

UNICIDAD EN LA \mathbb{Z} -GRADUACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE CAMINOS DE LEAVITT

CRISTIAN ANDRES RUIZ ARRIETA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2025

UNICIDAD EN LA \mathbb{Z} -GRADUACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE CAMINOS DE LEAVITT

CRISTIAN ANDRES RUIZ ARRIETA

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director
Héctor Edonis Pinedo Tapia
Doctor en Ciencias

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2025

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	7
1. Preliminares	9
1.1. Definiciones Básicas	9
1.1.1. Preliminares en Teoría de Grupos.	10
1.1.2. Preliminares en Teoría de Anillos	13
1.2. Módulos	27
1.3. Anillos Graduados	31
1.4. Grafos Dirigidos	34
2. Álgebras de Caminos de Leavitt (A.C.L.)	41
3. Implicaciones y Aplicaciones del Teorema de Unicidad de la \mathbb{Z}-graduación.	55
BIBLIOGRAFÍA	57

LISTA DE FIGURAS

	pág.
1. Representación gráfica de un grafo dirigido.	7
1.1. Representación gráfica de un grafo.	35
1.2. Un grafo que posee un emisor infinito.	36
1.3. Un camino.	36
1.4. Un grafo y sus aristas fantasmas.	37
1.5. Representación gráfica del grafo R_n , un vértice con n bucles o pétalos. A estos grafos se les conoce como rosas.	38
1.6. Representación gráfica de un grafo desconexo.	38
1.7. Un grafo con caminos.	39
1.8. Un grafo infinito con caminos infinitos, el cual es cofinal.	40
2.1. Un grafo algo útil.	42
2.2. R_1 es un grafo que solo tiene un vértice y una arista.	44
2.3. Un camino.	45

RESUMEN

TÍTULO: UNICIDAD EN LA \mathbb{Z} -GRADUACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE CAMINOS DE LEAVITT *

AUTOR: CRISTIAN ANDRES RUIZ ARRIETA **

PALABRAS CLAVE: ÁLGEBRA DE CAMINOS DE LEAVITT, GRAFO DIRIGIDO, \mathbb{Z} -GRADUACIÓN, TEOREMA DE UNICIDAD, SIMPLICIDAD.

DESCRIPCIÓN:

El objetivo principal de esta tesis es estudiar la unicidad en la \mathbb{Z} -graduación de las álgebras de caminos de Leavitt. Sea $L_K(E)$ una K -álgebra libre restringida por relaciones definidas sobre un grafo dirigido E . La construcción de estas álgebras se inspira en las relaciones que definen a las C^* -álgebras de grafo y rinde homenaje al trabajo de Leavitt, quien analizó el comportamiento de una familia de K -álgebras estableciendo condiciones de simplicidad para algunas de ellas. Bajo ciertas condiciones, las álgebras de caminos de Leavitt se relacionan con las C^* -álgebras de grafo.

En esta tesis se estudia en detalle la estructura de la \mathbb{Z} -graduación de $L_K(E)$, en la que cada elemento homogéneo de grado n se expresa como una combinación lineal de productos de la forma $\alpha\beta^*$, donde α y β son caminos en E cuya diferencia de longitudes es n . Se establecen diversos lemas técnicos que fundamentan propiedades esenciales de esta graduación y de las subálgebras asociadas.

El resultado central es el Teorema de Unicidad de la \mathbb{Z} -graduación, que afirma que, si $\pi : L_K(E) \rightarrow A$ es un homomorfismo de anillos graduados que satisface $\pi(v) \neq 0$ para cada vértice $v \in E$, entonces π es inyectivo. La demostración se realiza mediante inducción sobre las subálgebras, haciendo uso de diagramas conmutativos y del Lema Corto de los Cinco.

Finalmente, se examinan las implicaciones del teorema, en particular su aplicación en la caracterización de la simplicidad de $L_K(E)$ a través del Teorema de Simplicidad, el cual relaciona condiciones estructurales del grafo E (tales como las condiciones (L) y (K) , hereditariadad, saturación y cofinalidad) con la simplicidad del álgebra.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Doctor en Ciencias.

ABSTRACT

TITLE: UNIQUENESS IN THE \mathbb{Z} -GRADUATION OF LEAVITT PATH ALGEBRAS. *

AUTHOR: CRISTIAN ANDRES RUIZ ARRIETA **

KEYWORDS: LEAVITT PATH ALGEBRA, DIRECTED GRAPH, \mathbb{Z} -GRADUATION, UNIQUENESS THEOREM, SIMPLICITY.

DESCRIPTION:

In this thesis, the principal purpose is to examine the uniqueness in the \mathbb{Z} -graduation of the Leavitt path algebras. Let $L_K(E)$ be a K -free algebra, restrain'd by relations set upon a directed graph E . The construction of these algebras is inspired by the relations that doth define the C^* -graph algebras, and doth pay homage to the work of Leavitt, who did analyse the behaviour of a family of K -algebras, establishing conditions of simplicity for some thereof. Under certain conditions, the Leavitt path algebras do bear relation to the C^* -graph algebras.

Let the structure of the \mathbb{Z} -graduation of $L_K(E)$ be studied in great detail, wherein each homogeneous element of degree n is express'd as a linear combination of products in the form $\alpha\beta^*$, where α and β be paths in E whose difference in lengths is n . Diverse technical lemmas are establish'd which do lay the foundation for the essential properties of this graduation and the associated subalgebras.

Observing the fundamental properties of grading, the central result of this work is the Uniqueness Theorem of the \mathbb{Z} -graduation, which doth affirm that, if $\pi : L_K(E) \rightarrow A$ be a homomorphism of graded rings that doth satisfy $\pi(v) \neq 0$ for every vertex $v \in E$, then verily π is injective. The demonstration is wrought by induction upon the subalgebras, employing commutative diagrams and the Short Five Lemma.

Verily, the implications of this theorem are examin'd, in especial its application to the characterisation of the simplicity of $L_K(E)$ through the Simplicity Theorem, which doth relate the structural conditions of the graph E (such as conditions (L) and (K) , heredity, saturation, and cofinality) with the simplicity of the algebra.

Establishing the broader scope of these findings, the work doth illuminate the correspondence betwixt the algebraic structure of Leavitt path algebras and the conditions impos'd upon the underlying graph, thereby reinforcing the theoretical foundations of the discipline.

Ultimately, this study doth contribute to the deeper understanding of graded algebraic structures, yielding novel insights into their nature and classification.

* Bachelor Thesis

** Faculty of Science. School of Mathematics. Advisor: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Ph.D. in Sciences.

INTRODUCCIÓN

El estudio de las estructuras algebraicas ha sido una de las ramas centrales de las matemáticas desde el siglo XVIII. Hasta nuestros días, se ha formalizado el estudio de entidades como los grupos, anillos, módulos y, finalmente, álgebras. Cada concepto surgió para generalizar las operaciones y relaciones observadas en las matemáticas, proporcionando un marco más amplio para resolver problemas complejos. En particular, las álgebras, que combinan operaciones de suma y multiplicación en un conjunto, han permitido el desarrollo de herramientas algebraicas profundas. La búsqueda de una generalización aún mayor dio lugar al concepto de álgebra libre, donde las relaciones entre los elementos de un conjunto subyacente no imponen restricciones, sino que se expanden para construir estructuras más generales.

Por otra parte, la teoría de grafos ha ganado relevancia en los últimos años. Esta rama se dedica al estudio de estructuras formadas por vértices conectados por aristas. Los grafos han demostrado ser extremadamente útiles en la resolución de problemas en diversas áreas como la informática, la biología, la logística y las matemáticas. Desde su formalización, la teoría de grafos ha contribuido a abordar problemas fundamentales como el Problema de los Puentes de Königsberg y el Problema de los 3 Colores, consolidando su importancia en el panorama matemático.

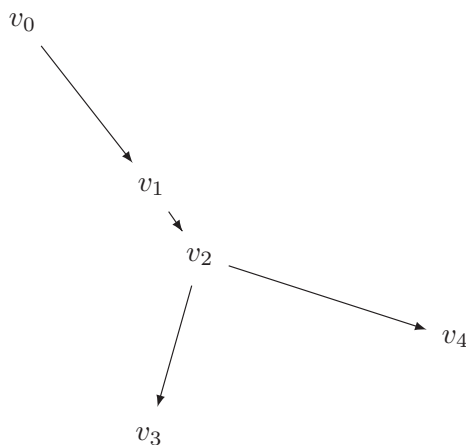


Figura 1: Representación gráfica de un grafo dirigido.

En este trabajo, nos enfocaremos en el estudio de las álgebras de caminos de Leavitt $L_K(E)$, una K -álgebra libre restringida por relaciones definidas sobre un grafo dirigido E .

Estas álgebras fueron introducidas formalmente por Gene Abrams y Aranda Pino en ¹. Su construcción se inspira en las relaciones que definen a las C^* -álgebras de grafo dirigido (ver ²) y rinde homenaje al trabajo de Leavitt en ³, quien analizó el comportamiento de una familia de K -álgebras, estableciendo condiciones de simplicidad para algunas de ellas. Bajo ciertas condiciones, estas álgebras están relacionadas con C^* -álgebras de grafo dirigido.

El estudio se centrará en la \mathbb{Z} -graduación en las álgebras de caminos de Leavitt, enfocándonos en su \mathbb{Z} -graduación canónica. Esto es fundamental para entender el resultado principal que estudiaremos en este trabajo, el Teorema de Unicidad de la \mathbb{Z} -graduación demostrado por Tomforde en ⁴, basado en el Teorema de Unicidad Invariante Bajo Acción de Gauge para C^* -álgebras (ver ²).

La primera sección de este trabajo proporcionará una revisión exhaustiva de los conceptos fundamentales necesarios para comprender el desarrollo posterior. Se introducirán los conceptos de grupos, anillos, módulos, álgebras libres y la \mathbb{Z} -graduación de anillos, sentando así las bases para el estudio de las álgebras de caminos de Leavitt. En la segunda sección, definiremos formalmente lo que es un grafo dirigido, mostrando ejemplos y representaciones gráficas. Luego, nos enfocaremos en las álgebras de caminos de Leavitt, construidas a partir de un álgebra libre asociada a un grafo dirigido, y proporcionaremos ejemplos concretos para ilustrar su aplicación. Este marco permitirá abordar el teorema principal del estudio el cual desarrollaremos en base a la metodología de ⁴. Finalmente, se presentará el resultado principal del artículo y se procederá a su aplicación.

¹ G. Abrams y G. Aranda Pino. "The leavitt path algebra of a graph". En: *Journal of Algebra* 293.2 (2005), págs. 319-334. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2005.07.028.

² I. Raeburn. "*Graph algebras*". Providence, RI: American Mathematical Society, 2005.

³ W. G. Leavitt. "The module type of homomorphic images". En: *Duke Mathematical Journal* 32.2 (1965). DOI: 10.1215/s0012-7094-65-03231-x.

⁴ M. Tomforde. "Uniqueness theorems and ideal structure for Leavitt Path algebras". En: *Journal of Algebra* 318.1 (2007), págs. 270-299. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2007.01.031.

1. Preliminares

En este apartado, presentamos algunos conceptos esenciales de la teoría de grupos, anillos y módulos que nos servirán para introducir las álgebras de caminos de Leavitt, las cuales son el objeto de estudio de esta monografía. Las definiciones y resultados que mostramos a continuación se basan en las fuentes ¹ para la teoría de grupos; ² y ³ para la teoría de anillos y módulos; ⁴ para la definición de álgebras libres asociativas, ⁵ y ⁴ para la teoría de anillos graduados; y finalmente ⁶, ⁷ y ⁴ para la teoría de álgebras de caminos de Leavitt y su unicidad en la \mathbb{Z} -graduación.

1.1. Definiciones Básicas

Definición 1.1.1. (*Diagrama Conmutativo*) Un diagrama de funciones:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow h & \swarrow g & \\ C & & \end{array}$$

se llama conmutativo si $gf = h$ (donde gf denota la composición de g y f). Similarmente, el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

¹ J. B. Fraleigh. "Algebra abstracta: Primer curso". México: Addison-Wesley, 1968.

² T. W. Hungerford. "Algebra". 1st. New York: Rinehart y Winston, 1974.

³ P. A. Grillet. "Abstract algebra". New York: Springer, 2011.

⁴ M. R. Bremner, I. R. Hentzel y L. A. Peresi. "Dimension formulas for the free nonassociative algebra". En: *Communications in Algebra* 33.11 (2005), págs. 4063-4081. DOI: 10.1080/00927870500261389.

⁵ C. Nastasescu y V. F. Oystaeyen. "Methods of graded rings". New York: Springer, 2004.

⁶ G. Aranda Pino, F. Perera Domènech y M. Siles Molina. "Graph Algebras: Bridging the Gap between Analysis and Algebra". Málaga: SPICUM, 2007.

⁷ G. Abrams, P. Ara y M. Siles. "Leavitt Path Algebras". Vol. 2191. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2017.

es conmutativo si $kh = gf$. Frecuentemente se tratan con diagramas más complicados, compuestos de varios triángulos y cuadrados como los de arriba. Tal diagrama es llamado conmutativo si todo triángulo y cuadrado en él es conmutativo.

1.1.1. Preliminares en Teoría de Grupos.

Definición 1.1.2. Un grupo G es un conjunto no vacío, junto con una operación binaria en G (que denotaremos por yuxtaposición), tal que se satisfacen los siguientes axiomas:

- (i) La operación binaria es asociativa. Para todos $a, b, c \in G$, $(ab)c = a(bc)$.
- (ii) Existe un elemento $e \in G$ tal que $ex = xe = x$ para todo $x \in G$.
- (iii) Para cada $b \in G$ existe un elemento $b' \in G$ con la propiedad de que $b'b = bb' = e$.

Además llamaremos a un grupo G conmutativo o abeliano si cumple que:

- (iv) $ab = ba$ para todos $a, b \in G$.

Ahora, si $H \subseteq G$, es un grupo bajo la misma operación binaria que G diremos que H es un subgrupo de G . Sea $b \in G$. La clase lateral izquierda bH es el conjunto $\{bh : h \in H\}$. La clase lateral derecha Hb se define de manera análoga.

Observación 1.1.3. Es importante notar que:

- El elemento e en (ii) es único y se denomina elemento neutro o identidad del grupo.
- El elemento b' en (iii) es único para cada b y se denomina elemento inverso de b .

La unicidad de estos elementos se puede demostrar a partir de los axiomas del grupo.

Ejemplo 1.1.4. El conjunto de los enteros \mathbb{Z} con la suma usual de los enteros es un grupo conmutativo.

El ejemplo anterior, aunque trivial, proporciona uno de los grupos más importantes con los que trabajaremos.

Definición 1.1.5. (Homomorfismo de Grupos) Una función ϕ de un grupo G en un grupo G' es un homomorfismo si

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

para todos los elementos a y b en G . Diremos que ϕ es un monomorfismo (epimorfismo, isomorfismo) si ϕ es inyectiva (sobreyectiva, biyectiva). En caso de ϕ sea un isomorfismo notaremos $G \cong G'$. Un homomorfismo $\phi : G \rightarrow G$ es llamado un endomorfismo de G , y un isomorfismo $\phi : G \rightarrow G$ es llamado un automorfismo de G .

Definición 1.1.6. Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos.

- El núcleo de f , denotado por $\ker(f)$, es el conjunto definido como $\{a \in G : f(a) = e\}$, donde e es el elemento identidad del grupo H .
- Si A es un subconjunto de G , entonces $f(A) = \{b \in H : b = f(a) \text{ para algún } a \in A\}$ es la imagen de A .
- La imagen de f es el conjunto $f(G)$, y la denotaremos como $\text{Im } f$.
- Si B es un subconjunto de H , la imagen inversa de B es el conjunto $f^{-1}(B) = \{a \in G : f(a) \in B\}$.

El siguiente resultado sera útil mas adelante

Proposición 1.1.7. Sean $\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una familia de grupos, donde Γ es un conjunto de índices. Definimos el producto directo externo $\prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ como el conjunto de todas las tuplas $(g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, donde $g_\gamma \in G_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Para $(a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, (b_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$, el producto componente a componente se define como $(a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} (b_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} = (a_\gamma b_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$. Bajo esta operación binaria, $\prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ es un grupo.

Demostración. Verificamos que $\prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ satisface los axiomas de grupo:

- Cerradura: Sean $(a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, (b_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$. Entonces, $(a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} (b_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} = (a_\gamma b_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, dado que $a_\gamma b_\gamma \in G_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$, por la propiedad de cerradura en cada G_γ . Por lo tanto, se tiene que $(a_\gamma b_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$.
- Asociatividad: Sean $(a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, (b_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, (c_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$. Entonces:

$$((a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} (b_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}) (c_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} = ((a_\gamma b_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} (c_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}) = ((a_\gamma b_\gamma) c_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$$

Por la asociatividad en cada G_γ , tenemos que $(a_\gamma (b_\gamma c_\gamma))_{\gamma \in \Gamma} = (a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} ((b_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} (c_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$. Por lo tanto, la operación es asociativa.

- **Elemento identidad:** Sea $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, donde e_γ es el elemento identidad de cada G_γ . Entonces, para cualquier $(a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$, tenemos:

$$(a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} (e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} = (a_\gamma e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} = (a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$$

y

$$(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} = (e_\gamma a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} = (a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}.$$

Por lo tanto, $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ es el elemento identidad.

- **Inverso:** Para cada $(a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$, sea $(a_\gamma^{-1})_{\gamma \in \Gamma}$ el inverso de $(a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, donde a_γ^{-1} es el inverso de a_γ en G_γ . Entonces:

$$(a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma^{-1})_{\gamma \in \Gamma} = (a_\gamma a_\gamma^{-1})_{\gamma \in \Gamma} = (e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}.$$

De igual forma:

$$(a_\gamma^{-1})_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} = (e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}.$$

Por lo tanto, $(a_\gamma^{-1})_{\gamma \in \Gamma}$ es el inverso de $(a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$.

