

SECCIONES CIRCULARES DE UN CONO CON BASE CÓNICA

GUSTAVO ADOLFO HERNÁNDEZ GALVIS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2021

# SECCIONES CIRCULARES DE UN CONO CON BASE CÓNICA

GUSTAVO ADOLFO HERNÁNDEZ GALVIS

Trabajo de Grado para optar al título de  
Matemático

Director

LUIS ÁNGEL PÉREZ FERNÁNDEZ

Magíster en Educación Matemática

Codirector

MARTÍN EDUARDO ACOSTA GEMPELER

Doctor en Educación Matemática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2021

*Dedicado: A mis padres.*

## AGRADECIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos

- ★ A mis padres que han sido un gran apoyo económico y emocional a través de mi vida.
- ★ Al profesor, **Luis Ángel Pérez Fernández** por la paciencia y motivación hacia esta rama de las Matemáticas.
- ★ Al profesor, **Martín Eduardo Acosta Gempeler** por proponer el problema, por el material bibliográfico y por las traducciones.

## CONTENIDO

	<b>pág.</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>10</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>16</b>
1.1. PROYECTIVIDADES	17
1.2. TEORÍA DE LA POLAR DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CÓNICA	36
<b>2. EL CONO DE BASE CÓNICA</b>	<b>55</b>
2.1. EJES DEL CONO	55
2.2. PLANOS CÍCLICOS	59
<b>3. CONCLUSIONES</b>	<b>64</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>67</b>

## LISTA DE FIGURAS

	<b>pág.</b>
Figura 1. Perspectividad elemental.	18
Figura 2. Perspectividad entre rangos de puntos.	19
Figura 3. Perspectividad entre haces de rectas.	20
Figura 4. Proyectividad.	21
Figura 5. Involución hiperbólica.	23
Figura 6. Involución elíptica.	24
Figura 7. Cuadrángulo Completo.	26
Figura 8. Cuaterna armónica	27
Figura 9. Cuaternas armónicas en un cuadrángulo completo	28
Figura 10. Conjugados armónicos respecto a cualquier par recíproco.	29
Figura 11. Cuadrángulo completo de primer tipo.	30
Figura 12. Cuadrángulo completo de segundo tipo.	31
Figura 13. Cuaterna armónica en cuadrángulo completo de primer tipo.	32
Figura 14. Centro y puntos dobles de una involución.	34
Figura 15. Haces proyectivos en perspectiva.	34
Figura 16. Haces proyectivos	35
Figura 17. Cónica proyectiva real.	36
Figura 18. Cónica proyectiva imaginaria.	37
Figura 19. Lugar geométrico del cuarto armónico para una cónica real.	38
Figura 20. Lugar geométrico del cuarto armónico para una cónica imaginaria.	38
Figura 21. Construcción de la polar de un punto respecto a una cónica.	39
Figura 22. Los pares conjugados respecto a una cónica forman una involución.	41
Figura 23. Triángulo autopolar.	41

Figura 24.	Puntos conjugados comunes a dos cónicas.	42
Figura 25.	La cónica $w_3$ , es el lugar geométrico buscado.	43
Figura 26.	Intersección de dos cónicas.	44
Figura 27.	Casos especiales de dos cónicas.	44
Figura 28.	Triángulo autopolar a dos cónicas.	46
Figura 29.	Cuerda común a dos cónicas	48
Figura 30.	Relación entre cuerdas comunes y el triángulo autopolar a dos cónicas.	49
Figura 31.	Cuerdas comunes a dos cónicas que se intersecan en cuatro puntos imaginarios.	50
Figura 32.	Cuerdas comunes a dos cónicas que se intersecan en dos puntos imaginarios y dos puntos reales.	51
Figura 33.	Puntos circulares del infinito.	52
Figura 34.	Polar de un punto con respecto a un círculo real.	53
Figura 35.	Polar de un punto con respecto al círculo imaginario.	54
Figura 36.	Ejemplo de cono.	55
Figura 37.	Sistema de ejes conjugados.	56
Figura 38.	Sistema de ejes conjugados perpendiculares 1.	57
Figura 39.	Sistema de ejes conjugados perpendiculares 2.	58
Figura 40.	Planos cíclicos del cono.	60
Figura 41.	Sección circular del cono 1.	61
Figura 42.	Sección circular del cono 2.	62

## RESUMEN

**TÍTULO:** SECCIONES CIRCULARES DE UN CONO CON BASE CÓNICA. \*

**AUTOR:** GUSTAVO ADOLFO HERNÁNDEZ GALVIS \*\*

**PALABRAS CLAVE:** TRIÁNGULO AUTO POLAR, INVOLUCIÓN, CONO DE BASE CÓNICA, CÍRCULO IMAGINARIO, CUERDAS COMUNES, PLANOS CÍCLICOS, SECCIONES CIRCULARES.

### DESCRIPCIÓN:

El objetivo de este trabajo es construir las secciones circulares de un cono de base cónica. Para ello, concebimos un cono recto  $k_i$  de vértice  $S$  y base el círculo imaginario  $c_i$ , cuya altura sea igual al radio de  $c_i$ . Este cono da lugar a la siguiente propiedad:

- Todos los sistemas de ejes conjugados del cono  $k_i$  son perpendiculares.

Ahora, considere un cono  $k$  de vértice  $S$  y de base cónica  $c$ , las cónicas  $c_i$  y  $c$  tienen un único triángulo  $UVW$  auto polar común. Luego, el cono  $k$  tiene un único sistema de ejes conjugados perpendiculares a través de los tres vértices del triángulo auto polar a  $c_i$  y  $c$ . Por lo tanto, existe una involución desde un vértice del triángulo auto polar a  $c_i$  y  $c$  que siempre es hiperbólica. Esto es, existe un par de rectas dobles que se cortan en un vértice del triángulo y son cuerdas comunes de las dos cónicas. A partir de estas rectas concluimos que:

- La involución determinada por los puntos conjugados es igual en las cónicas  $c_i$  y  $c$ , siendo los puntos dobles, los puntos de intersección de  $c_i$  y  $c$ .

Así, cada uno de dos planos cíclicos del cono  $k$  estará determinado por el vértice  $S$  y una cuerda común a  $c$  y  $c_i$ . Estos dos planos tienen la siguiente propiedad distintiva:

- Los planos paralelos a los planos cíclicos contienen la secciones circulares del cono  $k$ .

Es decir, el problema se reduce a construir las cuerdas comunes de las cónicas  $c_i$  y  $c$ .

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Luis Ángel Pérez Fernández, Ms en Licenciatura en Matemáticas.

## ABSTRACT

**TITLE:** CIRCULAR SECTIONS OF A CONE WITH A CONICAL BASE \*

**AUTHOR:** GUSTAVO ADOLFO HERNÁNDEZ GALVIS \*\*

**KEYWORDS:** AUTO POLAR TRIANGLE, INVOLUTION, CONICAL BASE CONIC, IMAGINARY CIRCLE, COMMON CHORD, CYCLIC PLANES, CIRCULAR SECTIONS.

### DESCRIPTION:

The objective of this work is to construct the circular sections of a cone with a conical base. To do this, we conceive a right cone  $k_i$  of vertex  $S$  and base the imaginary circle  $c_i$ , whose height is equal to the radius of  $c_i$ . This cone gives rise to the following property:

- All conjugate axis systems of the cone  $k_i$  are perpendicular.

Now, consider a cone  $k$  with vertex  $S$  and conic base  $c$ , the conics  $c_i$  and  $c$  have a single common self-polar  $UVW$  triangle. Then the cone  $k$  has a single system of conjugate axes perpendicular through the three vertices of the self-polar triangle at  $c_i$  and  $c$ . Therefore, there exists an involution from one vertex of the autopolar triangle to  $c_i$  and  $c$  that is always hyperbolic. That is, there is a pair of double lines that intersect at a vertex of the triangle and are common chords of the two conics. From these lines we conclude that:

- The involution determined by the conjugated points is the same in the conics  $c_i$  and  $c$ , the double points being the intersection points of  $c_i$  and  $c$ .

Thus, each of the two cyclic planes of the cone  $k$  will be determined by the vertex  $S$  and a chord common to  $c$  and  $c_i$ . These two planes have the following distinctive property:

- The planes parallel to the cyclic planes contain the circular sections of the cone  $k$ .

That is, the problem boils down to constructing the common chords of the conics  $c_i$  and  $c$

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Luis Ángel Pérez Fernández, Ms en Licenciatura en Matemáticas.

## INTRODUCCIÓN

El siglo *XIX* significó para la geometría, la proliferación de diversos enfoques teóricos que ponían en contraste la geometría sintética y la geometría analítica; permitiendo que ambas perfeccionaran sus técnicas. Parte de dicho desarrollo teórico es el fortalecimiento de la geometría proyectiva, como una extensión de la geometría euclidiana clásica. Finalmente, la geometría analítica terminó predominando sobre los métodos sintéticos. Sin embargo, con el nacimiento de los software de geometría dinámica, la geometría sintética ha vuelto a suscitar interés; dado que posibilita realizar materialmente muchas de las operaciones que en la geometría proyectiva se planteaban como una operación mental: considerar las familias de puntos y rectas como un punto que se mueve ocupando diferentes posiciones en el plano o en el espacio; la concepción de las figuras como invariantes de transformaciones de tamaño, forma y posición. Esta capacidad de representación que puede arrastrarse, potencia las metáforas del razonamiento que permiten prescindir del trabajo numérico y algebraico.

Uno de estos elementos nuevos, es *el principio de continuidad*, que fue enunciado por primera vez por Kepler, y luego extendido por Boscovich; pero no fue hasta después de la publicación del *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet en 1822 que fue universalmente aceptado. Este principio afirma que si por la naturaleza de un problema en particular deberíamos esperar un cierto número de soluciones, y si en algún caso particular encontramos este número de soluciones, entonces habrá el mismo número de soluciones en todos los casos, aunque algunas de las soluciones pueden ser imaginarias. Por ejemplo, dos círculos se intersecan en dos puntos, por lo que se puede afirmar que dos círculos se intersecan en dos

puntos, aunque los puntos pueden ser imaginarios o coincidentes. Esto permite extender los teoremas sobre puntos o rectas reales a puntos o rectas imaginarias. Sin embargo el principio de continuidad fue duramente criticado por otros matemáticos debido a su falta de rigor, incluso por geómetras sintéticos como Michel Chasles y Jakob Steiner, este último afirmaba que el principio de continuidad era la sombra de la geometría.

La teoría de los elementos imaginarios tiene origen en el trabajo de Poncelet, en el cual estudió las propiedades proyectivas de las cónicas. Por su parte Chasles y Steiner también hicieron contribuciones relacionadas con la teoría de elementos imaginarios. Sin embargo, Von Staudt en su obra *Beiträge zur Geometrie der Lage* quien define los puntos imaginarios conjugados como elementos dobles de una involución elíptica, prescindiendo así del principio de continuidad, e influenciado a matemáticos que partieron de su obra, como lo fue Julio Rey Pastor, quien utiliza los elementos imaginarios a la manera de Staudt para estudiar la construcción sintética de curvas de orden superior. Los elementos imaginarios son de gran utilidad ya que permiten mantener y estudiar las propiedades de la figura cuando dichas figuras dejan de ser reales. Considere el siguiente ejemplo: llamamos polar de un punto  $P$  relativo a un círculo  $c$  de centro  $C$ , a la recta determinada mediante alguna de las dos siguientes construcciones:

1. Trazando por el punto dado  $P$  dos tangentes al círculo  $c$ ; la recta que une los puntos de contacto es la polar de  $P$  respecto a  $c$ .
2. Por el punto  $E$  en la semi recta  $CP$  del círculo, determinado por la relación  $CE \cdot CP = r^2$ , se traza una perpendicular a  $PC$ , esta última recta es la polar de  $P$  respecto a  $c$ .

La primera forma de construir la polar del punto  $P$  requiere que se considere explí-

citamente el círculo, de modo que la polar se relaciona exclusivamente con la circunferencia del círculo. No sucede lo mismo para el otro caso; no necesariamente se usa la circunferencia del círculo, sino solo la posición de su centro y el cuadrado de su radio. Este ejemplo muestra cómo las propiedades, que parecen referirse necesariamente al círculo, pueden derivarse de relaciones más íntimas que hacen posible abstraer el círculo en su declaración. Ahora vemos que, al considerar que  $r^2$  es negativo, la construcción del punto  $E$  que depende de la ecuación  $CE \cdot CP = r^2$  permanecerá, y la perpendicular a través de este punto dará lugar a las mismas propiedades que en el primer caso.

De acuerdo con Chasles los objetos imaginarios no entran por sí mismos explícitamente en el razonamiento, sino que están representados por elementos siempre reales que pueden servir para determinarlos. En otras palabras, aunque los elementos imaginarios no pueden construirse, están en una relación de dependencia con elementos reales, y estos sí son posibles de construir. Así pues, nuestro propósito es elaborar la construcción con objetos reales considerando implícitamente propiedades de los imaginarios.

Además, intentaremos en lo posible definir los conceptos a partir de relaciones de incidencia entre puntos, rectas y planos. Esto es debido a la crítica fundamental que se hace a la obra de Michel Chasles, y es que en ella, se define la razón anarmónica (razón doble) como un producto de dos proporciones y, por lo tanto, como una expresión de cuatro longitudes. Esto hace que la geometría proyectiva, en su formulación, dependa de la geometría euclidiana y, sin embargo, se afirma que la geometría proyectiva es más fundamental. Por lo tanto, definiremos un rango armónico siguiendo a Von Staudt en su libro *Geometrie der Lage*, donde demostró que toda correspondencia entre rectas que conserve las cuaternas armónicas conserva

también las razones dobles, y de esta manera es posible hablar de proyectividades sin mencionar las razones dobles. Esto es así, porque el concepto de cuaterna armónica puede ser definido mediante una figura proyectiva llamada cuadrángulo completo. Sin embargo, Von Staudt no elimina el concepto de paralelismo, lo cual si hace Felix Klein posteriormente. Por lo tanto, trataremos de prescindir de conceptos métricos; cuando no lo hagamos, es por falta de bibliografía que es de difícil acceso para este trabajo y nos remitiremos a conceptos métricos trabajados por Michel Chasles.

Con este trabajo no pretendemos estudiar la geometría proyectiva y mucho menos la teoría sobre los imaginarios, sino exponer algunos de estos elementos teóricos olvidados, a través del problema de encontrar las secciones circulares de un cono de base cónica; que fue resuelto sintéticamente por Michel Chasles. Haremos una reconstrucción de la solución de Chasles usando distintos autores posteriores a este. Esta reconstrucción condensa fundamentos teóricos como proyecciones, cuaternas armónicas, involuciones y la polar de un punto respecto a una cónica. El problema podemos enunciarlo de la siguiente manera:

**Dada una cónica  $c$  en un plano y un punto  $S$  que no está en dicho plano, determinar las secciones circulares del cono con vértice  $S$  y base  $c$ .**

A continuación presentamos la solución al problema propuesto por Chasles, que se encuentra en *Résumé d'une théorie des coniques sphériques homofocales et des surface du second ordre homofocales*, la cual usamos como base para el desarrollo de nuestro trabajo.

