



**USO DEL CLINÓMETRO PARA EL PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS
SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS**

ÁLBER YHANG JIMÉNEZ MATEUS

JAIME ALBERTO PINTO MALDONADO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2011**

**USO DEL CLINÓMETRO PARA EL PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS
SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS**

ÁLBER YHANG JIMÉNEZ MATEUS
Licenciado en Matemáticas

JAIME ALBERTO PINTO MALDONADO
Ingeniero electrónico

**Trabajo de grado para optar al título de
Especialista en Educación Matemática**

Director:
HÉCTOR ALBERTO HIGUERA MARÍN

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2011**

“Un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los estudiantes en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de los estudiantes planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello”.

-GEORGE POLYA



“El mejor método para aprender es hacer; el peor método para enseñar es hablar”

-PAUL RICHARD HALMOS

TABLA DE CONTENIDO

	PÁG.
1. INTRODUCCIÓN	12
2. MARCO DE REFERENCIA	15
2.1 CÓMO PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS	16
2.2 FACTORES RELEVANTES PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMA	17
2.3 LISTA DE LAS ESTRATEGIAS MÁS UTILIZADAS ELABORADAS POR SCHOENFELD	20
3. DISEÑO METODOLÓGICO	22
4. PRUEBA DE PRESABERES	26
4.1 EJERCICIOS PROPUESTOS EN LA PRUEBA PRESABERES	28
4.2 PAUTAS POR EVALUAR EN LA PRUEBA DE PRESABERES	29
4.3 SOLUCIÓN ALTERNATIVA DE LA PRUEBA DE PRESABERES	31
5. PROPUESTA DIDÁCTICA	37
5.1 EJERCICIOS PRESENTADOS EN LA PROPUESTA DIDÁCTICA	38
5.2. SOLUCIÓN ALTERNATIVA DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA	42
6. TERCERA PRUEBA	48
6.1 EJERCICIOS PROPUESTOS EN LA TERCERA PRUEBA	48
6.2 SOLUCIÓN ALTERNATIVA DE LA TERCERA PRUEBA	49
7. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LAS CATEGORÍAS	55
7.1 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA CATEGORÍA 1	55
7.2 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA CATEGORÍA 2	58
7.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA CATEGORÍA 3	63
7.4 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA CATEGORÍA 4	65
8. RESULTADOS DE IMPLEMENTAR LA PROPUESTA EN EL AULA	68
9. CONCLUSIONES	83
10. BIBLIOGRAFÍA	86
11. ANEXOS	87

LISTA DE FIGURAS

	PÁG
Figura 1. Elementos del clinómetro	23
Figura 2. Partes del clinómetro	24
Figura 3. Ubicación de la mira	25
Figura 4. Triángulo del problema 5	28
Figura 5. Esquema del árbol	31
Figura 6. Datos del árbol	32
Figura 7. Esquema del muro	32
Figura 8. Datos del muro	33
Figura 9. Esquema de la escalera	33
Figura 10. Datos de la escalera	34
Figura 11. Triángulo problema 2	35
Figura 12. Triángulo problema 5 a	35
Figura 13. Triángulo problema 5 b	36
Figura 14. Distancia del objeto a la mira	39
Figura 15. Objeto al que ha de determinarse la altura	40
Figura 16. Objeto por determinar la distancia	41
Figura 17. Distancia entre dos objetos	42
Figura 18. Ubicación de datos y variables, problema 1	43
Figura 19. Representación gráfica del problema 2	43
Figura 20. Ubicación de datos y variables, problema 2	44
Figura 21. Representación gráfica de los problemas 1 y 3	45
Figura 22. Ubicación de datos y variables, problema 3	45
Figura 23. Representación gráfica del problema 4	46
Figura 24. Ubicación de datos y variables, problema 4	47
Figura 25. Esquema del árbol	49
Figura 26. Ubicación de datos y variables, problema del árbol	50
Figura 27. Esquema del asta de bandera	50

Figura 28. Ubicación de datos y variables del asta de bandera	51
Figura 29. Esquema del muro	52
Figura 30. Ubicación de datos y variables en el muro	52
Figura 31. Esquema del faro	53
Figura 32. Ubicación de datos y variables del faro	54
Figura 33. Resultados obtenidos en la categoría 1	58
Figura 34. Resultados obtenidos en la categoría 2	62
Figura 35. Resultados obtenidos en la categoría 3	65
Figura 36. Resultados obtenidos en la categoría 4	67
Figura 37. Matriz de resultados por categorías y pruebas	69
Figura 38. Ubicación de ángulos alternos	77
Figura 39. Resultados obtenidos de las tres pruebas, Colegio Café Madrid	81
Figura 40. Resultados obtenidos de las tres pruebas, Colegio Carare	82

RESUMEN

TÍTULO: USO DEL CLINÓMETRO PARA EL PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS*.

AUTORES: JIMÉNEZ MATEUS Alber Yhang; PINTO MALDONADO Jaime Alberto**.

PALABRAS CLAVES: Clinómetro, cinta métrica, problemas trigonométricos, presaberes.

Esta investigación de aula se realizó con estudiantes de undécimo grado del Colegio Café Madrid (de Bucaramanga) y del Colegio Integrado del Carare (de Cimitarra). En ella se aplicaron tres actividades sobre el planteamiento de problemas, usando las razones trigonométricas, de la siguiente manera: Una actividad de presaberes, otra de didáctica con la implementación de una propuesta didáctica que usa el clinómetro y la cinta métrica y una final que determinó los resultados alcanzados de la intervención. Todas estas fueron basadas en la metodología para plantear y resolver problemas de George Polya y en los factores relevantes en el momento de la solución de problemas, según Alan Schoenfeld.

A partir de las observaciones y de los análisis detallados de las actividades, se pudo concluir que: el clinómetro le permitió al profesor guiar a sus estudiantes en el planteamiento de situaciones trigonométricas según su contorno y su contexto. Esto les ayudó a conectar la parte teórica con la realidad, de ese modo obtuvieron mejores resultados en aspectos como la interpretación de diferentes situaciones problema, el reconocimiento y la ubicación de los datos y las variables en una representación gráfica y en el planteamiento de definiciones que dieron solución a la situación problema, entre otras habilidades.

La actividad didáctica y el trabajo grupal permitieron un desarrollo en la construcción de las matemáticas, pues durante este proceso el estudiante recolectó información, luego la clasificó, realizó una representación de la situación problema y estableció relaciones respectivas; además, discutió ideas, planteó conjeturas (que él mismo concluyó) y finalmente pudo determinar y constatar sus resultados.

*Trabajo de grado.

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas, Especialización en Educación Matemática.

Director: HIGUERA MARÍN, Héctor Alberto; profesor asociado de la Universidad Industrial de Santander (UIS).

SUMMARY

TITLE: Use of an inclinometer for setting out problems about trigonometric ratios ^{*}.

AUTHORS: JIMÉNEZ MATEUS Alber Yhang; PINTO MALDONADO Jaime Alberto ^{**}.