Así concluimos que $\prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ es un grupo. □

Observación 1.1.8. En el caso de que G sea un grupo abeliano, usaremos la notación aditiva. Nos referiremos a $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ como la suma directa externa de los grupos G_γ , la cual consiste en el subgrupo del producto directo $\prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ formado por los elementos $(g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ con soporte finito, es decir, donde g_γ es el elemento identidad de G_γ para todos excepto un número finito de $\gamma \in \Gamma$.

En efecto, veamos que $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ es un subgrupo de $\prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$. Para ello, basta verificar lo siguiente:

- **Cerradura:** Sean $(g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, (a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$. Entonces, $(g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} + (a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} = (g_\gamma + a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$. Dado que solo un número finito de elementos de $(g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ y $(a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ son distintos de la identidad, lo mismo ocurre para $(g_\gamma + a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$. Por tanto, $(g_\gamma + a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$.
- **Inverso:** Para cada $(g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$, considere $(-g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$. Como $-0_\gamma = 0_\gamma$, donde 0_γ es el elemento identidad de G_γ , entonces $(-g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ tiene soporte finito y, por tanto, $(-g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$. Además, $(g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} + (-g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} = (g_\gamma - g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} = (0_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$. Por tanto, $(-g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ es el inverso de $(g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$.

Así, $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ es un subgrupo de $\prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$.

Definición 1.1.9. Sea G un grupo abeliano con subgrupos $\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, donde Γ es un conjunto de índices. Decimos que G es la suma directa interna de los subgrupos G_γ si la función

$$\phi : \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma \rightarrow G$$

dada por

$$\phi((g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}) = \sum_{\gamma \in \Gamma} g_\gamma$$

es un isomorfismo de grupos.

Nótese que la función ϕ está bien definida, ya que, por la condición de soporte finito, el conjunto de índices γ para los cuales $g_\gamma \neq 0_\gamma$ es finito. Además, ϕ es un homomorfismo de grupos, inyectivo y sobreyectivo, lo que la convierte en un isomorfismo.

Corolario 1.1.10. Sea G un grupo abeliano y $\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una familia de subgrupos de G . Si G es la suma directa interna de los subgrupos G_γ con $\gamma \in \Gamma$, entonces cada elemento $g \in G$ se puede escribir de manera única como

$$g = \sum_{\gamma \in \Gamma} g_\gamma,$$

donde $g_\gamma \in G_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$ y $g_\gamma = 0_\gamma$ para todos excepto un número finito de $\gamma \in \Gamma$.

1.1.2. Preliminares en Teoría de Anillos

Definición 1.1.11. Un anillo $(R, +, \cdot)$ es una tripla, donde R es un conjunto junto con dos operaciones binarias, llamadas suma y multiplicación, denotadas por $+$ y \cdot , respectivamente. Para la multiplicación, utilizaremos la yuxtaposición como notación. Estas operaciones están definidas en R y satisfacen los siguientes axiomas:

- (i) $(R, +)$ es un grupo abeliano.
- (ii) La multiplicación \cdot es asociativa.
- (iii) Para todos $a, b, c \in R$, se cumple la ley distributiva izquierda $a(b + c) = ab + ac$ y la ley distributiva derecha $(a + b)c = ac + bc$.

Además, un anillo R se dice:

- *Conmutativo, si la multiplicación es conmutativa.*
- *Unitario o con identidad multiplicativa 1, si existe $1 \in R$ tal que $1x = x1 = x$, para todo $x \in R$. Un elemento $x \in R$ se llama unidad si existe $x' \in R$ tal que $xx' = 1$.*
- *Anillo con división, si todo elemento distinto de 0 en R es una unidad.*
- *Cuerpo, si es conmutativo y con división.*

Sea $D \subseteq R$, diremos que $(D, +, \cdot)$ es un subanillo de R si es un anillo bajo las mismas operaciones que R .

Ejemplo 1.1.12. *A continuación, se presentan algunos ejemplos:*

- \mathbb{R} es un cuerpo con la suma y el producto usuales.
- \mathbb{Z} es un anillo conmutativo con la suma y el producto usuales de los enteros y además subanillo de \mathbb{R} .
- $\mathbb{R}[x]$ el conjunto de polinomios reales es un anillo con la suma y producto usual de polinomios.
- $x\mathbb{R}[x]$ el conjunto de polinomios cuyo primer coeficiente es 0, es un subanillo de $\mathbb{R}[x]$.
- \mathbb{Z}_n el conjunto de los enteros modulo n , con n natural mayor que 1, es un anillo bajo la suma y producto modulo n .

Ejemplo 1.1.13. *Sea K un anillo. El conjunto de los polinomios de Laurent con coeficientes en K , denotado por $K[x, x^{-1}] = \{\sum_{l \in L} k_l x^l : L \subset \mathbb{Z} \text{ finito y } k_l \in K\}$, es un anillo bajo la suma y el producto usual de polinomios.*

Sean $\sum_{l \in L} k_l x^l$ y $\sum_{l' \in L'} k'_{l'} x^{l'}$ dos polinomios de Laurent en $K[x, x^{-1}]$. Entonces, la suma de estos polinomios está dada por

$$\sum_{l \in L} k_l x^l + \sum_{l' \in L'} k'_{l'} x^{l'} = \sum_{l \in L \cup L'} (k_l + k'_{l'}) x^l,$$

donde $k_l = 0$ si $l \notin L$ y $k'_{l'} = 0$ si $l' \notin L'$.

El producto de estos polinomios está dado por

$$\left(\sum_{l \in L} k_l x^l \right) \left(\sum_{l' \in L'} k'_{l'} x^{l'} \right) = \sum_{l_1 \in L} \sum_{l_2 \in L'} (k_{l_1} k'_{l_2}) x^{l_1 + l_2}.$$

Ejemplo 1.1.14. Sea R un anillo con identidad. El conjunto $M_n(R)$, que consiste en todas las matrices de tamaño $n \times n$ con coeficientes en R , es un anillo con la suma y el producto usual de matrices. Denotaremos por $E_{i,j}$ a las matrices en las que el coeficiente en la posición (i, j) es 1_R y los demás son 0. A estas matrices las llamaremos unidades matriciales.

Por ejemplo, para $M_3(\mathbb{R})$, las unidades matriciales son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 E_{1,1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{1,2} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{1,3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 E_{2,1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{2,2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{2,3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 E_{3,1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{3,2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & E_{3,3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Además, una propiedad importante de las matrices en $M_n(K)$ es que cualquier matriz $(a_{i,j}) \in M_n(K)$ puede expresarse como una combinación lineal de las unidades matriciales. Es decir, $(a_{i,j}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} E_{i,j}$.

Volviendo a nuestro ejemplo anterior, tenemos que la matriz se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6E_{1,3} + 2E_{2,2} + 1E_{2,3} + 2E_{3,3}.$$

Además, sean $E_{i,j}$ y $E_{k,l}$ unidades matriciales, su producto está dado por:

$$E_{i,j} E_{k,l} = \begin{cases} E_{i,l} & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Proposición 1.1.15. Sea R un anillo. Denotamos por $M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(R)$ el conjunto de matrices con a lo sumo un número finito de entradas en R distintas de 0. Es decir, $(a_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \in M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(R)$ si el conjunto $\{(i, j) \mid a_{i,j} \neq 0\}$ es finito. Definimos la suma y multiplicación para estas matrices de la siguiente forma.

Sean $(a_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}, (b_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \in M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(R)$, entonces:

$$(a_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} + (b_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$$

La multiplicación de matrices se define como:

$$(a_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(b_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{i,k} b_{k,j} \right)_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}.$$

Entonces $M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ es un anillo con las operaciones definidas anteriormente.

Demostración. Para $(a_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \in M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, por definición, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $a_{i,j} = 0$ para todo $i, j \geq n_0$. Análogamente, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ con la misma propiedad para $(b_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$. Definamos $n = \max(n_0, n_1)$.

Veamos que las operaciones entre $(a_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ y $(b_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ son equivalentes a operar con las submatrices $(a_{i,j})_{n \times n}$ y $(b_{i,j})_{n \times n}$, completando con ceros las entradas restantes:

$$\begin{aligned} (a_{i,j})_{n \times n} + (b_{i,j})_{n \times n} &= (a_{i,j} + b_{i,j})_{n \times n} = (c_{i,j})_{n \times n} \\ (a_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} + (b_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} &= (a_{i,j} + b_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} = (d_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \end{aligned}$$

donde $d_{i,j} = c_{i,j}$ para $1 \leq i, j \leq n$ y 0 en caso contrario, dado que $a_{i,j}, b_{i,j}$ serían ambos 0 en dicho caso por cómo se definió el n .

Ahora veamos el producto:

$$\begin{aligned} (a_{i,j})_{n \times n}(b_{i,j})_{n \times n} &= (c_{i,j})_{n \times n} = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)_{n \times n} \\ (a_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(b_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} &= (d_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{i,k} b_{k,j} \right)_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Dado que si $k > n$, $b_{k,j} = 0$, entonces

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

Por lo tanto, se tiene que $d_{i,j} = c_{i,j}$ para $1 \leq i, j \leq n$ y $d_{i,j} = 0$ en caso contrario, dado que $a_{i,j}, b_{i,j}$ serían ambos cero en dicho caso, por como se definió el n . De manera similar, se tiene lo mismo para $(b_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(a_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$.

Con esto se sigue de forma análoga a la demostración de que $M_n(R)$ es un anillo con la suma y producto usual de matrices, con lo cual $M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(R)$ es un anillo. \square

Ejemplo 1.1.16.

- Para $n > 1$, $M_n(\mathbb{R})$ es un anillo no conmutativo con la suma y el producto usuales de matrices.
- $D_n(\mathbb{R}) = \{(a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R}) \mid a_{i,j} = 0 \text{ para todo } i \neq j\}$ es un subanillo de $M_n(\mathbb{R})$ conmutativo con división.
- $M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(\mathbb{R})$ es un anillo no conmutativo sin identidad. Esto se debe a que el elemento identidad, de existir, ha de ser único. Si se supone que existe una identidad para $M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(\mathbb{R})$, por la forma en que están definidas sus operaciones, su submatriz de tamaño $n_0 \times n_0$ ha de comportarse como la unidad para $M_{n_0 \times n_0}(\mathbb{R})$ para cierto n_0 . Sin embargo, su submatriz de tamaño $(n_0 + 1) \times (n_0 + 1)$ también ha de ser unidad para $M_{(n_0+1) \times (n_0+1)}(\mathbb{R})$. Como sabemos, las unidades en cada uno de estos anillos son distintas, por lo que no puede existir una unidad general para $M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(\mathbb{R})$.

Definición 1.1.17. Sea R un anillo. Se dice que:

- Si $e, b \neq 0 \in R$ son tales que $eb = 0$, entonces llamaremos a e y b divisores de 0. En particular, e es un divisor a la izquierda de 0 y b es un divisor a la derecha de 0.
- R es un dominio entero si es conmutativo, con unidad, y no contiene divisores de 0.

Definición 1.1.18. Un subgrupo aditivo $(I, +)$ de un anillo R , que satisface $rI \subseteq I$ y $Ir \subseteq I$ para todo $r \in R$, es un ideal (o ideal bilateral) de R . Si I es un ideal de un anillo R , entonces el conjunto de las clases laterales $r + I$, bajo las operaciones inducidas, forma el anillo cociente, el cual se denota por R/I . Estas operaciones están bien definidas dado que I es un ideal, y para ellas se tiene lo siguiente:

- $(r + I) + (s + I) = (r + s) + I$, para $r, s \in R$.
- $(r + I)(s + I) = (rs) + I$, para $r, s \in R$.

En R/I se cumplen las siguientes propiedades:

- $r + I = 0 + I$ si y solo si $r \in I$, para $r \in R$.
- $r + I = s + I$ si y solo si $r - s \in I$, para $r, s \in R$.
- El elemento identidad, en caso de existir, es la clase lateral $1 + I$, donde 1 es el elemento neutro multiplicativo de R .

Ejemplo 1.1.19. El conjunto $n\mathbb{Z} = \{nz : z \in \mathbb{Z}\}$, con $n \in \mathbb{N}$ es un subgrupo aditivo del anillo \mathbb{Z} y es un ideal para este.

Ejemplo 1.1.20. Sea

$$I = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^k \mid a_0 = 0, a_1 \in \mathbb{Z}, \text{ y } a_k \in \mathbb{R}, 2 \leq k \leq n \right\},$$

entonces I es un ideal de $x\mathbb{R}[x]$.

Demostración. Es fácil ver que I es un grupo con la suma de polinomios. Sea $p \in x\mathbb{R}[x]$, entonces p es de la forma $p = \sum_{k=1}^n a_k x^k$ con $a_k \in \mathbb{R}$, y sea $e \in I$, entonces $e = \sum_{k=1}^m b_k x^k$ con $b_1 \in \mathbb{Z}$ y $b_k \in \mathbb{R}$ para $1 \leq k \leq m$. Observe que si $m < n$, podemos representar e como $e = \sum_{k=1}^n b_k x^k$ con $b_k = 0$ cuando $k > m$; análogamente para p con m cuando $n < m$. Así, el producto pe se puede expresar como

$$pe = \left(\sum_{k=1}^n a_k x^k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k x^k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_k b_j x^{j+k}.$$

Note que para $1 \leq j, k \leq n$, se tiene que $j + k \geq 2$, lo cual implica que el término correspondiente al coeficiente de x^1 es cero, y como $0 \in \mathbb{Z}$, entonces $pe \in I$. De manera análoga, se puede demostrar que $ep \in I$. Con esto concluimos que I es un ideal de $x\mathbb{R}[x]$. \square

Observación 1.1.21. Sea R un anillo y $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de ideales de R , donde Λ es un conjunto de índices. Entonces, la intersección $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ es un ideal de R .

Definición 1.1.22. Sea R un anillo, y sean S y T subanillos de R . Definimos

$$S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}.$$

Definición 1.1.23. Sean r_1, r_2, \dots, r_n elementos de un anillo R . Decimos que los r_i son ortogonales si se cumple que $r_i r_j = 0$ para todo $i \neq j$.

Ejemplo 1.1.24. En el anillo \mathbb{Z}_{16} , los elementos 4, 8 y 12 son ortogonales.

Definición 1.1.25. Un anillo R se dice que es un anillo con involución si existe una aplicación $*$: $R \rightarrow R$ tal que para todo $a, b \in R$, se cumple que:

- $(a^*)^* = a$,

- $(a + b)^* = a^* + b^*$,
- $(ab)^* = b^*a^*$.

Ejemplo 1.1.26. Sea \mathbb{C} el conjunto de los números complejos con la suma y el producto usuales. Es un anillo y, además, tiene una involución dada por $*$: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $(a + bi)^* = a - bi$. Verifica las condiciones de la Definición 1.1.25. En efecto, sean $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$, entonces:

- $(a+bi+c+di)^* = (a+c+(b+d)i)^* = a+c-(b+d)i = a+c-bi-di = (a-bi)+(c-di) = (a+bi)^* + (c+di)^*$
- $((a+bi)(c+di))^* = (ac-bd+(ad+bc)i)^* = ac-bd-(ad+bc)i = (a-bi)(c-di) = (a+bi)^*(c+di)^*$
- $((a+bi)^*)^* = (a-bi)^* = a+bi$

Por lo tanto, \mathbb{C} con la conjugación compleja como involución satisface las propiedades de un anillo con involución.

Ejemplo 1.1.27. Sea R un anillo. El anillo $M_n(R)$ tiene una involución. En efecto, sea $A \in M_n(R)$. Entonces, $A^* = A^T$, donde A^T representa la matriz transpuesta de A , es una involución en $M_n(R)$.

Definición 1.1.28. (Homomorfismo de Anillos) Una función ϕ de un anillo R en un anillo R' es un homomorfismo (isomorfismo si es biyectiva) si

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b) \text{ y } \phi(ab) = \phi(a)\phi(b).$$

Observación 1.1.29. Si R es un anillo con involución, dicha involución es un antihomomorfismo de anillos de R en R .

Proposición 1.1.30. Sea $\phi : R \rightarrow S$ un homomorfismo de anillos. Entonces, ϕ es inyectiva si y solo si $\ker(\phi) = \{0\}$.

Demostración. Primero veamos que $\phi(0) = 0$. Notemos que $0 = 0 + 0$, y por tanto $\phi(0) = \phi(0+0) = \phi(0)+\phi(0)$ por definición de homomorfismo. Entonces, sumando $-\phi(0)$ a ambos lados de la igualdad, tenemos que:

$$\phi(0) - \phi(0) = \phi(0) + \phi(0) - \phi(0)$$

de ahí que $\phi(0) = 0$.

Ahora, supongamos que ϕ es inyectiva y que existe $a \neq 0 \in \ker(\phi)$. Entonces, por definición de \ker , $\phi(a) = 0$, pero a su vez, como mostramos anteriormente, $\phi(0) = 0$, lo cual contradice la hipótesis de inyectividad. Por lo tanto, $\ker(\phi) = \{0\}$.

Ahora, sea $x \in R$, tenemos que

$$\phi(0) = \phi(x - x) = \phi(x) + \phi(-x),$$

así, por definición, tenemos que $-\phi(x) = \phi(-x)$.

