

ESTUDIO DE LA PROPIEDAD DE LEBESGUE

ANDRÉS RICARDO CASTRO GIL

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2024

ESTUDIO DE LA PROPIEDAD DE LEBESGUE

ANDRÉS RICARDO CASTRO GIL

Trabajo de Grado para optar al título de  
Magíster en Matemáticas

Director:

Michael Alexander Rincón Villamizar  
Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2024



## **DEDICATORIA**

*A mi amada esposa, Natalia.*

## **Agradecimientos**

Agradezco al profesor Michael por su apoyo tanto académico como emocional a lo largo del pregrado y la maestría, ha sido una gran influencia para mí en todos estos años de estudio. A los profesores evaluadores Daniel y Sergio por sus aportes y correcciones a este trabajo. A mis padres y hermanos que me motivaron a seguir adelante. Y por supuesto, a mi esposa que ha sido el motor de mi vida.

## CONTENIDO

	<b>pág.</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>11</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>14</b>
1.1. Integración de Riemann	14
1.2. Integración de Darboux	35
1.3. La Propiedad de Lebesgue	38
1.4. La Propiedad Débil de Lebesgue	47
<b>2. UNA CARACTERIZACIÓN DE LA PROPIEDAD DE LEBESGUE</b>	<b>54</b>
2.1. Resultados Preliminares	54
2.1.1. Sistema Haar de Particiones de $\mathbb{N}$	58
2.2. Caracterización de la Propiedad de Lebesgue	61
<b>3. OPERADORES DE DARBOUX</b>	<b>64</b>
3.1. Resultados Preliminares	64
3.2. Operadores de Darboux	66
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>74</b>

## LISTA DE FIGURAS

		<b>pág.</b>
Figura 1.	Construcción de $(Q, R)$	17
Figura 2.	Árbol Diádico	58
Figura 3.	Árbol de un sHp de $\mathbb{N}$	59

## LISTA DE SÍMBOLOS

- *a.e* (*almost everywhere*): casi todo punto respecto a la medida de Lebesgue.
- $D(f)$ : conjunto de puntos de discontinuidad de  $f$ .
- $B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$ .
- $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ .
- $c_0 = \{(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_n)_n \text{ converge a } 0\}$ .
- $c = \{(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_n)_n \text{ es convergente}\}$ .
- $\ell_\infty = \{(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_n)_n \text{ es acotada}\}$ .
- $\ell_p = \{(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ , con  $1 \leq p < \infty$ .
- $L_\infty[a, b] = \{f \in \mathbb{R}^{[a,b]} : f \text{ es esencialmente acotada}\}$ .
- $L_p[a, b] = \{f \in \mathbb{R}^{[a,b]} : f \text{ es medible y } \int_{[a,b]} |f|^p dm < \infty\}$ , con  $1 \leq p < \infty$ .
- $C(S) = \{f \in \mathbb{R}^S : f \text{ es continua}\}$ .
- $C_0(S) = \{f \in C(S) : \forall \varepsilon > 0, \exists K \subseteq S \text{ compacto con } |f(t)| < \varepsilon, \forall t \in S \setminus K\}$ .

## RESUMEN

**TÍTULO:** ESTUDIO DE LA PROPIEDAD DE LEBESGUE. \*

**AUTOR:** ANDRÉS RICARDO CASTRO GIL \*\*

**PALABRAS CLAVE:** ESPACIO DE BANACH, INTEGRAL DE RIEMANN, INTEGRAL DE DARBOUX, PROPIEDAD DE LEBESGUE, OPERADOR DE DARBOUX.

### **DESCRIPCIÓN:**

El teorema de Lebesgue establece que para las funciones con valores reales definidas en  $[a, b]$ , ser acotada y continua a.e respecto a la medida de Lebesgue es equivalente a ser Riemann-integrable. Sin embargo, para el caso general de las funciones con valores en un espacio de Banach infinito dimensional no siempre se cumple esto. Si un espacio de Banach  $X$  satisface la condición que cada función Riemann-integrable  $f : [0, 1] \rightarrow X$  es continua a.e, se dice que  $X$  tiene la *propiedad de Lebesgue* (PL). El principal problema a estudiar es encontrar condiciones suficientes y necesarias para que un espacio de Banach tenga la PL. Este trabajo presenta de forma autocontenida el desarrollo de esta teoría, entrando en detalle con cada prueba, partiendo de los conceptos preliminares en el primer capítulo junto con ejemplos de espacios que tienen la PL y características de la PL; en el segundo capítulo se muestra una solución al problema principal; finalmente, en el tercer capítulo se analiza la relación entre el espacio de los operadores de Darboux y otros espacios de operadores más usuales como los compactos y débilmente compactos. El principal aporte en este trabajo de investigación se encuentra en este último capítulo donde presentamos las demostraciones de algunos resultados interesantes sobre la teoría de los operadores de Darboux.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Michael Alexander Rincón Villamizar.

## ABSTRACT

**TITLE:** ON THE PROPERTY OF LEBESGUE \*

**AUTHOR:** ANDRÉS RICARDO CASTRO GIL. \*\*

**KEYWORDS:** BANACH SPACE, RIEMANN INTEGRAL, DARBOUX INTEGRAL, PROPERTY OF LEBESGUE, DARBOUX OPERATOR.

**DESCRIPTION:**

The Lebesgue theorem states that for real-valued functions defined on  $[a, b]$ , being bounded and continuous almost everywhere with respect to the Lebesgue measure is equivalent to being Riemann-integrable. However, in the general case of functions with values in an infinite-dimensional Banach space, this is not always true. If a Banach space  $X$  satisfies the condition that every Riemann-integrable function  $f : [0, 1] \rightarrow X$  is continuous almost everywhere, it is said that  $X$  has the *property of Lebesgue* (PL). The main problem to study is to find necessary and sufficient conditions for a Banach space to have the PL. This work presents a self-contained development of this theory, going into detail with each proof, starting from the preliminary concepts in the first chapter along with examples of spaces that have the PL and characteristics of the PL; in the second chapter, a solution to the main problem is presented; finally, in the third chapter, the relationship between the space of Darboux operators and other more usual operator spaces such as compact and weakly compact operators is analyzed. The main contribution of this research is found in the last chapter, where we present proofs of some interesting results regarding the theory of Darboux operators.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Mathematics School. Sciences Faculty. Universidad Industrial de Santander. Director: Michael Alexander Rincón Villamizar.

## INTRODUCCIÓN

Los axiomas de norma para espacios vectoriales reales, tal como los conocemos hoy en día, fueron introducidos por Stefan Banach <sup>1</sup> en su tesis doctoral presentada en 1920 y publicada en 1922. Estos axiomas fueron extendidos para espacios vectoriales complejos por Norbert Wiener <sup>2</sup> en 1923, donde muestra, entre otros resultados, el desarrollo de una teoría de integrales de línea para funciones que toman valores en un espacio vectorial normado complejo.

Posteriormente, Lawrence Graves comprende que la generalización de la integral de línea iniciada por Wiener, ha de entenderse más fácilmente por medio del desarrollo de una teoría de integrales, que extienda la integral de Riemann, para funciones que toman valores en un espacio vectorial normado real. En <sup>3</sup> Graves aborda esta y otras cuestiones, en particular demuestra que el Teorema de Lebesgue no vale cuando se lidia con funciones de valores vectoriales reales, al exhibir la existencia de una función  $f : [0, 1] \rightarrow \ell_\infty[0, 1]$  Riemann-integrable que no es continua a.e.

Surge así el siguiente problema: Determinar las condiciones necesarias y suficientes en un espacio de Banach infinito dimensional  $X$ , para que la integrabilidad según Riemann de una función  $f : [0, 1] \rightarrow X$  implique, como ocurre en el Teorema de Le-

---

<sup>1</sup> S. Banach. "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales". Ph.D. thesis. Ukraine: Université de Lviv, 1922, págs. 133-181.

<sup>2</sup> N. Wiener. "Note on a Paper of M. Banach". En: *Fundamenta Mathematicae* 4.1 (1923), págs. 136-143.

<sup>3</sup> L.M. Graves. "Riemann Integration and Taylor's Theorem in General Analysis". En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 29 (1927), págs. 163-177.

besgue, la continuidad a.e de la función  $f$ . Tales espacios de Banach se dice que tienen la Propiedad de Lebesgue (PL). A lo largo del siglo XX, matemáticos como Alexiewicz-Orlicz <sup>4</sup>, Nemirovskii-Ochan-Rejouani <sup>5</sup>, Rocha <sup>6</sup>, entre otros, han aportado grandes resultados y nuevos espacios con propiedades interesantes al tratar de dar solución al problema PL, abriendo camino a esta teoría para que finalmente en 2023 Harrison Gaebler y Bünyamin Sari lleguen a la solución mostrando en <sup>7</sup> una caracterización de la PL. Cabe resaltar que en 1989 Marina Pizzotti había resuelto el problema PL en su tesis doctoral <sup>8</sup>, trabajo que al parecer no tuvo suficiente reconocimiento en la literatura.

Este trabajo de investigación ha sido desarrollado de forma autocontenida para una mejor comprensión del tema por parte del lector. El Capítulo 1 abarca las propiedades de las integrales según Riemann y según Darboux. El espacio de las funciones Riemann-integrables contiene al espacio de las funciones Darboux-integrables; en algunos espacios de Banach  $X$  la contención es estricta, presentamos varios ejemplos de esto. La propiedad de Lebesgue aparece cuando estos dos tipos de integrales son equivalentes; se hace un análisis de cada espacio de Banach clásico

---

<sup>4</sup> W. Alexiewicz A. & Orlicz. “Remarks on Riemann-Integration of Vector-Valued Functions”. En: *Studia Math* 12 (1951), págs. 125-132.

<sup>5</sup> M.Yu. & Rejouani R. Nemirovskii A.S. & Ochan. “Conditions for Riemann Integrability of Functions with Values in a Banach Space”. En: *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I. Mat. Meh.* 27.4 (1972), págs. 62-65.

<sup>6</sup> G.C. Rocha. “Integral de Riemann Vetorial e Geometria de Espaços de Banach”. Ph.D. thesis. Brazil: Universidade de São Paulo, 1979.

<sup>7</sup> B. Gaebler H. & Sari. “Banach Spaces with the Lebesgue Property of Riemann Integrability”. En: *Journal of Functional Analysis* (2023).

<sup>8</sup> M. Pizzotti. “Darboux Integrabilidade e Mensurabilidade de Funções Riemann-Integráveis Definidas em Compactos”. Ph.D. thesis. Brazil: Universidade de São Paulo, 1989.

para ver si tiene o no la PL; además se muestran dos características de la PL: (i) es separablemente determinada, y (ii) si  $Y$  y  $X/Y$  tienen la PL, entonces  $X$  tiene la PL. Al final del primer capítulo se define la propiedad débil de Lebesgue (WPL) que resulta al debilitar la condición de ser continua a.e en la definición de la PL, esto con el fin de obtener una lista más amplia de espacios que gozan de esta propiedad. En el Capítulo 2 se muestra una caracterización de la PL dada por Gaebler y Sari, que para su prueba requiere de un lema de Pizzotti y el concepto de sistemas Haar de particiones de  $\mathbb{N}$ . Finalmente, en el Capítulo 3 se analiza la relación entre el espacio de los operadores de Darboux y otros espacios de operadores más usuales como los compactos y débilmente compactos. El principal aporte en este trabajo de investigación se encuentra en el último capítulo, donde presentamos las demostraciones de algunos resultados interesantes sobre la teoría de los operadores de Darboux.

## 1. PRELIMINARES

En este primer capítulo se presentan las definiciones y resultados necesarios para el desarrollo de este trabajo de investigación. La notación aquí presentada se sigue de <sup>9</sup> con algunas modificaciones.  $X$  denota un espacio de Banach y  $X^*$  su dual topológico.  $\mathcal{L}$  denota la clase de los conjuntos Lebesgue medibles y  $m$  la medida de Lebesgue, que será omitida a menos que sea necesario especificar.

### 1.1. Integración de Riemann

#### Definición 1.1.1.

- (a) Una **partición** del intervalo  $[a, b]$  es un conjunto finito de puntos  $P = \{t_i\}_{i=0}^N$  en  $[a, b]$  que satisface  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$ . Se denota por  $\mathcal{P}[a, b]$  al conjunto de todas las particiones de  $[a, b]$ .
- (b) Una **partición etiquetada** de  $[a, b]$  es un par  $(P, T)$ , donde  $P = \{t_i\}_{i=0}^N \in \mathcal{P}[a, b]$  y  $T = \{s_i\}_{i=1}^N$  satisface que  $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ , para cada  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Se denota por  $\dot{\mathcal{P}}[a, b]$  al conjunto de todas las particiones etiquetadas de  $[a, b]$ . Los  $t_i$  son llamados **puntos de la partición** y los  $s_i$  son llamados **etiquetas de la partición**.
- (c) Sean  $f : [a, b] \rightarrow X$  y  $(P, T) = ([t_{i-1}, t_i], s_i)_{i=1}^N \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$ . La **norma de  $P$**  se define por  $|P| = \max\{t_i - t_{i-1} \mid 1 \leq i \leq N\}$ . La **suma de Riemann** de  $f$  en  $(P, T)$  se define por  $f(P, T) = \sum_{i=1}^N f(s_i)(t_i - t_{i-1})$ .

---

<sup>9</sup> R. Gordon. "Riemann Integration in Banach Spaces". En: *Rocky mountain J. Math.* 21.3 (1991), págs. 923-949.

(d) Si  $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a, b]$  con  $P_2 \subseteq P_1$ , se dice que  $P_1$  es un **refinamiento** de  $P_2$  o que  $P_1$  **refina** a  $P_2$ .

**Definición 1.1.2.** <sup>9</sup> Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$ .

(a) La función  $f$  es  **$R_\delta$ -integrable** en  $[a, b]$  si existe un vector  $z \in X$  con la siguiente propiedad: para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $(P, T) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  y  $|P| < \delta$ , entonces  $\|f(P, T) - z\| < \varepsilon$ .

(b) La función  $f$  es  **$R_\Delta$ -integrable** en  $[a, b]$  si existe un vector  $z \in X$  con la siguiente propiedad: para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $P_\varepsilon \in \mathcal{P}[a, b]$  tal que si  $(P, T) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  y  $P$  refina a  $P_\varepsilon$ , entonces  $\|f(P, T) - z\| < \varepsilon$ .

**Observación 1.1.3.** En la definición anterior, puede probarse en ambos casos que el vector  $z \in X$  es único. En efecto, suponga que  $z_1, z_2 \in X$  son dos vectores distintos que satisfacen la propiedad de que  $f$  sea  $R_\delta$ -integrable en  $[a, b]$ . Para  $\varepsilon = \frac{\|z_1 - z_2\|}{2}$ , existen  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tales que si  $(P_1, T_1) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $|P_1| < \delta_1$ , entonces  $\|f(P_1, T_1) - z_1\| < \varepsilon$ ; y si  $(P_2, T_2) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $|P_2| < \delta_2$ , entonces  $\|f(P_2, T_2) - z_2\| < \varepsilon$ . Sean  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  y  $(P, T) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $|P| < \delta$ . Entonces

$$\|z_1 - z_2\| \leq \|z_1 - f(P, T)\| + \|z_2 - f(P, T)\| < \varepsilon + \varepsilon = \|z_1 - z_2\|.$$

Esto es absurdo, y por tanto, el vector  $z$  es único. Para el otro caso se usa el mismo argumento.

**Notación 1.1.4.** El vector  $z$  de la definición 1.1.2 es llamado  $R_\delta$ -integral ( $R_\Delta$ -integral) de  $f$  en  $[a, b]$ , y se denota por  $R_\delta\text{-}\int_a^b f$  ( $R_\Delta\text{-}\int_a^b f$ , respectivamente).

**Proposición 1.1.5.** Si  $f$  es  $R_\delta$  o  $R_\Delta$  integrable en  $[a, b]$ , entonces  $f$  es acotada.

*Demostración.* Suponga que  $f$  es  $R_\delta$ -integrable en  $[a, b]$  y sea  $z = R_\delta\text{-}\int_a^b f$  (el otro caso es similar). Para  $\varepsilon = 1$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $(P, T) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  y  $|P| < \delta$ , entonces

$\|f(P, T) - z\| < 1$ , lo cual implica que  $\|f(P, T)\| < \|z\| + 1$ . Sea  $P = \{t_i\}_{i=0}^N \in \mathcal{P}[a, b]$  con  $|P| < \delta$  y sea  $t \in [a, b]$  fijo. Entonces existe  $j \in \{1, \dots, N\}$  tal que  $t \in [t_{j-1}, t_j]$ . Sea  $T = \{s_i\}_{i=1}^N$ , donde  $s_i = t_i$  si  $i \neq j$  y  $s_j = t$ . Se tiene que  $(P, T) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $|P| < \delta$ , y por tanto,

$$\|f(t)(t_j - t_{j-1})\| = \left\| f(P, T) - \sum_{i \neq j} f(t_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| \leq \|z\| + 1 + \left\| \sum_{i \neq j} f(t_i)(t_i - t_{i-1}) \right\|.$$

Luego,  $\|f(t)\| \leq M$ , donde  $M > 0$  es una constante. Así,  $f$  es acotada.  $\square$

**Proposición 1.1.6.** <sup>9</sup> Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es  $R_\delta$ -integrable en  $[a, b]$  si, y solo si,  $f$  es  $R_\Delta$ -integrable en  $[a, b]$ .

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Suponga que  $f$  es  $R_\delta$ -integrable en  $[a, b]$  y sea  $z = R_\delta \int_a^b f$ . Sea  $\varepsilon > 0$  dado. Luego existe  $\delta > 0$  tal que si  $(P, T) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  y  $|P| < \delta$ , entonces  $\|f(P, T) - z\| < \varepsilon$ . Sean  $P_\varepsilon \in \mathcal{P}[a, b]$  con  $|P_\varepsilon| < \delta$  y  $(Q, R) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  tal que  $Q$  refina a  $P_\varepsilon$ . Entonces  $|Q| \leq |P_\varepsilon| < \delta$ , y por tanto,  $\|f(Q, R) - z\| < \varepsilon$ . Así,  $f$  es  $R_\Delta$ -integrable en  $[a, b]$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponga que  $f$  es  $R_\Delta$ -integrable en  $[a, b]$  y sea  $z = R_\Delta \int_a^b f$ . Entonces  $f$  es acotada por algún  $M > 0$ . Sea  $\varepsilon > 0$  dado. Entonces existe  $P_\varepsilon = \{t_k\}_{k=0}^N \in \mathcal{P}[a, b]$  tal que si  $(P, T) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  y  $P$  refina a  $P_\varepsilon$ ,  $\|f(P, T) - z\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Sean  $\delta = \frac{\varepsilon}{4MN}$  y  $(P, T) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  tal que  $|P| < \delta$ . Defina  $(Q, R) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  de la siguiente manera. Los puntos de  $Q$  son los puntos de  $P \cup P_\varepsilon$ , la etiqueta de cada intervalo de  $Q$  que coincide con un intervalo de  $P$  es la misma etiqueta de  $P$ ; para los demás intervalos de  $Q$ , que son los que contienen puntos de  $P_\varepsilon$  en su interior, denotados por  $\{[c_k, d_k]\}_{k=1}^H$  con  $H \leq N - 1$ , se procede así: Para cada  $k \in \{1, \dots, H\}$ , sea  $([u_{i-1}^k, u_i^k], v_i^k)_{i=1}^{N_k} \in \dot{\mathcal{P}}[c_k, d_k]$ , donde  $\{u_i^k\}_{i=1}^{N_k-1}$  son los puntos de  $P_\varepsilon$  en  $(c_k, d_k)$ . Sea  $s_k$  la etiqueta de  $P$  para  $[c_k, d_k]$ . Observe en la Figura 1 la construcción de  $(Q, R)$  a partir de  $P_\varepsilon$  y  $(P, T)$ .