**1-** Concebimos en un plano una cónica  $C$  y un círculo imaginario; esas dos curvas

dan lugar a las siguientes propiedades:

- 1)** Existen tres puntos, siempre reales, y cada uno tiene la misma recta polar, en el círculo y en la cónica. Esta recta es la que une los otros dos puntos.
- 2)** Existen dos puntos, siempre reales, tales que dos rectas conjugadas cualesquiera con respecto a la cónica, que pasa por uno de esos puntos, son conjugadas con respecto al círculo. En otros términos, esos dos puntos son los puntos de intersección de las tangentes (imaginarias) comunes al círculo y a la cónica; o, si se quiere, son los vértices reales del cuadrilátero (imaginario) circunscrito al círculo y a la cónica.
- 3)** Existen dos rectas siempre reales, tales que dos puntos conjugados cualesquiera con respecto a la cónica, tomados sobre una de esas rectas, son conjugados con respecto al círculo. En otros términos, esas rectas son dos cuerdas comunes al círculo y a la cónica; o, si se quiere, son los lados reales del cuadrilátero (imaginario) inscrito en el círculo y la cónica.

**2-** Sea  $O$  el centro del círculo, y  $R = \sqrt{-1}$  su radio. Tracemos una perpendicular  $OS$  al plano de la figura por el punto  $O$ , igual a  $R$ . El punto  $S$ , extremo de esta perpendicular, tendrá las siguientes propiedades:

- 1)** Si en el plano de la figura se toma un punto y su polar relativa al círculo imaginario, la recta de  $S$  a ese punto será perpendicular al plano de  $S$  a la polar.
- 2)** Las rectas trazadas de  $S$  a dos puntos conjugados con respecto al círculo, serán rectangulares.
- 3)** El plano trazado de  $S$  a dos rectas conjugadas con respecto al círculo serán rectangulares.

**3-** Si se concibe un cono de vértice  $S$  y de base el círculo imaginario, será el cono asíntoto de una esfera de radio cualquiera con centro  $S$ . Por consiguiente, la curva de intersección de la esfera y el cono será el círculo imaginario del infinito.

**4-** Según esto, las propiedades del círculo imaginario considerado sobre el plano dan lugar a las siguientes propiedades del círculo imaginario del infinito sobre la esfera:

- 1)** El arco polar de un punto de la esfera, relativo al círculo imaginario, está en el plano perpendicular al radio que pasa por el punto de la esfera.
- 2)** Dos puntos conjugados con respecto al círculo imaginario son distantes de un cuadrante.
- 3)** Dos arcos conjugados con respecto al círculo imaginario son rectangulares. Estas nociones relativas al círculo imaginario del infinito sobre la esfera sirven para demostrar con mucha facilidad una cantidad de proposiciones de geometría esférica. Pero aquí las aplicamos a la teoría de las cónicas homofocales.

**5-** Concebimos ahora un cono de vértice  $S$  y de base cónica  $C$ :

- 1)** Los tres ejes principales de ese cono serán las rectas del punto  $S$  a los tres puntos, cada uno de los cuales tiene la misma polar en la cónica y en el círculo imaginario.
- 2)** Sus dos planos cíclicos pasaran respectivamente por las dos cuerdas comunes al círculo y a la cónica.
- 3)** Sus dos rectas focales van desde  $S$  a los puntos de intersección de las tangentes comunes al círculo y a la cónica.

## 1. PRELIMINARES

En este capítulo se presentan algunas definiciones, teoremas y demás resultados preliminares que facilitan la manera de abordar el estudio de las secciones circulares de un cono con base cónica; se iniciará con la teoría de proyectividades que permite definir el concepto de involución, y continuaremos con la polar de un punto respecto a una cónica, el concepto de triángulo autopolar y cuerdas comunes a dos cónicas. En lo que resta de este trabajo denotamos por letras mayúsculas a los puntos, y por letras minúsculas a rectas, planos y cónicas.

### **Construcción en el plano y el espacio**

Los inicios de las construcciones geométricas, atribuidas principalmente a los antiguos griegos, no fueron solo producciones con objetos físicos, estos consideraban la regla y el compás como objetos abstractos que permitían desarrollar otros más complejos y dotados de propiedades. Posteriormente geómetras del siglo XVII y XVIII estudiaron las construcciones con solo regla, con solo compás o con combinaciones de estos agregando restricciones, entre ellos se destacan Georg Mohr, Lorenzo Mascheroni, Jean Victor Poncelet y Jakob Steiner.

Dadas las limitaciones de *la regla y el compás*, por ejemplo, con estos objetos no siempre es posible construir los puntos de intersección de dos cónicas conocidos los cinco puntos por donde pasan cada una de ellas; en este trabajo proponemos las construcciones con *recta* (regla) y *cónica* en el caso del plano y en cuanto al espacio refiere consideraremos la *recta*, la *cónica* y el *plano*. Es decir, los objetos básicos con los que desarrollaremos las construcciones propuestas son las rectas, las cónicas y los planos, donde las intersecciones de estos serán consideradas de

manera intrínseca. Por ejemplo, si se considera una recta  $r$  y una cónica  $c$  en un plano, los puntos de intersección  $A$  y  $B$  reales o imaginarios serán considerados en caso de ser necesario, sin necesidad de un proceso adicional; así como en las construcciones con regla y compás, dadas dos rectas  $a$  y  $b$  no paralelas, se considera su intersección  $P$  como un punto determinado por ellas. Esto nos permitirá desarrollar la construcción a partir de objetos reales, considerando las propiedades de los objetos imaginarios sin que estos últimos se hagan explícitos.

## 1.1. PROYECTIVIDADES

**Definición 1.1** *Por una figura en un espacio proyectivo, entenderemos toda colección de puntos, rectas y planos del espacio. Por una figura en un plano proyectivo entenderemos toda colección de puntos y rectas del plano. En este capítulo, restringimos nuestra atención a dos tipos de figuras en un plano proyectivo:*

1. *Los puntos sobre una de las rectas del plano, la llamaremos un rango de puntos (haz de puntos o fila de puntos). El rango de puntos sobre la recta  $p$  de la Figura 1, será denotado por  $p(A, B, C, D, \dots)$  donde  $A, B, C, D, \dots$ , son puntos distintos sobre la recta  $p$ .*
2. *Las rectas que se intersecan en un punto del plano, la llamaremos un haz de rectas. El haz de rectas sobre el punto  $P$  de la Figura 1, será denotado por  $P(a, b, c, d, \dots)$  donde  $a, b, c, d, \dots$  son rectas distintas sobre  $P$ .*

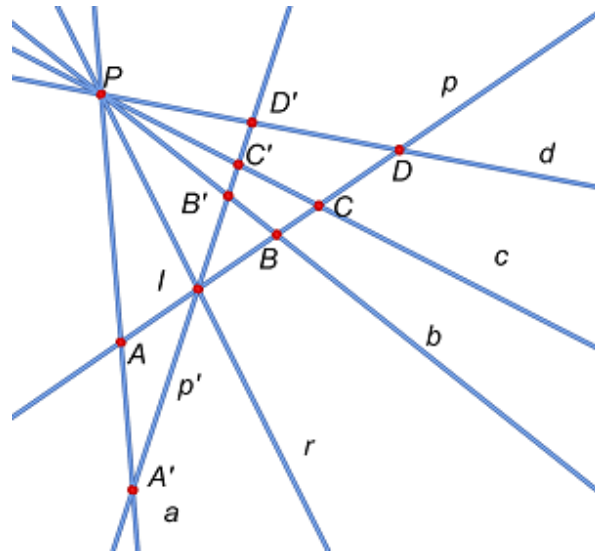
Consideremos en la Figura 1 el haz de rectas  $P(a, b, c, d, \dots)$  intersecado por cualquier recta  $p$  que no pase por  $P$ . A cada elemento del haz de rectas en  $P$ , se le asocia un único punto. Además, esta asociación entre punto y recta es dual, a saber, a cada elemento del rango de puntos sobre la recta  $p$  se le asocia una única recta del haz de rectas.



Por ser reversibles estas perspectivas, las podemos escribir como sigue:

$$p(A, B, C, D, \dots) \bar{\bar{P}} P(a, b, c, d, \dots) \bar{\bar{P}} p'(A', B', C', D', \dots)$$

Figura 2. Perspectividad entre rangos de puntos.



Hemos establecido una correspondencia uno a uno entre los rangos de puntos en  $p$  y  $p'$  ( $A$  y  $A'$ ;  $B$  y  $B'$ ,  $C$  y  $C'$ , ...) en la cual cada punto del rango en  $p$  y su asociado en  $p'$  determinan una sola recta del haz de rectas en  $P$ . Sustituimos ahora la sucesión anterior de perspectivas elementales por

$$p(A, B, C, D, \dots) \bar{\bar{P}} p'(A', B', C', D', \dots)$$

(léase: el rango de puntos  $p(A, B, C, D, \dots)$  es perspectivo por medio del punto  $P$  con el rango de puntos  $p'(A', B', C', D', \dots)$ . El punto  $P$  es llamado el centro de perspectividad. De este modo, definimos

**Definición 1.2** *Dos rangos de puntos sobre rectas distintas  $p$  y  $p'$  son perspectivos desde un punto  $P$  si existe una correspondencia uno a uno entre los puntos de los*

rangos y si las rectas determinadas por los puntos correspondientes se intersecan en  $P$ .<sup>1</sup>

En el plano, el dual de una perspectividad entre dos rangos de puntos en rectas distintas, es una perspectividad entre dos haces de rectas sobre puntos distintos, definida como sigue:

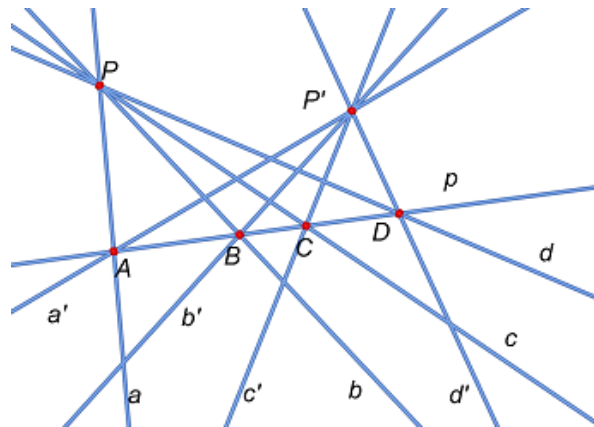
**Definición 1.3** Dos haces de rectas  $P(a, b, c, d, \dots)$  y  $P'(a', b', c', d', \dots)$  sobre puntos distintos se dice que son perspectivos de la recta  $p$ , si existe una correspondencia uno a uno entre los dos haces y si las correspondientes intersecciones de las rectas están sobre  $p$ .<sup>1</sup>

Esta perspectividad ilustrada en la Figura 3, se indica escribiendo

$$P'(a, b, c, d, \dots) \bar{\bar{\lambda}}^p P'(a', b', c', d', \dots).$$

En tal caso, a la recta  $p$  la llamaremos eje de perspectividad.

Figura 3. Perspectividad entre haces de rectas.



<sup>1</sup> JR FRANK AYRES. *Theory and Problems of Projective Geometry*. McGraw-hill, 1967.

**Definición 1.4** Una sucesión finita de perspectivas en un plano es llamada *proyectividad*.

Una proyectividad la denotaremos con el símbolo  $\bar{\lambda}$ .

**Ejemplo 1** Dado un haz de rectas  $P(a, b, c, d)$ , encuentre una proyectividad

$$P(a, b, c, d) \bar{\lambda} P(b, a, d, c)$$

Considere en la Figura 4, las rectas  $a, b, c$  y  $d$  que se cortan en un punto  $P$  intersecadas por una recta  $p$ , que no pasa por  $P$ , y los puntos  $A, B, C, D$  que resultan proyectados desde un punto cualquiera  $Q$  que pertenece a la recta  $a$  y no a la recta  $p$ , y es distinto de  $P$ .

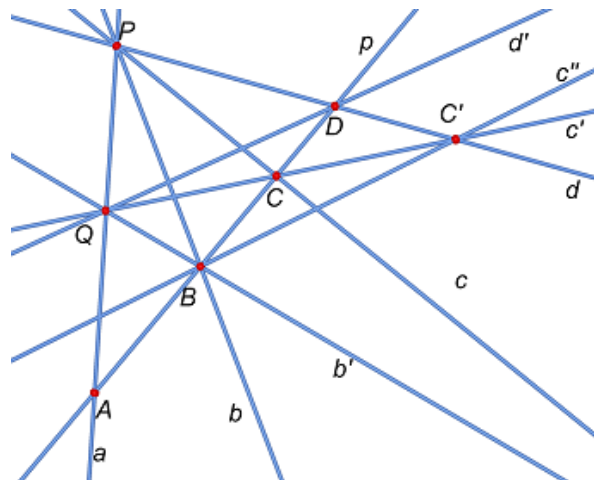
Sea  $QB = b'$ ,  $QC = c'$ ,  $QD = d'$ ,  $c' \cap d = C'$ ,  $BC' = c''$ . Entonces,

$$P(a, b, c, d) \bar{\lambda}^P Q(a, b', c', d') \bar{\lambda}^d B(b, b'c'', p) \bar{\lambda}^{c'} P(b, a, d, c)$$

Así,

$$P(a, b, c, d) \bar{\lambda} P(b, a, d, c)$$

Figura 4. Proyectividad.



En el ejemplo anterior se estableció la existencia de una proyectividad especial en la cual el correspondiente de  $a$  es  $a' = b$  y el correspondiente de  $b$  es  $b' = a$ . En una proyectividad de este tipo, se dice que el par de elementos  $a$  y  $a'$  se corresponde recíprocamente y si esto se da para todos los pares de puntos correspondientes son recíprocos, a la proyectividad se le llama involución. Así, tenemos que

**Definición 1.5** *Una involución es una proyectividad de tal forma que la correspondencia entre cualquier par  $x$  y  $x'$  ( $X$  y  $X'$ ) es recíproca.*

**Teorema 1.6** *Una involución está determinada por dos pares recíprocos.* <sup>1</sup>

**Ejemplo 2** *Dado el rango de puntos  $p(A, B, C, D)$ , construir una involución tal que*

$$l(A, B, C, D) \bar{\wedge} l(B, A, D, C)$$

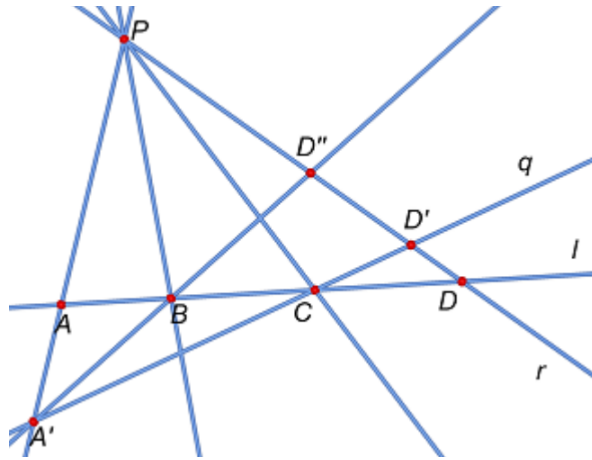
Véase la Figura 5. Proyectemos los puntos dados desde un punto  $P$  que no esté en  $l$ , tracemos cualquier recta  $q$  que pasa por  $C$  distinta de  $l$  y  $PC$ . Así, se obtienen los puntos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  y  $D'$  respectivamente, donde  $C' = C$ . Formando la recta  $A'B$ , encontramos el punto  $D''$  en la recta  $PD = r$ . Entonces,

$$l(A, B, C, D) \bar{\wedge}^P q(A', B', C', D') \bar{\wedge}^B r(D'', P, D, D'') \bar{\wedge}^{A'} l(B, A, C, D)$$

Finalmente,

$$l(A, B, C, D) \bar{\wedge} l(B, A, C, D)$$

Figura 5. Involución hiperbólica.



