

COMPOSICIONES ENTERAS Y SUS APLICACIONES

JAZMÍN LISETH MANTILLA ROZO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2021

COMPOSICIONES ENTERAS Y SUS APLICACIONES

JAZMÍN LISETH MANTILLA ROZO

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemática

Director

WILSON OLAYA LEÓN

Doctorado en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2021

DEDICATORIA

Este trabajo viene dedicado a mi sobrina y ahijada Valeria Alejandra Bautista Mantilla y en especial a la memoria de mi querido padre Victor David Mantilla Montaña.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco principalmente a mi madre Victoria Roza Ojeda, por el apoyo económico y moral que me dio durante el desarrollo de esta carrera. También agradezco al director de esta tesis, el Dr. Wilson Olaya León, por guiarme, apoyarme y corregirme durante el desarrollo de este proyecto y durante los últimos semestres de la carrera.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	11
1. TEORÍA DE COMPOSICIONES	13
1.1. PARTICIÓN Y COMPOSICIÓN DE UN NÚMERO ENTERO	13
1.2. COMPOSICIONES CON EXACTAMENTE m PARTES	18
1.3. COMPOSICIONES CON PARTES EN EL CONJUNTO $\{1, 2, \dots, k\}$	23
1.3.1. Composiciones con partes en $\{1, 2\}$	23
1.3.2. Composiciones con exactamente m partes en $\{1, 2\}$	25
1.3.3. Composiciones con partes en $\{1, 2, 3\}$	27
1.3.4. Composiciones con partes en $\{1, 2, \dots, k\}$	29
1.4. COMPOSICIONES PALÍNDROMAS	32
1.4.1. Composiciones palíndromas con exactamente m partes	34
1.4.2. Composiciones palíndromas con partes $\{1, 2\}$	37
1.5. COMPOSICIONES DE CARLITZ	40
1.5.1. Composiciones de Carlitz palíndromas	43
1.6. COMPOSICIONES n -COLOREADAS	45
1.6.1. Composiciones n -coloreadas con colores pares o impares	48
1.6.2. Composiciones coloreadas con sub-índices en progresiones aritméticas.	49
2. FUNCIONES GENERATRICES	51
2.1. FUNCIÓN GENERATRIZ ORDINARIA	51
2.2. MÉTODO SIMBÓLICO	57
2.2.1. Composiciones palíndromas	60
2.2.2. Composiciones de Carlitz	62

2.2.3. Composiciones n -coloreadas	64
3. APLICACIONES Y RESULTADOS OBTENIDOS	72
3.1. APLICACIÓN A AUTÓMATAS	72
3.2. ALGUNOS PROBLEMAS TRABAJADOS	81
3.2.1. Composición superdiagonal	81
3.2.2. Composiciones d -superdiagonal	83
3.2.3. Enumeración de gráficos de barras de composiciones d -superdiagonal de acuerdo al semi-perímetro	87
3.2.4. Enumeración de composiciones d -superdiagonal palíndromas	90
BIBLIOGRAFÍA	93

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Gráfico lineal de la composición $(1, 3, 4, 2, 1, 2, 1)$.	21
Figura 2. Gráfico de barras asociado a la composición $(3, 1, 5, 4, 1, 2, 6)$.	57
Figura 3. Estructura recursiva de una composición.	58
Figura 4. Estructura recursiva de una composición con exactamente m partes.	59
Figura 5. Estructura recursiva de una composición palíndroma.	60
Figura 6. Gráfico de barras de la composición coloreada $(3_2, 1_1, 5_4, 4_1, 1_1, 2_2, 6_6)$.	65
Figura 7. Autómata finito	73
Figura 8. Grafo simple, multigrafo y dígrafo.	75
Figura 9. Grafo dirigido ponderado.	76
Figura 10. Autómata que evita el patrón subsecuencia $\tau = 123$.	78
Figura 11. Autómata para evitar $\tau \in [d]^l$.	80
Figura 12. Gráficos de barra con respecto al semi-perímetro n , $(0 \leq n \leq 6)$	87
Figura 13. Estructura recursiva de una composición d -superdiagonal	90

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Particiones del entero n ($0 \leq n \leq 5$).	14
Tabla 2. Composiciones del entero n ($0 \leq n \leq 5$).	17
Tabla 3. Composiciones del entero n con m partes, con $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y $m = 1, 2, 3$.	19
Tabla 4. Composiciones del entero n con partes en $\{1, 2\}$ ($0 \leq n \leq 5$).	23
Tabla 5. Composiciones de n con m partes en $\{1, 2\}$, con $n = 1, \dots, 5$ y $m = 1, 2, 3$.	25
Tabla 6. Composiciones del entero n con partes en $\{1, 2, 3\}$ ($0 \leq n \leq 5$).	28
Tabla 7. Composiciones Palíndromas del entero n ($1 \leq n \leq 5$).	32
Tabla 8. Composiciones palíndromas de n con partes en $\{1, 2\}$ ($1 \leq n \leq 6$).	38
Tabla 9. Composiciones de Carlitz del entero n ($1 \leq n \leq 5$).	41
Tabla 10. Composiciones de Carlitz palíndromas del entero n ($1 \leq n \leq 5$).	43
Tabla 11. Composiciones superdiagonal del entero n ($1 \leq n \leq 5$).	82
Tabla 12. Primeros valores de la secuencia $a_d(n), n = 1, \dots, 5$	85
Tabla 13. Primeros valores de la secuencia $b_0(n)$	88
Tabla 14. Primeros valores de las secuencias $b_d(n)$, para $1 \leq d \leq 6$	89
Tabla 15. Primeros valores de la secuencia $p_d(n)$, para $d = 0, 1, \dots, 5$	91

RESUMEN

TÍTULO: COMPOSICIONES ENTERAS Y SUS APLICACIONES *

AUTOR: JAZMÍN LISETH MANTILLA ROZO **

PALABRAS CLAVE: COMPOSICIONES PALÍNDROMAS, COMPOSICIONES DE CARLITZ, COMPOSICIONES n -COLOREADAS, FUNCIÓN GENERATRIZ, AUTÓMATA.

DESCRIPCIÓN:

En este trabajo se hace un estudio de la teoría de composiciones de números enteros y su aplicación a los autómatas. En el primer capítulo se introducen los conceptos básicos de composiciones. En particular, se muestran las composiciones con restricciones en el conjunto de las partes mostrando la conexión que existe entre este tipo de composiciones y los números generalizados de Fibonacci (o k -bonacci). También se estudian composiciones palíndromas y de Carlitz, las cuales se obtienen al restringir la ubicación de las partes y finalmente, composiciones n -coloreadas, estas son una generalización de las composiciones clásicas y se obtienen al colorear las partes de la composición con colores diferentes. Durante el desarrollo de este capítulo se muestran códigos en sagemath para obtener cada uno de estos tipos de composiciones. Posteriormente, en el segundo capítulo se introduce la noción de función generatriz y de método simbólico, este método utiliza los gráficos de barras asociados a las composiciones para hallar sus respectivas funciones generatrices. Por último, en el tercer capítulo se establece una aplicación de las composiciones a los autómatas finitos para definir secuencias recursivamente y luego expresar las estructuras recursivas en un grafo asociado. Además en la sección 3.2, se incluyen algunos resultados obtenidos durante el desarrollo de este trabajo sobre composiciones superdiagonal y composiciones d -superdiagonal.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Wilson Olaya León, Doctorado en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: INTEGERS COMPOSITIONS AND THEIR APPLICATIONS *

AUTHOR: JAZMÍN LISETH MANTILLA ROZO **

KEYWORDS: PALINDROMIC COMPOSITIONS, CARLITZ COMPOSITIONS, n -COLORED COMPOSITIONS, GENERATING FUNCTIONS, AUTOMATA.

DESCRIPTION:

In this work a study of the theory of integer compositions and its application to automata is made. The first chapter introduces the basic concepts of compositions. In particular, the compositions with restrictions on all the parts are shown, showing the connection that exists between this type of composition and the generalized Fibonacci numbers (o k -bonacci). Palindromic and Carlitz compositions are also studied, which are obtained by restricting the location of the parts and finally, n -colored compositions, these are a generalization of the classical compositions and are obtained by coloring the parts of the composition with different colors. During the development of this chapter, codes are shown in sagemath to obtain each of these types of compositions. Later, in the second chapter, the notion of generating function and symbolic method is introduced. This method uses the bar graphs associated with compositions to find their respective generating functions. Finally, the third chapter establishes an application of compositions to finite automata to define sequences recursively and then express recursive structures in an associated graph. In addition, section 3.2 includes some results obtained during the development of this work on superdiagonal compositions and d -superdiagonal compositions.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Wilson Olaya León, Doctorado en Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Las composiciones enteras son una forma en la que se puede representar un entero positivo como suma de enteros positivos menores o iguales a él y se consideran un área fundamental de la combinatoria enumerativa y la teoría de números. Aunque la primera publicación sobre composiciones, llamada *Memoir on the Theory of Compositions of a Number*¹ fue realizada por Percy Alexander MacMahon en 1893, sus orígenes se atribuyen a los trabajos realizados por Euler en el siglo XVIII. MacMahon, utilizando funciones generatrices encontró fórmulas para el número total de composiciones y el número total de composiciones con un número dado de partes, también enumeró las composiciones palíndromas y estableció un gráfico lineal para cada composición con los que pudo probar estos resultados usando un argumento combinatorio.

Sin embargo, no fue hasta finales de la década de 1960 que aparecieron artículos sobre diferentes aspectos de las composiciones, en los que estudiaron y enumeraron el total de composiciones con cierto tipo de restricciones. No obstante, es en las dos últimas décadas que se han hecho la mayoría de las publicaciones sobre composiciones, en las cuales se introducen nuevos tipos de composiciones y métodos para evitar patrones en composiciones.

En la literatura existen varias generalizaciones y restricciones de las composiciones. Por ejemplo, Agarwal² introdujo un tipo de composiciones que se obtienen al colo-

¹ P. A. MACMAHON. "Memoir on the theory of the compositions of numbers." En: *Phil. Trans. Royal Society London. A* 184 (1893), págs. 835-901.

² A. K. AGARWAL. "*n*-colour compositions." En: *Indian J. Pure Appl. Math.* 31(11) (2000),

rear n -veces las partes de la composición, estas se conocen como composiciones n -coloreadas. Alladi y Hoggatt³ estudiaron las composiciones de n cuyas partes son restringidas al conjunto $\{1, 2\}$, encontrando conexiones con la secuencia de Fibonacci. Otro tipo de composiciones son aquellas con restricciones en la ubicación de las partes, las cuales fueron estudiadas por Carlitz⁴ y sus diversos coautores.

Recientemente, se ha estudiado la evitación de patrones para composiciones. Los patrones de subsecuencia son aquellos en los que las partes individuales del patrón no tienen requisitos de adyacencia. Brändén y Mansour⁵ fueron los primeros en utilizar autómatas finitos para evitar patrones en palabras, haciendo uso del método de la matriz de transición del autómata para contar el número de palabras que evitan un patrón de subsecuencia. También dieron la primera prueba combinatoria de una fórmula para el número de palabras de longitud n sobre k letras evitando el patrón 123.

El objetivo de este trabajo es hacer un estudio sobre composiciones enteras y su aplicación a los autómatas.

págs. 1421-1427.

³ K. ALLADI y HOGGATT V. E. "Compositions with ones and twos". En: *Fibonacci Quart.* 13(3) (1975), págs. 1021-1031.

⁴ L. CARLITZ. "Restricted compositions". En: *J. Combin. Theory Ser. A* 14(3) (1976), págs. 254-264.

⁵ P. BRÄNDÉN y MANSOUR T. "Finite automata and pattern avoidance in words". En: *J. Combin. Theory Ser. A* 110(1) (2005), págs. 127-145.

1. TEORÍA DE COMPOSICIONES

En este capítulo se presentarán algunos resultados básicos sobre la teoría de composiciones, para una referencia más amplia sobre esta teoría ver^{6,7}. Además se incluyen los programas hechos en *sagemath* (software matemático de código abierto) para generar las diferentes estructuras que se presentan en este trabajo. En⁶ se pueden consultar códigos similares para generar estas estructuras en el programa *Mathematica Wolfram*.

1.1. PARTICIÓN Y COMPOSICIÓN DE UN NÚMERO ENTERO

Definición 1.1.1. Una **partición** de un entero positivo n es una sucesión no creciente de enteros positivos (p_1, p_2, \dots, p_m) , llamadas **partes**, cuya suma es n , es decir $\sum_{i=1}^m p_i = n$, con $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_m$. Se denota por $p(n)$ al número total de particiones del entero n .

Por conveniencia se define $p(0) = 1$, esta partición corresponde a la partición vacía $()$. En la Tabla 1 se muestran las particiones del entero n , $(0 \leq n \leq 5)$.

⁶ JOSÉ LUIS RAMÍREZ. "Introducción a la teoría de composiciones". En: <https://sites.google.com/site/remirezjl/>. (2020).

⁷ S. HEUBACH y MANSOUR T. *Combinatorics of Compositions and Words*. CRC Press, 2009.

Tabla 1. Particiones del entero n ($0 \leq n \leq 5$).

n	Particiones del entero n	$p(n)$
0	()	1
1	(1)	1
2	(2), (1, 1)	2
3	(3), (2, 1), (1, 1, 1)	3
4	(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)	5
5	(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)	7

Fuente: RAMÍREZ, J. L. *Introducción a la teoría de composiciones*.

El siguiente código en *sagemath* genera, usando el comando *Partitions()* las particiones del entero positivo n , y usando el comando *len(Partitions())* el número total de particiones de n . Estos comandos ya se encuentran incluidos en *sagemath*. Note que la primera columna indica el entero n , la segunda columna es $p(n)$ y la tercera columna es la lista de las respectivas particiones.

```
sage: for n in range(0, 8) :
.....:     print (n, len(Partitions(n)), list(Partitions(n)))
0 1 [[ ]]
1 1 [[1]]
2 2 [[2], [1, 1]]
3 3 [[3], [2, 1], [1, 1, 1]]
4 5 [[4], [3, 1], [2, 2], [2, 1, 1], [1, 1, 1, 1]]
5 7 [[5], [4, 1], [3, 2], [3, 1, 1], [2, 2, 1], [2, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1]]
6 11 [[6], [5, 1], [4, 2], [4, 1, 1], [3, 3], [3, 2, 1], [3, 1, 1, 1], [2, 2, 2], [2, 2, 1, 1], [2, 1, 1, 1, 1],
[1, 1, 1, 1, 1, 1]]
7 15 [[7], [6, 1], [5, 2], [5, 1, 1], [4, 3], [4, 2, 1], [4, 1, 1, 1], [3, 3, 1], [3, 2, 2], [3, 2, 1, 1],
```

[3, 1, 1, 1, 1], [2, 2, 2, 1], [2, 2, 1, 1, 1], [2, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]]

Nota 1. Tenga en cuenta que en todos los códigos de *sagemath* realizados en este proyecto, la primera columna indicará el entero n , la segunda columna el total de composiciones y la tercera columna será la lista de las respectivas composiciones, al igual que el código anterior.

Los primeros valores de la sucesión $p(n)$ son:

(OEIS - A000041)⁸ : 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, ...

Leonhard Euler(1707-1783) en su investigación utilizó funciones generatrices para obtener varios resultados dentro de lo que ahora se llama *Teoría de Particiones*. Euler también descubrió una fórmula para calcular de forma recursiva los valores de $p(n)$.

Teorema 1.1.2. El total de particiones, $p(n)$, para $n \geq 1$ es,

$$p(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} p(n - \diamond_k), \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (1)$$

donde $p(n) = 0$ para $n < 0$, $p(0) = 1$ y \diamond_k el k -ésimo número pentagonal generalizado.

Los números pentagonales generalizados son definidos por la ecuación:

$$\diamond_k := \frac{k(3k - 1)}{2}, \quad k = 0, 1, -1, 2, -2, \dots$$

El siguiente código en *sagemath* genera los números pentagonales generalizados.

⁸ N. J. SLOANE. "The On-Line encyclopedia of integer sequences." En: <https://oeis.org> (1964).

sage: gpentagonales = set($k * (3 * k - 1) / 2$ for k in srange(-15, 15))

sage: gpentagonales

{0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, 100, 117, 126, 145, 155, 176, 187, 210, 222, 247, 260, 287, 301, 345}

La secuencia de los primeros números pentagonales generalizados es:

(OEIS - A001318) : 0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, ...

Expandiendo la Ecuación (1) se obtiene la siguiente ecuación,

$$p(n) = p(n - 1) + p(n - 2) - p(n - 5) - p(n - 7) + p(n - 12) + \dots \quad (2)$$

Usando la Ecuación (2) MacMahon obtuvo los valores de $p(n)$ para $n = 1, 2, \dots, 200$.

Por ejemplo, $p(8) = p(7) + p(6) - p(3) - p(1) = 15 + 11 - 3 - 1 = 22$.

La sucesión $p(n)$ tiene como función generatriz la expresión,

$$\sum_{n \geq 0} p(n)q^n = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - q^n}.$$

Para obtener información más detallada sobre la teoría de particiones, consulte las referencias^{9,10}. El principal enfoque de este trabajo son las particiones en las que el orden de las partes es relevante. Estas particiones son llamadas composiciones.

⁹ G. ANDREWS. *The Theory of Partitions*. Encyclopedia of Mathematics e Its Applications, Cambridge University Press, 1998.

¹⁰ G. ANDREWS y ERIKSON K. *Integer Partitions*. Cambridge University Press, 2004.

Definición 1.1.3. Una **composición** de un entero positivo n es una sucesión de enteros positivos $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$, llamadas **partes**, cuya suma es n , es decir $\sum_{i=1}^m \sigma_i = n$. Se denota por $\mathcal{C}(n)$ al número total de composiciones de n .

Por conveniencia también se define $\mathcal{C}(0) = 1$, esta composición corresponde a la composición vacía $()$. En la Tabla 2 se muestran las composiciones de n , para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Tabla 2. Composiciones del entero n ($0 \leq n \leq 5$).

n	Composiciones del entero n	$\mathcal{C}(n)$
0	$()$	1
1	(1)	1
2	$(2), (1, 1)$	2
3	$(3), (2, 1), (1, 2), (1, 1, 1)$	4
4	$(4), (3, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 1, 1)$	8
5	$(5), (4, 1), (1, 4), (3, 2), (2, 3), (3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 1)$	16

Fuente: RAMÍREZ, J. L. *Introducción a la teoría de composiciones*.