KEY WORDS: Inclinometer, measuring tape, trigonometric problems, previous knowledge.

This classroom research was carried out with eleventh grade students, in the Café Madrid school in the city of Bucaramanga, as well as the school Integrado el Carare in Cimitarra. During this research, three activities related to the presentation of problems were applied by using trigonometric ratios as follows: A preknowledge activity; a dynamic activity with the use of the inclinometer, the measuring tape and a last activity that determined the results obtained in the intervention. Each activity was based on the methodology to set out problems from George Polya, as well as the relevant factors at the moment of solving problems according to Alan Schoenfeld.

Based on the observations and the detailed analysis from the activities, it was concluded that: the inclinometer helped the teacher to guide the students in the setting out of trigonometric situations according to their outline and context. Besides, they achieved to connect the theoretical part with reality, obtaining better results in aspects such as the interpreting of different problem situations, recognizing and locating the data and the variables on a graphic representation, and in setting out definitions that provided solutions to the problem situation, among others.

The implementation of the inclinometer and of group work allowed a growth in the construction of mathematics. During this process students collected information, classified that information, created a representation of the problem situation, established the corresponding relationships, discussed ideas, set out guesswork they concluded themselves so that they could finally determine and verify their results during the process.

*Trabajo de Grado.

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas, Especialización en Educación Matemática.

Director: HIGUERA MARÍN, Héctor Alberto; profesor asociado de la Universidad Industrial de Santander UIS.

1. INTRODUCCIÓN

A partir de las dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos, relacionados con las razones trigonométricas y bajo la necesidad real de que el estudiante analice, proponga y resuelva los diferentes planteamientos dentro y fuera del aula, nace el interés de hacer una propuesta que contribuya en el proceso de enseñanza-aprendizaje, de manera que el estudiante llegue a desarrollar y a aprender a hacer planteamientos, que encuentre soluciones a diferentes situaciones por medio de mediciones directas de longitudes y ángulos.

En este trabajo se presenta el uso del clinómetro como elemento de medición de ángulos; en nuestro caso, lo implementamos como material didáctico en el planteamiento de situaciones problema sobre razones trigonométricas, pues con las mediciones nos permite llevar al estudiante a relacionar problemas vivenciales similares a los presentados en los textos y de esta forma presentar la trigonometría como área fundamental para su solución.

En el primer capítulo se presenta el marco de referencia, se investiga y registra información sobre la implementación de materiales didácticos en la enseñanza-aprendizaje por parte del educando; aquí se parte de una exploración de textos del grado décimo, que establecen aplicaciones de las razones trigonométricas. A continuación, relacionamos las etapas para el planteamiento y la resolución de problemas (Polya:1965); incluimos una lista de estrategias y los factores relevantes en la resolución de problemas (Schoenfeld:1985), pautas vitales en el análisis de las diferentes prácticas realizadas con los estudiantes.

En el segundo capítulo se plantea el diseño metodológico que busca el desarrollo del pensamiento creativo; se establecen los elementos que serán utilizados en

esta práctica y su elaboración. Esta metodología está centrada en que el estudiante sea el artífice de sus propios problemas con la orientación del docente.

Para el tercer capítulo se presenta el diseño, el análisis y la aplicación de una *prueba de presaberes*, comprendida por cuatro problemas clásicos de las razones trigonométricas, seleccionados, analizados y relacionados con los que presentan tradicionalmente los textos escolares del grado décimo. También se hicieron algunas modificaciones a los problemas, principalmente de escritura y de planteamiento.

Esta prueba se aplicó a 24 estudiantes del grado 11-1 del Colegio Café Madrid en la ciudad de Bucaramanga y a 19 estudiantes del grado 11-2 del Colegio Integrado del Carare de Cimitarra, Santander.

El estudio que se realiza sobre la prueba está basado en las etapas y estrategias propuestas exclusivamente para el planteamiento de problemas. Cabe destacar entonces que nuestro trabajo va hasta el planteamiento que realizan los estudiantes; de esta manera, no se tendrán en cuenta los análisis que se realizaron para llegar a la respuesta.

En el capítulo cuatro se presenta la propuesta didáctica que plantea el uso del clinómetro y de la cinta métrica, que ayudan a realizar mediciones directas. Esta establece cuatro problemas que buscan ser relacionados con la prueba de presaberes.

Para la propuesta didáctica se seleccionaron seis estudiantes de cada institución, a quienes previamente se aplicó la prueba de presaberes. Ellos fueron seleccionados por el interés mostrado en el desarrollo de cada ítem de la prueba de presaberes y por la secuencia que de una u otra forma procuraron establecer.

Finalmente, en el capítulo cinco se presenta el planteamiento y el análisis de una tercera prueba escrita que establece los avances, los alcances y las críticas que resultan de la implementación de la propuesta didáctica que usa el clinómetro como alternativa en el aula de clase. Además, se encuentran incluidas algunas relaciones comparativas entre las diferentes pruebas.

Cabe destacar que cada una de las pruebas realizadas por los estudiantes anexa un análisis estadístico que pretende mostrar los diferentes avances y percances en el desarrollo de las pruebas; los resultados, luego de la implementación de la propuesta, fueron muy optimistas.

2. MARCO DE REFERENCIA

Las estrategias que se van implementando, como fundamento en el desarrollo de procesos que centren la dinámica del aprendizaje del educando, están encaminadas a mejorar el desarrollo cognitivo e intelectual, que buscan cada vez mejores estrategias, o quizás mejorar estas dentro de su aplicabilidad y mejor entendimiento. Los diferentes elementos que se van usando merecen un buen estudio y un previo análisis en diferentes contextos para obtener el mejor beneficio o aprovechamiento de su implementación.

“Las decisiones que tomen los profesores, los administradores escolares y otros profesionales de la educación, respecto a los contenidos y el carácter de las matemáticas escolares, tienen consecuencias importantes para los estudiantes y para la sociedad. Estas decisiones deberían basarse en una guía profesional sólida” (Adams, 1986).

Estas decisiones acerca de los implementos didácticos (clinómetro, cinta métrica, papel y lápiz) están centradas en el análisis que forman parte del planteamiento de problemas por medio de la instrucción impartida al estudiante para que construya nuevos conocimientos a través del planteamiento de problemas, de manera que use su propio contexto y las situaciones problemáticas. Luego, después de analizar sus propios planteamientos, él puede tener la capacidad de resolver, aplicar y adaptar estrategias para su solución.

*“Construir nuevos conocimientos a través de la resolución de problemas.
Resolver problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos.
Aplicar y adaptar diversas estrategias para resolver problemas.
Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él” (Sociedad Andaluza, 2000).*

Además, nuestro análisis también incluye problemas planteados en algunos textos escolares, que en ciertos casos tienen un problema adicional debido a que no se encuentran dentro del contexto matemático y contienen variada terminología en la redacción de los problemas.