**Ejemplo 3** Dado el rango de puntos  $p(A, B, C, D)$ , construir una involución tal que

$$p(A, B, C, D) \bar{\wedge} p(C, D, A, B)$$

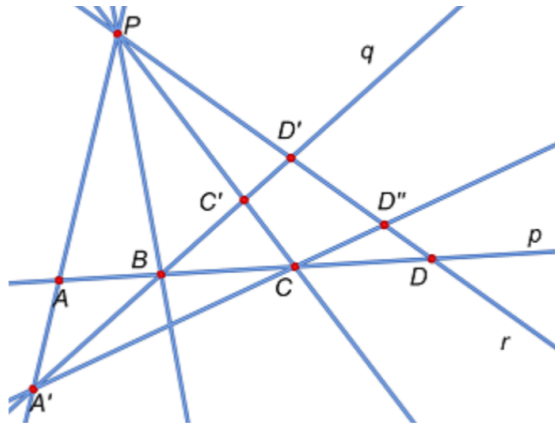
Considere la Figura 6. Proyectemos los puntos dados desde un punto  $P$  que no esté en  $p$ , tracemos cualquier recta  $q$  que pasa por  $B$  distinta de  $p$  y  $PB$ . Así, se obtienen los puntos  $A', B', C'$  y  $D'$  respectivamente, donde  $B' = B$ . Luego, la recta  $A'B$  interseca a la recta  $PD = r$ , en el punto  $D''$ . Entonces,

$$p(A, B, C, D) \bar{\wedge}^P q(A', B', C', D') \bar{\wedge}^C r(D'', D, P, D') \bar{\wedge}^{A'} p(C, D, A, B)$$

Luego,

$$p(A, B, C, D) \bar{\wedge} p(C, D, A, B)$$

Figura 6. Involución elíptica.



**Definición 1.7** *Dados cuatro puntos  $A, B, C, D$  en involución en una recta  $l$ , tal que el recíproco de  $A$  es  $C$  y el recíproco de  $B$  es  $D$ , decimos que los puntos  $A, C$  separan a los puntos  $B, D$  cuando  $C$  o  $A$  están entre  $B$  y  $D$ , ver Figura 6. Si esta condición no sucede, decimos que los puntos son no separados.*

En los ejemplos anteriores vimos dos involuciones importantes, si observamos en el Ejemplo 2 los pares recíprocos no están separados y en el Ejemplo 3, los pares recíprocos están separados. A partir de esto, definiremos una involución hiperbólica y elíptica.

**Definición 1.8** *Una involución donde los pares recíprocos son separados será llamada elíptica, de lo contrario será llamada hiperbólica.*

Los términos Elipse, parábola e Hipérbola en griego tienen significados que se asocian con el número de soluciones de determinados problemas:

- 1) Elíptica cuando no hay solución.
- 2) Hiperbólica cuando hay dos soluciones.
- 3) Parabólica cuando hay una única solución

En el caso de las involuciones, se llaman elípticas cuando sus puntos dobles son imaginarios conjugados, e hiperbólicas cuando sus puntos dobles son reales.

**Teorema 1.9** *Una involución hiperbólica tiene exactamente dos puntos dobles reales.*

<sup>2</sup>

**Teorema 1.10** *Una involución elíptica tiene exactamente dos puntos dobles.* <sup>2</sup>

**Definición 1.11** *Un par de puntos imaginarios conjugados, son los puntos dobles de una involución elíptica.*

Consideramos entonces que los puntos imaginarios son casos particulares de una configuración general en la que los puntos dejan de 'existir'. Es decir, los puntos ordinarios, los imaginarios y los del infinito, engloban distintos 'casos de figura' en una sola familia, permitiendo transformar unos en otros 'de manera continua'. Lo que conocemos como Principio de Continuidad. En este sentido no podemos caracterizar los objetos imaginarios de manera independientes sino por sus relaciones con otros objetos ordinarios. Por ejemplo, cuando consideramos una recta que corta un círculo y la desplazamos paralelamente hasta lograr que su distancia al centro sea mayor que el radio del círculo, los puntos de intersección dejan de existir y pasan a ser puntos imaginarios. En general estos puntos, así como los puntos ordinarios son elementos que se definen axiomáticamente mediante relaciones con otros objetos, como las rectas. Nuestro propósito no es exponer dicha axiomática. Sin embargo, a continuación enunciamos algunas de estas propiedades.

**Teorema 1.12** *Por un par de puntos imaginarios conjugados pasa una única recta real.* <sup>3</sup>

**Teorema 1.13** *Cada recta real que contiene un punto imaginario, contiene su imaginario conjugado.* <sup>3</sup>

---

<sup>2</sup> REV. JOHN J. MILNE. *An elementary treatise on cross-ratio geometry*. Cambridge university Press, 1911.

<sup>3</sup> J. L. S. HATTON. *The theory of the imaginary in geometry together with the trigonometry of the imaginary*. Cambridge university press, 1920.

**Teorema 1.14** Si un par de puntos imaginarios conjugadas coinciden, ellos coinciden en un punto real.<sup>3</sup>

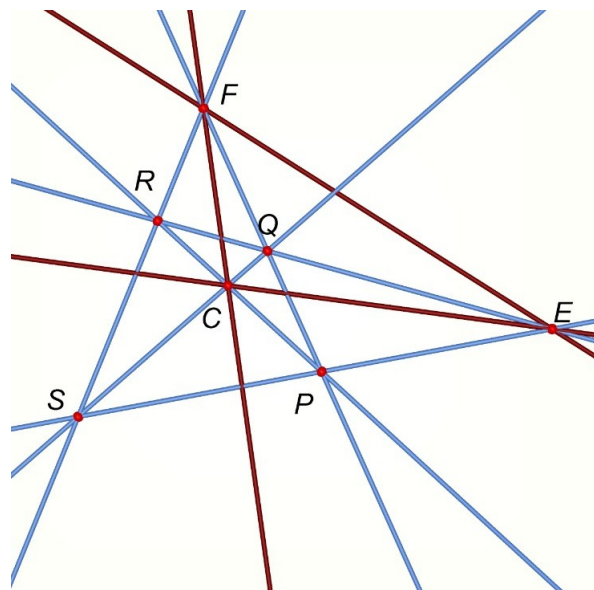
**Teorema 1.15** Cada recta imaginaria contiene uno y solo un punto real.<sup>3</sup>

**Teorema 1.16** El punto de intersección de un par de rectas imaginarias conjugadas es real.<sup>3</sup>

**Teorema 1.17** Si un par de rectas imaginarias conjugadas coinciden, ellas coinciden en una recta real.<sup>3</sup>

**Definición 1.18** Cuatro puntos  $S$ ,  $R$ ,  $Q$  y  $P$ , de los cuales no hay tres colineales, y las seis rectas (lados) determinadas por dichos puntos, se denomina cuadrángulo completo. Ver Figura 7.

Figura 7. Cuadrángulo Completo.



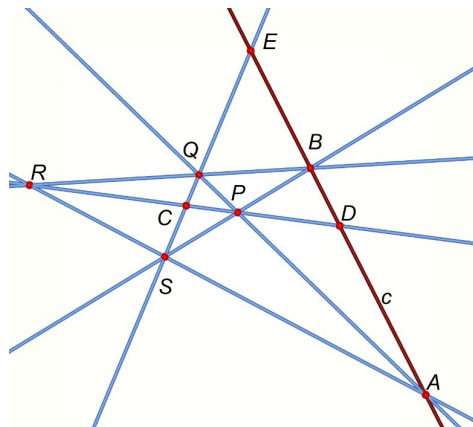
En la figura 7 los puntos  $F$ ,  $C$ ,  $E$  son llamados puntos diagonales y el triángulo  $FCE$  es llamado el triángulo diagonal del cuadrángulo completo. Además, las

rectas  $RS$  y  $QP$ ,  $RQ$  y  $SP$ ,  $PR$  y  $QS$  son lados opuestos del cuadrángulo, la razón de esto es debido a que se intersecan en los puntos diagonales del cuadrángulo completo.

Ahora definiremos el concepto de cuaterna armónica a partir del cuadrángulo completo.

**Definición 1.19** Considere la figura 8, el conjunto  $A, B, D, E$  de cuatro puntos, que resultan de intersecar los lados del cuadrángulo  $PQRS$  por el lado  $c$  de su triángulo diagonal. Se dice que cuatro puntos  $A, B, C, D$  colineales forman una cuaterna armónica (conjunto armónico, rango armónico) cuando existe un cuadrángulo completo que tiene dos lados opuestos por  $A$ , otros dos lados opuestos por  $B$ , mientras el tercer par de lados opuestos está individualmente por  $D$  y  $E$ . El punto  $D$  ( $E$ ) es llamado el conjugado armónico (cuarto armónico) de  $E$  ( $D$ ) con respecto a  $A$  y  $B$ .<sup>1</sup>

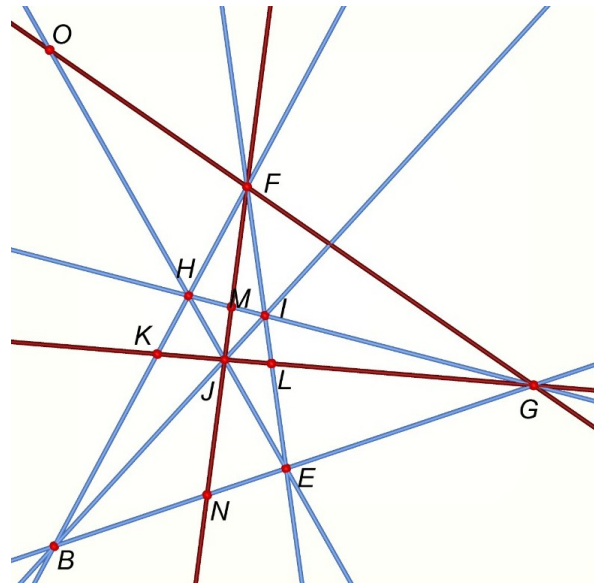
Figura 8. Cuaterna armónica



**Observación 1** En un cuadrángulo completo, dos vértices cualesquiera son colineales con un vértice de su triángulo diagonal. Así, en la Figura 9 cada lado del cuadrángulo interseca su triángulo diagonal en dos puntos, un punto diagonal y un punto adicional que llamaremos punto armónico asociado al cuadrángulo. Por ejemplo, el lado  $BH$  del cuadrángulo completo interseca al triángulo diagonal en el punto

diagonal  $F$  y en el punto armónico  $K$ . Es decir,  $FHKB$  es una cuaterna armónica, análogamente las otras cuaternas de puntos son armónicas.

Figura 9. Cuaternas armónicas en un cuadrángulo completo



**Observación 2** El siguiente teorema establece que cualquier par recíproco en una recta, forma una cuaterna armónica con los puntos dobles de la involución, esto es esencial, pues una involución queda determinada, a partir de una cuaterna armónica, y esta última por un cuadrángulo completo.

**Teorema 1.20** Si una involución tiene un elemento doble, tiene un segundo que es,

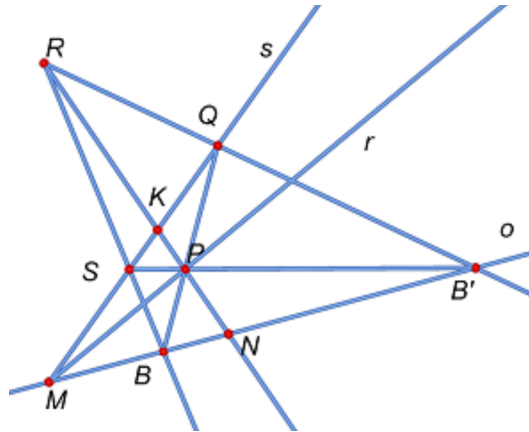
1. distinto del primero.
2. el conjugado armónico del primero con respecto a cualquier par recíproco.

1

**Demostración:** Consideremos una involución entre los puntos de una recta. Vea la Figura 10, donde la involución sobre  $o$  se determina por el punto doble  $M$  y cualquier

par recíproco  $B, B'$ . Sobre  $M$  tomemos dos rectas  $r$  y  $s$  distintas de  $o$ ; sobre  $r$  tomemos cualquier punto  $P \neq M$ . Sea  $BP \cap s = Q$ ,  $B'P \cap s = S$ ,  $BS \cap B'Q = R$ ,  $PR \cap s = K$  y  $PR \cap o = N$ .

Figura 10. Conjugados armónicos respecto a cualquier par recíproco.



1. Entonces  $o(M, N, B, B') \bar{\wedge}^P s(M, K, Q, S) \bar{\wedge}^R l(M, N, B', B)$  da  $N \neq M$  como el segundo punto doble.
2. Sobre  $o$  tome cualquier punto  $C$  distinto de  $M, N, B, B'$ . Sea  $CP \cap s = T$  y  $RT \cap o = C'$ . Ahora, por construcción, el par  $C, C'$  separa a  $M, N$  armónicamente, entonces  $M, N$  separa a  $C, C'$  armónicamente. Es claro que el par  $C, C'$  es cualquier par recíproco.

Ahora, introduciremos la noción de cuadrángulo semi real de primer y segundo tipo. En lo que resta del trabajo, en las figuras, las rectas y cónicas imaginarias serán representadas por rectas discontinuas y los puntos imaginarios por nombres entre paréntesis.

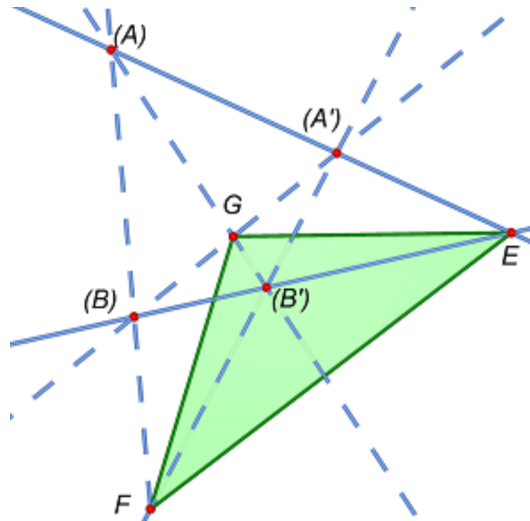
**Definición 1.21** *Cuadrángulo completo de primer tipo: Dos pares de puntos imaginarios conjugados  $A, A'$  y  $B, B'$  determinan:*

- *Un par de rectas reales y dos pares de rectas imaginarias conjugadas.*

- *Tres puntos reales, que son los puntos diagonales del cuadrángulo.*

3

Figura 11. Cuadrángulo completo de primer tipo.



