ESPACIOS DE BANACH

vs.

ESPACIOS DE HILBERT

JAIRO GÓMEZ MONCADA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2007

ESPACIOS DE BANACH

vs.

ESPACIOS DE HILBERT

JAIRO GÓMEZ MONCADA

Trabajo presentado para optar al título de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Director
GILBERTO ARENAS DÍAZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

A Dios, mis padres, mi amor y mi hermana.

Agradecimientos

Especialmente:

- **Dios**, por darme la sabiduría y ganas de lograr mis metas.
- **Mis padres José y Graciela** y **mi hermanita**, por brindarme apoyo incondicional y comprensión durante toda la carrera, además de compartir conmigo grandes momentos de mi vida.
- **Mi amor Paola Andrea**, por su apoyo, compañía, comprensión y amor incondicional, durante mi vida universitaria.
- Al profesor **Gilberto Arenas**, por sus enseñanzas y paciencia en la realización de este proyecto.
- Los **profesores** de la Escuela de Matemáticas, especialmente al profesor Edilberto Reyes, por sus aportes en mi formación académica.

TITLE: BANACH SPACES *vs.* HILBERT SPACES*
AUTHOR: JAIRO GÓMEZ MONCADA**

KEY WORDS: Normed Spaces, Metric Spaces, Hilbert Space, Banach Space.

DESCRIPTION

Two of the most important concepts in the study of the mathematical analysis, are perhaps, distance and norm. Many results are directly or indirectly related with them, for example: the notion of limit, the notion of convergence, the notion of completed the notion of compacivity among others, which are fundamental in the study of varied concepts of mathematics.

Although, it could be interpreted that distance and norm are equal, this is not so, there are normed spaces that are not metric spaces, while all metric space can be set with a norm, therefore, all notions that are defined in the metric spaces can be applied to the normed spaces, in particular the concept of completitivity and convergence, which will lead us to our objective of the study of spaces of Banach and Hilbert.

The report is organized the following way: First chapter. Pre-requirements are introduced or the necessary concepts for the study that is intended to be present concepts of metric spaces, lineal spaces, normed spaces, and spaces with interior product are presented, among others.

The second chapter the notion of Banach and Hilbert is given, some examples will be shown, and some results will be given as well in relation to such spaces, a pararel will be done among spaces by studying which spaces meet the characteristics of being Hilbert, being Banach or being simultaneously Hilbert and Banach.

---

* Monograph

** FACULTY OF SCIENCES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR GILBERTO ARENAS DÍAZ.

TÍTULO: ESPACIOS DE BANACH *vs.* ESPACIOS DE HILBERT*

AUTOR: JAIRO GÓMEZ MONCADA**

PALABRAS CLAVES: espacio métrico, espacio normado, espacio de Hilbert, espacio de Banach.

DESCRIPCIÓN

Dos de los conceptos más importantes en el estudio del análisis matemático, son quizás, el de distancia y el de norma. Muchos resultados están relacionados directa o indirectamente con ellos, por ejemplo: la noción de límite, la noción de convergencia, la noción de completez, la noción de compacidad, entre otras, que son fundamentales en el estudio de diversos concepto de la matemática.

Aunque podría pensarse que distancia y norma son iguales, no es así, existen espacios normados que no son espacios métricos, mientras que todo espacio métrico puede dotarse de una norma, luego todas las nociones que se definen en los espacios métricos se pueden aplicar a los espacios normados, en particular el concepto de completitud y convergencia, que nos llevará al objetivo de nuestro estudio que son los espacios de Banach y de Hilbert.

El trabajo se encuentra ordenado de la siguiente forma:

En el primer capítulo se presentan los prerrequisitos o conceptos necesarios para el estudio que se pretende realizar, se presentan los conceptos de espacios métricos, espacios lineales, espacio normado y espacio con producto interior, entre otros.

En el segundo capítulo se da la noción de Espacio de Banach y Espacio de Hilbert, se presentan algunos ejemplos, y se dan algunos resultados con relación a dichos espacios, se hace también un paralelo entre dichos espacios, estudiando que espacios cumplen la característica de ser Hilbert, ser Banach o ser simultáneamente Hilbert y Banach.

---

* Monografía

** FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR GILBERTO ARENAS DÍAZ.

Contenido

Introducción

En el estudio del análisis matemático, uno de los conceptos más importantes, es quizá, el de distancia. Muchos resultados están relacionados directa o indirectamente con él, por ejemplo: la noción de convergencia, la noción de completez, la noción de compacidad, entre otras, que son fundamentales en el estudio de diversos conceptos de la matemática.

Otro concepto importante en el estudio del análisis matemático es el de norma, aunque podría pensarse que distancia y norma son iguales, no es así, existen espacios normados que no son métricos, mientras que todo espacio métrico puede dotarse de una norma, luego todas las nociones que se definen en los espacios métricos se pueden aplicar a los espacios normados, en particular el concepto de completitud y convergencia, que nos llevará al objetivo de nuestro estudio que son los espacios de Banach y de Hilbert.

El propósito del presente trabajo es mostrar los conceptos básicos para el estudio de los espacios de Banach y los espacios de Hilbert, presentar ejemplos importantes de cada uno y hacer un paralelo entre ellos, mostrando cuales son solo espacios de Banach, cuales son solo espacios de Hilbert, o cuales son Espacios de Banach y Espacios de Hilbert simultáneamente.

El trabajo se encuentra ordenado de la siguiente forma:

En el primer capítulo se presentan los prerrequisitos o conceptos necesarios para el estudio que se pretende realizar, se presentan los conceptos de espacios métricos, espacios lineales, espacio normado y espacio con producto interior, entre otros.

En el segundo capítulo se da la noción de Espacio de Banach y Espacio de Hilbert, se presentan algunos ejemplos, y se dan algunos resultados con relación a dichos espacios, se hace también un paralelo entre dichos espacios, estudiando que espacios cumplen la característica de ser Hilbert, ser Banach o ser simultáneamente Hilbert y Banach.

Capítulo 1

Conceptos básicos

Uno de los problema principales en los fundamentos del análisis matemático, fue formalizar la idea de que tan cerca estuviese un elemento de otro elemento. Esto claramente involucra el concepto de distancia, ya que la posibilidad de medir distancias, permite distinguir entre puntos cercanos y lejanos.

La noción intuitivamente de espacio métrico, es la de un conjunto en el cual tiene sentido "medir distancias", es decir en el cual, dados dos elementos cualesquiera del conjunto, se puede calcular la "distancia entre" ellos. Es de esperarse que dicha distancia sea un número real positivo, o podría ser igual a cero en el caso extremo en el que los elementos sean iguales. Otra propiedad importante de la distancia, es que la distancia del elemento inicial al elemento final, es igual a la distancia del elemento final al elemento inicial. Por otra parte, recordando un teorema de la geometría euclidiana, según el cual en todo triángulo cada lado es menor que la suma de los otros dos, se tiene que si existe otro elemento, entonces la distancia del primer elemento al segundo sumada con la distancia del segundo elemento al tercero, es mayor o igual que la distancia del primer elemento al tercero. Esta desigualdad se conoce con el nombre de desigualdad triangular.

En el presente capítulo es formalizado este y otros conceptos fundamentales del análisis matemático.

1.1. Espacios métricos

Definición 1.1. *Un espacio métrico es un conjunto* X*, no vacío, dotado de una función* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *(llamada la métrica del espacio) que satisface las siguientes propiedades, cualesquiera sean los puntos* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ *de* X

M1) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$;

M2) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

No es difícil verificar, que sin importar cuales sean los elementos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$*, se cumple que* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$*,* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ *y que* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Es común encontrar en los textos, la notación (X, d) para representar el espacio X con su métrica d, si la métrica está implícita o no hay peligro a confusión se hablará simplemente del espacio métrico X.

Una noción importante, relacionada con el concepto de distancia, es la de bola.

Definición 1.2. *Sean* (X, d) *un espacio métrico ,* $a \in X$ *y un* $r \in$ *mathbbZ*$^+$*, definimos el conjunto* $\{\mathbf{x} \in X : d(a, \mathbf{x}) < r\}$ *como la bola abierta con centro en* a *y radio* r *y se denota* $B(a; r)$.

De forma equivalente se define la bola cerrada con centro en a y radio r, como

$$\overline{B(a; r)} := \{\mathbf{x} \in M : d(a, \mathbf{x}) \leq r\}.$$

Ejemplo 1.3 (Distancia trivial o discreta). *Sea* X *un conjunto arbitrario y* d_{disc} *la distancia definida por*

$$d_{disc}(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y; \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

Veamos que en efecto (X, d_{disc}) *es un espacio métrico.*

M1) $d_{disc}(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$*. Es trivial gracias a la definición de* d_{disc}.

M2) $d_{disc}(x, y) \leq d_{disc}(x, z) + d_{disc}(y, z)$*. Analizaremos los posibles casos*

Caso 1. Si $x = y$ *y* $x \neq z$ *tenemos* $d_{disc}(x, y) = 0$ *entonces*

$$d_{disc}(x, y) \leq d_{disc}(x, z) + d_{disc}(y, z).$$

Caso 2. Si $y = z$ *y* $x \neq y$ *tenemos* $d_{disc}(y, z) = 0$ *y* $d_{disc}(x, y) = 1$ *entonces*

$$d_{disc}(x, y) \leq d_{disc}(x, z) + d_{disc}(y, z).$$

Si x, y, z *son tres puntos diferentes tenemos*

$$d_{disc}(x, y) = d_{disc}(x, z) = d_{disc}(y, z) = 1,$$

entonces

$$d_{disc}(x, y) \leq d_{disc}(x, z) + d_{disc}(z, y).$$

Luego (X, d_{disc}) *es un espacio métrico.*

Observe que para dicha métrica la bola $B\,(a; r)$ *es el punto* $\{a\}$ *si* $r \leq 1$*, mientras que si* $r > 1$ *entonces* $B\,(a; r) = X$ *(ver figura 1.1).*

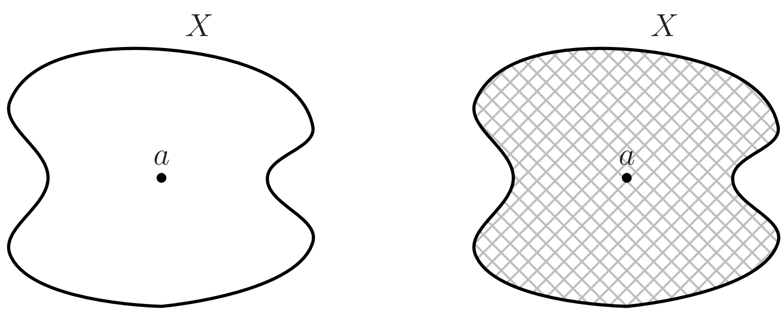

Figura 1.1: Bolas con la métrica discreta.