2.1 CÓMO PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS

En los últimos 40 años, el planteamiento de problemas ha sido identificado como una actividad importante en el aprendizaje de las matemáticas y se recalca que resolver problemas no consiste en aplicar un conjunto de reglas, que sirven de patrón en una seguidilla de ejercicios, sino, al contrario, buscar entre otras cosas que el estudiante reflexione sobre aspectos relacionados con el uso de diagramas o representaciones, que discuta diversos métodos de solución, para que logre replantear o diseñar sus propios problemas.

Basados en esto y debido a que se presentan ciertas dificultades a la hora de realizar alguna práctica que involucre la creatividad, el entusiasmo o el contacto directo del estudiante con problemas vivenciales, se fundamenta nuestro trabajo en el planteamiento realizado por el matemático y educador George Polya (1985), quien en su libro *Cómo plantear y resolver problemas* propone una metodología de cuatro etapas:

Etapas 1. *Comprensión del problema.* Etapa en que, dentro del planteamiento del problema, al estudiante se le pueden presentar ciertas dificultades de lectura y comprensión de los problemas contenidos en los textos, o de problemas que se presentan tradicionalmente. Lo que se busca es que el estudiante, como primer paso, logre comprender realmente lo que está resolviendo. En cierta forma, en esta etapa, los estudiantes pondrán a prueba conocimientos adquiridos años atrás, ya que tendrán que tomar determinaciones de desarrollo para realizar algún

caso de medición en que se les pida establecer la solución, pero sin que antes se señale la forma de resolver o encontrar la respuesta; ellos se basarán en la manera que crean más factible para solucionarlo.

Etapas 2. Concepción de un plan. Existen diversos problemas a los que se busca dar soluciones claras y entendibles para el estudiante. Además de resolver ciertas incógnitas que se presentan, como establecer si en algún momento se han planteado situaciones semejantes, cómo se ha dado solución a estos, o qué método se ha usado. Por lo tanto, en esta fase se diseñan las estrategias con las que el estudiante puede ampliar tanto su conocimiento como la capacidad para solucionar los problemas que se planteen y tener mayores posibilidades de adquirir nuevas nociones útiles para su comprensión.

Etapas 3. Ejecución del plan. Inicialmente, se comprobaría cada uno de los pasos y si el estudiante logra efectuar cada una de las etapas, estará en la capacidad de proponer la solución al problema, aunque esta no siempre sea la mejor, de manera que al repetir cada etapa pueda encontrar un mejor análisis.

Etapas 4. Visión retrospectiva. Ya que la propuesta didáctica será aplicada a estudiantes del grado undécimo, dentro de los planteamientos que ellos realicen en las diferentes pruebas, estos deberán relacionar y contextualizar los problemas mediante la retrospección de sus presaberes.

2.2 FACTORES RELEVANTES PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Diversos problemas requieren de soluciones más elaboradas, mejor planteadas y analizadas, que permitan que el estudiante tenga una idea clara del tema. En el momento de escoger o seleccionar la mejor técnica para el planteamiento de

problemas relacionados con la aplicación de razones trigonométricas, se analizan los factores relevantes que establece Alan Schoenfeld, de los cuales se encuentra: *Recursos cognitivos*. Basados en los conocimientos matemáticos generales (conceptos, resultados y procedimientos).

Heurística. Estrategias y técnicas en la solución de problemas.

Control o metacognición. Capacidad de lograr un objetivo.

Creencias. Opiniones referentes a la solución de problemas y su afectación ya sea de forma favorable o desfavorable.

Según Schoenfeld (1985), las cuatro fases para la resolución de problemas de Polya son estrategias que podrían usar los estudiantes, pero que en algunos casos no se aplican. Siendo algunas de ellas innatas, en nuestra labor está el fortalecerlas y orientarlas en su proceso de formación. De esta manera, tomamos el trabajo realizado por Schoenfeld sobre la implementación de actividades relacionadas con el proceso de resolver problemas en el aprendizaje de las matemáticas, que lo hace pertinente y se fundamenta en las siguientes ideas:

- Desarrollar en los estudiantes procesos y prácticas matemáticas sobre la resolución de problemas que involucren actividades vivenciales y que el desarrollo de estos procesos sea real.
- Propiciar factores que involucren la implementación de diferentes elementos y contextos como parte de refuerzo. Además, generar discusiones que involucren la resolución de problemas y considerar que en este proceso influyen los siguientes factores:
 - **El dominio del conocimiento:** son los recursos matemáticos con los que cuenta el estudiante y que pueden ser utilizados en el problema, como intuiciones, definiciones, conocimiento informal del tema, hechos, procedimientos y concepción sobre las reglas para trabajar en el dominio.

- **Estrategias cognoscitivas:** incluyen métodos heurísticos, como descomponer el problema en simples casos, establecer metas relacionadas, invertir el problema, dibujar diagramas, el uso de material manipulable, el ensayo y el error, el uso de tablas y listas ordenadas, la búsqueda de patrones y la reconstrucción del problema y relacionar el problema con ejemplos.
- **Estrategias metacognitivas:** se relacionan con el monitoreo y el control. Están las decisiones globales con respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias y acciones como planear, evaluar y decidir.
- **El sistema de creencias:** se compone de la visión que se tenga de las matemáticas y de sí mismo. Las creencias determinan la manera como se aproxima una persona al problema, las técnicas que usa o evita y el tiempo y el esfuerzo que les dedica, entre otras.

Dentro de la solución de problemas están consideradas las siguientes perspectivas: una es la de solución de problemas como una interacción con situaciones problemáticas con fines pedagógicos, o sea, como estrategia didáctica y otra es la capacidad de resolución de problemas como objetivo general del área, o sea, como logro fundamental de toda la educación básica y media.

Es esta la primera perspectiva que tomamos y fundamentamos en nuestra práctica de docentes como estrategia didáctica, aplicada en la resolución de problemas que involucran razones trigonométricas.

2.3 LISTA DE LAS ESTRATEGIAS MÁS UTILIZADAS ELABORADAS POR SCHOENFELD

En el planteamiento de problemas, es un proceso fundamental tener un plan o un procedimiento ya elaborado de forma clara y ordenada. Relacionamos una lista de estrategias para el trabajo de investigación, basado en cuatro categorías que abarcan el planteamiento de problemas usando razones trigonométricas; esta lista incluye la realización del dibujo que describe la situación problema, identificar las variables y los datos con la respectiva ubicación en el dibujo y la determinación de las relaciones que lleven a la resolución del problema.

La lista se divide en dos estrategias esenciales: una de análisis y otra de exploración, con ciertas subdivisiones, aunque no todas son pertinentes en el planteamiento de problemas por medio de la implementación de la propuesta. Las pautas que relacionan este trabajo con las subdivisiones son:

Análisis

- ✓ Dibuje un diagrama, siempre que sea posible.
- ✓ Examine casos especiales.
- ✓ Trate de simplificar el problema.
- ✓ Use argumentos del tipo "sin pérdida de generalidad".
- ✓ Seleccione algunos valores especiales para ejemplificar el problema e ir familiarizándose con él.
- ✓ Examine casos límite para explorar el rango de posibilidades.
- ✓ Explote la existencia de simetría.