El siguiente código en *sagemath* genera, usando el comando *Compositions()* las composiciones del entero positivo n , y usando el comando *len(Compositions())* el número total de composiciones de n . Estos comandos ya se encuentran incluidos en *sagemath*.

```
sage: for n in range(0, 7) :
... ..:     print (n, len(Compositions(n)), list(Compositions(n)))
0 1 [[ ]]
1 1 [[1]]
```

$2 \ 2$ $[[1, 1], [2]]$
 $3 \ 4$ $[[1, 1, 1], [1, 2], [2, 1], [3]]$
 $4 \ 8$ $[[1, 1, 1, 1], [1, 1, 2], [1, 2, 1], [1, 3], [2, 1, 1], [2, 2], [3, 1], [4]]$
 $5 \ 16$ $[[1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 2], [1, 1, 2, 1], [1, 1, 3], [1, 2, 1, 1], [1, 2, 2], [1, 3, 1], [1, 4],$
 $[2, 1, 1, 1], [2, 1, 2], [2, 2, 1], [2, 3], [3, 1, 1], [3, 2], [4, 1], [5]]$
 $6 \ 32$ $[[1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 2], [1, 1, 1, 2, 1], [1, 1, 1, 3], [1, 1, 2, 1, 1], [1, 1, 2, 2],$
 $[1, 1, 3, 1], [1, 1, 4], [1, 2, 1, 1, 1], [1, 2, 1, 2], [1, 2, 2, 1], [1, 2, 3], [1, 3, 1, 1], [1, 3, 2],$
 $[1, 4, 1], [1, 5], [2, 1, 1, 1, 1], [2, 1, 1, 2], [2, 1, 2, 1], [2, 1, 3], [2, 2, 1, 1], [2, 2, 2], [2, 3, 1],$
 $[2, 4], [3, 1, 1, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1], [3, 3], [4, 1, 1], [4, 2], [5, 1], [6]]$

Los primeros valores de la sucesión $\mathcal{C}(n)$ son:

(OEIS - A000079) : 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, . . .

Note que la diferencia entre partición y composición es una cuestión de orden, ya que una partición ordenada de dos maneras distintas da dos composiciones diferentes de n .

En lo que resta del capítulo se estudiarán algunas restricciones sobre las composiciones de un entero n , estas composiciones restringidas se pueden agrupar dentro de dos categorías: composiciones con restricciones sobre el conjunto de las partes o composiciones con restricciones sobre el número total de partes.

1.2. COMPOSICIONES CON EXACTAMENTE m PARTES

En este apartado se hará referencia a las composiciones del entero n con restricciones en el número total de partes. El número total de composiciones del entero positivo n con exactamente m partes se denota por $\mathcal{C}(n, m)$ y, por $\mathcal{C}(n, \leq m)$ al nú-

mero total de composiciones de n con a los más m partes, para $m \geq 1$. Observe que,

$$\mathcal{C}(n, \leq m) = \sum_{l=1}^m \mathcal{C}(n, l).$$

La Tabla 3 muestra las composiciones del entero positivo n con exactamente m partes para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y $m = 1, 2, 3$. Por ejemplo $(2, 1, 2)$ es una composición de 5 con 3 partes.

Tabla 3. Composiciones del entero n con m partes, con $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y $m = 1, 2, 3$.

n	Composiciones del entero n	$\mathcal{C}(n, 1)$	$\mathcal{C}(n, 2)$	$\mathcal{C}(n, 3)$
1	(1)	1	0	0
2	(2), (1, 1)	1	1	0
3	(3), (2, 1), (1, 2), (1, 1, 1)	1	2	1
4	(4), (3, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 1, 1)	1	3	3
5	(5), (4, 1), (1, 4), (3, 2), (2, 3), (3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 1)	1	4	6

El siguiente código en *sagemath* genera las composiciones de un entero positivo n con exactamente m partes. Como ejemplo se generan las composiciones de n con exactamente 3 partes.

```
sage: def C(n, m) :
.....:     for n in range(1, 10) :
.....:         print (n, len(Compositions(n, length= m)), list(Compositions(n, length=
m)))
sage: C(n, 3)
```

1 0 []
 2 0 []
 3 1 [[1, 1, 1]]
 4 3 [[2, 1, 1], [1, 2, 1], [1, 1, 2]]
 5 6 [[3, 1, 1], [2, 2, 1], [2, 1, 2], [1, 3, 1], [1, 2, 2], [1, 1, 3]]
 6 10 [[4, 1, 1], [3, 2, 1], [3, 1, 2], [2, 3, 1], [2, 2, 2], [2, 1, 3], [1, 4, 1], [1, 3, 2], [1, 2, 3], [1, 1, 4]]
 7 15 [[5, 1, 1], [4, 2, 1], [4, 1, 2], [3, 3, 1], [3, 2, 2], [3, 1, 3], [2, 4, 1], [2, 3, 2], [2, 2, 3], [2, 1, 4],
 [1, 5, 1], [1, 4, 2], [1, 3, 3], [1, 2, 4], [1, 1, 5]]
 8 21 [[6, 1, 1], [5, 2, 1], [5, 1, 2], [4, 3, 1], [4, 2, 2], [4, 1, 3], [3, 4, 1], [3, 3, 2], [3, 2, 3], [3, 1, 4],
 [2, 5, 1], [2, 4, 2], [2, 3, 3], [2, 2, 4], [2, 1, 5], [1, 6, 1], [1, 5, 2], [1, 4, 3], [1, 3, 4], [1, 2, 5],
 [1, 1, 6]]
 9 28 [[7, 1, 1], [6, 2, 1], [6, 1, 2], [5, 3, 1], [5, 2, 2], [5, 1, 3], [4, 4, 1], [4, 3, 2], [4, 2, 3], [4, 1, 4],
 [3, 5, 1], [3, 4, 2], [3, 3, 3], [3, 2, 4], [3, 1, 5], [2, 6, 1], [2, 5, 2], [2, 4, 3], [2, 3, 4], [2, 2, 5],
 [2, 1, 6], [1, 7, 1], [1, 6, 2], [1, 5, 3], [1, 4, 4], [1, 3, 5], [1, 2, 6], [1, 1, 7]]

Los primeros valores de la sucesión del número total de composiciones de n con exactamente 3 partes, $\mathcal{C}(n, 3)$, es,

(OEIS - A161680) : 0, 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, ...

Nota 2. Usando el código anterior de sagemath se pueden hallar los valores de la matriz $\mathcal{C}(n, m)$, la cual coincide con el triángulo de Pascal. El número de cada fila de la matriz indica el entero n y el número de cada columna indica el número de partes m . Note que la suma de las filas es 2^{n-1} .

$$[\mathcal{C}(n, m)]_{n, m \geq 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

La siguiente definición será útil para demostrar algunos resultados más adelante.

Definición 1.2.1. Un **gráfico lineal** es un segmento de recta que se divide en n pedazos iguales y en algunas de las $n - 1$ divisiones internas se ponen $m - 1$ vértices o marcas las cuales determinan las partes de la composición.

Por ejemplo, la Figura 1 es el gráfico lineal asociado a la composición $(1, 3, 4, 2, 1, 2, 1)$.

Figura 1. Gráfico lineal de la composición $(1, 3, 4, 2, 1, 2, 1)$.



Fuente: RAMÍREZ, J. L. *Introducción a la teoría de composiciones*.

Nota 3. El gráfico lineal no lleva marcas al inicio ni al final del segmento.

Usando gráficos lineales Percy Alexander MacMahon¹ demostró el siguiente teorema para el número total de composiciones del entero positivo n dando una prueba combinatorial.

Teorema 1.2.2. El número total de composiciones del entero n con exactamente m partes es dada por

$$\mathcal{C}(n, m) = \binom{n-1}{m-1},$$

y el total de composiciones de n es $\mathcal{C}(n) = 2^{n-1}$.

Demostración. Todo gráfico lineal asociado a cada composición de n con exactamente m partes tiene un total de $n - 1$ divisiones internas, entonces de esas $n - 1$ divisiones se seleccionan los $m - 1$ vértices, así se tienen $\binom{n-1}{m-1}$ opciones. Además, cada división de las $n - 1$ puede llevar o no un vértice, para un total de 2^{n-1} composiciones. \square

Otra forma de mostrar que el total de composiciones de n es $\mathcal{C}(n) = 2^{n-1}$ es descomponiendo las composiciones de n de la forma $\sigma_1\sigma'$, en donde σ' es una composición de $n - \sigma_1$ y σ_1 es la primera parte de la composición. Dado que σ_1 toma valores de 1 a n se tiene que,

$$\mathcal{C}(n) = \mathcal{C}(n - 1) + \mathcal{C}(n - 2) + \mathcal{C}(n - 3) + \cdots + \mathcal{C}(0),$$

$$\mathcal{C}(n - 1) = \mathcal{C}(n - 2) + \mathcal{C}(n - 3) + \cdots + \mathcal{C}(0),$$

entonces $\mathcal{C}(n) = 2\mathcal{C}(n - 1)$, con $\mathcal{C}(0) = 1$. Iterando la ecuación anterior se obtiene que $\mathcal{C}(n) = 2^{n-1}$, para $n \geq 1$.

Observación 1.2.3. De la Tabla 3 y del Teorema 1.2.2 observe que,

- El total de composiciones del entero positivo n con exactamente una parte es igual a uno para todo n , $\mathcal{C}(n, 1) = 1$, esto corresponde a la composición total (n) .
- El total de composiciones con exactamente dos partes del entero positivo n , para $n \geq 1$ coincide con el entero $n - 1$, es decir, $\mathcal{C}(n, 2) = n - 1$, esto corresponde al hecho de que estas composiciones son de la forma (σ_1, σ_2) , donde σ_1 es la primera parte de la composición y se tiene que $1 \leq \sigma_1 \leq \lfloor n/2 \rfloor$ entonces, cuando n es impar hay un total de $2\lfloor n/2 \rfloor$ composiciones, y para n par hay un total de $2\lfloor n/2 \rfloor - 1$ composiciones.

1.3. COMPOSICIONES CON PARTES EN EL CONJUNTO $\{1, 2, \dots, k\}$

En esta sección se muestran algunos resultados de composiciones en las cuales se restringe el conjunto de las partes a un conjunto dado y su relación con los números de Fibonacci generalizados (o k -bonacci).

1.3.1. Composiciones con partes en $\{1, 2\}$ Las composiciones del entero positivo n con partes en el conjunto $\{1, 2\}$ son aquellas cuyas partes permiten únicamente los sumandos 1 y 2. Se denota por $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n)$ al número total de estas composiciones. En la Tabla 4 se muestran las primeras composiciones con partes en el conjunto $\{1, 2\}$.

Tabla 4. Composiciones del entero n con partes en $\{1, 2\}$ ($0 \leq n \leq 5$).

n	Composiciones con partes en $\{1, 2\}$	$\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n)$
0	()	1
1	(1)	1
2	(2), (1, 1)	2
3	(2, 1), (1, 2), (1, 1, 1)	3
4	(2, 2), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 1, 1)	5
5	(2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 1)	8

Fuente: RAMÍREZ, J. L. *Introducción a la teoría de composiciones*.

El siguiente código en *sagemath* nos muestra las composiciones del entero positivo n con partes en el conjunto $\{1, 2\}$.

sage: for n in range(1,6) :

```

.....:    k = len(Compositions(n, max_part= 2))
.....:    m = list(Compositions(n, max_part= 2))
.....:    print (n, k, m)
1  1  [[1]]
2  2  [[2], [1, 1]]
3  3  [[2, 1], [1, 2], [1, 1, 1]]
4  5  [[2, 2], [2, 1, 1], [1, 2, 1], [1, 1, 2], [1, 1, 1, 1]]
5  8  [[2, 2, 1], [2, 1, 2], [2, 1, 1, 1], [1, 2, 2], [1, 2, 1, 1], [1, 1, 2, 1], [1, 1, 1, 2], [1, 1, 1, 1, 1]]

```

Antes de mostrar la conexión que existe entre las composiciones con partes en el conjunto $\{1, 2\}$ y los números de Fibonacci se recordará como se definen estos últimos.

Definición 1.3.1. *Los números de Fibonacci se definen recursivamente por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo $n \geq 2$, con valores iniciales $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$.*

Los primeros números de Fibonacci son:

(OEIS - A000045) : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

El siguiente código en *sagemath* calcula el n -ésimo número de Fibonacci. El comando **fibonacci**(n) ya se encuentra incluido en *sagemath*.

```

sage: for n in range(1, 20) :
.....:    print (fibonacci(n))
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181

```

Observando los valores de la sucesión $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n)$ y de la sucesión F_n se puede conjeturar que $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n) = F_{n+1}$. El siguiente teorema demuestra esta relación.

Teorema 1.3.2. *El número total de composiciones del entero positivo n con partes en el conjunto $\{1, 2\}$ coincide con el número de Fibonacci $n + 1$. Es decir, $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n) = F_{n+1}$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Toda composición de n , para $n \geq 2$, con partes en el conjunto $\{1, 2\}$ inicia con 1 o con 2. Si inicia con 1 debe estar seguida por una composición de $n - 1$, para lo cual hay $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n - 1)$ formas. Si inicia con 2, debe estar seguida por una composición de $n - 2$, para lo cual hay $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n - 2)$ formas. Así,

$$\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n) = \mathcal{C}_{\{1,2\}}(n - 1) + \mathcal{C}_{\{1,2\}}(n - 2), \quad n \geq 2,$$

y como para la composición vacía se tiene que $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(0) = 1 = F_1$ y $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(1) = 1 = F_2$, se concluye que $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n) = F_{n+1}$ para todo $n \geq 0$. \square

1.3.2. Composiciones con exactamente m partes en $\{1, 2\}$ Se denota por $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n, m)$ al número de composiciones del entero positivo n con exactamente m partes en el conjunto $\{1, 2\}$. La Tabla 5 muestra las composiciones del entero positivo n con exactamente m partes en $\{1, 2\}$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y $m = 1, 2, 3$.

Tabla 5. Composiciones de n con m partes en $\{1, 2\}$, con $n = 1, \dots, 5$ y $m = 1, 2, 3$.

n	Composiciones de n con partes en $\{1, 2\}$	$\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n, 1)$	$\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n, 2)$	$\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n, 3)$
1	(1)	1	0	0
2	(2), (1, 1)	1	1	0
3	(2, 1), (1, 2), (1, 1, 1)	0	2	1
4	(2, 2), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 1, 1)	0	1	3
5	(2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 1)	0	0	3

El siguiente código en *sagemath* nos muestra como generar las composiciones de

n con exactamente m partes en el conjunto $\{1, 2\}$. Como ejemplo se generan las composiciones de n con exactamente 4 partes en el conjunto $\{1, 2\}$.

```
sage: def C_2(n, m) :
.....:     for n in range(0, 7) :
.....:         k = len(list(Compositions(n, max_part= 2, length= m)))
.....:         l = list(Compositions(n, max_part= 2, length= m))
.....:         print (n, k, l)
sage: C_2(n, 4)
0 0 []
1 0 []
2 0 []
3 0 []
4 1 [[1, 1, 1, 1]]
5 4 [[2, 1, 1, 1], [1, 2, 1, 1], [1, 1, 2, 1], [1, 1, 1, 2]]
6 6 [[2, 2, 1, 1], [2, 1, 2, 1], [2, 1, 1, 2], [1, 2, 2, 1], [1, 2, 1, 2], [1, 1, 2, 2]]
```

Nota 4. Usando el código anterior de sagemath se pueden hallar los valores de la matriz $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n, m)$, el número de cada fila de la matriz indica el entero n y el número de cada columna indica el número de partes m . Note que la suma de las filas es F_{n+1} .

$$[\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n, m)]_{n,m \geq 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 15 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.3.3. *El número total de composiciones del entero positivo n con exactamente m partes en el conjunto $\{1, 2\}$ es dado por,*

$$\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n, m) = \mathcal{C}_{\{1,2\}}(n-1, m-1) + \mathcal{C}_{\{1,2\}}(n-2, m-1),$$

con $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(0, 0) = 1$, $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(1, 1) = 1$ y $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n, 0) = 0$ si $n \neq 0$ y $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(n, m) = 0$ si $m > n$.

Demostración. Se hace usando el mismo razonamiento del Teorema 1.3.2. □

1.3.3. Composiciones con partes en $\{1, 2, 3\}$ Las composiciones del entero n con partes en el conjunto $\{1, 2, 3\}$ son aquellas cuyas partes permiten únicamente los sumandos 1, 2 y 3. El total de estas composiciones se denota por $\mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(n)$. En la Tabla 6 se muestran las primeras composiciones con partes en el conjunto $\{1, 2, 3\}$.

Tabla 6. Composiciones del entero n con partes en $\{1, 2, 3\}$ ($0 \leq n \leq 5$).

n	Composiciones con partes en $\{1, 2, 3\}$	$\mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(n)$
0	()	1
1	(1)	1
2	(2), (1, 1)	2
3	(3), (2, 1), (1, 2), (1, 1, 1)	4
4	(3, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 1, 1)	7
5	(3, 2), (2, 3), (3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 1)	13

El siguiente código en *sagemath* genera las composiciones del entero positivo n con partes en el conjunto $\{1, 2, 3\}$.

```
sage: for n in range(1, 7) :
.... :     k = len(list(Compositions(n, max_part= 3)))
.... :     l = list(Compositions(n, max_part= 3))
.... :     print (n, k, l)
1 1 [[1]]
2 2 [[2], [1, 1]]
3 4 [[3], [2, 1], [1, 2], [1, 1, 1]]
4 7 [[3, 1], [2, 2], [2, 1, 1], [1, 3], [1, 2, 1], [1, 1, 2], [1, 1, 1, 1]]
5 13 [[3, 2], [3, 1, 1], [2, 3], [2, 2, 1], [2, 1, 2], [2, 1, 1, 1], [1, 3, 1], [1, 2, 2], [1, 2, 1, 1],
     [1, 1, 3], [1, 1, 2, 1], [1, 1, 1, 2], [1, 1, 1, 1, 1]]
6 24 [[3, 3], [3, 2, 1], [3, 1, 2], [3, 1, 1, 1], [2, 3, 1], [2, 2, 2], [2, 2, 1, 1], [2, 1, 3], [2, 1, 2, 1],
     [2, 1, 1, 2], [2, 1, 1, 1, 1], [1, 3, 2], [1, 3, 1, 1], [1, 2, 3], [1, 2, 2, 1], [1, 2, 1, 2], [1, 2, 1, 1, 1],
     [1, 1, 3, 1], [1, 1, 2, 2], [1, 1, 2, 1, 1], [1, 1, 1, 3], [1, 1, 1, 2, 1], [1, 1, 1, 1, 2], [1, 1, 1, 1, 1, 1]]
```

Antes de mostrar la conexión que existe entre las composiciones con partes en el conjunto $\{1, 2, 3\}$ y los números Tribonacci, primero se definen estos últimos.

Definición 1.3.4. *Los **números Tribonacci** se definen recursivamente como $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ para todo $n \geq 3$, con valores iniciales $T_0 = T_1 = 0$ y $T_2 = 1$.*

Los primeros números Tribonacci son:

(OEIS - A000073) : 0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, ...

Observando los valores de la sucesión $\mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(n)$ y T_n se puede conjeturar que $\mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(n) = T_{n+2}$. El siguiente teorema nos demuestra esta relación.

