) \frac{1}{y_e} \quad (3.41)$$

donde:

$$\Phi(x) = \dot{\phi}_0 + \gamma^2 \dot{\phi}_B + \dots \quad (3.42)$$

$$\dot{\phi}_0 = (x^2 + 1)^{-1/2}(2x^4 - 3x) + \sqrt{x^2 + 1}(6x^2 - 3) + 3 \left[\frac{1 + (x^2 + 1)^{-1/2}x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right] \quad (3.43)$$

$$\dot{\phi}_B = \frac{(x^2 + 1)^{-1/2}x^2 - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2} + 2 \left[\frac{1 + (x^2 + 1)^{-1/2}x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right] + \left[\frac{(x + \sqrt{x^2 + 1}) + (x + (x^2 + 1)^{-1/2}x^2)}{x^2(x + \sqrt{x^2 + 1})^2} \right] \quad (3.44)$$

$$\zeta(x) = 3x^2 - \frac{\gamma^2}{4x^2} + \dots \quad (3.45)$$

La ecuación faltante hace referencia a la variación de la masa de la estrella respecto al radio y queda representada por:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \left[\frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \zeta(x) m_p \right] \frac{1}{y_e} \quad (3.46)$$

Las ecuaciones (3.41, 3.46) representa nuestro conjunto de ecuaciones no lineales de primer orden acopladas que solucionaremos caso newtoniano.

REPARAMETRIZACIÓN

Para simplificar un poco la estructura de las ecuaciones, evitar en el programa problemas de valores exagerados debidos a potencias muy grandes de las constantes naturales, es conveniente que reescribamos las ecuaciones.

Para empezar usaremos las siguientes constantes:

$$\ell_\rho = \frac{\hbar}{m_p c} \quad (3.47)$$

que posee unidades de longitud.

$$\rho_\rho = \frac{m_p}{\ell_\rho^3} \quad (3.48)$$

representa una densidad

$$P_o = mc^2 \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 = \frac{mc^2}{\ell_\rho^3} \quad (3.49)$$

$$R_o = \sqrt{\frac{3m_e c^2}{4\pi G m_p \rho_\rho}} \quad (3.50)$$

$$M_o = \rho_\rho \left(\frac{4}{3} \pi R_o^3 \right) \quad (3.51)$$

$$A = \left[\frac{1}{3\pi^2} \zeta(x) \right] \quad (3.52)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (3.53)$$

α representa la estructura fina y tiene un valor de 1/137.

Teniendo en cuenta las constantes anteriores y definiendo las siguientes variables:

$$\bar{r} = \frac{r}{R_o} \quad (3.54)$$

$$\bar{M} = \frac{M}{M_o} \quad (3.55)$$

$$\bar{P} = \frac{P}{P_o} \quad (3.56)$$

El conjunto de ecuaciones que solucionaríamos, reescritas, en función de las constantes y variables anteriores, además de las ecuaciones (3.41, 3.46) son:

$$\rho = \frac{A}{y_e} \rho_\rho \quad (3.57)$$

Para la densidad.

$$\frac{d\bar{P}}{dx} = \frac{1}{24\pi^2} \Phi(x) - \frac{4}{10} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} Z^{1/2} \alpha \zeta(x)^{1/3} \zeta(x) \quad (3.58)$$

Para la variación de la presión respecto a el parámetro x.

$$\frac{dx}{d\bar{r}} = -\frac{\bar{M}}{\bar{r}^2} \frac{A}{y_e} \left(\frac{d\bar{P}}{dx} \right)^{-1} \quad (3.59)$$

y

$$\frac{d\bar{M}}{d\bar{r}} = \frac{3A\bar{r}^2}{y_e} \quad (3.60)$$

La ecuación de equilibrio hidrostático sera luego modificada a la correspondiente para una estrella aislada con simetria esferica (estrella de Schawchild), usando la ecuación de Tollman-Oppenheimer-Volkoff TOV. Que puede escribirse como:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\rho c^2} \right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{Mc^2} \right) \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \quad (3.61)$$