Supongamos que $\ker(\phi) = \{0\}$ y consideremos $x, y \in R$ tales que $\phi(x) = \phi(y)$. Entonces,

$$0 = \phi(x) - \phi(y) = \phi(x - y),$$

por lo que $x - y \in \ker(\phi)$. Así, $x - y = 0$, lo que implica que $x = y$. Esto demuestra que ϕ es inyectiva. \square

Definición 1.1.31. Sea R un anillo y $S \subseteq R$. Denotaremos por $\langle S \rangle$ al ideal I más pequeño tal que $S \subseteq I$, es decir,

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{I \subseteq R \\ I \text{ ideal}}} I,$$

es el ideal generado por el conjunto S .

Observación 1.1.32. Sea R un anillo y $S \subseteq R$. Entonces,

$$\bigoplus_{s \in S} sR = \left\{ \sum_{i=1}^n s_i r_i \mid s_i \in S, r_i \in R \right\} \subseteq \langle S \rangle.$$

Si R es conmutativo, se cumple que $\bigoplus_{s \in S} sR = \langle S \rangle$.

Proposición 1.1.33. Sea $\phi : R \rightarrow S$ un homomorfismo de anillos. Entonces, $\ker(\phi) = \{x \in R \mid \phi(x) = 0\}$ es un ideal de R .

Demostración. Es fácil ver que $\ker(\phi)$ es un subanillo de R . Veamos que si $r \in R$, entonces $r \ker(\phi) \subseteq \ker(\phi)$. Sea $i \in \ker(\phi)$. Entonces, $\phi(ri) = \phi(r)\phi(i) = \phi(r) \cdot 0 = 0$. Por tanto, por definición de núcleo, $ri \in \ker(\phi)$. De ahí que $r \ker(\phi) \subseteq \ker(\phi)$. Análogamente, $\ker(\phi)r \subseteq \ker(\phi)$. Así, $\ker(\phi)$ es un ideal de R . \square

Ejemplo 1.1.34. Definamos el homomorfismo de anillos $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ como $\phi(x) = x + n\mathbb{Z}$. Note que $\ker(\phi)$ es isomorfo a \mathbb{Z}_n , donde n es un número natural mayor que 1.

Lema 1.1.35. Sea R un anillo y $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subconjuntos de R , es decir, $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_n \subseteq \dots \subseteq R$ y $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = R$. Si $\pi : R \rightarrow A$ es un homomorfismo de anillos tal que la restricción $\pi|_{F_n} : F_n \rightarrow A$ es inyectiva para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces π es inyectiva.

Demostración. Supongamos que π no es inyectiva. Entonces, existen $r_1, r_2 \in R$ tal que $\pi(r_1) = \pi(r_2)$ y $r_1 \neq r_2$. Dado que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de subconjuntos de R , existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $r_1, r_2 \in F_m$. Por hipótesis $\pi|_{F_m}$ es inyectiva, lo que implica que $\pi(r_1) \neq \pi(r_2)$, una contradicción. Por lo tanto π es inyectiva \square

Definición 1.1.36. Un anillo $R \neq 0$ con identidad es simple si todo ideal I de R es igual a 0 o a R .

Proposición 1.1.37. Si D es un anillo con división, D es simple.

Demostración. Supongamos, por contradicción, que D no es simple. Entonces existe un ideal bilateral I tal que $I \neq 0$ y $I \neq D$. Por tanto, existe $d \neq 0 \in D$ tal que $d \notin I$. Como I es un ideal de D , se tiene que $dI = I$. Ahora bien, como I es un ideal no nulo de un anillo con división, para todo $i \neq 0 \in I$, existe $i^{-1} \in D$ tal que $i^{-1}i = 1_D$. Esto implica que $1_D \in I$.

Consecuentemente, dado que $d1_D = d$, se concluye que $d \in I$, lo cual contradice nuestra suposición inicial de que $d \notin I$. Una contradicción, por lo tanto, concluimos que D es simple. \square

A continuación, presentaremos un ejemplo de un anillo simple que no es un anillo con división. Para ello, primero necesitaremos establecer algunos resultados previos.

Proposición 1.1.38. Cualquier ideal bilateral de $M_n(R)$ tiene la forma $M_n(I)$ para algún único ideal bilateral I de R .

Demostración. Sea I un ideal de R , veamos que $M_n(I)$, el anillo de matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en I , es un ideal de $M_n(R)$. Sea $x \in M_n(R)$ y $y \in M_n(I)$, con

$$x = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} E_{i,j} \right) \quad \text{y} \quad y = \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{k,l} E_{k,l} \right),$$

donde $a_{i,j} \in R$ y $b_{k,l} \in I$. Tenemos que

$$xy = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} E_{i,j} \right) \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{k,l} E_{k,l} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,l} \right) E_{i,l}.$$

Como I es un ideal, se tiene que $a_{i,j}b_{j,l} \in I$, y como I es un subanillo, $\sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,l} \in I$. Por lo tanto, $\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,l}\right) E_{i,l} \in M_n(I)$, de donde se concluye que

$$xy = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,l} \right) E_{i,l} \in M_n(I).$$

Por tanto, $M_n(I)$ es un ideal de $M_n(R)$.

Ahora, sea J un ideal de $M_n(R)$. Veamos que $J = M_n(I)$ para algún ideal I de R . Sea I el conjunto de las entradas $(1, 1)$ de las matrices en J , esto es:

$$I = \{m_{1,1} \mid (m_{i,j})_{n \times n} \in J\}.$$

Veamos que para cualquier $r \in R$, se tiene que $rI \subseteq I$. Sea $a \in I$; por definición de I , existe una matriz $(a_{i,j})_{n \times n} \in J$ tal que $a_{1,1} = a$. Defina la matriz $(r_{i,j})_{n \times n}$ tal que $r_{1,1} = r$ y 0 en las demás componentes,

$$r_{i,j} = \begin{bmatrix} r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

como J es un ideal, se tiene que

$$(r_{i,j})_{n \times n} (a_{i,j})_{n \times n} = \begin{bmatrix} ra & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \in J.$$

Por lo tanto, $ra \in I$, así I es un ideal.

Ahora, demostraremos que $J = M_n(I)$. Dado que

$$E_{i,j}AE_{k,l} = E_{i,j} \begin{bmatrix} & & & \overset{l}{a_{1,k}} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \overset{l}{a_{2,k}} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \overset{l}{a_{j,k}} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \overset{l}{a_{n-1,k}} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \overset{l}{a_{n,k}} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \overset{l}{i} \begin{bmatrix} & & & \overset{l}{a_{j,k}} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \overset{l}{a_{j,k}} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \overset{l}{a_{j,k}} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \overset{l}{a_{j,k}} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} = a_{j,k}E_{i,l}$$

para toda $A = (a_{i,j}) \in M_n(R)$. Si $A \in J$, entonces, dado que J es un ideal, $a_{i,j}E_{1,1} = E_{1,i}AE_{j,1} \in J$ y, por consiguiente, $a_{i,j} \in I$ para todo i, j ; de ahí que $A \in M_n(I)$ y, por lo tanto, $J \subseteq M_n(I)$. Ahora, si $r \in I$, entonces $r = c_{1,1}$ para alguna matriz $C = (c_{i,j})_{n \times n} \in J$, y $rE_{i,j} = E_{i,1}CE_{1,j} \in J$ para todo i, j . Sea $A = (a_{i,j}) \in M_n(I)$. Haciendo uso del proceso visto anteriormente para cada entrada, y dado que J es un anillo, tenemos que

$$A = \sum_{i,j} a_{i,j}E_{i,j} \in J,$$

así $M_n(I) \subseteq J$ y concluimos que $J = M_n(I)$. □

Corolario 1.1.39. Si D es un anillo con división, entonces $M_n(D)$ es simple.

Demostración. Sea J un ideal de $M_n(D)$ tal que $J \neq 0$ y $J \neq M_n(D)$. Por la Proposición 1.1.38, existe un ideal I de D tal que $J = M_n(I)$. Como I es un ideal de D y D es un anillo con división, por la Proposición 1.1.37 se sigue que D es simple. Así, $I = 0$ o $I = D$, lo que implica que $J = M_n(0) = 0$ o $J = M_n(D)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $M_n(D)$ es simple. □

Definición 1.1.40. Un elemento r en un anillo R se llama idempotente si $r^2 = r$. Además, diremos que un anillo R es idempotente si $R^2 = R$; es decir, para todo $x \in R$ podemos escribirlo de la forma $x = \sum_{k=1}^n a_k b_k$, para algunos $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in R$.

Observación 1.1.41. Todo anillo con identidad es idempotente.

Ejemplo 1.1.42. El anillo \mathbb{Z}_6 posee un elemento idempotente que es 3.

El siguiente ejemplo muestra que un anillo con un idempotente no necesariamente tiene identidad, demostrando así que no es cierta la recíproca de la Observación 1.1.41.

Ejemplo 1.1.43. Sea R un anillo con identidad. El anillo $M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(R)$ es un anillo sin identidad que es idempotente. En efecto, sea $(a_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \in M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(R)$. Por definición, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $i, j > n_0$, tenemos que $a_{i,j} = 0$.

Considérese la matriz $E_{n_0} = (b_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, donde $b_{i,i} = 1$ si $i \leq n_0$ y $b_{i,j} = 0$ en otro caso. Entonces, como

$$(a_{i,j})_{n_0 \times n_0} I_{n_0} = I_{n_0} (a_{i,j})_{n_0 \times n_0} = (a_{i,j})_{n_0 \times n_0}$$

donde I_{n_0} es la matriz identidad de tamaño $n_0 \times n_0$, se concluye que

$$(a_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} E_{n_0} = E_{n_0} (a_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} = (a_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$$

Por lo tanto, $M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(R)$ es idempotente.

Definición 1.1.44. Un conjunto de unidades locales para un anillo R es un conjunto $E \subseteq R$ de idempotentes conmutativos con la propiedad de que para cualquier $x \in R$ existe $t \in E$ tal que $tx = xt = x$.

Observación 1.1.45. Sea R un anillo. Si R posee un conjunto de unidades locales, entonces R es idempotente. En efecto, sea E un conjunto de unidades locales para R . Sea $a \in R$, existe $t \in E$ tal que $at = ta = a$, de lo cual se tiene que R es idempotente.

Ejemplo 1.1.46. Sea R un anillo con unidad 1. Considere $M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(R)$, el anillo de matrices infinitas de tamaño $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre R . Definimos las matrices

$$E_n = \{(a_{i,j})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \mid a_{i,i} = 1 \text{ para } 1 \leq i \leq n, a_{i,j} = 0 \text{ en otro caso}\}.$$

Entonces, $E = \{E_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto de unidades locales para $M_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(R)$, como se mostró en el Ejemplo 1.1.43.

Ejemplo 1.1.47. El anillo $x\mathbb{R}[x]$ no posee un conjunto de unidades locales. En efecto, observaremos esto mas adelante usando la contra-recíproca de un resultado posterior.

Proposición 1.1.48. Si R es un anillo con un conjunto de unidades locales E , entonces para cualquier numero finito de elementos $x_1, \dots, x_n \in R$, existe $t \in E$ tal que $tx_i = x_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Demostración. Utilizaremos el principio de inducción matemática.

Caso base: Para $n = 1$, sea $x_1 \in R$. Dado que R tiene un conjunto de unidades locales E , existe $t_1 \in E$ tal que $x_1 t_1 = t_1 x_1 = x_1$.

Paso inductivo: Supongamos que la proposición es cierta para $n = k$. Es decir, para cualesquiera $x_1, x_2, \dots, x_k \in R$, existe $t_k \in E$ tal que $x_i t_k = t_k x_i = x_i$ para todo $1 \leq i \leq k$. Ahora, consideremos $x_{k+1} \in R$. Dado que R tiene un conjunto de unidades locales E , existe $t' \in E$ tal que $x_{k+1} t' = t' x_{k+1} = x_{k+1}$. Definimos $t_{k+1} = t_k + t' - t_k t'$. Demostremos que t_{k+1} cumple la condición deseada:

$$t_{k+1} x_{k+1} = (t_k + t' - t_k t') x_{k+1} = t_k x_{k+1} + t' x_{k+1} - t_k t' x_{k+1} = t_k x_{k+1} + x_{k+1} - t_k x_{k+1} = x_{k+1}.$$

De manera similar, como los elementos de E conmutan:

$$x_{k+1} t_{k+1} = x_{k+1} (t_k + t' - t_k t') = x_{k+1} t_k + x_{k+1} t' - x_{k+1} t_k t' = x_{k+1}.$$

Para $1 \leq i \leq k$:

$$t_{k+1} x_i = (t_k + t' - t_k t') x_i = t_k x_i + t' x_i - t_k t' x_i = x_i + t' x_i - t_k t' x_i = x_i + t' x_i - t' x_i = x_i.$$

Finalmente, como E es un conjunto de unidades locales para R y $t_{k+1} \in R$, existe $t \in E$ tal que $t t_{k+1} = t_{k+1} t = t$, de lo cual para $1 \leq i \leq k+1$ se tiene que

$$t x_i = t (t_{k+1} x_i) = (t t_{k+1}) x_i = t_{k+1} x_i = x_i.$$

$$x_i t = (x_i t_{k+1}) t = x_i (t_{k+1} t) = x_i t_{k+1} = x_i.$$

Por lo tanto, por el principio de inducción matemática, se concluye que para cualquier $n \geq 1$ y $x_1, \dots, x_n \in R$, existe $t \in E$ tal que $t x_i = x_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. \square

Lema 1.1.49. *Sea R un anillo y sea I un ideal de R con la propiedad de que I tiene un conjunto de unidades locales. Si J es un ideal de I , entonces es un ideal de R .*

Demostración. Veamos que J es ideal, para ello basta ver que si $r \in R$ entonces $rJ \subseteq J$, como I tiene un conjunto de unidades locales llamémosle E , entonces para todo $x \in I$ existe $t \in E$ tal que $xt = tx = x$, así entonces si $j \in J$, existe $t \in E$ tal que $tj = jt = j$, así entonces $rj = r(tj) = (rt)j$, como I es ideal de R , $rt \in I$ y como J es ideal de I tenemos que $(rt)j \in J$, por tanto $rJ \subseteq J$, es análogo ver que $Jr \subseteq J$ \square

Observación 1.1.50. *No siempre un ideal de un ideal de un anillo es necesariamente un ideal del anillo. Un ejemplo de esto es el ideal I del Ejemplo 1.1.20, el cual es ideal del ideal $xR[x]$, que a su vez es ideal de $R[x]$. Sin embargo, I no es ideal de $R[x]$.*

Definición 1.1.51. Diremos que un anillo R tiene suficientes idempotentes si existe una colección de idempotentes mutuamente ortogonales $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ tal que $R = \bigoplus e_\alpha R = \bigoplus R e_\alpha$.

Ejemplo 1.1.52. Sea R un anillo con identidad. Consideremos $D_n(R)$, el subanillo de $M_n(R)$ cuyos elementos son las matrices diagonales. Así, definimos

$$E = \{E_{i,i} \in M_n(R) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

como el conjunto de las unidades matriciales diagonales. Estos $E_{i,i}$ son idempotentes mutuamente ortogonales. Además,

$$D_n(R) = \bigoplus_{i=1}^n E_{i,i} D_n(R) = \bigoplus_{i=1}^n D_n(R) E_{i,i}.$$

Por lo tanto, $D_n(R)$ es un anillo con suficientes idempotentes.

Definición 1.1.53. Un par de homomorfismos de anillos, $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, es llamado exacto en B si cumple que $\text{Im } f = \ker g$. Una secuencia de homomorfismos de anillos, $A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n$, es exacta si cumple que $\text{Im } f_i = \ker f_{i+1}$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Observación 1.1.54. La secuencia $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$, donde 0 representa el anillo nulo, es exacta si y solo si f es un monomorfismo de anillos, ya que si f es un monomorfismo, $\ker(f) = 0$ que es la imagen del monomorfismo desde el anillo nulo. De manera similar, $B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ es exacta si y solo si g es un epimorfismo de anillos, dado que si g es un epimorfismo, $\text{Im}(g) = C$, que es el núcleo del homomorfismo hacia el anillo nulo. Además, si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es exacta, entonces $gf = 0$, ya que $\text{Im}(f) = \ker(g)$, por lo que $f(A) = \ker(g)$, y por la definición de núcleo, $g(f(A)) = g(\ker(g)) = 0$.

Definición 1.1.55. Una secuencia exacta de la forma $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ se llama una secuencia exacta corta.

Ejemplo 1.1.56. Consideremos los anillos $\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$ y los homomorfismos de anillos $f : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ definida por $f(z) = 2z$ y $g : 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ definida por $g(z) = z \pmod{2}$. Así, tenemos que $\mathbb{Z} \xrightarrow{f} 2\mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2$ es una secuencia exacta.

Concluimos este capítulo con el siguiente resultado.

Lema 1.1.57. (Lema corto de los cinco) Sea R un anillo y

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

un diagrama conmutativo de anillos y homomorfismos de anillos tal que cada fila es una secuencia corta y exacta. Entonces:

- (i) Si α y γ son monomorfismos entonces β es un monomorfismo;
- (ii) Si α y γ son epimorfismos β es un epimorfismo;
- (iii) Si α y γ son isomorfismos entonces β es un isomorfismo.

Demostración.