Teorema 1.3.5. *El número de composiciones del entero positivo n con partes en el conjunto $\{1, 2, 3\}$ coincide con el número de Tribonacci $n + 2$. Es decir, $\mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(n) = T_{n+2}$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Toda composición de n , para $n \geq 3$, con partes en el conjunto $\{1, 2, 3\}$ inicia con 1, 2 o con 3. Si inicia con 1 debe estar seguida por una composición de $n - 1$, para lo cual hay $\mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(n - 1)$ formas. Si inicia con 2, debe estar seguida por una composición de $n - 2$, para lo cual hay $\mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(n - 2)$ formas. Si inicia con 3, debe estar seguida por una composición de $n - 3$, para lo cual hay $\mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(n - 3)$ formas. Por lo tanto,

$$\mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(n) = \mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(n - 1) + \mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(n - 2) + \mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(n - 3), \quad n \geq 3,$$

Además, para la composición vacía se tiene que $\mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(0) = 1 = T_2$, $\mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(1) = 1 = T_3$ y $\mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(2) = 2 = T_4$ se concluye que $\mathcal{C}_{\{1,2,3\}}(n) = T_{n+2}$ para todo $n \geq 0$. \square

1.3.4. Composiciones con partes en $\{1, 2, \dots, k\}$ En este apartado se generaliza los resultados anteriores para los números k -bonacci y las composiciones con

partes restringidas al conjunto $\{1, 2, 3, \dots, k\}$.

Definición 1.3.6. *Los números k -bonacci se definen recursivamente como,*

$$\mathcal{F}_n^{(k)} = \mathcal{F}_{n-1}^{(k)} + \mathcal{F}_{n-2}^{(k)} + \dots + \mathcal{F}_{n-k}^{(k)}, \quad n \geq k,$$

con valores iniciales $\mathcal{F}_0^{(k)} = \mathcal{F}_1^{(k)} = \dots = \mathcal{F}_{k-2}^{(k)} = 0$ y $\mathcal{F}_{k-1}^{(k)} = 1$.

Ejemplo 1.3.7. ■ *Los números **Tetranacci** se definen recursivamente como,*

$$\mathcal{F}_n^{(4)} = \mathcal{F}_{n-1}^{(4)} + \mathcal{F}_{n-2}^{(4)} + \mathcal{F}_{n-3}^{(4)} + \mathcal{F}_{n-4}^{(4)},$$

para $n \geq 4$ y con valores iniciales $\mathcal{F}_0^{(4)} = \mathcal{F}_1^{(4)} = \mathcal{F}_2^{(4)} = 0$ y $\mathcal{F}_3^{(4)} = 1$.

Los primeros números Tetranacci son:

(OEIS - A000078) : 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, 401, 773, ...

■ *Los números **Pentanacci** se definen recursivamente como,*

$$\mathcal{F}_n^{(5)} = \mathcal{F}_{n-1}^{(5)} + \mathcal{F}_{n-2}^{(5)} + \mathcal{F}_{n-3}^{(5)} + \mathcal{F}_{n-4}^{(5)} + \mathcal{F}_{n-5}^{(5)},$$

para $n \geq 5$ y con valores iniciales $\mathcal{F}_0^{(5)} = \mathcal{F}_1^{(5)} = \mathcal{F}_2^{(5)} = \mathcal{F}_3^{(5)} = 0$ y $\mathcal{F}_4^{(5)} = 1$.

Los primeros números Pentanacci son:

(OEIS - A001591) : 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 31, 61, 120, 236, 464, 912, ...

El siguiente teorema fue demostrado por Hoggatt y Bicknell¹¹ donde muestran la

¹¹ V. E. JR. y BICKNELL M. HOGGATT. "Palindromic compositions". En: *Fibonacci Quart.* 14(4) (1975), págs. 350-356.

conexión entre los números k -bonacci y las composiciones del entero positivo n con partes en el conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$.

Teorema 1.3.8. *El número total de composiciones del entero positivo n con partes en el conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$ coincide con el número k -bonacci $(k - 1) + n$. Es decir,*

$$\mathcal{C}_{\{1,2,\dots,k\}}(n) = \mathcal{F}_{(k-1)+n}^{(k)}.$$

Demostración. Toda composición del entero positivo n , para $n \geq k$ con partes en el conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$ inicia con $1, 2, 3, \dots$ o con k . Si inicia con 1 debe estar seguida por una composición de $n - 1$, para lo cual hay $\mathcal{C}_{\{1,2,\dots,k\}}(n - 1)$ formas. Si inicia con 2, debe estar seguida por una composición de $n - 2$, para lo cual hay $\mathcal{C}_{\{1,2,\dots,k\}}(n - 2)$ formas. Sucesivamente, si inicia con k , debe estar seguida por una composición de $n - k$, para lo cual hay $\mathcal{C}_{\{1,2,\dots,k\}}(n - k)$ formas. Por lo tanto,

$$\mathcal{C}_{\{1,2,\dots,k\}}(n) = \mathcal{C}_{\{1,2,\dots,k\}}(n - 1) + \mathcal{C}_{\{1,2,\dots,k\}}(n - 2) + \dots + \mathcal{C}_{\{1,2,\dots,k\}}(n - k), \quad n \geq k,$$

Además para $n < k$ se tiene,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\{1,2,\dots,k\}}(0) &= \mathcal{C}(0) = 1 = \mathcal{F}_{k-1}^{(k)} \\ \mathcal{C}_{\{1,2,\dots,k\}}(1) &= \mathcal{C}(1) = 1 = \mathcal{F}_{(k-1)+1}^{(k)} \\ \mathcal{C}_{\{1,2,\dots,k\}}(2) &= \mathcal{C}(2) = 2 = \mathcal{F}_{(k-1)+2}^{(k)} \\ &\vdots \\ \mathcal{C}_{\{1,2,\dots,k\}}(k - 1) &= \mathcal{C}(k - 1) = \mathcal{F}_{(k-1)+(k-1)}^{(k)} \end{aligned}$$

Se concluye que $\mathcal{C}_{\{1,2,\dots,k\}}(n) = \mathcal{F}_{(k-1)+n}^{(k)}$ para todo $n \geq 0$. □

1.4. COMPOSICIONES PALÍNDROMAS

Otro tipo de restricción a las composiciones de un entero n es cuando se restringe la forma en que las partes están ubicadas dentro de la composición, este tipo de composiciones son llamadas palíndromas y serán estudiadas durante el desarrollo de esta sección. MacMahon¹ estableció resultados sobre el número total de composiciones palíndromas y de las composiciones palíndromas con un número determinado de partes.

Definición 1.4.1. Una composición es **palíndroma** si se lee de la misma forma de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Se denota por $\mathcal{P}(n)$ el total de composiciones palíndromas del entero positivo n .

En la Tabla 7 se muestra la lista de las primeras composiciones palíndromas.

Tabla 7. Composiciones Palíndromas del entero n ($1 \leq n \leq 5$).

n	Composiciones Palíndromas	$\mathcal{P}(n)$
1	(1)	1
2	(2), (1, 1)	2
3	(3), (1, 1, 1)	2
4	(4), (2, 2), (1, 2, 1), (1, 1, 1, 1)	4
5	(5), (1, 3, 1), (2, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 1)	4

Fuente: RAMÍREZ, J. L. *Introducción a la teoría de composiciones*.

El siguiente código en *sagemath* muestra como obtener las composiciones palíndromas del entero positivo n .

```
sage: def palindroma(n) :
.....:     C = list(Compositions(n))
```

```

.....:   k = len(Compositions(n))
.....:   L = []
.....:   cont = 0
.....:   for i in range(0, k) :
.....:       l = Composition(C[i]).reversed()
.....:       if l == C[i]:
.....:           L.append(l)
.....:           cont = cont+1
.....:   print (n, cont, L)
sage: for n in range(0, 10) :
.....:   print (palindroma(n))
0 1 [[ ]]
1 1 [[1]]
2 2 [[1, 1], [2]]
3 2 [[1, 1, 1], [3]]
4 4 [[1, 1, 1, 1], [1, 2, 1], [2, 2], [4]]
5 4 [[1, 1, 1, 1, 1], [1, 3, 1], [2, 1, 2], [5]]
6 8 [[1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 2, 1, 1], [1, 2, 2, 1], [1, 4, 1], [2, 1, 1, 2], [2, 2, 2], [3, 3], [6]]
7 8 [[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 3, 1, 1], [1, 2, 1, 2, 1], [1, 5, 1], [2, 1, 1, 1, 2], [2, 3, 2], [3, 1, 3],
    [7]]
8 16 [[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 2, 1, 1, 1], [1, 1, 2, 2, 1, 1], [1, 1, 4, 1, 1], [1, 2, 1, 1, 2, 1],
    [1, 2, 2, 2, 1], [1, 3, 3, 1], [1, 6, 1], [2, 1, 1, 1, 1, 2], [2, 1, 2, 1, 2], [2, 2, 2, 2], [2, 4, 2],
    [3, 1, 1, 3], [3, 2, 3], [4, 4], [8]]
9 16 [[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 3, 1, 1, 1], [1, 1, 2, 1, 2, 1, 1], [1, 1, 5, 1, 1],
    [1, 2, 1, 1, 1, 2, 1], [1, 2, 3, 2, 1], [1, 3, 1, 3, 1], [1, 7, 1], [2, 1, 1, 1, 1, 1, 2], [2, 1, 3, 1, 2],
    [2, 2, 1, 2, 2], [2, 5, 2], [3, 1, 1, 1, 3], [3, 3, 3], [4, 1, 4], [9]]

```

Los primeros valores de la sucesión $\mathcal{P}(n)$ son:

(OEIS - A016116) : 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32, 64, 64, 128, 128, ...

El siguiente resultado muestra cual es el número total de composiciones palíndromas de un entero n .

Teorema 1.4.2. *El número total de composiciones palíndromas del entero n es $\mathcal{P}(n) = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.*

Demostración. Cualquier composición palíndroma de n , a excepción de la composición (n) , se puede descomponer de la forma $\sigma_1 \sigma' \sigma_1$, donde σ' es una composición palíndroma de $n - 2\sigma_1$. Además σ_1 toma únicamente los valores $1 \leq \sigma_1 \leq \lfloor n/2 \rfloor$. De modo que se tiene lo siguiente,

$$\mathcal{P}(n) = 1 + \mathcal{P}(n-2) + \mathcal{P}(n-4) + \mathcal{P}(n-6) + \cdots + \mathcal{P}\left(n-2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), \quad n \geq 2.$$

Por otro lado observe que el total de composiciones palíndromas de $n-2$ es,

$$\mathcal{P}(n-2) = 1 + \mathcal{P}(n-4) + \mathcal{P}(n-6) + \cdots + \mathcal{P}\left((n-2) - 2 \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor\right),$$

y observe que,

$$\mathcal{P}\left(n-2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) = \mathcal{P}\left((n-2) - 2 \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor\right),$$

Así $\mathcal{P}(n) = 2\mathcal{P}(n-2)$, con valores iniciales $\mathcal{P}(0) = 1 = \mathcal{P}(1)$ y $\mathcal{P}(n) = 0$ para todo $n < 0$. Iterando esta ecuación se obtiene que $\mathcal{P}(n) = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$. \square

1.4.1. Composiciones palíndromas con exactamente m partes El número total de composiciones palíndromas del entero n con exactamente m partes se denota por $\mathcal{P}(n, m)$.

El siguiente código en *sagemath* genera las composiciones palíndromas de n con m partes. Como ejemplo se generan las composiciones palíndromas de n con exactamente 3 partes.

```
sage: def palindroma( $n, m$ ) :
.....:     C = list(Compositions( $n$ , length=  $m$ ))
.....:     k = len(Compositions( $n$ , length=  $m$ ))
.....:     L = []
.....:     for  $i$  in range(0,  $k$ ) :
.....:         l = Composition(C[ $i$ ]).reversed()
.....:         if  $l == C[ $i$ ]$ :
.....:             L.append( $l$ )
.....:     print ( $n$ , len(L), L)
sage: for  $n$  in range(0, 10) :
.....:     print (palindroma( $n$ , 3))
0 0 []
1 0 []
2 0 []
3 1 [[1, 1, 1]]
4 1 [[1, 2, 1]]
5 2 [[2, 1, 2], [1, 3, 1]]
6 2 [[2, 2, 2], [1, 4, 1]]
7 3 [[3, 1, 3], [2, 3, 2], [1, 5, 1]]
8 3 [[3, 2, 3], [2, 4, 2], [1, 6, 1]]
9 4 [[4, 1, 4], [3, 3, 3], [2, 5, 2], [1, 7, 1]]
```

Nota 5. Usando el código anterior de *sagemath* se pueden hallar los valores de la

matriz $\mathcal{P}(n, m)$, el número de cada fila de la matriz indica el entero n y el número de cada columna indica el número de partes m . Note que la suma de las filas es $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

$$[\mathcal{P}(n, m)]_{n, m \geq 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

El número total de composiciones palíndromas con exactamente m partes va a depender de la paridad del número de partes.

Teorema 1.4.3. *El número total de composiciones palíndromas*

1. *de $2n$ con $2k$ partes es igual a $\binom{n-1}{k-1}$,*
2. *de $2n$ o $2n - 1$ con $2k + 1$ partes es igual a $\binom{n-1}{k}$.*

Demostración. 1. Las composiciones palíndromas con un número par de partes, $m = 2k$, siempre resultan en una composición de un entero n par, ya que estas composiciones se descomponen de la forma $\sigma\sigma^{-1}$, donde σ y σ^{-1} son composiciones con exactamente k partes, con $k \geq 1$ y σ^{-1} es la composición inversa (o reversa) de σ , es decir, si $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ entonces $\sigma^{-1} = (\sigma_k, \dots, \sigma_2, \sigma_1)$, también note que cada parte se obtiene por un factor de 2. Así, todo gráfico lineal asociado a cada composición palíndroma de n con exactamente $2k$ partes tiene un total de $n - 1$ divisiones internas y de esas $n - 1$ divisiones se seleccionan $k - 1$ vértices, esto se debe a la paridad de las partes, entonces se tiene un total de $\binom{n-1}{k-1}$ opciones.

2. Para las composiciones palíndromas con un número impar de partes $m = 2k+1$, se obtiene una composición de un entero n par o impar. En este caso las composiciones palíndromas se descomponen de la forma $\sigma\sigma'\sigma^{-1}$, donde σ y σ^{-1} son composiciones con exactamente k partes, con $k \geq 1$ y la parte central, σ' , es distinta de cero y ocurre solo una vez. Por lo tanto, todo gráfico lineal asociado a cada composición palíndroma de n con exactamente $2k+1$ partes tiene $n-1$ divisiones internas y de ellas se seleccionan k vértices ($k-1$ vértices que corresponden a la paridad de σ y σ^{-1} y otro vértice que corresponde a la parte central σ'), para un total de $\binom{n-1}{k}$ opciones.

□

1.4.2. Composiciones palíndromas con partes $\{1, 2\}$ Por otro lado las composiciones palíndromas con partes restringidas al conjunto $\{1, 2\}$ conducen a una buena conexión con los números de Fibonacci, $\{F_n\}_{n \geq 0}$. Este conjunto fue estudiado por Alladi y Hoggatt³, quienes demostraron resultados sobre el número de composiciones y composiciones palíndromas con partes en $\{1, 2\}$. Se denota por $\mathcal{P}_{\{1,2\}}(n)$ al número total de composiciones con partes en el conjunto $\{1, 2\}$.

En la Tabla 8 se muestra la lista de las primeras composiciones palíndromas con partes en el conjunto $\{1, 2\}$.

Tabla 8. Composiciones palíndromas de n con partes en $\{1, 2\}$ ($1 \leq n \leq 6$).

n	Composiciones palíndromas con partes en $\{1, 2\}$	$\mathcal{P}_{\{1,2\}}(n)$
1	(1)	1
2	(2), (1, 1)	2
3	(1, 1, 1)	1
4	(2, 2), (1, 2, 1), (1, 1, 1, 1)	3
5	(2, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 1)	2
6	(2, 2, 2), (2, 1, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (1, 1, 2, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)	5

El siguiente código en *sagemath* genera las composiciones palíndromas del entero positivo n con partes en el conjunto $\{1, 2\}$.

```
sage: def palindroma_2(n) :
.....:     C = list(Compositions(n, max_part= 2))
.....:     k = len(Compositions(n, max_part= 2))
.....:     L = []
.....:     for i in range(0, k) :
.....:         l = Composition(C[i]).reversed()
.....:         if l == C[i]:
.....:             L.append(l)
.....:     print (n, len(L), L)
sage: for n in range(0, 10) :
.....:     print (palindroma_2(n))
0 1 [[ ]]
1 1 [[1]]
2 2 [[2], [1, 1]]
3 1 [[1, 1, 1]]
```

- 4 3 [[2, 2], [1, 2, 1], [1, 1, 1, 1]]
 5 2 [[2, 1, 2], [1, 1, 1, 1, 1]]
 6 5 [[2, 2, 2], [2, 1, 1, 2], [1, 2, 2, 1], [1, 1, 2, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1]]
 7 3 [[2, 1, 1, 1, 2], [1, 2, 1, 2, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]]
 8 8 [[2, 2, 2, 2], [2, 1, 2, 1, 2], [2, 1, 1, 1, 1, 2], [1, 2, 2, 2, 1], [1, 2, 1, 1, 2, 1], [1, 1, 2, 2, 1, 1],
 [1, 1, 1, 2, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]]
 9 5 [[2, 2, 1, 2, 2], [2, 1, 1, 1, 1, 1, 2], [1, 2, 1, 1, 1, 2, 1], [1, 1, 2, 1, 2, 1, 1],
 [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]]

Los primeros valores de la sucesión $\mathcal{P}_{\{1,2\}}(n)$ son:

(OEIS - A053602) : 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 5, 3, 8, 5, 13, 8, 21, 13, 34, 21, 55, . . .

Observe que la sucesión $\mathcal{P}_{\{1,2\}}(n)$ es la sucesión de Fibonacci intercalada, es decir, observando las posiciones impares de la sucesión $\mathcal{P}_{\{1,2\}}(n)$ se obtiene la sucesión de Fibonacci y lo mismo sucede con las posiciones pares.

El siguiente resultado muestra cual es el total de composiciones palíndromas con partes en el conjunto $\{1, 2\}$ para n par e impar.

Teorema 1.4.4. *El número total de composiciones palíndromas con partes en el conjunto $\{1, 2\}$ para el entero n impar y par son, respectivamente,*

$$\mathcal{P}_{\{1,2\}}(2n + 1) = F_{n+1} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_{\{1,2\}}(2n) = F_{n+2}.$$

Demostración. Las composiciones palíndromas de $2n + 1$ se descomponen de la forma $\sigma \cdot 1 \cdot \sigma^{-1}$, siendo σ una composición de n y σ^{-1} su inverso. Cada composición empieza con 1 o con 2, seguida de una composición de $2n$ o $2n - 1$, respectivamente.