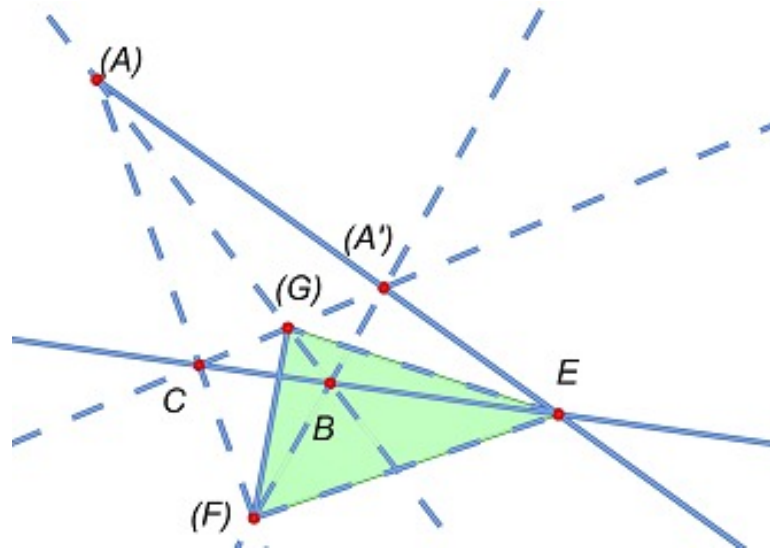
En la Figura 11, las rectas  $AA'$ ,  $BB'$  son reales. Además, los pares de rectas  $AB'$ ,  $BA'$  y  $AB$ ,  $A'B'$  son rectas imaginarias conjugadas. Observe que, los puntos  $E$ ,  $F$ ,  $G$  son reales, ya que la intersección de rectas imaginarias conjugadas es real y son los puntos diagonales del cuadrángulo.

**Definición 1.22** *Cuadrángulo completo de segundo tipo: Un par de puntos imaginarios recíprocos  $A$ ,  $A'$  y un par de puntos reales  $B$ ,  $C$  determinan:*

- *Un par de rectas reales y dos pares de rectas imaginarias.*
- *Un punto real y dos puntos imaginarios conjugados.*

3

Figura 12. Cuadrángulo completo de segundo tipo.

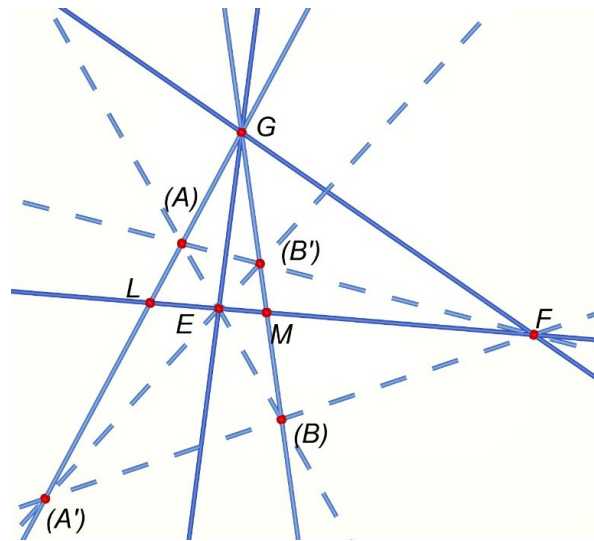


En la Figura 12, las rectas  $AA'$  y  $CB$  son reales, cuya intersección es el punto real  $E$ . Además, las rectas  $AB$ ,  $A'C$ ,  $A'B$ ,  $AC$  son imaginarias. Observe que los pares de rectas  $BA$ ,  $CA'$  y  $CA$ ,  $BA'$  son rectas imaginarias conjugadas, cuyos puntos de intersección son los puntos imaginarios conjugados  $G$  y  $F$ , por lo tanto la recta  $GF$  es real y las rectas  $EG$  y  $EF$  son imaginarias conjugadas.

**Teorema 1.23** *En un cuadrángulo completo de primer tipo, los rangos determinados por los lados reales o un lado real del triángulo diagonal son armónicos.*<sup>3</sup>

La Figura 13 ilustra la situación, donde el cuadrángulo completo viene dado por los puntos  $A$ ,  $A'$  y  $B$ ,  $B'$  imaginarios conjugados. Luego, los rangos  $GALA'$ ,  $GBMB'$  y  $LEMF$  forman cuaternas armónicas.

Figura 13. Cuaterna armónica en cuadrángulo completo de primer tipo.



Análogamente, para el cuadrángulo completo de segundo tipo, los rangos de puntos en las rectas reales, determinan cuaternas armónicas.

Los siguientes teoremas, nos permiten obtener una nueva involución a partir, de otras dos en una misma recta.

**Teorema 1.24** *Un par de puntos imaginarios conjugados y un par de puntos reales tienen siempre un par de conjugados armónicos reales.*<sup>3</sup>

**Teorema 1.25** *Dos pares de puntos imaginarios conjugados tienen siempre un par de conjugados armónicos reales.*<sup>3</sup>

Ahora, vamos a considerar dos involuciones en una misma recta. Observe que el teorema siguiente, es solo una consecuencia de los Teoremas 1.24 y 1.25.

**Teorema 1.26** *Dadas dos involuciones entre los puntos de una recta tenemos que:*

1. *Si las dos involuciones son hiperbólicas, entonces existe otra involución hiperbólica en la misma recta, cuyos pares recíprocos son los puntos dobles de la involuciones hiperbólicas.*

2. Si una involución es hiperbólica y la otra elíptica, entonces existe otra involución hiperbólica en la misma recta, cuyos pares recíprocos son los puntos dobles de las involuciones.
3. Si las dos involuciones son elípticas, entonces existe otra involución hiperbólica en la misma recta, cuyos pares recíprocos son los puntos dobles de las involuciones elípticas.

1

**Teorema 1.27** *El punto medio de los elementos dobles de una involución es siempre real.*<sup>4</sup>

**Definición 1.28** *El punto medio del Teorema 1.27, lo llamaremos el centro de la involución.*

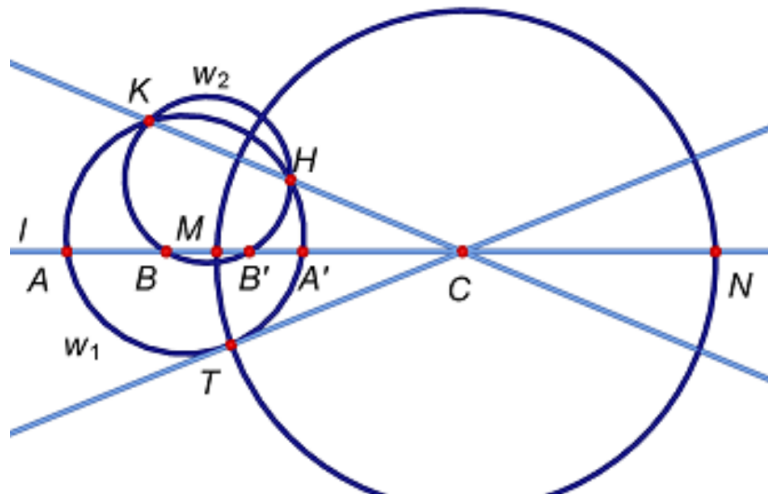
**Ejemplo 4** *Construya el centro y los puntos dobles de una involución hiperbólica.*<sup>4</sup>

Sean  $A, A'$  y  $B, B'$  pares recíprocos no separados en una recta  $l$ . Considere las circunferencias  $w_1$  que pasa  $A$  y  $A'$  y  $w_2$  que pasa por  $B$  y  $B'$  cuyos puntos de intersección determinan la recta  $KH$  e interseca a la recta  $l$  en  $C$ , donde  $C$  es el centro de la involución, como en la Figura 14. Ahora, tracemos una tangente desde  $C$  a cualquier circunferencia, siendo  $T$  el punto de tangencia. Si construimos una circunferencia  $w_3$  con centro  $C$  y radio  $CT$ , tenemos que la intersección con la recta  $l$  son los puntos dobles  $M$  y  $N$  de la involución.

---

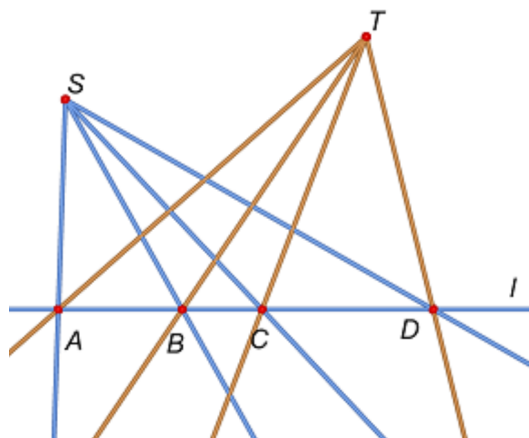
<sup>4</sup> A. G. PICKFORD. *Elementary projective geometry*. Cambridge university Press, 1909.

Figura 14. Centro y puntos dobles de una involución.



**Definición 1.29** Sean  $A, B, C, D$  puntos en involución en un recta, y considere dos haces de rectas. Decimos que los haces de rectas son proyectivos, si se intersecan en los puntos  $A, B, C, D$  como en la Figura 15.

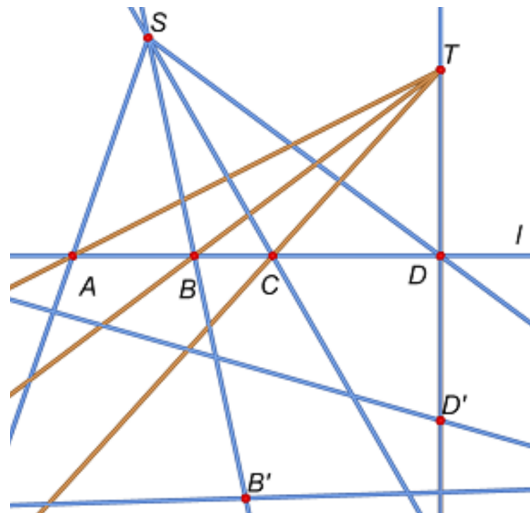
Figura 15. Hazes proyectivos en perspectiva.



**Observación 3** En la definición de haces proyectivos, no es necesario que la involución esté definida sobre una recta  $l$ , pues la involución es invariante mediante proyección. Vea la Figura 16, donde  $B$ , el recíproco de  $A$  mediante proyección es

$B'$ , no está en la recta  $l$ , similarmente con el punto  $C$ . Cuando esto sucede, decimos que los puntos  $A$  y  $C$  están en involución con los puntos  $B'$  y  $D'$ . Cuando los haces proyectivos se intersecan en una recta, decimos que los haces proyectivos están en perspectiva, véase la Figura 15.

Figura 16. Hazes proyectivos



## 1.2. TEORÍA DE LA POLAR DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CÓNICA

En esta sección mostraremos la relación entre cónicas y rectas que están en involución. Para lograr esto, usaremos el concepto de la polar de un punto respecto a una cónica.

**Definición 1.30** *Una cónica es el lugar geométrico de las intersecciones de los rayos correspondientes de dos haces proyectivos que no están en perspectiva.*<sup>3</sup>

En las Figuras 17 y 18, los puntos  $S$  y  $T$  son puntos reales o imaginarios;  $SA, SB, SC$  tres rectas, reales o imaginarias, a través de  $S$ , y  $TA, TB, TC$  tres rectas, reales o imaginarias, a través de  $T$ .

Figura 17. Cónica proyectiva real.

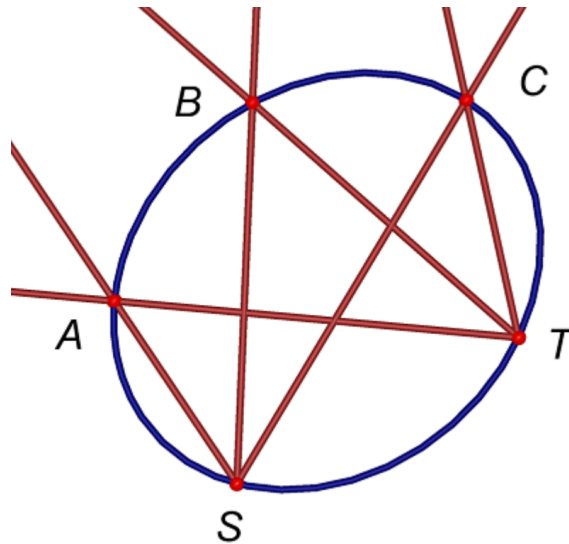
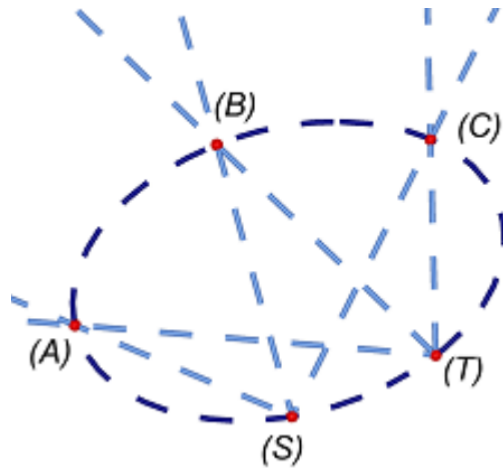


Figura 18. Cónica proyectiva imaginaria.

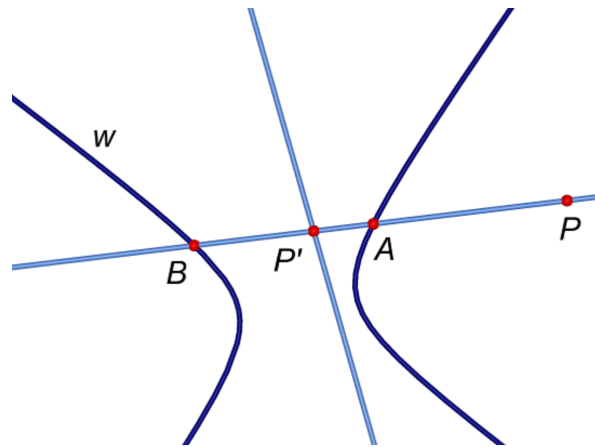


**Observación 4** *La Definición 1.30 permite determinar cuándo un lugar geométrico es una cónica.*

**Teorema 1.31** *Si  $P$  es un punto en el plano de una cónica, y se traza cualquier cuerda a través de él, el lugar geométrico del cuarto armónico de  $P$  respecto a los puntos en los que la cónica interseca a la cuerda es una recta.<sup>2</sup>*

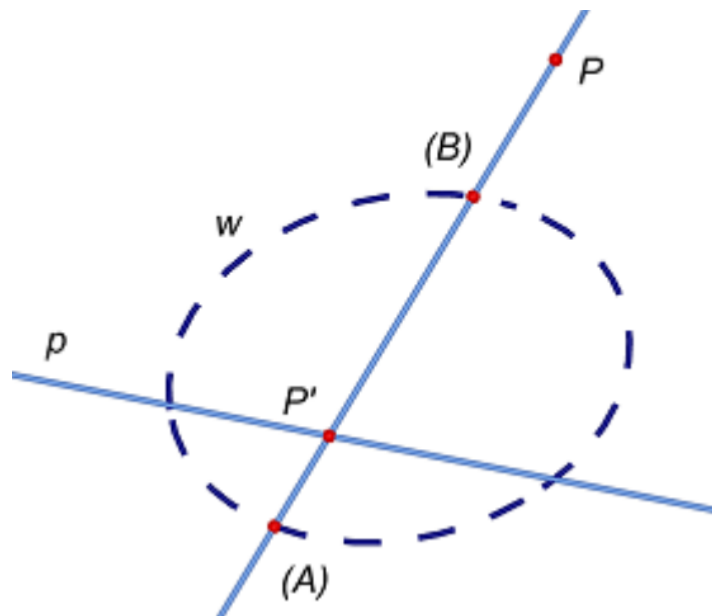
Considere la Figura 19, donde la cuerda a través de  $P$  interseca a la cónica  $w$  en  $A$  y  $B$ . Si construimos  $P'$  el conjugado armónico de  $P$  para  $A$  y  $B$  y dejamos que  $A$  sea libre en la cónica, entonces el lugar geométrico descrito por  $P'$  respecto a  $A$  es una recta. Luego, es suficiente construir dos puntos de este lugar geométrico, para esto usamos la definición 1.19

Figura 19. Lugar geométrico del cuarto armónico para una cónica real.