Exploración

- ✓ Considere problemas esencialmente equivalentes.
- ✓ Reformule el problema:
 - o Mediante un cambio de perspectiva o notación.

- o Asuma que se tiene una solución y determine sus propiedades.
- ✓ Trate de aprovechar cualquier problema relacionado que tenga forma, datos o conclusiones similares.
- ✓ Reemplace condiciones por otras equivalentes.

3. DISEÑO METODOLÓGICO

El trabajo fue de tipo exploratorio. En primera instancia, se realizó un análisis de algunos textos de matemáticas de décimo grado, especialmente los libros: *Matemática práctica 10* de Editorial Voluntad y el libro *Matemáticas 10* de Editorial Santillana, pues estos dos son algunos de los textos escolares más utilizados actualmente por los docentes de matemáticas en nuestra sociedad.

Se empleó una prueba de presaberes con cinco ejercicios que se tomaron de los libros ya mencionados. Tal prueba se realizó en forma escrita, con algunos ejercicios que describen el trabajo en muchas aulas de clase del grado décimo. Esta actividad nos sirvió como punto de partida y para determinar qué conceptos o creencias tenían los estudiantes sobre el planteamiento de problemas usando las razones trigonométricas.

Los ejercicios planteados, el análisis y los resultados de esta prueba sirvieron para diseñar y aplicar una propuesta didáctica, de manera que los estudiantes logaran plantear sus propios problemas involucrando el uso de razones trigonométricas, así que se propuso como alternativa el empleo de una cinta métrica y un clinómetro.

La segunda prueba fue realizada por un grupo seleccionado de la primera prueba, de seis estudiantes por cada colegio. En esta segunda actividad, se realizó el planteamiento de los problemas bajo una especie de socialización usando el clinómetro en grupos de dos estudiantes y luego desarrollaron cada problema en forma individual con papel y lápiz.

Después, con el análisis y los resultados entre las dos primeras pruebas, se realizó una tercera prueba escrita relacionada con las dos primeras pruebas; de

esta manera, se estableció un cuadro evaluativo acerca de posibles alcances de la propuesta didáctica. Finalmente, se concluyó sobre el trabajo realizado por los estudiantes con base en la información recogida mediante el uso de técnicas de observación, cuestionarios abiertos y el diario de campo.

Concepto de clinómetro. En griego, *Klinein* significa inclinación. El clinómetro es un instrumento que sirve para medir el ángulo de inclinación de un objeto en relación con la horizontal o la vertical. En navegación, sirve para medir la inclinación longitudinal de la quilla en relación con el plano de nivel del agua y por ello es muy útil para medir la diferencia de calado entre popa y proa. Fue inventado por el capitán danés de navío Counig, perfeccionado más tarde por Brest M. Touboulie.

El clinómetro era un aparato de acero, bronce o latón, que se instalaba en las piezas de artillería con la finalidad de establecer en milésimas la inclinación del tiro usando los nonios de medición y el nivel que tenía el aparato. Su finalidad era determinar el ángulo de tiro en artillería (FAII, 1982).

Elementos para la elaboración del clinómetro:

- ✓ Transportador
- ✓ Nivel de burbuja
- ✓ Listón de madera o palo de escoba
- ✓ Soporte plano de madera
- ✓ Puntillas
- ✓ Pitillo plástico



Figura 1. Elementos

Procedimiento para la elaboración del clinómetro:

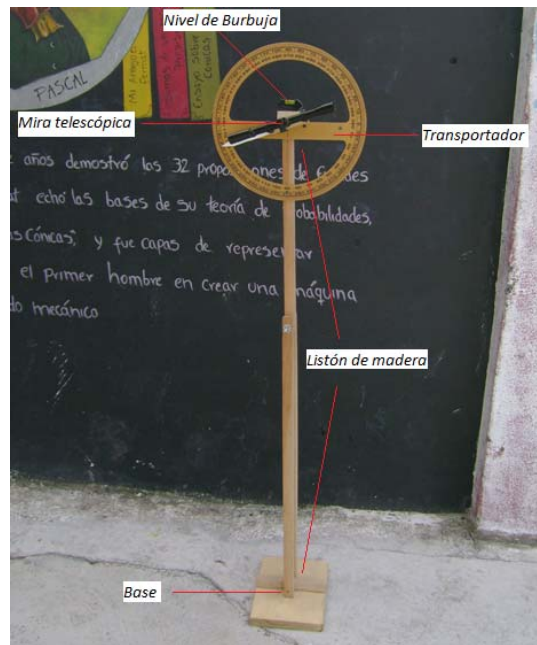


Figura 2. Partes del clinómetro

Sobre la base plana de madera, se soporta uno de los extremos del listón de madera o palo de escoba, de manera que quede perpendicular a la base plana y luego se asegura con puntillas en la parte inferior.

En el otro extremo del listón de madera, se ubicará el transportador, de forma que su centro coincida con el extremo del listón y sea ajustado de forma fija. La recta que coincide con los ángulos de 0° y 180° del transportador debe ser perpendicular con respecto al listón utilizado.

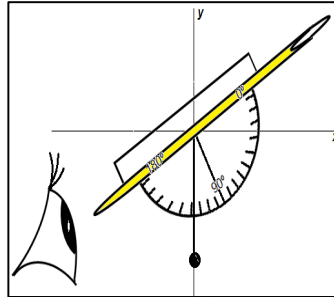


Figura 3. Ubicación de la Mira

Sobre la recta de transportador, se ubicará de forma paralela y fija el nivel de burbuja.

El pitillo plástico (mira) va sujeto exactamente en el centro del transportador, pero debe ser movable.

4. PRUEBA DE PRESABERES

Esta prueba determinó los conceptos básicos que poseen algunos estudiantes en el tema de las razones trigonométricas; además, se conocieron las estrategias que están usando en el planteamiento de problemas que implican el uso de las razones trigonométricas.

Esta prueba constituyó en resolver cinco enunciados, algunos de ellos fueron modificados en redacción para tener más claridad y consistencia y que así el estudiante no creyera que el enunciado no tenía solución, o que era ambigua su respuesta.

En el análisis de los textos, se encontraron muchas similitudes, en particular en el estilo de los ejercicios; en algunos casos, manejan un vocabulario que no hace parte del contexto del estudiante o algunas situaciones problema que posiblemente generan confusión. Aquí se citan algunas palabras o frases que podrían alterar el desarrollo de determinados problemas que son planteados en los libros estudiados: “Teodolito: instrumento que sirve para medir ángulos sobre terreno y para dirigir visuales”; “velocidad relativa de un barco navegando en un río”; “cinta métrica de agrimensor”, ¡la ribera de un río.

Por otro lado, se enfatiza demasiado en trabajar con ángulos expresados en grados, minutos y segundos, que además incluyen conversiones. Hacen referencia a solucionar un triángulo, como el equivalente a determinar apenas los ángulos internos de éste, la longitud de cada uno de sus catetos y la hipotenusa, así como su perímetro y su área.