La anterior métrica es conocida con el nombre de métrica trivial, discreta.

Ejemplo 1.4 (Métrica sobre $\mathbb{R}$). *Si sobre* $\mathbb{R}$ *se define la distancia* $d_u(x, y) = |x - y|$*, claramente por las propiedades de valor absoluto se tiene que* $d_u\,(x, y) = 0$ *si y sólo si* $|x - y| = 0$*, pero esto se tiene, si y sólo si* $x - y = 0$*, es decir si* $x = y$*; por otra parte si* $x, y, z \in \mathbb{R}$*, entonces, nuevamente por la propiedades del valor absoluto se tiene que*

$$\begin{aligned} d_u\,(x, y) &= |x - y| \\ &= |x - z + z - y| \end{aligned}$$

$$\leq |x-z| + |z-y|$$
$$= |x-z| + |y-z| = d_u(x,z) + d_u(y,z).$$

Observe que en este caso, la bola $B(a;r) = \{a \in \mathbb{R} : |a-x| < r\} = (a-r, a+r)$, *(un intervalo abierto).*

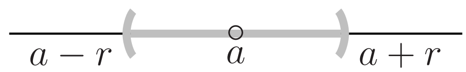

Figura 1.2: Bolas en $\mathbb{R}$ con la métrica usual.

Ejemplo 1.5 (El espacio de los códigos). *Sean* $\Sigma = \{0,1,2\}$, *se define el espacio*

$$\Sigma^{\mathbb{N}} = \{x_1x_2x_3\ldots \mid x_i \in \Sigma, i = 1,2,3,\ldots\},$$

sean $\mathbf{x} = x_1x_2x_3\ldots$ *y* $\mathbf{y} = y_1y_2y_3\ldots$ *si definimos sobre* $\Sigma^{\mathbb{N}}$ *la distancia*

$$d_*(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{4^i},$$

se obtiene que $\left(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_*\right)$ *es un espacio métrico. Este espacio se conoce como* ***Espacio de los Códigos****.*

Observe que está distancia está bien definida ya que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{4^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{4^i} = \frac{2}{3}.$$

Además satisface los axiomas de espacio métrico.

M1) *Si* $d_*(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{4^i} = 0$ *si y sólo si* $|x_i - y_i| = 0$ *para todo* $i = 1,2,3,\ldots$, *si y sólo si* $x_i = y_i$ *para todo* $i = 1,2,3,\ldots$, *si y sólo si* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

M2) *Ahora, sea* $z = z_1z_2z_3\ldots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, *entonces*

$$\begin{aligned} d_*(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{4^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - z_i + z_i - y_i|}{4^i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|}{4^i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - z_i|}{4^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|y_i - z_i|}{4^i} \\ &= d_*(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d_*(\mathbf{y},\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Por lo cual, $\left(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_*\right)$ *es un espacio métrico.*

Podemos generalizar el espacio de los códigos, *considerando* $\Sigma = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$, *donde* N *es un entero positivo fijo, de donde*

$$\Sigma^{\mathbb{N}} = \{\mathbf{x} = x_1 x_2 x_3 \ldots \mid x_i \in \Sigma, i \in \mathbb{N}\}.$$

Los elemento de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ *los llamaremos* códigos *o* palabras semi-infinitas.

Por ejemplo, si $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$, $\mathbf{x} = 100212012323232323\ldots = 1002120\overline{123} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$. *La barra sobre los números indica que se repetirán indefinidamente.*

En general, sobre $\Sigma^{\mathbb{N}}$ *se define la distancia entre los códigos* $\mathbf{x} = x_1 x_2 x_3 \ldots$ *e* $\mathbf{y} = y_1 y_2 y_3 \ldots$ *por*

$$d_*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i}. \tag{1.1}$$

Observe que efectivamente esta distancia corresponde a la definida antes para el caso $N = 4$. *Por ejemplo: si* $\mathbf{x} = \overline{301}$, $\mathbf{y} = \overline{123}$ *son códigos en* $\{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$ *entonces*

$$\begin{aligned}
d_*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{|3-1|}{5} + \frac{|0-2|}{5^2} + \frac{|1-3|}{5^3} + \frac{|3-1|}{5^4} + \frac{|0-2|}{5^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \frac{2}{125} + \cdots \\
&= 2\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^i = 2\left(\frac{1}{1-1/5} - 1\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

No es difícil ver que en efecto d_* *es una métrica sobre* $\Sigma^{\mathbb{N}}$. *En primer lugar debemos probar que la serie en* (1.1) *es siempre convergente. Como* $0 \leq x_i, y_i \leq N-1$, *para todo* $i = 1, 2, 3, \ldots$, *entonces* $|x_i - y_i| < N$, $\forall i \in \mathbb{N}$, *luego*

$$\frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} < \frac{N}{(N+1)^i},$$

lo que implica

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} < N \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(N+1)^i}$$

y basta entonces usar el criterio de comparación para series, para concluir que $d_*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *siempre existe. Las propiedades (M1) y (M2) se demuestran de forma equivalente a como se hizo para el caso* $N = 3$.

Ejemplo 1.6 (métrica sobre $\mathbb{R}^2$). *El conjunto de parejas ordenadas de números reales,* $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ *(o* $\mathbb{R}^2$*) con la distancia*

$$d_u((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2},$$

llamada distancia usual o euclidiana sobre $\mathbb{R}^2$*, se denomina* espacio euclídeo de dos dimensiones, $(\mathbb{R}^2, d_u)$*. Veamos que en efecto* d_u *es una métrica.*

M1) *Para cualesquiera* $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ *tenemos*

$$\begin{aligned} d_u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (y_1 - x_1)^2 = (y_2 - x_2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow y_1 = x_1 \ \wedge \ y_2 = x_2 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}. \end{aligned}$$

M2) *Para probar la desigualdad triangular haremos uso de otra desigualdad conocida como la* desigualdad de Cauchy-Schwarz *(una demostración del caso general es dada en el Teorema 1.18(1)) y que establece:*

Para cualesquiera $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ *se cumple*

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right). \qquad \text{(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)}$$

De esta desigualdad es inmediato que:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq |a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}. \tag{1.2}$$

Por otra parte tenemos:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 &= \left(a_1^2 + a_2^2\right) + 2\left(a_1 b_1 + a_2 b_2\right) + \left(b_1^2 + b_2^2\right) \\ &\leq \left(a_1^2 + a_2^2\right) + 2\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right) + \left(b_1^2 + b_2^2\right) \\ &= \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right)^2. \end{aligned}$$

De esta manera, tomando $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ *y* $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ *elementos cualesquiera de* $\mathbb{R}^2$ *y tomando además:* $a_1 = z_1 - x_1$, $a_2 = z_2 - x_2$, $b_1 = y_1 - z_1$ *y* $b_2 = y_2 - z_2$*, tenemos:* $a_1 + b_1 = y_1 - x_1$ *y* $a_2 + b_2 = y_2 - x_2$*, y por tanto:*

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \leq \left(\sqrt{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}\right)^2$$

de donde

$$\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \leq \sqrt{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}$$

es decir: $d_u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_u(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d_u(\mathbf{y}, \mathbf{z})$*, como se quería ver.*

Note que en este caso, la bola $B\left((x_1,y_1);r\right)$ *representa, en el plano, el interior de un circulo con centro el punto* (x_1,y_1) *y radio* r*. En efecto*

$$\begin{aligned}B\left((x_1,y_1);r\right) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R} : d_u\left((x_1,y_1),(x,y)\right)<r\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R} : \left((x_1-x)^2+(y_1-y)^2\right)^{1/2}<r\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R} : (x_1-x)^2+(y_1-y)^2<r^2\right\}\end{aligned}$$

aquí es claro que $(x_1-x)^2+(y_1-y)^2<r^2$ *representa los punto interiores al circulo con centro* (x_1,y_1) *y radio* r*. Como lo muestra la figura 1.3.*

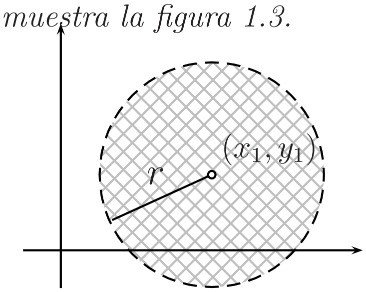

Figura 1.3: Bolas en $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidiana.

Ejemplo 1.7 (Métrica sobre el espacio de funciones continuas). *El conjunto de todas las funciones continuas definidas en el intervalo* $[a,b]$ *sobre* $\mathbb{R}$*, es denotado por* $C[a,b]$*, es decir,*

$$C\left[a,b\right]=\left\{f \mid f:[a,b]\to\mathbb{R},\quad f \textit{ es continua}\right\}.$$

Para este conjunto podemos definir la métrica

$$d(f,g)=\max\left\{|g(t)-f(t)| : a\leq t\leq b\right\}. \tag{1.3}$$

Fácilmente se ve que $d(f,g)=0$ *si y solo si* $f(t)=g(t)$ *para todo* $t\in[a,b]$*.*

Por otra parte, si $h\in C[a,b]$*, entonces*

$$\begin{aligned}d\left(f,g\right) &= \max\left\{|g(t)-f(t)| : a\leq t\leq b\right\}\\ &= \max\left\{|g(t)-h(t)+h(t)-f(t)| : a\leq t\leq b\right\}\\ &\leq \max\left\{|g(t)-h(t)| : a\leq t\leq b\right\}+\max\left\{|h(t)-f(t)| : a\leq t\leq b\right\}\\ &= d\left(h,g\right)+d\left(f,h\right)\end{aligned}$$

Si $f\in C\left[a,b\right]$*, la bola* $B\left(f;r\right)$ *puede verse como todas las funciones continuas definidas en el intervalo* $[a,b]$ *cuyos valores en cada* x *están entre* $f\left(x\right)-r$ *y* $f\left(x\right)+r$*, esto se esboza en la Figura 1.4.*

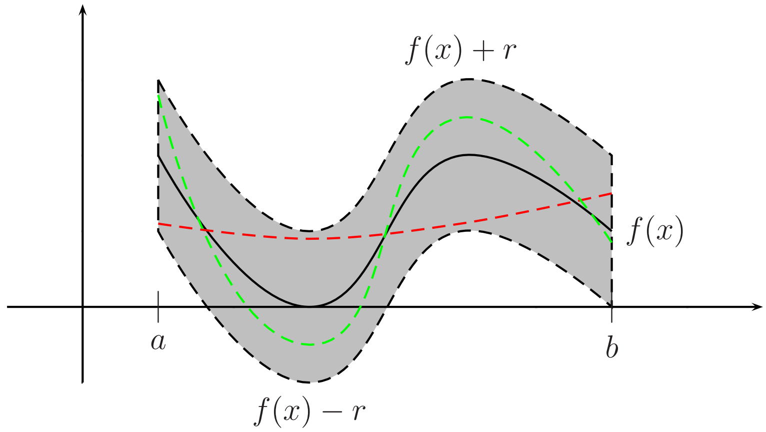

Figura 1.4: Bolas en $C[a,b]$ con la métrica $d(f,g) = \max\{|g(t) - f(t)| : a \leq t \leq b\}$.