Similarmente, en la cónica imaginaria de la Figura 20,  $P'$  es el conjugado armónico de  $P$ , respecto al par de puntos imaginarios conjugados  $A$  y  $B$ .

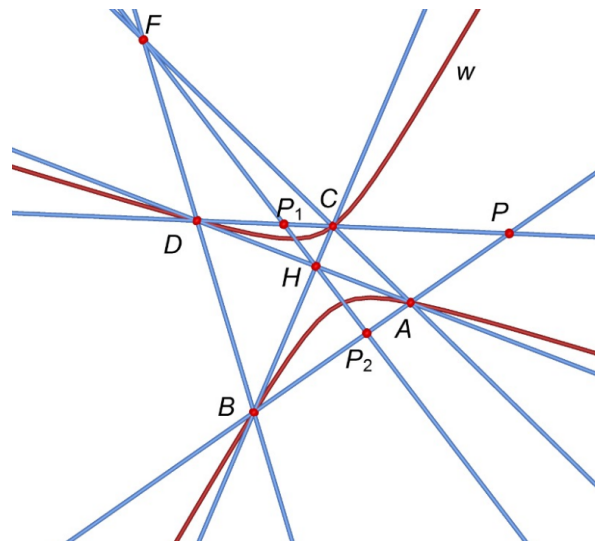
Figura 20. Lugar geométrico del cuarto armónico para una cónica imaginaria.



**Ejemplo 5** *Construya el lugar geométrico mencionado en el Teorema 1.31<sup>2</sup>*

Sea  $P$  un punto en el plano de la cónica  $w$ , trace dos cuerdas a través de  $P$ , estas cuerdas intersecan a  $w$  en  $A, B, C$  y  $D$ , como en la Figura 21. Luego, las rectas  $BD$  y  $AC$  se intersecan en el punto  $F$ , similarmente las rectas  $BC$  y  $DA$  en el punto  $H$ . Así, por el Teorema 1.19, los puntos  $DP_1CP$  y  $BP_2AP$  forman cada uno, una cuaterna armónica. Es decir, la recta  $P_1P_2$  es el lugar geométrico del cuarto armónico de  $P$  para los puntos en los cuales  $w$  interseca la cuerda.

Figura 21. Construcción de la polar de un punto respecto a una cónica.



**Definición 1.32** *En el Teorema 1.31, llamamos polar de  $P$ , respecto a la cónica, a la recta del lugar geométrico del cuarto armónico de  $P$ .*

**Definición 1.33** *Si  $p$  es una recta, entonces el polo de  $p$  es el punto  $P$  tal que  $p$  es la polar de  $P$ .*

**Teorema 1.34** *Teorema de reciprocidad:*

1.  $P$  está en la polar de  $Q$  si y sólo si  $Q$  está en la polar de  $P$ .
2.  $p$  está en el polo de  $q$  si y sólo si  $q$  está en el polo de  $p$ .

2

**Definición 1.35** *Sea  $w$  una cónica, se tiene que:*

1. Dos puntos  $A$  y  $B$  son puntos conjugados con respecto a  $w$  si cada uno se encuentra en la polar del otro.
2. Dos rectas  $a$  y  $b$  son rectas conjugadas con respecto a  $w$  si cada una pasa a través del polo de la otra.

**Teorema 1.36** *Los pares de puntos en una recta que son conjugados respecto a una cónica forman una involución desde el polo de la recta, véase la Figura 22.*

*Donde:*

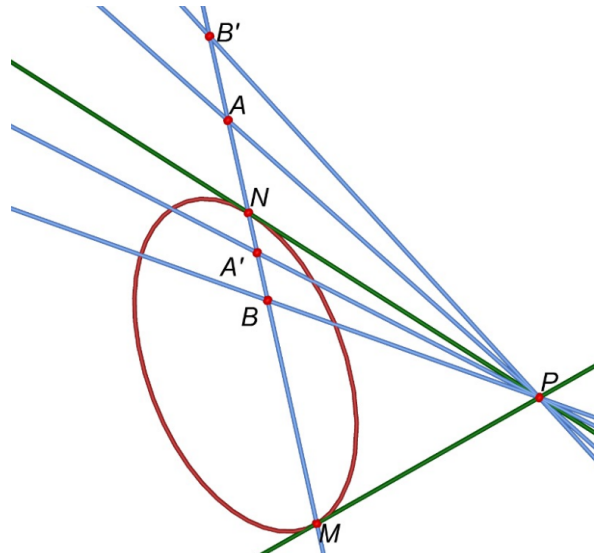
1. Los puntos dobles reales o imaginarios conjugados son la intersección de la recta con la cónica.
2. Las rectas dobles reales o imaginarias conjugadas son las tangentes desde el polo de la recta a la cónica.

5

---

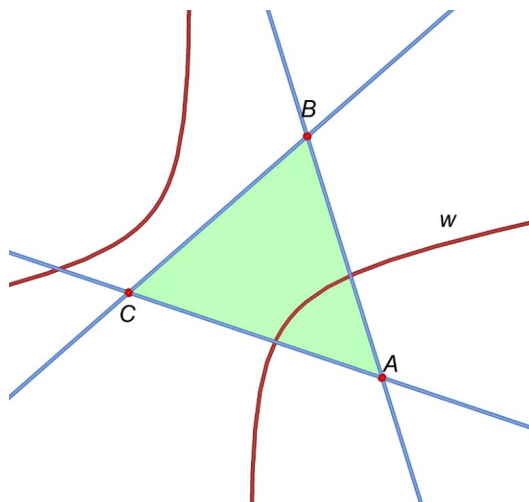
<sup>5</sup> JOHN WELLESLEY RUSSELL. *An elementary treatise on pure geometry with numerous examples.* Oxford at the clarendon press, 1905.

Figura 22. Los pares conjugados respecto a una cónica forman una involución.



**Definición 1.37** *Un triángulo es autopolar respecto a una cónica, si cada vértice es el polo del lado opuesto. Aquí, los lados se consideran rectas, vea la Figura 23.*<sup>2</sup>

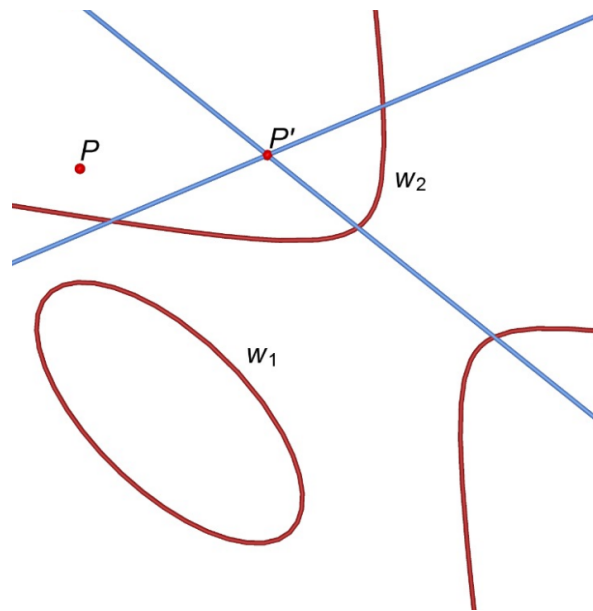
Figura 23. Triángulo autopolar.



Ahora, extenderemos los Teoremas 1.31, 1.36 y la Definición 1.37 a dos cónicas en un mismo plano.

**Teorema 1.38** Dado un punto  $P$  en el plano de dos cónicas  $w_1$  y  $w_2$ , el conjugado común de  $P$  es el punto  $P'$  que es la intersección de las polares de  $P$  respecto a  $w_1$  y  $w_2$ , observe la Figura 24 que ilustra la situación.<sup>6</sup>

Figura 24. Puntos conjugados comunes a dos cónicas.



**Teorema 1.39** El lugar geométrico de los puntos conjugados comunes para dos cónicas, de todos los puntos que se encuentran en una recta dada, es una cónica.<sup>6</sup>

**Demostración:**

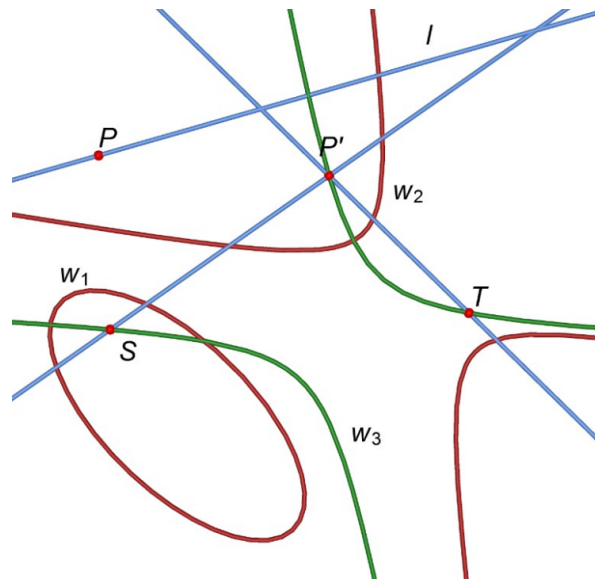
Sea  $P$  cualquier punto en una recta  $l$ . Considere  $S$  y  $T$  los polos de la recta  $l$  respecto a las cónicas  $w_1$  y  $w_2$ , vea la Figura 25. Las polares de  $P$  respecto a  $w_1$  y  $w_2$  son dos rectas  $SP'$  y  $TP'$  que pasan a través de  $S$  y  $T$  se intersecan en  $P'$  que es el punto conjugado común de  $P$  respecto a  $w_1$  y  $w_2$ . Ya que  $P$  es libre en la recta  $l$ ,  $SP'$  y  $TP'$  describen dos haces a través de  $S$  y  $T$  que están en involución con el rango descrito

---

<sup>6</sup> J. L. S. HATTON. *The principles of projective geometry applied to the straight line and conic.* Cambridge university Press, 1913.

por  $P$  y, por lo tanto, son proyectivos entre sí. Luego, por la Definición 1.30 el lugar geométrico es una cónica  $w_3$ .

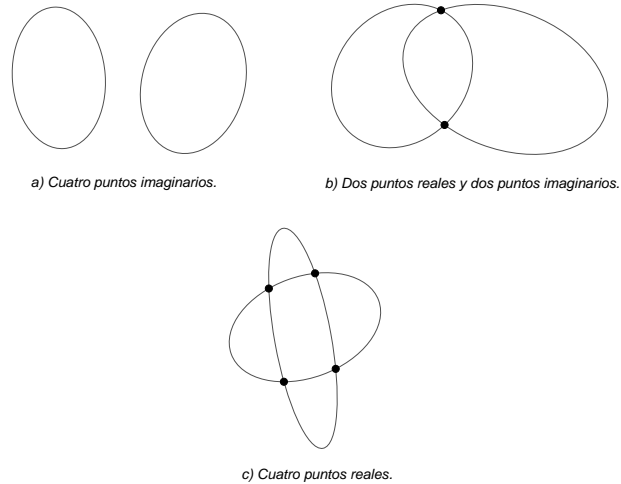
Figura 25. La cónica  $w_3$ , es el lugar geométrico buscado.



**Teorema 1.40** *Dos cónicas se intersecan en cuatro puntos reales, o en dos puntos reales y dos puntos imaginarios, o en cuatro puntos imaginarios.*<sup>5</sup>

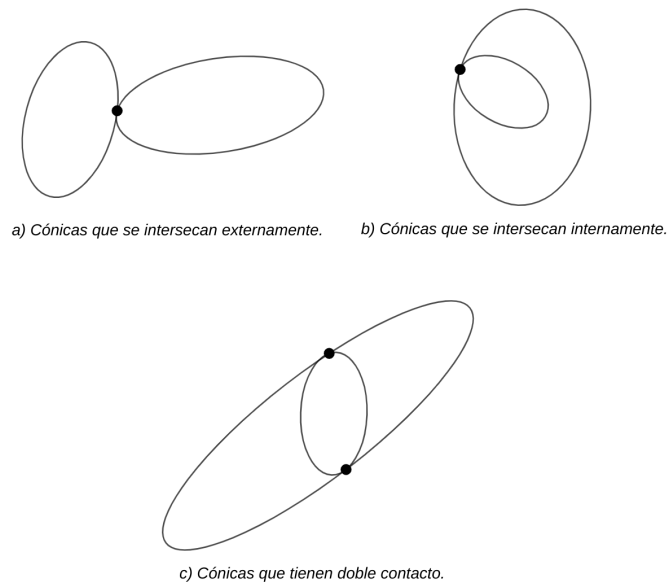
Observe la Figura 26 que ilustra la situación del teorema anterior.

Figura 26. Intersección de dos cónicas.



Además, de las configuraciones presentadas en la Figura 26, tenemos otras configuraciones como en la Figura 27. En todo estos casos el Teorema 1.40 es válido.

Figura 27. Casos especiales de dos cónicas.



**Teorema 1.41** *Dos cónicas tienen un triángulo autopolar común real, excepto cuan-*

do las cónicas se intersecan en solo dos puntos reales, en cuyo caso dos vértices del triángulo autopolar son imaginarios. <sup>5</sup>

**Demostración:** El lugar geométrico de los puntos conjugados de los puntos en las rectas  $l$  y  $g$  respecto a las cónicas  $w_1$  y  $w_2$  son dos cónicas  $c_1$  y  $c_2$ . Además, el conjugado del punto  $l \cap g$  respecto a  $w_1$  y  $w_2$  debe estar en la intersección de las cónicas  $c_1$  y  $c_2$ , entonces por la definición 1.2 las cónicas  $c_1$  y  $c_2$  se intersecan en otro punto real  $P$ . Sean  $P_l$  y  $P_g$  los puntos conjugados de  $P$  en las rectas  $l$  y  $g$ . Dado que  $P_l$  y  $P_g$  son conjugados de  $P$  con respecto a  $w_1$ ,  $P_lP_g$  es la polar de  $P$  con respecto a  $w_1$ . De manera similar, es la polar de  $P$  con respecto a  $w_2$ . Por lo tanto,  $P_lP_g$  es la polar común de  $w_1$  y  $w_2$ , véase la Figura 28.