A continuación, citamos dos ejemplos textuales del libro *Matemática Práctica 10*, que fácilmente logran confundir al estudiante:

Problema 1: Se coloca un teodolito en el punto P y se dirige una visual a lo largo de la orilla del río; dos ayudantes miden una distancia de 100 metros por la orilla y en el punto Q fijan una estaca. En P se gira el telescopio del teodolito un ángulo de 90^0 , hacia la orilla opuesta y se fija el punto R . El ángulo medido en el punto Q , dirigiendo la visual hacia R y, luego, hacia Q es de 21^0 . La tarea consiste en calcular la anchura del río. (*Matemática Práctica 10,1998*).

Problema 2: Calcular la distancia a la Luna si desde un extremo de la Tierra se observa su centro con un ángulo de 5^0 respecto a la observación hecha cuando la Luna se encontraba exactamente encima. (*Matemática Práctica 10,1998*).

La prueba fue repartida de la siguiente manera: dos ejercicios representan gráficamente un triángulo rectángulo e incluyen los datos de algunos de sus elementos y piden hallar los elementos restantes; finalmente, tenemos tres enunciados que describen situaciones problema. Se buscaron ejercicios que posiblemente se usan tradicionalmente en algunas aulas de clase, de manera que nos permitió determinar el nivel de interpretación que han logrado en estos ejercicios. Los primeros cuatro ejercicios son del libro *Matemática Práctica 10* y el último ejercicio es del libro *Matemáticas 10* de Santillana.

La prueba fue realizada el día 25 de marzo de 2011 a una población de 22 estudiantes del grado 11-1 del Colegio Café Madrid en la ciudad de Bucaramanga; y el día 29 de marzo de 2011 a una población de 19 estudiantes del grado 11-2 del Colegio Integrado del Carare de Cimitarra, Santander.

4.1 EJERCICIOS PROPUESTOS EN LA PRUEBA PRESABERES

1. Desde un punto situado a 18 metros del pie de un árbol, se observa el extremo superior del árbol con un ángulo de elevación de 62° .
 - a) ¿Cuál es la altura del árbol?
 - b) Si el ángulo de elevación hubiera sido de $\pi/4$, ¿cuál será la altura del árbol?
2. Para alcanzar la cima de un muro de 6 metros de altura, se utiliza una escalera de 10 metros. Si el extremo de la escalera queda 2 metros más allá del muro, determine la inclinación respecto a la horizontal. Escriba su respuesta en radianes.
3. Una escalera se encuentra apoyada contra un muro, de manera que la distancia entre el pie de la escalera y la base del muro es de 1,2 metros. ¿A qué altura del suelo se apoya la escalera y cuál es su largo, si se forma con él un ángulo de 70° ?
4. Construya un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene 5 cm y uno de sus catetos tiene 3 cm. Luego, halle el otro cateto y los ángulos internos del triángulo.
5. En los siguientes triángulos se indican los datos conocidos. Encuentre el valor de las incógnitas:

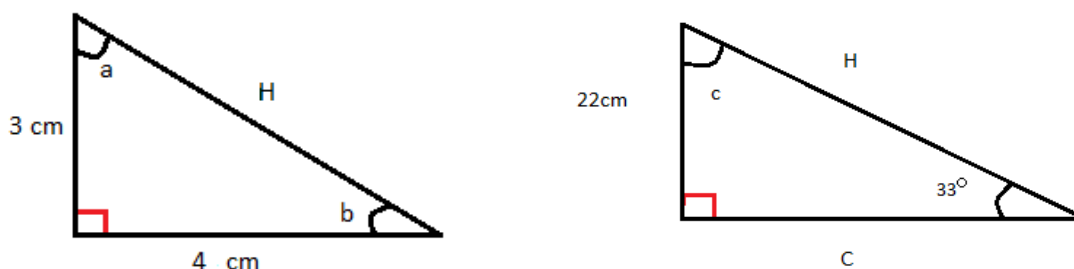


Figura 4. Triángulos del problema 5

4.2 PAUTAS POR EVALUAR EN LA PRUEBA DE PRESABERES

El desarrollo de esta prueba sirvió para determinar algunos conceptos generales adquiridos y las fallas que poseen los estudiantes en el uso de las razones trigonométricas. Fueron escogidos los seis estudiantes por cada colegio, quienes realizaron la propuesta didáctica que sugiere el uso del clinómetro. En otro encuentro, desarrollaron una tercera prueba, que concluyó los alcances obtenidos por medio de la propuesta didáctica.

Como pauta de calificación de la prueba de presaberes, se tuvieron en cuenta cuatro categorías para analizar cada uno de los cinco enunciados propuestos, de manera que se pudiera determinar si el estudiante realizó representaciones gráficas y la manera como las interpretó; si identificó y ubicó correctamente las variables, incluyendo los datos propuestos del enunciado y finalmente si realizó algún planteamiento que diera solución a nuestra situación problema.

A continuación, se exponen las cuatro categorías:

Categoría 1. Dibujo. Se tendrá en cuenta la representación gráfica de triángulos rectángulos.

Categoría 2. Identificación de variables y datos. Para el análisis de esta categoría, se cuenta con que el estudiante registrará las variables y datos que reconoció al principio del enunciando, lo que le permitirá saber qué metodología debe aplicar y el enfoque de su camino para resolver la pregunta, como lo expresa Polya, citado por (Santos, 1997):

“En esta fase se ubican las estrategias que ayudan a representar y entender las condiciones del problema; por ejemplo, ¿cuál es la información dada (datos)?, ¿cuál es la incógnita? y ¿cuáles son las condiciones que relacionan

los datos del problema? Son algunas preguntas que merecen atención en la fase de entendimiento del problema”.

Categoría 3. Ubicación de variables y datos en el dibujo. La ubicación de las variables debe ser exclusivamente en el lugar correspondiente del dibujo ya sea una longitud o un ángulo. Esta es una categoría muy importante, debido a que es el enlace entre las dos primeras categorías, así como el primer paso grande para dar la solución al problema. De lo anterior, (Polya, 1998) afirma:

“Al reunir los datos y la incógnita en una figura que haga ver las relaciones requeridas, podría deducirse a partir de los datos algún elemento útil que les pueda dar un camino hacia la solución del problema”.

Categoría 4. Determinación de las relaciones que lleven a la resolución del problema. Existen diferentes expresiones que pueden dar solución a las diferentes situaciones problema, se tiene en cuenta el concepto que conocen o el que utilizaron y la forma como aplicaron este concepto sin ver la respuesta del enunciado.

Debemos tener presente que estas reglas no necesariamente deben ser seguidas al pie de la letra, puesto que hay alumnos que saltarán de una a otra sin ningún problema y otros que las resolverán en otro orden. Citando a (Santos, 1997), tenemos:

“Frecuentemente, el proceso de seguir el modelo de Polya se volvía rígido y rutinario para el estudiante. Muchas veces era obligado a seguir las fases aun cuando podía resolver el problema inmediatamente”.