1.2. Espacio lineal, norma y producto interior

Definición 1.8. *Un espacio lineal sobre un campo*[1] K *es un grupo abeliano* L *respecto a la suma en el cual está definida la operación de multiplicación de un elemento del campo por uno del grupo de manera que se satisfacen las siguientes axiomas:*

$L1: \ \forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{x} \in L, \alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x};$

$L2: \ \forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{x} \in L, (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x};$

$L3: \ \forall \alpha \in K, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L, \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y};$

$L4: \ \forall \mathbf{x} \in L, 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}.$

En los axiomas anteriores el signo "+" señala la operación intrínseca de grupo y "1" es la unidad del campo K*, que por lo general,* $K = \mathbb{R}$ *o* $K = \mathbb{C}$ *.*

Si mediante $\vec{0}$ *se representa el elemento neutro del grupo, se puede verificar sin dificultad que cualesquiera que sean* $\alpha \in K$ *y* $\mathbf{x} \in L$*, se tiene que* $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ *y* $0 \cdot \mathbf{x} = \vec{0}$*.*

Generalmente se llamaran a los elementos de un espacio lineal L *vectores, y se dirá también que* L *es un espacio vectorial.*

Definición 1.9. *Se dice que los vectores* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *en un espacio vectorial* L ***generan*** *a* L *si todo vector en* L *se puede escribir como una combinación lineal de ellos. Es decir, para todo* $\mathbf{x} \in L$*, existen escalares* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *tales que* $\mathbf{x} = c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n$*.*

[1] El lector que quiera tener una idea más amplia de la definición de campo, puede remitirse a [6].

Definición 1.10. *Sean* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *vectores en un espacio vectorial* L*. Entonces se dice que los vectores son* ***linealmente dependientes*** *si existen escalares* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *no todos cero tales que*

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n = \vec{0}.$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son ***linealmente independientes.***

Definición 1.11. *Un conjunto finito de vectores* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *es una* ***base*** *para un espacio vectorial* L *si*

i) $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *es linealmente independiente.*

ii) $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *genera a* L*.*

Teorema 1.12. *Si* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *es una base para* L *y si* $x \in L$*, entonces existen un conjunto único de escalares* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *tales que* $x = c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n$*.*

Demostración. Como $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base de L. Por consiguiente, genera a L, y cada vector x es una combinación lineal de vectores de $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. También $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es linealmente independiente. En consecuencia la representación de x como combinación lineal de $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es única. $\square$

Definición 1.13. *El espacio vectorial* L *se dice que es de dimensión finita si existe un subconjunto finito de vectores en* L *tal que generan a* L*.*

Definición 1.14. *De un conjunto* L *que esta revestido simultáneamente de la estructura métrica y lineal diremos que es un espacio métrico lineal.*

Definición 1.15. *Se dice que un espacio metricolineal* L *con métrica* d *es* ***concordante*** *si se satisfacen las siguientes condiciones:*

$C1:\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L,\ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{z})$; *(invariabilidad respecto al desplazamiento).*

$C2:\ \forall \alpha \in k, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L,\ d(\alpha\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = |\alpha|\, d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$; *(semihomogeneidad de la métrica).*

En todo espacio métrico lineal concordante las bolas son conjuntos convexos[2], la demostración se puede ver en [8].

[2]Un subconjunto C de un espacio lineal L sobre los números reales es llamado convexo si, $\forall x, y \in C$ se tiene $z = (1 - t)x + ty \in C$, $\forall t \in [0, 1]$. En otras palabras, en un conjunto convexo se puede ir de cualquier punto a cualquier otro sobre una linea recta, sin salirse del conjunto.

A continuación definiremos un concepto muy importante, el cual nos sirve para definir la longitud o norma de un vector en un espacio.

Definición 1.16. *Se dice que un espacio lineal L sobre los números reales es normado si existe una función*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \quad L &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \|\mathbf{x}\|, \end{aligned}$$

que satisface los siguientes axiomas:

$N1: \ \|\mathbf{x}\| = 0$ *si y solo si* $\mathbf{x} = 0$;

$N2: \ \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Por la definición de la norma se tiene que $\|\mathbf{x}\|$ es un número no negativo i.e. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$.

Otra noción que es de gran importancia es la de producto interior.

Definición 1.17. *Se denomina producto escalar o interno en el espacio lineal L, sobre el campo $\mathbb{R}$ la función*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \quad L \times L &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longmapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \end{aligned}$$

que satisface los siguientes axiomas:

$E1: \ \forall \mathbf{x} \in L, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$;

$E2: \ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \vec{0}$;

$E3: \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L, \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$;

$E4: \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L, \langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$;

$E5: \ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$.

Fácilmente se verifica que $\left\langle \vec{0}, \mathbf{x} \right\rangle = 0$ (y por lo tanto $\left\langle \vec{0}, \vec{0} \right\rangle = 0$). Esto implica en virtud de $E2$, que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ si y solo si $\mathbf{x} = \vec{0}$. En consecuencia, según $E1$, si $\mathbf{x}$ es diferente a $\vec{0}$ entonces $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$.

En los espacios lineales con producto interno tiene lugar el siguiente resultado.

Teorema 1.18. *Sea L un espacio lineal con producto escalar, entonces cualesquiera sean los elementos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ se tiene:*

1. $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$*;*

2. *la función $\| \cdot \| : L \to \mathbb{R}$ definida por $\|\mathbf{x}\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$, es una norma.*

Demostración.

1. Si $\mathbf{x} = \vec{0}$ o $\mathbf{y} = \vec{0}$ entonces el resultado es verdadero, supónganse que ninguno es cero. Tomemos $\alpha = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle / \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \alpha \mathbf{x} + \mathbf{y}, \alpha \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\ &= \left| \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \right|^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2 \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} - 2 \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle, \end{aligned}$$

y en consecuencia $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$.

2. Teniendo que se satisfacen las propiedades de producto escalar se debe mostrar que se satisfacen las propiedades de norma.

   i) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \vec{0}$;

   ii)
$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2 \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= \left(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \right)^2. \end{aligned}$$
□

Si una norma satisface las segunda parte del teorema anterior se dice que es inducida por el producto interior.

Definición 1.19. *Sea X un espacio con producto interior. Los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ se dice que son ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$.*

Definición 1.20. *Sea X un espacio con producto interior. El conjunto $\{e_1, \ldots, e_k\} \subset X$ se dice que es ortonormal si*

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & si \quad i = j\,; \\ 0 & si \quad i \neq j\,, \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k$.

Los resultados del siguiente lema sobre conjuntos ortonormales en un espacio de dimensión infinita con producto interior son de gran utilidad.

Lema 1.21.

1. *Un conjunto ortonormal $\{e_1, \ldots, e_k\}$ en cualquier espacio X con producto interior es linealmente independiente. En particular, si X tiene dimensión k entonces el conjunto $\{e_1, \ldots, e_k\}$ es una base para X y cualquier vector $\mathbf{x} \in X$ se puede expresar de la forma*
$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{k} \langle \mathbf{x}, e_j \rangle\, e_j, \tag{1.4}$$
en este caso $\{e_1, \ldots, e_k\}$ es llamada una base ortonormal y los número $\langle x, e_j \rangle$ son llamados las componentes de $\mathbf{x}$ con respecto a esta base.

2. *$\{v_1, \ldots, v_k\}$ es un subconjunto linealmente independiente en un espacio X con producto interior , y sea S igual al generado por $\{v_1, \ldots, v_k\}$ un subespacio de X. Entonces existe una base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_k\}$ para S.*

La prueba de este resultado se puede consultar, por ejemplo, en [5, 6, 11].

La segunda parte del lema anterior afirma que cualquier conjunto linealmente independiente puede convertirse en una base ortonormal para el espacio que genera. El proceso que se sigue en dicha construcción se conoce con el nombre de **algoritmo de Gram-Schmidt** y fundamentalmente hace lo siguiente

$$w_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \langle v_{n+1}, e_j \rangle\, e_j, \qquad e_{n+1} = \frac{w_{n+1}}{\|w_{n+1}\|}.$$

1.3. $\mathbb{R}^n$ un ejemplo muy importante

Se denotará, como se acostumbra, los elementos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, como $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$.

Consideremos la familia de espacios métricos $(\mathbb{R}^n, d_p)$, en donde

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty) \tag{1.5}$$

y

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max \{ |x_i - y_i|, \quad i = 1, 2, \cdots, n \}. \tag{1.6}$$

La demostración de que la métrica esta bien definida puede verse, por ejemplo, en [10] y [8]. $(\mathbb{R}^n, d_p)$ puede dotarse de la estructura lineal definiendo la suma entre $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \le i \le n}$, $\mathbf{y} = (y_i)_{1 \le i \le n}$ como $(x_i)_{1 \le i \le n} + (y_i)_{1 \le i \le n} = (x_i + y_i)_{1 \le i \le n}$ y la multiplicación por escalar entre $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^n$ como $\alpha (x_i)_{1 \le i \le n} = (\alpha x_i)_{1 \le i \le n}$, es decir, se tiene que $(\mathbb{R}^n, d_p)$ es una familia de espacios métrico y lineal simultáneamente. Observe que la métrica en $(\mathbb{R}^n, d_p)$ cuando $p = 2$ es la métrica euclidiana . Es obvio que cuando $n = 1$ la familia queda reducida a $\mathbb{R}$ y su métrica que se denota $d_1(x, y) = |x - y|$, se denomina métrica ordinaria fue presentada ya en el Ejemplo 1.4.