Lo interesante de escribir de esta forma la ecuación de TOV es que ella se compone de la ecuación de equilibrio Newtoniana multiplicada por terminos ya adimensionales luego sencillamente si multiplicamos por estos factores adimensionales nuestra ecuación Newtoniana reparametrizada anexamos en el modelo algunas correcciones debidas a la Relatividad General. Realizando los cambios pertinentes como en el caso Newtoniano, las ecuaciones a resolver serán:

$$\frac{dx}{d\bar{r}} = -\frac{\bar{M}}{\bar{r}^2} \frac{A}{y_e} \left(\frac{d\bar{P}}{dx} \right)^{-1} \left(1 + \frac{P}{\rho c^2} \right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{Mc^2} \right) \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \quad (3.62)$$

$$\frac{d\bar{M}}{d\bar{r}} = \frac{3A\bar{r}^2}{y_e} \quad (3.63)$$

3.2.3. RESULTADOS

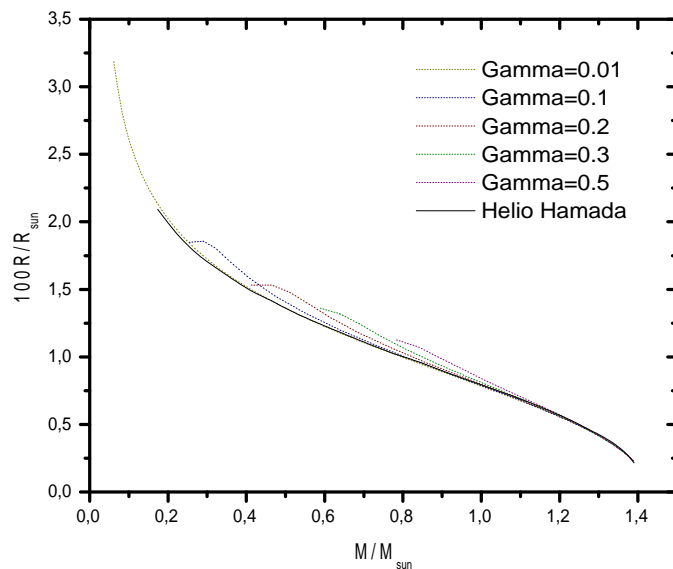


Figura 3.4: Relación masa-radio para estrella compuesta de Helio en presencia de campo magnético interno, se compara con la curva de Hamada-Salpeter.

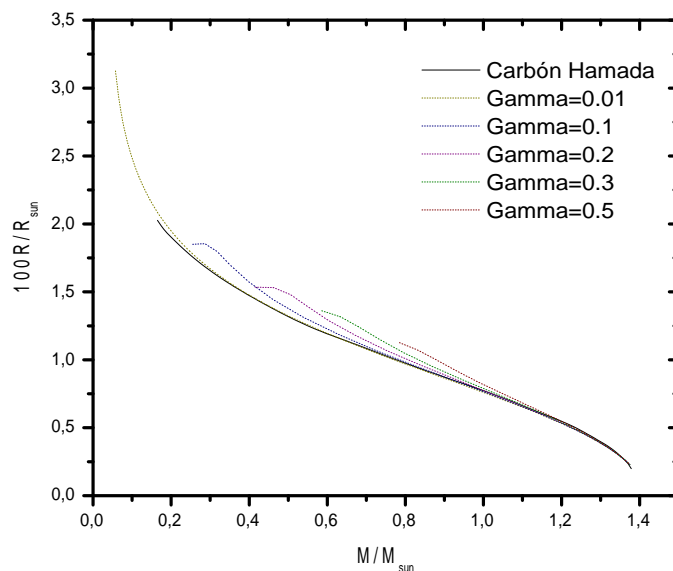


Figura 3.5: Relación masa-radio para estrella compuesta de Carbón en presencia de campo magnético interno, se compara con la curva de Hamada-Salpeter.