4.3 SOLUCIÓN ALTERNATIVA DE LA PRUEBA DE PRESABERES

La prueba fue diseñada para ser resuelta en un tiempo de 60 minutos. Los estudiantes del equipo de investigación la desarrollaron en un lapso mínimo de 32. Cabe decir que esta se realizó sin previo aviso y sin algún tipo de repaso.

Cada enunciado de la prueba puede ser desarrollado por medio de diferentes planteamientos; de esta manera, el estudiante tuvo la ventaja de tomar el camino que a él le parecía mejor y no quedaba limitado a una sola alternativa de solución. En desarrollo del problema, pudo contar con algunas herramientas, como las razones trigonométricas, el teorema de Pitágoras, la suma interna de los ángulos de un triángulo y otras definiciones.

A continuación, se plantea un estilo de solución en cada uno de los cinco enunciados, usando como referencia las cuatro categorías que se tomaron como pautas de evaluación de la prueba de presaberes. Es importante aclarar que otros tipos de solución no son erróneos; solamente no fueron tomados por simplicidad del trabajo:

1. Desde un punto situado a 18 metros del pie de un árbol, se observa el extremo superior de este con un ángulo de elevación de 62° .
 - a. ¿Cuál es la altura del árbol?
 - b. Si el ángulo de elevación hubiera sido de $\pi/4$, ¿cuál será la altura del árbol?

Categoría 1.



Figura 5. Esquema árbol

Categoría 2. Datos: Longitud 18 metros, ángulo 62°

Variable: Altura del árbol $h = ?$

Categoría 3

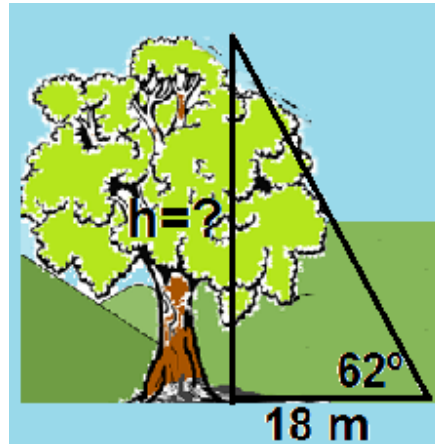


Figura 6. Datos del árbol

Categoría 4.

$$\tan 62^\circ = \frac{h}{18 \text{ m}}$$

2. Para alcanzar la cima de un muro de 6 metros de altura, se utiliza una escalera de 10 metros. Si el extremo de la escalera queda 2 metros más allá del muro, determine la inclinación respecto a la horizontal. Escriba su respuesta en radianes.

Categoría 1.



Figura 7. Esquema del muro

Categoría 2.

Datos: Altura del muro=6m

Escalera 10 metros=2 metros (sección fuera del triángulo rectángulo)+8 metros (sección que pertenece al triángulo rectángulo)

Variables: Θ = ángulo comprendido entre el suelo y la escalera=?

Categoría 3.

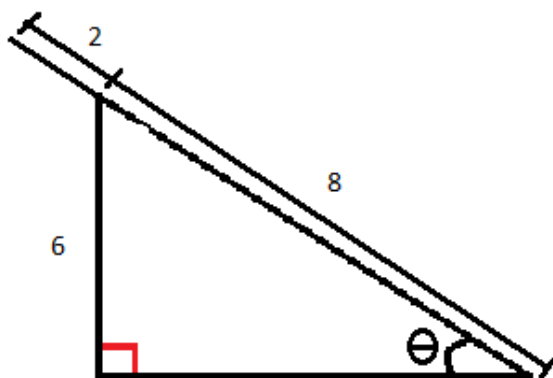


Figura 8. Datos del muro

Categoría 4.

$$\text{sen } \theta = \frac{6}{8}$$

3. Una escalera se encuentra apoyada contra un muro, de manera que la distancia entre el pie de la escalera y la base del muro es de 1,2 metros. ¿A qué altura del suelo se apoya la escalera y cuál es su largo, si se forma con él un ángulo de 70° ?

Categoría 1.

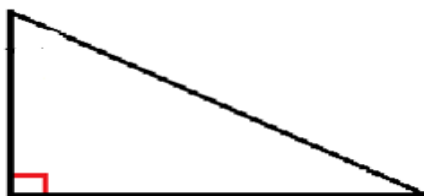


Figura 9. Esquema de la escalera

Categoría 2.

Datos: X=La distancia entre el pie de la escalera y la base del muro=1,2 metros.

Θ =El ángulo entre el suelo y la escalera= 70°

Variables: H= Altura del piso donde se apoya la escalera=?

A= La longitud de la escalera=?

Categoría 3.

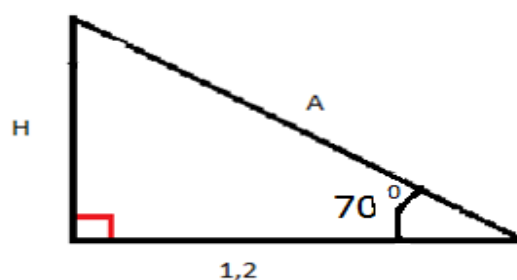


Figura 10. Datos de la escalera

Categoría 4. Para determinar la altura, puede plantearse la definición de tangente y para la distancia es posible plantear la definición de coseno; de esta manera respectivamente, tenemos:

$$\tan 70^\circ = \frac{H}{1,2} \quad \cos 70^\circ = \frac{1,2}{A}$$

4. Construya un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene 5 cm y uno de sus catetos tiene 3 cm. Luego, halle el otro cateto y los ángulos internos del triángulo.

Categoría 1. Debe dibujar un triángulo rectángulo, sin importar si contiene algún tipo de información.

Categoría 2.

Datos: *Hipotenusa* = 5 cm, *cateto* = 3 cm, *ángulo 1* = 90°

Variables: α =?, θ =?, α =?

Categoría 3.

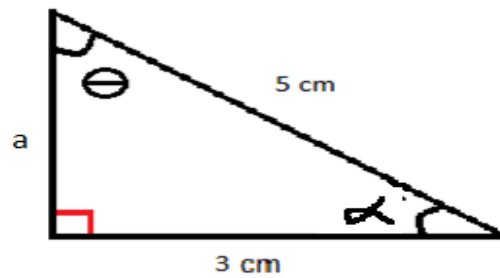


Figura 11. Triángulo problema 2

Categoría 4.

- $5^2 = a^2 + 3^2$
- $\text{Sen} \alpha = \frac{4}{5} \text{ Sen} = \frac{3}{5}$
- $\text{Cos} = \frac{4}{5} \text{ Cos} \alpha = \frac{3}{5}$
- $\tan = \frac{3}{4} \tan \alpha = \frac{3}{4}$

5. En los siguientes triángulos, se indican los datos conocidos. Encuentre el valor de las incógnitas:

Categoría 4.