Se puede demostrar sin dificultad que todo espacio lineal normado se convierte en métrico mediante la fórmula $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Observe que la familia de métricas d_p genera una familia de p-normas mediante la fórmula

$$\|\mathbf{x}\|_p \equiv d_p(\vec{0}, \mathbf{x}). \tag{1.7}$$

Por otra parte, el espacio lineal real $\mathbb{R}^n$ se puede dotar del producto escalar o interior entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ que pertenecen a $\mathbb{R}^n$ mediante la ecuación

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

llamado el producto escalar estándar. También se puede introducir en $\mathbb{R}^n$ una norma mediante

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_i^2}.$$

Obsérvese que esta norma coincide exactamente con la generada por la métrica d_2 en $\mathbb{R}^n$, que se definió en (1.5), lo cual puede verificarse sin dificultad.

Como resultado de la ecuación (1.7) y las familias de métricas definidas en las ecuaciones (1.5) y (1.6) se tiene que en general sobre $\mathbb{R}^n$ se pueden introducir las normas,

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (p\text{-norma})$$

y

$$\|\mathbf{x}\|_{\text{máx}} \equiv \|\mathbf{x}\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| : i = 1, 2, \cdots, k\}, \qquad (\text{norma del máximo}).$$

Es necesario comprobar que $\|\cdot\|_p$ es efectivamente una norma, el primer axioma de norma es inmediato, resta probar el axioma relacionado con la desigualdad triangular, el cual se basa en las dos famosas desigualdades que se enuncian a continuación, conocidas como: **desigualdad de Hölder** y **desigualdad de Minkowski**.

Teorema 1.22 (Desigualdad de Hölder). *Sean p y q dos números reales mayores que 1 y tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces cualesquiera que sean los números complejos x_j e $y_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \right)^{1/q}.$$

También puede extenderse esta desigualdad a las integrales, tomando en este caso la forma

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx \right)^{1/q},$$

que se verifica para cualesquiera funciones $f(x)$ y $g(x)$ siempre que las integrales que figuran a la derecha tengan sentido.

Demostración. Demostremos la certeza de la siguiente condición

$$\text{Si} \quad \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} |y_j|^p = 1 \quad \text{entonces} \quad \sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq 1. \tag{1.8}$$

Supongamos que se satisface (1.8) y sean

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} = \alpha \quad \text{y} \quad \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \right)^{1/q} = \beta.$$

Definamos, entonces,

$$x_j{}' = \frac{x_j}{\alpha}, \quad y_j' = \frac{y_j}{\beta},$$

con lo cual tendremos

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j'\right|^p\right)^{1/p} = 1 \quad \text{y} \quad \left(\sum_{j=1}^{n} \left|y_j'\right|^q\right)^{1/q} = 1.$$

Esto implica inmediatamente que

$$\sum_{j=1}^{n} \left|x_j'\right|^p = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} \left|y_j'\right|^q = 1$$

y aplicando (1.8) obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \left|x_j' y_j'\right| \leq 1.$$

o bien

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j|^p \leq \alpha\beta.$$

Asi pues (1.8) es suficiente. Para demostrar que se verifica, emplearemos la desigualdad

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p = 1 = \sum_{j=1}^{n} |y_j|^q$$

y tomemos

$$a = |x_j|, \quad b = |y_j|$$

En virtud del siguiente resultado, Sean a y b dos números reales no negativos y p y q dos números reales mayores que 1 tales que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

tenemos que

$$ab = |x_j y_j| \leq \frac{|x_j|^p}{p} + \frac{|y_j|^q}{q}.$$

Sumando en ambos miembros respecto de j obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

lo cual completa la demostración $\square$

Teorema 1.23 (Desigualdad de Minkowski). *Sea p un número real tal que $p \geq 1$. Entonces, cualesquiera que sean los números complejos x_j y y_j ($j = 1, 2, \ldots, n$),*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{1/p}.$$

En particular, para las integrales se tiene

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p \, dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^p \, dt\right)^{1/p}.$$

En términos de las p-normas se tiene que una p-bola con centro en a y radio $r > 0$ sería

$$B_p(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}.$$

En la Figura 1.5 se presenta en $\mathbb{R}^2$ las p-bolas cerradas $\overline{B}_p(\vec{0}; 1)$ definidas por las normas $\|\cdot\|_p$. Obsérvese que la bola correspondiente a la norma $\|\cdot\|_1$ es un rombo de centro $\vec{0}$ y lado ε; la bola correspondiente a la norma $\|\cdot\|_2$ (norma euclídea) es una circunferencia con centro en $\vec{0}$ y radio ε; la correspondiente a la norma $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{\text{máx}}$ es un cuadrado de centro $\vec{0}$ y lado ε, mientras que las correspondientes a las p-normas, con $2 < p < \infty$, son figuras intermedias entre la circunferencia y el cuadrado.

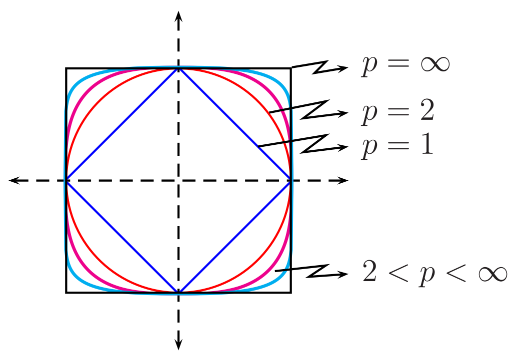

Figura 1.5: Gráfica de las bolas con cada p-norma.

La figura sugiere que

$$\lim_{p \to \infty} \|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{x}\|_\infty . \tag{1.9}$$

Puede demostrarse que efectivamente esta ecuación se satisface.

En efecto, $|x_i| \leq \|x\|_p$ ($i = 1, 2, \cdots, n$). Luego $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$, para todo p. Por otra parte,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty . \tag{1.10}$$

Es decir,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \tag{1.11}$$

como $\lim\limits_{p\to\infty} n^{\frac{1}{p}} = 1$ se concluye la ecuación (1.9).

1.4. Algunos resultados sobre normas

El último resultado de la sección anterior nos permite deducir el siguiente teorema.

Teorema 1.24. *Si $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, existen constantes $\alpha, \beta > 0$, tales que*

$$\alpha \|x\|_p \leq \|x\| \leq \beta \|x\|_p .$$

Es decir, todos las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes

Este resultado se puede extender para cualquier espacio vectorial, es decir: Si X es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1$,$\|\cdot\|_2$ dos normas sobre X, la norma $\|\cdot\|_2$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$ si existen $M, m > 0$ tal que para todo $x \in X$ se tiene:

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1.$$

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es la siguiente.

Lema 1.25. *Sea X un espacio vectorial y sean $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_3$ tres normas en X. Sea $\|\cdot\|_2$ equivalente a $\|\cdot\|_1$ y sea $\|\cdot\|_3$ equivalente a $\|\cdot\|_2$. Entonces:*

a) $\|\cdot\|_1$ *es equivalente a* $\|\cdot\|_2$.

b) $\|\cdot\|_3$ *es equivalente a* $\|\cdot\|_1$.

Demostración. Por hipótesis existen $M, m > 0$ tal que $m \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \|x\|_1$ para todo $x \in L$ y existen $K, k > 0$ tal que $k \|x\|_2 \leq \|x\|_3 \leq K \|x\|_2$ para todo $x \in L$. Entonces

a) $\dfrac{1}{M} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \dfrac{1}{m} \|x\|_2$ para todo $x \in L$, entonces $\|\cdot\|_1$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$.

b) $km \|x\|_1 \leq \|x\|_3 \leq KM \|x\|_1$ para todo $x \in L$, entonces $\|\cdot\|_3$ es equivalente a $\|\cdot\|_1$. □

Teorema 1.26. *Sea L un espacio vectorial de dimensión finita con norma $\|\cdot\|$ y sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base para L, si se define otra norma en L por*

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right\|_1 = \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2\right)^{1/2} \tag{1.12}$$

entonces las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes.

Demostración. Sea $M = \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2\right)^{1/2}$. Entonces $M > 0$ y como $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base para L. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\| &\leq \sum_{j=1}^{n} \|\lambda_j e_j\| \\
&= \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \|e_j\| \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} |\|e_j\|^2\right)^{1/2} \\
&= M\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\|_1.
\end{aligned}$$

Ahora sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\|.$$

la función f es continua respecto a la métrica estandar en $\mathbb{R}^n$. Ahora si,

$$S = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j\|^2 = 1\}.$$

entonces S es compacto. Si $m = 0$ entonces $\left\|\sum_{j=1}^{n} u_j e_j\right\| = 0$, luego $\sum_{j=1}^{n} u_j e_j = 0$ que contradice la condición que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base para L. Por la definición de $\|\cdot\|_1$, si $\|\cdot\|_1 = 1$ entonces $\|\cdot\| \geq m$ para $m > 0$. Por consiguiente si $y \in L\backslash 0$,y $\left\|\frac{y}{\|y\|_1}\right\|_1 = 1$, se debe tener que $\left\|\frac{y}{\|y\|_1}\right\|_1 \geq m$, luego $\|y\| \geq m\|y\|_1$, por lo tanto $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes. □

1.5. La noción de convergencia

Las nociones de convergencia dada sobre $\mathbb{R}$ en el Apéndice A, pueden verse como caso particular de la noción más general que es dada en términos de la noción de distancia. A continuación se presentan algunos de los resultados ya mencionados, pero ahora en términos de la noción de distancia.

Definición 1.27. *Sea (X,d) un espacio métrico y $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, una sucesión. La sucesión $(\mathbf{x}_n)$ se dice que converge a $\mathbf{x} \in X$, simbólicamente $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N,\ d(\mathbf{x_n}, \mathbf{x}) < \varepsilon. \tag{1.13}$$

La definición anterior puede darse también para espacios normados, quedando de la siguiente forma

$$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x},\ si\ \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\ \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| < \varepsilon.$$

Definición 1.28. *Sea (X,d) un espacio métrico, una sucesión $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X se dice una* ***sucesión de Cauchy*** *en (M,d) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} :\ d(x_n, x_m) < \varepsilon,\ \forall\, n, m \geq N.$$

El espacio métrico (X,d) se dice que es ***completo*** *si, toda sucesión de Cauchy $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, converge a algún $\mathbf{x} \in X$.*

Los anteriores conceptos tienen sus respectivas generalizaciones en $\mathbb{R}^n$. Dado que como se dijo antes en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes, consideraremos en general la norma euclidiana. Una característica de $\mathbb{R}^n$ es la de ser completo. Esto lo afirma el siguiente teorema.