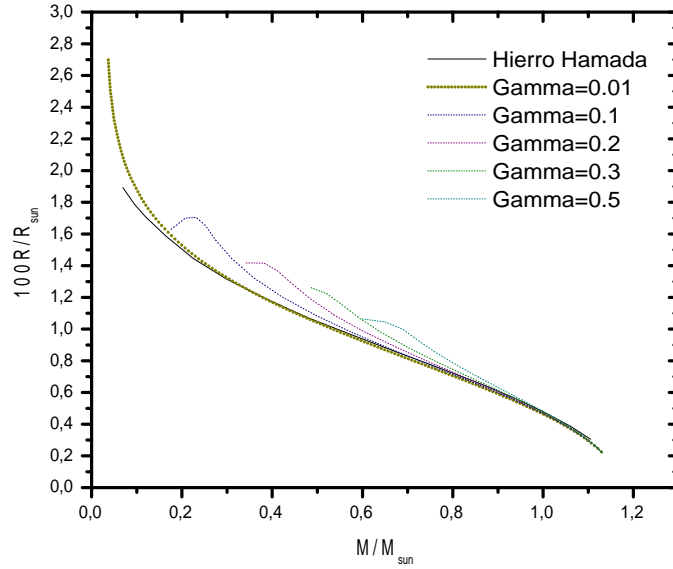


Figura 3.6: Relación masa-radio para estrella compuesta de Hierro en presencia de campo magnético interno, se compara con la curva de Hamada-Salpeter.

3.2.4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE DATOS

Ahora nos concentramos en detectar los efectos que presenta una estrella en presencia de un campo magnético interno descrito anteriormente.

El efecto del campo magnético solo influye sobre el comportamiento del gas de electrones degenerados. De las relaciones deducidas al realizar la expansión Euler-MacLaurin observamos que al aumentar el campo magnético tanto como la presión y densidad de electrones aumentan. Si observamos las figuras 3.4, 3.5 y 3.6 vemos que a medida que aumenta el campo la estrella es mas densa pues su curva respectiva se limita hacia las zona de estrellas cercanas al limite de Chandrasekhar presentando radios mas pequeños.

Al observar las curvas nos percatamos de un limite de masa para cada campo magnético considerando por ejemplo para un $\gamma = 0,3$ compuesta de Carbón las masas menores de $0,5M_{sun}$ no son estables. Esto se debe a que la fuerza de la presión electrónica es mayor que la gravitacional haciendo que estañe. Esto indica que para campos magnéticos mas fuertes solo tiene soluciones cuerpos estelares masivos.

El efecto de la ecuación de TOV no es radical, ya que al compararla con los resultados newtonianos no hay variaciones importantes son evidentes para estrellas mas pesadas con densidades muy altas.

Capítulo 4

CONCLUSIONES

A medida que se modele una enana blanca compuesta por elementos cada vez más pesados, estas tienden a caracterizarse por ser de menor tamaño, implicando que su material está concentrado en volúmenes más pequeños representando cuerpos cada vez más densos.

Las correcciones Coulombicas son importantes para modelar estrellas enanas blancas de bajas densidades, pues gracias a estas se logran diferenciar las relaciones masa-radio generadas por cuerpos de distinta composición pero con una razón de número atómico sobre masa atómica igual obtenidas en los modelos iniciales. Esto se debe gracias a la dependencia directa de estas correcciones con una característica intrínseca de un material específico el "número atómico", logrando predecir que para composiciones más pesadas la presión Coulombica es mayor aumentando la densidad electrónica disminuyendo sus radios.

La expansión obtenida de Euler-MacLaurin para las variables termodinámicas, se caracterizan por el hecho de que si el campo magnético es cero, estas variables recuperan el comportamiento clásico conocido.

La presencia de un campo magnético interno tiene como efectos en la estructura de una enana blanca: primero la cuantización de la energía del gas de electrones degenerados y segundo el aumento de la densidad y la presión electrónica con el aumento de dicho campo.

La corrección debida a la ecuación TOV no es muy importante cuando modelamos estrellas de baja densidad pues al compararla con un modelo donde usamos ecuación de equilibrio Newtoniano no presenta variaciones importantes sino cuando nos acercamos a los límites de densidades centrales altas donde se empieza a evidenciar una variación muy pequeña, intuendo que a densidades altas si debe ser muy crucial.

Del trabajo también podemos de forma indirecta concluir, que debido al gran acercamiento de los resultados con los propuestos por Hamada-Salpeter donde toman en consideración además de la Coulombica, la corrección de Thomas-Fermi, the Exchange energy, The correlation Energy entre otras; estas no son muy importantes cuando modelamos estrellas de densidades relativamente bajas.