1. Asuma que $\beta(b) = 0$. Entonces $\gamma(g(b)) = g'(\beta(b)) = g'(0) = 0$, de ahí que $g(b) = 0$, dado que γ es un monomorfismo. Por la exactitud, $\text{Im}(f) = \ker(g)$, entonces $b = f(a)$ para algún $a \in A$. Como $f'(\alpha(a)) = \beta(f(a)) = \beta(b) = 0$, y dado que f' es un monomorfismo, entonces $\alpha(a) = 0$. Como α es un monomorfismo, entonces $a = 0$, y por tanto $b = f(a) = f(0) = 0$. Así, $\ker(\beta) = 0$ y β es un monomorfismo.
2. Sea $b' \in B'$. Dado que γ es un epimorfismo, existe $c \in C'$ tal que $g'(b') = \gamma(c)$. Por la exactitud de la secuencia, se tiene que $\text{Im}(g) = C$, entonces existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Como $g'(\beta(b)) = \gamma(g(b)) = \gamma(c) = g'(b')$, por la exactitud, $b' - \beta(b) \in \ker(g')$. Existe $a' \in A'$ tal que $f'(a') = b' - \beta(b)$ y existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = a'$. Entonces, $b' = f'(\alpha(a)) + \beta(b)$ y $f'(\alpha(a)) = \beta(f(a))$, así $b' = \beta(f(a) + b)$. Por lo tanto, β es un epimorfismo.
3. Si α y γ son isomorfismos, entonces β es un isomorfismo por los puntos 1 y 2.

□

1.2. Módulos

Un módulo es una estructura algebraica que extiende el concepto de espacio vectorial. Los espacios vectoriales son el ejemplo más representativo de módulos, en los que el conjunto de escalares constituye un cuerpo. Con esto en mente, al permitir que los escalares provengan de un anillo en lugar de un cuerpo, obtenemos una estructura más general, lo que nos conduce a la siguiente definición.

Definición 1.2.1. Sea R un anillo. Un R -módulo a la izquierda es un grupo abeliano aditivo A junto a una función $f : R \times A \rightarrow A$ (la imagen de $f(r, a)$ la denotaremos por ra) tal que para todo $r, s \in R$ y $a, b \in A$:

$$(i) \quad r(a + b) = ra + rb$$

$$(ii) \quad (r + s)a = ra + sa$$

$$(iii) \quad r(sa) = (rs)a$$

Diremos que A es unitario si $RA = A$, y no-degenerado si para todo $a \in A$, $Ra = 0$ implica que $a = 0$.

Si R tiene elemento unidad 1_R y además se cumple:

$$(iv) \quad 1_R a = a \text{ para todo } a \in A$$

entonces A es llamado un R -módulo con unidad. En particular, si R es un anillo con división, entonces A es llamado un R -espacio vectorial.

De forma análoga, se define un R -módulo a la derecha. Cabe notar que si R tiene unidad, todo R -módulo con unidad es unitario, y por lo tanto, todo espacio vectorial es un R -módulo unitario.

Proposición 1.2.2. Si S es un anillo y R un subanillo de S , entonces S , como grupo aditivo, es un R -módulo con la aplicación $f : R \times S \rightarrow S$ tal que $f(r, a) = ra$, donde ra es el producto en S .

Ejemplo 1.2.3. Una aplicación de lo anterior es el anillo $\mathbb{R}[x]$, donde \mathbb{R} es un subanillo, y por lo tanto, $\mathbb{R}[x]$ es un \mathbb{R} -módulo.

Definición 1.2.4. Sean R y S anillos y M un grupo abeliano aditivo, decimos que M es un S - R -bimodulo (${}_S M_R$) si es un S -módulo a izquierda y un R -módulo a derecha, y tiene la propiedad de asociatividad

$$s(xr) = (sx)r \quad \text{para todos } s \in S, x \in M, r \in R.$$

Definición 1.2.5. Sea R un anillo, A un R -módulo y B un subconjunto no vacío de A . B es un submódulo de A siempre que B sea subgrupo aditivo de A y $rb \in B$ para todo $r \in R$, $b \in B$. Un submódulo de un espacio vectorial sobre un anillo con división es llamado subespacio.

Definición 1.2.6. Sea A y B módulos sobre un anillo R . Una función $f : A \rightarrow B$ es un homomorfismo de R -módulos si se cumple que para todo $a, c \in A$ y $r \in R$:

$$f(a + c) = f(a) + f(c) \text{ y } f(ra) = rf(a).$$

Diremos que f es un monomorfismo (epimorfismo, isomorfismo) de R -módulos si f es inyectiva (sobreyectiva, biyectiva). El Núcleo de f lo denotaremos por $\ker(f) = \{a \in A : f(a) = 0\}$. La imagen de f es el conjunto $\text{im}(f) = \{b \in B : b = f(a) \text{ para algún } a \in A\}$.

Ejemplo 1.2.7. Considere $\mathbb{R}[x]$, \mathbb{R} , y la función $\phi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi(\sum_{i=0}^n a_i x^i) = a_0$. Esta función es un homomorfismo de \mathbb{R} -módulos y además se tiene que $\ker(\phi) = \{\sum_{i=1}^n a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R}, 0 \leq n\}$ y $\text{im}(\phi) = \mathbb{R}$.

Teorema 1.2.8. Sea $f : A \rightarrow B$ un homomorfismo de R -módulos. Entonces, f es un monomorfismo de R -módulos si y solo si $\ker f = \{0\}$.

Demostración. La demostración es análoga a la realizada en la Proposición 1.1.30. \square

Definición 1.2.9. Sea K un anillo conmutativo con identidad. Una K -álgebra A es un anillo que satisface las siguientes propiedades:

- (i) $(A, +)$ es un K -módulo (a izquierda) unitario;
- (ii) $k(ab) = (ka)b = a(kb)$ para todo $k \in K$ y $a, b \in A$.

Además, dadas las K -álgebras A y B , decimos que:

- (i) Una subálgebra de A es un subanillo de A que también es un K -submódulo de A .
- (ii) Un ideal de álgebra (izquierdo, derecho o bilateral) de A es un ideal (izquierdo, derecho o bilateral, respectivamente) del anillo A que también es un K -submódulo de A .
- (iii) Un homomorfismo (resp. isomorfismo) de K -álgebras $f : A \rightarrow B$ es una función que es un homomorfismo (resp. isomorfismo) de anillos y un homomorfismo (resp. isomorfismo) de K -módulos.

Ejemplo 1.2.10. El ideal del Ejemplo 1.1.20 es un ideal de anillo, pero no de álgebra para $x\mathbb{R}[x]$. Esto se debe a que, si tomamos $x \in x\mathbb{R}[x]$ y $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, tenemos que $\frac{1}{2}x \notin I$.

Lema 1.2.11. *Sea A una K -álgebra que, considerada como anillo, posee un conjunto de unidades locales. Entonces un subconjunto $I \subseteq A$ es un ideal del anillo A si y solo si I es un ideal de A como K -álgebra.*

Demostración. Si I es un ideal del anillo, para demostrar que es un ideal de álgebra, basta con verificar que es cerrado bajo la multiplicación escalar. Sea $x \in I$ y $k \in K$, donde K es el anillo del módulo que define el álgebra A . Como A posee un conjunto local de unidades, existe $t \in A$ tal que $tx = xt = x$. Así, entonces, $kx = k(tx) = (kt)x$. Como $kt \in A$ y I es un ideal de A , se tiene que $(kt)x = kx \in I$. De ahí que I es un ideal de álgebra para A .

Es evidente que si I es un ideal de A como K -álgebra, también lo es del anillo. □

Observación 1.2.12. *El Lema 1.2.11 nos proporciona una forma de encontrar anillos que no poseen un conjunto de unidades locales. Como consecuencia de este resultado y el Ejemplo 1.2.10, se verifica lo enunciado en el Ejemplo 1.1.47.*

Definición 1.2.13. *Si A es una K -álgebra y $X \subseteq A$, definimos*

$$\text{span}_K(X) = \text{span}(X) := \left\{ \sum_{i=1}^n r_i x_i : r_i \in K \text{ y } x_i \in X \text{ para todo } 1 \leq i \leq n \right\}$$

como el K -submódulo de A generado por el conjunto X .

Definición 1.2.14. *Sea X un subconjunto no vacío de un conjunto contable. Llamaremos a los elementos de X letras de un alfabeto. Construiremos todas las palabras que se puedan formar con esas letras. Una palabra de longitud n es una n -tupla de elementos de X . Denotaremos por X^n al conjunto de todas las palabras de longitud n , y por X^* al conjunto de todas las palabras de longitud finita:*

$$X^* = \bigcup_{n \geq 1} X^n.$$

Podemos definir la multiplicación de dos palabras $v, w \in X^$ por yuxtaposición. Sea A un espacio vectorial con base X^* sobre un cuerpo K . Extendemos el producto en X^* a A por distributiva:*

$$\left(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i \right) \left(\sum_{j \in J} \beta_j w_j \right) = \sum_{i \in I, j \in J} \alpha_i \beta_j v_i w_j$$

donde $\alpha_i, \beta_j \in K$ y $v_i, w_j \in X^$, con a lo mas un numero finito de $v_i, w_j \neq 0$.*

Esto define un álgebra libre asociativa, la cual se denota por $K\langle X \rangle$.

Ejemplo 1.2.15. $K[x]$, el álgebra de polinomios sobre un cuerpo, es un álgebra libre asociativa con alfabeto $X = \{x\}$ y cuerpo K .

1.3. Anillos Graduados

En esta sección, nos adentraremos en el concepto fundamental de los anillos graduados, un elemento crucial para nuestro objetivo principal. Comenzaremos presentando las definiciones y conceptos básicos necesarios para comprender la graduación de anillos. Posteriormente, exploraremos ejemplos concretos que ilustrarán estas ideas, y finalizaremos con algunos teoremas importantes relacionados con homomorfismos de anillos graduados. Nuestro enfoque se basará principalmente en la teoría desarrollada en ⁵, ⁸ y ⁹.

Definición 1.3.1. Un anillo A es llamado anillo Γ -graduado, o simplemente anillo graduado, si $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ (en el sentido de la Definición 1.1.9), donde Γ es un grupo abeliano, cada A_γ es un subgrupo aditivo de A , y además se cumple que $A_\gamma A_\delta \subseteq A_{\gamma\delta}$ para todo $\gamma, \delta \in \Gamma$.

Definición 1.3.2. Sea R un anillo graduado. Un elemento $a \neq 0 \in R$ se dice homogéneo si pertenece a R_γ para algún $\gamma \in \Gamma$. El grado de a se define como γ , donde $a \in R_\gamma$. Este grado está bien definido debido a que cada elemento tiene una descomposición única en suma directa, según el Corolario 1.1.10. Un subconjunto $S \subseteq R$ se dice homogéneo si todos sus elementos tienen el mismo grado.

Observación 1.3.3. Sea A un anillo y G un grupo, A es graduado trivialmente de la siguiente forma $A_{1_G} = A$ y $A_g = \{0_A\}$ para $g \in G/\{1_G\}$.

Ejemplo 1.3.4. Sea K un anillo, $K[x]$ el anillo de los polinomios con coeficientes en K , es un anillo \mathbb{Z} -graduado por $\{K[x]_n : n \in \mathbb{Z}\}$ donde $K[x]_n = kx^n$ con $k \in K$ para $n \geq 0$ y para $n < 0$ $K[x]_n = \{0\}$.

Ejemplo 1.3.5. Sea K un anillo. El anillo de los polinomios de Laurent $K[x, x^{-1}]$ es \mathbb{Z} -graduado de la siguiente forma $K[x, x^{-1}]_n = \{ax^n : a \in K\}$ con $n \in \mathbb{Z}$.

⁸ R. Hazrat. "Graded rings and graded Grothendieck groups". Cambridge: Cambridge University Press, 2016.

⁹ M. Tomforde. "Leavitt path algebras with coefficients in a commutative ring". En: *Journal of Pure and Applied Algebra* 215.4 (2011), págs. 471-484. DOI: 10.1016/j.jpaa.2010.04.031.

Definición 1.3.6. Si R es un Γ -anillo graduado, entonces un ideal I de R es un ideal Γ -graduado si $I = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (I \cap R_\gamma)$. Si $\phi : R \rightarrow S$ es un homomorfismo de anillos entre anillos Γ -graduados, entonces ϕ es un homomorfismo de anillos graduado si $\phi(R_\gamma) \subseteq S_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Ejemplo 1.3.7. Sea $\phi : K \rightarrow M$ un homomorfismo de cuerpos, entonces la función $f : K[x, x^{-1}] \rightarrow M[x, x^{-1}]$, definida por $f(\sum_{i=-n}^n k_i x^i) = \sum_{i=-n}^n \phi(k_i) x^i$, es un homomorfismo de anillos \mathbb{Z} -graduados.

Ejemplo 1.3.8. Sea K un cuerpo y $X = \{x^{-1}, 1, x\}$. Considere el álgebra libre asociativa $K\langle X \rangle$ como anillo, y sea I el ideal generado por el conjunto

$$\{xx^{-1} - 1, x^{-1}x - 1\}.$$

Esto es equivalente al ideal generado por la relación $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. Entonces, $K\langle X \rangle$ es un anillo graduado, I es un ideal graduado y, además, $K\langle X \rangle/I$ es un anillo graduado. El anillo de polinomios de Laurent $K[x, x^{-1}]$ es isomorfo a $K\langle X \rangle/I$. Los resultados posteriores darán más claridad sobre estas afirmaciones.

Proposición 1.3.9. Sea R un anillo y I un ideal graduado de R . Entonces R/I es un anillo graduado con

$$(R/I)_\lambda = \frac{R_\lambda + I}{I}, \text{ y } R/I = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (R/I)_\lambda.$$

Demostración. Veamos que efectivamente tenemos una descomposición por suma directa. Definimos la función $\phi : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (R/I)_\lambda \rightarrow R/I$ con

$$\phi((x_\lambda + I)_{\lambda \in \Lambda}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda + I.$$

Sea $x \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (R/I)_\lambda$, entonces $x = (r_\lambda + I)_{\lambda \in \Lambda}$ con $r_\lambda \in R_\lambda$. Debido a que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (r_\lambda + I) = 0 \text{ si y solo si } \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda \in I,$$

y como cada componente es de un grado distinto en la graduación de I , se sigue que $\sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda \in I$ si y solo si $r_\lambda \in I$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Así, $\ker(\phi) = \{0\}$, lo que indica que ϕ es inyectiva. Es fácil ver que también es sobreyectiva. Con ello se concluye que

$$R/I = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (R/I)_\lambda.$$

Sea $x \in (R/I)_{\lambda_0}$ y $y \in (R/I)_{\lambda_1}$. Entonces,

$$xy = (r_{\lambda_0} + I)(r_{\lambda_1} + I) = r_{\lambda_0}r_{\lambda_1} + I,$$

y como $r_{\lambda_0}r_{\lambda_1} \in R_{\lambda_0+\lambda_1}$ debido a que R_λ es una graduación de R , concluimos que $xy \in (R/I)_{\lambda_0+\lambda_1}$. Por lo tanto, R/I es un anillo Λ -graduado. \square

Proposición 1.3.10. *Un ideal I es un ideal graduado si y solo si I es generado por un conjunto de elementos homogéneos.*

Demostración. Como R es graduado, se tiene que $R = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$. Dado que I es un ideal graduado, se cumple que $I = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (R_\lambda \cap I)$. Definimos $S = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (R_\lambda \cap I) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$. Así, S es un conjunto de elementos homogéneos. Veamos que I es generado por S :

$$\left\{ \sum_{i=1}^n r_i s_i \mid r_i \in R, s_i \in S \right\} \subseteq \langle S \rangle.$$

Como I es un ideal y $s_i \in I$, entonces $r_i s_i \in I$, por lo que $\langle S \rangle \subseteq I$.

Sea $x \in I$, entonces $x = e_{\gamma_0} + \dots + e_{\gamma_n}$ con $e_{\gamma_i} \in I \cap R_{\gamma_i}$. Como se definió, $e_{\gamma_0} \in S$, de lo cual se sigue que $x \in \langle S \rangle$. Así, concluimos que $I = \langle S \rangle$.

Ahora, sea S un conjunto de elementos tal que $S \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$. Veamos que $\langle S \rangle$ es un ideal graduado. Definimos $\langle S \rangle_\gamma = R_\gamma \cap \langle S \rangle$. Sea $s \in S$; entonces existe $\gamma_a \in \Gamma$ tal que $s \in R_{\gamma_a}$. Ahora, considere $r \in R$, de modo que $r = r_{\gamma_0} + \dots + r_{\gamma_n}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $r_{\gamma_i} \in R_{\gamma_i}$. Como $\langle S \rangle$ es un ideal, se tiene que $sr_{\gamma_i} \in \langle S \rangle$. Además, dado que R es graduado, $sr_{\gamma_i} \in R_{\gamma_i \gamma_a} \cap \langle S \rangle$. Por lo tanto, $\langle S \rangle \subseteq \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (R_\gamma \cap \langle S \rangle)$. Por otro lado, sea $r \in \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (I \cap R_\gamma)$. Dado que $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma = R$, es claro que $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (R_\gamma \cap \langle S \rangle) \subseteq \langle S \rangle$. Así, se concluye que $\langle S \rangle = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \langle S \rangle_\gamma$. \square

Teorema 1.3.11. *Sea $\phi : R \rightarrow S$ un homomorfismo de anillos Γ -graduados. Entonces, el núcleo de ϕ , $\ker(\phi)$, es un ideal Γ -graduado de R .*

Demostración. Sabemos que $\ker(\phi)$ es un ideal de anillo, así que basta probar que se cumple $\ker(\phi) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (\ker(\phi) \cap R_\gamma)$. Sea $x \in \ker(\phi)$. Entonces, $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma$ con $r_\gamma \in R_\gamma$ y $\phi(x) = 0$. Por lo tanto, basta ver que $\phi(r_\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Como $\phi(x) = \phi\left(\sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma\right) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \phi(r_\gamma) = 0$, por la unicidad de la descomposición en suma directa, tenemos que $\phi(r_\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$. De aquí se deduce que $r_\gamma \in \ker(\phi) \cap R_\gamma$, y así $x \in \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (\ker(\phi) \cap R_\gamma)$.