Teorema 1.29. *Sea $(\mathbf{x}_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_i = (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \cdots, x_{i_n})$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$. Entonces $\mathbf{x}_i \to \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ si y sólo si $x_{j_i} \to x_j$, para $j = 1, 2, \cdots, n$. En particular, $\mathbb{R}^n$ es completo dado que $\mathbb{R}$ es completo.*

Demostración. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \|x_i - x\| < \varepsilon$, como $\left|x_{j_i} - x_j\right| \leq \|x_i - x\|$, $\forall \quad j = 1, \cdots, n$ de donde se tiene que $\left|x_{j_1} - x_j\right| < \varepsilon, \forall n \geq N$. esto implica que $x_{j_1} \to x_j$.

$\Leftarrow$ Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ y $j = 1, 2, \cdots, n$

$$\left|x_{j_1} - x_j\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{j}}.$$

Ahora, como estamos considerando la métrica euclidiana.

$$\|x_i - x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \left| x_{j_1} - x_j \right|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

para $n \geq N$, y así $\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}$. Esta afirmación implica que $(\mathbf{x}_i)$ es una sucesión de Cauchy siempre y cuando (x_{j_i}) también lo sea para todo $j = 1, 2, \cdots, n$. $\square$

Definición 1.30. *Sea X y Y espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es continua en $\mathbf{x}_0 \in X$ si* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_o} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_o)$.

f se dice que es continua sobre $\Omega \subset X$ si es continua en cada punto $\mathbf{x}_o \in \Omega$.

Mas precisamente se tiene:

Teorema 1.31. *Sea (X, d_x) y (Y, d_y) dos espacios métricos, una función $f : X \to Y$ es continua en $\mathbf{x}_0 \in X$, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in X; \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \quad \textit{implica} \quad \textit{que} \quad d_y(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_0)) < \varepsilon.$$

Teorema 1.32. *Sea $(L, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $(x_n) \subset L$ una sucesión que converge a $x \in L$. Entonces*

$$\lim_{n \to \infty} \|\mathbf{x}_n\| = \|\mathbf{x}\|,$$

es decir, la norma es continua.

Demostración. Por la desigualdad triangular se tiene que $\big| \|\mathbf{x}_n\| - \|\mathbf{x}\| \big| = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|$ y por la definición de convergencia se tiene que $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \to 0$, por tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} \|\mathbf{x}_n\| = \|\mathbf{x}\|$. $\square$

Definición 1.33. *Sean X y Y espacios métricos y $\Omega \subset X$. Una función $f : \Omega \to Y$ se dice que es uniformemente continua si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega; \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \quad \textit{implica} \quad \textit{que} \quad d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_0)) < \varepsilon.$$

En la continuidad no se espera que fijado ε, el mismo valor de δ sirva para cada punto de $\mathbf{x}$, sin embargo puede ocurrir, cuando ocurre, la función es uniformemente continua.

Ejemplo 1.34. *Sea (X, d) un espacio métrico, $\mathbf{x} \in X$ y $f : X \to Y$. La función $f(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ es uniformemente continua. En efecto, si tomo $\varepsilon > 0$ y considero $\delta = \varepsilon$ y tomo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ con $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon$, entonces*

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| = |d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0)| < d(x, y) \leq \varepsilon.$$

Lo cual es garantizado por la desigualdad triangular, (dado que d es métrica).

En particular, si $X = \mathbb{R}^n$, se tiene el siguiente resultado, el cual no es difícil de demostrar.

Teorema 1.35. *Sea X un espacio métrico. Una función $f = (f_1, \cdots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ es (uniformemente) continua si cada función f_i $(i = 1, \cdots, n)$ es (uniformemente) continua.*

Teorema 1.36. *Sean X un espacio métrico y $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Entonces las funciones $f + g$, $f \cdot g$ y $f - g$, son también continuas.*

Teorema 1.37. *Sean X, Y y Z espacios métricos, $f : X \to Y$ continua en $x_0 \in X$ y $g : Y \to Z$ continua en $f(x_0) \in Y$. Entonces $g \circ f$ es continua en $x_0 \in X$.*

Definición 1.38. *Sean f, $f_n : X \to Y$ $(n \in \mathbb{N})$ funciones definidas entre los espacios métricos X y Y. La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f y se denota $f_n \rightrightarrows f$, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \quad \textit{se cumple que} \quad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

El siguiente teorema es una consecuencia de la definición anterior.

Teorema 1.39. *Asumiendo las condiciones mencionadas en la Definición 1.38, si f_n es continua para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f_n \rightrightarrows f$, entonces f también es continua.*

Definición 1.40. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. A es compacto si toda sucesión $\{x_n\}$ en A contiene una subsucesión que converge a un elemento de A.*

Teorema 1.41. *Suponer que (X, d) es un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces:*

a) Si A es completo entonces es cerrado.

b) Si X es completo entonces A es completo si y sólo si es cerrado.

c) Si A es compacto entonces es cerrado y acotado.

d) Todo subconjunto cerrado acotado de $\mathbb{R}^n$ es compacto.

Definición 1.42. *Supongamos que (X, d) es un espacio métrico compacto, $\{f_n\}$ es una sucesión en $C(X)$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.*

1. *$\{f_n\}$ converge puntualmente a f si $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ para todo $x \in X$.*

2. *$\{f_n\}$ converge uniformemente a f si $\sup\{f_n(x) - f(x) : x \in X\} \longrightarrow 0$.*

Convergencia uniforme implica convergencia puntual, pero no inversamente: Si $\sup\{f_n(x) - f(x) : x \in X\} \longrightarrow 0$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $\sup\{f_n(x) - f(x) : x \in X\} \leq \varepsilon$, entonces $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N$ y para todo $x \in X$, esto quiere decir que $|f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$ para todo $x \in X$, es decir, $\{f_n\}$ converge puntualmente a f.

El siguiente ejemplo muestra que la convergencia puntual no implica la convergencia uniforme.

Sea $f_n(x) = x^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [0, 1]$, si $x = 1$, $f_n(1) = 1^n = 1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 1$.

Si $x = 0$, $f_n(0) = 0^n = 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.

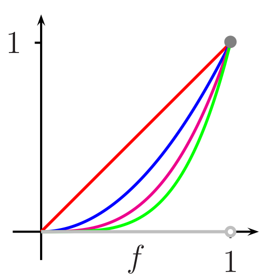

Figura 1.6: $\{f_n\}$ converge puntualmente a f.

Si $0 < x < 1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, de esto se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Lo que quiere decir que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f.

Ahora sea $f(x) = 0$, si $0 < x < 1$ y $f(1) = 1$ entonces

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : 0 < x < 1\} = \sup \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$, puesto que $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : 0 < x < 1\}$ no converge a 0, entonces $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f en $[0, 1]$.

Lema 1.43. *Sea X un espacio vectorial y sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ normas en X. Sean d y d_1 métricas definidas por $d(x, y) = \|x - y\|$ y $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$. Suponer que existen $k > 0$ tal que $\|x\| \leq k\|x\|_1$ para todo $x \in X$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión en X.*

a) Si $\{x_n\}$ converge a x en el espacio métrico (X, d_1) entonces $\{x_n\}$ converge a x en el espacio métrico (X, d).

b) Si $\{x_n\}$ es de Cauchy en el espacio métrico (X, d_1) entonces $\{x_n\}$ es de Cauchy en el espacio métrico (X, d).

Demostración. a) Sea $\varepsilon > 0$. Existen $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\|_1 < \dfrac{\varepsilon}{k}$ para $n \geq N$. Entonces, para $n \geq N$.

$$\|x_n - x\| \leq k \|x_n - x\|_1 < \varepsilon.$$

por consiguiente $\{x_n\}$ converge a x en el espacio métrico (X, d).

b) Es similar a (a). □

Lema 1.44. *Sea L un espacio vectorial y sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ normas equivalentes en X.Sean d y d_1 métricas definidas por $d(x, y) = \|x - y\|$ y $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión en X.*

a) Si $\{x_n\}$ converge a x en el espacio métrico (X, d) si y solo si $\{x_n\}$ converge a x en el espacio métrico (X, d_1).

b) Si $\{x_n\}$ es de Cauchy en el espacio métrico (X, d) si y solo si $\{x_n\}$ es de Cauchy en el espacio métrico (X, d_1).

c) (X, d) es completo si y solo si (X, d_1) es completo.

Demostración. Como $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son normas equivalentes en X, existen $M, m > 0$ tal que $m \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \|x\|_1$ para todo $x \in X$.

a) Como $\|x\|_1 \leq M \|x\|$ para todo $x \in X$, Si $\{x_n\}$ converge a x en el espacio métrico (X, d) entonces $\{x_n\}$ converge a x en el espacio métrico (X, d_1) por Lema 1.43.

En el otro sentido, como $\|x\| \leq \dfrac{1}{m} \|x\|_1$ para todo $x \in X$, si $\{x_n\}$ converge a x en el espacio métrico (X, d_1), entonces $\{x_n\}$ converge a x en el espacio métrico (X, d) por Lema 1.43.

b) Como en Lema 1.43, esta demostración es similar a la parte (a).

c) Suponer que (X, d) es completo y sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en el espacio métrico (X, d_1). Entonces $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en el espacio métrico (X, d) por la parte (b) y también $\{x_n\}$ converge a un mismo punto x en el espacio métrico (X, d), luego (X, d) es completo. Ahora si $\{x_n\}$ converge a x en el espacio métrico (X, d_1) por la parte (a) y entonces (X, d_1) es completo. El otro sentido es verdadero por simetría. $\square$

Lema 1.45. *Sea L un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base para L. Si $\|\cdot\|_1 : L \to \mathbb{R}$ es la norma en L definida por* (1.12) *entonces L es un espacio métrico completo.*

La demostración de este lema se puede encontrar por ejemplo en [11].