- $c + 33^\circ = 90^\circ$
- $\text{sen} 33^\circ = \frac{22}{H}$
- $\text{cos} 33^\circ = \frac{c}{H}$
- $H^2 = (22)^2 + c^2$

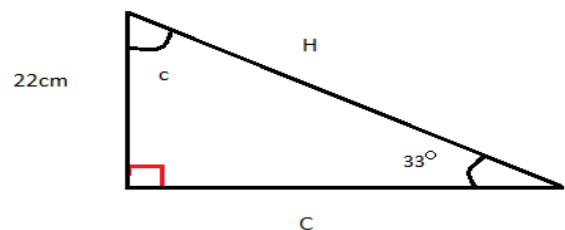


Figura 12. Triángulo problema 5.a

b. Solución 2º triángulo:

Categoría 4.

- $H^2 = 3^2 + 4^2$
- $\tan b = \frac{3}{4} \tan a = \frac{4}{3}$
- $\sin b = \frac{3}{h} \sin a = \frac{4}{h}$
- $\cos b = \frac{4}{h} \cos a = \frac{3}{h}$

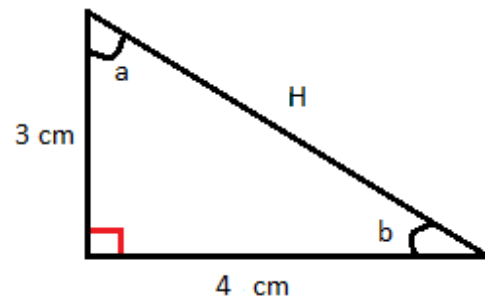


Figura 13. Triángulo problema 5.b

5. PROPUESTA DIDÁCTICA

La propuesta didáctica que considera el uso del clinómetro para el desarrollo de las competencias en el planteamiento de problemas fue realizada en grupos de dos estudiantes. Se buscó que los estudiantes aprovecharan a su compañero; así obtuvieron más confianza, expusieron sus ideas, plantearon varias alternativas de solución y tomaron las mejores opciones a criterio de ellos; y no solo se convencieron a sí mismos, sino que también convencieron a otros.

Según aclara (Santos, 1997):

“Interactuar con otros ofrece oportunidades para intercambiar ideas y reflexionar sobre ellas; por lo tanto la comunicación es un elemento fundamental del aprendizaje de las matemáticas”.

“El promover un ambiente instruccional que motive a los estudiantes a participar activamente en actividades donde el resolver un problema o entender una idea matemática involucre la utilización y exploración de conjeturas, el uso de diversas representaciones, y la comunicación de resultados tanto en forma oral y escrita es un inicial para alcanzar tal disposición matemática”.

El papel del docente fue de guía y de motivador o mediador; es decir, una conexión o un agregado entre los problemas y los estudiantes, que da una oportunidad para que el estudiante sea el que determine sus propios conocimientos. Entre sus funciones estaban realizar preguntas acerca del proceso que se iba realizando, para que ellos (los estudiantes) estuvieran replanteando o retroalimentando la situación problema, si era que se encontraban en algún error.

“Para que entiendan lo que aprenden, deben apropiarse de habilidades a ellos asociadas a verbos como “examinar”, “representar”, “transformar”, “resolver”, “aplicar”, “probar” y “comunicar”. Esto generalmente sucede cuando los estudiantes trabajan en grupos, participan de discusiones, realizan representaciones y, en algunos caminos, se encargan del desarrollo de su propio aprendizaje” (Santos, 1997).

Cinta métrica: Elemento utilizado para determinar longitudes horizontales o verticales, estén al alcance de los estudiantes. Su unidad patrón de medida es *el metro y el pie*.

Clinómetro: Elemento utilizado para determinar medidas angulares cuya unidad patrón de medida es *el grado*.

Características para tener en cuenta: Usar el nivel de burbuja del clinómetro para trabajar sobre una superficie plana. El nivel de burbuja debe encontrarse en paralelo con el ángulo llano indicado por el transportador del clinómetro.

5.1 EJERCICIOS PRESENTADOS EN LA PROPUESTA DIDÁCTICA

Seguidamente, se describe la primera de las cuatro situaciones problemas de la propuesta didáctica:

Primer problema: dadas las dificultades que presentaron los estudiantes en la prueba de presaberes con la determinación de las relaciones para calcular ciertas longitudes, se estableció el primer enunciado de la propuesta didáctica para que el estudiante utilizara una relación trigonométrica diferente de las usadas en los problemas anteriores.

Los estudiantes debían ubicar un objeto cualquiera en el suelo y luego poner el clinómetro a cierta distancia del objeto. Se pedía determinar la distancia que hay desde el ojo del observador hasta el pie del objeto, como muestra la figura 14.

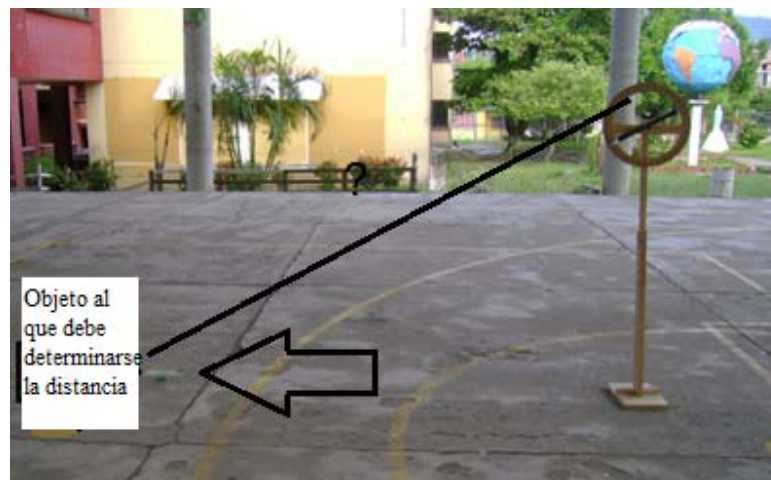


Figura 14. Distancia del objeto a la mira

El segundo problema de la propuesta didáctica es clásico de las razones trigonométricas: se ubicó un objeto en una de las vigas de amarre de la cubierta de la institución; se pidió a los estudiantes que establecieran una relación que determinara la altura a la que se encuentra el objeto a partir del suelo, así como se muestra en la figura 15. De esta forma, ellos no pudieron determinar la distancia de manera directa con la cinta métrica. Para darle solución, debían pensar en otra alternativa; tal vez, una razón trigonométrica.

Se planteó para que el estudiante identificara situaciones en las que se involucraran ángulos de elevación; seguido de un problema que manejó ángulos de depresión y maneja una situación en las que es difícil determinar la incógnita mediante una medición directa, de esta manera el estudiante comprendió la importancia del clinómetro y de la cinta métrica para ciertas situaciones bajo un contexto real.



Figura 15. Objeto al que ha de determinarse la altura

En el tercer problema: se puso un objeto sobre el suelo de la cancha. El clinómetro se ubicó a determinada distancia para que los estudiantes plantearan una relación que determinara la distancia horizontal, desde el pie del clinómetro hasta el pie del objeto. Así como se muestra en la *figura 16*, es un ejercicio similar al primero, en el que cambian los datos y las variables en la misma representación.