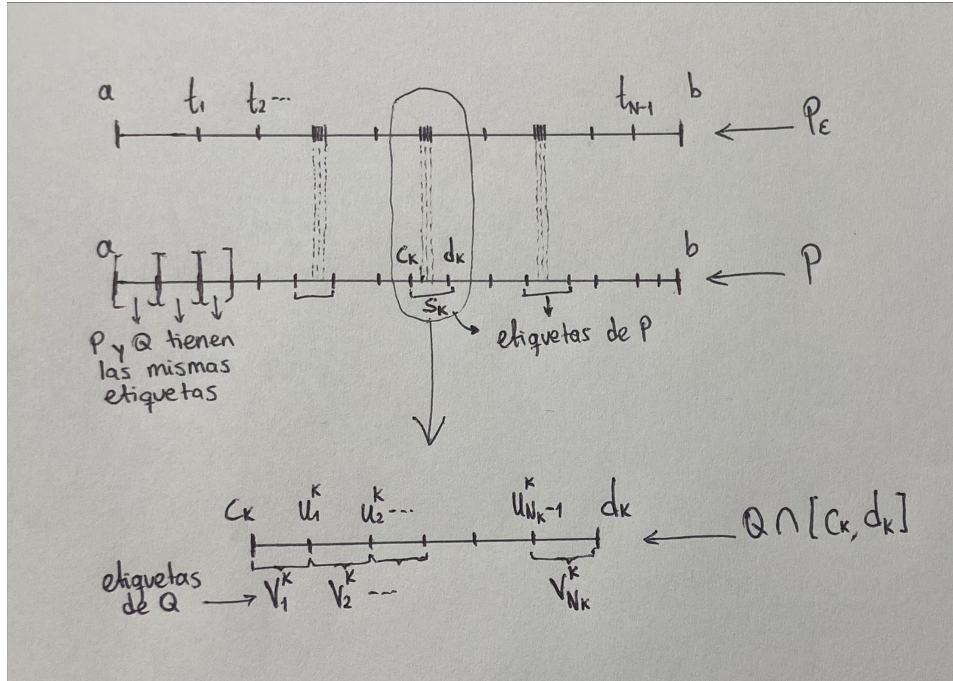


Figura 1. Construcción de  $(Q, R)$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
 \|f(P, T) - f(Q, R)\| &= \left\| \sum_{k=1}^H f(s_k)(d_k - c_k) - \sum_{k=1}^H \sum_{i=1}^{N_k} f(v_i^k)(u_i^k - u_{i-1}^k) \right\| \\
 &\leq \sum_{k=1}^H \left\| f(s_k) \sum_{i=1}^{N_k} (u_i^k - u_{i-1}^k) - \sum_{i=1}^{N_k} f(v_i^k)(u_i^k - u_{i-1}^k) \right\| \\
 &\leq \sum_{k=1}^H \sum_{i=1}^{N_k} \|f(s_k) - f(v_i^k)\| (u_i^k - u_{i-1}^k) \\
 &\leq 2M \sum_{k=1}^H (d_k - c_k) \\
 &< 2MH\delta \\
 &\leq 2M(N-1) \frac{\epsilon}{4MN} \\
 &< \frac{\epsilon}{2}.
 \end{aligned}$$

Como  $Q$  refina a  $P_\varepsilon$ , entonces

$$\|f(P, T) - z\| \leq \|f(P, T) - f(Q, R)\| + \|f(Q, R) - z\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así,  $f$  es  $R_\delta$ -integrable en  $[a, b]$ .

□

Los resultados anteriores permiten establecer la siguiente definición.

**Definición 1.1.7.** <sup>9</sup> Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  se dice que es **Riemann-integrable** y se escribe  $f \in \mathcal{R}([a, b], X)$ , si  $f$  es  $R_\delta$  o  $R_\Delta$  integrable en  $[a, b]$ . En este caso se refiere al vector integral  $z$  como la **integral de Riemann** de  $f$  en  $[a, b]$  y se denota por  $\int_a^b f$ .

Cuando  $a = b$  conviene establecer que  $\int_a^b f = 0$ .

**Ejemplo 1.1.8.** Si  $f$  es la función constante igual a  $u \in X$  en  $[a, b]$ , entonces  $f \in \mathcal{R}([a, b], X)$  y  $\int_a^b f = u(b - a)$ .

Esta generalización de la integral de Riemann a espacios de Banach preserva muchas de las propiedades que satisface la integral de Riemann clásica. A continuación se muestran algunas de ellas.

**Proposición 1.1.9.** Sean  $f, g \in \mathcal{R}([a, b], X)$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$(1) \alpha f \in \mathcal{R}([a, b], X) \text{ y } \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

$$(2) f + g \in \mathcal{R}([a, b], X) \text{ y } \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

*Demostración.* (1) Si  $\alpha = 0$ , entonces  $\alpha f$  es la función nula y se cumple la igualdad. Suponga que  $\alpha \neq 0$  y sea  $\varepsilon > 0$  dado. Como  $f \in \mathcal{R}([a, b], X)$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $(P, T) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $|P| < \delta$ , entonces  $\left\| f(P, T) - \int_a^b f \right\| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ . Sea

$(P, T) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  tal que  $|P| < \delta$ . Entonces

$$\left\| (\alpha f)(P, T) - \alpha \int_a^b f \right\| = |\alpha| \left\| f(P, T) - \int_a^b f \right\| < \varepsilon.$$

Así,  $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b], X)$  y  $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$ .

(2) Sea  $\varepsilon > 0$  dado. Como  $f, g \in \mathcal{R}([a, b], X)$ , existen  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tales que si  $(P_1, T_1) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $|P_1| < \delta_1$ , entonces  $\left\| f(P_1, T_1) - \int_a^b f \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ; y si  $(P_2, T_2) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $|P_2| < \delta_2$ , entonces  $\left\| g(P_2, T_2) - \int_a^b g \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  y sea  $(P, T) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $|P| < \delta$ . Entonces

$$\begin{aligned} \left\| (f + g)(P, T) - \left( \int_a^b f + \int_a^b g \right) \right\| &= \left\| f(P, T) - \int_a^b f + g(P, T) - \int_a^b g \right\| \\ &\leq \left\| f(P, T) - \int_a^b f \right\| + \left\| g(P, T) - \int_a^b g \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así,  $f + g \in \mathcal{R}([a, b], X)$  y  $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ .

□

La siguiente definición junto con la Observación 1.1.12 son clave para la prueba del Teorema 1.1.13, que brinda caracterizaciones de una función Riemann-integrable.

**Definición 1.1.10.** Sea  $V$  un espacio vectorial. Se define la **envolvente convexa** de  $A \subseteq V$  por

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \mid a_i \in A, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}.$$

**Proposición 1.1.11.** Sean  $V$  un espacio vectorial y  $A, B \subseteq V$ . Entonces

$$co(A + B) = co(A) + co(B).$$

**Demostración.** Sea  $z = \sum_{i=1}^n \alpha_i(a_i + b_i) \in \text{co}(A + B)$ . Entonces  $z = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \in \text{co}(A) + \text{co}(B)$ , y por tanto,  $\text{co}(A + B) \subseteq \text{co}(A) + \text{co}(B)$ .

Recíprocamente, sea  $z = u + v \in \text{co}(A) + \text{co}(B)$  con  $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$  y  $v = \sum_{j=1}^m \beta_j b_j$ . Para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ , tenemos que  $u + b_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i(a_i + b_j) \in \text{co}(A + B)$ . Luego,

$$z = u + v = \sum_{j=1}^m \beta_j(u + b_j) \in \text{co}(\text{co}(A + B)) = \text{co}(A + B).$$

Así,  $\text{co}(A) + \text{co}(B) \subseteq \text{co}(A + B)$ . □

**Observación 1.1.12.** Sean  $V$  un espacio vectorial y  $A_1, \dots, A_n \subseteq V$ . Entonces

$$\text{co}\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{co}(A_i).$$

**Teorema 1.1.13.** <sup>9</sup> Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$ . Son equivalentes:

- (1) La función  $f$  es Riemann-integrable en  $[a, b]$ .
- (2) Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $(P_1, T_1), (P_2, T_2) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $|P_1|, |P_2| < \delta$ , entonces  $\|f(P_1, T_1) - f(P_2, T_2)\| < \varepsilon$ .
- (3) Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $P_\varepsilon \in \mathcal{P}[a, b]$  tal que si  $(P_1, T_1), (P_2, T_2) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $P_1, P_2$  que refinan a  $P_\varepsilon$ , entonces  $\|f(P_1, T_1) - f(P_2, T_2)\| < \varepsilon$ .
- (4) Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $P_\varepsilon \in \mathcal{P}[a, b]$  tal que si  $(P_1, T_1), (P_2, T_2) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $P_1 = P_2 = P_\varepsilon$ , entonces  $\|f(P_1, T_1) - f(P_2, T_2)\| < \varepsilon$ .

**Demostración.** (1)  $\Rightarrow$  (2) se sigue de la desigualdad triangular sabiendo que  $f$  es  $R_\delta$ -integrable en  $[a, b]$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1): Por hipótesis, dado  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $\delta_n > 0$  tal que si  $(P_1, T_1), (P_2, T_2) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $|P_1|, |P_2| < \delta_n$ , entonces  $\|f(P_1, T_1) - f(P_2, T_2)\| < \frac{1}{n}$ . Sin pérdida de generalidad suponga que  $\delta_{n+1} \leq \delta_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $(P_n, T_n) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$

tal que  $|P_n| < \delta_n$ . Luego, para cualesquiera  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $n \geq m$  se tiene que  $\|f(P_n, T_n) - f(P_m, T_m)\| < \frac{1}{m}$ . Esto muestra que  $(f(P_n, T_n))_n$  es una sucesión de Cauchy en  $X$ . Como  $X$  es Banach, existe  $z \in X$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n, T_n) = z$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|f(P_n, T_n) - z\| < \frac{\varepsilon}{2}$ , para todo  $n \geq N_1$ . Sea  $N_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{N_2} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Sean  $N = \max\{N_1, N_2\}$  y  $(P, T) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $|P| < \delta_N$ . Se tiene que

$$\|f(P, T) - z\| \leq \|f(P, T) - f(P_N, T_N)\| + \|f(P_N, T_N) - z\| < \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{N_2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Así,  $f$  es Riemann-integrable en  $[a, b]$ .

De la misma manera se prueba (1)  $\Leftrightarrow$  (3) usando el concepto de  $R_\Delta$ -integrabilidad. Es inmediato que (3)  $\Rightarrow$  (4). Solo resta probar (4)  $\Rightarrow$  (3).

Sea  $\varepsilon > 0$  dado y tome  $P_\varepsilon = \{t_i\}_{i=0}^N \in \mathcal{P}[a, b]$  tal que si  $(P_1, T_1), (P_2, T_2) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $P_1 = P_2 = P_\varepsilon$ , entonces  $\|f(P_1, T_1) - f(P_2, T_2)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Sea  $(P_\varepsilon, R) = ([t_{i-1}, t_i], t_i)_{i=1}^N \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, N\}$ , sea  $A_i = \{f(t)(t_i - t_{i-1}) \mid t \in [t_{i-1}, t_i]\}$  y sea  $A = \sum_{i=1}^N A_i$ . Note que  $\|x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ , para todo  $x \in \text{co}(A - A)$ . En efecto, si  $x \in \text{co}(A - A)$ , entonces

$$x = \sum_{j=1}^k \alpha_j x_j,$$

donde  $x_j = f(P_\varepsilon, T_1^j) - f(P_\varepsilon, T_2^j) = \sum_{i=1}^N f(r_i^j)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^N f(s_i^j)(t_i - t_{i-1}) \in A - A$ ,  $\alpha_j \geq 0$  y  $\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$ . Luego, se tiene que

$$\|x\| \leq \sum_{j=1}^k \alpha_j \|f(P_\varepsilon, T_1^j) - f(P_\varepsilon, T_2^j)\| < \sum_{j=1}^k \alpha_j \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea  $(P, T) = ([u_{k-1}, u_k], v_k)_{k=1}^M \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  tal que  $P$  refina a  $P_\varepsilon$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, N\}$ , sea  $k_i$  el índice  $k$  para el cual  $u_k = t_i$ , y sea  $k_0 = 0$ . Entonces

$$\begin{aligned}
f(P_\varepsilon, R) - f(P, T) &= \sum_{i=1}^N \left\{ f(t_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} f(v_k)(u_k - u_{k-1}) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^N \left\{ f(t_i) \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} (u_k - u_{k-1}) - \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} f(v_k)(u_k - u_{k-1}) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} \frac{u_k - u_{k-1}}{t_i - t_{i-1}} \{ (t_i - t_{i-1}) f(t_i) - (t_i - t_{i-1}) f(v_k) \}.
\end{aligned}$$

Como  $\frac{u_k - u_{k-1}}{t_i - t_{i-1}} \geq 0$ , para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$  y  $k \in \{k_{i-1} + 1, \dots, k_i\}$ , y

$$\sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} \frac{u_k - u_{k-1}}{t_i - t_{i-1}} = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} (u_k - u_{k-1}) = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) = 1,$$

entonces por la observación 1.1.12 se tiene

$$f(P_\varepsilon, R) - f(P, T) \in \sum_{i=1}^N co(A_i - A_i) = co(A - A).$$

Se sigue que  $\|f(P_\varepsilon, R) - f(P, T)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Sean  $(P_1, T_1), (P_2, T_2) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $P_1, P_2$  que refinan a  $P_\varepsilon$ . Entonces

$$\|f(P_1, T_1) - f(P_2, T_2)\| \leq \|f(P_1, T_1) - f(P_\varepsilon, R)\| + \|f(P_\varepsilon, R) - f(P_2, T_2)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

**Proposición 1.1.14.** Si  $f \in \mathcal{R}([a, b], X)$ , entonces  $f \in \mathcal{R}([c, d], X)$  para todo subintervalo  $[c, d]$  de  $[a, b]$ .

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $P_\varepsilon \in \mathcal{P}[a, b]$  tal que  $\|f(P_1, T_1) - f(P_2, T_2)\| < \varepsilon$ , para todo  $(P_1, T_1), (P_2, T_2) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $P_1, P_2$  que refinan a  $P_\varepsilon$ . Sea  $d \in (a, b)$  y veamos que  $f \in \mathcal{R}([a, d], X)$ . Sean  $P'_\varepsilon = P_\varepsilon \cup \{d\}$  y  $Q_\varepsilon = P'_\varepsilon \cap [a, d] \in \mathcal{P}[a, d]$ . Sean

$(Q_1, U_1), (Q_2, U_2) \in \dot{\mathcal{P}}[a, d]$  con  $Q_1, Q_2$  que refinan a  $Q_\varepsilon$ . Sean  $(R_1, V_1), (R_2, V_2) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$ , donde  $R_1 = Q_1 \cup (P'_\varepsilon \cap [d, b]), R_2 = Q_2 \cup (P'_\varepsilon \cap [d, b]), V_1 \cap [a, d] = U_1, V_2 \cap [a, d] = U_2$  y  $V_1 \cap [d, b] = V_2 \cap [d, b]$ . Entonces

$$\|f(Q_1, U_1) - f(Q_2, U_2)\| = \|f(R_1, V_1) - f(R_2, V_2)\| < \varepsilon,$$

ya que  $R_1, R_2$  refinan a  $P_\varepsilon$ . Así,  $f \in \mathcal{R}([a, d], X)$ . Análogamente,  $f \in \mathcal{R}([c, b], X)$  para todo  $c \in (a, b)$ . Por lo tanto,  $f \in \mathcal{R}([c, d], X)$ , para todo  $[c, d] \subseteq [a, b]$ .  $\square$

**Proposición 1.1.15.** Sea  $c \in [a, b]$ . Entonces  $f \in \mathcal{R}([a, b], X)$  si, y solo si,  $f \in \mathcal{R}([a, c], X) \cap \mathcal{R}([c, b], X)$ . En este caso,  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .

*Demostración.* Si  $c \in \{a, b\}$ , el resultado es claro. Suponga que  $c \in (a, b)$ . La primera parte de la equivalencia se sigue de la Proposición 1.1.14. Ahora suponga que  $f \in \mathcal{R}([a, c], X) \cap \mathcal{R}([c, b], X)$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Luego existen  $Q_\varepsilon \in \mathcal{P}[a, c]$  y  $R_\varepsilon \in \mathcal{P}[c, b]$  tales que si  $(Q, U) \in \dot{\mathcal{P}}[a, c]$  con  $Q$  que refina a  $Q_\varepsilon$ , entonces  $\|f(Q, U) - \int_a^c f\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ; y si  $(R, V) \in \dot{\mathcal{P}}[c, b]$  con  $R$  que refina a  $R_\varepsilon$ , entonces  $\|f(R, V) - \int_c^b f\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Sea  $P_\varepsilon = Q_\varepsilon \cup R_\varepsilon \in \mathcal{P}[a, b]$  y sea  $(P, T) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $P$  que refina a  $P_\varepsilon$ . Sean  $(Q, U) = (P \cap [a, c], T \cap [a, c]) \in \dot{\mathcal{P}}[a, c]$  y  $(R, V) = (P \cap [c, b], T \cap [c, b]) \in \dot{\mathcal{P}}[c, b]$ . Entonces

$$\begin{aligned} \left\| f(P, T) - \left( \int_a^c f + \int_c^b f \right) \right\| &= \left\| f(Q, U) + f(R, V) - \int_a^c f - \int_c^b f \right\| \\ &\leq \left\| f(Q, U) - \int_a^c f \right\| + \left\| f(R, V) - \int_c^b f \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ya que  $Q$  refina a  $Q_\varepsilon$  y  $R$  refina a  $R_\varepsilon$ . Así,  $f \in \mathcal{R}([a, b], X)$  y  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .  $\square$

**Proposición 1.1.16.** Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  es continua, entonces  $f \in \mathcal{R}([a, b], X)$  y se cumple que  $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$ .

*Demostración.* Como  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces  $f$  es uniformemente continua. Para  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que  $\|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ , para todo  $x, y \in [a, b]$  con  $|x - y| < \delta$ . Sean  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $N > \frac{b-a}{\delta}$  y  $P_\varepsilon = \{t_i\}_{i=0}^N \in \mathcal{P}[a, b]$  dada por  $t_i = a + \frac{b-a}{N}i$ . Entonces  $t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{N}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$  y  $|P_\varepsilon| < \delta$ . Sean  $(P_1, T_1) = ([t_{i-1}, t_i], u_i)_{i=1}^N, (P_2, T_2) = ([t_{i-1}, t_i], v_i)_{i=1}^N \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|f(P_1, T_1) - f(P_2, T_2)\| &= \left\| \sum_{i=1}^N (f(u_i) - f(v_i))(t_i - t_{i-1}) \right\| \\ &\leq \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N \|f(u_i) - f(v_i)\| \\ &< \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ya que  $|u_i - v_i| \leq t_i - t_{i-1} < \delta$ . Así,  $f \in \mathcal{R}([a, b], X)$ , por el Teorema 1.1.13.

Como  $\|f\| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua (composición de dos funciones continuas), entonces  $\|f\|$  es Riemann-integrable (en el sentido clásico). Sea  $((P_n, T_n))_n$  una sucesión en  $\dot{\mathcal{P}}[a, b]$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n| = 0$ . Como  $f \in \mathcal{R}([a, b], X)$ , entonces de la definición se tiene  $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n, T_n)$ . Note que para cada  $(P, T) = ([t_{i-1}, t_i], s_i)_{i=1}^N \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$ ,

$$\|f(P, T)\| = \left\| \sum_{i=1}^N f(s_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| \leq \sum_{i=1}^N \|f(s_i)\|(t_i - t_{i-1}) = \|f\|(P, T).$$

Por la continuidad de la norma tenemos que

$$\left\| \int_a^b f \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(P_n, T_n)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f\|(P_n, T_n) = \int_a^b \|f\|.$$

□

Los siguientes son conceptos del análisis funcional que se usarán con frecuencia.