Corolario 1.46. *Si $\|\cdot\|$ es cualquier norma en un espacio de dimensión finita X, entonces X es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base para X y sea $\|\cdot\|_1 : X \to \mathbb{R}$ una segunda norma en X definida por (1.12), las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes por Lema 1.25 y X con norma $\|\cdot\|_1$ es completo por Lema 1.45. Luego X con norma $\|\cdot\|$ también es completa por Lema 1.44. $\square$

Capítulo 2

Espacios de Banach vs. espacios de Hilbert

2.1. Espacios de Banach

Como se dijo antes, en cualquier espacio lineal normado puede definirse una métrica a partir de la norma de la siguiente forma:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Teniendo en cuenta esta métrica, la cual es llamada, la métrica asociada con la norma $\|.\|$, podemos considerar al espacio lineal normado como un espacio métrico e interesa comprobar si tal espacio es completo o no. Esto no siempre es posible, por ejemplo: dado un espacio vectorial particular y una métrica sobre este espacio, no siempre puede definirse una norma que coincida (en el sentido antes mencionado) con la métrica inicial del espacio. Considérese el espacio vectorial formado por todas las sucesiones infinitas de números reales, sean $\mathbf{x} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$ y $\mathbf{y} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots\}$, si se define la suma entre dos vectores y la multiplicación por escalar como es usual (suma: componente a componente, multiplicación por escalar: cada componente por el escalar), y se define sobre este espacio la siguiente distancia

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{1 + |\alpha_i + \beta_i|}.$$

Puede comprobarse que se trata efectivamente de una métrica.

Como se sabe, cualquier norma verifica

$$\|\lambda\mathbf{x}-\lambda\mathbf{y}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|,$$

pero fácilmente se ve que, si $\lambda\in\mathbb{R}$, entonces

$$d(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}) \neq |\lambda| d(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

lo cual impide que se puede definir una norma en este espacio que conduzca a esta métrica.

Esta observación es importante para dar la siguiente definición.

Definición 2.1. *Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado que es un espacio métrico completo respecto a la métrica asociada con la norma.*

Como puede observase el ejemplo dado en el párrafo anterior no es un espacio de Banach ya que la métrica definida sobre el espacio no proviene de una norma.

Ejemplo 2.2. *El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, donde $n=1,2,3,\ldots,$ es un espacio de Banach, si definimos la norma para $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ por,*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\ldots+|x_n|^2}. \tag{2.1}$$

Demostración. El Teorema 1.29 afirma que $\mathbb{R}^n$ con la métrica estándar es completo. Como la métrica estándar sobre $\mathbb{R}^n$ es equivalente a la norma definida en (2.1) ($d(0,\mathbf{x})=\|\mathbf{x}\|$), entonces se tiene que $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico completo respecto a la métrica asociada con la norma, por lo tanto es un espacio de Banach. $\square$

En general se tiene que si sobre $\mathbb{R}^n$ se define cualesquiera de las p-normas entonces $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_p)$ es también un espacio de Banach. (Ver sección 1.3).

La demostración de esta afirmación se sigue del hecho de que en $\mathbb{R}^n$ todas las p-normas son equivalentes.

Ejemplo 2.3. *Considerando el espacio vectorial $C[a,b]$ y tomando como norma de $f\in C[a,b]$ la siguiente:*

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

entonces $C[a,b]$ es un espacio de Banach.

Demostración. Para poder comprobar que $C[a,b]$ es completo respecto a la norma anterior, tomemos una sucesión de Cauchy $\{f_n\}$ de elementos de $C[a,b]$. Como se trata de una sucesión de Cauchy respecto de la norma del supremo, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, debe existir un N tal que $n, m \geq N$ implica que

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a,b].$$

Esto significa que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy de funciones continuas, y por tanto converge uniformemente hacia alguna función f. Como $\{f_n\}$ converge uniformemente, la función límite debe ser continua. Así toda sucesión de Cauchy en $C[a,b]$ converge, por lo tanto $C[a,b]$ es un espacio de Banach. □

Ejemplo 2.4. *Suponer que* $1 \leq p \leq \infty$*, el espacio métrico de sucesiones* ℓ^p *está determinado por el conjunto de la sucesiones* $\{x_n\}$ *en* $\mathbb{R}$ *tal que* $x_n \in \mathbb{R}$ *para todo* n *y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

Tomando como norma para $\mathbf{x}$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}. \tag{2.2}$$

El espacio ℓ^p *con la norma anteriormente mencionada es un espacio de Banach.*

Dado que si $\mathbf{x} = \{x_n\}, \mathbf{y} = \{y_n\} \in \ell^p$ se puede definir la siguiente métrica

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{1/p}$$

asociada con la norma, y que en [2] se demuestra que ℓ^p es completo con respecto a esta métrica, entonces se tiene que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.

Un resultado importante que caracteriza los espacios vectoriales normados de dimensión finita es el siguiente.

Teorema 2.5. *Todo espacio vectorial normado de dimensión finita es un espacio de Banach.*

Demostración. En el Corolario 1.46 demostramos que si $\|\cdot\|$ es cualquier norma en un espacio de dimensión finita X, entonces X es un espacio métrico completo, por lo tanto un espacio vectorial normado es un espacio métrico completo respecto a la métrica asociada con la norma, por lo tanto es un espacio de Banach. □

Teorema 2.6. *Si X es un espacio de Banach y Y es un subespacio lineal de X, entonces, Y es un espacio de Banach si y sólo si Y es cerrado en X.*

Demostración. Y es un espacio de Banach si y sólo si Y es completo. Ahora por el Teorema 1.41 se tiene que un subconjunto de un espacio métrico completo es completo si y sólo si es cerrado. Por consiguiente Y es un espacio de Banach si y sólo si Y es cerrado en X. □

Proposición 2.7. *Sean X un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_1$ y Y un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_2$, entonces $Z = X \times Y$ con norma $\|(x,y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Si $z_1 = (z_1^1, z_1^2), z_2 = (z_2^1, z_2^2) \in Z$ entonces, la distancia entre z_1 y z_2 se define de la siguiente manera:

$$d(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\| = \|(z_1^1, z_1^2) - (z_2^1, z_2^2)\| = \|(z_1^1 - z_2^1, z_1^2 - z_2^2)\| = \|z_1^1 - z_2^1\|_1 + \|z_1^2 - z_2^2\|_2.$$

Sea $\{z_n\}$ una sucesión de Cauchy en Z entonces, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(z_n, z_m) < \varepsilon, \text{ para todo } m, n \geq N.$$

Como $z_n = (z_n^1, z_n^2) \in Z$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y como X y Y son espacios de Banach, entonces $\{z_n^1\}$ es una sucesión de Cauchy en X y $\{z_n^2\}$ es una sucesión de Cauchy en Y, entonces

$$d(z_n, z_m) = \|z_n - z_m\| = \|z_n^1 - z_m^1\|_1 + \|z_n^2 - z_m^2\|_2 < \varepsilon.$$

Luego

$$\|z_n^1 - z_m^1\|_1 < \varepsilon_1 \text{ y } \|z_n^2 - z_m^2\|_2 < \varepsilon_2, \text{ para todo } m, n \geq N,$$

Como X e Y son de Banach, $\{z_n^1\}$ y $\{z_n^2\}$ convergen en X e Y respectivamente, es decir, para todo $\varepsilon > 0, \exists\ N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(z_n^1, z^1) = \|z_n^1 - z^1\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } d(z_n^2, z^2) = \|z_n^2 - z^2\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } n \geq N_0,$$

entonces,

$$\|z_n^1 - z^1\|_1 + \|z_n^2 - z^2\|_2 < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N_0$$

pero,

$$d(z_n, z) = \|z_n - z\| = \|(z_n^1, z_n^2) - (z^1, z^2)\| = \|(z_n^1 - z^1, z_n^2 - z^2)\| = \|z_n^1 - z^1\|_1 + \|z_n^2 - z^2\|$$

es decir, $\{z_n\}$ es de Cauchy y $z_n \to z$, por lo tanto Z es un espacio de Banach. □

2.2. Espacios de Hilbert

Definición 2.8. *Un espacio vectorial provisto de un producto escalar se llama un espacio prehilbertiano.*

Si X es un espacio prehilbertiano, podemos definir sobre él una norma en función del producto escalar. Esta norma da lugar a una métrica sobre el espacio y es importante determinar si dicho espacio es completo o no respecto a esta métrica. Esto implica la siguiente definición.

Definición 2.9. *Si un espacio prehilbertiano X es completo respecto a la métrica asociada con la norma que se deriva del producto escalar, se llama espacio de Hilbert.*

Teorema 2.10. *Todo espacio de dimensión finita con producto interior es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Si tenemos que $\|x\|$ es cualquier norma en un espacio de dimensión finita y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interior sobre dicho espacio, tal que $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$, es claro que si la métrica se define por $d(x, y) = \|x - y\|$, entonces esta métrica está asociada a la norma que proviene del producto escalar, luego este espacio es un espacio prehilbertiano, ahora por el Corolario 1.46 se demostró que cualquier espacio de dimensión finita normado es un espacio métrico completo, por consiguiente todo espacio de dimensión finita con producto interior es un espacio de Hilbert. □

Lema 2.11. *Si X es un espacio de Hilbert y $S \subset X$ es un subespacio lineal, entonces S es un espacio de Hilbert si y solo si S es cerrado en X.*

Demostración. Por las anteriores definiciones, S es un espacio de Hilbert si y solo si es completo. Pero por el Teorema 1.41, un subconjunto de un espacio métrico completo es completo si y solo si es cerrado. □

Teorema 2.12. *Toda norma proveniente de un producto escalar satisface la relación:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Demostración. Se verifica que

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \|y\|^2$$

Al sumar estas dos expresiones se obtiene que:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \|y\|^2$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\ .$$

La relación $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ expresa que en un paralelogramo la suma de los cuadrados de sus diagonales es igual a la suma de los cuadrados de sus lados. $\square$

Ejemplo 2.13. *En el espacio vectorial* $C\,[-1,1]$

$$\|f\| = \max_{t\in[-1,1]} |f(t)|$$

es una norma. Esta norma no puede provenir de un producto escalar, pues tomando

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t \le 0; \\ t, & 0 \le t \le 1, \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} -t, & -1 \le t \le 0; \\ 0, & 0 \le t \le 1, \end{cases}$$

se tiene $|f(t)+g(t)| = |t|$ *y* $|f(t)-g(t)| = |t|$, *y por lo tanto*

$$\|f\| = \|g\| = \|f+g\| = \|f-g\| = 1,$$

de lo cual resulta que la ley del paralelogramo no se cumple:

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2 \neq 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) = 4.$$

2.2.1. Ejemplos de espacios de Hilbert

Ejemplo 2.14. *Se define* ℓ^2 *como el conjunto de todas las sucesiones* $\mathbf{x} = \{x_n\}$ *de números tales que gozan de la propiedad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Sobre este espacio se puede definir la norma como

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}. \tag{2.3}$$

También se puede definir el producto escalar (o interior) entre dos vectores $\mathbf{x} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$, $\mathbf{y} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\}$ *como*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n. \tag{2.4}$$

El espacio $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ *es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Veamos primero que este espacio es un espacio prehilbertiano, para ello debemos probar que la norma definida por (2.3), que está asociada con la métrica $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, se deriva del producto escalar definido en la ecuación (2.4).