Así,

$$\mathcal{P}_{\{1,2\}}(2n+1) = \mathcal{P}_{\{1,2\}}(2n) + \mathcal{P}_{\{1,2\}}(2n-1),$$

y como $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(0) = \mathcal{P}_{\{1,2\}}(1) = 1$ y $\mathcal{C}_{\{1,2\}}(1) = \mathcal{P}_{\{1,2\}}(3) = 1$, se concluye que,

$$\mathcal{P}_{\{1,2\}}(2n+1) = \mathcal{C}_{\{1,2\}}(n) = F_{n+1}.$$

Por otro lado, para las composiciones palíndromas de $2n$ hay dos posibilidades. Si la composición palíndroma tiene un número impar de partes, entonces la composición se tiene que descomponer de la forma $\sigma \cdot 2 \cdot \sigma^{-1}$, donde σ es una composición de $n-1$ y σ^{-1} su inverso. Si hay un número par de partes, la composición palíndroma se descompone de la forma $\sigma\sigma^{-1}$, donde σ es una composición de n . Así, $\mathcal{P}_{\{1,2\}}(2n) = \mathcal{C}_{\{1,2\}}(n-1) + \mathcal{C}_{\{1,2\}}(n) = F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$. \square

1.5. COMPOSICIONES DE CARLITZ

Las composiciones de Carlitz⁴ son otro tipo de composiciones que se obtienen al restringir la forma en que las partes están ubicadas dentro de la composición.

Definición 1.5.1. Una **composición de Carlitz** del entero n , es una composición en la que sus partes o sumandos adyacentes son diferentes. Se denota por $CC(n)$ al número total de composiciones de Carlitz del entero n .

En otras palabras, esta definición es equivalente a decir que el valor absoluto de las diferencias entre las partes consecutivas es mayor que cero. En la Tabla 9 se muestran las primeras composiciones de Carlitz.

Tabla 9. Composiciones de Carlitz del entero n ($1 \leq n \leq 5$).

n	Composiciones de Carlitz	$CC(n)$
1	(1)	1
2	(2)	1
3	(3), (2, 1), (1, 2)	3
4	(4), (3, 1), (1, 3), (1, 2, 1),	4
5	(5), (4, 1), (1, 4), (3, 2), (2, 3), (1, 3, 1), (2, 1, 2)	7

Fuente: RAMÍREZ, J. L. *Introducción a la teoría de composiciones*.

El siguiente código en *sagemath* genera las composiciones de Carlitz para el entero positivo n .

```
sage: def Carlitz(n) :
.....:     C = list(Compositions(n))
.....:     k = len(Compositions(n))
.....:     M = [ ]
.....:     for i in range(0, k) :
.....:         W= [ ]
.....:         l = [ ]
.....:         p= len(C[i])
.....:         for j in range(1, p) :
.....:             W.append(C[i][j])
.....:         for j in range(0, p - 1) :
.....:             if C[i][j]==W[j]:
.....:                 None
.....:             else: l.append((C[i][j]))
.....:         if len(l)== p - 1 :
```

```

.....:      M.append(C[i])
.....:      print (n, len(M), M)
sage: for n in range(0, 7) :
.....:      print (Carlitz(n))
1  1  [[1]]
2  1  [[2]]
3  3  [[1, 2], [2, 1], [3]]
4  4  [[1, 2, 1], [1, 3], [3, 1], [4]]
5  7  [[1, 3, 1], [1, 4], [2, 1, 2], [2, 3], [3, 2], [4, 1], [5]]
6 14  [[1, 2, 1, 2], [1, 2, 3], [1, 3, 2], [1, 4, 1], [1, 5], [2, 1, 2, 1], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [2, 4], [3, 1, 2],
      [3, 2, 1], [4, 2], [5, 1], [6]]

```

Los primeros valores de la sucesión $CC(n)$ son:

(OEIS - A003242) 1, 1, 3, 4, 7, 14, 23, 39, 71, 124, 214, 378, ...

El siguiente teorema fue demostrado por Carlitz⁴.

Teorema 1.5.2. *Para todo entero $n \geq 1$,*

$$CC(n) = \sum_{l=1}^n d'(l)CC(n-l)$$

y $CC(0) = 1$. En este caso $d'(n)$ denota el número de divisores impares de n menos el número de divisores pares de n .

Ejemplo 1.5.3. Usando la fórmula del teorema anterior se hallará $CC(7)$.

$$\begin{aligned}
 CC(7) &= \sum_{l=1}^7 d'(l)CC(7-l) \\
 &= CC(6) + 2CC(4) - CC(3) + 2CC(2) + 2CC(0) \\
 &= 14 + 2(4) - 3 + 2(1) + 2(1) = 23.
 \end{aligned}$$

1.5.1. Composiciones de Carlitz palíndromas La combinación de las composiciones palíndromas junto con las composiciones de Carlitz conduce a las composiciones de Carlitz palíndromas del entero n . Note que no hay composiciones de Carlitz palíndromas con un número par de partes, debido a que las dos partes intermedias tendrían que ser iguales. Se denota por $CP(n)$ al número total de composiciones de Carlitz palíndromas. En la Tabla 10 se muestran las primeras composiciones de Carlitz palíndromas.

Tabla 10. Composiciones de Carlitz palíndromas del entero n ($1 \leq n \leq 5$).

n	Composiciones de Carlitz palíndromas	$CP(n)$
1	(1)	1
2	(2)	1
3	(3)	1
4	(4), (1, 2, 1),	2
5	(5), (1, 3, 1), (2, 1, 2)	3

El siguiente código en *sagemath* muestra como generar las composiciones de Carlitz palíndromas del entero positivo n .

```

sage: def PCarlitz(n) :
.....:     C = list(Compositions(n))

```

```

.....:  k = len(Compositions(n))
.....:  M = []
.....:  P = []
.....:  for i in range(0, k) :
.....:      W = []
.....:      l = []
.....:      p = len(C[i])
.....:      for j in range(1, p) :
.....:          W.append(C[i][j])
.....:      for j in range(0, p - 1) :
.....:          if C[i][j] == W[j]:
.....:              None
.....:          else: l.append((C[i][j]))
.....:      if len(l) == p - 1 :
.....:          m = Compositions(C[i]).reversed()
.....:          M.append(C[i])
.....:          if m == C[i]:
.....:              P.append(m)
.....:      print (n, len(P), P)
sage: for n in range(0, 10) :
.....:     print (PCarlitz(n))
1 1 [[1]]
2 1 [[2]]
3 1 [[3]]
4 2 [[1, 2, 1], [4]]
5 3 [[1, 3, 1], [2, 1, 2], [5]]
6 2 [[1, 4, 1], [6]]

```

7 5 [[1, 2, 1, 2, 1], [1, 5, 1], [2, 3, 2], [3, 1, 3], [7]]
 8 5 [[1, 6, 1], [2, 1, 2, 1, 2], [2, 4, 2], [3, 2, 3], [8]]
 9 7 [[1, 2, 3, 2, 1], [1, 3, 1, 3, 1], [1, 7, 1], [2, 1, 3, 1, 2], [2, 5, 2], [4, 1, 4], [9]]

Los primeros valores de la sucesión $CP(n)$ son:

(OEIS - A239327) : 1, 1, 1, 1, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 14, 14, 25, 26, 42, 48, 75, . . .

Para más información sobre las composiciones de Carlitz ver^{4,7}.

1.6. COMPOSICIONES n -COLOREADAS

En esta sección se estudiarán las composiciones n -coloreadas, estas composiciones fueron introducidas por Agarwal². A diferencia de las composiciones anteriores, las cuales restringen las partes, las composiciones n -coloreadas son una generalización de las composiciones clásicas.

Definición 1.6.1. Una **partición n -coloreada** (o *partición con " n copias de n "*) se define como una partición en la que una parte de tamaño n puede venir en n colores diferentes, estos colores se denotarán utilizando subíndices en cada una de las partes, es decir, n_1, n_2, \dots, n_n .

Por ejemplo, existen 13 particiones n -coloreadas de 4,

$$\begin{array}{cccc} (4_1), & (4_2), & (4_3), & (4_4), \\ (3_1, 1_1), & (3_2, 1_1), & (3_3, 1_1), & \\ (2_1, 2_1), & (2_1, 2_2), & (2_2, 2_2), & \\ (2_1, 1_1, 1_1), & (2_2, 1_1, 1_1), & (1_1, 1_1, 1_1, 1_1). & \end{array}$$

Definición 1.6.2. Una **partición ordenada n -coloreada** es llamada una **composición n -coloreada**.

Por ejemplo, existen 21 composiciones n -coloreadas de 4,

(4_1) , (4_2) , (4_3) , (4_4) , $(1_1, 1_1, 1_1, 1_1)$
 $(3_1, 1_1)$, $(3_2, 1_1)$, $(3_3, 1_1)$, $(1_1, 3_1)$, $(1_1, 3_2)$, $(1_1, 3_3)$,
 $(2_1, 2_1)$, $(2_1, 2_2)$, $(2_2, 2_2)$, $(2_2, 2_1)$,
 $(2_1, 1_1, 1_1)$, $(2_2, 1_1, 1_1)$, $(1_1, 2_1, 1_1)$, $(1_1, 1_1, 2_1)$, $(1_1, 2_2, 1_1)$, $(1_1, 1_1, 2_2)$.

El siguiente código en *sagemath* genera las composiciones n -coloreadas del entero n . Tenga en cuenta que el programa arroja las composiciones de la siguiente forma, por ejemplo, para la composición coloreada $(2_2, 1_1)$ de 3, el programa muestra $((2, 2), (1, 1))$.

```

sage: def ncolor(n):
.....:     C = list(Compositions(n))
.....:     k = len(Compositions(n))
.....:     W = []
.....:     for i in range(0, k) :
.....:         M= []
.....:         p= len(C[i])
.....:         for j in range(0, p) :
.....:             l = []
.....:             for k in range(1, C[i][j]+1):
.....:                 l.append((C[i][j],k))
.....:             M.append(l)
.....:         W.extend(list(cartesian_product(M)))
.....:     print (n, len(W), W)
sage: for n in range(1, 5) :
.....:     print (ncolor(n))
  
```

1 1 [((1, 1),)]
 2 3 [((1, 1), (1, 1)), ((2, 1),), ((2, 2),)]
 3 8 [(((1, 1), (1, 1), (1, 1)), ((1, 1), (2, 1)), ((1, 1), (2, 2)), ((2, 1), (1, 1)), ((2, 2), (1, 1)),
 ((3, 1),), ((3, 2),), ((3, 3),)]
 4 21 [(((1, 1), (1, 1), (1, 1), (1, 1)), ((1, 1), (1, 1), (2, 1)), ((1, 1), (1, 1), (2, 2)),
 ((1, 1), (2, 1), (1, 1)), ((1, 1), (2, 2), (1, 1)), ((1, 1), (3, 1)), ((1, 1), (3, 2)),
 ((1, 1), (3, 3)), ((2, 1), (1, 1), (1, 1)), ((2, 2), (1, 1), (1, 1)), ((2, 1), (2, 1)),
 ((2, 1), (2, 2)), ((2, 2), (2, 1)), ((2, 2), (2, 2)), ((3, 1), (1, 1)), ((3, 2), (1, 1)),
 ((3, 3), (1, 1)), ((4, 1),), ((4, 2),), ((4, 3),), ((4, 4),)]

Usando el código anterior se obtienen los primeros valores de la sucesión $\bar{C}(n)$.

(OEIS - A088305) : 1, 1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, 987, 2584, 6765, 17711, ...

A partir de los valores de la sucesión $\bar{C}(n)$ se puede conjeturar que $\bar{C}(n) = F_{2n}$. Esta relación se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.6.3. *El número total de composiciones n -coloreadas del entero n se denota por $\bar{C}(n)$ entonces, $\bar{C}(n) = F_{2n}$, donde F_{2n} es el número de Fibonacci $2n$ y se denota por $\bar{C}(n, m)$ al número total de composiciones n -coloreadas del entero n con exactamente m partes entonces,*

$$\bar{C}(n, m) = \binom{n+m-1}{2m-1}$$

Demostración. Ver².

□

Teorema 1.6.4. *El número total de composiciones n -coloreadas palíndromas del*

entero n se denota $\bar{C}_{Pal}(n)$ y está dada por,

$$\bar{C}_{Pal}(n) = \begin{cases} F_n + 2F_{n-1} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 3F_n & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Demostración. Ver¹². □

1.6.1. Composiciones n -coloreadas con colores pares o impares Sachdeva y Agarwal¹³ estudiaron recientemente composiciones n -coloreadas cuyos índices son solo números pares o solo números impares. Se denota por $\bar{C}_P(n)$ y $\bar{C}_I(n)$ al número total de composiciones n -coloreadas con índices formados por números pares o por números impares, respectivamente.

Ejemplo 1.6.5. *El total de composiciones coloreadas del entero 4 con índices formados por números pares son 3, es decir, $\bar{C}_P(4) = 3$ y son:*

$$(4_2), (4_4), (2_2, 2_2),$$

y las composiciones coloreadas del entero 4 con índices formados por números impares son 11, es decir, $\bar{C}_I(4) = 11$ y son:

$$(4_1), (4_3), (3_1, 1_1), (3_3, 1_1), (1_1, 3_1), (1_1, 3_3), (2_1, 2_1),$$

$$(2_1, 1_1, 1_1), (1_1, 2_1, 1_1), (1_1, 1_1, 2_1), (1_1, 1_1, 1_1, 1_1).$$

Para las composiciones n -coloreadas con índices pares o impares no se considerará

¹² C. SHAPCOTT. "C-color compositions and palindromes". En: *Fibonacci Quart.* 50(4) (2012), págs. 297-303.

¹³ R. SACHDEVA y AGARWAL A. K. "Combinatorics of certain restricted n -color composition functions." En: *Discrete Math.* 340(3) (2017), págs. 361-372.

la composición vacía, es decir, $\bar{C}_P(0) = \bar{C}_I(0) = 0$.

Teorema 1.6.6. *Se denota por $\bar{C}_P(n, m)$ al número total de composiciones n -coloreadas del entero n con m partes e índices pares, entonces,*

$$\bar{C}_P(n, m) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-2m}{2} \rfloor} \binom{m+j-1}{m-1} \binom{n-2j-m-1}{m-1},$$

y $\bar{C}_P(n) = \bar{C}_P(n-1) + 2\bar{C}_P(n-2) - \bar{C}_P(n-3)$ para $n > 3$, con valores iniciales $\bar{C}_P(1) = 0$, $\bar{C}_P(2) = 1$ y $\bar{C}_P(3) = 1$.

Teorema 1.6.7. *Se denota por $\bar{C}_I(n, m)$ al número total de composiciones n -coloreadas del entero n con m partes e índices impares, entonces,*

$$\bar{C}_I(n, m) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \binom{m+i-1}{m-1} \binom{n-2i-1}{m-1}$$

y $\bar{C}_I(n) = 2\bar{C}_I(n-1) + \bar{C}_I(n-2) - \bar{C}_I(n-3)$ para $n > 3$, con valores iniciales $\bar{C}_I(1) = 1$, $\bar{C}_I(2) = 2$ y $\bar{C}_I(3) = 5$.

Las demostraciones de los Teoremas 1.6.6 y 1.6.7 serán presentadas en el capítulo 2 una vez se introduzca el concepto de función generatriz.

1.6.2. Composiciones coloreadas con sub-índices en progresiones aritméticas. Una generalización de los resultados estudiados por Sachdeva y Agarwal¹³ para composiciones n -coloreadas son las composiciones coloreadas con sub-índices en progresiones aritméticas, tales composiciones fueron estudiadas por Acosta, Caicedo, Poveda, Ramírez y Shattuck¹⁴.

¹⁴ et al. ACOSTA J. R. "Some new restricted n -color composition functions". En: *Submitted* (2018).

Definición 1.6.8. *Dados los enteros positivos l y b , se denota por $\mathcal{C}_{la+b}(n)$ al número de composiciones coloreadas de n en partes cuyos sub-índices son de la forma $la + b$ para algún entero $a \geq 0$. También se denotará por $\mathcal{C}_{la+b}(n, m)$ al número de composiciones coloreadas de n con exactamente m partes con sub-índices de la forma $la + b$.*

Por ejemplo, $\mathcal{C}_{\{3a+1\}}(4) = 9$ son las siguientes composiciones,

$$(4_1), (4_4), (3_1, 1_1), (1_1, 3_1), (2_1, 2_1), (2_1, 1_1, 1_1),$$

$$(1_1, 2_1, 1_1), (1_1, 1_1, 2_1), (1_1, 1_1, 1_1, 1_1).$$

Para más información sobre composiciones coloreadas con sub-índices en progresiones aritméticas ver¹⁴.

2. FUNCIONES GENERATRICES

Una función generatriz es una cuerda de tender en la que colgamos una sucesión de números para mostrarla. Herbert Wilf. *

En este capítulo se estudiarán funciones generatrices las cuales son una importante herramienta para obtener fórmulas explícitas de relaciones de recurrencia. Hay dos tipos principales de funciones generatrices utilizadas en combinatoria, funciones generatrices ordinarias y funciones generatrices exponenciales.

Definición 2.0.1. La **función generatriz ordinaria** para la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 0}$ se define como,

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Definición 2.0.2. La **función generatriz exponencial** para la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 0}$ se define como,

$$E(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

El nombre de función generatriz es por el hecho de que la expansión de series de potencias de las funciones $A(x)$ y $E(x)$ genera los valores de la secuencia como los coeficientes de los términos x^n y $\frac{x^n}{n!}$, respectivamente.

2.1. FUNCIÓN GENERATRIZ ORDINARIA

Dado que se estudiarán principalmente las funciones generatrices ordinarias, la palabra “ordinaria” se omitirá y se hará referencia a ellas solamente como función gene-

* Herbert Saul Wilf (1931-2012) fue un matemático estadounidense especializado en combinatoria. Conocido por escribir el libro *generatingfunctionology*.

ratriz.

Ejemplo 2.1.1. *Considere la sucesión de Fibonacci $\{F_n\}_{n \geq 0}$. Se calculará su función generatriz. Sea $F(x) := \sum_{n \geq 0} F_n x^n$, entonces,*

$$\begin{aligned}
 F(x) &= F_0 + F_1 x + \sum_{n \geq 2} F_n x^n \\
 &= F_0 + F_1 x + \sum_{n \geq 2} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\
 &= F_0 + F_1 x + \sum_{n \geq 2} F_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 2} F_{n-2} x^n \\
 &= F_0 + F_1 x + x \sum_{n \geq 2} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n \geq 2} F_{n-2} x^{n-2} \\
 &= F_0 + F_1 x + x \sum_{n \geq 1} F_n x^n + x^2 \sum_{n \geq 0} F_n x^n \\
 &= F_0 + F_1 x + x(F(x) - F_0) + x^2 F(x) \\
 &= x + xF(x) + x^2 F(x).
 \end{aligned}$$

Despejando $F(x)$ se obtiene que,

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Aplicando fracciones parciales a $F(x)$ podemos hallar una fórmula para obtener todos los números de Fibonacci. Note que las raíces de $x^2 + x - 1$ son $x = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. Considere $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ y $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$, entonces $x^2 + x - 1 = (x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$, de donde se tiene que $\alpha\beta = -1$, por lo tanto $\beta = -1/\alpha$ y $\alpha = -1/\beta$. Así,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x-x^2} &= \frac{1}{-(x^2+x-1)} = \frac{1}{-(x+\alpha)(x+\beta)} \\
&= \frac{-1}{\left(x-\frac{1}{\beta}\right)\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{-1}{\frac{1}{\beta}(\beta x-1)\frac{1}{\alpha}(\alpha x-1)} \\
&= \frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{C_1}{1-\alpha x} + \frac{C_2}{1-\beta x}.
\end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que,

$$\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{C_1(1-\beta x) + C_2(1-\alpha x)}{(1-\alpha x)(1-\beta x)},$$

así, $1 = C_1(1-\beta x) + C_2(1-\alpha x)$.