**Definición 1.1.17.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$ .

- (a) La función  $f$  es **débilmente medible** si  $x^*f$  es medible, para cada  $x^* \in X^*$ .
- (b) La función  $f$  es de **variación acotada débil** si  $x^*f$  es de variación acotada, para cada  $x^* \in X^*$ .
- (c) La función  $f$  es de **variación acotada en norma** si

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^k f(d_i) - f(c_i) \right\| : \{[c_i, d_i]\}_{i=1}^k \in \mathcal{D}[a, b] \right\} < \infty,$$

donde  $\mathcal{D}[a, b]$  denota el conjunto de todas las colecciones finitas de intervalos en  $[a, b]$  que no se superponen entre sí.

- (d) La función  $f$  es una **derivada escalar** de  $F : [a, b] \rightarrow X$  en  $[a, b]$  si para cada  $x^* \in X^*$ , la función  $x^*F$  es diferenciable a.e y  $(x^*F)' = x^*f$  a.e en  $[a, b]$ .

Los conceptos de variación acotada débil y variación acotada en norma son equivalentes. En la Proposición 1.1.21 damos una prueba de este resultado usando el Principio de Acotación Uniforme y el Teorema de Baire.

Los dos siguientes resultados muestran propiedades hereditarias de la integral de Riemann: la Proposición 1.1.18 establece que se preserva bajo composición de operadores lineales continuos, y el Teorema 1.1.19 es justamente el Teorema Fundamental del Cálculo.

**Proposición 1.1.18.** Sea  $f \in \mathcal{R}([a, b], X)$ .

- (1) Si  $T : X \rightarrow Y$  es un operador lineal continuo con  $Y$  espacio de Banach, entonces  $Tf \in \mathcal{R}([a, b], Y)$  y  $\int_a^b Tf = T(\int_a^b f)$ .
- (2) Para cada  $x^* \in X^*$  se tiene que  $x^*f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$  y  $\int_a^b x^*f = x^*(\int_a^b f)$ . Luego, la función  $f$  es débilmente medible, y para cada  $x^* \in X^*$ , la función  $x^*f$  es continua a.e en  $[a, b]$ .

*Demostración.* (2) es consecuencia de (1).

(1) Si  $T = 0$ , el resultado es claro. Suponga que  $T \neq 0$ , entonces  $\|T\| > 0$ . Sea  $\varepsilon > 0$  dado. Como  $f \in \mathcal{R}([a, b], X)$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $(P, V) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $|P| < \delta$ , entonces  $\left\| f(P, V) - \int_a^b f \right\| < \frac{\varepsilon}{\|T\|}$ . Sea  $(P, V) \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$  con  $|P| < \delta$ . Se tiene que

$$\left\| Tf(P, V) - T \left( \int_a^b f \right) \right\| = \left\| T \left( f(P, V) - \int_a^b f \right) \right\| \leq \|T\| \left\| f(P, V) - \int_a^b f \right\| < \varepsilon.$$

Por lo tanto,  $Tf \in \mathcal{R}([a, b], Y)$  y  $\int_a^b Tf = T \left( \int_a^b f \right)$ .  $\square$

**Teorema 1.1.19.** Sea  $f \in \mathcal{R}([a, b], X)$  y sea  $F : [a, b] \rightarrow X$  dada por  $F(t) = \int_a^t f$ . Entonces  $F$  es absolutamente continua en  $[a, b]$  y  $f$  es una derivada escalar de  $F$  en  $[a, b]$ . Más aún, si  $f$  es continua en  $c \in [a, b]$ , entonces  $F$  es diferenciable en  $c$  y  $F'(c) = f(c)$ .

*Demostración.* Como  $f \in \mathcal{R}([a, b], X)$ , por la Proposición 1.1.14 se tiene que  $f \in \mathcal{R}([a, t], X)$  para todo  $t \in [a, b]$ , y por tanto,  $F$  está bien definida. Sea  $M > 0$  una cota para  $f$  y sean  $s, t \in [a, b]$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|F(s) - F(t)\| &= \|F(\max\{s, t\}) - F(\min\{s, t\})\| \\ &\leq \int_{\min\{s, t\}}^{\max\{s, t\}} M = M|s - t|. \end{aligned}$$

Así,  $F$  es Lipschitz. Se sigue que  $F$  es absolutamente continua en  $[a, b]$ . Ahora, sea  $x^* \in X^*$ . Para cada  $t \in [a, b]$  se tiene que  $x^*F(t) = x^*\left(\int_a^t f\right) = \int_a^t x^*f$ , por el mismo argumento anterior,  $x^*F$  es absolutamente continua en  $[a, b]$  y por el teorema de diferenciación de Lebesgue,  $x^*F$  es diferenciable a.e en  $[a, b]$ . Se sigue del Teorema Fundamental del Cálculo que  $(x^*F)' = x^*f$  a.e en  $[a, b]$ . Así,  $f$  es una derivada escalar de  $F$  en  $[a, b]$ .

Suponga ahora que  $f$  es continua en  $c \in (a, b)$ . Veamos que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$ .

Sea  $\varepsilon > 0$  dado. Como  $f$  es continua en  $c$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\|f(t) - f(c)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ , para todo  $t \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$ . Podemos suponer que  $[c, c + \delta] \subseteq [a, b]$ . Sea  $h \in (0, \delta)$ . Entonces  $\|f(t) - f(c)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ , para todo  $t \in [c, c + h]$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(x) dx - \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(c) dx \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} (f(x) - f(c)) dx \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_c^{c+h} \|f(x) - f(c)\| dx \\ &\leq \frac{1}{h} \int_c^{c+h} \frac{\varepsilon}{2} dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Así,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$ . Análogamente se muestra que  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$ . Por lo tanto,  $F'(c) = f(c)$ . Si  $f$  es continua en  $c \in \{a, b\}$ , se usa solo uno de los límites laterales para la derivada.  $\square$

**Proposición 1.1.20.** Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  es de variación acotada débil, entonces  $f$  es acotada.

*Demostración.* Como  $f$  es de variación acotada débil, entonces para cada  $x^* \in X^*$  se tiene que  $x^*f$  es de variación acotada y por tanto acotada. Dado  $x \in [a, b]$ , sea  $T_{f(x)} : X^* \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $T_{f(x)}(x^*) = x^*(f(x))$ , para todo  $x^* \in X^*$ . Entonces  $\mathcal{F} = \{T_{f(x)} : x \in [a, b]\} \subseteq X^{**}$  y  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ . Luego,

$$\sup\{|T_{f(x)}(x^*)| : T_{f(x)} \in \mathcal{F}\} = \sup\{|x^*(f(x))| : x \in [a, b]\} < \infty,$$

para cada  $x^* \in X^*$ . Por el Principio de Acotación Uniforme, existe  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $r = \sup\{\|T_{f(x)}\| : x \in [a, b]\}$ . En consecuencia,

$$\|f(x)\| = \|T_{f(x)}\| = \sup\{|x^*(f(x))| : x^* \in B_{X^*}\} \leq r,$$

para cada  $x \in [a, b]$ . Por lo tanto,  $f$  es acotada.  $\square$

**Proposición 1.1.21.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$ . Entonces  $f$  es de variación acotada en norma si, y solo si,  $f$  es de variación acotada débil.

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $f$  es de variación acotada en norma. Entonces existe  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $r = \sup\{\|\sum_{i=1}^k f(d_i) - f(c_i)\| : \{[c_i, d_i]\}_{i=1}^k \in \mathcal{D}[a, b]\}$ . Sean  $x^* \in X^*$ ,  $P = \{t_i\}_{i=0}^N \in \mathcal{P}[a, b]$ ,  $A = \{i \in \{1, \dots, N\} : x^*(f(t_i)) - x^*(f(t_{i-1})) \geq 0\}$  y  $B = \{i \in \{1, \dots, N\} : x^*(f(t_i)) - x^*(f(t_{i-1})) < 0\}$ . Entonces

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N |x^*(f(t_i)) - x^*(f(t_{i-1}))| = \\ &= \sum_{i \in A} x^*(f(t_i)) - x^*(f(t_{i-1})) - \sum_{i \in B} x^*(f(t_i)) - x^*(f(t_{i-1})) \\ &= x^* \left( \sum_{i \in A} f(t_i) - f(t_{i-1}) \right) - x^* \left( \sum_{i \in B} f(t_i) - f(t_{i-1}) \right) \\ &\leq \left| x^* \left( \sum_{i \in A} f(t_i) - f(t_{i-1}) \right) \right| + \left| x^* \left( \sum_{i \in B} f(t_i) - f(t_{i-1}) \right) \right| \\ &\leq \|x^*\| \left\| \sum_{i \in A} f(t_i) - f(t_{i-1}) \right\| + \|x^*\| \left\| \sum_{i \in B} f(t_i) - f(t_{i-1}) \right\| \\ &\leq 2\|x^*\|r. \end{aligned}$$

Luego,  $\sup\{\sum_{i=1}^N |x^*(f(t_i)) - x^*(f(t_{i-1}))| : P \in \mathcal{P}[a, b]\} \leq 2\|x^*\|r < \infty$ , para cada  $x^* \in X^*$ . Así,  $f$  es de variación acotada débil.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $f$  es de variación acotada débil. Por la Proposición 1.1.20,  $f$  es acotada por algún  $s > 0$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $P = \{t_i\}_{i=0}^N \in \mathcal{P}[a, b]$ , definamos

$$A_n(P) = \left\{ x^* \in X^* : \sum_{i=1}^N |x^*(f(t_i)) - x^*(f(t_{i-1}))| \leq n \right\}.$$

Veamos que  $A_n(P)$  es cerrado. Sea  $(x_m^*)_m$  una sucesión en  $A_n(P)$  tal que

$x_m^* \rightarrow x^* \in X^*$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $\|x_m^* - x^*\| < \varepsilon$ , para todo  $m \geq M$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, N\}$  se tiene que

$$\begin{aligned} & |x^*(f(t_i)) - x^*(f(t_{i-1}))| \leq \\ & \leq |x^*(f(t_i)) - x_M^*(f(t_i))| + |x_M^*(f(t_i)) - x_M^*(f(t_{i-1}))| + |x_M^*(f(t_{i-1})) - x^*(f(t_{i-1}))| \\ & \leq \|x^* - x_M^*\| \|f(t_i)\| + |x_M^*(f(t_i)) - x_M^*(f(t_{i-1}))| + \|x_M^* - x^*\| \|f(t_{i-1})\| \\ & < 2\varepsilon s + |x_M^*(f(t_i)) - x_M^*(f(t_{i-1}))|. \end{aligned}$$

Como  $x_M^* \in A_n(P)$ , se sigue que  $\sum_{i=1}^N |x^*(f(t_i)) - x^*(f(t_{i-1}))| < 2N\varepsilon s + n$ . Por la arbitrariedad de  $\varepsilon > 0$ ,  $\sum_{i=1}^N |x^*(f(t_i)) - x^*(f(t_{i-1}))| \leq n$ . Así,  $x^* \in A_n(P)$ , y por tanto,  $A_n(P)$  es cerrado. Se sigue que el conjunto

$$A_n = \left\{ x^* \in X^* : \sum_{i=1}^N |x^*(f(t_i)) - x^*(f(t_{i-1}))| \leq n, \text{ para cada } P = \{t_i\}_{i=0}^N \in \mathcal{P}[a, b] \right\}$$

es cerrado, pues  $A_n = \bigcap \{A_n(P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$ . Note además que  $X^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , pues si  $x^* \in X^*$ , entonces como  $f$  es de variación acotada débil, se tiene que  $\sup\{\sum_{i=1}^N |x^*(f(t_i)) - x^*(f(t_{i-1}))| : P \in \mathcal{P}[a, b]\} < \infty$ . Por el Teorema de Baire, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{Int}(A_m) \neq \emptyset$ . Entonces existen  $x_0^* \in X^*$  y  $r > 0$  tales que  $B(x_0^*, r) \subseteq A_m$ . Sean  $x^* \in B_{X^*}$  y  $P = \{t_i\}_{i=0}^N \in \mathcal{P}[a, b]$  dados. Entonces  $y^* = \frac{r}{2}x^* + x_0^* \in A_m$ , es decir,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N |y^*(f(t_i)) - y^*(f(t_{i-1}))| = \\ & = \sum_{i=1}^N \left| \frac{r}{2}x^*(f(t_i)) - \frac{r}{2}x^*(f(t_{i-1})) + x_0^*(f(t_i)) - x_0^*(f(t_{i-1})) \right| \leq m. \end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{i=1}^N \left| \frac{r}{2} x^*(f(t_i)) - \frac{r}{2} x^*(f(t_{i-1})) \right| \leq m + \sum_{i=1}^N |x_0^*(f(t_i)) - x_0^*(f(t_{i-1}))| \leq 2m,$$

ya que  $x_0^* \in A_m$ . Por lo tanto,

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^N |x^*(f(t_i)) - x^*(f(t_{i-1}))| : P \in \mathcal{P}[a, b] \right\} \leq \frac{4m}{r},$$

para cada  $x^* \in B_{X^*}$ . Sean  $\varepsilon > 0$  y  $D = \{[c_i, d_i]\}_{i=1}^k \in \mathcal{D}[a, b]$  dados. Como

$$\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in B_{X^*}\} \text{ para todo } x \in X,$$

existe  $x^* \in B_{X^*}$  tal que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^k f(d_i) - f(c_i) \right\| - \varepsilon &< \left| x^* \left( \sum_{i=1}^k f(d_i) - f(c_i) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^k x^*(f(d_i)) - x^*(f(c_i)) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^k |x^*(f(d_i)) - x^*(f(c_i))| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_D} |x^*(f(u_i)) - x^*(f(u_{i-1}))| \leq \frac{4m}{r}. \end{aligned}$$

donde  $\{u_i\}_{i=0}^{N_D} \in \mathcal{P}[a, b]$  está formada por los puntos  $\{c_i, d_i\}_{i=1}^k$  junto con los puntos  $\{a, b\}$  de forma adecuada. Como  $\varepsilon > 0$  fue arbitrario, se sigue que

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^k f(d_i) - f(c_i) \right\| : \{[c_i, d_i]\}_{i=1}^k \in \mathcal{D}[a, b] \right\} \leq \frac{4m}{r} < \infty.$$

Así,  $f$  es de variación acotada en norma. □

**Teorema 1.1.22.** <sup>9</sup> Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  es de variación acotada en norma, entonces  $f \in \mathcal{R}([a, b], X)$ .

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$  dado. Por hipótesis,  $M = \sup\{\|\sum_{i=1}^k f(d_i) - f(c_i)\| : \{[c_i, d_i]\}_{i=1}^k \in \mathcal{D}[a, b]\} < \infty$ . Sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{b-a}{N} < \frac{\varepsilon}{M}$ . Sea  $P_\varepsilon = \{t_i\}_{i=0}^N \in \mathcal{P}[a, b]$  dada por  $t_i = a + \frac{b-a}{N}i$ . Sean  $(P_1, T_1) = ([t_{i-1}, t_i], u_i)_{i=1}^N$ ,  $(P_2, T_2) = ([t_{i-1}, t_i], v_i)_{i=1}^N \in \dot{\mathcal{P}}[a, b]$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|f(P_1, T_1) - f(P_2, T_2)\| &= \left\| \sum_{i=1}^N (f(u_i) - f(v_i))(t_i - t_{i-1}) \right\| \\ &= \frac{b-a}{N} \left\| \sum_{i=1}^N f(u_i) - f(v_i) \right\| \\ &\leq \frac{b-a}{N} M < \varepsilon. \end{aligned}$$

Así,  $f \in \mathcal{R}([a, b], X)$ , por el Teorema 1.1.13. □

En lo que sigue presentamos una serie de ejemplos que ilustran algunas características patológicas de la integral de Riemann en algunos espacios de Banach conocidos. Para esto necesitamos del Teorema 1.1.24, resultado clásico del Análisis Funcional que por ahora solo enunciaremos. Una prueba de este teorema se puede encontrar en <sup>10</sup>.

**Definición 1.1.23.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es de **recorrido esencialmente separable** si existe  $E \in \mathcal{L}$  con  $m(E) = 0$  tal que  $f([a, b] \setminus E)$  es un subconjunto separable (en norma) de  $X$ .

---

<sup>10</sup> J.J. Diestel J. & Uhl. *Vector Measures*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1997.

**Teorema 1.1.24.** (Teorema de medibilidad de Pettis) Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es medible si, y solo si,  $f$  es débilmente medible y de recorrido esencialmente separable.

**Ejemplo 1.1.25.** Sea  $\{e_t : t \in [0, 1]\}$  una base ortonormal de  $\ell_2[0, 1]$ . Considere la función  $f : [0, 1] \rightarrow \ell_2[0, 1]$  dada por  $f(t) = e_t$ . El Teorema de Representación de Riesz garantiza que  $x^*f = 0$  a.e para cada  $x^* \in \ell_2[0, 1]^* = \ell_2[0, 1]$ , luego  $f$  es débilmente medible. Por otro lado, si  $E \subseteq [0, 1]$ , entonces  $f([0, 1] \setminus E)$  es separable si, y solo si,  $[0, 1] \setminus E$  es numerable, con lo cual  $f$  no es de recorrido esencialmente separable, y por el Teorema 1.1.24,  $f$  no es medible.

**Definición 1.1.26.** Sean  $(e_n)_n$  una sucesión básica normalizada de  $X$  y  $(r_n)_n$  una enumeración de  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ . Definimos la función  $f_X : [0, 1] \rightarrow X$  por

$$f_X(t) = \begin{cases} e_n, & \text{si } t = r_n \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{si } t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

**Ejemplo 1.1.27.** <sup>9</sup> La función  $f_{c_0}$  es medible, Riemann-integrable y no es continua a.e.

-  $f_{c_0}$  es medible:

Sean  $x \in c_0$  y  $r > 0$ . Como  $m(\mathbb{Q}) = 0$  y  $m$  es completa, entonces  $f_{c_0}^{-1}(B(x, r)) \cap$

$\mathbb{Q} \in \mathcal{L}$ . Y como  $f_{c_0}^{-1}(B(x, r)) \cap \mathbb{Q}^c = \begin{cases} [0, 1] \cap \mathbb{Q}^c, & \text{si } \|x\|_\infty < r \\ \emptyset, & \text{si } \|x\|_\infty \geq r \end{cases}$ , entonces  $f_{c_0}^{-1}(B(x, r)) \cap$

$\mathbb{Q}^c \in \mathcal{L}$ . Así,  $f_{c_0}^{-1}(B(x, r)) \in \mathcal{L}$ , y por tanto,  $f_{c_0}$  es medible.

-  $f_{c_0}$  es Riemann-integrable:

Sea  $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^n \in \mathcal{D}[0, 1]$ . Note que  $\|\sum_{i=1}^n f_{c_0}(d_i) - f_{c_0}(c_i)\|_\infty \leq 1$ , ya que

$f_{c_0}|_{[0, 1] \cap \mathbb{Q}}$  es inyectiva. Así,  $f_{c_0}$  es de variación acotada en norma, y por tanto,

$f_{c_0} \in \mathcal{R}([0, 1], c_0)$ .

-  $f_{c_0}$  no es continua a.e:

Sea  $t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  y sea  $(t_n)_n$  una sucesión en  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  tal que  $t_n \rightarrow t$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{c_0}(t_n) - f_{c_0}(t)\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{c_0}(t_n)\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Es decir,  $f_{c_0}(t_n) \not\rightarrow f_{c_0}(t) = 0$ , y por tanto,  $f_{c_0}$  no es continua a.e en  $[0, 1]$ .

**Ejemplo 1.1.28.** <sup>9</sup> La función  $f_{\ell_p}$  con  $1 < p < \infty$  es medible, Riemann-integrable y no es de variación acotada en norma.