Recíprocamente, si $x \in \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (\ker(\phi) \cap R_\gamma)$, entonces $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma$ con $r_\gamma \in \ker(\phi) \cap R_\gamma$. De ahí que $\phi(x) = \phi\left(\sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma\right) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \phi(r_\gamma)$. Como $r_\gamma \in \ker(\phi)$, se tiene que $\phi(r_\gamma) = 0$ para todo γ , por lo que $\phi(x) = 0$ y, por lo tanto, $x \in \ker(\phi)$. Así, $\ker(\phi)$ es un ideal graduado de R . \square

Lema 1.3.12. Consideremos un conjunto numerable X con una partición X_{-1}, X_0, X_1 . Definamos $g : X \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in X_{-1} \\ 0 & \text{si } x \in X_0 \\ 1 & \text{si } x \in X_1 \end{cases}$$

Denotemos por $K\langle X \rangle$ el álgebra libre asociativa sobre K generada por X . Para $v = x_1 \dots x_m \in X^*$, extendemos la función g a X^* como $g(v) = \sum_{j=1}^m g(x_j)$.

Los subgrupos aditivos

$$K\langle X \rangle_n = \left\{ \sum_{i=1}^p k_i v_i \mid p \in \mathbb{N}, v_i \in X^*, k_i \in K, g(v_i) = n \right\}, \text{ para } n \in \mathbb{Z}$$

son una \mathbb{Z} -graduación para $K\langle X \rangle$.

Demostración. Para ver que efectivamente $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} K\langle X \rangle_n$ es una descomposición en sumas directa de $K\langle X \rangle$, se sigue de cómo se definen los elementos y las relaciones en un álgebra libre, y cómo se bien definió la función g .

Sea $a \in K\langle X \rangle_z$ y $e \in K\langle X \rangle_p$, veamos que $ae \in K\langle X \rangle_{z+p}$. Por cómo están definidos, los subgrupos $a = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i$ y $e = \sum_{j \in J} \beta_j w_j$, donde $\alpha_i, \beta_j \in K$ y $v_i, w_j \in X^*$. Entonces,

$$\left(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i \right) \left(\sum_{j \in J} \beta_j w_j \right) = \sum_{i \in I, j \in J} \alpha_i \beta_j v_i w_j$$

Por cómo se define g , si $a, b \in X^*$, entonces $g(ab) = g(a) + g(b)$. De ahí que $g(v_i w_j) = g(v_i) + g(w_j) = z + p$, lo que implica que $ae \in K\langle X \rangle_{z+p}$. Así, $K\langle X \rangle$ es \mathbb{Z} -graduado. \square

1.4. Grafos Dirigidos

Definición 1.4.1. Un grafo dirigido E está conformado por dos conjuntos y dos funciones: el conjunto de vértices E^0 y el conjunto de aristas E^1 , los cuales han de ser contables.

Las funciones $r, s : E^1 \rightarrow E^0$ se llaman rango y origen, respectivamente. La función rango asigna a cada arista un vértice “al que se dirige”, mientras que origen asigna a cada arista un vértice “del cual proviene”. Así, definimos al grafo dirigido E como $E = (E^0, E^1, r, s)$.

Ejemplo 1.4.2.

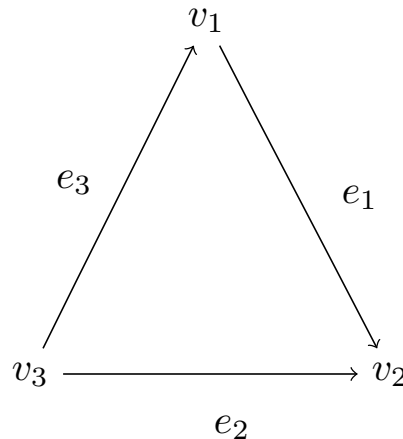


Figura 1.1: Representación gráfica de un grafo.

En el grafo de la Figura 1.1, $E^0 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $E^1 = \{e_1, e_2, e_3\}$. Observemos que las funciones s y r se comportan de la siguiente manera: $r(e_1) = v_2$, $r(e_2) = v_2$, $r(e_3) = v_1$, $s(e_1) = v_1$, $s(e_2) = v_3$ y $s(e_3) = v_3$.

Definición 1.4.3. Un vértice $v \in E^0$ se llama regular si $s^{-1}(v) \neq \emptyset$ y $|s^{-1}(v)|$ es finito. Si $s^{-1}(v) = \emptyset$, llamaremos al vértice v un sumidero (sink). Si $|s^{-1}(v)|$ es infinito, llamaremos al vértice v un emisor infinito. Así, definimos $E_{reg}^0 = \{v \in E^0 \mid v \text{ es regular}\}$ como el conjunto de los vértices regulares del grafo E . Si el vértice v no es regular, lo llamaremos vértice singular y denotaremos al conjunto de los vértices singulares como $E_{sing}^0 = \{v \in E^0 \mid v \text{ es singular}\}$. Es claro que $E_{reg}^0 = E^0 \setminus E_{sing}^0$.

Ejemplo 1.4.4.

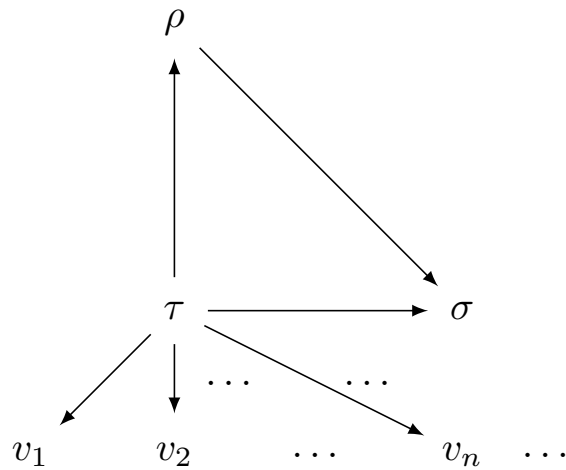


Figura 1.2: Un grafo que posee un emisor infinito.

En el grafo de la Figura 1.2 podemos ver que su conjunto de vértices no es finito (necesariamente infinito numerable). En particular el subconjunto de vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$ es infinito. Así mismo el vértice τ emite una arista a cada uno de estos vértices, por lo tanto τ emite un número infinito de aristas, por tanto $|s^{-1}(\tau)| = \infty$, por lo cual τ es un emisor infinito. Ahora, σ no envía ninguna arista hacia algún vértice; por lo tanto, $s^{-1}(\sigma) = \emptyset$. De ahí que σ es un sink o sumidero. El único vértice regular es ρ , dado que $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ son sinks o sumideros.

Definición 1.4.5. Si E es un grafo, un camino es una secuencia $\alpha := e_1 e_2 \dots e_n$ de aristas con $r(e_i) = s(e_{i+1})$ para $1 \leq i \leq n - 1$. Diremos que el camino α tiene longitud n , lo denotaremos $|\alpha| := n$ o $l(\alpha) = n$, y denotaremos E^n al conjunto de los caminos de longitud n . Consideraremos los vértices en E^0 como los caminos de longitud 0. Denotaremos $E^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} E^n$ como el conjunto de los caminos de longitud finita, y para $\alpha := e_1 e_2 \dots e_n \in E^n$, definimos $r(\alpha) = r(e_n)$ y $s(\alpha) = s(e_1)$.

Ejemplo 1.4.6.

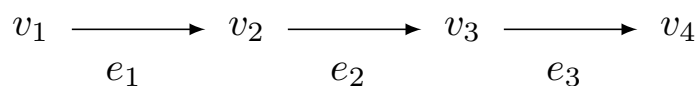


Figura 1.3: Un camino.

En el grafo de la Figura 1.3 para el camino $\alpha := e_1e_2e_3$, tenemos que su longitud $|\alpha| := 3$, $r(\alpha) = r(e_3) = v_4$, $s(\alpha) = s(e_1) = v_1$ y $E^* = \{v_1, v_2, v_3, v_4, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_2e_3, e_1e_2e_3\}$.

Definición 1.4.7. Denotaremos $(E^1)^*$ el conjunto de símbolos formales $\{e^* : e \in E^1\}$ como el conjunto de las aristas fantasmas del grafo E y respectivamente a e^* la llamaremos arista fantasma. Establezcamos $s(e^*) = r(e)$ y $r(e^*) = s(e)$. Para $\alpha := e_1 \dots e_n \in E^n$ definimos $\alpha^* := e_n^*e_{n-1}^*\dots e_1^*$. También notaremos $v^* = v$ para todo $v \in E^0$. Llamaremos a los elementos de E^1 aristas reales.

Ejemplo 1.4.8.

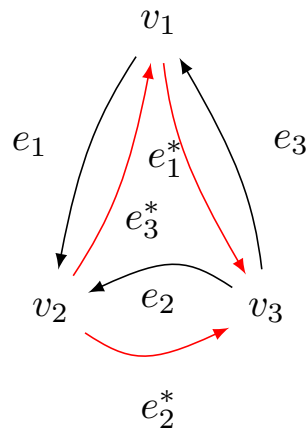


Figura 1.4: Un grafo y sus aristas fantasmas.

En el grafo de la Figura 1.4 podemos observar al grafo de la Figura 1.1 con sus aristas fantasmas representadas. De esta manera, $(E^1)^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$. Así mismo, el comportamiento de las funciones s y r para las aristas fantasmas es el siguiente: $r(e_1^*) = v_1$, $r(e_2^*) = v_3$, $r(e_3^*) = v_3$, $s(e_1^*) = v_2$, $s(e_2^*) = v_2$ y $s(e_3^*) = v_1$.

Las aristas que conectan un vértice consigo mismo se denominan bucles. Un grafo puede contener vértices con múltiples aristas, incluyendo bucles. A continuación se presenta un ejemplo de un grafo con bucles.

Ejemplo 1.4.9.

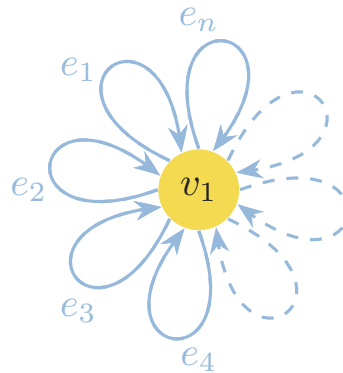


Figura 1.5: Representación gráfica del grafo R_n , un vértice con n bucles o pétalos. A estos grafos se les conoce como rosas.

Definición 1.4.10. Un subgrafo $E = (E^0, E^1, r, s)$ es un grafo $E' = (E'^0, E'^1, r', s')$ tal que:

- $E'^0 \subseteq E^0$,
- $E'^1 \subseteq E^1$,
- $r'(e) = r(e)$ y $s'(e) = s(e)$ para todo $e \in E'^1$.

Definición 1.4.11. Diremos que un grafo E es conexo si, para todo par de vértices $v_0, v_1 \in E$, existe un camino $\alpha \in E$ tal que $s(\alpha) = v_0$ y $r(\alpha) = v_1$. En caso contrario, diremos que el grafo E es desconexo.

Ejemplo 1.4.12. El grafo de la Figura 1.1 es un grafo conexo, mientras que el siguiente es desconexo.

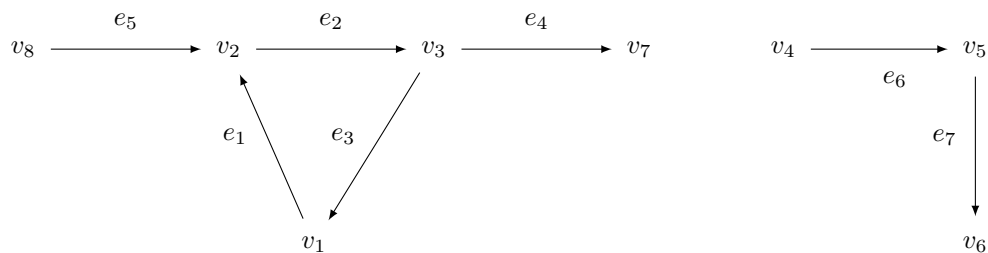


Figura 1.6: Representación gráfica de un grafo desconexo.

Definición 1.4.13. Sea E un grafo y $\mu \in E^n$ un camino de longitud n , $\mu = \mu_1\mu_2 \dots \mu_n$. Se define lo siguiente:

- Una arista e es una salida del camino μ si existe un índice i tal que $s(e) = s(\mu_i)$ y $e \neq \mu_i$.
- Un camino cerrado basado en v es un camino μ , con $\mu_i \in E^1$, $n \geq 1$, y tal que $s(\mu) = r(\mu) = v$. Denotamos por $CP(v)$ al conjunto de todos estos caminos.
- Un camino μ simple cerrado basado en v es un camino cerrado basado en v , tal que $s(\mu_j) \neq v$ para todo $j > 1$. Denotamos por $CSP(v)$ al conjunto de todos estos caminos.

Ejemplo 1.4.14.

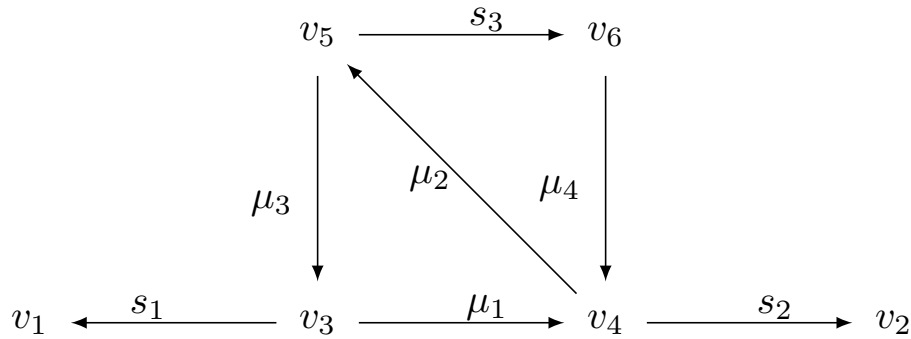


Figura 1.7: Un grafo con caminos.

Considere el grafo E de la Figura 1.7 y los caminos $\mu = \mu_1\mu_2\mu_3$ y $\alpha = \mu_2s_3\mu_4\mu_2\mu_3\mu_1$. Para estos caminos, se tiene lo siguiente:

- s_1, s_2 y s_3 son salidas del camino μ .
- μ es un camino cerrado con base en v_3 .
- El camino μ es un camino cerrado simple.
- El camino α es un camino cerrado con base en v_4 , pero no es simple basado en v_4 .

Definición 1.4.15. Un grafo E es cofinal si para todo camino infinito $e_1e_2e_3 \dots$ en E y todo vértice $v \in E^0$, existe un camino finito de v a $s(e_i)$ para algún $i \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.4.16.

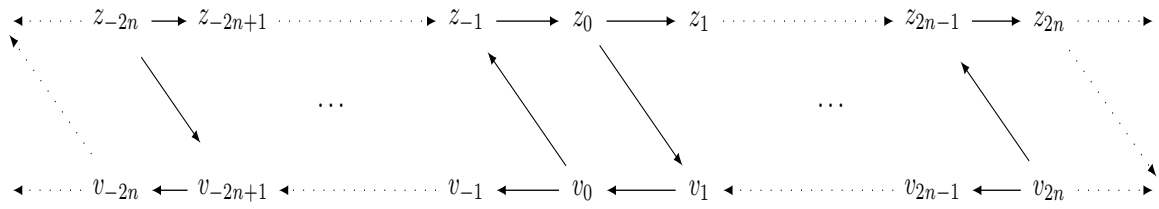


Figura 1.8: Un grafo infinito con caminos infinitos, el cual es cofinal.

2. Álgebras de Caminos de Leavitt (A.C.L.)

Definición 2.0.1. Sea E un grafo y K un cuerpo, construyamos la K -álgebra libre sobre el alfabeto $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ sujeta a las siguientes relaciones:

1. $vw = \delta_{v,w}v$ para todo $v, w \in E^0$,
2. $e = er(e) = s(e)e$ para todo $e \in E^1$,
3. $e^* = e^*s(e) = r(e)e^*$ para todo $e \in E^1$.

Sea I el ideal de álgebra generado por el siguiente conjunto

$$\{e^*f - \delta_{e,f}r(e) : e, f \in E^1\} \cup \left\{ v - \sum_{s(e)=v} ee^* : v \in E_{reg}^0 \right\}.$$

Así, definimos el álgebra de caminos de Leavitt $L_K(E)$ como el álgebra cociente por el ideal I :

$$L_K(E) = \frac{K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle}{I}.$$

Por cómo se definió el ideal, las siguientes dos relaciones se tienen para $L_K(E)$:

(CK1) $e^*f = \delta_{e,f}r(e)$ para $e, f \in E^1$,

(CK2) $v = \sum_{s(e)=v} ee^*$ para $v \in E_{reg}^0$.

Observación 2.0.2. Sean α y β caminos. Cuando escribamos $\alpha\beta^*$, asumiremos que $r(\alpha) = r(\beta)$.

Ejemplo 2.0.3.

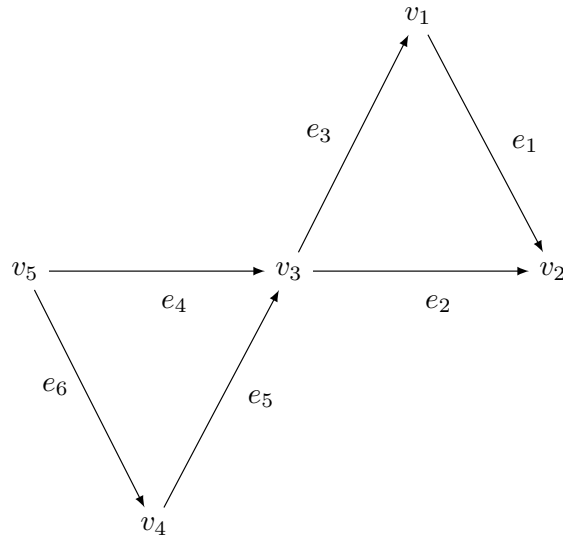


Figura 2.1: Un grafo algo útil.