Si $x = 0$ entonces,

$$1 = C_1 + C_2. \quad (3)$$

Si $x = 1$ entonces,

$$1 = (1-\beta)C_1 + (1-\alpha)C_2 = C_1 + C_2 - \alpha C_2 - \beta C_1. \quad (4)$$

De las Ecuaciones (3) y (4) se tiene que $-\alpha C_2 - \beta C_1 = 0$, entonces $C_1 = -\alpha C_2/\beta$. Reemplazando en la Ecuación (3) se obtiene que $C_1 = \alpha/\sqrt{5}$ y $C_2 = -\beta/\sqrt{5}$, entonces,

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha x} - \frac{\beta}{1-\beta x} \right).$$

Teniendo en cuenta que $1/(1-x) = \sum_{n \geq 0} x^n$ se tiene que,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{x}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha x} - \frac{\beta}{1-\beta x} \right) = \frac{x}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n \geq 0} \alpha^{n+1} x^n - \sum_{n \geq 0} \beta^{n+1} x^n \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n \geq 1} (\alpha^n - \beta^n) x^n.
\end{aligned}$$

Comparando el coeficiente n -ésimo se tiene que,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

La anterior fórmula se conoce como la **fórmula de Binet**. Finalmente, observe que $\alpha > 1$ y $|\beta| < 1$, entonces se obtiene la siguiente expansión asintótica,

$$F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ejemplo 2.1.2. En el Teorema 1.3.2 se demostró que $C_{\{1,2\}}(n) = F_{n+1}$ para $n \geq 0$. Por lo tanto, la función generatriz del número de composiciones con partes en el conjunto $\{1, 2\}$ es,

$$C_{\{1,2\}}(x) := \sum_{n \geq 0} C_{\{1,2\}}(n)x^n = \sum_{n \geq 0} F_{n+1}x^n = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Ejemplo 2.1.3. Considere la sucesión de los números Tribonacci $\{T_n\}_{n \geq 0}$. En el Teorema 1.3.5 se demostró que $C_{\{1,2,3\}}(n) = T_{n+2}$ para $n \geq 0$. En este ejemplo se va a calcular su función generatriz.

Sea $C_{\{1,2,3\}}(x) := \sum_{n \geq 0} C_{\{1,2,3\}}(n)x^n = \sum_{n \geq 0} T_{n+2}x^n$, entonces,

$$\begin{aligned} C_{\{1,2,3\}}(x) &= T_2 + T_3x + T_4x^2 + \sum_{n \geq 3} T_{n+2}x^n \\ &= T_2 + T_3x + T_4x^2 + \sum_{n \geq 3} (T_{n+1} + T_n + T_{n-1})x^n \\ &= T_2 + T_3x + T_4x^2 + \sum_{n \geq 3} T_{n+1}x^n + \sum_{n \geq 3} T_nx^n + \sum_{n \geq 3} T_{n-1}x^n \\ &= T_2 + T_3x + T_4x^2 + x \sum_{n \geq 3} T_{n+1}x^{n-1} + x^2 \sum_{n \geq 3} T_nx^{n-2} + x^3 \sum_{n \geq 3} T_{n-1}x^{n-3} \\ &= T_2 + T_3x + T_4x^2 + x \sum_{n \geq 2} T_{n+2}x^n + x^2 \sum_{n \geq 1} T_{n+2}x^n + x^3 \sum_{n \geq 0} T_{n+2}x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + x + 2x^2 + x(C_{\{1,2,3\}}(x) - T_2 - T_3x) + x^2(C_{\{1,2,3\}}(x) - T_2) + x^3C_{\{1,2,3\}}(x) \\
&= 1 + x + 2x^2 + xC_{\{1,2,3\}}(x) - x - x^2 + x^2C_{\{1,2,3\}}(x) - x^2 + x^3C_{\{1,2,3\}}(x) \\
&= 1 + xC_{\{1,2,3\}}(x) + x^2C_{\{1,2,3\}}(x) + x^3C_{\{1,2,3\}}(x).
\end{aligned}$$

Resolviendo para $C_{\{1,2,3\}}(x)$ se obtiene la función generatriz:

$$C_{\{1,2,3\}}(x) = \frac{1}{1 - x - x^2 - x^3}.$$

El siguiente resultado es una generalización de los Ejemplos 2.1.2 y 2.1.3 para los números k -bonacci.

Ejemplo 2.1.4. Considere la sucesión de los números k -bonacci $\{\mathcal{F}_n^{(k)}\}_{n \geq 0}$. En el Teorema 1.3.8 se demostró que $\mathcal{F}_{n+(k-1)}^{(k)} = C_{\{1, \dots, k\}}(n)$ para $n \geq 0$. A continuación se calculará su función generatriz.

Sea $C_{\{1, \dots, k\}}(x) := \sum_{n \geq 0} C_{\{1, \dots, k\}}(n)x^n = \sum_{n \geq 0} \mathcal{F}_{n+(k-1)}^{(k)}x^n$, entonces,

$$\begin{aligned}
C_{\{1, \dots, k\}}(x) &= \mathcal{F}_{k-1}^{(k)} + \mathcal{F}_{1+(k-1)}^{(k)}x + \dots + \mathcal{F}_{(k-1)+(k-1)}^{(k)}x^{k-1} + \sum_{n \geq k} \mathcal{F}_{n+(k-1)}^{(k)}x^n \\
&= \mathcal{F}_{k-1}^{(k)} + \dots + \mathcal{F}_{2(k-1)}^{(k)}x^{k-1} + \sum_{n \geq k} \left(\mathcal{F}_{n+(k-1)-1}^{(k)} + \mathcal{F}_{n+(k-1)-2}^{(k)} + \dots + \mathcal{F}_{n+(k-1)-k}^{(k)} \right) x^n \\
&= \mathcal{F}_{k-1}^{(k)} + \dots + \mathcal{F}_{2(k-1)}^{(k)}x^{k-1} + \sum_{n \geq k} \mathcal{F}_{n+k-2}^{(k)}x^n + \sum_{n \geq k} \mathcal{F}_{n+k-3}^{(k)}x^n + \dots + \sum_{n \geq k} \mathcal{F}_{n-1}^{(k)}x^n \\
&= \mathcal{F}_{k-1}^{(k)} + \dots + \mathcal{F}_{2(k-1)}^{(k)}x^{k-1} + x \sum_{n \geq k} \mathcal{F}_{n+k-2}^{(k)}x^{n-1} + \dots + x^k \sum_{n \geq k} \mathcal{F}_{n-1}^{(k)}x^{n-k} \\
&= \mathcal{F}_{k-1}^{(k)} + \dots + \mathcal{F}_{2(k-1)}^{(k)}x^{k-1} + x \sum_{n \geq k-1} \mathcal{F}_{n+k-1}^{(k)}x^n + \dots + x^k \sum_{n \geq 0} \mathcal{F}_{n+k-1}^{(k)}x^n \\
&= \mathcal{F}_{k-1}^{(k)} + \dots + \mathcal{F}_{2(k-1)}^{(k)}x^{k-1} + x \left(C_{\{1, \dots, k\}}(x) - \mathcal{F}_{k-1}^{(k)} - \dots - \mathcal{F}_{(k-2)+(k-1)}^{(k)}x^{k-2} \right) + \\
&\quad \dots + x^k C_{\{1, \dots, k\}}(x),
\end{aligned}$$

aplicando la propiedad distributiva, simplificando y teniendo en cuenta que $\mathcal{F}_{k-1}^{(k)} = 1$

se obtiene lo siguiente,

$$C_{\{1, \dots, k\}}(x) = 1 + xC_{\{1, \dots, k\}}(x) + x^2C_{\{1, \dots, k\}}(x) + \dots + x^kC_{\{1, \dots, k\}}(x),$$

luego, resolviendo para $C_{\{1, \dots, k\}}(x)$ se obtiene la función generatriz:

$$C_{\{1, \dots, k\}}(x) = \frac{1}{1 - x - x^2 - \dots - x^k} = \frac{1}{1 - \sum_{i \geq 1}^k x^i}.$$

Ejemplo 2.1.5. En el Teorema 1.2.2 se demostró que $\mathcal{C}(n) = 2^{n-1}$ para $n \geq 1$ y $\mathcal{C}(0) = 1$. Así, la función generatriz del número total de composiciones es:

$$\begin{aligned} C(x) &:= \sum_{n \geq 0} \mathcal{C}(n)x^n = 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1}x^n = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} 2^n x^n \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{1 - 2x} \right) = \frac{1 - x}{1 - 2x}. \end{aligned}$$

En el Capítulo 1, se introdujeron las composiciones con partes en \mathbb{N} y las composiciones con restricciones en el conjunto de las partes, como $A = \{1, 2\}$. La siguiente definición hace referencia a las composiciones con partes en un conjunto general A (véase⁷).

Definición 2.1.6. Sea $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$ un conjunto ordenado. Se denota al número de composiciones del entero positivo n con partes en A (respectivamente con m partes en A) por $\mathcal{C}_A(n)$ (respectivamente $\mathcal{C}_A(n, m)$). Las correspondientes funciones generatrices son dadas por:

$$C_A(x) := \sum_{n \geq 0} \mathcal{C}_A(n)x^n \quad \text{y} \quad C_A(m; x) := \sum_{n \geq 0} \mathcal{C}_A(n, m)x^n,$$

con $\mathcal{C}_A(0) = \mathcal{C}_A(0, 0) = 1$ y $\mathcal{C}_A(0, m) = 0$ para $m \geq 1$.

Note que,

$$C_A(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m \geq 0} C_A(n, m) \right) x^n = \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} C_A(n, m) x^n = \sum_{m \geq 0} C_A(m; x).$$

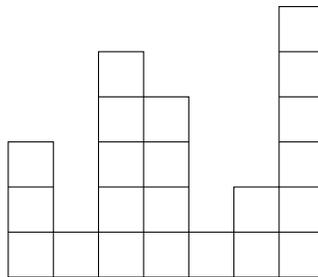
2.2. MÉTODO SIMBÓLICO

En esta sección se presenta una forma visual de las composiciones, tales como gráficos de barras, estos serán útiles al momento de hallar funciones generatrices. Generalmente este método se conoce como **Método Simbólico**.

Definición 2.2.1. *Un gráfico de barras de una composición $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ es una sucesión de columnas compuestas por celdas, tal que la columna j tiene σ_j celdas unitarias.*

La Figura 2 muestra el gráfico de barras asociado a la composición $(3, 1, 5, 4, 1, 2, 6)$.

Figura 2. Gráfico de barras asociado a la composición $(3, 1, 5, 4, 1, 2, 6)$.



Fuente: HEUBACH, S. and MANSOUR, T. *Combinatorics of Compositions and Words*.

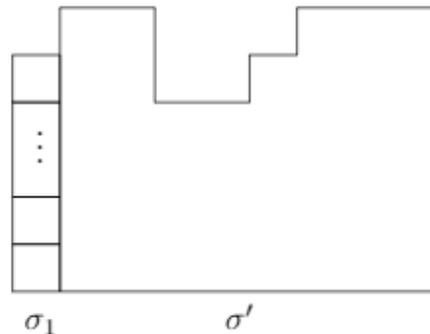
En el siguiente teorema se dará otra prueba diferente a la del Ejemplo 2.1.5 para calcular la función generatriz del número total de composiciones del entero positivo n , esta prueba se hará usando el método simbólico. Recuerde que $\mathcal{C}(n) = 2^{n-1}$ y $\mathcal{C}(n, m) = \binom{n-1}{m-1}$.

Teorema 2.2.2. Las funciones generatrices para el número total de composiciones de n y para el número total de composiciones de n con exactamente m partes son, respectivamente:

$$C(x) := \sum_{n \geq 0} \mathcal{C}(n)x^n = \frac{1-x}{1-2x} \quad \text{y} \quad C(m; x) := \sum_{n \geq 0} \mathcal{C}(n, m)x^n = \frac{x^m}{(1-x)^m}.$$

Demostración. Toda composición de n (a excepción de la composición vacía) es de la forma $\sigma_1\sigma'$, donde σ_1 es la primera parte y σ' es una composición de $n - \sigma_1$. La Figura 3 es el gráfico de barras que ilustra esta estructura.

Figura 3. Estructura recursiva de una composición.



Fuente: HEUBACH, S. and MANSOUR, T. *Combinatorics of Compositions and Words*.

La estructura anterior indica que una composición consta de una primera parte, σ_1 , que aporta a la función generatriz un factor x^{σ_1} , combinada con otra composición que aporta un factor $C(x)$. Teniendo en cuenta que la composición vacía aporta 1 a la función generatriz se obtiene,

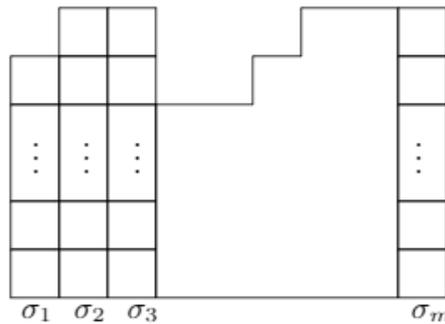
$$C(x) = 1 + \sum_{\sigma_1 \geq 1} x^{\sigma_1} C(x) = 1 + \frac{x}{1-x} C(x).$$

Esto implica que,

$$C(x) = \frac{1-x}{1-2x} = (1-x) \sum_{n \geq 0} 2^n x^n = 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} x^n = \sum_{n \geq 0} C(n) x^n.$$

Por otro lado, si la composición tiene exactamente m partes se tiene la estructura de la Figura 4.

Figura 4. Estructura recursiva de una composición con exactamente m partes.



Fuente: RAMÍREZ, J. L. *Introducción a la teoría de composiciones*.

Note que para cada parte σ_i , con $i = 1, \dots, m$, la función generatriz asociada es $x/(1-x)$, porque los tamaños posibles para una parte son $m \geq 1$. Por lo tanto la función generatriz asociada al total de composiciones con exactamente m partes es,

$$\begin{aligned} C(m; x) &= \frac{x}{1-x} \cdot \frac{x}{1-x} \cdots \frac{x}{1-x} = \left(\frac{x}{1-x} \right)^m = \frac{x^m}{(1-x)^m} \\ &= x^m \sum_{n \geq 0} \binom{m-1+n}{n} x^n = \sum_{n \geq 0} \binom{m-1+n}{n} x^{n+m} \\ &= \sum_{n \geq m} \binom{n-1}{n-m} x^n = \sum_{n \geq m} \binom{n-1}{m-1} x^n = \sum_{n \geq 0} C(n, m) x^n. \end{aligned}$$

Así $C(n) = [x^n]C(x) = 2^{n-1}$ y $C(n, m) = [x^n]C(m; x) = \binom{n-1}{m-1}$. La notación $[x^n]A(x)$ se refiere al coeficiente n -ésimo de la función generatriz $A(x)$. \square

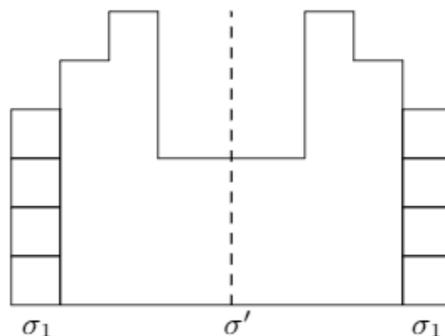
2.2.1. Composiciones palíndromas La función generatriz para el caso de las composiciones palíndromas con partes en un conjunto general A fue dada por Hoggatt y Bicknell¹¹.

Teorema 2.2.3. *La función generatriz para el número total de composiciones palíndromas del entero n es,*

$$C_{Pal}(x) := \sum_{n \geq 0} \mathcal{P}(n)x^n = \frac{1+x}{1-2x^2}.$$

Demostración. Las composiciones palíndromas del entero n pueden ser de dos formas; composiciones con una sola parte o composiciones de la forma $\sigma_1\sigma'\sigma_1$. Si la composición es de una sola parte (incluyendo la composición vacía), su función generatriz asociada es $1/(1-x)$ y si es de la forma $\sigma_1\sigma'\sigma_1$, donde σ_1 es la primera y última parte de la composición, la cual aporta a la función generatriz un factor $x^{2\sigma_1}$ y σ' es una composición de $n - 2\sigma_1$ que aporta un factor $C_{Pal}(x)$. La Figura 5 ilustra esta estructura.

Figura 5. Estructura recursiva de una composición palíndroma.



Fuente: RAMÍREZ, J. L. *Introducción a la teoría de composiciones*.

Por lo tanto se obtiene lo siguiente,

$$C_{Pal}(x) = \sum_{n \geq 0} x^n + \sum_{\sigma_1 \geq 1} x^{2\sigma_1} C_{Pal}(x) = \frac{1}{1-x} + \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right) C_{Pal}(x).$$

Resolviendo para $C_{Pal}(x)$ obtenemos la siguiente función generatriz,

$$C_{Pal}(x) = \frac{1+x}{1-2x^2}.$$

□

Definición 2.2.4. Sea $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ una composición entonces, la **composición inversa** de σ se denotará por σ^{-1} y es dada por $\sigma^{-1} = (\sigma_k, \dots, \sigma_2, \sigma_1)$.

El siguiente resultado sobre composiciones palíndromas depende de la paridad del número de partes.

Teorema 2.2.5. Las funciones generatrices para el número total de composiciones palíndromas del entero n con $2m$ y $2m+1$ partes son, respectivamente:

$$C_{Pal}(2m; x) := \sum_{n \geq 0} \mathcal{P}(2n, 2m) x^{2n} = \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right)^m,$$

$$C_{Pal}(2m+1; x) := \sum_{n \geq 0} \mathcal{P}(2n+1, 2m+1) x^{2n+1} = \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right)^m \left(\frac{x}{1-x} \right).$$

Demostración. Toda composición palíndroma con $2m$ partes siempre da una composición de un número entero n par. Además, todas estas composiciones se descomponen en la forma $\sigma\sigma^{-1}$, donde σ es una composición de m partes y σ^{-1} su inversa. Teniendo en cuenta la paridad de las partes y por el Teorema 2.2.2 se obtiene lo siguiente,

$$C_{Pal}(2m; x) = C(m; x^2) = \sum_{n \geq m} \binom{n-1}{m-1} x^{2n} = \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right)^m.$$

Por otro lado, para las composiciones palíndromas con $2m + 1$ partes se obtiene una composición del entero n par o impar. Estas composiciones se descomponen de la forma $\sigma\sigma'\sigma^{-1}$, con $\sigma' > 0$, σ una composición de m partes y σ^{-1} su inversa. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} C_{Pal}(2m + 1; x) &= \left(\frac{x}{1-x} \right) C(m; x^2) = \sum_{i \geq 1} x^i \sum_{j \geq m} \binom{j-1}{m-1} x^{2j} \\ &= \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right)^m \left(\frac{x}{1-x} \right). \end{aligned}$$

□

2.2.2. Composiciones de Carlitz En esta sección se estudiarán las funciones generatrices para las composiciones de Carlitz y composiciones de Carlitz palíndromas (véase⁴).