Por el mismo argumento del Ejemplo 1.1.27, se sabe que  $f_{\ell_p}$  es medible y no es continua a.e. Sin embargo,  $f_{\ell_p}$  es débilmente continua a.e.

-  $f_{\ell_p}$  es Riemann-integrable:

Sea  $\varepsilon > 0$  dado y tome  $\delta = \varepsilon^{\frac{p}{p-1}}$ . Sea  $(P, T) \in \dot{\mathcal{P}}[0, 1]$  con  $|P| < \delta$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} \|f_{\ell_p}(P, T)\|_p &= \left\| \sum_{i=1}^N f_{\ell_p}(s_i)(t_i - t_{i-1}) \right\|_p \leq \left( \sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1})^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( |P|^{p-1} \sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1}) \right)^{\frac{1}{p}} = |P|^{\frac{p-1}{p}} < \delta^{\frac{p-1}{p}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así,  $f_{\ell_p} \in \mathcal{R}([0, 1], \ell_p)$  y  $\int_0^1 f_{\ell_p} = 0$ .

-  $f$  no es de variación acotada en norma:

Dados  $N \in \mathbb{N}$  y  $j \in \{1, \dots, N\}$ , sea  $c_j \in \left(\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\right) \setminus \mathbb{Q}$ . Entonces

$$\left\| \sum_{j=1}^N \left( f_{\ell_p} \left( \frac{1}{j} \right) - f_{\ell_p} (c_j) \right) \right\|_p = \left( \sum_{j=1}^N 1^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{N} \rightarrow \infty \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

El siguiente ejemplo se debe a Graves <sup>3</sup>, artículo publicado en 1927 donde se mues-

tra el primer ejemplo de una función con valores en un espacio de Banach que es Riemann-integrable y discontinua en todo su dominio.

**Ejemplo 1.1.29.** <sup>9</sup> Una función Riemann-integrable que no es medible y no es débilmente continua a.e.

Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \ell_\infty[0, 1]$  dada por  $f(t) = \chi_{[0,t]}$ .

-  $f$  es Riemann-integrable:

Sea  $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^N \in \mathcal{D}[0, 1]$ . Entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^N (f(d_i) - f(c_i)) \right\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^N (\chi_{[0,d_i]} - \chi_{[0,c_i]}) \right\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^N \chi_{(c_i, d_i]} \right\|_\infty = 1.$$

Así,  $f$  es de variación acotada en norma, y por tanto,  $f \in \mathcal{R}([0, 1], \ell_\infty[0, 1])$ .

-  $f$  no es medible:

Suponga por contradicción que  $f$  es medible, entonces por el Teorema de medibilidad de Pettis,  $f$  es de recorrido esencialmente separable, es decir, existe  $E \in \mathcal{L}$  tal que  $m(E) = 0$  y  $f([0, 1] \setminus E)$  es separable. Sean  $t, s \in [0, 1] \setminus E$  fijos,  $t \neq s$ . Como  $\|f(t) - f(s)\|_\infty = 1$ , tenemos que

$$B\left(f(t), \frac{1}{2}\right) \cap B\left(f(s), \frac{1}{2}\right) = \emptyset. \quad (1)$$

Sea  $D$  un conjunto denso numerable de  $f([0, 1] \setminus E)$ . Luego,

$$D \cap B\left(f(t), \frac{1}{2}\right) \neq \emptyset, \text{ para todo } t \in [0, 1] \setminus E. \quad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que  $D$  no es numerable, lo cual es absurdo.

-  $f$  no es débilmente continua a.e.:

Sea  $t \in (0, 1]$  y sea  $(t_n)_n$  una sucesión en  $[0, 1]$  tal que  $t_n < t$ , para todo

$n \in \mathbb{N}$  y  $t_n \rightarrow t$ . Sea  $\varphi : \ell_\infty[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(g) = g(t)$ . Claramente  $\varphi \in \ell_\infty[0,1]^*$  pues  $|\varphi(g)| \leq \|g\|_\infty$ . Como  $\varphi(f(t_n)) = \chi_{[0,t_n]}(t) = 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $\varphi(f(t)) = \chi_{[0,t]}(t) = 1$ , entonces  $\varphi(f(t_n)) \not\rightarrow \varphi(f(t))$ , y así,  $f$  no es débilmente continua en  $t$ .

**Ejemplo 1.1.30.** <sup>9</sup> Una función  $f$  Riemann-integrable tal que  $\|f\|$  no es medible.

Sea  $E$  un subconjunto no medible de  $[0,1]$  y sea  $f : [0,1] \rightarrow \ell_\infty[0,1]$  dada por  $f(t) = 0$  si  $t \notin E$ , y  $f(t) = \chi_{\{t\}}$  si  $t \in E$ . Sea  $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^n \in \mathcal{D}[0,1]$ . Note que  $\|\sum_{i=1}^n f(d_i) - f(c_i)\|_\infty \leq 1$ , ya que  $f|_E$  es inyectiva. Así,  $f$  es de variación acotada en norma, y por tanto, Riemann-integrable. Finalmente, es claro que  $\|f\| = \chi_E$  no es medible.

## 1.2. Integración de Darboux

**Definición 1.2.1.** Sean  $f : [a, b] \rightarrow X$  y  $P = \{t_i\}_{i=1}^N \in \mathcal{P}[a, b]$ . Definimos

$$\omega(f, P) = \sum_{i=1}^N \omega(f, [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1}),$$

donde  $\omega(f, [t_{i-1}, t_i]) = \sup\{\|f(v) - f(u)\| : u, v \in [t_{i-1}, t_i]\}$  es la **oscilación** de  $f$  en  $[t_{i-1}, t_i]$ , para cada  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

**Definición 1.2.2.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es **Darboux-integrable** en  $[a, b]$  si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $P \in \mathcal{P}[a, b]$  con  $|P| < \delta$ , entonces  $\omega(f, P) < \varepsilon$ .

Usando la caracterización (4) del Teorema 1.1.13 y la desigualdad triangular se sigue inmediatamente que toda función Darboux-integrable es Riemann-integrable. El valor de la integral de Darboux es por definición el valor de la integral de Riemann.

**Definición 1.2.3.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$  y sea  $t \in [a, b]$ . La **oscilación** de  $f$  en  $t$  se

define por

$$\omega(f, t) = \begin{cases} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f, [t - \delta, t + \delta]), & \text{si } t \in (a, b); \\ \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f, [a, a + \delta]), & \text{si } t = a; \\ \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f, [b - \delta, b]), & \text{si } t = b. \end{cases}$$

**Proposición 1.2.4.** Sean  $f : [a, b] \rightarrow X$ . Entonces

- (1)  $f$  es continua en  $t$  si, y solo si,  $\omega(f, t) = 0$ .
- (2) El conjunto  $\{t \in [a, b] : \omega(f, t) \geq \alpha\}$  es cerrado para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (3)  $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{t \in [a, b] : \omega(f, t) \geq 1/n\}$  es el conjunto de puntos de discontinuidad de  $f$ .

Como en el caso de  $\mathbb{R}$ , el siguiente resultado nos dice que las funciones integrales según Darboux son exactamente aquellas funciones acotadas y continuas a.e. Incluimos una prueba de esto aquí.

**Teorema 1.2.5.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Darboux-integrable en  $[a, b]$  si, y solo si, es acotada y continua a.e en  $[a, b]$ .

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Suponga que  $f$  es Darboux-integrable en  $[a, b]$ . Entonces  $f$  es acotada. Para ver que  $f$  es continua a.e en  $[a, b]$ , sea  $E_n = \{t \in [a, b] : \omega(f, t) \geq 1/n\}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , y sea  $E = \cup_n E_n$ . Como cada  $E_n$  es cerrado,  $E \in \mathcal{L}$ . Observe que  $m(E) = 0$ . En efecto, si  $m(E) \neq 0$ , entonces existen  $\eta > 0$  y  $N \in \mathbb{N}$  tales que  $m(E_N) = \eta$ . Sean  $P \in \mathcal{P}[a, b]$  y  $\mathcal{A}$  la colección de intervalos de  $P$  que contienen puntos de  $E_N$  en su interior. Entonces

$$\omega(f, P) \geq \sum_{I \in \mathcal{A}} \omega(f, I)m(I) \geq \frac{1}{N}m(E_N) = \frac{\eta}{N},$$

que es absurdo pues  $f$  es Darboux-integrable. Así,  $f$  es continua a.e en  $[a, b]$ .

( $\Leftarrow$ ) Ahora suponga que  $f$  es acotada y continua a.e en  $[a, b]$ , y sea  $M$  una cota para  $f$ . Sean  $\varepsilon > 0$  y  $N \in \mathbb{N}$  tales que  $(b - a)/N < \varepsilon/2$ . Sea  $E_N = \{t \in [a, b] : \omega(f, t) \geq 1/N\}$ . La idea para probar que  $f$  es Darboux-integrable es construir una partición  $P_\varepsilon$  de  $[a, b]$  tal que la suma de las longitudes de los intervalos de  $P_\varepsilon$  que intersecan a  $E_N$  sea menor que  $\varepsilon/(4M)$ , y la oscilación de  $f$  en cada intervalo de  $P_\varepsilon$  que no interseca a  $E_N$  sea menor que  $1/N$ . Denotemos los intervalos de  $P_\varepsilon$  que intersecan a  $E_N$  por  $P'_\varepsilon$  y los demás intervalos por  $P''_\varepsilon$ . Como  $m(E_N) = 0$ , existe una sucesión  $\{(c_i, d_i)\}$  de intervalos abiertos disyuntos tal que  $E_N \subset \cup_i (c_i, d_i)$  y  $\sum_i (d_i - c_i) < \varepsilon/(4M)$ . Como  $E_N$  es compacto, existe una cantidad finita de intervalos  $\{(c_i, d_i)\}$  que cubre a  $E_N$ . La clausura de cada intervalo en la subcubierta finita intersecada con  $[a, b]$  es un elemento de  $P'_\varepsilon$ . Sea  $[\alpha, \beta]$  un intervalo en  $[a, b]$  que es contiguo a los intervalos de  $P'_\varepsilon$ . Como  $[\alpha, \beta] \cap E_N = \phi$ , para cada  $t \in [\alpha, \beta]$  existe  $\delta_t > 0$  tal que  $\omega(f, [t - \delta_t, t + \delta_t]) < 1/N$ . La colección  $\{(t - \delta_t, t + \delta_t) : t \in [\alpha, \beta]\}$  es una cubierta abierta de  $[\alpha, \beta]$ . Por la compacidad de  $[\alpha, \beta]$ , existe una subcubierta finita. Los puntos extremos de los intervalos de la subcubierta finita que pertenecen a  $(\alpha, \beta)$ , junto con  $\alpha$  y  $\beta$  forman una partición de  $[\alpha, \beta]$ . Ponemos los intervalos de esta partición en  $P''_\varepsilon$  y hacemos esto para cada uno de los intervalos en  $[a, b]$  que son contiguos a los intervalos de  $P'_\varepsilon$ . Así, los intervalos de  $P'_\varepsilon$  junto con los de  $P''_\varepsilon$  forman la partición  $P_\varepsilon$  de  $[a, b]$  con las propiedades deseadas. Sea  $P$  una partición de  $[a, b]$  que refina a  $P_\varepsilon$ . Sean  $P'$  y  $P''$  los intervalos de  $P$  que están completamente contenidos en los intervalos de  $P'_\varepsilon$  y  $P''_\varepsilon$ , respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \omega(f, P) &= \sum_{I \in P'} \omega(f, I)m(I) + \sum_{I \in P''} \omega(f, I)m(I) \\ &\leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{1}{N}(b - a) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f$  es Darboux-integrable en  $[a, b]$ .

□

El siguiente teorema será de gran utilidad en el Capítulo 3.

**Teorema 1.2.6.** <sup>9</sup> Toda función débilmente Riemann-integrable que tiene rango relativamente compacto es Darboux-integrable.

*Demostración.* Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$  débilmente Riemann-integrable en  $[a, b]$  con rango relativamente compacto. Como  $f$  es acotada, solo resta probar que  $f$  es continua a.e. Sea  $V = \overline{co(f([a, b]))}$ . Observe que  $V$  es separable, luego existe una sucesión  $(x_n^*)_n$  en  $X^*$  tal que  $\|v\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(v)|$  para todo  $v \in V$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $D_n$  el conjunto de discontinuidades de  $x_n^* f$  en  $[a, b]$  y sea  $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ . Como  $f$  es débilmente Riemann-integrable,  $m(D) = 0$ . Veamos que  $f$  es continua en  $[a, b] \setminus D$ . Sean  $t \in [a, b] \setminus D$  y  $(t_k)_k$  una sucesión en  $[a, b]$  que converge a  $t$ . Como  $x_n^* f$  es continua en  $t$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , cada sucesión  $(x_n^* f(t_k))_k$  converge a  $x_n^* f(t)$ . Como  $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$  separa puntos de  $V$  y  $V$  es compacto, la sucesión  $(f(t_k))_k$  converge en norma a  $f(t)$ . Así,  $f$  es continua en  $t$ . □

### 1.3. La Propiedad de Lebesgue

Del Teorema 1.2.5 se sigue que toda función  $f : [a, b] \rightarrow X$  acotada y continua a.e es Riemann-integrable; sin embargo, el recíproco de esta afirmación no se cumple en general para todo espacio de Banach, como vimos en los Ejemplos 1.1.27, 1.1.28 y 1.1.29. Esta observación permite introducir la siguiente definición.

**Definición 1.3.1.** <sup>9</sup> Un espacio de Banach  $X$  tiene la **Propiedad de Lebesgue** (PL) si cada función  $f : [0, 1] \rightarrow X$  Riemann-integrable es continua a.e.

En la literatura es usual ver el intervalo  $[0, 1]$  de la definición anterior solo por conveniencia, pues el mismo argumento que se use para  $[0, 1]$  se adapta también (de manera adecuada) para  $[a, b]$ .

**Proposición 1.3.2.** Si  $f : [0, 1] \rightarrow X$  es una función continua a.e. y  $T : X \rightarrow Y$  es un operador lineal y continuo, entonces la función  $Tf$  es continua a.e.

*Demostración.* Es inmediato pues  $D(Tf) \subseteq D(f)$ , donde  $D(f)$  denota el conjunto de discontinuidades de  $f$ . □

**Teorema 1.3.3.** <sup>9</sup> Si  $X$  tiene la PL, entonces todo espacio de Banach isomorfo a un subespacio de  $X$  tiene la PL.

*Demostración.* Sea  $Z$  un espacio de Banach isomorfo a  $Y$  un subespacio de  $X$ . Sea  $f \in \mathcal{R}([0, 1], Z)$  y sea  $T : Z \rightarrow Y$  un isomorfismo. Por (1) de la Proposición 1.1.18 se tiene que  $Tf \in \mathcal{R}([0, 1], Y)$ . Como  $Y$  es subespacio de  $X$  y  $X$  tiene la PL, entonces  $Tf$  es continua a.e. Se sigue de la proposición anterior que  $f = T^{-1}Tf$  es continua a.e y así,  $Z$  tiene la PL. □

A partir del teorema anterior obtenemos una amplia lista de espacios de Banach que no tienen la PL.

**Corolario 1.3.4.** Los siguientes espacios no tienen la PL:

- (1) Los espacios  $c_0$ ,  $c$ ,  $\ell_\infty$ ,  $C[a, b]$ ,  $\ell_\infty[a, b]$  y  $L_\infty[a, b]$ .
- (2) Los espacios  $\ell_p$ , con  $1 < p < \infty$ .
- (3) El espacio  $L_1[a, b]$ .
- (4)  $X^*$ , si  $X$  tiene una copia de  $\ell_1$ .

*Demostración.* Del Ejemplo 1.1.27 se tiene que  $c_0$  no tiene la PL. Los demás espacios en (1) no tienen la PL, pues tienen una copia de  $c_0$ . (2) se sigue del Ejemplo 1.1.28. (3) y (4) se tienen por el hecho de que  $\ell_2$  se encaja en  $L_1[a, b]$  y en  $X^*$  si  $X$  tiene una copia de  $\ell_1$  (vea <sup>11</sup>). □

---

<sup>11</sup> N.J. Albiac F. & Kalton. *Topics in Banach Space Theory*. New York: Graduate Texts in Mathematics 233, Springer, 2006.

Como consecuencia del Teorema 1.3.6 debido a Rocha <sup>6</sup>, se tiene que los espacios  $L_p[a, b]$  con  $1 < p < \infty$ , y los espacios de Hilbert de dimensión infinita no tienen la PL. En la prueba del Teorema 1.3.6 se usa el siguiente resultado de James. Recordemos que  $X$  es uniformemente convexo si

$$\inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : x, y \in B_X, \|x-y\| \geq \varepsilon \right\} > 0$$

para todo  $\varepsilon \in (0, 2]$ .

**Teorema 1.3.5.** <sup>12</sup> Si  $X$  es uniformemente convexo y  $(e_n)_n$  es una sucesión básica normalizada de  $X$ , entonces existen  $M > 0$  y  $r > 1$  tales que  $\|\sum_n \alpha_n e_n\| \leq M (\sum_n |\alpha_n|^r)^{1/r}$  para toda sucesión  $(\alpha_n)_n$  de números reales con una cantidad finita de elementos distintos de cero.

**Teorema 1.3.6.** <sup>9</sup> Si  $X$  es uniformemente convexo de dimensión infinita, entonces  $X$  no tiene la PL.

*Demostración.* Sean  $X$  uniformemente convexo de dimensión infinita y  $(e_n)_n$  una sucesión básica normalizada de  $X$ . Por el Teorema 1.3.5, existen  $M > 0$  y  $r > 1$  tales que  $\|\sum_n \alpha_n e_n\| \leq M (\sum_n |\alpha_n|^r)^{1/r}$  para toda sucesión  $(\alpha_n)_n$  de número reales con una cantidad finita de elementos distintos de cero. Sea  $f_X$  la función de la Definición 1.1.26. Es claro que  $f_X$  no es continua a.e en  $[0, 1]$ . Veamos que  $f_X$  es Riemann-integrable. Sea  $\varepsilon > 0$  dado. Sean  $\delta = (\varepsilon/M)^{r/(r-1)}$  y  $(P, T) \in \dot{\mathcal{P}}[0, 1]$  con  $|P| < \delta$ .

---

<sup>12</sup> R.C. James. "Super-Reflexive Spaces with Bases". En: *Pacific J. Math.* 41.2 (1972), págs. 409-419.

Entonces

$$\begin{aligned}
\|f_X(P, T)\| &= \left\| \sum_{i=1}^N f_X(s_i) (t_i - t_{i-1}) \right\| \\
&\leq M \left( \sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1})^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq M \delta^{\frac{r-1}{r}} \left( \sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1}) \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así,  $f_X \in \mathcal{R}([0, 1], X)$  y por tanto,  $X$  no tiene la PL. □

Como ya mencionamos en la introducción, todo espacio de dimensión finita tiene la PL. Nemirovski, Ochan y Rejouani <sup>5</sup> probaron que  $\ell_1$  tiene la PL; Rocha <sup>6</sup> también probó este resultado independientemente. Siendo así  $\ell_1$  el único espacio de Banach clásico con la PL. Presentamos a continuación la prueba dada por Rocha.

**Teorema 1.3.7.** <sup>6</sup>  $\ell_1$  tiene la PL.

*Demostración.* Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \ell_1$  acotada y no continua a.e. Por la Proposición 1.2.4, existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que  $m(H) = \alpha$ , donde  $H = \{t \in [0, 1] : \omega(f, t) \geq \beta\}$ . Para ver que  $f \notin \mathcal{R}([0, 1], \ell_1)$ , se probará que para cada  $\delta > 0$  existen  $(P_1, T_1), (P_2, T_2) \in \dot{\mathcal{P}}[0, 1]$  tales que  $|P_1|, |P_2| < \delta$  y  $\|f(P_1, T_1) - f(P_2, T_2)\| \geq \alpha\beta/4$ .