Capítulo 5

ANEXOS

5.1 EXPANSIÓN EULER MACLAURIN

Las formulas de integración y de suma de Euler-Maclaurin pueden ser derivadas desde las formulas de Darboux [14] por sustitución de los polinomios de Bernoulli $B_n(t)$.

Diferenciando la identidad:

$$B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1} \quad (5.1)$$

obtenemos:

$$B_n^{n-k}(t+1) - B_n^{n-k}(t) = n(n-1)\dots kt^{k-1} \quad (5.2)$$

Haciendo $t = 0$ obtenemos que $B_n^{n-k}(1) = B_n^{n-k}(0)$. Desde la serie de Maclaurin de $B_n(z)$ con $k > 0$ se observa:

$$B_n^{n-2k-1}(0) = 0 \quad (5.3)$$

$$B_n^{n-2k}(0) = \frac{n!}{(2k)!} B_{2k} \quad (5.4)$$

$$B_n^{n-1}(0) = \frac{1}{2}n! \quad (5.5)$$

$$B_n^{n-k}(t+1) - B_n^{n-k}(t) = n(n-1)\dots kt^{k-1} \quad (5.6)$$

Donde B_n son los números de Bernulli, y sustituyendo estos valores para $B_n^{n-k}(1)$ y $B_n^{n-k}(0)$ en la formula de Darboux obtenemos:

$$(z-a)f'(a) = f(z) - f(a) - \frac{z-a}{2}[f'(z) - f'(a)] + A1 - \frac{(z-a)^{2n+1}}{(2n)!}C1 \quad (5.7)$$

Donde,

$$A1 = \sum \frac{B_{2m}(z-a)^{2m}}{(2m)!} [f^{2m}(z) - f^{2m}(a)], \quad (5.8)$$

y

$$C1 = \int B_{2n}(t) f^{2n+1}[a - (z-a)t] dt. \quad (5.9)$$

La suma se hace para los valores desde $m = 1$ hasta $n = m + 1$ y además la integral se evalua desde 0 hasta 1. A esta expresión se le denominada Formula de integración de Euler-Maclaurin[17]. Para el caso, que $n \rightarrow \infty$ y para una serie infinita puede expresarse que:

$$\sum f(k) = \int f(k) dk - \frac{1}{2}[f(0) + f(n)] + \sum \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{2k-1} - f^{2k-1}] \quad (5.10)$$

La suma se realiza desde 1 hasta ∞ .

al expandir la serie obtenemos:

$$\sum f(k) = \int f(k) dk - \frac{1}{2}[f(0) + f(n)] + \frac{1}{12}[f'(n) - f'(0)] - \frac{1}{720}[f'''(n) - f'''(0)] + \dots \quad (5.11)$$

5.2 EXPANSIÓN DE EULER-MACLAURIN PARA LA DENSIDAD DE ELECTRONES

Deducción de la expansión de Euler-Maclaurin para la densidad del número de electrones:

Al desarrollar la serie de la ecuación (3.27) obtenemos:

$$n_e = \left(\frac{2\gamma}{(2\pi)^2} \right) \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \left\{ (\epsilon_f^2 - 1)^{1/2} + 2 \sum (\epsilon_f - (1 + 2\gamma n)^{1/2}) \right\} \quad (5.12)$$

donde la sumatoria va desde $n=1$ hasta $n = n_f$.

La función a expandir será el segundo término de la sumatoria la cual estará sujeta a la relación (1.8). Si definimos como:

$$f(n) = (\epsilon_f^2 - (1 + 2\gamma n)^{1/2}) \quad (5.13)$$

los términos y derivadas requeridas (respecto al parámetro γ), que exige la expansión son:

$$f(0) = (\epsilon_f^2 - 1)^{1/2} \quad (5.14)$$

$$f(n_f) = 0 \quad (5.15)$$

$$f'(n) = -(\epsilon_f^2 - (1 + 2\gamma n)^{-1/2})\gamma \quad (5.16)$$

$$f'(n_f) = 0 \quad (5.17)$$

$$f'(0) = -(\epsilon_f^2 - 1)^{-1/2}\gamma \quad (5.18)$$

$$f'''(n) = -3(\epsilon_f^2 - (1 + 2\gamma n)^{-5/2})\gamma^3 \quad (5.19)$$

$$f'''(n_f) = 0 \quad (5.20)$$

$$f'''(0) = -3(\epsilon_f^2 - 1)^{-5/2}\gamma^3 \quad (5.21)$$

y la integral requerida es:

$$\int (f(n))dn = \frac{1}{2\gamma}(\epsilon^2 - 1)^{3/2} \quad (5.22)$$

Entonces el termino:

$$\sum (\epsilon_f - (1 + 2\gamma n)^{1/2}) = \frac{1}{2\gamma}(\epsilon^2 - 1)_{n=0}^{3/2} - \frac{1}{2}(\epsilon^2 - 1)_{n=0}^{1/2} + \frac{\gamma}{12}(\epsilon^2 - 1)_{n=0}^{-1/2} + \frac{\gamma^3}{720}3(\epsilon^2 - 1)_{n=0}^{-5/2} \quad (5.23)$$

Con este resultado podemos escribir la densidad del número de electrones como:

$$n_e = \left(\frac{2\gamma}{(2\pi)^2} \right) \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \left\{ (\epsilon_f^2 - 1)^{1/2} + 2 \left[\frac{1}{2\gamma}(\epsilon^2 - 1)_{n=0}^{3/2} - \frac{1}{2}(\epsilon^2 - 1)_{n=0}^{1/2} + A2 \right] \right\} \quad (5.24)$$

$$A2 = \frac{\gamma}{12}(\epsilon^2 - 1)_{n=0}^{-1/2} + \frac{\gamma^3}{720}3(\epsilon^2 - 1)_{n=0}^{-5/2} \quad (5.25)$$

Despues de un poco de algebra obtenemos:

$$n_e = \left[\frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \right] \left\{ x^3 + \gamma^2 \frac{1}{4x} + \vartheta(\gamma^4) + \dots \right\} \quad (5.26)$$

Analogamente podemos obtener a partir de la expansión de Euler-Maclaurin una expresión para la presión electrónica de degeneración.

REFERENCIAS

- [1] M. SCHWARZSCHILD, *Structure and Evolution of the Stars.*, (1958), Princeton.
- [2] D. WINGET. and LIEBERT, (1978), ApJ, 315, L77.
- [3] C.J. HANSEN. *Stellar Interiors: Principal principles structure and evolution.* (1994).
- [4] R.H. FOWLER, (1926), MNARS, 87, 114.
- [5] W.S. ADAMS. *The Spectrum of the Companion of Sirius.*, Pub. Astron. Soc. Pac, 27, 236
- [6] S. CHANDRASEKHAR, (1931), ApJ, 74, 81.
- [7] L.D. LANDAU AND E.M. LIFSHITZ, (1938), *Statistical Mechanics.*, Oxford.
- [8] E.E. SALPETER, (1961), ApJ, 416, 276.
- [9] IN SAENG SUH and G.J. MATHEUWS, (1999), ApJ, 530.
- [10] S.L. SHAPIRO AND S.E. TEUKOLSKY, *Black Holes, White Dwarf and Neutron Star, the physics of compact objects* (1983).
- [11] T. HAMADA AND E.E. SALPETER, (1961), ApJ, 134, 683.
- [12] S. CHANDRASEKHAR, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*(1938).
- [13] (1931), ApJ, 74, 81.
- [14] G. ARFKEN, *In Mathematical Methods for Physicists*, 3rd ed, (1985).
- [15] J.P. OSTRICKER AND F.D. HARTWICK, (1968), Apj 153, 797.
- [16] G. VAUCLAIR, G. FONTAINE AND D. KOESTER, (1997),AyA, 325, 1055.
- [17] E.T. WHITTAKER AND G.N. WATSON, *In a Course in Modern Analysis*, 4th ed, (1990).
- [18] M.H. JHONSON AND B.A. LIPPMANN, (1949), Phys Rev, 76, 828.
- [19] N. CALVET, M. ALCUBIERRE AND T. ORTÍN, VII Escuela "La HechiceraRelatividad, Campos y Astrofísica, (2001).
- [20] A. BELL, S.J. PILKINGTON, *Nature* 217, 29 , (1968).