Teorema 2.2.6. *La función generatriz para el número total de composiciones de Carlitz del entero n es dada por,*

$$CC(x) := \sum_{n \geq 0} CC(n)x^n = \frac{1}{1 - \sum_{j \geq 1} \frac{x^j}{1+x^j}} = \frac{1}{1 + \sum_{j \geq 1} (-1)^j \frac{x^j}{1-x^j}}.$$

Demostración. Sea $CC(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_k|x)$ la función generatriz de las composiciones de Carlitz que inician con las partes $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$. Toda composición de Carlitz o es vacía y aporta 1 a la función generatriz o es de la forma $\sigma_1\sigma$, donde σ_1 es la primera parte, la cual aporta a la función generatriz un factor x^l para $1 \leq l$, y σ es una composición de Carlitz que no inicia con l . Por lo tanto, tenemos la siguiente relación:

$$CC(x) = 1 + \sum_{l \geq 1} CC(l|x). \quad (5)$$

Como toda composición de Carlitz que inicie con l debe cumplir que el segundo

término es un entero i diferente de l , entonces,

$$\begin{aligned} CC(l|x) &= x^l + \sum_{i \neq l} CC(li|x) = x^l + x^l \sum_{i \neq l} CC(i|x) \\ &= x^l + x^l(CC(x) - CC(l|x) - 1) \\ &= x^l(CC(x) - CC(l|x)). \end{aligned}$$

De donde se obtiene que,

$$CC(l|x) = \frac{x^l}{1+x^l} CC(x).$$

Reemplazando $CC(l|x)$ en la Ecuación (5),

$$CC(x) = 1 + \left(\sum_{l \geq 1} \frac{x^l}{1+x^l} \right) CC(x).$$

Resolviendo para $CC(x)$ se tiene la función generatriz,

$$CC(x) = \frac{1}{1 - \sum_{j \geq 1} \frac{x^j}{1+x^j}} = \frac{1}{1 + \sum_{j \geq 1} (-1)^j \frac{x^j}{1-x^j}}.$$

□

Teorema 2.2.7. *La función generatriz para el número total de composiciones de Carlitz palíndromas del entero n es dada por,*

$$CP(x) := \sum_{n \geq 0} CP(n)x^n = 1 + \frac{\sum_{j \geq 1} \frac{x^j}{1+x^{2j}}}{1 - \sum_{j \geq 1} \frac{x^{2j}}{1+x^{2j}}}.$$

Demostración. Se procederá de manera análoga a la demostración del Teorema 2.2.6. Sea $CP(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_l | x)$ la función generatriz para las composiciones de Carlitz

palíndromas que inician con las partes $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$. Como antes, se tiene que,

$$CP(x) = 1 + \sum_{j \geq 1} CP(j|x). \quad (6)$$

La diferencia entre el argumento de la demostración del Teorema 2.2.6 es que las composiciones de Carlitz palíndromas se descomponen de la forma $\sigma \cdot j \cdot \sigma^{-1}$, lo que da como resultado un factor de x^{2j} en lugar de x^j , excepto para la parte j de la composición. Así,

$$\begin{aligned} CP(j|x) &= x^j + x^{2j} \sum_{i \neq j} CP(i|x) \\ &= x^j + x^{2j}(CP(x) - CP(j|x) - 1). \end{aligned}$$

Simplificando se tiene que,

$$CP(j|x) = \frac{x^j(1 - x^j)}{1 + x^{2j}} + \frac{x^{2j}}{1 + x^{2j}}CP(x)$$

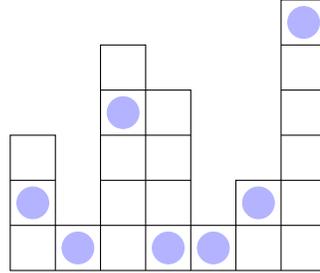
Reemplazando $CP(j|x)$ en la Ecuación (6), se tiene que,

$$CP(x) = 1 + \sum_{j \geq 1} \left(\frac{x^j(1 - x^j)}{1 + x^{2j}} + \frac{x^{2j}}{1 + x^{2j}}CP(x) \right).$$

Resolviendo para $CP(x)$ se obtiene la función generatriz que se esta buscando. \square

2.2.3. Composiciones n -coloreadas A las composiciones n -coloreadas también se les puede asociar un gráfico de barras en donde el color o subíndice se indica con un círculo en la posición que indica el subíndice en su respectiva barra, esta posición se cuenta de abajo hacia arriba. Por ejemplo, en la Figura 6 aparece el gráfico de barras asociado a la composición coloreada $(3_2, 1_1, 5_4, 4_1, 1_1, 2_2, 6_6)$.

Figura 6. Gráfico de barras de la composición coloreada $(3_2, 1_1, 5_4, 4_1, 1_1, 2_2, 6_6)$.



Fuente: RAMÍREZ, J. L. *Introducción a la teoría de composiciones*.

Teorema 2.2.8. Sea $\bar{C}(n)$ el número total de composiciones n -coloreadas del entero n . La función generatriz para la sucesión $\bar{C}(n)$ es

$$\bar{C}(x) := \sum_{n \geq 0} \bar{C}(n)x^n = \frac{(1-x)^2}{1-3x+x^2},$$

Sea $\bar{C}(n, m)$ el número de composiciones n -coloreadas del entero n con m partes, su función generatriz es,

$$\bar{C}(m; x) := \sum_{n \geq 0} \bar{C}(n, m)x^n = \frac{x^m}{(1-x)^{2m}}.$$

Demostración. Toda composición coloreada o es vacía y aporta 1 a la función generatriz o se puede descomponer de la forma $\sigma_1\sigma$, donde σ_1 es la primera parte de la composición, la cual se puede colorear de σ_1 formas y aporta a la función generatriz un factor $\sigma_1 x^{\sigma_1}$ y σ es una composición coloreada de $n - \sigma_1$ que aporta a la función generatriz un factor $\bar{C}(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \bar{C}(x) &= 1 + x \cdot \bar{C}(x) + 2x^2 \cdot \bar{C}(x) + 3x^3 \cdot \bar{C}(x) + \dots \\ &= 1 + \left(\sum_{n \geq 1} nx^n \right) \bar{C}(x) \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que $\sum_{n \geq 1} nx^n = x/(1-x)^2$ entonces,

$$\bar{C}(x) = 1 + \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) \bar{C}(x).$$

Resolviendo para $\bar{C}(x)$ se obtiene,

$$\bar{C}(x) = \frac{(1-x)^2}{1-3x+x^2}.$$

Para la composición coloreada con exactamente m partes cada parte tiene función generatriz asociada $x/(1-x)^2$, por lo tanto la función generatriz es,

$$\bar{C}(m; x) = \frac{x}{(1-x)^2} \cdot \frac{x}{(1-x)^2} \cdots \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x^m}{(1-x)^{2m}}.$$

□

Note que la función generatriz para el número total de composiciones n -coloreadas del entero n dada en el Teorema 2.2.8 es diferente a la función generatriz estudiada por Agarwal², ya que él no considera la composición vacía, es decir, $\bar{C}(0) = 0$, mientras que en este trabajo se está usando $\bar{C}(0) = 1$.

Teorema 2.2.9. *La función generatriz para el número total de composiciones n -coloreadas (no vacías) del entero n con índices pares es,*

$$\bar{C}_P(x) := \sum_{n \geq 0} \bar{C}_P(n)x^n = \frac{x^2}{1-x-2x^2+x^3},$$

y la función generatriz para el número total de composiciones n -coloreadas del entero n con m partes e índices pares es,

$$\bar{C}_P(m; x) := \left(\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} \right)^m = \left(\frac{x^2}{(1+x)(1-x)^2} \right)^m.$$

Demostración. Toda composición coloreada (no vacía) con índices pares es de la forma $\sigma_1\sigma$, donde σ_1 es la primera parte de la composición, la cual se puede colorear de σ'_1 formas, donde σ'_1 es par y $2 \leq \sigma'_1 \leq \sigma_1$ y σ es una composición coloreada de $n - \sigma_1$. Entonces σ_1 aporta a la función generatriz un factor $w_1 x^{\sigma_1}$, donde $w_1 = \lfloor \sigma_1/2 \rfloor$. Note que si $\sigma_1 = 1$, entonces este no contribuye en la función generatriz. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\bar{C}_P(x) &= x^2(1 + \bar{C}_P(x)) + x^3(1 + \bar{C}_P(x)) + 2x^4(1 + \bar{C}_P(x)) + \dots \\ &= \sum_{n \geq 2} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor x^n + \left(\sum_{n \geq 2} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor x^n \right) \bar{C}_P(x) \\ &= \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} + \left(\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} \right) \bar{C}_P(x).\end{aligned}$$

Esto implica que,

$$\bar{C}_P(x) = \frac{x^2}{1-x-2x^2+x^3},$$

Para las composiciones coloreadas con exactamente m partes, se tiene que cada parte tiene función generatriz asociada $x^2/((1-x)(1-x^2))$. Entonces su función generatriz es,

$$\bar{C}_P(m; x) = \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} \cdots \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} = \left(\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} \right)^m.$$

Expandiendo $\bar{C}_P(m; x)$ se obtiene que,

$$\begin{aligned}\bar{C}_P(m; x) &= \left(\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} \right)^m = x^{2m} \left(\frac{1}{1-x} \right)^m \left(\frac{1}{1-x^2} \right)^m \\ &= x^{2m} \sum_{n \geq 0} \binom{m-1+n}{n} x^n \sum_{n \geq 0} \binom{m-1+n}{n} x^{2n} \\ &= \sum_{j \geq 0} \sum_{i \geq 0} \binom{m-1+i}{i} \binom{m-1+j}{j} x^{i+2j+2m}.\end{aligned}$$

Tomando $t = i + 2j + 2m$ se tiene que,

$$\bar{C}_P(m; x) = \sum_{j \geq 0} \sum_{t=2j+2m}^{\infty} \binom{t-2j-m-1}{m-1} \binom{m+j-1}{m-1} x^t.$$

Haciendo $t = n$ se obtiene de la función generatriz la recurrencia para el número total de composiciones n -coloreadas de n con exactamente m partes e índices pares, es decir,

$$\bar{C}_P(n, m) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2m}{2} \rfloor} \binom{m+i-1}{m-1} \binom{n-2i-m-1}{m-1}.$$

□

Teorema 2.2.10. *La función generatriz para el número total de composiciones n -coloreadas (no vacías) del entero n con índices impares es,*

$$\bar{C}_I(x) := \sum_{n \geq 0} \bar{C}_I(n) x^n = \frac{x}{1 - 2x - x^2 + x^3},$$

y la función generatriz para el número total de composiciones n -coloreadas del entero n con m partes e índices impares es,

$$\bar{C}_I(m; x) := \left(\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} \right)^m = \left(\frac{x}{(1+x)(1-x)^2} \right)^m.$$

Demostración. Toda composición coloreada (no vacía) con índices impares es de la forma $\sigma_1 \sigma$, donde σ_1 es la primera parte de la composición, la cual se puede colorear de σ'_1 formas, donde σ'_1 es impar y $1 \leq \sigma'_1 \leq \sigma_1$ y σ es una composición coloreada de $n - \sigma_1$. Entonces σ_1 aporta a la función generatriz un factor $w_1 x^{\sigma_1}$, donde $w_1 = \lfloor \sigma_1/2 \rfloor$. Note que si $\sigma_1 = 1$, entonces contribuye en la función generatriz con un factor x . Por

lo tanto,

$$\begin{aligned}
\bar{C}_I(x) &= x(1 + \bar{C}_I(x)) + x^2(1 + \bar{C}_I(x)) + x^3(1 + \bar{C}_I(x)) + \dots \\
&= \sum_{n \geq 1} \left[\frac{n}{2} \right] x^n + \left(\sum_{n \geq 1} \left[\frac{n}{2} \right] x^n \right) \bar{C}_I(x) \\
&= \frac{x}{(1-x)(1-x^2)} + \left(\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} \right) \bar{C}_I(x).
\end{aligned}$$

Esto implica que,

$$\bar{C}_I(x) = \frac{x}{1 - 2x - x^2 + x^3},$$

Para las composiciones coloreadas con exactamente m partes e índices impares, se tiene que cada parte tiene función generatriz asociada $x/((1-x)(1-x^2))$. Entonces su función generatriz es,

$$\bar{C}_I(m; x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)} \cdots \frac{x}{(1-x)(1-x^2)} = \left(\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} \right)^m.$$

Expandiendo $\bar{C}_I(m; x)$ se obtiene que,

$$\begin{aligned}
\bar{C}_I(m; x) &= \left(\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} \right)^m = x^m \left(\frac{1}{1-x} \right)^m \left(\frac{1}{1-x^2} \right)^m \\
&= x^m \sum_{n \geq 0} \binom{m-1+n}{n} x^n \sum_{n \geq 0} \binom{m-1+n}{n} x^{2n} \\
&= \sum_{j \geq 0} \sum_{i \geq 0} \binom{m-1+i}{i} \binom{m-1+j}{j} x^{i+2j+m}.
\end{aligned}$$

Tomando $t = i + 2j + m$ se tiene que,

$$\bar{C}_I(m; x) = \sum_{j \geq 0} \sum_{t=2j+m}^{\infty} \binom{t-2j-1}{m-1} \binom{m+j-1}{m-1} x^t.$$

Haciendo $t = n$ se obtiene de la función generatriz la recurrencia para el número total de composiciones n -coloreadas de n con exactamente m partes e índices impares,

es decir,

$$\bar{C}_I(n, m) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \binom{m+i-1}{m-1} \binom{n-2i-1}{m-1}.$$

□

Los resultados estudiados hasta ahora son de composiciones con partes en un conjunto específico, como $\{1, 2\}$ y se han obtenido recursiones y funciones generatrices utilizando la estructura de dichos conjuntos. El siguiente teorema es una generalización de los resultados ya estudiados para obtener funciones generatrices de composiciones con partes en un conjunto particular A (véase⁷).

Teorema 2.2.11. *Sea S un subconjunto no vacío de los números naturales. La función generatriz para el número total de composiciones del entero n con partes en S es,*

$$C_S(x) := \frac{1}{1 - \sum_{s \in S} x^s}.$$

Además, la función generatriz para el número de composiciones del entero n con m partes en S es,

$$C_S(m; x) := \sum_{n \geq 0} C_S(n, m) x^n = \left(\sum_{s \in S} x^s \right)^m.$$

Demostración. Toda composición con partes en el conjunto S o es vacía y aporta 1 a la función generatriz o es de la forma $\sigma_1 \sigma$, donde σ_1 es la primera parte de la composición y aporta a la función generatriz un factor de x^{σ_1} , con $\sigma_1 \in S$ y σ es una composición de $n - \sigma_1$ que aporta un factor $C_S(x)$. Entonces,

$$C_S(x) = 1 + \left(\sum_{\sigma_1 \in S} x^{\sigma_1} \right) C_S(x).$$

Esto implica que,

$$C_S(x) = \frac{1}{1 - \sum_{s \in S} x^s}.$$

Para las composiciones de n con m partes en S se tiene que cada parte tiene función generatriz asociada $\sum_{s \in S} x^s$. Así, la función generatriz que se busca es:

$$C_S(m; x) = \left(\sum_{s \in S} x^s \right)^m .$$

□

3. APLICACIONES Y RESULTADOS OBTENIDOS

En este capítulo se estudia un enfoque para definir secuencias recursivamente y luego expresar las estructuras recursivas en un grafo asociado. Este enfoque es un autómata finito. Brändén y Mansour⁵ fueron los primeros en aplicar autómatas a la enumeración de palabras evitando patrones de subsecuencia. Probaron resultados estructurales que mostraban que los grafos asociados solo tenían muchos vértices y adaptaron el método de la matriz de transición a los autómatas. En la sección 3.2 de este capítulo se mostrarán algunos resultados obtenidos en el desarrollo de este trabajo sobre composiciones superdiagonal y d -superdiagonal.

3.1. APLICACIÓN A AUTÓMATAS

Un autómata finito (AF) o máquina de estados finitos, es un modelo computacional que realiza cálculos de forma automática sobre una entrada para producir una salida. Se usarán autómatas para enumerar composiciones que evitan un patrón dado. Para hacerlo, primero se define lo que es un autómata general y luego se enunciarán los componentes para el autómata que enumera el total de composiciones evitando un patrón específico.

Se introducirán algunas definiciones y teoremas de⁷, y posteriormente se muestra el resultado para evitar un patrón específico en composiciones.

Definición 3.1.1. *Un autómata finito es dado por;*

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, S_0, F),$$

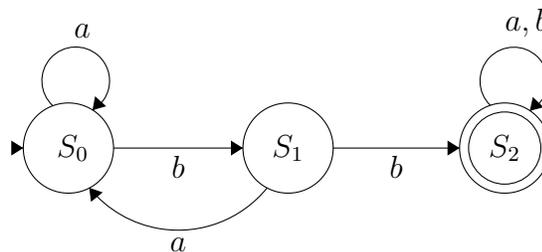
donde,

- $Q = \{S_0, S_1, \dots, S_e\}$ es un conjunto finito de estados;
- Σ es un conjunto finito de símbolos $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_l\}$ llamado el **alfabeto** del autómata;
- Δ es la función de transición, que es, $\Delta : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$, donde Σ^* es el conjunto de todas las palabras finitas $w = w_1w_2 \dots w_m$ tal que $w_i \in \Sigma$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$;
- S_0 es el **estado inicial** del autómata antes de que se haya procesado cualquier entrada; y
- F es un subconjunto de Q , llamado los **estados de aceptación**.

El autómata \mathcal{A} se identifica con un grafo dirigido en el que las etiquetas de los vértices denotan los estados S_0, S_1, \dots, S_e . Si $\Delta(S_i, \Sigma_k) = S_j$, entonces la arista de S_i a S_j se etiqueta como Σ_k .

Ejemplo 3.1.2. La Figura 7 es el diagrama de un autómata finito cuyo estado inicial es S_0 y el estado de aceptación es S_2 . Este autómata acepta palabras como *ababba*, *baaaaa*, y rechaza palabras como *ababaa*.

Figura 7. Autómata finito



Definición 3.1.3. La **forma reducida** de una secuencia $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_m$ viene dado por la secuencia $s_1s_2 \dots s_m$, donde $s_i = l$ si σ_i es el l -ésimo término más pequeño.