En cuanto a los puntos de intersección de la recta  $P_lP_g$  y las dos cónicas, pueden darse los siguientes casos, que comprenden el orden en que aparecen en la recta:

Caso 1 : los puntos son reales en el siguiente orden  $A, B, B'$  y  $A'$ , de manera que  $A, A'$  y  $B, B'$  son puntos no separados.

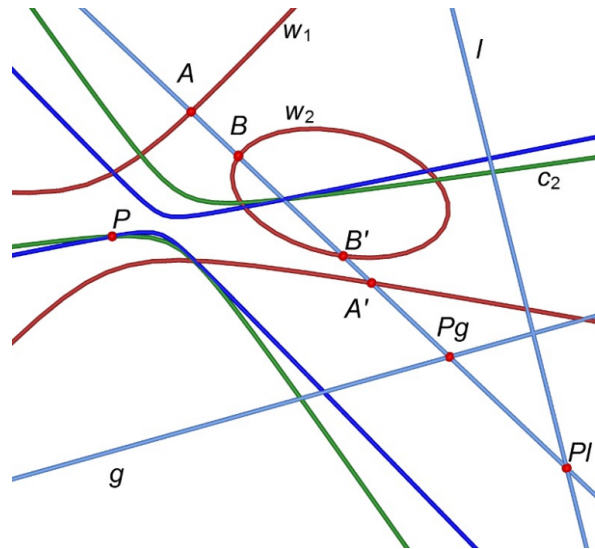
Caso 2 : Nuevamente los puntos son reales en el siguiente orden  $A, B, A'$  y  $B'$  de manera que los puntos  $A, A'$  y  $B, B'$  son separados.

Caso 3 : Los puntos  $A, A'$  son reales, mientras que  $B, B'$  son puntos imaginarios conjugados.

Caso 4 : En cuatro puntos  $A, A'$  y  $B, B'$  imaginarios conjugados respectivamente.

Los vértices del triángulo auto-polar común situados en la recta  $P_lP_g$  son los conjugados armónicos comunes de los puntos  $A, A'$  y  $B, B'$ , es decir, los elementos dobles de la involución.

Figura 28. Triángulo autopolar a dos cónicas.



Para cada uno de los cuatro casos anteriores, tenemos las siguientes posibilidades para los puntos dobles respectivamente:

Caso 1 : Los elementos dobles  $M$  y  $N$  son reales, pues los puntos son no separados, entonces la involución es hiperbólica.

Caso 2 : Los puntos dobles  $M$  y  $N$  son imaginarios conjugados, pues los puntos son separados, por lo tanto la involución es elíptica.

Caso 3 : Los puntos dobles son reales, pues  $M$  y  $N$ , son conjugados armónicos de dos puntos reales y un par de puntos imaginarios conjugados.

caso 4 : Los elementos dobles son reales, pues  $M$  y  $N$  son conjugados armónicos de dos pares de puntos imaginarios conjugados.

Observe que los casos 3) y 4) son consecuencia del Teorema 1.26.

**Teorema 1.42** *El triángulo autopolar común a dos cónicas es único.*<sup>5</sup>

**Demostración:**

1) Si  $U$  y  $V$  son dos puntos que tienen la misma polar para las cónicas  $w_1$  y  $w_2$ , entonces las polares de  $U$  y  $V$  se intersectan en un único punto  $W$ . Luego, el triángulo autopolar  $UVW$  a  $w_1$  y  $w_2$  es único.

2) Si existe un punto  $P$  que tiene la misma polar para  $w_1$  y  $w_2$ . Esta polar interseca a las cónicas  $w_1$  y  $w_2$  en cuatro puntos, como en la Figura 28. Luego, por el Teorema 1.41, existen dos puntos dobles  $U$  y  $V$  (reales o imaginarios) únicos. Por lo tanto, el triángulo  $PVW$  es único.

**Definición 1.43** *Llamamos cuerda común de dos cónicas, a la recta determinada por dos puntos de intersección de dichas cónicas (reales o imaginarios).*

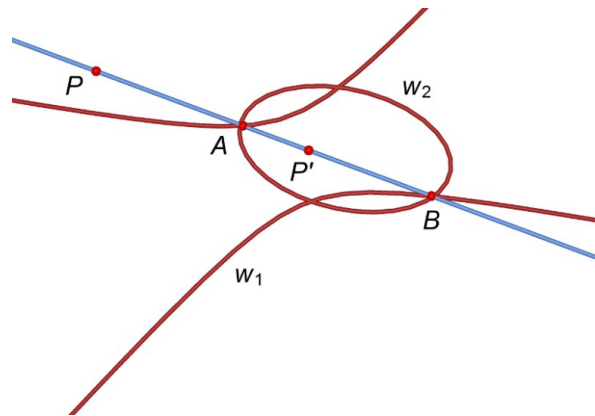
Las cuerdas comunes, las podemos construir gracias a la siguiente propiedad.

**Teorema 1.44** *En una cuerda común a dos cónicas, la involución de los puntos conjugados es igual en cada cónica, siendo los puntos dobles los puntos de intersección de las dos cónicas.*<sup>2</sup>

**Demostración:**

Del Teorema 1.36, los puntos dobles reales o imaginarios a las dos cónicas deben ser los puntos de intersección de las cónicas. Ahora, considere  $P$  en la cuerda  $AB$  común a las cónicas  $w_1$  y  $w_2$ , como en la Figura 29. Ya que,  $A$  y  $B$  son puntos dobles de la involución, entonces por Teorema 1.31,  $P'$  es el conjugado armónico de  $P$  para los puntos dobles. Es decir, las polares de  $P$  respecto a  $w_1$  y  $w_2$  se intersecan en  $P'$ . Así, la involución de los puntos conjugados en la cuerda común es igual en cada cónica.

Figura 29. Cuerda común a dos cónicas



**Observación 5** *El Teorema 1.44 implica que las cuerdas comunes pasan por los vértices del triángulo autopolar común, pues cada vértice tiene la misma polar respecto a las dos cónicas.*

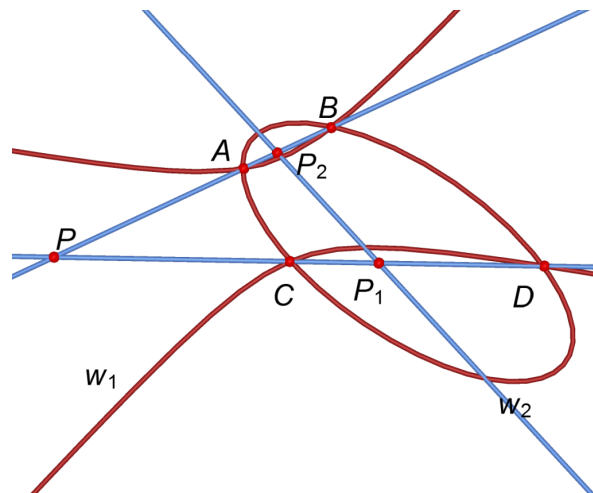
El siguiente teorema establece la relación entre un par de cuerdas comunes y el triángulo autopolar común de dos cónicas.

**Teorema 1.45** *La intersección de un par de cuerdas comunes de dos cónicas tiene la misma polar respecto a las cónicas. <sup>2</sup>*

**Demostración:**

En la Figura 30, las cuerdas comunes reales o imaginarias  $AB$ ,  $CD$  a  $w_1$  y  $w_2$  se intersectan en  $P$ , entonces por el Teorema 1.44 las dos polares de  $P_1$  respecto a  $w_1$  y  $w_2$ , intersecan a  $AB$  en  $P_1$  y similarmente intersecan a  $CD$  en  $P_2$ , por lo tanto las polares con respecto a  $w_1$  y  $w_2$  son coincidentes.

Figura 30. Relación entre cuerdas comunes y el triángulo autopolar a dos cónicas.



**Observación 6** El Teorema 1.45 implica que las cuerdas comunes a dos cónicas vienen por pares. Además, del Teorema 1.41 se deduce que al menos un par de cuerdas comunes a dos cónicas siempre es real.

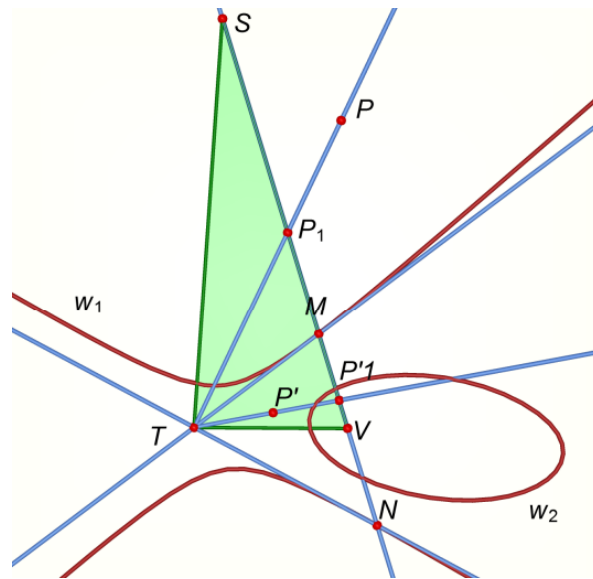
**Ejemplo 6** Construya las cuerdas comunes a dos cónicas.<sup>5</sup>

- 1) Si los 4 puntos de intersección son reales, entonces por la definición 1.43 hay tres pares de cuerdas comunes reales a las dos cónicas.
- 2) Si los cuatro puntos de intersección son imaginarios, entonces por el Teorema 1.41 el triángulo autopolar  $TVS$  a las dos cónicas  $w_1$  y  $w_2$  es real. Sea  $P$  un punto en el interior del triángulo autopolar  $TVS$  y  $P'$  el conjugado común de  $P$  respecto a  $w_1$  y  $w_2$ .

Además, los vértices del triángulo  $TVS$  son conjugados con respecto a  $w_1$  y  $w_2$ , entonces por Teorema 1.36  $P, P'$  y cualquiera dos vértices del triángulo  $TVS$  forman una involución desde el polo de alguno de los lados del triángulo  $TVS$ . Considerando  $T$  el vértice para el cual la involución es hiperbólica y  $P'$  un punto en el interior del ángulo determinado por los rayos  $TV$  y  $TS$  o en su opuesto por el vértice. Sean  $P_1$  y  $P'_1$  las intersecciones de la recta  $SV$  con las rectas  $TP$  y  $TP'$ , como en la Figura 31.

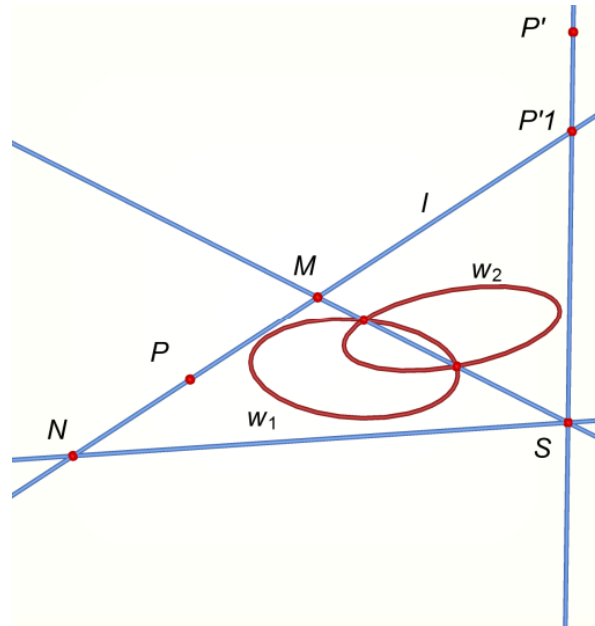
Luego, los puntos dobles  $M$  y  $N$  de la involución determinada por  $V, S, P_1$  y  $P'_1$  en la recta  $SV$ , definen las cuerdas comunes a  $w_1$  y  $w_2$ ,  $TN$  y  $TM$ .

Figura 31. Cuerdas comunes a dos cónicas que se intersecan en cuatro puntos imaginarios.



3) Si dos puntos de intersección son reales, entonces por el Teorema 1.41 solo un vértice  $S$  del triángulo autopolar a las cónicas  $w_1$  y  $w_2$  es real. Considere la cuerda común  $AB$  a  $w_1$  y  $w_2$  que interseca a la recta  $l$  en  $M$ , donde  $M$  es un punto doble de la involución en  $l$  desde  $S$ . Luego, es suficiente tomar un punto  $P$  en  $l$  y obtener su conjugado común  $P'$  y proyectarlo desde  $S$  a la recta  $l$  en el punto  $P'_1$ , vea la Figura 32. Así, en la recta  $l$  formamos una involución desde  $S$ , donde los pares recíprocos son  $P, P'_1$  y  $M$ . Por lo tanto, por el Teorema 1.20 es suficiente construir el conjugado armónico de  $M$  que es  $N$  respecto a  $P$  y  $P'_1$ . Finalmente la recta  $NS$  es otra cuerda común a  $w_1$  y  $w_2$

Figura 32. Cuerdas comunes a dos cónicas que se intersectan en dos puntos imaginarios y dos puntos reales.



Antes de finalizar este capítulo, enunciaremos algunos resultados sobre diámetros conjugados en una cónica, que desempeñan un papel fundamental para hallar las secciones circulares de un cono de base cónica.

**Teorema 1.46** *El centro de una cónica es el polo de la recta del infinito.* <sup>6</sup>

**Definición 1.47** *Dos diámetros de una cónica, cada uno de los cuales pasa por el polo de la otra, se denominan diámetros conjugados de la cónica.*

**Teorema 1.48** *Si cada diámetro de una cónica es perpendicular a su diámetro conjugado, la cónica es un círculo.* <sup>6</sup>

El siguiente teorema nos permite mostrar que todos los círculos tienen dos puntos en común.

**Teorema 1.49** *Cada par de círculos determina la misma involución en la recta del infinito.*

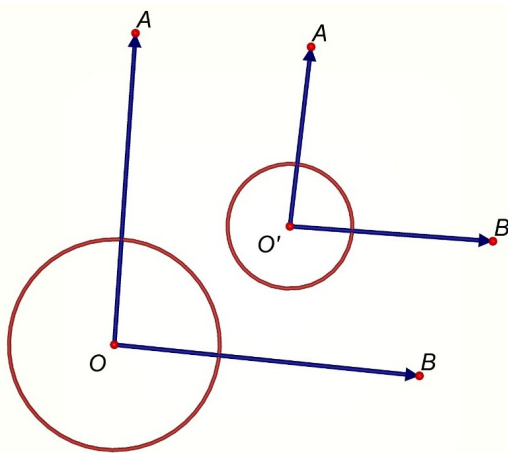
**Demostración:**

Sean  $O$  y  $O'$  los centros de dos círculos  $c_1$  y  $c_2$ . Entonces  $O$  y  $O'$  son los polos de la recta del infinito respecto a estos círculos, y pares de rectas conjugadas a través de  $O$  y  $O'$  intersecan a la recta del infinito en pares de puntos conjugados de la involución determinada por  $c_1$  y  $c_2$ .