Dadas dos sucesiones $\mathbf{x} = \{\alpha_n\}$ y $\mathbf{y} = \{\beta_n\}$ es natural definir

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots\},$$
$$\lambda \mathbf{x} = \{\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \ldots\}.$$

Es evidente que $\lambda \mathbf{x} \in \ell^2$. No es tan claro que $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \ell^2$, para mostrar esto, basta observar que para todo entero $n \geq 1$, la desigualdad triangular se sigue de la desigualdad de Minkowski y está dada por

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k + \beta_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 \right)^{1/2}$$

ya que de esto resulta la convergencia de la sucesión $\left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k + \beta_k|^2 \right)^{1/2}$ y

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k + \beta_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Visto esto se verifica fácilmente que con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar antes definidas, ℓ^2 es un espacio lineal. Por otra parte en virtud de la desigualdad (1), se tiene que para todo entero $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_i \beta_i| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 \right)^{1/2},$$

de lo cual resulta que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i$ es convergente, teniéndose además

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_i \beta_i| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Demostrando esto se tiene de inmediato que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i,$$

define un producto escalar en ℓ^2, por lo tanto ℓ^2 es un espacio prehilbertiano, cuya norma esta dada por

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Debemos ver ahora que ℓ^2 es un espacio completo, pero en el Ejemplo 2.4 se afirma que ℓ^p con la norma

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

es un espacio completo. Luego la demostración de que ℓ^2 es un espacio completo es un caso particular de ese ejemplo (dejamos la demostración como un ejercicio para el lector).

Concluimos entonces que $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Hilbert. □

En el siguiente ejemplo se presenta un espacio prehilbertiano que no es espacio de Hilbert.

Ejemplo 2.15. *Consideremos el espacio vectorial $C[a,b]$ con el producto escalar entre $f, g \in C[a,b]$ definido por*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x) dx \tag{2.5}$$

Es claro que la distancia entre f y g definida por

$$d(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \tag{2.6}$$

esta asociada con la norma

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

que proviene del producto interior, ya que

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx = \langle f, f \rangle.$$

Veamos que con la distancia definida en (2.6) el espacio no es completo. Considérese la siguiente sucesión de Cauchy

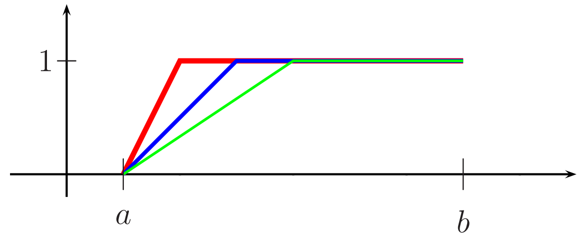

Figura 2.1: Sucesión de funciones en $C[a, b]$ que no converge.

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{a+b}(x-a), & si \;\; a \le x \le \dfrac{(n+1)a+b}{n}, \\ 1, & si \;\; \dfrac{(n+1)a+b}{n} < x \le b. \end{cases}$$

Es claro que la función límite es, en este caso, una función discontinua,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si \;\; x = a, \\ 1, & si \;\; a < x \le b \end{cases}$$

lo que demuestra que el espacio no es completo. Por consiguiente no es un espacio de Hilbert.

2.3. Comparación entre espacios de Banach y espacios de Hilbert

En la sección anterior definimos el espacio de Banach como un espacio vectorial normado que es un espacio métrico completo respecto a la métrica asociada con la norma, y el espacio de Hilbert como un espacio prehilbertiano (espacio vectorial provisto de un producto escalar) completo respecto a la métrica asociada con la norma que se deriva del producto escalar. Así pues, podemos ver, que si un espacio de Hilbert es completo respecto a la métrica asociada con la norma, es un espacio de Banach, y un espacio de Banach que sea espacio prehilbertiano es un espacio de Hilbert. A continuación se mostraran algunos ejemplos.

Ejemplo 2.16. *En el Teorema 1.29 se afirmó que $\mathbb{R}^n$ con la métrica estándar era completo. Por otra parte, el espacio lineal real $\mathbb{R}^n$ se dotó del producto escalar estándar entre*

$\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *que pertenecen a* $\mathbb{R}^n$ *mediante la ecuación*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right).$$

Provisto del producto escalar estándar, $\mathbb{R}^n$ *es un espacio prehilbertiano, que como vimos antes, se llama* ***espacio euclideo*** n-***dimensional****. Así pues,* $\mathbb{R}^n$ *con la métrica estándar es un espacio de Banach que es un espacio prehilbertiano con el producto escalar estándar, por lo tanto es un espacio de Hilbert y también* $\mathbb{R}^n$ *es un espacio de Hilbert que completo con la distancia que proviene de la norma, por lo tanto* $\mathbb{R}^n$ *es un espacio de Banach con la métrica estándar.*

Ejemplo 2.17. *En el ejemplo 2.3 se demostró que el espacio vectorial* $C[a,b]$ *dotado de la norma*

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

es un espacio de Banach. Pero también se vio en el Ejemplo 2.15 que este espacio es prehilbertiano, pero no es un espacio de Hilbert, por lo tanto el espacio $C[a,b]$ *con la norma* $\|f\|$ *es un espacio de Banach pero no es un espacio prehilbertiano con el producto escalar definido por* (2.5)*, por lo tanto no es un espacio de Hilbert.*

Ejemplo 2.18. *En el ejemplo 2.4 se mostró que el espacio métrico de sucesiones* ℓ^p *para* $1 \leq p \leq \infty$*, es un espacio de Banach, tomando con la norma definida por* (2.2)*.*

Para $p \neq 2$*, La norma no se deriva de un producto escalar. Por lo tanto, para* $p \neq 2$*,* ℓ^p *es un espacio de Banach pero no es un espacio de Hilbert.*

Para el caso $p = 2$ *es fácil ver que es completo y se afirmó en el Ejemplo 2.14 que* ℓ^2 *era un espacio de Hilbert, por lo tanto* ℓ^2 *es un espacio de Banach que es un espacio de Hilbert, y es un espacio de Hilbert que es un espacio de Banach.*

Ejemplo 2.19. *En el Teorema 2.5 se demostró que todo espacio vectorial normado de dimensión finita es un espacio de Banach y en el Teorema 2.10 se afirmó que todo espacio con producto interior de dimensión finita es un espacio de Hilbert. Por lo tanto todo espacio vectorial normado de dimensión finita es un espacio de Banach que es un espacio de Hilbert, y es un espacio de Hilbert que es un espacio de Banach.*

Ejemplo 2.20. *En el Teorema 2.6 se demostró que si* X *es un espacio de Banach y* S *es un subespacio lineal de* X*, entonces,* S *es un espacio de Banach si y sólo si* S *es cerrado* *en X y en el Lema 2.11 se demostró que si X es un espacio de Hilbert y S es un subespacio lineal de X, entonces, S es un espacio de Hilbert si y sólo si S es cerrado en X. Luego se puede ver que si X es un espacio de Banach que es un espacio de Hilbert (espacio de Hilbert que es un espacio de Banach) y S es un subespacio lineal de X, entonces S es un espacio de Banach que es un espacio de Hilbert (espacio de Hilbert que es un espacio de Banach) si y sólo si S es cerrado en X.*

Ejemplo 2.21. *Se denota el espacio de la funciones cuadrado integrables en el intervalo $[a, b]$ por $L_2([a, b])$, este espacio se dota de la norma*

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

y del producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Puede mostrase sin dificultad que

$$\langle f, f \rangle = \|f\|_2^2.$$

Además, se puede definir la distancia entre f y g que pertenecen a $L_2([a, b])$ por

$$d(f, g) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Puede mostrarse que $L_2([a, b])$ es completo con respecto a esta distancia, lo cual implica por las característica mencionadas de la distancia, que $L_2([a, b])$ es un espacio de Banach y un espacio de Hilbert.

Apéndice A

Límite y continuidad de funciones

Introduciremos en esta sección el concepto de continuidad para una función definida sobre un subconjunto de $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Antes de esto se introducen algunas generalidades.

Se presentan a continuación los conjuntos numéricos básicos, para después pasar a estudiar la noción de convergencia de sucesiones de números reales.

Se notará, como es usual, al conjunto de los números naturales por $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$), al conjunto de los números enteros por $\mathbb{Z}$

$$(\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}),$$

al conjunto de los números racionales por $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$), al conjunto de los números reales por $\mathbb{R}$ y por $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos ($\mathbb{C} = \{a + b\mathbf{i} : a, b \in \mathbb{R}, \mathbf{i}^2 = -1\}$). Se asumirá que se conocen las propiedades básicas de las operaciones aritméticas sobre estos conjuntos numéricos (adición, multiplicación, potenciación), así como también, las propiedades de orden sobre los números reales ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$). El valor absoluto de un número real se notará por $|\cdot|$, ocasionalmente esto notará la norma de un número complejo.

Para $a, b \in \mathbb{R}$, los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de la forma

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \qquad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \qquad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

y el mismo $\mathbb{R}$, son llamados intervalos abiertos, y los subconjuntos de la forma

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \qquad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, \qquad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

y $\mathbb{R}$ son llamados intervalos cerrados.

Una **sucesión** de números reales (o sucesión en $\mathbb{R}$) es una función f definida del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales sobre el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. En otras palabras, una sucesión en $\mathbb{R}$ asigna a cada número $n = 1, 2, \ldots$ un número real determinado de manera única, es decir ($f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Se acostumbra denotar al conjunto de los elementos $f(n) = x_n$ por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o simplemente $\{x_n\}$.

Una sucesión $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ de números reales es llamada sucesión de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N : |x_m - x_n| < \varepsilon. \tag{A.1}$$

Una sucesión $\{x_n\}$ de números reales se dice que converge a $x \in \mathbb{R}$ si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $|x - x_n| < \varepsilon$, para todo $n \geq N$. En este caso el elemento x es llamado el límite de la sucesión y se denota

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

También se utiliza la notación $x_n \to x$.

$\mathbb{R}$ es completo en el sentido de que cada sucesión de Cauchy tiene un punto límite.

No es difícil demostrar que si $\{x_n\}$ es una sucesión que converge a $x \in \mathbb{R}$, entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y que el límite de una sucesión es único.

Si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales y sea $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Entonces la sucesión $\{x_{n_r}\}$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$\{x_{n_r}\} = \{x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{rn}, \ldots\}$$

se llama subsucesión de $\{x_n\}$.