Ejemplo 3.1.4. La forma reducida de la secuencia 35237 es 23124, ya que los términos de la secuencia están en orden $2 \leq 3 \leq 5 \leq 7$, y por lo tanto, 2 es el elemento más pequeño, 3 es el segundo elemento más pequeño, 5 es el tercer elemento más pequeño, y 7 es el cuarto elemento más pequeño.

Notación 3.1.5. Se denota por k^j a la secuencia de enteros no negativos para indicar una secuencia de j ocurrencias consecutivas de k .

Ejemplo 3.1.6. La secuencia 1111234415333333 se escribe como $1^4 234^2 153^6$ en notación abreviada.

Definición 3.1.7. Sea $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$ un alfabeto (totalmente ordenado) sobre k letras. Una **palabra w de longitud n** sobre el alfabeto $[k]$ es un elemento de $[k]^n$ y es llamado palabra de longitud n sobre k letras.

Notación 3.1.8. Para cualquier conjunto ordenado $A \subset \mathbb{N}$, se denota al conjunto de composiciones de n con partes en A (respectivamente con exactamente m partes en A) que evitan el patrón τ por $AC_n^A(\tau)$ y $AC_{n,m}^A(\tau)$, respectivamente. El número de composiciones en estos dos conjuntos se denota por $AC_A^\tau(n)$ (respectivamente $AC_A^\tau(n, m)$). Las correspondientes funciones generatrices estas dadas por,

$$AC_A^\tau(x) := \sum_{n \geq 0} AC_n^A(\tau) x^n,$$

$$AC_A^\tau(x, y) := \sum_{n, m \geq 0} AC_{n,m}^A(\tau) x^n y^m = \sum_{m \geq 0} AC_A^\tau(m; x) y^m.$$

Más generalmente, sea $AC_A^\tau(\sigma_1 \cdots \sigma_l | n)$ (respectivamente $AC_A^\tau(\sigma_1 \cdots \sigma_l | n, m)$) el número de composiciones de n con partes en A (respectivamente con m partes en A) que evitan τ y empiezan con $\sigma_1 \cdots \sigma_l$. Las correspondientes funciones generatrices estan dadas por,

$$AC_A^\tau(\sigma_1 \cdots \sigma_l | x) := \sum_{n \geq 0} AC_A^\tau(\sigma_1 \cdots \sigma_l | n) x^n,$$

$$\begin{aligned}
AC_A^\tau(\sigma_1 \cdots \sigma_l | x, y) &:= \sum_{n, m \geq 0} AC_A^\tau(\sigma_1 \cdots \sigma_l | n, m) x^n y^m \\
&= \sum_{m \geq 0} AC_A^\tau(\sigma_1 \cdots \sigma_l | m; x) y^m.
\end{aligned}$$

De la definición anterior se obtiene que,

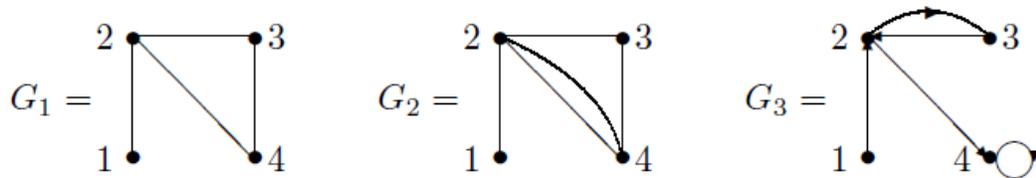
$$AC_A^\tau(x, y) = 1 + \sum_{a \in A} AC_A^\tau(a | x, y).$$

Definición 3.1.9. La secuencia (composición o partición) σ contiene un **patrón de subsecuencia** $\tau = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k$ si la forma reducida de cualquier subsecuencia con k términos de σ es igual a τ . De lo contrario, decimos que σ evita el patrón de subsecuencia τ o evita τ .

Ejemplo 3.1.10. La composición $\sigma = (1, 1, 2, 5, 3, 2)$ contiene el patrón de subsecuencia 1123 dos veces (son las secuencias $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 = 1125$ y $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_5 = 1123$) y evita el patrón de subsecuencia 1234.

Definición 3.1.11. Un **grafo dirigido** (o **dígrafo**) es un grafo en el que las aristas tienen una dirección, es decir, la arista (i, j) es diferente de la arista (j, i) . Una arista se llama **bucle** si conecta un vértice consigo mismo. Un **grafo múltiple** (o **multigrafo**) es un grafo que tiene múltiples aristas entre un par de vértices y también puede tener bucles. Un grafo sin múltiples aristas y bucles se denomina **grafo simple**, ver Figura 8.

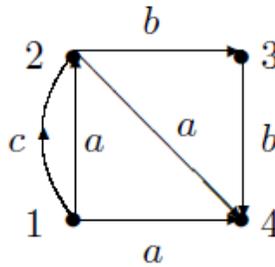
Figura 8. Grafo simple, multigrafo y dígrafo.



Fuente: HEUBACH, S. and MANSOUR, T. *Combinatorics of Compositions and Words*.

Definición 3.1.12. Un **grafo dirigido ponderado** es un dígrafo en el que a cada arista del grafo se le ha asignado un peso, ver Figura 9.

Figura 9. Grafo dirigido ponderado.



Fuente: HEUBACH, S. and MANSOUR, T. *Combinatorics of Compositions and Words*.

Definición 3.1.13. Para un grafo ponderado G con n vértices, definimos la **matriz de adyacencia ponderada** como $A = (a_{ij})_{n \times n}$ donde a_{ij} es la suma de los pesos de todas las aristas desde el vértice i hasta j . Para un camino $P = i_0 i_1 \dots i_k$ con aristas $e_j = (i_j, i_{j+1})$ y pesos asociados c_j , el peso del camino $c(P)$ se define como el producto de los pesos de todas las aristas del camino, es decir, $c(P) = \prod_{j=0}^{k-1} c_j$.

Ejemplo 3.1.14. La matriz de adyacencia ponderada del grafo de la Figura 9 es dado por,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a+c & 0 & a \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El peso de la trayectoria $P = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ viene dado por $c(P) = ca$ o $c(P) = a^2$, dependiendo de cuál de los $(1, 2)$ aristas se elija.

El método de la matriz de transición utiliza la matriz de adyacencia del grafo para la enumeración en combinatoria. La idea principal es expresar la función generatriz de

una secuencia $\{a_n\}$ en términos de la matriz de adyacencia de un grafo asociado. El siguiente teorema es un resultado general.

Teorema 3.1.15. *Considere el multigrafo dirigido ponderado G con p vértices v_1, \dots, v_p , y sea A su matriz de adyacencia ponderada, es decir, a_{ij} es el peso total de las aristas de v_i a v_j . Entonces la función generatriz para el peso total de los caminos desde v_r hasta v_s viene dada por,*

$$\sum_{n \geq 0} (A^n)_{r,s} x^n = (I - xA)_{r,s}^{-1} = \frac{(-1)^{r+s} \det(I - xA : s, r)}{\det(I - xA)}, \quad (7)$$

donde I es la matriz identidad y $(B : s, r)$ denota la matriz obtenida al eliminar la s -ésima fila y la r -ésima columna de B . En particular, la función generatriz es una función racional de x cuyo grado es estrictamente menor que la multiplicidad n_0 del valor 0 como valor propio de A .

Demostración. Ver¹. □

Definición 3.1.16. *Dado un conjunto de patrones T , definimos una relación de equivalencia \sim_T sobre $[k]^*$ (donde $[k]^*$ es el conjunto de todas las palabras finitas con letras del alfabeto k) como $v \sim_T w$ si para todas las palabras $r \in [k]^*$ tenemos,*

$$vr \text{ evita } T \Leftrightarrow wr \text{ evita } T,$$

donde una palabra u evita T si u evita todos los patrones en T simultáneamente.

Definición 3.1.17. *Para evitar patrones en las composiciones, definimos el autómata $\mathcal{A}(T, A)$ para cualquier subconjunto ordenado (finito) A de \mathbb{N} con $Q(T, A)$ como*

¹ R. P. STANLEY. *Enumerative combinatorics*. Vol. 1. of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997, pág. 574.

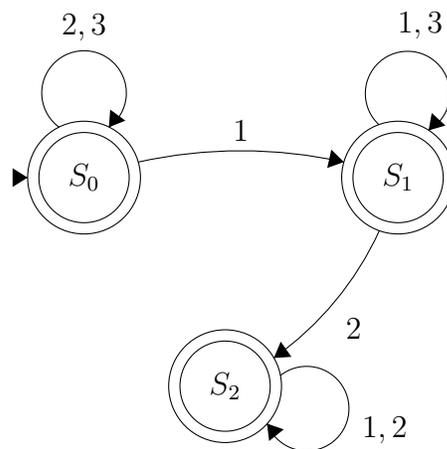
el conjunto de clases de equivalencia de \sim_T , y etiquetamos las aristas entre el estado $\langle \sigma \rangle$ y $\langle \sigma a_i \rangle$ por x^{a_i} en lugar de por a_i . Donde las etiquetas de las aristas son pesos. La entrada (i, j) de la matriz de adyacencia ponderada asociada cuenta el peso total de las aristas entre los estados i y j . Una arista con múltiples etiquetas $x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_m}$ tiene peso $\sum_{j=1}^m x^{i_j}$.

Tenga en cuenta que el uso de pesos en las aristas en el caso de las composiciones conduce a resultados en términos de funciones generatrices en lugar de resultados en el número de composiciones de n que evitan un patrón τ o un conjunto de patrones T .

Ejemplo 3.1.18. El autómata de la Figura 10 evita el patrón de subsecuencia $\tau = 123$ en composiciones con partes en $\{1, 2, 3\}$ y la matriz de adyacencia asociada es,

$$A = \begin{pmatrix} x^2 + x^3 & x & 0 \\ 0 & x + x^3 & x^2 \\ 0 & 0 & x + x^2 \end{pmatrix}$$

Figura 10. Autómata que evita el patrón subsecuencia $\tau = 123$.



Aplicando el Teorema 3.1.15 a la matriz A definida anteriormente, se obtiene la

siguiente función generatriz,

$$AC_{\{1,2,3\}}^{123}(x) = \frac{1 - x - x^2 + x^4 + x^5}{(1 - x^2 - x^3)(1 - x - x^3)(1 - x - x^2)}.$$

El siguiente teorema es una generalización del ejemplo anterior. El hecho de que el conjunto de las partes de la composición conste de las mismas letras del patrón obliga a una estructura muy específica del autómata, lo cual permite dar una fórmula explícita para la función generatriz.

Teorema 3.1.19. *Sea $\tau = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_l$ cualquier patrón de subsecuencia de longitud l con d letras distintas. Entonces, la función generatriz para el número de composiciones de n con m partes en el conjunto $[d] = \{1, \dots, d\}$ que evitan el patrón τ viene dada por,*

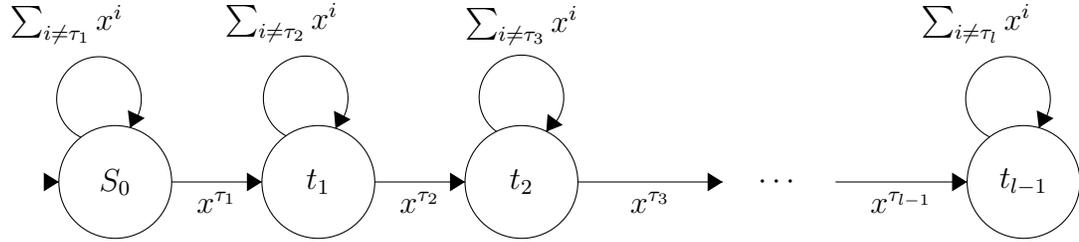
$$AC_{[d]}^{\tau}(x, y) = \sum_{j=1}^l \frac{(-1)^{j-1} y^{j-1} x^{\tau_1 + \cdots + \tau_{j-1}}}{\left(1 - y \sum_{i \in [d] \setminus \{\tau_1\}} x^i\right) \cdots \left(1 - y \sum_{i \in [d] \setminus \{\tau_j\}} x^i\right)}.$$

En particular,

$$AC_{[d]}^{\tau}(x) = \sum_{j=1}^l \frac{(-1)^{j-1} x^{\tau_1 + \cdots + \tau_{j-1}}}{\left(1 - \sum_{i \in [d] \setminus \{\tau_1\}} x^i\right) \cdots \left(1 - \sum_{i \in [d] \setminus \{\tau_j\}} x^i\right)}.$$

Demostración. Sea τ cualquier patrón de longitud l con d letras distintas. Entonces, el autómata que enumera el número de composiciones de n con partes en $A = \{1, 2, \dots, d\}$ que evitan el patrón τ viene dado por la Figura 11, donde el estado $t_i = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_i$.

Figura 11. Autómata para evitar $\tau \in [d]^l$.



Fuente: HEUBACH, S. and MANSOUR, T. *Combinatorics of Compositions and Words*.

Por tanto, la matriz de adyacencia tiene la forma,

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{i \neq \tau_1} x^i & x^{\tau_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{i \neq \tau_2} x^i & x^{\tau_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & x^{\tau_{l-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sum_{i \neq \tau_l} x^i \end{pmatrix}.$$

Ahora, usando la Ecuación (7) del Teorema 3.1.15 y computando $(I - yA)^{-1}$. Note que para composiciones, la longitud de los caminos es enumerada por y , el número de partes de la composición. Ahora, sea B una matriz $l \times l$ de la forma $B = (B_{ij})$ con $B_{ii} = \alpha_i, B_{i,i+1} = \beta_i$, y $B_{ij} = 0$ para todo $j - i \neq 0, 1$. Entonces se puede demostrar por inducción que $B^{-1} = (B^{-1})_{ij}$ está dado por,

$$(B^{-1})_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i > j, \\ (-1)^{i+j} \frac{\beta_i \beta_{i+1} \cdots \beta_{j-1}}{\alpha_i \alpha_{i+1} \cdots \alpha_j} & \text{si } i \leq j. \end{cases}$$

Así para $B = I - yA$ se tiene que, $\alpha_i = 1 - y \sum_{i \neq \tau_i} x^i$ y $\beta_i = yx_i^{\tau_i}$. Esto implica que la

primera fila de B^{-1} está dada por,

$$\left[\frac{1}{1 - y \sum_{i \neq \tau_1} x^i}, \frac{-yx^{\tau_1}}{\prod_{j=1}^2 \left(1 - y \sum_{i \neq \tau_j} x^i\right)}, \dots, \frac{(-1)^{l-1} y^{l-1} x^{\sum_{j=1}^{l-1} \tau_j}}{\prod_{j=1}^l \left(1 - y \sum_{i \neq \tau_j} x^i\right)} \right].$$

Agregar estas entradas produce el resultado deseado. □

3.2. ALGUNOS PROBLEMAS TRABAJADOS

Los resultados obtenidos en esta sección hacen parte de un proyecto propuesto por el profesor José Luis Ramírez de la Universidad Nacional de Colombia, y trabajado en conjunto con el director de este proyecto y J.L. Ramírez. Algunos resultados obtenidos durante el desarrollo de este proyecto de investigación, y que no aparecen en este trabajo, fueron sometidos a publicación (véase²).

3.2.1. Composición superdiagonal Las composiciones superdiagonal fueron introducidas por E. Deutsch, E. Munarini y S. Rinaldi³.

Definición 3.2.1. Una **composición superdiagonal** del entero positivo n , es una composición $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ tal que $\sigma_l \geq l$ para todo $1 \leq l \leq k$.

En la Tabla 11 se muestran las primeras composiciones superdiagonal.

² OLAYA W. y RAMÍREZ J. L. MANTILLA J. "Palindromic and colored superdiagonal compositions". En: *Submitted Available online arXiv 2101.07733* (2021).

³ MUNARINI E. y RINALDI S. DEUTSCH E. "Skew Dyck paths, area, and superdiagonal bar-graphs". En: *Journal of Statistical Planning and Inference* 140 (2009), págs. 1550-1562.

Tabla 11. Composiciones superdiagonal del entero n ($1 \leq n \leq 5$).

n	Composiciones superdiagonal	$d(n)$
1	(1)	1
2	(2)	1
3	(3), (1, 2)	2
4	(4), (1, 3), (2, 2)	3
5	(5), (1, 4), (3, 2), (2, 3)	4

El siguiente código en *sagemath* genera las composiciones superdiagonal del entero n .

```
sage: def superdiagonal(n):
.....:     C = list(Compositions(n))
.....:     k = len(Compositions(n))
.....:     M= []
.....:     for i in range(0, k) :
.....:         l = []
.....:         p= len(C[i])
.....:         for j in range(0, p) :
.....:             if j < C[i][j]:
.....:                 l.append(C[i][j])
.....:             if l == C[i]:
.....:                 M.append(C[i])
.....:     print (n, len(M), M)
sage: for n in range(0, 10) :
.....:     print (superdiagonal(n))
0 1 [[ ]]
```

- 1 1 [[1]]
 2 1 [[2]]
 3 2 [[1, 2], [3]]
 4 3 [[1, 3], [2, 2], [4]]
 5 4 [[1, 4], [2, 3], [3, 2], [5]]
 6 6 [[1, 2, 3], [1, 5], [2, 4], [3, 3], [4, 2], [6]]
 7 9 [[1, 2, 4], [1, 3, 3], [1, 6], [2, 2, 3], [2, 5], [3, 4], [4, 3], [5, 2], [7]]
 8 13 [[1, 2, 5], [1, 3, 4], [1, 4, 3], [1, 7], [2, 2, 4], [2, 3, 3], [2, 6], [3, 2, 3], [3, 5], [4, 4], [5, 3],
 [6, 2], [8]]
 9 18 [[1, 2, 6], [1, 3, 5], [1, 4, 4], [1, 5, 3], [1, 8], [2, 2, 5], [2, 3, 4], [2, 4, 3], [2, 7], [3, 2, 4],
 [3, 3, 3], [3, 6], [4, 2, 3], [4, 5], [5, 4], [6, 3], [7, 2], [9]]

Los primeros valores de la sucesión $d(n)$ son:

$$(OEIS - A219282) = 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 18, 25, 35, 49, 68, 93, 126, \dots$$

Teorema 3.2.2. *Sea $d(n, m)$ el número total de composiciones superdiagonal de n con k partes y sea $d(n)$ el número total de composiciones superdiagonal de n entonces,*

$$d(n, m) = \binom{n - \binom{k}{2} - 1}{k - 1},$$

$$d(n) = \sum_{k \geq 1}^m \binom{n - \binom{k}{2} - 1}{k - 1} \quad \text{donde } m = \frac{\sqrt{1 + 8n} - 1}{2}$$

Demostración. Ver³. □

3.2.2. Composiciones d -superdiagonal Las composiciones d -superdiagonal son una generalización a las composiciones superdiagonal.

Definición 3.2.3. *Una **composición d -superdiagonal** del entero positivo n , es una*

composición $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ tal que $\sigma_l \geq l + d$ para todo $1 \leq l \leq k$ y $d \in \mathbb{Z}$.

Note que las composiciones 0-superdiagonal son las composiciones superdiagonal definidas en la sección anterior.