Veamos algunas operaciones entre elementos de $L_K(E)$ con E siendo un grafo de la Figura 2.1.

1. $v_1v_2 = 0$,
2. $e_1e_1 = e_1r(e_1)s(e_2)e_1 = e_1v_2v_1e_2 = 0$,
3. $e_1^*e_1 = r(e_1) = v_1$,
4. $e_1e_2 = e_1r(e_1)s(e_2)e_2 = e_1(v_2v_3)e_2 = e_1(0)e_2 = 0$,
5. $e_2e_1^* \neq 0$,
6. $e_4e_4^* = e_4r(e_4)e_4^* = e_4(v_3)e_4^* = e_4(e_3e_3^* + e_2e_2^*)e_4^* = e_4e_3e_3^*e_4^* + e_4e_2e_2^*e_4^* = e_4e_3(e_4e_3)^* + e_4e_2(e_4e_2)^*$. La tercera igualdad se dio por (CK2).

6. ilustra una propiedad importante, que si α, β son caminos y $r(\alpha) = r(\beta)$ es un vértice regular, entonces mediante (CK2) es posible escribir $\alpha\beta^*$ como sumas de elementos la forma $\alpha'\beta'^*$ donde $l(\alpha') = l(\alpha) + 1$ y $l(\beta') = l(\beta) + 1$.

Lema 2.0.4. Sea $L_K(E)$, y $\alpha, \beta \in E^n$, entonces $\alpha^*\beta = \delta_{\alpha,\beta}r(\alpha)$.

Demostración. Procedemos por inducción en la longitud n de los caminos.

Caso base: Para $n = 1$, $\alpha = e_1$ y $\beta = g_1$ con $e_1, g_1 \in E^1$. Entonces, $\alpha^* \beta = e_1^* g_1$. Por (CK1), $e_1^* g_1 = \delta_{e_1, g_1} r(e_1) = \delta_{e_1, g_1} r(\alpha)$. Por lo tanto, el resultado es cierto para $n = 1$.

Paso inductivo: Supongamos que el resultado es cierto para $n = k$. Consideremos $\alpha = e_1 e_2 \cdots e_n e_{n+1}$ y $\beta = g_1 g_2 \cdots g_n g_{n+1}$. Entonces,

$$\alpha^* \beta = e_{n+1}^* e_n^* \cdots e_2^* e_1^* g_1 g_2 \cdots g_n g_{n+1} = e_{n+1}^* (e_n^* \cdots e_2^* e_1^* g_1 g_2 \cdots g_n) g_{n+1} = e_{n+1}^* \alpha' \beta' g_{n+1},$$

donde $\alpha' = e_1 e_2 \cdots e_n$ y $\beta' = g_1 g_2 \cdots g_n$.

Como el resultado es cierto para caminos de longitud $n = k$, entonces

$$e_{n+1}^* (\alpha' \beta') g_{n+1} = e_{n+1}^* \delta_{\alpha', \beta'} r(\alpha') g_{n+1}.$$

Aquí existen dos casos:

Caso 1: Si $\alpha' \neq \beta'$, entonces existe $0 \leq i \leq n$ tal que $e_i \neq g_i$, y por lo tanto $\alpha \neq \beta$. Además, se cumple que

$$\alpha^* \beta = e_{n+1}^* (0) g_{n+1} = \delta_{\alpha, \beta} r(\alpha) = 0.$$

Caso 2: Si $\alpha' = \beta'$, entonces

$$e_{n+1}^* \delta_{\alpha', \beta'} r(\alpha') g_{n+1} = e_{n+1}^* r(\alpha') g_{n+1} = e_{n+1}^* s(e_{n+1}) g_{n+1}.$$

Por la definición de camino y por la propiedad (ii),

$$e_{n+1}^* s(e_{n+1}) g_{n+1} = e_{n+1}^* g_{n+1} = \delta_{e_{n+1}, g_{n+1}} r(e_{n+1}).$$

Dado que $\alpha = \alpha' e_{n+1}$ y $\beta = \beta' g_{n+1}$, y que $\alpha' = \beta'$, tenemos que

$$\delta_{\alpha, \beta} r(\alpha) = \delta_{\alpha, \beta} r(\alpha').$$

Por lo tanto, el resultado es cierto para $n = k + 1$.

Así, por el principio de inducción matemática, el resultado es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Lema 2.0.5. Si E es un grafo y $L_K(E)$ es el A.C.L. asociada, entonces para cualquier

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E^*$ tenemos que:

$$(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = \begin{cases} \alpha\gamma'\delta^* & \text{si } \gamma = \beta\gamma', \\ \alpha\delta^* & \text{si } \beta = \gamma, \\ \alpha\beta'^*\delta^* & \text{si } \beta = \gamma\beta', \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Este resultado muestra que cualquier palabra en $\{v : v \in E^0\} \cup \{e, e^* : e \in E^1\}$ puede ser escrito de la forma $\alpha\beta^*$, donde $\alpha, \beta \in E^*$ y $r(\alpha) = r(\beta)$.

Demostración. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E^*$, si $\gamma = \beta\gamma'$ entonces $(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = (\alpha\beta^*)(\beta\gamma')\delta^* = \alpha(\beta^*\beta)(\gamma'\delta^*)$ por el Lema 2.0.4 $\alpha(\beta^*\beta)(\gamma'\delta^*) = \alpha(r(\beta))(\gamma'\delta) = \alpha(r(\beta)\gamma')\delta = \alpha\gamma'\delta^*$ dado que $r(\beta) = s(\gamma')$.

Si $\beta = \gamma$ entonces $(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = (\alpha\beta^*)(\beta\delta^*)$ y como vimos anteriormente $\beta^*\beta = r(\beta)$ así $(\alpha\beta^*)(\beta\delta^*) = \alpha r(\beta)\delta^*$ así como $s(\delta^*) = r(\beta)$ entonces $\alpha r(\beta)\delta^* = \alpha\delta^*$.

Si $\beta = \gamma\beta'$ entonces $(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = (\alpha(\gamma\beta')^*)(\gamma\delta^*) = (\alpha\beta'^*\gamma^*)(\gamma\delta^*) = (\alpha\beta'^*)(\gamma^*\gamma)\delta^*$ y como vimos anteriormente $\gamma^*\gamma = r(\gamma)$ así $(\alpha\beta'^*)(\gamma^*\gamma)\delta^* = (\alpha\beta'^*r(\gamma))\delta^* = \alpha\beta'^*\delta^*$.

Si no es ninguno de los casos anteriores, por (CK1) el resultado sería 0. □

Corolario 2.0.6. Si E es un grafo y $L_K(E)$ es el A.C.L. asociada, entonces

$$L_K(E) = \text{span}\{\alpha\beta^* : \alpha, \beta \in E^* \text{ y } r(\alpha) = r(\beta)\}.$$

En consecuencia, todo elemento $x \in L_K(E)$ se puede escribir de la forma $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k \beta_k^*$, donde $\lambda_k \in K$ y $\alpha_k, \beta_k \in E^*$ con $r(\alpha_k) = r(\beta_k)$ para $1 \leq k \leq n$.

Ejemplo 2.0.7. Sea E el siguiente grafo:

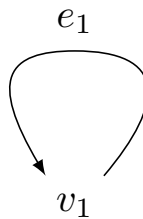


Figura 2.2: R_1 es un grafo que solo tiene un vértice y una arista.

El álgebra $L_K(E)$ es isomorfa a $K[x, x^{-1}]$. En efecto, sea $a \in L_K(E)$. Por el Corolario 2.0.6, podemos escribir

$$a = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_1)^{p_i} (e_1^*)^{z_i},$$

donde $0 \leq p_i, z_i$. Además, se cumple que $v_1 a = a v_1 = a$ dado que $v_1 e_1 = s(e_1) e_1 = e_1$ y $e_1^* v_1 = e_1^* s(e_1) = e_1^*$, siendo así v_1 el elemento unitario para el álgebra. Como $e_1^* e_1 = e_1 e_1^* = v_1$, entonces $(e_1)^{-1} = e_1^*$. Por lo tanto, tenemos que:

$$a = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_1)^{p_i - z_i}$$

Definimos entonces el isomorfismo $\phi : L_K(E) \rightarrow K[x, x^{-1}]$ como

$$\phi \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (e_1)^{p_i - z_i} \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^{p_i - z_i},$$

siendo claro que $\lambda_i \in K$.

Ejemplo 2.0.8. Sea K un cuerpo cualquiera y A_n el grafo de un camino directo de longitud $n \in \mathbb{N}$.

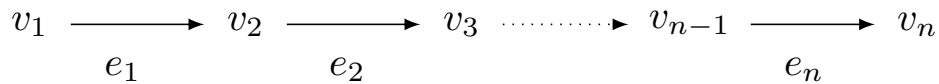


Figura 2.3: Un camino.

Entonces, se tiene que

$$L_K(A_n) \cong M_n(K).$$

En efecto, note que si $\alpha \in E^*$, existen $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \leq j$ tal que $\alpha = e_i e_{i+1} \dots e_{j-1} e_j$. Denotamos los caminos por $\alpha_{i,j} = e_i \dots e_j$ con $i \leq j$ y $\alpha_{i,j}^* = \alpha_{j,i}$. Entonces, para $\alpha_{i,j}$ y $\alpha_{k,l}$ se cumple que:

$$\alpha_{i,j} \alpha_{k,l} = \begin{cases} \alpha_{i,l}, & \text{si } j = k, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esto es porque, si $l \leq k$ y $k = j$, entonces $\alpha_{i,j} \alpha_{k,l} = e_1 \dots e_k e_k^* \dots e_l$. Por (CK2), $e_i e_i^* = s(e_i) = r(e_{i-1}) = e_{i-1} r(e_{i-1})$. De esto se deduce que $\alpha_{i,j} \alpha_{k,l} = e_1 \dots e_l$. Los otros casos

son similares.

Así, todo elemento $x \in L_K(E)$ se puede representar como $x = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \lambda_{i,j} \alpha_{i,j}$. Definimos la función $\phi : L_K(E) \rightarrow M_n(K)$ por

$$\phi \left(\sum_{i,j \in \mathbb{N}} \lambda_{i,j} \alpha_{i,j} \right) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \lambda_{i,j} E_{i,j},$$

donde $E_{i,j}$ representa las unidades matriciales. ϕ es un isomorfismo.

Proposición 2.0.9. Sea E un grafo desconexo y K un cuerpo no nulo, entonces $L_K(E)$ no es simple.

Demostración. Como E es desconexo entonces existe E' un subgrafo conexo de E . Entonces sea $I = \frac{K[E'^{-1} \cup E'^0 \cup E'^1] + R}{R}$, donde R es el ideal que define las relaciones de $L_K(E)$. I es un ideal puesto que si $x \notin I$ entonces x es un elemento conformado por palabras formadas con letras que no están en $E'^{-1} \cup E'^0 \cup E'^1$, por tanto, sea $a \in I$ se tiene que $xa = 0$, de ahí que I es ideal de $L_K(E)$. Ahora es claro que $I \neq 0$ puesto que por lo menos contiene a un vértice del subgrafo, así mismo $I \neq L_K(E)$ puesto que al ser E desconexo existe $v \in E$ tal que $v \notin E'$. Así entonces $L_K(E)$ no es simple. \square

Observación 2.0.10. Como consecuencia de lo anterior, para el grafo de Figura 1.6, $L_K(E)$ no es simple.

Proposición 2.0.11. Si E es un grafo, entonces se puede definir una \mathbb{Z} -graduación en su A.C.L. asociada $L_K(E)$ de la siguiente forma:

$$L_K(E)_n := \left\{ \sum_{k=1}^l \lambda_k \alpha_k \beta_k^* : \alpha_k, \beta_k \in E^*, |\alpha_k| - |\beta_k| = n \text{ para } 1 \leq k \leq l \right\},$$

con $n \in \mathbb{Z}$. Esta es conocida como la \mathbb{Z} -graduación canónica para $L_K(E)$.

Demostración. Considere $K\langle (E^1)^* \cup E^0 \cup E^1 \rangle$, la K -álgebra libre asociativa con alfabeto $(E^1)^* \cup E^0 \cup E^1$. Si tomamos $X_{-1} = (E^1)^*$, $X_0 = E^0$ y $X_1 = E^1$, entonces mediante el Lema 1.3.12 obtenemos una \mathbb{Z} -graduación para $K\langle (E^1)^* \cup E^0 \cup E^1 \rangle$. Además, observe que los elementos de las relaciones que definen $L_K(E)$ son todos homogéneos. Así, por la Proposición 1.3.10, el ideal generado por estas relaciones es un ideal graduado. Por lo tanto, el anillo cociente $K\langle (E^1)^* \cup E^0 \cup E^1 \rangle / I$ es un anillo \mathbb{Z} -graduado por la Proposición 1.3.9. Además, note que este anillo es $L_K(E)$ y $K\langle (E^1)^* \cup E^0 \cup E^1 \rangle_n / I = L_K(E)_n$, por lo que $L_K(E)$ es \mathbb{Z} -graduado. \square

A continuación exploraremos algunos resultados para la \mathbb{Z} -graduación canónica de $L_K(E)$.

Definición 2.0.12. Diremos que $x \in L_K(E)$ es polinomial en todas las aristas fantasmas si $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \beta_k^*$ para $\lambda_k \in K$ y $\beta_k \in E^*$.

Ejemplo 2.0.13. Para el álgebra $L_K(E)$ del Ejemplo 2.0.7, todos los polinomiales en aristas reales son de la forma $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e^k$, y los polinomiales en aristas fantasmas son de la forma $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k (e^*)^k$.

Observación 2.0.14. Si E es un grafo y $L_K(E)$ su A.C.L. asociada, esta posee una involución en el sentido de la Definición 1.1.25, $x \mapsto \bar{x}$ en $L_K(E)$ de la siguiente forma: si $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k \beta_k^*$, entonces $\bar{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \beta_k \alpha_k^*$.

Definición 2.0.15. Si $L_K(E)$ es un A.C.L., un ideal I de $L_K(E)$ es auto-adjunto si $\bar{I} = I$.

Ejemplo 2.0.16. Sea E el grafo de la Figura 2.2 para $L_K(E)$. En efecto, tenemos que el ideal generado por $(e + v)$ es auto-adjunto. El ideal generado por $(v + e + e^3)$ no es auto-adjunto.

Lema 2.0.17. Sea I un ideal graduado de $L_K(E)$. Entonces, I es un ideal generado por el conjunto $I_0 := I \cap L_K(E)_0$.

Demostración. Como I es un ideal graduado de $L_K(E)$, tenemos que $I = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I_n$, donde $I_n = I \cap L_K(E)_n$.

Afirmación: Sea $n > 0$. Dado $x \in I_n = I \cap L_K(E)_n$, podemos escribir x como

$$x = \sum_{k=1}^m \alpha_k x_k$$

donde $x_k \in L_K(E)_0$ para todo k , $\alpha_k \in E^n$, y $\alpha_i \neq \alpha_j$ para $i \neq j$.

Probemos lo anterior. Sin pérdida de generalidad, consideremos el caso $n > 0$. Como en particular $x \in L_K(E)_n$, x es de la forma

$$x = \sum_{i=1}^l \lambda_i \alpha_i \beta_i^*$$

con $\alpha_i, \beta_i \in E^*$ y $|\alpha_i| - |\beta_i| = n$ para todo i .

Dado que $|\alpha_i| = n + |\beta_i|$, podemos escribir $\alpha_i = \alpha'_i \gamma_i$ con $\alpha'_i \in E^n$ y $\gamma_i \in E^{|\beta_i|}$. Consideremos también los α_j con $j \neq i$, tales que $\alpha_j = \alpha'_j \gamma_j$ con $\gamma_j \in E^{|\beta_j|}$. Definamos P_i como el conjunto de índices j que cumplen esta condición, respecto a i .

Tomemos $x_i = \sum_{p \in P_i} \lambda_p \gamma_p \beta_p^*$. Como $|\gamma_p| - |\beta_p| = 0$, entonces $x_i \in L_K(E)_0$.

Además,

$$x = \sum_{k \in K} \alpha'_k x_k,$$

donde K es un conjunto de índices tal que $\alpha'_i \neq \alpha'_j$ para $i \neq j$, con $\alpha'_k \in E^n$.

Finalmente, para todo $k \in K$, tenemos que

$$x_i = \alpha_i^* \left(\sum_{k \in K} \alpha_k x_k \right) = \alpha_i^* x \in I.$$

Por lo tanto, como $x_i \in L_K(E)_0$, se tiene que $x_i \in I_0 = I \cap L_K(E)_0$.

Retomando lo anterior

Como $l(\alpha_k) = n$ y si tomamos $\beta_k = r(\alpha_k)$, puesto que $l(r(\alpha_k)) = 0$, el elemento $\alpha_k \beta_k^* = \alpha_k r(\alpha_k) = \alpha_k \in L_K(E)_n$, con lo cual $\alpha_k x_k \in L_K(E)_n I_0$. De lo anterior y por la definición de ideal generado, concluimos que $I_n \subseteq L_K(E)_n I_0 \subseteq \langle I_0 \rangle$. De manera similar, $I_{-n} \subseteq I_0 L_K(E)_{-n} \subseteq \langle I_0 \rangle$. Es claro que $\langle I_0 \rangle \subseteq I$, dado que $I_0 \subseteq I$. Concluimos entonces que I es generado por I_0 . \square

Definición 2.0.18. Para cualquier A.C.L. $L_K(E)$ y para $n \in \mathbb{N}$ definimos las siguientes subálgebras de $L_K(E)_0$:

$$\mathcal{G}_n := \text{span}\{\alpha\beta^* : \alpha, \beta \in E^n, r(\alpha) = r(\beta)\};$$

$$\mathcal{F}_n := \text{span}\{\alpha\beta^* : \alpha, \beta \in E^k, r(\alpha) = r(\beta), 0 \leq k \leq n\}.$$

Observación 2.0.19. De la definición anterior, se tiene que $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{G}_{n+1} + \mathcal{F}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, observe que $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Este hecho se deduce de que si $A \subseteq B$, entonces $\text{span}(A) \subseteq \text{span}(B)$. Asimismo, $L_K(E)_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$. Cabe mencionar que \mathcal{G}_n es un ideal de la subálgebra \mathcal{F}_n , lo cual probaremos más adelante en la demostración de un lema.