Sea  $OA$  una recta, entonces su recta conjugada es la recta  $OB$  perpendicular a  $OA$  en  $O$ . Considere dos rectas  $O'A$  y  $O'B$  paralelas a las rectas  $OA$  y  $OB$  pasando por  $O'$ . Es claro que las rectas  $O'A$  y  $O'B$  son perpendiculares en  $O'$ , por lo tanto son rectas conjugadas respecto a  $c_2$ . Luego  $OA$ ,  $OB$  y  $O'A$ ,  $O'B$  determinan el mismo par de puntos conjugados en la recta del infinito. Ya que  $OA$  y  $OB$  son cualquier par de rectas conjugadas, la involuciones determinadas por los círculos en la recta del infinito es la misma. Dado que la involución es elíptica, existen dos puntos dobles imaginarios conjugados, que son llamados los **puntos circulares del infinito** (puntos circulares, puntos cíclicos) y todos los círculos los contienen, ver Figura 33

6

Figura 33. Puntos circulares del infinito.



El próximo teorema nos permite caracterizar un círculo

**Teorema 1.50** *Cada cónica (real o imaginaria) que contiene los puntos circulares*

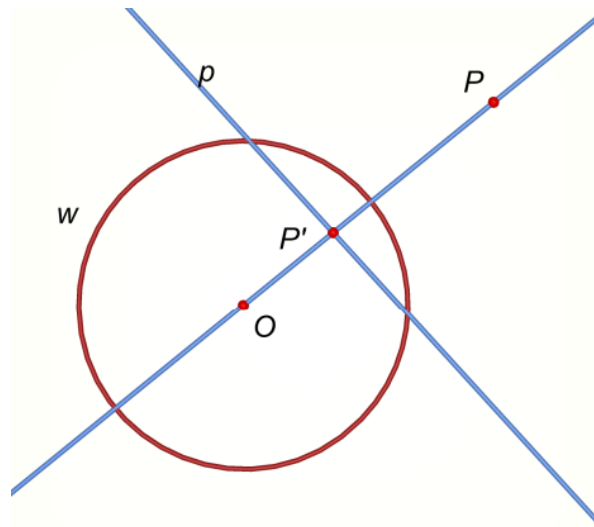
del infinito es un círculo (real o imaginario).<sup>2</sup>

Ahora mostraremos algunos teoremas sobre la polar de un punto respecto a un círculo (real o imaginario).

**Teorema 1.51** *Dado un círculo  $w$  con centro  $O$  y radio  $r$ . La polar de  $P$  es la recta  $p$  que es perpendicular a  $OP$  y pasa a través de  $P'$  que es el conjugado armónico de  $P$ , respecto a los puntos de intersección de  $OP$  y  $w$ . Además, se cumple que  $OP \cdot OP' = r^2$ .<sup>6</sup>*

La Figura 34 ilustra la situación del teorema anterior, donde la recta  $p$  es perpendicular a  $OP$ .

Figura 34. Polar de un punto con respecto a un círculo real.

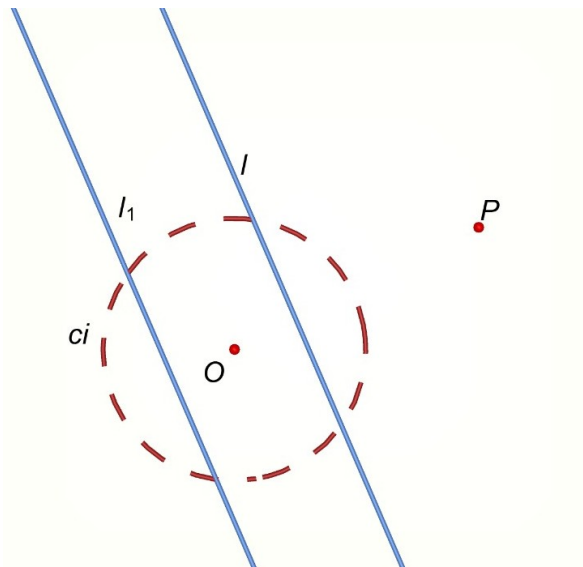


Observe que en el Teorema 1.51, la relación  $OP \cdot OP' = r^2$  solo contiene al centro del círculo y al radio al cuadrado. Si consideramos el cuadrado del radio negativo, obtenemos la siguiente propiedad de la polar de un punto respecto al círculo imaginario.

**Teorema 1.52** *La polar de un punto  $P$  respecto al círculo imaginario  $c_i$  con centro  $O$  y radio  $r$ , es simétrica respecto a  $O$ , de la polar de un círculo real con centro  $O$  y radio  $r$ .<sup>7</sup>*

Considere la Figura 35, donde la polar de  $P$  respecto a  $c_i$  es  $l_1$ , es decir, la simetría central de  $l$  respecto a  $O$ , donde  $l$  es la polar de  $P$  respecto al círculo real con igual radio y centro.

Figura 35. Polar de un punto con respecto al círculo imaginario.



---

<sup>7</sup> M. CHASLES. *Traité de géométrie supérieure*. Bachelier, Imprimeur-Libraire, 1852.

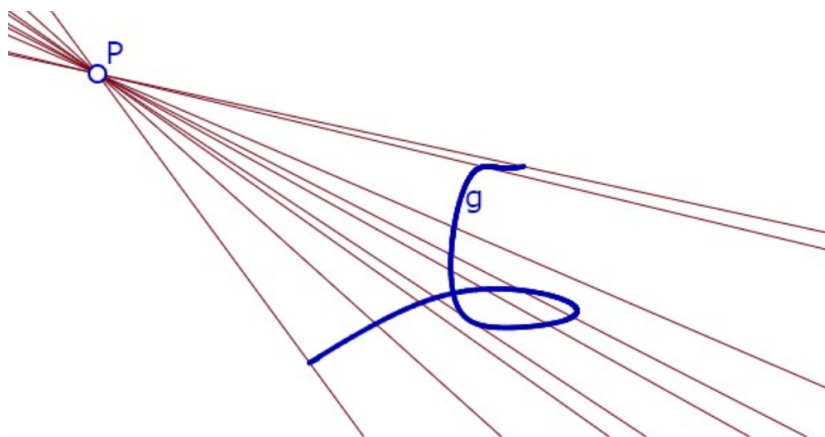
## 2. EL CONO DE BASE CÓNICA

En este capítulo mostraremos cómo construir las secciones circulares de un cono de segundo grado, sabiendo que se encuentran en planos paralelos a los planos cíclicos, que a su vez se pueden definir a partir de las cuerdas comunes de la cónica y un círculo imaginario.

### 2.1. EJES DEL CONO

**Definición 2.1** *Dada una curva  $g$  en un plano y un punto  $P$  exterior a él, llamamos cono al haz de rectas que va a través de  $P$  y  $g$ .*

Figura 36. Ejemplo de cono.



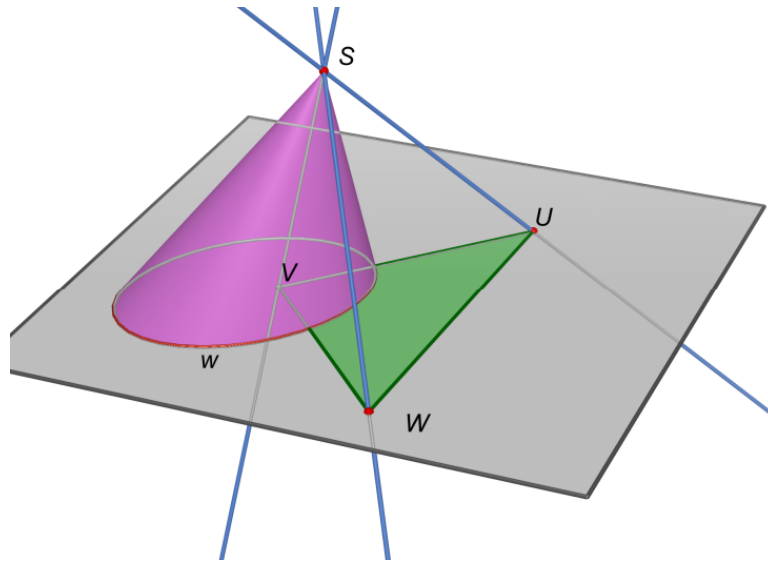
**Definición 2.2** *Decimos que un cono  $k$  es de base cónica, si la curva  $g$  de la definición 2.1 es una cónica.*

De ahora en adelante,  $k$  denotará un cono de base cónica, con vértice  $S$  y base cónica  $c$ .

**Definición 2.3** *Llamamos eje del cono  $k$ , a cualquier recta que pase por del vértice.*

**Definición 2.4** Considere un triángulo  $UVW$  autopolar a la cónica  $c$ . Los ejes  $SU$ ,  $SV$  y  $SW$  son llamados sistema de ejes conjugados de  $k$ . La Figura 37 muestra la situación.<sup>8</sup>

Figura 37. Sistema de ejes conjugados.



Denotaremos por  $k_i$  al cono circular recto, con base el círculo imaginario  $c_i$  y cuya altura es igual al radio de  $c_i$ .

La siguiente demostración es una aportación del presente trabajo.

**Teorema 2.5** En el cono  $k_i$ , todos los sistemas de ejes conjugados son perpendiculares.

**Demostración:**

Considere  $O$  el centro de  $c_i$  y  $UVW$  el triángulo autopolar a  $c_i$ . Entonces por la definición 2.4 los ejes  $SU$ ,  $SV$  y  $SW$  son un sistema de ejes conjugados del cono

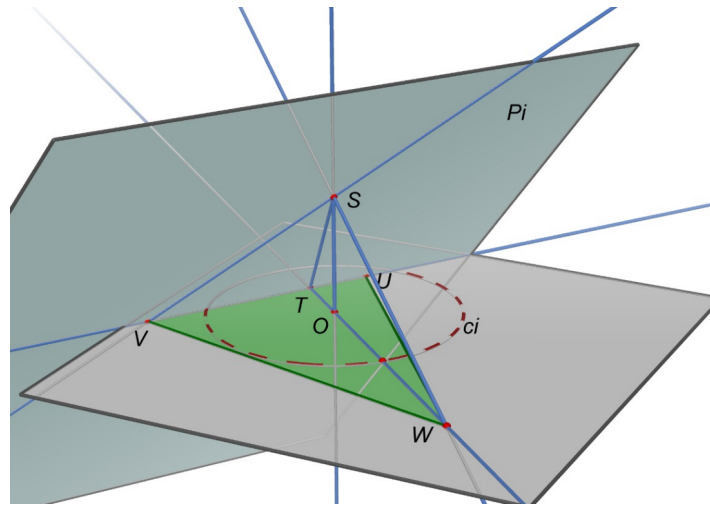
---

<sup>8</sup> M. CHASLES. *Two geometrical memoirs of the general properties of cones of the second degree and on the spherical conics*. Dublin university press, 1837.

$k_i$  con vértice  $S$ . Para demostrar que  $SU$ ,  $SV$  y  $SW$  son perpendiculares basta ver, sin pérdida de generalidad, que  $SW$  es perpendicular a dos rectas cualesquiera distintas del plano determinado por  $SV$  y  $SU$ , al cual llamaremos  $\pi$ . Si consideramos  $H$  la intersección de la recta  $UV$  y el círculo real de centro y radio igual al círculo imaginario  $c_i$ , y  $T$  el punto de intersección de la recta  $UV$  y  $OW$ ; tenemos que las rectas  $SH$  y  $ST$  están en el plano  $\pi$ , por lo tanto la demostración se completa mostrando que  $SW$  es perpendicular a  $ST$  y a  $SH$ .

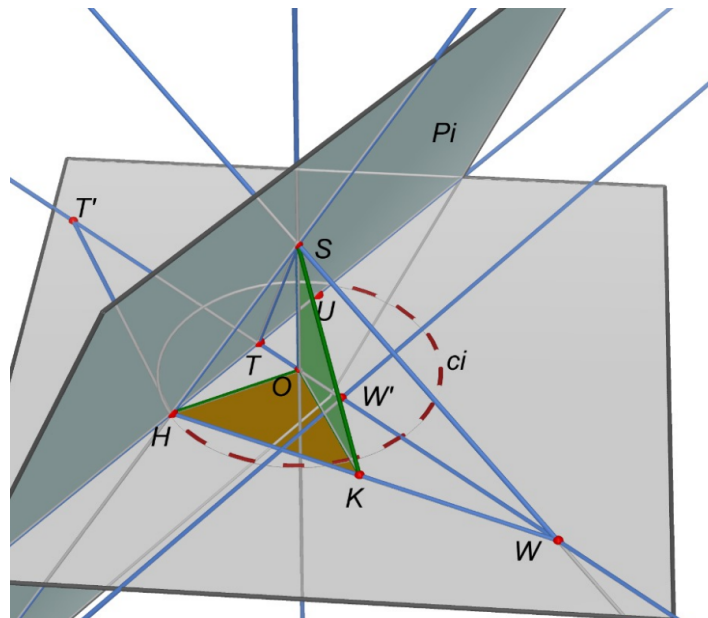
1) Veamos que los ejes  $SW$  y  $ST$  son perpendiculares. Observe que por hipótesis, en el cono  $k_i$ , la altura es perpendicular al plano de la cónica  $c_i$  y pasa por  $O$ . Luego,  $\angle SOT = 90^\circ = \angle SOW$  y por el Teorema 1.51  $OT \cdot OW = r^2$ . Así, el triángulo  $WST$  es rectángulo en  $S$ , por el Teorema de la media geométrica. Es decir, los ejes  $SW$  y  $ST$  son perpendiculares, véase la Figura 38.

Figura 38. Sistema de ejes conjugados perpendiculares 1.



2) Veamos que  $SW$  es perpendicular a  $SH$ . Basta demostrar que el triángulo  $SHW$  está inscrito en un semicírculo, para ello demostraremos que si  $K$  es punto medio de  $HW$ , entonces  $KW = KH = KS$ .

Figura 39. Sistema de ejes conjugados perpendiculares 2.



En los triángulos  $HOK$  y  $SOK$ , el lado  $OK$  es común,  $HO = OS$  pues la altura del cono es igual al radio del círculo  $c$ . Luego, es suficiente ver que  $\angle HOK = \angle SOK$ , donde  $\angle SOK$  es recto.

Sea  $T'$  el polo de la recta  $TH$  respecto a círculo real  $c$ . Del Teorema 1.51, se tiene que  $TH \perp TT'$ ,  $OT \cdot OT' = OH^2$  y  $OT \cdot OW = OH^2$  esto implica que  $OH \perp T'H$  (Teorema de la media geométrica) y  $OT' = OW$ . Es decir,  $O$  es punto medio de  $T'W$ . Así pues, por el Teorema del segmento medio en el triángulo  $WHT'$ , las rectas  $OK \parallel T'H$ . Siendo  $TH \perp OH$  y  $OK \parallel T'H$  concluimos que  $\angle HOK = 90^\circ = \angle SOK$ , entonces los triángulos  $HOK$  y  $SOK$  son congruentes, por lo tanto  $HK = SK$ . Finalmente, por el Teorema de Tales en el semicírculo determinado por los puntos  $H, W$  y  $S$ , tenemos que los ejes  $HS$  y  $SW$  son perpendiculares.

De este modo hemos demostrado que cualquier eje del cono  $k_i$  es perpendicular a cualquiera de sus ejes conjugados.