El siguiente código en *sagemath* generar las composiciones d -superdiagonal del entero n . Como ejemplo se generan las composiciones 1-superdiagonal del entero n .

```
sage: def dsuperdiagonal(n, d):
.....:     C = list(Compositions(n))
.....:     k = len(Compositions(n))
.....:     M= []
.....:     for i in range(0, k) :
.....:         l = []
.....:         p= len(C[i])
.....:         for j in range(0, p) :
.....:             if j + d >= C[i][j]:
.....:                 None
.....:             else: l.append(C[i][j])
.....:         if l == C[i]:
.....:             M.append(l)
.....:     print (n, len(M), M)
sage: for n in range(0, 9) :
.....:     print (dsuperdiagonal(n, 1))
0 1 [[ ]]
1 0 [ ]
2 1 [[2]]
3 1 [[3]]
```

4	1	[[4]]
5	2	[[2, 3], [5]]
6	3	[[2, 4], [3, 3], [6]]
7	4	[[2, 5], [3, 4], [4, 3], [7]]
8	5	[[2, 6], [3, 5], [4, 4], [5, 3], [8]]

Se denota por $a_d(n)$ al número total de composiciones d -superdiagonal del entero n . En la Tabla 12 se muestran los valores de las composiciones d -superdiagonal, para $d = 1, \dots, 5$, obtenidos con el código anterior de *sagemath*.

Tabla 12. Primeros valores de la secuencia $a_d(n), n = 1, \dots, 5$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$a_1(n)$	0	1	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	25	33	44	59	79	105
$a_2(n)$	0	0	1	1	1	1	2	3	4	5	6	8	11	15	20	26	33	42
$a_3(n)$	0	0	0	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	9	12	16	21
$a_4(n)$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	10
$a_5(n)$	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7

De los valores obtenidos en la Tabla 12 se puede conjeturar lo siguiente.

Conjetura 3.2.4. Para todo $d \geq 0$ se tiene que el número de composiciones d -superdiagonal es,

$$a_d(n) = \sum_{k \geq 1} \binom{n-1 - \binom{k+d}{2} + \binom{d}{2}}{k-1}.$$

Teorema 3.2.5. Sea $a_d(n)$ el número total de d -composiciones restringidas del entero positivo n , entonces se cumple que,

1. $a_d(n) = 0$, para todo $n \leq d$.
2. $a_d(n) = 1$, para todo $d+1 \leq n \leq d+d+2 = 2d+2$.

3. $a_d(n) = n - (2d + 1)$, para todo $2d + 3 \leq n \leq 3d + 5$.

Demostración. 1. Es inmediato ya que niquiera para la composición con una sola parte (n) se cumple que sea una d -composición restringida, es decir que $n \geq d + 1$. Por lo tanto $a_d(n) = 0$.

2. Se mostrará que la composición de n con una sola parte (n) es la única d -superdiagonal compositions de n para $d + 1 \leq n \leq 2(d + 1)$.

Suponga que hay una composición de n con dos partes, es decir (a_1, a_2) que es una d -composición restringida de n para $d + 1 \leq n \leq 2(d + 1)$. Así $a_1 \geq d + 1$ y $a_2 \geq d + 2$ y como $a_1 + a_2 = n$, entonces $a_2 = n - a_1 \leq 2d + 2 - d - 1 = d + 1$, por lo tanto $a_2 \leq d + 1$, lo cual contradice que (a_1, a_2) es una d -composición restringida. En consecuencia la composición con una sola parte (n) es la única d -composición restringida, es decir $a_d(n) = 1$ para todo $d + 1 \leq n \leq 2(d + 1)$.

3. Primero note que no hay ninguna d -composición restringida con 3 o más partes para n entre $2d + 3$ y $3d + 5$ ya que si (a_1, a_2, a_3) es una d -composición restringida entonces $a_1 \geq d + 1, a_2 \geq d + 2, y a_3 \geq d + 3$ y como $n = a_1 + a_2 + a_3$ entonces $n \geq 3d + 6$, lo cual no es posible ya que por hipótesis $n \leq 3d + 5$. Por lo tanto no hay d -composiciones restringidas con 3 o más partes para $2d + 3 \leq n \leq 3d + 5$.

Por otro lado note que (n) también es una d -composición restringida pues $n \geq 2d + 3 > d + 1$. Ahora, veamos cuántas d -composiciones restringidas con 2 partes hay. Considere la composición (a_1, a_2) tal que $a_1 + a_2 = n$ con $a_1 \geq d + 1$ y $a_2 \geq d + 2$, entonces $n \geq 2d + 3$, lo cual garantiza que (a_1, a_2) es una d -composición restringida de n , para todo n entre $2d + 3$ y $3d + 5$. Por lo tanto las d -composiciones restringidas para n entre $2d + 3$ y $3d + 5$ son de la forma (n) , y (a_1, a_2) , las cuales se obtienen de la siguiente forma: $(d + 1 + k, n - (d + 1 + k))$ donde $0 \leq k \leq n - (d + 1) - (d + 2) = n - 2d - 3$. Para un total $a_d(n) = 2 + k =$

$$2 + n - 2d - 3 = n - 2d - 1.$$

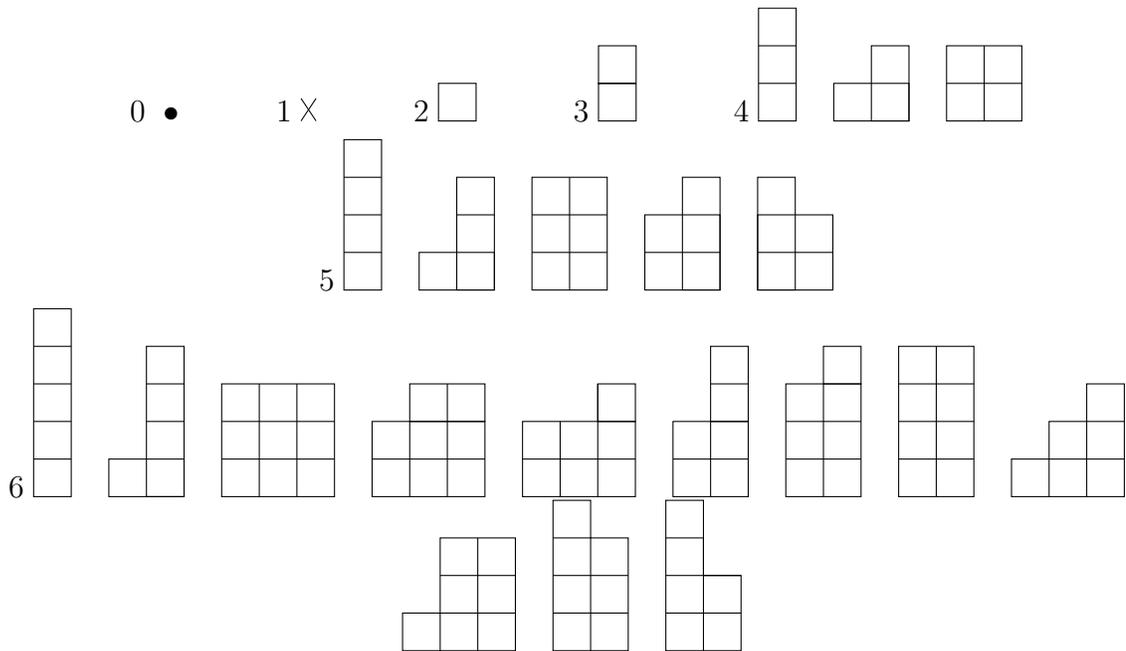
□

3.2.3. Enumeración de gráficos de barras de composiciones d -superdiagonal de acuerdo al semi-perímetro

En esta sección se muestran los resultados obtenidos sobre el total de gráficos de barra de composiciones d -superdiagonal de acuerdo al semi-perímetro, es decir, la mitad del perímetro de los gráficos de barra superdiagonal (véase³).

En la Figura 12 se muestran los gráficos de barra con respecto al semi-perímetro n , para $n = 0, 1, \dots, 6$.

Figura 12. Gráficos de barra con respecto al semi-perímetro n , ($0 \leq n \leq 6$)



Se denota por $b_d(n)$ al número total de gráficos de barra de composiciones d -superdiagonal con respecto al semi-perímetro n .

■ **Composiciones 0-superdiagonal**

Dentro del estudio de E. Deutsch, E. Munarini y S. Rinaldi³ también se encuentra la enumeración de todos los gráficos de barra superdiagonal los cuales corresponden a las composiciones 0-superdiagonal.

La Tabla 13 muestra los primeros valores de $b_0(n)$. Esta secuencia coincide con el número de caminos de Motzkin de longitud n sin pasos horizontales en niveles pares.

Tabla 13. Primeros valores de la secuencia $b_0(n)$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$b_0(n)$	1	0	1	1	3	5	12	24	55	119	272	612	1411	3247	7565

Los primeros valores de la secuencia $b_0(n)$ son,

(OEIS - AA090345) : 1, 0, 1, 1, 3, 5, 12, 24, 55, 119, 272, 612, 1411, ...

Teorema 3.2.6. *El número total de gráficos de barra superdiagonal de acuerdo al semiperímetro n es,*

$$b_0(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-k-1}{k-1} C_k,$$

donde C_k son los números de Catalan, $C_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1}$.

■ **Composiciones d -superdiagonal para $1 \leq d \leq 6$.**

La Tabla ?? muestra los primeros valores de $b_d(n)$, para $1 \leq d \leq 6$.

Tabla 14. Primeros valores de las secuencias $b_d(n)$, para $1 \leq d \leq 6$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$b_1(n)$	1	0	0	1	1	3	5	12	24	55	119	272	612	1411	3247	7565
$b_2(n)$	1	0	0	0	1	1	3	5	12	24	55	119	272	612	1411	3247
$b_3(n)$	1	0	0	0	0	1	1	3	5	12	24	55	119	272	612	1411
$b_4(n)$	1	0	0	0	0	0	1	1	3	5	12	24	55	119	272	612
$b_5(n)$	1	0	0	0	0	0	0	1	1	3	5	12	24	55	119	272

Teorema 3.2.7. *Sea $b_d(n)$ el número de d -composiciones restringidas del entero positivo n , entonces,*

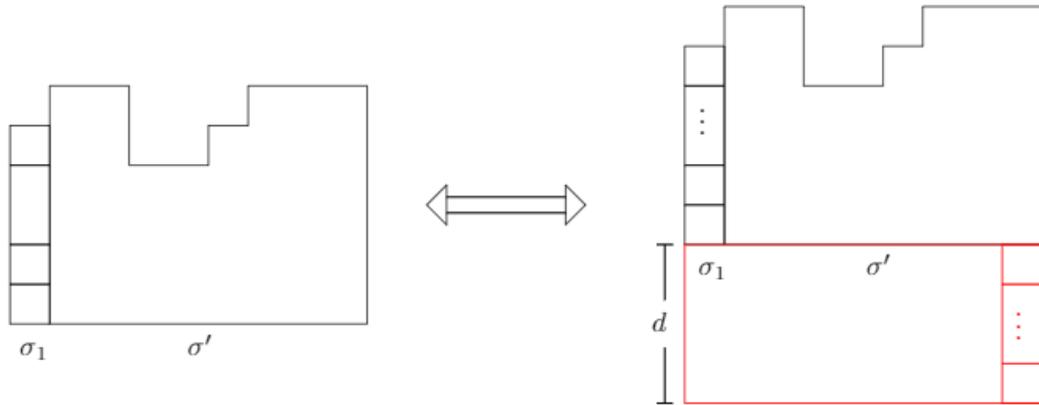
1. $b_d(n) = 0$ para $1 \leq n \leq d + 1$.
2. $b_d(n) = b_0(n - d)$ para $n \geq d + 2$.

Demostración. 1. Como el gráfico de barras de semi-perímetro $n = d + 1$ con una sola parte corresponde a la composición de $n - 1 = d$ entonces, no satisface la condición de ser una d -composición restringida, pues $d < d + 1$. Por lo tanto se tiene que $b_d(n) = 0$ para $1 \leq n \leq d + 1$.

2. Para probar que $b_d(n) = b_0(n - d)$ para $n \geq 2$ primero se mostrará que $b_d(n) \leq b_0(n - d)$. Considere $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ una d -composición restringida de n entonces se tiene que $\sigma_1 \geq d + 1, \dots, \sigma_m \geq d + m$, por lo tanto $\sigma - d = (\sigma_1 - d, \sigma_2 - d, \dots, \sigma_m - d)$ es una 0-composición restringida de $n - d$ pues $\sigma_1 - d \geq 1, \sigma_2 - d \geq 2, \dots, \sigma_m - d \geq m$.

Ahora, se probará que $b_d(n) \geq b_0(n - d)$. Sea $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ una 0-composición restringida de $n - d$ entonces se tiene que $\sigma_1 \geq 1, \dots, \sigma_m \geq m$, por lo tanto $\sigma + d = (\sigma_1 + d, \sigma_2 + d, \dots, \sigma_m + d)$ es una d -composición restringida de n pues $\sigma_1 + d \geq d + 1, \sigma_2 + d \geq d + 2, \dots, \sigma_m + d \geq d + m$. Se concluye que $b_d(n) = b_0(n - d)$ para $n \geq 2$. Ver Figura 13.

Figura 13. Estructura recursiva de una composición d -superdiagonal



□

Corolario 3.2.8. Para todo $d \in \mathbb{N}_0$ se tiene que el número de composiciones d -superdiagonal con semi-perímetro n es,

$$b_d(n) = \sum_{k=1}^{n-d-1} \binom{n-d-k-1}{k-1} C_k,$$

donde C_k son los números de Catalan, $C_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1}$.

3.2.4. Enumeración de composiciones d -superdiagonal palíndromas Otro tipo de composiciones estudiadas durante el desarrollo de este trabajo son las composiciones d -superdiagonal palíndromas. El siguiente código en *sagemath* muestra como obtener las composiciones d -superdiagonal palíndromas del entero positivo n .

```
sage: def dPalinSuperdiagonal(n, d):
.....:     C = list(Compositions(n))
.....:     k = len(Compositions(n))
.....:     M= []
.....:     for i in range(0, k) :
```

```

.....:     l = []
.....:     p= len(C[i])
.....:     for j in range(0, p) :
.....:         if j + d >=C[i][j]:
.....:             None
.....:         else: l.append(C[i][j])
.....:     if l == C[i]:
.....:         m=Compositions(C[i]).reversed( )
.....:         if m==C[i]:
.....:             M.append(l)
.....:     print (n, len(M), M)

```

Definición 3.2.9. Se denota por $p_d(n)$ al número de composiciones d -superdiagonal palíndromas del entero n .

La Tabla 15 muestra los valores de $p_d(n)$, para $d = 0, 1, \dots, 6$, encontrados con el anterior código en *sagemath*.

Tabla 15. Primeros valores de la secuencia $p_d(n)$, para $d = 0, 1, \dots, 5$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$p_0(n)$	1	1	1	1	2	1	2	1	3	2	4	3	5	4	7	5	9	6	11
$p_1(n)$	1	0	1	1	1	1	2	1	2	1	2	2	3	3	4	4	5	5	7
$p_2(n)$	1	0	0	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2	1	3	2	4	3	5
$p_3(n)$	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2	1	2	2	3
$p_4(n)$	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2	1	2
$p_5(n)$	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2

Para más información sobre estas composiciones y sobre su relación con caminos de Dick torcidos ver^{3,4}.

⁴ E. DEUTSCH y ELIZALDE S. "Statistics on bargraphs viewed as cornerless Motzkin paths". En: *Discrete Appl. Math.* 221 (2017), págs. 54-66.

BIBLIOGRAFÍA

- ACOSTA J. R., *et al.* "Some new restricted n -color composition functions". En: *Submitted* (2018) (vid. págs. 49, 50).
- AGARWAL, A. K. " n -colour compositions." En: *Indian J. Pure Appl. Math.* 31(11) (2000), págs. 1421-1427 (vid. págs. 11, 45, 47, 66).
- ALLADI, K. y HOGGATT V. E. "Compositions with ones and twos". En: *Fibonacci Quart.* 13(3) (1975), págs. 1021-1031 (vid. págs. 12, 37).
- ANDREWS, G. *The Theory of Partitions*. Encyclopedia of Mathematics e Its Applications, Cambridge University Press, 1998 (vid. pág. 16).
- ANDREWS, G. y ERIKSON K. *Integer Partitions*. Cambridge University Press, 2004 (vid. pág. 16).
- BRÄNDÉN, P. y MANSOUR T. "Finite automata and pattern avoidance in words". En: *J. Combin. Theory Ser. A* 110(1) (2005), págs. 127-145 (vid. págs. 12, 72).
- CARLITZ, L. "Restricted compositions". En: *J. Combin. Theory Ser. A* 14(3) (1976), págs. 254-264 (vid. págs. 12, 40, 42, 45, 62).
- DEUTSCH, E. y ELIZALDE S. "Statistics on bargraphs viewed as cornerless Motzkin paths". En: *Discrete Appl. Math.* 221 (2017), págs. 54-66 (vid. pág. 92).
- DEUTSCH E., MUNARINI E. y RINALDI S. "Skew Dyck paths, area, and superdiagonal bargraphs". En: *Journal of Statistical Planning and Inference* 140 (2009), págs. 1550-1562 (vid. págs. 81, 83, 87, 88, 92).

- GUO, Y. H. "Some n -color compositions". En: *J. Integer Seq* 15 Art. 12.1.2 (2012).
- HEUBACH, S. y MANSOUR T. *Combinatorics of Compositions and Words*. CRC Press, 2009 (vid. págs. 13, 45, 56, 70, 72).
- HOGGATT, V. E. JR. y BICKNELL M. "Palindromic compositions". En: *Fibonacci Quart.* 14(4) (1975), págs. 350-356 (vid. págs. 30, 60).
- MACMAHON, P. A. "Memoir on the theory of the compositions of numbers." En: *Phil. Trans. Royal Society London. A* 184 (1893), págs. 835-901 (vid. págs. 11, 21, 32).
- MANTILLA J., OLAYA W. y RAMÍREZ J. L. "Palindromic and colored superdiagonal compositions". En: *Submitted Available online arXiv 2101.07733* (2021) (vid. pág. 81).
- RAMÍREZ, JOSÉ LUIS. "Introducción a la teoría de composiciones". En: <https://sites.google.com/site/remirezjl/>. (2020) (vid. pág. 13).
- SACHDEVA, R. y AGARWAL A. K. "Combinatorics of certain restricted n -color composition functions." En: *Discrete Math.* 340(3) (2017), págs. 361-372 (vid. págs. 48, 49).
- SHAPCOTT, C. "C-color compositions and palindromes". En: *Fibonacci Quart.* 50(4) (2012), págs. 297-303 (vid. pág. 48).
- SLOANE, N. J. "The On-Line encyclopedia of integer sequences." En: <https://oeis.org> (1964) (vid. pág. 15).

STANLEY, R. P. *Enumerative combinatorics*. Vol. 1. of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997, pág. 574 (vid. pág. 77).