A continuación, presentaremos una serie de lemas relacionados con las subálgebras \mathcal{G}_n y \mathcal{F}_n , los cuales servirán como base para alcanzar el resultado principal. Estos lemas permitirán construir una estructura sólida que nos guiará en la demostración final, estableciendo propiedades clave de los conjuntos involucrados.

Lema 2.0.20. Para cualquier A.C.L. $L_k(E)$ tenemos que $\mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1 = \text{span}\{v : v \in E_{reg}^0\}$. Además, si $\pi : L_K(E) \rightarrow A$ es un homomorfismo de anillos con la propiedad de que $\pi(v) \neq 0$ para todo $v \in E^0$, entonces $\pi(\mathcal{G}_0) \cap \pi(\mathcal{G}_1) = \pi(\text{span}\{v : v \in E_{reg}^0\})$.

Demostración. Primero, notemos que $\mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1 = \text{span}\{v : v \in E_{reg}^0\}$. Esto es claro, ya que \mathcal{G}_0 contiene a todos los vértices y sus combinaciones lineales. Si tomamos un vértice v del grafo E , v pertenece a \mathcal{G}_0 porque podemos considerar a v en E^0 como $v = vv^* = vv$, y claramente $r(v) = r(v^*)$.

Ahora, hacemos la siguiente afirmación: si v es un vértice regular, por la condición (CK2), tenemos que $v = \sum_{e:s(e)=v} ee^*$. Como v es regular, esta suma es finita, y por la definición de span y del conjunto, tenemos que $v \in \mathcal{G}_1$. Así, $\mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1 = \text{span}\{v : v \in E_{reg}^0\}$.

Si $v \in E_{reg}^0$, entonces $v \in \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1$ y $\pi(\text{span}\{v : v \in E_{reg}^0\}) \subseteq \pi(\mathcal{G}_0) \cap \pi(\mathcal{G}_1)$ por las propiedades de homomorfismos de anillos.

Sea $x \in \pi(\mathcal{G}_0) \cap \pi(\mathcal{G}_1)$. Dado que $\mathcal{G}_0 = \text{span}\{v : v \in E^0\}$, existe $a \in \mathcal{G}_1$ tal que $x = \pi(a)$. Debido a que $a \in \mathcal{G}_1$, se puede expresar como $a = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$ donde $\lambda_k \in K$ y $v_k \in E^0$. Además, al pertenecer x a $\pi(\mathcal{G}_1)$, se tiene $x = \pi\left(\sum_{j=1}^m \mu_j e_j f_j^*\right)$, donde $\mu_j \in K$ y $e_j, f_j \in E^1$. Así, $x = \pi\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k\right) = \pi\left(\sum_{j=1}^m \mu_j e_j f_j^*\right)$.

Para todo $1 \leq k \leq n$, si multiplicamos ambos lados de la ecuación por $\pi(v_k)$ por la izquierda, obtenemos que $\pi(\lambda_k v_k) = \pi\left(\sum_{j:s(e_j)=v_k} \mu_j e_j f_j^*\right)$. Dado que existen aristas con origen en v_k , este no es un sumidero. Además, v_k no es un emisor infinito, ya que, en caso contrario, podríamos encontrar una arista $e \in s^{-1}(v_k)$ distinta de los e_j . Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $\pi(ee^*)$ por la izquierda, tendríamos $\pi(\lambda_k ee^*) = 0$, lo que implicaría que $\pi(r(e)) = \pi(\lambda_k^{-1} e^*) \pi(\lambda_k ee^*) \pi(e) = 0$, contradiciendo la hipótesis de que $\pi(v) \neq 0$. Por lo tanto, $v_k \in E_{reg}^0$, y dado que esto es cierto para todo $1 \leq k \leq n$, se concluye que $x = \pi\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k\right) \in \text{span}(\{v : v \in E_{reg}^0\})$. \square

Lema 2.0.21. Si $L_K(E)$ es un A.C.L., entonces $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1} = \mathcal{G}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, si $\pi : L_K(E) \rightarrow A$ es un homomorfismo de anillos, entonces $\pi(\mathcal{F}_n) \cap \pi(\mathcal{G}_{n+1}) = \pi(\mathcal{G}_n) \cap \pi(\mathcal{G}_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Primero, mostraremos que $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1} = \mathcal{G}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}$.

Es claro que $\mathcal{G}_n \cap \mathcal{G}_{n+1} \subseteq \mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}$, dado que $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n$.

Sea $x \in \mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}$. Entonces, x puede expresarse como $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i \beta_i^*$, donde $\lambda_i \in K$, $\alpha_i, \beta_i \in E^p$ con $r(\alpha_i) = r(\beta_i)$ y $0 \leq p \leq n$. Al mismo tiempo, también se puede escribir como $x = \sum_{i=1}^{k'} \lambda'_i \alpha'_i \beta_i'^*$, donde $\lambda'_i \in K$, $\alpha'_i, \beta_i' \in E^{n+1}$ y $r(\alpha'_i) = r(\beta_i')$.

Dado que estos términos tienen longitudes distintas, debemos enfatizar que la única propiedad de $L_K(E)$ que nos permite expresar los elementos como sumas de elementos

de mayor longitud es (CK2). Al usar la relación (CK2), es posible escribir elementos de la forma $\alpha\beta^*$ como sumas de elementos de la forma $\alpha'\beta'^*$, donde $l(\alpha') = l(\alpha) + 1$ y $l(\beta') = l(\beta) + 1$. Así, dado que esta relación solo permite aumentar la longitud en una unidad a la vez, si un elemento en \mathcal{F}_n puede ser representado como uno de \mathcal{G}_{n+1} (suma de elementos de longitud $n + 1$), también debe poder ser representado como suma de elementos de longitud n . De esto, concluimos que $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1} \subseteq \mathcal{G}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1} = \mathcal{G}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}$.

Para mostrar la segunda afirmación del lema, observemos que \mathcal{G}_n es un ideal de F_n . De hecho, sea $x \in \mathcal{G}_n$ y sea $y \in F_n$; entonces $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i \beta_i^*$, donde $\lambda_i \in K$, $\alpha_i, \beta_i \in E^n$ con $r(\alpha_i) = r(\beta_i)$, para $0 \leq i \leq k$. Además, $y = \sum_{i=1}^t \lambda'_i \alpha'_i \beta'^*_i$, donde $\lambda'_i \in K$, $\alpha'_i, \beta'_i \in E^p$ con $r(\alpha'_i) = r(\beta'_i)$ y $0 \leq p, t \leq n$. Entonces,

$$xy = \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i \beta_i^* \right) \left(\sum_{i=1}^t \lambda'_i \alpha'_i \beta'^*_i \right) = \sum_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq t} (\lambda_i \lambda'_j) (\alpha_i \beta_i^*) (\alpha'_j \beta'^*_j).$$

Es claro que no hay problema cuando $l(\alpha'_i) = l(\beta'_i) = n$. Ahora, si $l(\alpha'_i) = l(\beta'_i) = n_0 < n$, entonces $(\alpha_i \beta_i^*) (\alpha'_j \beta'^*_j) = \alpha_i (\beta_i^* \alpha'_j) \beta'^*_j$, por lo que $\beta_i^* \alpha'_j = w_i^*$, con $w_i \in E^{n-n_0}$, o $\beta_i^* \alpha'_j = 0$ esto por el Lema 2.0.4. Si no es 0 entonces $\beta_i^* \alpha'_j = w_i^*$ con $w_i \in E^{n-n_0}$ por lo cual $\alpha_i w_i^* \beta'^*_j = \alpha_i (\beta'_j w_i)^*$ y dado $l(\beta'_j w_i) = l(\beta'_j) + l(w_i) = n_0 + n - n_0 = n$ con lo cual concluimos que $(\beta'_j w_i)^* \in E^n$ o es 0. De ahí que $xy \in \mathcal{G}_n$ y, de manera análoga, $yx \in \mathcal{G}_n$. Por tanto, \mathcal{G}_n es un ideal de \mathcal{F}_n .

Ahora, dado que $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n$, tenemos que $\pi(\mathcal{G}_n) \cap \pi(\mathcal{G}_{n+1}) \subseteq \pi(\mathcal{F}_n) \cap \pi(\mathcal{G}_{n+1})$. Por otro lado, sea $x \in \pi(\mathcal{F}_n) \cap \pi(\mathcal{G}_{n+1})$. Listemos los elementos de E^n como $E^n = \{\alpha_i : i \in I\}$ donde $I = \{1, \dots, a-1, a\}$ si E^n es finito, y $I = \mathbb{N}$ si E^n es infinito. Si definimos $t_m := \pi(\sum_{i=1}^m \alpha_i \alpha_i^*)$, entonces $\{t_m\}_{m \in I}$ es un conjunto de unidades locales para $\pi(\mathcal{G}_n)$. En efecto, sea $x \in \pi(\mathcal{G}_n)$. Entonces, x puede expresarse como $x = \pi(\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha'_i \beta'^*_i)$. Por la definición de $\{t_m\}_{m \in I}$, existe $M \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande tal que t_M contenga en sus términos α'_i, β_i en la lista para $1 \leq i \leq k$. Así, si multiplicamos $t_M x$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \pi \left(\sum_{j=1}^M \alpha_j \alpha_j^* \right) \pi \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha'_i \beta'^*_i \right) &= \pi \left(\sum_{1 \leq j \leq M, 1 \leq i \leq k} \lambda_i \alpha_j \alpha_j^* \alpha'_i \beta'^*_i \right) \\ &= \pi \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha'_i \alpha_i^* \alpha'_i \beta'^*_i \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha'_i \beta_i^* \right) \\
&= x.
\end{aligned}$$

Análogamente $xt_M = x$. Así, tenemos que $\{t_m\}_{m \in I}$ es un conjunto de unidades locales para $\pi(\mathcal{G}_n)$.

Sea $x \in \pi(\mathcal{G}_{n+1})$, podemos escribir $x = \pi(\sum_{i \in F} \alpha_i x_i)$ para $\alpha_i \in E^n$, $x_i \in L_K(E)$, y $F \subseteq I$. Así, existe $m \in I$ tal que $t_m x = x$. Como $t_m \in \pi(\mathcal{G}_n)$ y $\pi(\mathcal{G}_n)$ es un ideal en $\pi(\mathcal{F}_n)$, se sigue que $x = t_m x \in \pi(\mathcal{G}_n)$. Esto nos dice que $x \in \pi(\mathcal{G}_n) \cap \pi(\mathcal{G}_{n+1})$. Así concluimos que $\pi(\mathcal{F}_n) \cap \pi(\mathcal{G}_{n+1}) = \pi(\mathcal{G}_n) \cap \pi(\mathcal{G}_{n+1})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Lema 2.0.22. Para toda A.C.L. $L_K(E)$, si $\pi : L_K(E) \rightarrow A$ es un homomorfismo de anillos con la propiedad de que $\pi(v) \neq 0$, para todo $v \in E^0$, entonces $\pi(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}) = \pi(\mathcal{F}_n) \cap \pi(\mathcal{G}_{n+1})$.

Demostración. Por el Lema 2.0.21 es suficiente mostrar que $\pi(\mathcal{G}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}) = \pi(\mathcal{G}_n) \cap \pi(\mathcal{G}_{n+1})$. Es claro que $\pi(\mathcal{G}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}) \subseteq \pi(\mathcal{G}_n) \cap \pi(\mathcal{G}_{n+1})$. Por otro lado, sea $x \in \pi(\mathcal{G}_n \cap \mathcal{G}_{n+1})$. Como $x \in \pi(\mathcal{G}_n)$, podemos escribir $x = \pi(a)$ donde $a = \sum_{k=1}^m \lambda_k \alpha_k \beta_k^*$ para $\lambda_k \in K$ y $\alpha_k, \beta_k \in E^n$. Para $1 \leq k \leq n$, si multiplicamos la ecuación $\pi(a) = \pi(\sum_{k=1}^m \lambda_k \alpha_k \beta_k^*)$ a la izquierda por $\pi(\alpha_k^*)$ y a la derecha por $\pi(\beta_k)$, obtenemos $\pi(\alpha_k^* a \beta_k) = \pi(\lambda_k r(\alpha_k)) \in \pi(\mathcal{G}_0)$. Además, dado que $x \in \pi(\mathcal{G}_{n+1})$, se tiene que $\pi(\alpha_k^* a \beta_k) = \pi(\alpha_k^*) x \pi(\beta_k)$. Esto se debe a que, si $x \in \mathcal{G}_{n+1}$, entonces x puede expresarse como $x = \pi(\sum_{i=1}^p \lambda'_i \alpha'_i \beta_i'^*)$, donde $\lambda'_i \in K$ y $\alpha'_i, \beta_i' \in E^{n+1}$. Esto es consecuencia de que $\alpha_k^* \alpha'_i = 0$ o e , y, de igual forma, $\beta_i'^* \beta_k = 0$ o e^* , siendo e una arista del grafo E . Por lo tanto, se concluye que $\pi(\alpha_k^*) x \pi(\beta_k) \in \pi(\mathcal{G}_1)$. Por otro lado, $\pi(\alpha_k^* a \beta_k) \in \pi(\mathcal{G}_0) \cap \pi(\mathcal{G}_1)$. Dado que $\pi(\alpha_k^* a \beta_k) = \pi(\lambda_k r(\alpha_k))$, del Lema 2.0.20 se deduce que $r(\alpha_k) \in E_{\text{reg}}^0$. Puesto que esto es válido para todo k , por (CK2) se tiene:

$$a = \sum_{k=1}^m \lambda_k \alpha_k \beta_k^* = \sum_{k=1}^m \lambda_k \alpha_k \left(\sum_{s(e)=r(\alpha_k)} e e^* \right) \beta_k^* = \sum_{k=1}^m \sum_{s(e)=r(\alpha_k)} \lambda_k (\alpha_k e) (\beta_k e)^*$$

Esto implica que $a \in \mathcal{G}_{n+1}$. Así, $a \in \mathcal{G}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}$ y $x = \pi(a) \in \pi(\mathcal{G}_n \cap \mathcal{G}_{n+1})$. \square

Lema 2.0.23. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\pi : \mathcal{F}_{n+1} \rightarrow A$ un homomorfismo de anillos con la propiedad de que $\pi \neq 0$ para todo $v \in E^0$. Asimismo, sea $\tilde{\pi} : \mathcal{F}_{n+1}/\mathcal{G}_{n+1} \rightarrow \pi(\mathcal{F}_{n+1}/\mathcal{G}_{n+1})$ y sea $\bar{\pi} : \mathcal{F}_n/(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}) \rightarrow \pi(\mathcal{F}_n)/\pi(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1})$ los homomorfismos canónicos de anillos inducidos por π , donde $\tilde{\pi}(x + \mathcal{G}_{n+1}) = \pi(x) + \pi(\mathcal{G}_{n+1})$ y $\bar{\pi}(x + \mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}) = \pi(x) + \pi(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1})$.

Entonces, existe un isomorfismo $\phi : \mathcal{F}_n/(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}) \rightarrow \mathcal{F}_{n+1}/\mathcal{G}_{n+1}$ y un isomorfismo $\phi' : \pi(\mathcal{F}_n)/\pi(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}) \rightarrow \pi(\mathcal{F}_{n+1})/\pi(\mathcal{G}_{n+1})$, formando así el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_n/(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{F}_{n+1}/\mathcal{G}_{n+1} \\ \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow \bar{\pi} \\ \pi(\mathcal{F}_n)/\pi(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}) & \xrightarrow{\phi'} & \pi(\mathcal{F}_{n+1})/\pi(\mathcal{G}_{n+1}). \end{array}$$

Demostración. Definimos el homomorfismo

$$\phi : \mathcal{F}_n/(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}) \rightarrow \mathcal{F}_{n+1}/\mathcal{G}_{n+1}$$

por

$$\phi(x + (\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1})) = x + \mathcal{G}_{n+1}.$$

Observamos que ϕ está bien definida, dado que $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1} \subseteq \mathcal{G}_{n+1}$. En particular, ϕ es inyectiva. En efecto, supongamos que $\phi(x + (\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1})) = 0 + \mathcal{G}_{n+1}$. Esto implica que $x \in \mathcal{G}_{n+1}$ y, dado que $x \in \mathcal{F}_n$, concluimos que $x \in \mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}$ y, por tanto, $x + (\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}) = 0 + (\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1})$ por tanto ϕ es inyectiva. Finalmente, notemos que ϕ es sobreyectiva porque $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{G}_{n+1} + \mathcal{F}_n$. Así ϕ es un isomorfismo. Definimos $\phi' : \pi(\mathcal{F}_n)/\pi(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}) \rightarrow \pi(\mathcal{F}_{n+1})/\pi(\mathcal{G}_{n+1})$ por

$$\phi'(x + \pi(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1})) = x + \pi(\mathcal{G}_{n+1}).$$

Por el Lema 2.0.22, se sabe que $\pi(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}) = \pi(\mathcal{F}_n) \cap \pi(\mathcal{G}_{n+1})$. Utilizando este hecho y un argumento análogo al anterior, se demuestra que ϕ' es un isomorfismo. Finalmente, es inmediato verificar que el diagrama en el enunciado conmuta. \square

A continuación, presentamos el resultado principal de este trabajo.