Sea  $\delta > 0$  dado. Tome  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $1/N < \delta$  y  $P_N = \{k/N : 0 \leq k \leq N\} \in \mathcal{P}[0, 1]$ . Sea  $\{[c_i, d_i] : 1 \leq i \leq p\}$  el conjunto de intervalos de  $P_N$  tal que  $m(H \cap (c_i, d_i)) > 0$

para cada  $i \in \{1, \dots, p\}$ . Note que  $p/N \geq \alpha$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \alpha = m(H) &= m\left(\bigcup_{k=1}^N H \cap \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right]\right) \\ &= \sum_{i=1}^p m(H \cap [c_i, d_i]) \\ &\leq \sum_{i=1}^p m([c_i, d_i]) = \frac{p}{N}. \end{aligned}$$

Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , sea  $D_j$  el conjunto de discontinuidades de  $\pi_j f$  en  $[0, 1]$ , donde  $\pi_j : \ell_1 \rightarrow \mathbb{R}$  es la función proyección a la coordenada  $j$ -ésima. Si  $m(D_j) \neq 0$  para algún  $j \in \mathbb{N}$ , entonces  $\pi_j f \notin \mathcal{R}([0, 1], \mathbb{R})$ , y por la Proposición 1.1.18,  $f \notin \mathcal{R}([0, 1], \ell_1)$ . De lo contrario, el conjunto  $D = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} D_j$  tiene medida nula y cada  $\pi_j f$  es continua en  $[0, 1] \setminus D$ . Sea  $\varepsilon = \alpha\beta/16$ . La idea es construir conjuntos  $\{u_i : 1 \leq i \leq p\}$ ,  $\{v_i : 1 \leq i \leq p\}$  y  $\{n_i : 0 \leq i \leq p\}$ , donde para cada  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $u_i \in (H \setminus D) \cap (c_i, d_i)$ ,  $v_i \in (c_i, d_i)$  y  $n_i \in \mathbb{N}$  tal que  $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_p$ , con las siguientes propiedades: **(i)** Si  $z_i = f(u_i) - f(v_i) = (a_j^i)_j$ , entonces  $\|z_i\| \geq \beta/2$  para todo  $1 \leq i \leq p$ , **(ii)**  $\sum_{j=n_i}^{\infty} |a_j^i| < \varepsilon 2^{-i}$  para todo  $1 \leq i \leq p$ , y **(iii)**  $\sum_{j=1}^{n_{i-1}} |a_j^i| < \varepsilon 2^{-i}$  para todo  $2 \leq i \leq p$ .

Procedemos de la siguiente manera. Sea  $n_0 = 0$  y tome  $u_1 \in (H \setminus D) \cap (c_1, d_1)$ . Como  $\omega(f, u_1) \geq \beta$ , entonces existe  $v_1 \in (c_1, d_1)$  tal que  $\|f(u_1) - f(v_1)\| \geq \beta/2$ . Sea  $z_1 = f(u_1) - f(v_1) = (a_j^1)_j$  y tome  $n_1 > 1$  tal que  $\sum_{j=n_1}^{\infty} |a_j^1| < \varepsilon/2$ . Ahora tome  $u_2 \in (H \setminus D) \cap (c_2, d_2)$ . Como  $\omega(f, u_2) \geq \beta$  y como  $\pi_j f$  es continua en  $u_2$  para cada  $1 \leq j \leq n_1$ , entonces existe  $v_2 \in (c_2, d_2)$  tal que  $\|f(u_2) - f(v_2)\| \geq \beta/2$  y  $\sum_{j=1}^{n_1} |\pi_j f(u_2) - \pi_j f(v_2)| < \varepsilon/4$ . Sea  $z_2 = f(u_2) - f(v_2) = (a_j^2)_j$ , entonces  $\sum_{j=1}^{n_1} |a_j^2| < \varepsilon/4$  y  $\|z_2\| \geq \beta/2$ . Tome  $n_2 > n_1$  tal que  $\sum_{j=n_2}^{\infty} |a_j^2| < \varepsilon/4$ . Suponga que se han definido inductivamente los conjuntos  $\{u_i\}_{i=1}^{p-1}$ ,  $\{v_i\}_{i=1}^{p-1}$  y  $\{n_i\}_{i=0}^{p-1}$  que satisfacen las propiedades **(i)**, **(ii)** y **(iii)** para cada  $1 \leq i \leq p-1$ . Tome ahora  $u_p \in (H \setminus D) \cap (c_p, d_p)$ . Como  $\omega(f, u_p) \geq \beta$  y  $\pi_j f$  es continua en  $u_p$  para cada

$1 \leq j \leq n_{p-1}$ , existe  $v_p \in (c_p, d_p)$  tal que

$$\|f(u_p) - f(v_p)\| \geq \frac{\beta}{2} \text{ y } \sum_{j=1}^{n_{p-1}} |\pi_j f(u_p) - \pi_j f(v_p)| < \frac{\varepsilon}{2^p}.$$

Defina  $z_p = f(u_p) - f(v_p) = (a_j^p)_j$ . Como  $z_p \in \ell_1$ , existe  $n_p > n_{p-1}$  tal que  $\sum_{j=n_p}^{\infty} |a_j^p| < \frac{\varepsilon}{2^p}$ . Se tiene entonces que  $\|z_p\| \geq \frac{\beta}{2}$ ,  $\sum_{j=1}^{n_{p-1}} |a_j^p| < \varepsilon 2^{-p}$  y  $\sum_{j=n_p}^{\infty} |a_j^p| < \varepsilon 2^{-p}$ . De esta forma obtenemos los conjuntos deseados.

Sea  $(e_n)_n$  la base canónica de  $\ell_1$  y sea  $y_i = \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i-1} a_j^i e_j$  para cada  $1 \leq i \leq p$ . Entonces

$$\|z_i - y_i\| = \sum_{j=1}^{n_{i-1}} |a_j^i| + \sum_{j=n_i}^{\infty} |a_j^i| < 2\varepsilon 2^{-i}$$

y

$$\|y_i\| = \|z_i\| - \|z_i - y_i\| \geq \frac{1}{2}\beta - 2\varepsilon 2^{-i}$$

para todo  $1 \leq i \leq p$ . Además, se tiene que

$$\left\| \sum_{i=1}^p y_i \right\| = \sum_{i=1}^p \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i-1} a_j^i = \sum_{i=1}^p \|y_i\|.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^p z_i \right\| &\geq \left\| \sum_{i=1}^p y_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^p (y_i - z_i) \right\| \\ &\geq \sum_{i=1}^p \|y_i\| - \sum_{i=1}^p \|y_i - z_i\| \\ &\geq \sum_{i=1}^p \left( \frac{1}{2}\beta - 2\varepsilon 2^{-i} \right) - \sum_{i=1}^p 2\varepsilon 2^{-i} \\ &\geq \frac{1}{2}p\beta - 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Sean  $(P_1, T_1), (P_2, T_2) \in \dot{\mathcal{P}}[0, 1]$ , donde  $P_1 = P_2 = P_N$ , los elementos de  $T_1$  y  $T_2$  son  $u_i$  y  $v_i$  respectivamente en los intervalos  $[c_i, d_i]$  para  $1 \leq i \leq p$ , y los elementos de  $T_1$  y  $T_2$  son iguales en los demás intervalos. Entonces

$$\|f(P_1, T_1) - f(P_2, T_2)\| = \left\| \sum_{i=1}^p \frac{1}{N} z_i \right\| \geq \frac{1}{2} \frac{p}{N} \beta - \frac{4}{N} \varepsilon \geq \frac{1}{2} \alpha \beta - \frac{1}{4} \alpha \beta = \frac{\alpha \beta}{4}.$$

Esto completa la prueba. □

Observe que los espacios reflexivos clásicos  $\ell_p$  con  $1 < p < \infty$  no tienen la PL. Así que es natural preguntarse si existe algún espacio reflexivo de dimensión infinita con la PL. Por los Teoremas 1.3.3 y 1.3.6, tal espacio no puede contener copias de  $c_0$  ni subespacios uniformemente convexos de dimensión infinita. El espacio de Tsirelson definido por Casazza y Shura<sup>13</sup> cumple con todas estas propiedades, y fue Rocha<sup>6</sup> quien demostró que este espacio tiene la PL usando un argumento similar al que se usó en la prueba del Teorema 1.3.7. Otro resultado importante que demostró Rocha es que la Propiedad de Lebesgue se preserva bajo la 1-suma (o suma- $\ell_1$ ) arbitraria de espacios de Banach, concepto que se define a continuación.

**Definición 1.3.8.** Sean  $\{X_i\}_{i \in \Gamma}$  una familia de espacios de Banach y  $1 \leq p \leq \infty$ . El espacio producto  $X = \prod_{i \in \Gamma} X_i$  es un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|(x_i)_{i \in \Gamma}\|_p = \|(\|x_i\|)_{i \in \Gamma}\|_p.$$

---

<sup>13</sup> T. Casazza P.G. & Shura. "Tsirelson's Space". En: *Springer-Verlag* (1989).

Por ejemplo, si  $X = \prod_{i=1}^n X_i$  y  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ , entonces

$$\|x\|_p = \begin{cases} (\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p)^{1/p}, & \text{si } 1 \leq p < \infty; \\ \text{máx}\{\|x_i\|\}_{1 \leq i \leq n}, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

El espacio producto con esta norma es usualmente denotado por  $[\bigoplus_{i \in \Gamma} X_i]_p$  y es llamado **p-suma directa** de los espacios  $X_i$ .

**Teorema 1.3.9.** <sup>6</sup> Sea  $\{X_i\}_{i \in \Gamma}$  una familia de espacios de Banach con la PL. Entonces el espacio  $[\bigoplus_{i \in \Gamma} X_i]_1$  tiene la PL.

Adicionalmente, la Propiedad de Lebesgue presenta otras dos características interesantes que son las siguientes:

- (i) Es *separablemente determinada*:  $X$  tiene la PL si, y solo si, todo subespacio separable de  $X$  tiene la PL.
- (ii) Sea  $Y$  un subespacio cerrado de  $X$ . Si  $Y$  y  $X/Y$  tienen la PL, entonces  $X$  tiene la PL.

Presentamos a continuación las pruebas de estos dos resultados. Para la prueba de (i) se usa el Lema 1.3.10, resultado conjeturado por Haydon en 1984 <sup>14</sup> y demostrado por Pizzotti en 1989 <sup>8</sup>. Para la prueba de (ii) se usa el Lema 1.3.12, también demostrado por Pizzotti <sup>8</sup>.

**Lema 1.3.10.** <sup>8</sup> Si  $X$  no tiene la PL, entonces existen  $A \subseteq [0, 1]$  denso numerable y  $g : [0, 1] \rightarrow X$  Riemann-integrable y no continua a.e tal que  $g(t) = 0$  si  $t \notin A$ , y  $\|g(t)\| = 1$  si  $t \in A$ .

---

<sup>14</sup> R. Haydon. "Darboux integrability and separability of types in stable Banach spaces". En: 20.7 (1984), págs. 95-115.

**Teorema 1.3.11.** <sup>8</sup>  $X$  tiene la PL si, y solo si, todo subespacio separable de  $X$  tiene la PL.

*Demostración.* Ya se sabe que si  $X$  tiene la PL, entonces todo subespacio separable de  $X$  tiene la PL. Recíprocamente, si  $X$  no tiene la PL, entonces por el Lema 1.3.10, existen  $A \subseteq [0, 1]$  denso numerable y  $g : [0, 1] \rightarrow X$  Riemann-integrable y no continua a.e tal que  $g(t) = 0$  si  $t \notin A$ , y  $\|g(t)\| = 1$  si  $t \in A$ . Sea  $Z = \overline{\text{gen}(g(A))}$ . Entonces  $Z$  es un subespacio separable de  $X$  y  $g : [0, 1] \rightarrow Z$  es Riemann-integrable y no continua a.e, es decir,  $Z$  no tiene la PL.  $\square$

**Lema 1.3.12.** <sup>8</sup> Dado  $Y$  un subespacio cerrado de  $X$ , existe  $\psi : X/Y \rightarrow X$  continua tal que  $\psi(x + Y) \in x + Y$  para todo  $x \in X$ .

**Teorema 1.3.13.** <sup>8</sup> Sea  $Y$  un subespacio cerrado de  $X$ . Si  $Y$  y  $X/Y$  tienen la PL, entonces  $X$  tiene la PL.

*Demostración.* Sea  $f : [0, 1] \rightarrow X$  Riemann-integrable. Por el Lema 1.3.12, existe  $\psi : X/Y \rightarrow X$  continua tal que  $\psi(x + Y) \in x + Y$  para todo  $x \in X$ . Sea  $\pi : X \rightarrow X/Y$  la función dada por  $\pi(x) = x + Y$ . Como  $\pi$  es continua, entonces por la Proposición 1.1.18, la función  $\pi f : [0, 1] \rightarrow X/Y$  es Riemann-integrable y por tanto continua a.e ya que  $X/Y$  tiene la PL. Por la Proposición 1.3.2,  $\psi \pi f$  es continua a.e. y además Riemann-integrable. Como  $\psi(x + Y) - x \in Y$  para todo  $x \in X$ , entonces  $\psi \pi f(t) - f(t) \in Y$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Como  $Y$  tiene la PL y  $\psi \pi f - f$  es Riemann-integrable, se tiene que  $\psi \pi f - f$  es continua a.e. Así,  $f = \psi \pi f - (\psi \pi f - f)$  es continua a.e y por lo tanto,  $X$  tiene la PL.  $\square$

**Observación 1.3.14.** Si  $X$  tiene la PL entonces por el Teorema 1.3.3, todo subespacio  $Y$  de  $X$  tiene la PL, pero no necesariamente  $X/Y$  tiene la PL; por ejemplo,  $\ell_1$  tiene la PL y  $c_0 \approx \ell_1/Y$  no la tiene.

#### 1.4. La Propiedad Débil de Lebesgue

Dados  $X$  un espacio de Banach y  $f : [0, 1] \rightarrow X$ , se tiene que si  $f$  es continua a.e entonces es débilmente continua a.e; el recíproco no es cierto como lo muestra la función  $f_{\ell_p}$  del Ejemplo 1.1.28. De esta observación se puede concluir que al debilitar la condición de continuidad a.e se ganan más funciones y por lo tanto más espacios de Banach  $X$ , lo que nos lleva a la siguiente definición introducida por Wang en 1996.

**Definición 1.4.1.** <sup>15</sup> Un espacio de Banach  $X$  se dice que tiene la propiedad débil de Lebesgue (WPL), si para cada función  $f : [0, 1] \rightarrow X$  Riemann-integrable se tiene que  $f$  es débilmente continua a.e.

Como veremos más adelante los espacios  $c_0$  y  $L_p$  con  $1 \leq p < \infty$  tienen la WPL, espacios que en principio no tienen la PL. Se puede ver entonces la ganancia de espacios con esta propiedad. Al igual que pasa con la PL, la WPL se preserva bajo isomorfismos.

**Teorema 1.4.2.** Si  $X$  tiene la WPL, entonces todo espacio de Banach isomorfo a un subespacio de  $X$  tiene la WPL.

*Demostración.* Vea el argumento usado en la prueba del Teorema 1.3.3 y use el hecho de que si  $f : [0, 1] \rightarrow X$  es débilmente continua a.e y  $T : X \rightarrow Y$  es continuo, entonces  $Tf$  es débilmente continua a.e.  $\square$

El siguiente lema es una herramienta muy útil para el estudio de la continuidad débil a.e.

---

<sup>15</sup> C. Wang. "On the weak property of Lebesgue of Banach spaces". En: *Journal of Nanjing University Mathematical Biquarterly* 13.2 (1996), págs. 150-155.

**Lema 1.4.3.** <sup>16</sup> Sean  $D = \{\overline{x_i^*}\}_{i \in \Gamma}$  un subconjunto denso de  $X^*$ ,  $f : [0, 1] \rightarrow X$  una función acotada,  $E \subseteq [0, 1]$  el conjunto de puntos de discontinuidad débil de  $f$  y  $E_i$  el conjunto de puntos de discontinuidad de  $x_i^* f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada  $i \in \Gamma$ . Entonces,  $E = \bigcup_{i \in \Gamma} E_i$ .

*Demostración.* Note que para cada  $i \in \Gamma$ ,  $E_i \subseteq E$  y por tanto,  $\bigcup_{i \in \Gamma} E_i \subseteq E$ . Para la otra contención se probará que  $(\bigcup_{i \in \Gamma} E_i)^c \subseteq E^c$ . En efecto, sea  $x^* \in X^*$  y sea  $M = \sup\{\|f(t)\| : t \in [0, 1]\}$ . Sean  $\varepsilon > 0$  y  $t \in (\bigcup_{i \in \Gamma} E_i)^c$  dados. Como  $D$  es denso en  $X^*$ , entonces existe  $x_j^* \in D$  tal que  $\|x_j^* - x^*\| < \frac{\varepsilon}{3M}$ . Como  $t \notin E_j$ , existe una vecindad  $U$  de  $t$  tal que  $|x_j^* f(t) - x_j^* f(t')| < \frac{\varepsilon}{3}$ , para cada  $t' \in U$ . Luego, para cada  $t' \in U$  se tiene que

$$\begin{aligned} |x^* f(t) - x^* f(t')| &\leq |x^* f(t) - x_j^* f(t)| + |x_j^* f(t) - x_j^* f(t')| + |x_j^* f(t') - x^* f(t')| \\ &\leq \|x^* - x_j^*\| \|f(t)\| + |x_j^* f(t) - x_j^* f(t')| + \|x_j^* - x^*\| \|f(t')\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $x^* f$  es continua en  $t$ . Como  $x^* \in X^*$  fue arbitrario,  $t \in E^c$ . □

**Corolario 1.4.4.** Todo espacio de Banach con dual separable tiene la WPL.

*Demostración.* Sea  $f : [0, 1] \rightarrow X$  Riemann-integrable. Entonces  $f$  es débilmente Riemann-integrable, y por tanto,  $x^* f$  es continua a.e, para todo  $x^* \in X^*$ . Como  $X^*$  es separable, existe  $D = \{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$  denso en  $X^*$ . Por el Lema 1.4.3,  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  es el conjunto de puntos de discontinuidad débil de  $f$ . Note que cada  $E_n$  tiene medida nula y por tanto,  $f$  es débilmente continua a.e. Así,  $X$  tiene la WPL. □

Para lo que sigue de este capítulo se necesita introducir algunos invariantes cardinales. Se denota por  $\text{dens}(X)$  al menor cardinal de un subconjunto denso de  $X$ ; y

---

<sup>16</sup> G.M. Cervantes. "Integration, Geometry and Topology in Banach Spaces". Ph.D. thesis. España: Universidad Nacional Autónoma de México, 2017.

por  $\text{cov}(\mathcal{M})$  al menor cardinal  $\kappa$  tal que existen  $\kappa$  subconjuntos cerrados de  $[0, 1]$  con medida nula cuya unión no tiene medida nula. Bajo la hipótesis del continuo se sabe que  $\text{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$  (vea <sup>17</sup>). El siguiente teorema es una generalización del Corolario 1.4.4 en términos de  $\text{cov}(\mathcal{M})$ .