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ tiende a infinito, es decir

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : x_n > M,$$

similarmente, se dice que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : x_n < M.$$

Si consideramos dos sucesiones convergentes $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$, tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Entonces las sucesiones $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{\alpha x_n\}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ son también convergentes con

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y, \qquad \lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = xy, \qquad \lim_{n\to\infty} (\alpha x_n) = \alpha x.$$

Para terminar, si $y \neq 0$, entonces $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ converge a $\dfrac{x}{y}$.

Las demostraciones de estos resultados se pueden encontrar por ejemplo en [4].

Un resultado muy importantes de sucesiones de números reales es el siguiente.

Teorema A.1 (Bolzano-Weierstrass). *Una sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente.*

La demostración de este teorema se puede encontrar por ejemplo en [3].

Definición A.2. *Sea $D \subset \mathbb{R}(o\ \mathbb{C})$ y $f : D \to \mathbb{R}(o\ \mathbb{C})$ una función. Decimos que $\lim_{x\to p} f(x) = y$ si y solo si para toda sucesión $\{x_n\} \subset D$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, se tiene $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$.*

Teorema A.3. *Se dice que $\lim_{x\to p} f(x) = y$ si y solo si las siguientes condiciones se cumplen*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \text{ con } |x - p| < \delta \ \ |f(x) - y| < \varepsilon. \tag{A.2}$$

Demostración. $\Leftarrow$) Sea $\{x_n\} \subset D$ una sucesión con $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, se tiene

$$\forall \delta, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n - p| < \delta \tag{A.3}$$

para $\varepsilon > 0$ se determina $\delta > 0$ como en (A.2) y N como en (A.3) de la siguiente manera.

Para $n \geq N$

$$|f(x_n) - y| < \varepsilon.$$

Por lo tanto se mostrará que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N : |f(x_n) - y| < \varepsilon$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$, y por lo tanto, por definición, $\lim_{x\to p} f(x) = y$.

$\Leftarrow$) Si (A.2) no se cumple, entonces:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in D \text{ con } |x - p| < \delta \text{ implica } |f(x) - y| < \varepsilon \tag{A.4}$$

Para $n \in \mathbb{N}$, se toma $\delta = \frac{1}{n}$ y se determina un $x_n = x$ correspondiente a δ como en (A.4).

Entonces $|x_n - p| < \frac{1}{n}$ y entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$, pero para ε como en (A.4) se tiene

$$|f(x_n) - y| > \varepsilon$$

y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq y$. □

Teorema A.4. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y sea p un punto de acumulación de D (Se dice que p es un punto de acumulación de D si toda vecindad $V_\delta(p) = (p - \delta, p + \delta)$ de p contiene al menos un punto de D diferente de p) entonces*

i) $\lim\limits_{x\to p} f(x) = y$ *si y solo si para toda sucesión* $\{x_n\}$ *en* D *que converge a* p *tal que* $x_n \neq p$*, para toda* $n \in \mathbb{N}$*, la sucesión* $\{f(x_n)\}$ *converge a* y*.*

La demostración de este teorema se puede encontrar por ejemplo en [3].

Definición A.5. *Sea $D \subset \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $f : D \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) una función y $p \in D$. La función f se dice que es continua en p si $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$. f es continua en D si f es continua en todo punto $p \in D$.*

Teorema A.6. *Sea $D \subset \mathbb{R}$(o $\mathbb{C}$), $f : D \to \mathbb{R}$(o $\mathbb{C}$) una función y $p \in D$. La función f se dice que es continua en p si*

i) Dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que para toda $x \in D$ con $|x - p| < \delta$, entonces $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

ii) Si $\{x_n\}$ es cualquier sucesión de números reales tal que $x_n \in D$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\}$ converge a $f(p)$.

la demostración de este Teorema requiere tan sólo ligeras modificaciones en las demostraciones de los teoremas A.3 y A.4.

Por otra parte, si $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ es una función y $p \in D$, se dice que f es discontinua en p si existe una sucesión $\{x_n\}$ en D tal que $\{x_n\}$ converge a p, pero la sucesión $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(p)$.

Teorema A.7. *Sea $D \subset \mathbb{R}$, sean f y g funciones de D en $\mathbb{R}$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$, suponer que $p \in D$ y que f y g son continuas en p.*

a) Entonces $f+g$, $f-g$, fg, y αf son continuas en p.

b) Si $h : D \to \mathbb{R}$ es continua en $p \in D$ y si $h(x) \neq 0$ para toda $x \in D$, entonces el cociente f/h es continuo en p.

Demostración. Si p no es un **punto de acumulación** de D, entonces la conclusión es automática. Por tanto, se supone que p es un punto de acumulación de D.

a) Como f y g son continuas en p, entonces

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to p} g(x) = g(p)$$

por tanto se sigue que

$$(f+g)(p) = f(p) + g(p) = \lim_{x\to p}(f+g)(x),$$

por consiguiente $f+g$ es continua en p. Las afirmaciones restantes del inciso *a*) se demuestran de manera similar.

b) Como $p \in D$, entonces $h(p) \neq 0$. Pero como $\lim_{x\to p} h(x) = h(p)$ se sigue que

$$\frac{f}{h}(p) = \frac{f(p)}{h(p)} = \frac{\lim\limits_{x\to p} f(x)}{\lim\limits_{x\to p} h(x)} = \lim_{x\to p}\left(\frac{f}{h}(x)\right)$$

por lo tanto el cociente f/h es continuo en p. □

Teorema A.8. *Sea $D \subset \mathbb{R}$, sean f y g funciones de D en $\mathbb{R}$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$.*

a) Las funciones $f+g$, $f-g$, fg, y αf son continuas en D.

b) Si $h : D \to \mathbb{R}$ es continua en D entonces el cociente f/h es continuo en D.

Corolario A.9. *Todas las funciones polinómicas de la forma*

$$f(x) = \sum_{\upsilon=0}^{n} a_\upsilon x^\upsilon$$

son continuas.

Definición A.10. *Sea $D \subset \mathbb{R}$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$, se dice que f es uniformemente continua en D si para cada $\varepsilon > 0$, existe una $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x, \mu \in D$, son números cualesquiera que satisfacen $|x - \mu| < \delta(\varepsilon)$, entonces $|f(x) - f(\mu)| < \varepsilon$.*

Definición A.11. *Sea $D \subset \mathbb{R}$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$, entonces decimos que f no es uniformemente continua en D si*

a). Existe una $\varepsilon_0 > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existen los puntos x_δ, μ_δ en D tales que $|x_\delta - \mu_\delta| < \delta$ y $|f(x_\delta) - f(\mu_\delta)| \geq \varepsilon_0$.

b). Existe una $\varepsilon_0 > 0$ y dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{u_n\}$ en D tales que $\lim(x_n - \mu_n) = 0$ *y $|f(x_n) - f(\mu_n)| \geq \varepsilon_0$.*

Teorema A.12. *Sea I un intervalo acotado cerrado y sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua en I, entonces f es uniformemente continua en I.*

Demostración. Si f no es uniformemente continua en I entonces, existen $\varepsilon_0 > 0$ y dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{u_n\}$ en I tales que $|x_n - \mu_n| < \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f(\mu_n)| \geq \varepsilon_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ Como I es acotado, la sucesión $\{x_n\}$ está acotada, luego por el teorema de Bolzano-Weirstrass, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a un elemento q. Puesto que I es cerrado, el límite q pertenece a I. La subsucesión $\{u_{n_k}\}$ también converge a z, ya que

$$|u_{n_k} - q| \leq |u_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - q|$$

Ahora bien, si f es continua en el punto q entonces las dos sucesiones $\{f(x_{n_k})\}$ y $\{f(\mu_{n_k})\}$ deben converger a $f(q)$, pero esto no es posible ya que

$$|f(x_n) - f(\mu_n)| \geq \varepsilon_0$$

por tanto, f no es continua en algún punto $q \in I$. $\square$

Teorema A.13. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces f es acotada si existe $M \geq 0$ tal que*

$$|f(x)| \leq M, \text{ para todo } x \in [a, b]$$

y suponemos que existen $x_0, x_1 \in [a, b]$ (máximo y mínimo de $[a, b]$) tal que

$$f(x_0) = \inf(f(x) : x \in [a, b]),$$

$$f(x_1) = \sup(f(x) : x \in [a, b]).$$

Demostración. La segunda condición implica la primera, por que

$$|f(x)| \leq \text{máx}(|f(x_0), f(x_1)|) = M$$

para x_0, x_1 dados. Consideremos $-f$ en lugar de f, sea $\{x_n\} \subset [a, b]$ una sucesión tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf(f(x) : x \in [a, b])$$

como $\{x_n\}$ está contenida en el intervalo cerrado $[a, b]$, el teorema de Bolzano-Wierstrass implica la existencia de una subsucesión $\{\varepsilon_v\}$ de $\{x_n\}$ que converge también a $x_0 \in [a, b]$. Como f es continua en $[a, b]$ obtenemos

$$f(x_0) = \lim_{v\to\infty} f(\varepsilon_v) = \inf(f(x) : x \in [a, b]).$$

En particular la última expresión es finita y f asume un mínimo en x_0. $\square$

Bibliografía

[1] Apostol Tom. *Análisis Matemático*. Barcelona España, editorial Reverte, 1972.

[2] Bachman G. y Naciri L. *Análisis Funcional*. Editorial Tecnos, Madrid, 1966.

[3] Bartle Robert G. y Sherbert Donald R. *Introducción al análisis de matemático de una variable*. Segunda edición, Limusa Wiley, 2004.

[4] Edwards C. H. and Penney D. *Cálculo con geometría analítica*. Prentice Hall, México, 1994.

[5] GROSSMAN Stanley. *Álgebra Lineal*. Quinta edición, Editorial McGrawHill, México, 1996.

[6] Herstein I. N. *Álgebra moderna*. Segunda Edición, Editorial Trillas, México, 1999.

[7] Jürgen Jost. *Postmodern Analysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.

[8] Padilla Maria. *Espacios métricos*. Monografía de grado, Universidad Industrial de Santander, 1993.

[9] Pinzón Sofía. *Desigualdades*. Monografía de grado, Universidad Industrial de Santander, 1992.

[10] Restrepo Guillermo. *Analisis en* $\mathbb{R}^n$. Editorial Universidad del Valle, Santiago de Cali, 1997.

[11] Rynne Brian P. and Youngson Martin A. *Linear Functional Analysis*. Springer-Verlag, Great Britain, 2000.