Teorema 2.0.24. (*Unicidad de la \mathbb{Z} -graduación*). Sea $E = (E^0, E^1, r, s)$ un grafo y $L_K(E)$ el A.C.L. asociada con la \mathbb{Z} -graduación canónica. Si A es un anillo \mathbb{Z} -graduado, y $\pi : L_K(E) \rightarrow A$ es un homomorfismo graduado con $\pi(v) \neq 0$ para todo $v \in E^0$, entonces π es inyectiva.

Demostración. Por el Lema 2.0.17, si tomamos como ideal graduado $\ker(\pi)$, tenemos que $\ker(\pi)$ es generado como un ideal por el conjunto $I_0 := \ker(\pi) \cap L_K(E)_0$. En efecto, es suficiente mostrar que la restricción $\pi|_{L_K(E)_0} : L_K(E)_0 \rightarrow A$ es inyectiva. Además, desde que $L_K(E)_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$, es suficiente mostrar que la restricción $\pi|_{\mathcal{F}_n} : \mathcal{F}_n \rightarrow A$ es inyectiva para todo $n \in \mathbb{N}$. Probaremos esto por inducción en n .

Para $n = 0$, tenemos que $\mathcal{F}_0 = \text{span}\{v : v \in E^0\}$. Supongamos que $\sum_{k=1}^m \lambda_k v_k \in \mathcal{F}_0$ y $\pi(\sum_{k=1}^m \lambda_k v_k) = 0$. Por la forma en que se definen las relaciones en $L_K(E)$, el conjunto de vértices $\{v_k\}$ está formado por idempotentes mutuamente ortogonales, así para $1 \leq j \leq m$ tenemos que

$$\pi(\lambda_j v_j) = \sum_{k=1}^m \pi(v_j) \pi(\lambda_k v_k) = \pi(v_j) \sum_{k=1}^m \pi(\lambda_k v_k) = \pi(v_j) \pi\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k v_k\right) = 0$$

Así, $\lambda_j v_j \in \ker(\pi)$, y por el Lema 1.2.11, tenemos que $\lambda_j = 0$ o $v_j = \lambda_j^{-1}(\lambda_j v_j) \in \ker(\phi)$. Por hipótesis, $\pi(v_j) \neq 0$, de ahí que $v_j \notin \ker(\pi)$ y $\lambda_j = 0$. Como j fue arbitrario, tenemos que $\lambda_k = 0$ para todo k y $\sum_{k=1}^m \lambda_k v_k = 0$. Por tanto, $\pi|_{\mathcal{F}_0}$ es inyectiva.

Para el paso inductivo, asumimos que $\pi|_{F_n} : F_n \rightarrow A$ es inyectiva. Entonces podemos definir el siguiente diagrama conmutativo con flechas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}_{n+1} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{F}_{n+1} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{F}_{n+1}/\mathcal{G}_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \pi|_{\mathcal{G}_{n+1}} & & \downarrow \pi|_{\mathcal{F}_{n+1}} & & \downarrow \tilde{\pi} & & \\ 0 & \longrightarrow & \pi(\mathcal{G}_{n+1}) & \xrightarrow{\phi'} & \pi(\mathcal{F}_{n+1}) & \xrightarrow{\tau'} & \pi(\mathcal{F}_{n+1})/\pi(\mathcal{G}_{n+1}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (1)$$

Dado que definimos $\phi(x) = x$ y $\tau(x) = x + \mathcal{G}_{n+1}$, es claro que por definición de anillo cociente $\text{Im}(\phi) = \ker(\tau)$, y análogamente $\text{Im}(\phi') = \ker(\tau')$. Definimos $\tilde{\pi} : \mathcal{F}_{n+1}/\mathcal{G}_{n+1} \rightarrow \pi(\mathcal{F}_{n+1})/\pi(\mathcal{G}_{n+1})$ como el homomorfismo canónico inducido por π , $\tilde{\pi}(x + \mathcal{G}_{n+1}) = \pi(x) + \pi(\mathcal{G}_{n+1})$.

Consideremos $\pi|_{\mathcal{G}_{n+1}}$. Para algún $v \in E^0$, sea

$$\mathcal{G}_{n+1}(v) := \text{span}\{\alpha\beta^* : \alpha, \beta \in E^{n+1} \text{ y } r(\alpha) = r(\beta) = v\}.$$

Dado que $\mathcal{G}_{n+1}(v)$ es ortogonal a $\mathcal{G}_{n+1}(w)$ para $v \neq w$, esto significa que si tomamos cualquier elemento $x \in \mathcal{G}_{n+1}(v)$ y cualquier elemento $y \in \mathcal{G}_{n+1}(w)$, se cumple que $xy = yx = 0$, y $\mathcal{G}_{n+1} = \bigoplus_{v \in E^0} \mathcal{G}_{n+1}(v)$. Aún más, para cualquier $\alpha\beta^*, \gamma\delta^* \in \mathcal{G}_{n+1}(v)$, tenemos

$$\alpha\beta^* \gamma\delta^* = \begin{cases} \alpha\delta^* & \text{si } \beta = \gamma, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Por ende, el conjunto $\{\alpha\beta^* : \alpha, \beta \in E^{n+1} \text{ y } r(\alpha) = r(\beta) = v\}$ posee la estructura de unidades matriciales, como se muestra en el Ejemplo 1.1.14. Así, se tiene que $\mathcal{G}_{n+1}(v) \cong$

$M_{m(v)}(K)$, donde $m(v) := |\{\alpha \in E^{n+1} : r(\alpha) = v\}|$ (el cual puede ser infinito numerable). Para demostrar esto, considere una función biyectiva cualquiera

$$f : \{\alpha \in E^{n+1} : r(\alpha) = v\} \rightarrow \{1, \dots, m(v)\}.$$

A partir de esta función, defina el siguiente homomorfismo $\varphi : \mathcal{G}_{n+1}(v) \rightarrow M_{m(v)}(K)$ de la siguiente forma:

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i \beta_i^* \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i E_{f(\alpha_i), f(\beta_i)}.$$

De lo anterior, dado que $M_n(K)$ es simple para cualquier n , se concluye que $\mathcal{G}_{n+1}(v)$ es simple. Si tomamos $I = \ker(\pi|_{\mathcal{G}_{n+1}})$, entonces $I = \bigoplus_{v \in E^0} (I \cap \mathcal{G}_{n+1}(v))$, dado que $\mathcal{G}_{n+1} = \bigoplus_{v \in E^0} \mathcal{G}_{n+1}(v)$ como anillos. Como $\mathcal{G}_{n+1}(v)$ es simple, el ideal $I \cap \mathcal{G}_{n+1}(v)$ es 0 o todo $\mathcal{G}_{n+1}(v)$. Además, para algún $v \in E^0$, si $\alpha \in E^*$ con $r(\alpha) = v$, entonces $\pi(\alpha^* \alpha) = \pi(v) \neq 0$, lo que implica que $\pi(\alpha \alpha^*) \neq 0$.

Para verificar esto, supongamos que $\pi(\alpha \alpha^*) = 0$. Dado que $\pi(v) = \pi(vv) = \pi(\alpha^* \alpha \alpha^* \alpha) = \pi(\alpha) \pi(\alpha \alpha^*) \pi(\alpha^*) = \pi(\alpha) \cdot 0 \cdot \pi(\alpha^*) = 0$, se obtiene una contradicción, ya que $\pi(v) \neq 0$. Por lo tanto, se concluye que $\pi(\alpha \alpha^*) \neq 0$. De este modo, $\alpha \alpha^* \notin I \cap \mathcal{G}_{n+1}(v)$ (porque I se define como el kernel de π), y como $I \cap \mathcal{G}_{n+1}(v)$ no puede ser todo $\mathcal{G}_{n+1}(v)$, entonces $I \cap \mathcal{G}_{n+1}(v) = \{0\}$ para todo $v \in E^0$. Por lo tanto, $I = \{0\}$ y $\pi|_{\mathcal{G}_{n+1}}$ es inyectiva.

Definimos $\bar{\pi} : \mathcal{F}_n / (\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}) \rightarrow \pi(\mathcal{F}_n) / \pi(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1})$ como el homomorfismo canónico inducido por π . Como $\pi|_{\mathcal{G}_{n+1}}$ es inyectiva, tenemos que $\pi|_{\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}} : \mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1} \rightarrow \pi(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1})$ es inyectiva. Veamos que $\bar{\pi} : \mathcal{F}_n / (\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}) \rightarrow \pi(\mathcal{F}_n) / \pi(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1})$ es inyectiva.

Supongamos que $\bar{\pi}(x + \mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}) = \pi(x) + \pi(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}) = 0$. Esto implica que $\pi(x) \in \pi(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1})$, así que existe $y \in \mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}$ tal que $\pi(x) = \pi(y)$. Por la hipótesis de que $\pi|_{\mathcal{F}_n}$ es inyectiva, tenemos que $x = y$, por lo que $x \in \mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_{n+1}$ y, por tanto, $x = 0$. Así, $\ker(\bar{\pi}) = \{0\}$, por lo que $\bar{\pi}$ es inyectiva.

Así, por el Lema 2.0.23, se cumple el diagrama conmutativo, y como $\bar{\pi}$ es inyectiva, entonces $\tilde{\pi}$ es inyectiva.

Dado que $\pi|_{\mathcal{G}_{n+1}}$ y $\tilde{\pi}$ son inyectivas, por el Lema corto de los Cinco sobre el diagrama conmutativo (1), tenemos que $\pi|_{\mathcal{F}_{n+1}} : \mathcal{F}_{n+1} \rightarrow \pi(\mathcal{F}_{n+1})$ es inyectiva. Así, por el Principio de Inducción Matemática, $\pi|_{\mathcal{F}_n} : \mathcal{F}_n \rightarrow A$ es inyectiva para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, $\pi|_{L_K(E)_0} : L_K(E)_0 \rightarrow A$ es inyectiva, y como $\ker(\pi) = \ker(\pi) \cap L_K(E)_0 = \ker(\pi|_{L_K(E)_0}) = \{0\}$, concluimos que π es inyectiva. \square

3. Implicaciones y Aplicaciones del Teorema de Unicidad de la \mathbb{Z} -graduación.

El Teorema de Unicidad de la \mathbb{Z} -graduación tiene importantes implicaciones en el estudio de la estructura de los ideales de las álgebras de caminos de Leavitt. Este resultado fue utilizado por Tomforde en ⁴ para describir la estructura de ciertos ideales de $L_K(E)$. Además, en combinación con el Teorema de Unicidad de Cuntz-Krieger (demostrado en el mismo artículo), Tomforde establece el resultado principal de ⁴, el cual determina las condiciones bajo las cuales $L_K(E)$ es simple.

Antes de presentar el resultado, es necesario introducir algunos conceptos clave:

Definición 3.0.1. *Sea E un grafo dirigido.*

- *El grafo E satisface la Condición (L) si cada camino cerrado en E tiene una salida.*
- *El grafo E satisface la Condición (K) si cada vértice en E^0 o bien no es la base de ningún camino cerrado, o bien es la base de al menos dos caminos simples cerrados.*
- *Un subconjunto $H \subseteq E^0$ se dice hereditario si para cualquier $e \in E^1$ se tiene que $s(e) \in H$ implica $r(e) \in H$.*
- *Un subconjunto hereditario $H \subseteq E^0$ se llama saturado si para todo vértice $v \in E^0$ con $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$, se cumple que:*

$$\{r(e) : e \in E^1 \text{ y } s(e) = v\} \subseteq H \text{ implica que } v \in H.$$

Con estas definiciones, presentamos el resultado principal:

Proposición 3.0.2 (Teorema de Simplicidad). *Sea E un grafo, y sea $L_K(E)$ el álgebra de caminos de Leavitt asociada. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *$L_K(E)$ es simple.*
2. *E satisface la Condición (L), y los únicos subconjuntos hereditarios saturados de E^0 son \emptyset y E^0 .*
3. *E satisface la Condición (K), y los únicos subconjuntos hereditarios saturados de E^0 son \emptyset y E^0 .*

4. *E satisface la Condición (L), E es cofinal, y siempre que $v \in E_{\text{sing}}^0$ y $w \in E^0$, existe un camino de w a v .*
5. *E satisface la Condición (K), E es cofinal, y siempre que $v \in E_{\text{sing}}^0$ y $w \in E^0$, existe un camino de w a v .*

Este resultado establece una conexión directa entre la estructura del álgebra $L_K(E)$ y la del grafo E , permitiendo describir una a partir de la otra. A continuación, en un ejemplo, clasificaremos los grafos examinados en este estudio y determinaremos si, dado un cuerpo K no nulo, el álgebra $L_K(E)$ es simple.

Ejemplo 3.0.3.

- *El grafo E de la Figura 1 satisface la condición (L) al no poseer caminos cerrados. Además, es cofinal porque no tiene caminos infinitos. Sin embargo, al tener dos sumideros, no existe un camino entre ellos, lo que implica que no cumple con la condición (4) de la Proposición 3.0.2. Por tanto, $L_K(E)$ no es simple.*
- *En el grafo E de la Figura 1.2, no hay caminos de v_1 a v_2 , lo que incumple la condición (4) de la Proposición 3.0.2. Esto implica que $L_K(E)$ no es simple. Este ejemplo muestra que, si un grafo E tiene más de un sumidero, $L_K(E)$ no será simple debido a la falta de caminos entre ellos.*
- *Para el grafo E de Figura 1.6, $L_K(E)$ no es simple, ya que existe un subconjunto hereditario saturado $\{v_4, v_5, v_6\}$ que no es vacío ni igual a E^0 .*
- *El grafo E de la Figura 1.7 tiene dos sumideros, lo que incumple la condición (4) de la Proposición 3.0.2. Por lo tanto, $L_K(E)$ no es simple.*
- *El grafo E de la Figura 1.8 satisface la condición (K), es cofinal y no tiene vértices singulares. Por el punto (5) de la Proposición 3.0.2, $L_K(E)$ es simple.*
- *En el grafo E de la Figura 2.1, se cumple la condición (L) al no tener caminos cerrados y es cofinal al carecer de caminos infinitos. Solo existe un vértice singular, v_2 , y para todo $v \in E^0$ hay un camino hacia él. Así, por la condición (4) de la Proposición 3.0.2, $L_K(E)$ es simple.*
- *El grafo R_1 de la Figura 2.2 no cumple la condición (L), ya que el camino cerrado e_1 no tiene salidas. Por el punto (2) de la Proposición 3.0.2, $L_K(R_1)$ no es simple. Esto*

también confirma que $K[x, x^{-1}]$, el anillo de polinomios de Laurent, no es simple, ya que es isomorfo a $L_K(R_1)$.

- Para $n \geq 2$, el grafo R_n satisface la condición (L), es cofinal y no tiene vértices singulares. Por tanto, cumple la condición (5) de la Proposición 3.0.2, lo que implica que $L_K(R_n)$ es simple para $n \geq 2$.
- En el grafo E de la Figura 2.3, no hay caminos cerrados, por lo que satisface la condición (L). Además, E es cofinal al no tener caminos infinitos y posee un único vértice singular, v_n , con un camino desde cualquier $v \in E^0$ hacia él. Por la condición (4) de la Proposición 3.0.2, $L_K(E)$ es simple. Esto coincide con el hecho de que $L_K(E)$ es isomorfo a $M_n(K)$, el anillo de matrices $n \times n$, el cual es simple.

Bibliografía

- Abrams, G., P. Ara y M. Siles. *“Leavitt Path Algebras”*. Vol. 2191. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2017 (vid. pág. 9).
- Abrams, G. y G. Aranda Pino. “The leavitt path algebra of a graph”. En: *Journal of Algebra* 293.2 (2005), págs. 319-334. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2005.07.028 (vid. pág. 8).
- Aranda Pino, G., F. Perera Domènech y M. Siles Molina. *“Graph Algebras: Bridging the Gap between Analysis and Algebra”*. Málaga: SPICUM, 2007 (vid. pág. 9).
- Bremner, M. R., I. R. Hentzel y L. A. Peresi. “Dimension formulas for the free nonassociative algebra”. En: *Communications in Algebra* 33.11 (2005), págs. 4063-4081. DOI: 10.1080/00927870500261389 (vid. pág. 9).
- Fraleigh, J. B. *“Algebra abstracta: Primer curso”*. México: Addison-Wesley, 1968 (vid. pág. 9).
- Grillet, P. A. *“Abstract algebra”*. New York: Springer, 2011 (vid. pág. 9).
- Hazrat, R. *“Graded rings and graded Grothendieck groups”*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016 (vid. pág. 31).
- Hungerford, T. W. *“Algebra”*. 1st. New York: Rinehart y Winston, 1974 (vid. pág. 9).
- Leavitt, W. G. “The module type of homomorphic images”. En: *Duke Mathematical Journal* 32.2 (1965). DOI: 10.1215/s0012-7094-65-03231-x (vid. pág. 8).
- Nastasescu, C. y V. F. Oystaeyen. *“Methods of graded rings”*. New York: Springer, 2004 (vid. págs. 9, 31).
- Raeburn, I. *“Graph algebras”*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2005 (vid. pág. 8).

- Tomforde, M. "Leavitt path algebras with coefficients in a commutative ring". En: *Journal of Pure and Applied Algebra* 215.4 (2011), págs. 471-484. DOI: 10.1016/j.jpaa.2010.04.031 (vid. pág. 31).
- "Uniqueness theorems and ideal structure for Leavitt Path algebras". En: *Journal of Algebra* 318.1 (2007), págs. 270-299. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2007.01.031 (vid. págs. 8, 9, 55).