**Teorema 1.4.5.** <sup>16</sup> Si  $\text{dens}(X^*) < \text{cov}(\mathcal{M})$ , entonces  $X$  tiene la WPL.

*Demostración.* Sean  $D = \{x_i^*\}_{i \in \Gamma}$  un subconjunto denso en  $X^*$  con  $|\Gamma| < \text{cov}(\mathcal{M})$  y  $f : [0, 1] \rightarrow X$  Riemann-integrable. Dado  $i \in \Gamma$ , sea  $E_i$  el conjunto de puntos de discontinuidad de  $x_i^* f$ . Como  $x_i^* f$  es Riemann-integrable, podemos escribir

$$E_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{i,n}$$

donde  $A_{i,n} = \{t \in [0, 1] : \text{osc}(x_i^* f, t) \geq 1/n\}$ . Sabemos que  $A_{i,n}$  es cerrado y tiene medida nula, para cada  $i \in \Gamma$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $|\Gamma \times \mathbb{N}| = |\Gamma| < \text{cov}(\mathcal{M})$ , el conjunto

$$E := \bigcup_{i \in \Gamma} E_i = \bigcup_{i \in \Gamma} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{i,n} = \bigcup_{(i,n) \in \Gamma \times \mathbb{N}} A_{i,n}$$

tiene medida nula. Por el Lema 1.4.3,  $E$  es el conjunto de puntos de discontinuidad débil de  $f$ , es decir,  $f$  es débilmente continua a.e. De lo anterior, concluimos que  $X$  tiene la WPL.  $\square$

El espacio  $\ell_1$  tiene la WPL ya que tiene la PL. Los espacios  $c_0$  y  $L_p$  con  $1 < p < \infty$ , no tienen la PL, pero sí tienen la WPL ya que su dual es separable. En <sup>18</sup>, Wang y Wan muestran que  $L_1$  tiene la WPL. La función definida en el Ejemplo 1.1.29 permite concluir que el espacio  $\ell_\infty[0, 1]$  no tiene la WPL. Otro ejemplo más elaborado

---

<sup>17</sup> H. Bartoszyński T. & Judah. "Set theory: On the structure of the real line". En: *Ak Peters Series* (1995).

<sup>18</sup> K. Wang C. & Wan. "On the weak property of Lebesgue of  $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ ". En: *Rocky mountain J. Math.* 31.2 (2001), págs. 697-703.

de un espacio de Banach que no tiene la WPL es el espacio Árbol de James ( $JT$ ), resultado que mostramos en el Teorema 1.4.6. A continuación recordamos cómo se define el espacio  $JT$ .

Considere el árbol diádico

$$T = \{(n, k) : n \in \mathbb{N} \text{ y } k = 1, 2, \dots, 2^n\}.$$

Un segmento de  $T$  es una sucesión finita  $\{p_1, \dots, p_m\}$  tal que  $p_{j+1}$  es un sucesor inmediato de  $p_j$ , para cada  $j = 1, 2, \dots, m - 1$ . El espacio  $JT$  es la completación de  $c_{00}(T)$  con la norma

$$\|x\| = \sup \sqrt{\sum_{j=1}^l \left( \sum_{(n,k) \in S_j} x(n, k) \right)^2} < \infty,$$

donde el supremo se toma sobre todo  $l \in \mathbb{N}$  y todos los conjuntos de segmentos  $S_1, S_2, \dots, S_l$  disyuntos dos a dos. Este espacio resulta ser separable con dual no separable.

**Teorema 1.4.6.** <sup>16</sup> El espacio  $JT$  no tiene la WPL.

*Demostración.* La idea es construir una función  $f : [0, 1] \rightarrow JT$  Riemann-integrable y débilmente discontinua en todo punto de  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ . Sea  $\{e_{(n,k)}\}_{(n,k) \in T}$  la base canónica de  $JT$ , es decir,  $e_{(n,k)}$  es la función característica de  $\{(n, k)\}$ . Definamos  $f : [0, 1] \rightarrow JT$  así:

$$f(t) = \begin{cases} e_{(n-1,k)} & \text{si } t = \frac{2k-1}{2^n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ y } k = 1, 2, \dots, 2^{n-1} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Veamos que  $f$  es Riemann-integrable. Sean  $N \in \mathbb{N}$  y  $\{I_1, I_2, \dots, I_{2^N-1}\}$  una familia

de subintervalos cerrados de  $[0, 1]$  disyuntos dos a dos tales que

$$\sum_{n=1}^{2^N-1} m(I_n) \leq \frac{1}{2^N} \text{ y } \frac{n}{2^N} \in \text{Int}(I_n), \text{ para cada } 1 \leq n \leq 2^N - 1.$$

Sean  $J_1, J_2, \dots, J_{2^N}$  los subintervalos cerrados de  $[0, 1]$  y disyuntos dos a dos, determinados por

$$[0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{2^N-1} \text{Int}(I_n).$$

Entonces,  $m(J_n) \leq \frac{1}{2^N}$  y  $\left\| \sum_{n=1}^{2^N} a_n f(t_n) \right\| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{2^N} a_n^2}$ , para cada  $a_n \in \mathbb{R}$ ,  $t_n \in J_n$  y  $1 \leq n \leq 2^N$ , por la definición de la norma en  $JT$ . Luego, cualquier partición etiquetada  $(P, T)$  con intervalos  $J_1, I_1, J_2, \dots, I_{2^N-1}, J_{2^N}$  y puntos  $t_1, t'_1, t_2, \dots, t'_{2^N-1}, t_{2^N}$ , satisface

$$\begin{aligned} \|f(P, T)\| &= \left\| \sum_{n=1}^{2^N} m(J_n) f(t_n) + \sum_{n=1}^{2^N-1} m(I_n) f(t'_n) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{2^N} m(J_n) f(t_n) \right\| + \sum_{n=1}^{2^N-1} m(I_n) \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{2^N} m(J_n)^2} + \frac{1}{2^N} \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{2^{2N}}} + \frac{1}{2^N} \leq \frac{2}{\sqrt{2^N}}. \end{aligned}$$

Haciendo  $N \rightarrow \infty$  se concluye que  $f$  es Riemann-integrable con integral cero.

Veamos que  $f$  no es débilmente continua en  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ . Sea  $t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ . Como el conjunto  $\mathbb{D}$  de los números diádicos es denso en  $[0, 1]$ , existe una sucesión  $(t_j)_j = \left(\frac{2k_j-1}{2^{n_j}}\right)_j$  en  $\mathbb{D}$  que converge a  $t$ , donde  $(n_j - 1, k_j)_j$  es una sucesión en  $T$  tal que  $(n_{j+1} - 1, k_{j+1})$  es un sucesor inmediato de  $(n_j - 1, k_j)$ , para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Para

ver que  $f(t_j)$  no converge débilmente a  $f(t) = 0$ , tome  $x^* = \sum_{j=1}^{\infty} e_{(n_j-1, k_j)}^* \in JT^*$  y observe que  $x^* f(t_j) = x^* f(\frac{2k_j-1}{2^{n_j}}) = x^* e_{(n_j-1, k_j)} = 1$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Así,  $f$  no es débilmente continua en  $t$ . Por lo tanto, el espacio  $JT$  no tiene la WPL.  $\square$

Del Teorema 1.4.2 sabemos que la WPL se preserva bajo isomorfismos. Además, cada espacio de Banach separable es isométricamente isomorfo a un subespacio de  $C[0, 1]$ . Por lo tanto, de la separabilidad del espacio  $JT$  y del teorema anterior se obtiene el siguiente resultado:

**Corolario 1.4.7.**  $C[0, 1]$  no tiene la WPL.

Este resultado se puede generalizar para cualquier  $C(K)$  con  $K$  un espacio Hausdorff compacto, como lo establece el siguiente corolario. En la prueba se usan resultados del Análisis Funcional que se pueden encontrar en <sup>19</sup>.

**Corolario 1.4.8.** Sea  $K$  un espacio Hausdorff compacto.

- (1) Si  $K$  es metrizable, entonces  $C(K)$  tiene la WPL si, y solo si,  $K$  es numerable.
- (2) Si  $C(K)$  tiene la WPL, entonces  $K$  es disperso (todo subconjunto no vacío de  $K$  tiene un punto aislado).

*Demostración.* (1) Si  $K$  es un espacio métrico compacto numerable, entonces  $C(K)^*$  es separable, luego por el Corolario 1.4.4,  $C(K)$  tiene la WPL. Recíprocamente, si  $K$  no es numerable, por el Teorema de Milutin,  $C(K)$  es isomorfo a  $C[0, 1]$ . Como  $C[0, 1]$  no tiene la WPL, del Teorema 1.4.2 concluimos que  $C(K)$  no tiene la WPL.

- (2) Si  $K$  no es disperso, entonces  $C(K)$  tiene un subespacio isomorfo a  $C[0, 1]$ , y por tanto,  $C(K)$  no tiene la WPL.

---

<sup>19</sup> P. & Hájek P. & Montesinos V. & Zizler V. Fabian M. & Habala. *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis*. Canadian Mathematical Society, Springer, 2011.

□

Como ya se mencionó en el Teorema 1.3.9, la suma- $\ell_1$  arbitraria de espacios con la PL tiene la PL, y por tanto tiene la WPL. Aunque los espacios  $c_0$  y  $\ell_p$  tienen la WPL, la suma- $\ell_p$  ( $1 < p \leq \infty$ ) no numerable de espacios con la WPL no tiene la WPL, ni siquiera cuando  $X_i = \mathbb{R}$  para todo  $i \in \Gamma$ ; sin embargo, el siguiente teorema establece que la suma- $\ell_p$  numerable de espacios con la WPL tiene la WPL.

**Teorema 1.4.9.** Sean  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  una familia numerable de espacios con la WPL y  $1 < p \leq \infty$ . Entonces el espacio  $X = [\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n]_p$  tiene la WPL.

*Demostración.* Sea  $f : [0, 1] \rightarrow X$  Riemann-integrable. Entonces  $f$  es acotada,  $f(t) = (f_n(t))_n$  y  $f_n(t) \in X_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se tiene además que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n = \pi_n f : [0, 1] \rightarrow X_n$  es Riemann-integrable, donde  $\pi_n$  es la función proyección a la  $n$ -ésima coordenada. Como cada  $X_n$  tiene la WPL,  $f_n$  es débilmente continua a.e. Luego, por el Lema 1.4.3, el conjunto de puntos de discontinuidad débil de  $f$  es  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ , donde  $E_n$  es el conjunto de puntos de discontinuidad débil de cada  $f_n$ . De aquí que  $f$  es débilmente continua a.e y así,  $X$  tiene la WPL.

□

## 2. UNA CARACTERIZACIÓN DE LA PROPIEDAD DE LEBESGUE

Determinar cuales espacios de Banach tienen la PL fue un problema abierto durante casi un siglo. Recientemente, H. Gaebler y B. Sari publicaron su artículo <sup>7</sup>, donde muestran una caracterización de la PL. Como lo destacan Gaebler y Sari, este resultado ya había sido establecido por Marina Pizzotti en su tesis doctoral <sup>8</sup>. El objetivo de este capítulo es presentar la demostración de esta caracterización.

### 2.1. Resultados Preliminares

En esta sección establecemos las herramientas que usaremos para caracterizar los espacios de Banach con la Propiedad de Lebesgue. El próximo Lema es un resultado debido a M. Pizzotti.

**Lema 2.1.1.** <sup>8</sup> Sea  $\mathbb{D} = \{d_j\}_{j=1}^{\infty}$  el conjunto de los números diádicos en  $[0, 1]$ . Si  $X$  no tiene la PL, entonces existe una sucesión básica normalizada  $(x_j)_j$  tal que la función  $f : [0, 1] \rightarrow X$  definida por

$$f(t) = \begin{cases} x_j, & \text{si } t = d_j \in \mathbb{D}; \\ 0, & \text{si } t \notin \mathbb{D} \end{cases}$$

es Riemann-integrable.

*Demostración.* Por el Teorema 1.3.11 podemos suponer que  $X$  es separable y por tanto isométricamente isomorfo a un subespacio de  $C[0, 1]$ . Como  $X$  no tiene la PL, entonces por el Lema 1.3.10 existen  $A \subseteq [0, 1]$  denso numerable y  $g : [0, 1] \rightarrow X$  Riemann-integrable y no continua a.e tal que  $g(x) = 0$  si  $x \notin A$ , y  $\|g(x)\| = 1$  si  $x \in A$ . Sea  $(e_n)_n$  una base de  $C[0, 1]$ . Sean  $L \geq 1$  la constante básica de  $(e_n)_n$  y

$M = 2L$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $P_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  dada por

$$P_n \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \right) = \sum_{k=1}^n a_k e_k.$$

Como  $P_n$  es lineal continua y tiene rango finito,  $P_n g$  es acotada y continua a.e. Así, para cada  $n \in \mathbb{N}$  y cada  $a, b \in [0, 1]$  con  $a < b$ , existe  $t \in (a, b) \setminus A$  en donde  $P_n g$  es continua, y además  $P_n g(t) = 0$  ya que  $t \notin A$ . Luego, como  $A$  es denso, para cada  $\varepsilon > 0$ , existen  $t \in (a, b) \setminus A$  y  $s \in (a, b) \cap A$  tales que  $\|P_n g(s) - P_n g(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$  y por tanto,  $\|P_n g(s)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Además,  $\|g(s)\| = 1$  ya que  $s \in A$ .

Hagamos  $I_1 = (0, 1)$ ,  $I_2 = (0, \frac{1}{2})$ ,  $\dots$ ,  $I_{2^{n+i}} = (\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n})$  y  $d_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\dots$ ,  $d_{2^{n+i}} = \frac{2i+1}{2^{n+1}} \in \mathbb{D}$ , si  $n \in \mathbb{N}$  y  $i \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ . Definamos la función  $f : [0, 1] \rightarrow X$  de la siguiente manera. Tomemos  $s_1 \in I_1$  con  $\|g(s_1)\| = 1$ . Existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|g(s_1) - P_{n_1} g(s_1)\| < \frac{1}{4M}$ . Hagamos  $f(d_1) = P_{n_1} g(s_1)$ . Tenemos que

$$\|f(d_1)\| \geq \|g(s_1)\| - \frac{1}{4M} = 1 - \frac{1}{4M} \geq 1 - \frac{1}{4} > \frac{1}{2} \text{ y } \|f(d_1) - g(s_1)\| < \frac{1}{4M}.$$

Tomemos ahora  $s_2 \in I_2$  con  $\|g(s_2)\| = 1$  y  $\|P_{n_1} g(s_2)\| < \frac{1}{16M}$ . Sea  $n_2 \in \mathbb{N}$  con  $n_2 > n_1$  tal que  $\|g(s_2) - P_{n_2} g(s_2)\| < \frac{1}{16M}$ . Hagamos  $f(d_2) = (P_{n_2} - P_{n_1})(g(s_2))$ . Tenemos que

$$\|f(d_2) - g(s_2)\| \leq \|P_{n_2} g(s_2) - g(s_2)\| + \|P_{n_1} g(s_2)\| < \frac{1}{8M} \text{ y}$$

$$\|f(d_2)\| \geq \|g(s_2)\| - \|g(s_2) - f(d_2)\| \geq 1 - \frac{1}{8M} > \frac{1}{2}.$$

Haciendo inducción obtenemos sucesiones  $(n_k)_k$  en  $\mathbb{N}$  y  $(s_k)_k$  en  $[0, 1]$  con  $n_k < n_{k+1}$  y  $s_k \in I_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , tales que

$$\|g(s_k)\| = 1, \quad \|P_{n_{k-1}} g(s_k)\| < \frac{1}{2^{k+2}M} \text{ y } \|g(s_k) - P_{n_k} g(s_k)\| < \frac{1}{2^{k+2}M},$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Así, haciendo

$$f(t) = \begin{cases} P_{n_1}g(s_1), & \text{si } t = d_1 \in \mathbb{D}; \\ (P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(g(s_k)), & \text{si } t = d_k \in \mathbb{D}, k > 1; \\ 0, & \text{si } t \notin \mathbb{D}, \end{cases}$$

tenemos que

$$\|f(d_k) - g(s_k)\| < \frac{1}{2^{k+1}M} \text{ y } \|f(d_k)\| > \frac{1}{2},$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Definamos ahora la función  $h : [0, 1] \rightarrow X$  por

$$h(t) = \begin{cases} g(s_k), & \text{si } t = d_k \in \mathbb{D}; \\ 0, & \text{si } t \notin \mathbb{D}. \end{cases}$$

Note que  $h$  es Riemann-integrable. En efecto, como  $g$  es Riemann-integrable, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $P_\varepsilon = \{t_i\}_{i=0}^N \in \mathcal{P}[0, 1]$  tal que  $\|g(P_1, T_1) - g(P_2, T_2)\| < \varepsilon$ , para todo  $(P_1, T_1), (P_2, T_2) \in \dot{\mathcal{P}}[0, 1]$  con  $P_1 = P_2 = P_\varepsilon$ . Como en cada intervalo  $I_k$  existen puntos donde  $g$  se anula, se tiene que si  $(P_1, U_1), (P_2, U_2) \in \dot{\mathcal{P}}[0, 1]$  con  $P_1 = P_2 = P_\varepsilon$ , entonces

$$\|h(P_1, U_1) - h(P_2, U_2)\| = \|g(P_1, T_1) - g(P_2, T_2)\| < \varepsilon,$$

y por tanto,  $h$  es Riemann-integrable. Además, puesto que  $(f - h)(t) = 0$  si  $t \notin \mathbb{D}$ , y  $\|(f - h)(d_k)\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , entonces  $f - h$  es continua a.e y por tanto Riemann-integrable. Así,  $f = (f - h) + h$  es Riemann-integrable. □

El Lema 2.1.2 se usará en la demostración del resultado principal de este capítulo. Establece una equivalencia para las funciones Riemann-integrables en términos de particiones diádicas del mismo tamaño.

**Lema 2.1.2.** Una función  $f : [0, 1] \rightarrow X$  es Riemann-integrable si, y solo si, existe un vector  $z \in X$  con la siguiente propiedad: para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\|z - \frac{1}{2^m} \sum_{i=1}^{2^m} f(s_i)\| < \varepsilon$  para todo  $m \geq n$  y  $s_i \in (\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m})$ .

*Demostración.* Una implicación es trivial. Veamos la otra implicación. Sean  $\varepsilon > 0$  dado y  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\|\frac{1}{2^m} \sum_{i=1}^{2^m} f(s_i)\| < \varepsilon$  para todo  $m \geq n$  y  $s_i \in (\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m})$ , donde asumimos sin pérdida de generalidad (por medio de una traslación) que  $z = 0$ . Un argumento similar al usado en la prueba de la Proposición 1.1.5 muestra que  $f$  es acotada. Sean  $M = \sup_{t \in [0,1]} \|f(t)\|$  y  $P = \{t_j\}_{j=0}^N \in \mathcal{P}[0, 1]$  tal que  $|P| < \frac{\varepsilon}{M2^{n+1}}$ . Sea  $Q = \{\frac{i}{2^n}\}_{i=0}^{2^n} \in \mathcal{P}[0, 1]$  y definamos el conjunto  $B = \{j \in \{1, \dots, N\} \mid \frac{i}{2^n} \in [t_{j-1}, t_j]\}$  de tal forma que  $|B| = 2^n$ . Sean  $S = \{s_i\}_{i=1}^{2^n}$  y  $T = \{v_j\}_{j=1}^N$  conjuntos de etiquetas de  $Q$  y  $P$ , respectivamente. Se tiene que

$$\begin{aligned} \|f(Q, S) - f(P, T)\| &= \left\| \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} f(s_i) - \sum_{j=1}^N f(v_j) (t_j - t_{j-1}) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j \in A_i} (f(s_i) - f(v_j)) (t_j - t_{j-1}) \right\| + 2M \sum_{j \in B} (t_j - t_{j-1}) \\ &< \left\| \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j \in A_i} 2^n (t_j - t_{j-1}) \frac{1}{2^n} (f(s_i) - f(v_j)) \right\| + \varepsilon, \end{aligned}$$

donde  $A_i = \{j \in \{1, \dots, N\} \mid [t_{j-1}, t_j] \subset (\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})\}$ . Tomando  $n$  suficientemente grande podemos asumir que

$$\sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j \in A_i} 2^n (t_j - t_{j-1}) \frac{1}{2^n} (f(s_i) - f(v_j)) \in \sum_{i=1}^{2^n} \text{co}(Y_i) = \text{co} \left( \sum_{i=1}^{2^n} Y_i \right),$$

donde  $Y_i = \{\frac{1}{2^n} (f(t) - f(t')) \mid t, t' \in (\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})\}$ . Usando el mismo argumento en la prueba del Teorema 1.1.13 se tiene que  $\|x\| < 2\varepsilon$  para todo  $x \in \text{co}(\sum_{i=1}^{2^n} Y_i)$ . Luego,

$$\|f(P, T)\| \leq \|f(Q, S)\| + \|f(Q, S) - f(P, T)\| < \varepsilon + 3\varepsilon = 4\varepsilon.$$

Por lo tanto,  $f$  es Riemann-integrable. □

**2.1.1. Sistema Haar de Particiones de  $\mathbb{N}$**  Consideremos el conjunto  $\mathbb{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{j}{2^n} \mid 0 \leq j \leq 2^n - 1\}$  de los números diádicos en  $[0, 1]$  y lo representamos como una estructura en forma de árbol como muestra la Figura 2.