**Teorema 2.6** *Existe un único sistema de ejes conjugados perpendiculares para ambos conos  $k$  y  $k_i$ .*<sup>8</sup>

**Demostración:** Sean  $k_i$  y  $k$  conos. Por el Teorema 2.5 en el cono  $k_i$  todos los sistemas de ejes conjugados son perpendiculares, por lo tanto es suficiente encontrar tres puntos que tengan la misma polar para las cónicas  $c_i$  y  $c$ , esto es, el triángulo autopolar a  $c_i$  y  $c$ , el cual es único por el Teorema 1.42. Por lo tanto el sistema de ejes conjugados perpendiculares para ambos conos es único.

**Teorema 2.7** *Solo un par de cuerdas comunes a las cónicas  $c_i$  y  $c$  son reales.*

**Observación 7** *La justificación del Teorema 2.7, viene dada por la observación 6. Además, la construcción de estas cuerdas comunes es igual a la construcción hecha en el Ejemplo 6, teniendo en cuenta la Definición 1.52.*

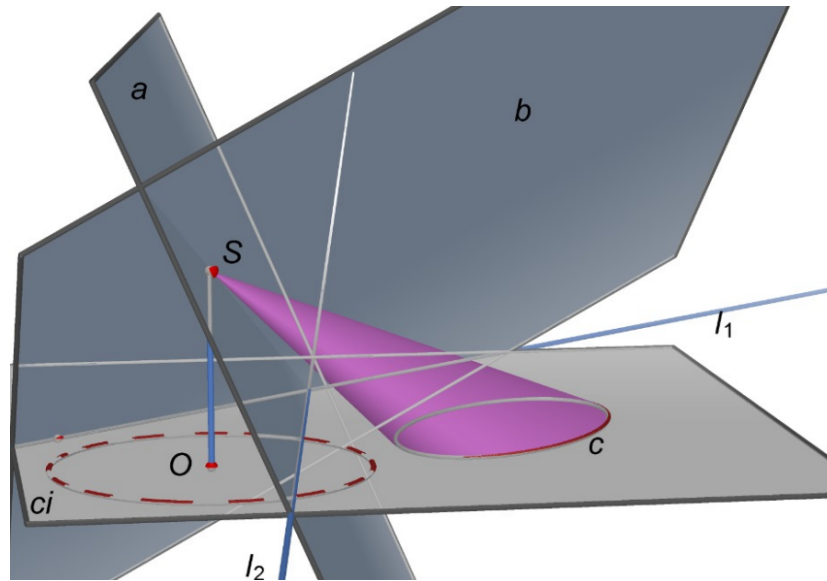
## 2.2. PLANOS CÍCLICOS

A partir de las cuerdas comunes, definiremos los planos cíclicos, que serán paralelos a las secciones circulares.

**Definición 2.8** *Sean los conos  $k_i$  y  $k$  con vértice común  $S$ . Llamaremos planos cíclicos del cono  $k$  a los dos planos determinados por el vértice  $S$  y una cuerda común a  $c$  y  $c_i$ .*

La Figura 40, ilustra la situación, de la Definición anterior. Donde los planos  $a$  y  $b$  son los planos cíclicos del cono  $k$ , que pasan a través de  $S$  y las cuerdas comunes  $l_1$  y  $l_2$ .

Figura 40. Planos cíclicos del cono.



Fue Chasles quien asignó este nombre y caracterización a dichos planos: como todas las cónicas tienen en general cuatro puntos de intersección, al considerar dos círculos, de esos cuatro puntos, máximo dos son reales, los otros dos son imaginarios. Se considera que estos los comparten todos los círculos, están sobre la recta del infinito y reciben el nombre de 'puntos cíclicos' (ya que están sobre todos los círculos). Todo plano tiene una recta del infinito, y sobre esa recta están los dos puntos cíclicos. Al considerar el espacio, todas las rectas del infinito están sobre el plano del infinito, y los puntos cíclicos conforman un círculo imaginario en el infinito. Es este círculo imaginario en el infinito el que le permite a Chasles definir los planos cíclicos precisamente como aquellos que pasan por el vértice de un cono y contienen los puntos comunes a todos los círculos definidos por el cono.

El siguiente Teorema nos permite construir las secciones circulares de un cono de base cónica, a partir de los planos cíclicos de este.

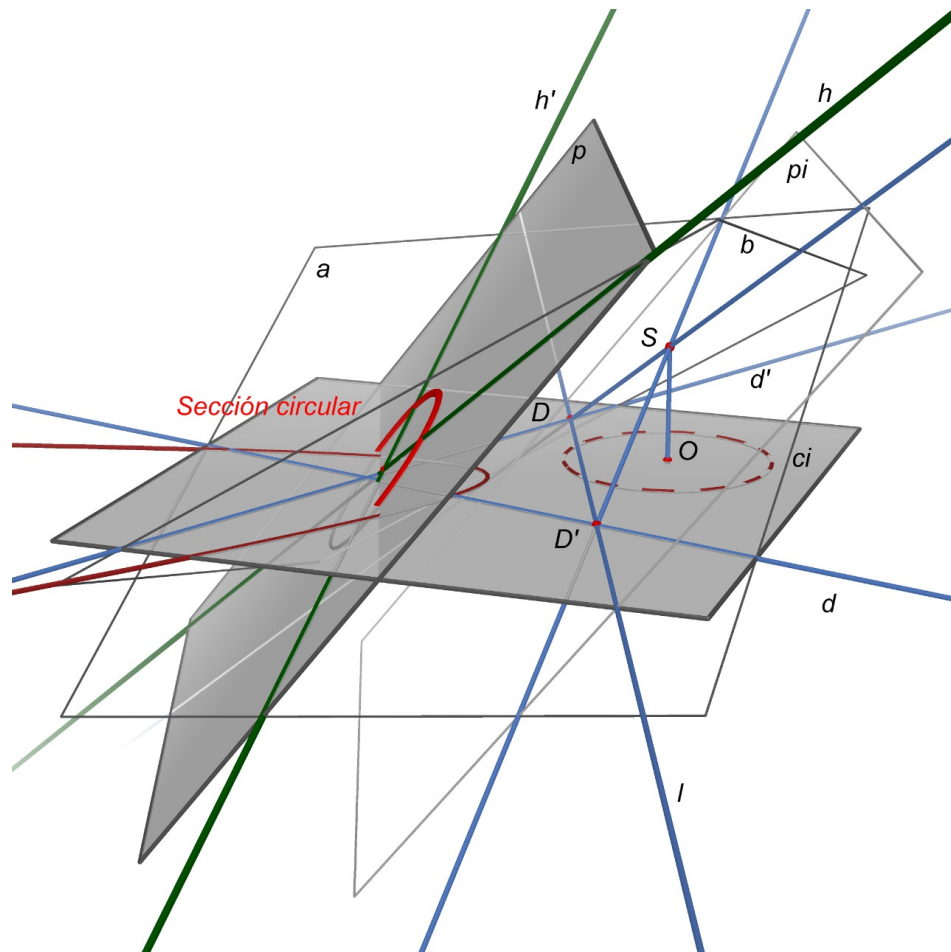
**Teorema 2.9** *Cualquier plano paralelo a un plano cíclico interseca al cono  $k$  en una*



$D$ , similarmente el plano  $b$  formado por  $S$  y la recta  $d'$  polar de  $D'$ ,  $c'$  la cónica intersección del cono con cualquier plano  $p$  paralelo a  $\pi$ . ( ver Figura 42).

El plano  $p$  interseca a los planos  $a$  y  $b$  en las rectas  $h$  y  $h'$ , que resultan ser diámetros conjugados perpendiculares de la cónica  $c'$ , dado que son las proyecciones de las rectas perpendiculares  $SD$  y  $SD'$  del plano  $\pi$  en el plano paralelo  $p$ . Dado que  $D$  es arbitrario en la recta  $l$ , al variarlo, las rectas  $h$  y  $h'$  determinan todos los diámetros conjugados de  $c'$ . De esto se sigue que todos los diámetros conjugados de  $c'$  son perpendiculares. Por lo tanto, por el Teorema 1.48,  $c'$  es un círculo.

Figura 42. Sección circular del cono 2.



## RECAPITULACIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN

Consideremos el cono  $k$  cuya base es la cónica  $c$ . Utilizamos como objeto auxiliar para la construcción el círculo imaginario  $c_i$  en el mismo plano de  $c$ , con radio la altura del cono y centro la proyección ortogonal del vértice de  $k$  sobre dicho plano (no consideraremos el círculo  $c_i$  explícitamente, sino la polar de un punto real respecto a él, la cual también es real). Construimos el triángulo autopolar común real  $UVW$  a  $c_i$  y  $c$ , para esto usamos la teoría de la polar de punto respecto a una cónica (sabemos que el triángulo es real porque  $c_i$  y  $c$  se intersecan en cuatro puntos imaginarios).

A continuación, construimos las cuerdas comunes a  $c_i$  y  $c$ , siguiendo el siguiente procedimiento: tomamos un par de puntos conjugados comunes a  $c_i$  y  $c$ , para formar una involución hiperbólica con dos vértices del triángulo  $UVW$  cuyo centro de perspectividad es el vértice restante (si se toma como centro de perspectividad alguno de los otros vértices del triángulo autopolar, la involución es elíptica). Al considerar la involución hiperbólica, existen exactamente dos puntos dobles reales  $M, N$ . Las rectas que van por los puntos dobles y el centro de perspectividad son las cuerdas comunes.

Finalmente, los planos paralelos a los planos cíclicos contienen las secciones circulares del cono de base cónica, donde un plano cíclico se determina a partir del vértice del cono y una cuerda común.

### 3. CONCLUSIONES

La geometría proyectiva se originó en las prácticas de dibujo en perspectiva que se desarrollaron en el renacimiento. Esas prácticas incluían tres operaciones básicas: proyectar, cortar (con un plano) y ‘acostar’ (proyección, sección, ‘rabattre’). Estas operaciones permitían reducir a construcciones en el plano los problemas en el espacio. Era un problema importante, ya que no se contaba con herramientas de construcción en el espacio. Precisamente, las proyectividades son operaciones en el plano que condensan esas tres operaciones en el espacio (proyectar, cortar, acostar), prescindiendo de la metáfora heredada de las prácticas de perspectiva (que materialmente construía hilos que conectaban una figura plana con un punto en el espacio, y cortaba esos hilos con el plano del cuadro).

Otro interés de las técnicas de la geometría proyectiva es lograr materializar dos ideas importantes: En primer lugar, el hecho de que toda una familia de figuras, que incluye casos diferentes, pueda considerarse como una sola figura que varía de manera continua, pasando por diferentes estados que son los casos o posiciones en el plano. El ejemplo paradigmático y el primero que se trabajó, fue el de las ‘cónicas’: precisamente considerar que elipses, hipérbolas, parábolas y círculos eran en realidad una misma figura con diferentes estados, a los que se podía llegar por medio de un desplazamiento continuo de sus elementos. En segundo lugar, el rechazo de la concepción de que hay puntos que no existen o que desaparecen cuando se hace esa transformación continua: los elementos imaginarios son estados “temporales” de elementos reales de las figuras, y por lo tanto es lícito y posible utilizarlos para resolver problemas de construcción; el esfuerzo de la geometría proyectiva es independizar las construcciones de los distintos casos o estados de los elementos, pues se consideran como siempre existentes. Las involuciones ofrecen una forma de tra-

bajar precisamente en esos dos sentidos, evitando por una parte la consideración de ‘casos de figura’; por otra, tratar los problemas del espacio en el plano, mediante las acciones de proyectar, cortar y acostar. En este trabajo hicimos énfasis en la primera de estas consideraciones, de modo que recurrimos a los recursos del espacio para exponer la construcción de las secciones circulares del cono. Sin embargo, estas se pueden construir en el plano a partir de las tres acciones mencionadas anteriormente, siendo este uno de los principales intereses de Chasles.

Como el problema de encontrar las secciones circulares de un cono no es soluble solo con regla y compás, se necesitan las intersecciones de cónicas, a partir de las cuales es posible determinar los planos cíclicos. Para desarrollar representaciones de estas construcciones es necesario contar con instrumentos de trazado de cónicas y sobre todo de determinación de sus intersecciones. Algunos software de geometría dinámica (Cabri II plus y Cinderella) ofrecen estas dos posibilidades, mientras que otros no (Cabri3D, DGPAD, etc., aunque cuentan con trazado de cónicas a partir de cinco puntos, no tienen algoritmos eficientes para determinar las intersecciones entre ellas). Por lo tanto, consideramos que estos elementos teóricos son de gran interés para el desarrollo de software que incorporen eficientemente el uso de cónicas y sus intersecciones, el infinito y otros objetos de la geometría proyectiva, así como las operaciones elementales de esta.

También resaltamos la importancia de las secciones circulares del cono para el estudio sintético de las cónicas esféricas. Estas fueron definidas por Chasles como la intersección de un cono de segundo grado (base cónica) y una esfera cuyo centro es el vértice del cono. Los planos cíclicos cortan a la esfera en dos círculos que se denominan arcos cíclicos de la cónica. Estos arcos, como ha observado Chasles, poseen propiedades relativas a la cónica exactamente análogas a las de las asín-

totas de una hipérbola. Además, muchas de sus propiedades dependen de otras más elementales en las secciones circulares. Los teoremas relacionados con las cónicas esféricas se vuelven aplicables en general a las secciones cónicas planas, suponiendo que el radio de la esfera se vuelve infinito.<sup>7</sup>

## BIBLIOGRAFÍA

- CHASLES, M. "Résumé d'une théorie des coniques sphériques homofocales et des surface du second ordre homofocales". En: *Comptes rendus* 50 (1860).
- *Traité de géométrie supérieure*. Bachelier, Imprimeur-Libraire, 1852 (vid. págs. 54, 66).
- *Traité des sections coniques: faisant suite au Traité de géométrie supérieure*. Gauthier-Villars imprimeur-libraire, 1865.
- *Two geometrical memoirs of the general propierties of cones of the second degree and on the spherical conics*. Dublin university press, 1837 (vid. págs. 56, 58).
- DOWLING, L. WAYLAND. *Projective geometry*. Mcgraw-hill, 1917 (vid. pág. 61).
- FILON, L. N. G. *An introduction to projective geometry*. Edward Arnold, 1935.
- FRANK AYRES, JR. *Theory and Problems of Projective Geometry*. Mcgraw-hill, 1967 (vid. págs. 20, 22, 27, 28, 33).
- HATTON, J. L. S. *The principles of projective geometry applied to the straight line and conic*. Cambridge university Press, 1913 (vid. págs. 42, 51-53).
- *The theory of the imaginary in geometry together with the trigonometry of the imaginary*. Cambridge university press, 1920 (vid. págs. 25, 26, 30-32, 36).

MILNE, REV. JOHN J. *An elementary treatise on cross-ratio geometry*. Cambridge university Press, 1911 (vid. págs. 25, 37, 39-41, 47, 48, 53).

PICKFORD, A. G. *Elementary projective geometry*. Cambridge university Press, 1909 (vid. pág. 33).

RUSSELL, JOHN WELLESLEY. *An elementary treatise on pure geometry with numerous examples*. Oxford at the clarendon press, 1905 (vid. págs. 40, 43, 45, 46, 49).