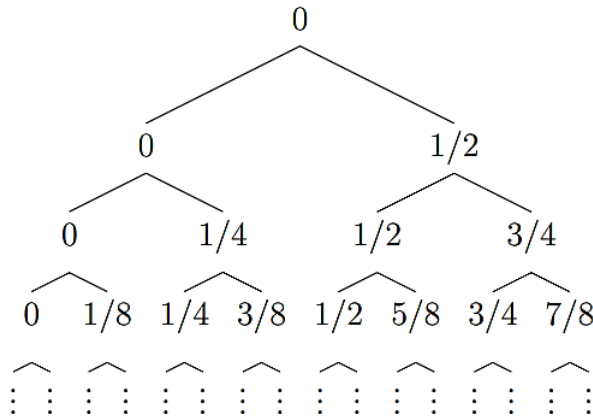


Figura 2. Árbol Diádico

En particular, para cada  $d_j^n = \frac{j}{2^n} \in \mathbb{D}$ , existe una única rama tal que el  $n$ -ésimo nodo de esta rama es  $d_j^n$ . Este tipo de estructuras para ciertos subconjuntos infinitos de  $\mathbb{N}$  induce a la siguiente definición.

**Definición 2.1.3.** Una colección  $(A_j^n)_{j=0, n \in \mathbb{N}}^{2^n-1}$  de subconjuntos infinitos de  $\mathbb{N}$  se dice que es un sistema Haar de particiones (sHp) de  $\mathbb{N}$  si:

- (1) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\bigcup_{j=0}^{2^n-1} A_j^n = \mathbb{N}$  y  $A_j^n \cap A_{j'}^n = \emptyset$  si  $j \neq j'$ .
- (2) Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $0 \leq j < 2^n - 1$ ,  $A_j^n = A_{2j}^{n+1} \cup A_{2j+1}^{n+1}$ .

La condición (2) dice que los subconjuntos del nivel  $n + 1$  resultan de particionar cada subconjunto del nivel  $n$  en dos subconjuntos infinitos.

Un sistema Haar de particiones  $(A_j^n)_{j=0, n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{N}$  puede ser organizado en forma similar al árbol diádico de la siguiente manera.

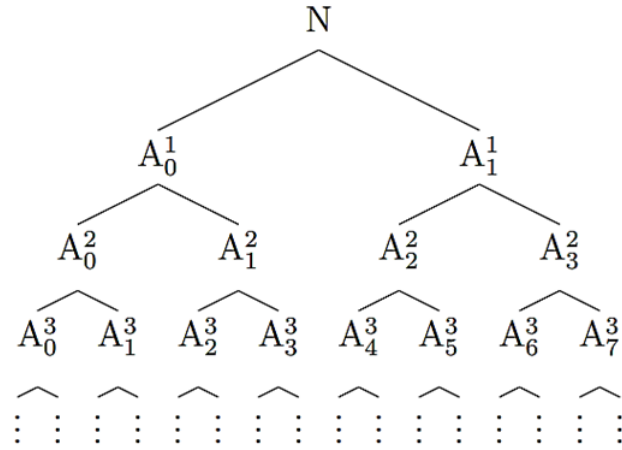


Figura 3. Árbol de un sHp de  $\mathbb{N}$

Por ejemplo, considere el siguiente sHp de  $\mathbb{N}$  definido recursivamente: para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $j \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ , definamos el conjunto

$$A_j^n = \{2^n k - a_{n,j} : k \in \mathbb{N}\},$$

donde  $a_{1,0} = 0, a_{1,1} = 1$  y

$$a_{n,j} = \begin{cases} 2a_{n-1,j}, & \text{si } j \in \{0, \dots, 2^{n-1} - 1\} \\ 1 + a_{n,j-2^{n-1}}, & \text{si } j \in \{2^{n-1}, \dots, 2^n - 1\} \end{cases}, \quad n \geq 2.$$

Observe que los conjuntos  $A_{2j}^{n+1}$  y  $A_{2j+1}^{n+1}$  resultan de tomar los números que están en la posición par (e impar, respectivamente) del conjunto  $A_j^n$ . De esta forma, sabiendo que

$$A_0^1 = \{2k : k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\} \text{ y}$$

$$A_1^1 = \{2k - 1 : k \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\},$$

entonces

$$A_0^2 = \{4, 8, 12, \dots\} = \{4k : k \in \mathbb{N}\},$$

$$A_1^2 = \{2, 6, 10, \dots\} = \{4k - 2 : k \in \mathbb{N}\},$$

$$A_2^2 = \{3, 7, 11, \dots\} = \{4k - 1 : k \in \mathbb{N}\},$$

$$A_3^2 = \{1, 5, 9, \dots\} = \{4k - 3 : k \in \mathbb{N}\}.$$

Y de la misma forma tenemos, por poner algunos más:

$$A_2^3 = \{6, 14, 22, 30, 38, \dots\} = \{8k - 2 : k \in \mathbb{N}\},$$

$$A_5^4 = \{6, 22, 38, \dots\} = \{16k - 10 : k \in \mathbb{N}\}.$$

Note además cómo se aplica la fórmula recursiva para hallar el coeficiente  $a_{n,j}$ :

$$a_{3,2} = 2a_{2,2} = 2(1) = 2, \text{ y}$$

$$a_{4,5} = 2a_{3,5} = 2(1 + a_{3,1}) = 2(1 + 2a_{2,1}) = 2(1 + 2(2)) = 10.$$

**Observación 2.1.4.** Considere la función  $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow (A_j^n)_{j,n}$  definida por  $\sigma(d_j^n) = k_j^n$ , donde  $k_j^n$  es el  $2^n$ -ésimo elemento de  $A_j^n$ . Por ejemplo, para el sHp de  $\mathbb{N}$  definido

anteriormente se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2(2) - 1 = 3, \\ \sigma\left(\frac{1}{4}\right) &= 4(4) - 2 = 14, \\ \sigma\left(\frac{3}{4}\right) &= 4(4) - 3 = 13, \\ \sigma\left(\frac{1}{8}\right) &= 8(8) - 4 = 60, \\ \sigma\left(\frac{3}{8}\right) &= 8(8) - 6 = 58, \\ \sigma\left(\frac{5}{8}\right) &= 8(8) - 5 = 59, \\ \sigma\left(\frac{7}{8}\right) &= 8(8) - 7 = 57,\end{aligned}$$

y así sucesivamente. Observe que  $\sigma$  encaja a  $\mathbb{D}$  en el sHp de  $\mathbb{N}$  de forma que para cada  $d_j^n$ , la única rama del árbol diádico cuyo  $n$ -ésimo nodo es  $d_j^n$  corresponde a la única rama en el árbol del sHp de  $\mathbb{N}$ .

**Definición 2.1.5.** Sea  $(e_i)_i$  una sucesión básica normalizada en  $X$ . Se dice que  $(e_i)_i$  es una sucesión Haar- $\ell_1^+$  si para cada sistema Haar de particiones  $(A_j^n)_{j=0, n \in \mathbb{N}}^{2^n-1}$  de  $\mathbb{N}$ , existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\frac{1}{C} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2^m} \left\| \sum_{j=0}^{2^m-1} e_{i_j} \right\| : m \geq n \text{ y } 2^m \leq i_j \in A_j^m \right\}.$$

Con todas las herramientas preparadas pasamos al resultado más importante de este capítulo.

## 2.2. Caracterización de la Propiedad de Lebesgue

**Teorema 2.2.1.** <sup>78</sup>  $X$  tiene la PL si, y solo si, cada sucesión básica normalizada en  $X$  es una sucesión Haar- $\ell_1^+$ .

*Demostración.* ( $\Leftarrow$ ) Suponga que  $X$  no tiene la PL. Entonces por el Lema 2.1.1, existe una sucesión básica normalizada  $(x_j)_j$  tal que la función  $f : [0, 1] \rightarrow X$  definida por

$$f(t) = \begin{cases} x_j, & \text{si } t = d_j \in \mathbb{D}; \\ 0, & \text{si } t \notin \mathbb{D} \end{cases}$$

es Riemann-integrable y  $\int_0^1 f = 0$ , donde  $d_j = d_{2^n+i} = \frac{2i+1}{2^{n+1}}$ . Sea  $(A_k^n)_{k=0, n \in \mathbb{N}}$  el sHp de  $\mathbb{N}$  dado por  $A_0^n = \{j \mid d_j \in (0, \frac{1}{2^n})\}$ ,  $A_1^n = \{j \mid d_j \in [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n})\}$ ,  $\dots$ ,  $A_{2^n-1}^n = \{j \mid d_j \in [\frac{2^n-1}{2^n}, 1)\}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $C > 0$  dado y tome  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2C})$ . Como  $f \in \mathcal{R}([0, 1], X)$ , por el Lema 2.1.2, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2^m} \left\| \sum_{i=1}^{2^m} f(s_i) \right\| < \varepsilon$ , para todo  $m \geq n$  y  $s_i \in [\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m})$ . Se sigue que

$$\frac{1}{2^m} \left\| \sum_{k=0}^{2^m-1} x_{j_k} \right\| = \frac{1}{2^m} \left\| \sum_{k=0}^{2^m-1} f(d_{j_k}) \right\| < \varepsilon < \frac{1}{C}$$

para todo  $m \geq n$  y todo  $j_k \in A_k^m$  con  $0 \leq k \leq 2^m - 1$ . Es decir,  $(x_j)_j$  no es una sucesión Haar- $\ell_1^+$ .

( $\Rightarrow$ ) Suponga que  $X$  tiene la PL y sea  $(e_i)_i$  una sucesión básica normalizada en  $X$ . Sea  $(A_j^n)_{j=0, n \in \mathbb{N}}$  un sHp de  $\mathbb{N}$  y defina la función  $f : [0, 1] \rightarrow X$  por

$$f(t) = \begin{cases} e_{\sigma(d_k)}, & \text{si } t = d_k \in \mathbb{D}; \\ 0, & \text{si } t \notin \mathbb{D}, \end{cases}$$

donde  $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow (A_j^n)_{j,n}$  es la función definida en la Observación 2.1.4. Es claro que  $f$  es discontinua en todo su dominio y por tanto no es Riemann-integrable ya que  $X$  tiene la PL. Luego, por el Lema 2.1.2, existe  $c > 0$  tal que para cada  $n' \in \mathbb{N}$ , existe  $n \geq n'$  tal que  $c \leq \frac{1}{2^n} \left\| \sum_{j=1}^{2^n} f(s_j) \right\|$  para algunos  $s_j \in (\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n})$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  considere los conjuntos  $A_0^n, \dots, A_{2^n-1}^n$  del sHp de  $\mathbb{N}$  y sean

$s_j \in (\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n})$  tales que  $c \leq \frac{1}{2^n} \left\| \sum_{j=1}^{2^n} f(s_j) \right\|$ . Defina  $B = \{j \mid s_j = d_{k_j} \in \mathbb{D}$  para algún  $k_j\}$ . Observe que  $B = \{j \mid f(s_j) \neq 0\}$ . Note que para cada  $j \in B$ ,  $\sigma(d_{k_j}) = \sigma(\frac{l}{2^m}) \in A_l^m \subset A_j^n$  para algún  $m > n$  y  $1 \leq l \leq 2^m - 1$ . En particular,  $\sigma(d_{k_j})$  es por definición de  $\sigma$  el  $2^n$ -ésimo elemento de  $A_j^n$ . Para  $j \notin B$  tome cualquier número diádico (pues  $\mathbb{D}$  es denso en  $[0, 1]$ )  $d_j \in (\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n})$  tal que  $\max_{j \in B} \sigma(d_{k_j}) < \sigma(d_j) \in A_j^n$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \left\| \sum_{j \in B} e_{\sigma(d_{k_j})} + \sum_{j \notin B} e_{\sigma(d_j)} \right\| &\geq \frac{1}{K_b 2^n} \left\| \sum_{j \in B} e_{\sigma(d_{k_j})} \right\| \\ &= \frac{1}{K_b 2^n} \left\| \sum_{j=1}^{2^n} f(s_j) \right\| \geq \frac{c}{K_b}, \end{aligned}$$

donde  $K_b \geq 1$  es la constante básica para  $(e_i)_i$ . Esto implica que  $(e_i)_i$  es una sucesión Haar- $\ell_1^+$  con constante  $\frac{K_b}{c} > 0$ .

□

### 3. OPERADORES DE DARBOUX

En este capítulo se hace un estudio enfocado en el espacio de los operadores de Darboux, concepto que fue inicialmente introducido por Pelczynski y Rocha en el 12° Seminario Brasileño de Análisis <sup>20</sup> en 1980. Aunque no existe un registro público de este seminario, unos años más tarde Pizzotti publica su tesis doctoral <sup>8</sup>, dirigida por Rocha, en la cual vuelve a aparecer esta clase de operadores. Pizzotti menciona varios resultados tratados en <sup>20</sup>, donde se relaciona el espacio de los operadores de Darboux con otros espacios de operadores más usuales. Gran parte de este trabajo de investigación es dedicado a las demostraciones de estos resultados.

#### 3.1. Resultados Preliminares

Para empezar, enunciamos algunos resultados del Análisis Funcional (ver como referencia <sup>10</sup> y <sup>19</sup>) que serán fundamentales a lo largo del capítulo. En todo este capítulo consideramos  $S$  infinito.

**Teorema 3.1.1.** Sean  $S$  un espacio Hausdorff localmente compacto y  $T : C_0(S) \rightarrow X$  un operador que no es débilmente compacto. Entonces  $C_0(S)$  contiene una copia isométrica de  $c_0$  en la que  $T$  actúa como un isomorfismo. Por consiguiente, si  $X$  no tiene copias de  $c_0$ , entonces todo operador  $T : C_0(S) \rightarrow X$  es débilmente compacto.

**Teorema 3.1.2.** Sean  $S$  un espacio Hausdorff localmente compacto y  $T : C_0(S) \rightarrow X$  un operador débilmente compacto. Entonces  $T$  envía sucesiones débilmente Cauchy en sucesiones convergentes en norma. Por consiguiente,  $T$  envía conjuntos débilmente compactos en conjuntos compactos en norma.

---

<sup>20</sup> G. Pelczynski A. & Rocha. "Operadores de Darboux". En: (1980), págs. 293-296.

**Teorema 3.1.3.** Si  $X$  o  $Y$  es reflexivo, entonces todo operador de  $X$  en  $Y$  es débilmente compacto.

**Teorema 3.1.4** (Teorema  $\ell_1$  de Rosenthal). Sea  $(x_n)_n$  una sucesión acotada en  $X$ . Entonces existe  $(x_{n_i})_i$  una subsucesión de  $(x_n)_n$  que satisface solo una de las siguientes alternativas:

- (1)  $(x_{n_i})_i$  es equivalente a la base canónica de  $\ell_1$ .
- (2)  $(x_{n_i})_i$  es una sucesión débilmente Cauchy.

**Teorema 3.1.5** (Teorema de Sobczyk). Sea  $X$  separable con  $c_0 \subseteq X$ . Si  $T : c_0 \rightarrow Y$  es un isomorfismo, entonces existe un operador  $\tilde{T} : C_0(S) \rightarrow Y$  que extiende a  $T$ .

**Definición 3.1.6.** Un espacio topológico  $S$  se dice que es **extremadamente disconexo** si la clausura de cada conjunto abierto es abierto. Si además  $S$  es Hausdorff y compacto, entonces  $S$  es llamado **Stoneano**.

**Observación 3.1.7.** Si  $S$  es un espacio métrico, entonces  $S$  es extremadamente disconexo si, y solo si,  $S$  es discreto; lo cual implica que  $S$  es Stoneano si, y solo si,  $S$  es finito. Luego, como asumimos que  $S$  es infinito, podemos concluir que si  $S$  es Stoneano, entonces  $S$  no es metrizable y por tanto  $C(S)$  no es separable.

**Teorema 3.1.8** (Teorema de Grothendieck). Sea  $S$  un espacio Stoneano. Si  $Y$  es separable, entonces todo operador  $T : C(S) \rightarrow Y$  es débilmente compacto.

Para los espacios de operadores a estudiar en este capítulo se usará la siguiente notación:

- $\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ es lineal y continuo}\}.$
- $\mathcal{K}(X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y) \mid T \text{ es compacto}\}.$
- $\mathcal{WK}(X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y) \mid T \text{ es débilmente compacto}\}.$

Todos estos espacios serán considerados con la norma del supremo. Como consecuencia directa de los Teoremas 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 y 3.1.4 tenemos el siguiente resultado que relaciona estos espacios de operadores conocidos.

**Teorema 3.1.9.** Sea  $S$  un espacio Hausdorff localmente compacto. Entonces

- (1)  $\mathcal{WK}(C_0(S), Y) = \mathcal{L}(C_0(S), Y)$ , si  $Y$  no tiene copias de  $c_0$ .
- (2)  $\mathcal{WK}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$ , si  $X$  o  $Y$  es reflexivo.
- (3)  $\mathcal{K}(C_0(S), Y) = \mathcal{WK}(C_0(S), Y)$ , si  $C_0(S)$  no tiene copias de  $\ell_1$ .
- (4)  $\mathcal{K}(X, Y) = \mathcal{WK}(X, Y)$ , si  $Y$  es de Schur.

### 3.2. Operadores de Darboux

**Definición 3.2.1.** <sup>20</sup> Sea  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Se dice que  $T$  es un operador de Darboux si para cada  $f : [0, 1] \rightarrow X$  Riemann-integrable se tiene que  $Tf : [0, 1] \rightarrow Y$  es Darboux-integrable. Denotamos por  $\mathcal{D}(X, Y)$  al espacio de todos los operadores de Darboux de  $X$  en  $Y$ .

**Proposición 3.2.2.**  $\mathcal{D}(X, Y)$  es un subespacio cerrado de  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

*Demostración.* Sea  $(T_n)_n$  una sucesión en  $\mathcal{D}(X, Y)$  que converge a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  en la norma del supremo. Sea  $f \in \mathcal{R}([0, 1], X)$ . Note que si  $t \in [0, 1]$  es tal que  $T_n f$  es continua en  $t$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $Tf$  es continua en  $t$ , ya que  $T_n \rightarrow T$  uniformemente. Luego,  $D(Tf) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D(T_n f)$ . Como  $T_n f$  es continua a.e para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $Tf$  es continua a.e. Así,  $T \in \mathcal{D}(X, Y)$  y por tanto,  $\mathcal{D}(X, Y)$  es cerrado. □

**Observación 3.2.3.** (1)  $X$  tiene la PL si, y solo si, el operador identidad  $i_X : X \rightarrow X$  es de Darboux.

(2) Sea  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  dado. De las Proposiciones 1.1.18 y 1.3.2, se sabe que si  $f$  es Riemann-integrable (Darboux-integrable), entonces  $Tf$  es Riemann-integrable (Darboux-integrable). Por lo tanto, si  $X$  o  $Y$  tiene la PL, entonces  $\mathcal{D}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$ .

**Teorema 3.2.4.** Sea  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  dado. Son equivalentes:

- (1)  $T \in \mathcal{D}(X, Y)$ .
- (2)  $T|_Z \in \mathcal{D}(Z, Y)$ , para todo  $Z$  subespacio separable de  $X$ .

*Demostración.* Supongamos que  $T \in \mathcal{D}(X, Y)$ . Sean  $Z$  un subespacio separable de  $X$  y  $f \in \mathcal{R}([0, 1], Z)$ . Como  $T \in \mathcal{D}(X, Y)$ ,  $T|_Z f : [0, 1] \rightarrow Y$  es continua a.e., y así,  $T|_Z \in \mathcal{D}(Z, Y)$ . Recíprocamente, si  $T \notin \mathcal{D}(X, Y)$ , entonces existe  $g \in \mathcal{R}([0, 1], X)$  tal que  $Tg$  no es continua a.e. Luego,  $g$  no es continua a.e., y por tanto  $X$  no tiene la PL. Del Teorema 1.3.11, existen un subespacio separable  $Z$  de  $X$  y  $h : [0, 1] \rightarrow Z$  Riemann-integrable y no continua a.e. En consecuencia,  $T|_Z h$  no es continua a.e. Esto prueba que  $T|_Z \notin \mathcal{D}(Z, Y)$ .  $\square$

En lo que resta de este capítulo veremos cómo se relaciona el espacio  $\mathcal{D}(X, Y)$  con los demás espacios de operadores ya mencionados. Como primer resultado tenemos que todo operador compacto es de Darboux.

**Teorema 3.2.5.** Sean  $X, Y$  espacios de Banach. Entonces

$$\mathcal{K}(X, Y) \subseteq \mathcal{D}(X, Y).$$

*Demostración.* Sean  $T \in \mathcal{K}(X, Y)$  y  $f \in \mathcal{R}([0, 1], X)$  dados. Por la Proposición 1.1.18,  $Tf$  es Riemann-integrable y por tanto débilmente Riemann-integrable. Además,  $f([0, 1]) \subseteq X$  es acotado, y como  $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ , entonces  $Tf$  tiene rango relativamente compacto. Se sigue del Teorema 1.2.6 que  $Tf$  es Darboux-integrable. Así,  $T \in \mathcal{D}(X, Y)$ .  $\square$

**Observación 3.2.6.** (1) Las contencencias  $\mathcal{K}(X, Y) \subseteq \mathcal{D}(X, Y) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$  pueden ser estrictas para ciertos espacios; por ejemplo, si  $X$  no tiene la PL, el operador  $i_X : X \rightarrow X$  es lineal continuo y no es de Darboux; por otro lado, el operador  $i_{\ell_1} : \ell_1 \rightarrow \ell_1$  es de Darboux y no es compacto.

(2) Dados  $X, Y$  espacios de Banach, no siempre se tiene que  $\mathcal{WK}(X, Y) \subseteq \mathcal{D}(X, Y)$ , pues  $i_{\ell_8} : \ell_8 \rightarrow \ell_8$  es un operador débilmente compacto que no es de Darboux; y tampoco se tiene que  $\mathcal{D}(X, Y) \subseteq \mathcal{WK}(X, Y)$ , pues  $i_{\ell_1} : \ell_1 \rightarrow \ell_1$  es un operador de Darboux que no es débilmente compacto.

El siguiente teorema muestra que con  $X = C_0(S)$  se cumple la igualdad entre  $\mathcal{WK}(X, Y)$  y  $\mathcal{D}(X, Y)$ .

**Teorema 3.2.7.** Sea  $S$  un espacio Hausdorff localmente compacto. Entonces para todo espacio de Banach  $Y$  se tiene que

$$\mathcal{WK}(C_0(S), Y) = \mathcal{D}(C_0(S), Y).$$

*Demostración.* i)  $\mathcal{WK}(C_0(S), Y) \subseteq \mathcal{D}(C_0(S), Y)$ : Sean  $T \in \mathcal{WK}(C_0(S), Y)$  y  $f \in \mathcal{R}([0, 1], C_0(S))$ . Como  $f$  es Riemann-integrable, el conjunto  $A = \{f(P, V) : (P, V) \in \dot{\mathcal{P}}[0, 1]\}$  es relativamente débilmente compacto. Por el Teorema 3.1.2,  $T(A) = \{Tf(P, V) : (P, V) \in \dot{\mathcal{P}}[0, 1]\}$  es compacto en norma. Además,  $Tf([0, 1]) \subseteq T(A)$ , pues para cada  $t \in [0, 1]$  se tiene que  $Tf(t) = Tf(P, V)$ , donde  $P = \{0, t, 1\}$  y  $V = (t, t)$ . Luego,  $Tf([0, 1])$  es relativamente compacto. Por el Teorema 1.2.6,  $Tf$  es Darboux-integrable, y así  $T \in \mathcal{D}(C_0(S), Y)$ .

ii)  $\mathcal{D}(C_0(S), Y) \subseteq \mathcal{WK}(C_0(S), Y)$ : Supongamos que  $T \notin \mathcal{WK}(C_0(S), Y)$ . Por el Teorema 3.1.1 existe  $Z \subseteq C_0(S)$  tal que  $Z$  es isomorfo a  $c_0$  y  $T|_Z : Z \rightarrow Y$  es un isomorfismo. Sea  $(f_n)_n$  una sucesión básica en  $Z$  equivalente a la base

canónica de  $c_0$ . Sea  $g : [0, 1] \rightarrow Z$  dada por

$$g(t) = \begin{cases} f_n, & \text{si } t = r_n \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{si } t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Por el mismo argumento usado en el Ejemplo 1.1.27 se tiene que  $g \in \mathcal{R}([0, 1], Z)$ .

Como  $T|_Z$  es un isomorfismo, existe  $\delta > 0$  tal que  $\|T|_Z(f_n)\| \geq \delta\|f_n\|$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Observe que

$$T|_Z g(t) = Tg(t) = \begin{cases} T(f_n), & \text{si } t = r_n \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{si } t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Luego,  $T|_Z g$  es discontinua en  $[0, 1]$  y por lo tanto,  $T|_Z \notin \mathcal{D}(Z, Y)$ . Como  $Z$  es separable, del Teorema 3.2.4 se tiene que  $T \notin \mathcal{D}(C_0(S), Y)$ .

□

El siguiente resultado se sigue inmediatamente de los Teoremas 3.1.9 y 3.2.7.

**Corolario 3.2.8.** Sea  $S$  un espacio Hausdorff localmente compacto. Si  $c_0 \not\rightarrow Y$ , entonces  $\mathcal{D}(C_0(S), Y) = \mathcal{L}(C_0(S), Y)$ .

El recíproco del Corolario 3.2.8 no siempre se cumple, tome por ejemplo  $Y = c_0$  y  $C_0(\beta\mathbb{N}) = \ell_\infty$  en los Teoremas 3.1.8 y 3.2.7. Sin embargo, para  $C_0(S)$  separable sí vale el recíproco como lo establece el siguiente teorema que es de nuestra autoría.

**Teorema 3.2.9.** Sea  $S$  un espacio Hausdorff localmente compacto. Si  $C_0(S)$  es separable y  $\mathcal{D}(C_0(S), Y) = \mathcal{L}(C_0(S), Y)$ , entonces  $c_0 \rightarrow Y$ .

*Demostración.* Suponga que  $c_0 \hookrightarrow Y$  y sea  $T : c_0 \rightarrow Y$  un isomorfismo. Como  $C_0(S)$  tiene una copia de  $c_0$  cuando  $S$  es infinito, por el Teorema de Sobczyk (Teorema 3.1.5) existe un operador  $\tilde{T} : C_0(S) \rightarrow Y$  que extiende a  $T$ . Por la hipótesis,  $\tilde{T} \in \mathcal{D}(C_0(S), Y)$ . Sin embargo, si consideramos la función Riemann-integrable

$g : [0, 1] \rightarrow C_0(S)$  dada por

$$g(t) = \begin{cases} e_n, & \text{si } t = r_n \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{si } t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

donde  $(e_n)_n$  es la base canónica de  $c_0$ , se tiene que  $\tilde{T}g = Tg$  no es Darboux-integrable. Luego,  $\tilde{T} \notin \mathcal{D}(C_0(S), Y)$ , lo que es absurdo. Por lo tanto, debe pasar que  $c_0 \not\rightarrow Y$ .  $\square$

Supongamos que  $X$  es de dimensión infinita y tiene la PL. Entonces el operador  $i_X : X \rightarrow X$  es un ejemplo de un operador de Darboux que no es compacto. Un problema más interesante sería encontrar un operador  $T \in \mathcal{D}(X, Y) \setminus \mathcal{K}(X, Y)$  donde  $X, Y$  no tienen la PL. El siguiente teorema nos dice que para encontrar tal operador  $T$  se deben descartar de los espacios de Banach clásicos a  $X = c_0$  y  $X = \ell_p$  con  $1 < p < \infty$ . Destacamos que el argumento del inciso (2) del teorema es aporte propio.

**Teorema 3.2.10.** Para todo espacio de Banach  $Y$  valen las siguientes igualdades:

- (1)  $\mathcal{K}(c_0, Y) = \mathcal{D}(c_0, Y)$ .
- (2)  $\mathcal{K}(X, Y) = \mathcal{D}(X, Y)$ , si  $X$  es uniformemente convexo.

*Demostración.* (1) Como  $c_0$  no tiene copias de  $\ell_1$ , el resultado se sigue de los Teoremas 3.1.9 y 3.2.7.

- (2) Si  $X$  es de dimensión finita, el resultado es inmediato. Supongamos que  $X$  es de dimensión infinita y que existe  $T \in \mathcal{D}(X, Y) \setminus \mathcal{K}(X, Y)$ . Luego existe  $(x_n)_n$  una sucesión acotada en  $X$  tal que  $(T(x_n))_n$  no admite subsucesiones convergentes. Sabemos que todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo, y por tanto la sucesión  $(x_n)_n$  admite una subsucesión débilmente

convergente. Sean  $(x_{n_k})_k$  una subsucesión de  $(x_n)_n$  y  $x \in X$  tales que  $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$ . Como  $(T(x_n))_n$  no admite subsucesiones convergentes, entonces  $x_{n_k} \not\rightarrow x$  y  $T(x_{n_k}) \not\rightarrow T(x)$ .

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , sea  $z_k = x_{n_k} - x$ . Note que  $(z_k)_k$  es una sucesión acotada en  $X$  tal que

$$z_k \xrightarrow{w} 0, \quad z_k \not\rightarrow 0 \quad \text{y} \quad T(z_k) \not\rightarrow 0. \quad (3)$$

Sea  $(z_{k_j})_j$  una subsucesión básica de  $(z_k)_k$ . Suponga sin pérdida de generalidad que  $\|z_{k_j}\| = 1$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Sea  $Z = \overline{\text{gen}\{z_{k_j} : j \in \mathbb{N}\}}$ . Observe que  $Z$  es uniformemente convexo y  $(z_{k_j})_j$  es una base normalizada de  $Z$ . Luego, por el Teorema 1.3.5, existen  $M > 0$  y  $r > 1$  tales que

$$\left\| \sum_{j \in F} a_j z_{k_j} \right\| \leq M \left( \sum_{j \in F} |a_j|^r \right)^{1/r}$$

para todo  $F \subseteq \mathbb{N}$  finito y  $(a_j)_{j \in F}$  escalares. Sea  $g : [0, 1] \rightarrow Z$  dada por

$$g(t) = \begin{cases} z_{k_j}, & \text{si } t = r_j \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{si } t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Veamos que  $g \in \mathcal{R}([0, 1], Z)$  y  $\int_0^1 g = 0$ . En efecto, sea  $\varepsilon > 0$  dado y tome  $\delta = (\varepsilon/M)^{r/(r-1)}$ . Sea  $(P, T) = ([t_{m-1}, t_m], s_m)_{m=1}^N \in \dot{\mathcal{P}}[0, 1]$  tal que  $|P| < \delta$ .

Entonces

$$\begin{aligned}
\|g(P, T)\| &= \left\| \sum_{m=1}^N g(s_m)(t_m - t_{m-1}) \right\| \\
&\leq M \left( \sum_{m=1}^N (t_m - t_{m-1})^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq M \delta^{\frac{r-1}{r}} \left( \sum_{m=1}^N (t_m - t_{m-1}) \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como  $T \in \mathcal{D}(X, Y)$  y  $Z \subseteq X$  es separable, entonces por el Teorema 3.2.4,  $T|_Z \in \mathcal{D}(Z, Y)$  y por tanto,  $T|_Z g = Tg$  es continua a.e. Sea  $A$  el conjunto de discontinuidades de  $Tg$ . Como  $m(A) = 0$ , entonces  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q} \not\subseteq A$ . Luego, existe  $t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  tal que  $Tg$  es continua en  $t$ . Sea  $(s_p)_p$  una sucesión en  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  tal que  $s_p \rightarrow t$ . Entonces  $Tg(s_p) \rightarrow Tg(t) = 0$ , lo cual contradice (3). Por lo tanto,  $\mathcal{D}(X, Y) = \mathcal{K}(X, Y)$ .

□

El siguiente resultado sugiere que los espacios  $X, Y$  sin la PL que pueden servir como candidatos para encontrar  $T \in \mathcal{D}(X, Y) \setminus \mathcal{K}(X, Y)$ , son  $X = \ell_\infty, Y = c_0$ .

**Corolario 3.2.11.**  $\mathcal{L}(\ell_\infty, c_0) = \mathcal{WK}(\ell_\infty, c_0) = \mathcal{D}(\ell_\infty, c_0)$

*Demostración.* Se sigue inmediatamente de los Teoremas 3.1.8 y 3.2.7. □

**Ejemplo 3.2.12.** Todo operador  $T \in \mathcal{L}(\ell_\infty, c_0)$  tiene la forma  $T(x) = (x_n^*(x))_n$  para alguna sucesión  $(x_n^*)_n$  en  $\ell_\infty^*$  tal que  $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$ . Sabemos que  $K \subseteq c_0$  es relativamente compacto si, y solo si, existe  $(r_n)_n \in c_0$  tal que  $|k_n| \leq |r_n|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y todo  $(k_n)_n \in K$ . Por lo tanto,  $T(B_{\ell_\infty})$  es relativamente compacto si, y solo si, la sucesión asociada  $(x_n^*)_n$  converge a 0 en norma. Como  $\ell_\infty^*$  no es Schur, existen  $(z_n^*)_n \subseteq \ell_\infty^*$  y  $z^* \in \ell_\infty^*$  tales que  $z_n^* \xrightarrow{w} z^*$  y  $z_n^* \not\xrightarrow{w^*} z^*$ . Sea  $y_n^* = z_n^* - z^*$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Entonces  $y_n^* \xrightarrow{w^*} 0$  y  $y_n^* \not\rightarrow 0$ . Se sigue del argumento anterior que el operador  $T : \ell_\infty \rightarrow c_0$  definido por  $T(y) = (y_n^*(y))_n$  no es compacto. Por el corolario 3.2.11 se tiene entonces un ejemplo de un operador  $T \in \mathcal{D}(\ell_\infty, c_0) \setminus \mathcal{K}(\ell_\infty, c_0)$ .

## BIBLIOGRAFÍA

- Albiac F. & Kalton, N.J. *Topics in Banach Space Theory*. New York: Graduate Texts in Mathematics 233, Springer, 2006 (vid. pág. 39).
- Alexiewicz A. & Orlicz, W. “Remarks on Riemann-Integration of Vector-Valued Functions”. En: *Studia Math* 12 (1951), págs. 125-132 (vid. pág. 12).
- Banach, S. “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales”. Ph.D. thesis. Ukraine: Université de Lviv, 1922, págs. 133-181 (vid. pág. 11).
- Bartoszynski T. & Judah, H. “Set theory: On the structure of the real line”. En: *Ak Peters Series* (1995) (vid. pág. 49).
- Casazza P.G. & Shura, T. “Tsirelson’s Space”. En: *Springer-Verlag* (1989) (vid. pág. 44).
- Cervantes, G.M. “Integration, Geometry and Topology in Banach Spaces”. Ph.D. thesis. España: Universidad Nacional Autónoma de México, 2017 (vid. págs. 48-50).
- Diestel J. & Uhl, J.J. *Vector Measures*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1997 (vid. págs. 31, 64).
- Fabian M. & Habala, P. & Hájek P. & Montesinos V. & Zizler V. *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis*. Canadian Mathematical Society, Springer, 2011 (vid. págs. 52, 64).
- Gaebler H. & Sari, B. “Banach Spaces with the Lebesgue Property of Riemann Integrability”. En: *Journal of Functional Analysis* (2023) (vid. págs. 12, 54, 61).

- Gaebler, H. "Asymptotic- $\ell_p$  Banach Spaces and the Property of Lebesgue". En: (2020).
- "Towards a Characterization of the Property of Lebesgue". En: *Real. Anal. Exch.* 46.2 (2021), págs. 319-344.
- Gordon, R. "Riemann Integration in Banach Spaces". En: *Rocky mountain J. Math.* 21.3 (1991), págs. 923-949 (vid. págs. 14-16, 18, 20, 31-35, 38-40).
- Graves, L.M. "Riemann Integration and Taylor's Theorem in General Analysis". En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 29 (1927), págs. 163-177 (vid. págs. 11, 33).
- Haydon, R. "Darboux integrability and separability of types in stable Banach spaces". En: 20.7 (1984), págs. 95-115 (vid. pág. 45).
- James, R.C. "Super-Reflexive Spaces with Bases". En: *Pacific J. Math.* 41.2 (1972), págs. 409-419 (vid. pág. 40).
- Lindenstrauss J. & Tzafriri, L. "Classical Banach Spaces I". En: (1977).
- Megginson, R.E. *An Introduction to Banach Space Theory*. New York: Graduate Texts in Mathematics 183, Springer, 1998.
- Naralencov, K.M. "Asymptotic Structure of Banach Spaces and Riemann Integration". En: *Real. Anal. Exch.* 33.1 (2008), págs. 111-124.
- Nemirovskii A.S. & Ochan, M.Yu. & Rejouani R. "Conditions for Riemann Integrability of Functions with Values in a Banach Space". En: *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I. Mat. Meh.* 27.4 (1972), págs. 62-65 (vid. págs. 12, 41).
- Odell, E. "A nonseparable Banach space not containing a subsymmetric basic sequence". En: *Israel J. Math.* 52.2 (1985), págs. 97-109.

- Pelczynski A. & Rocha, G. “Operadores de Darboux”. En: (1980), págs. 293-296 (vid. págs. 64, 66).
- Pettis, B.J. “On Integration in Vector Spaces”. En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 44 (1938), págs. 277-304.
- Pizzotti, M. “Darboux Integrabilidade e Mensurabilidade de Funções Riemann-Integráveis Definidas em Compactos”. Ph.D. thesis. Brazil: Universidade de São Paulo, 1989 (vid. págs. 12, 45, 46, 54, 61, 64).
- Rejouani, R. “On the Question of the Riemann Integrability of Functions with Values in a Banach Space”. En: *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I. Mat. Meh.* 26.4 (1971), págs. 75-79.
- Rocha, G.C. “Integral de Riemann Vetorial e Geometria de Espaços de Banach”. Ph.D. thesis. Brazil: Universidade de São Paulo, 1979 (vid. págs. 12, 40, 41, 44, 45).
- Wang, C. “On the weak property of Lebesgue of Banach spaces”. En: *Journal of Nanjing University Mathematical Biquarterly* 13.2 (1996), págs. 150-155 (vid. pág. 47).
- Wang C. & Wan, K. “On the weak property of Lebesgue of  $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ ”. En: *Rocky mountain J. Math.* 31.2 (2001), págs. 697-703 (vid. pág. 49).
- Wiener, N. “Note on a Paper of M. Banach”. En: *Fundamenta Mathematicae* 4.1 (1923), págs. 136-143 (vid. pág. 11).