Le cambiamos la posición del objeto; de esta forma, también cambió la distancia del pie del clinómetro al objeto. La variable desconocida en el segundo problema se midió con la cinta métrica y se convirtió en un dato. Estos dos cambios sirvieron para ver si el estudiante tenía claro cuáles eran sus datos y sus variables.

El tercer problema: buscó que el estudiante trabajara con ángulos de depresión (definición que se le indicó al estudiante) y que realizara una representación gráfica diferente de la del primer problema, pero con los mismos datos.

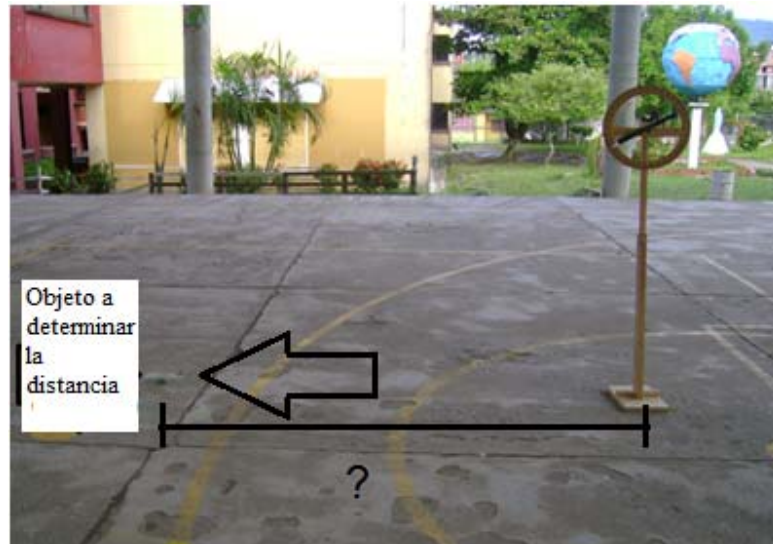


Figura 16. Objeto por determinar la distancia

Cuarto problema: primero se aclaró que no se podía hallar la incógnita directamente con la cinta métrica. Este enunciado buscó que el estudiante mejorara la representación gráfica y se establecieron variables adicionales. Cada estudiante debió encontrar que la situación problema estaba conformada por dos triángulos rectángulos, que debió resolver en forma simultánea para hallar la distancia entre los dos objetos.



Figura 17. Distancia entre dos objetos

5.2 SOLUCIÓN ALTERNATIVA DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

Una vez definida la propuesta didáctica, se tendrán en cuenta las cuatro categorías que permitirán analizar el planteamiento realizado en las situaciones problema.

Problema uno. Halle la distancia que hay desde el ojo del observador hasta el pie del objeto.

Categoría 1. La figura 18 muestra la representación gráfica de esta situación.

Categoría 2. Identificación de variables.

Datos: h =altura del clinómetro; α =un ángulo recto.

Θ =ángulo de depresión (formado entre la línea visual del clinómetro, al registrar cero grados y la línea visual hacia el objeto)

Variables:

x =la distancia horizontal que va desde la mira del clinómetro hasta el objeto

Categoría 3. Ubicación de variables en el dibujo:

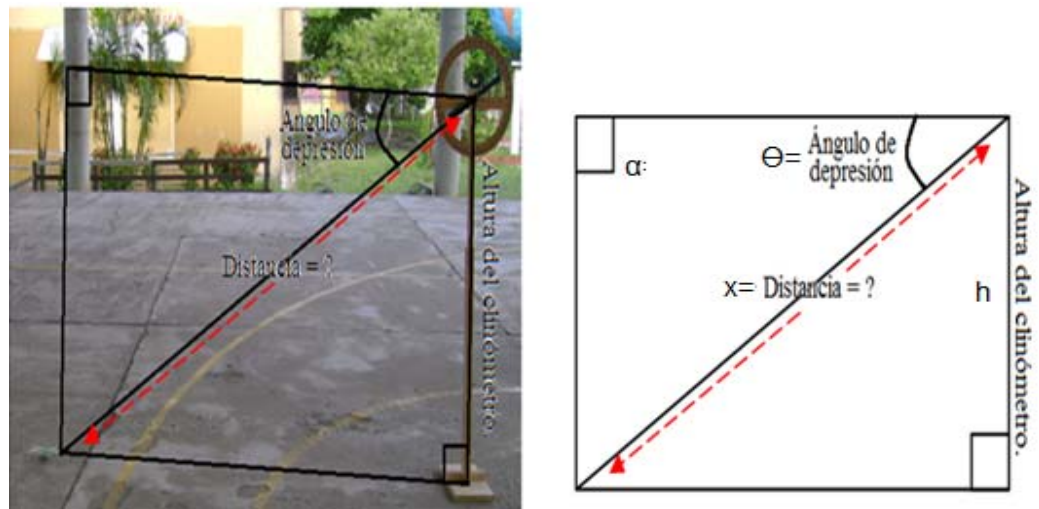


Figura 18. Ubicación de datos y variables, problema 1

Categoría 4. Las razones trigonométricas fueron las relaciones que se esperaba que los estudiantes usaran en el planteamiento del problema.

- $\sin \alpha = \frac{h}{\text{Distancia desconocida}}$

Segundo problema. Halle la altura del objeto.

Categoría 1. La figura 19 muestra la representación gráfica del problema.

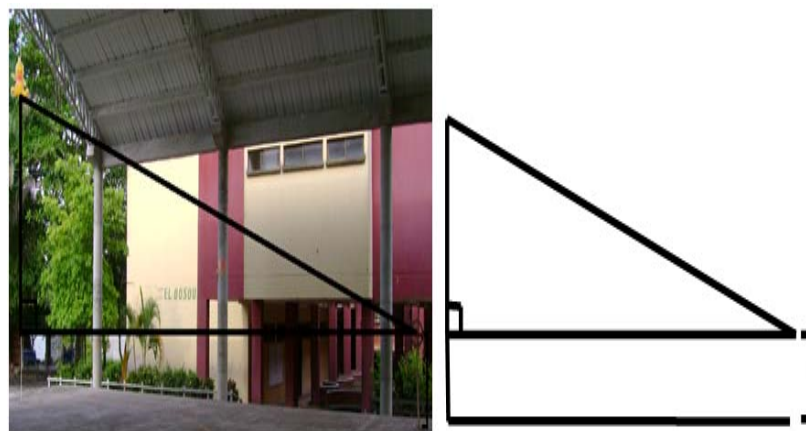


Figura 19. Representación gráfica del problema 2

Categoría 2. Identificación de variables.

Datos: α =el ángulo de elevación generado por el clinómetro

Θ =el ángulo recto

h =altura del clinómetro

x =distancia horizontal (entre el pie del clinómetro y el pie del objeto)

Variables: y =altura del objeto

Categoría 3. La figura 20 muestra los datos y variables en el dibujo.

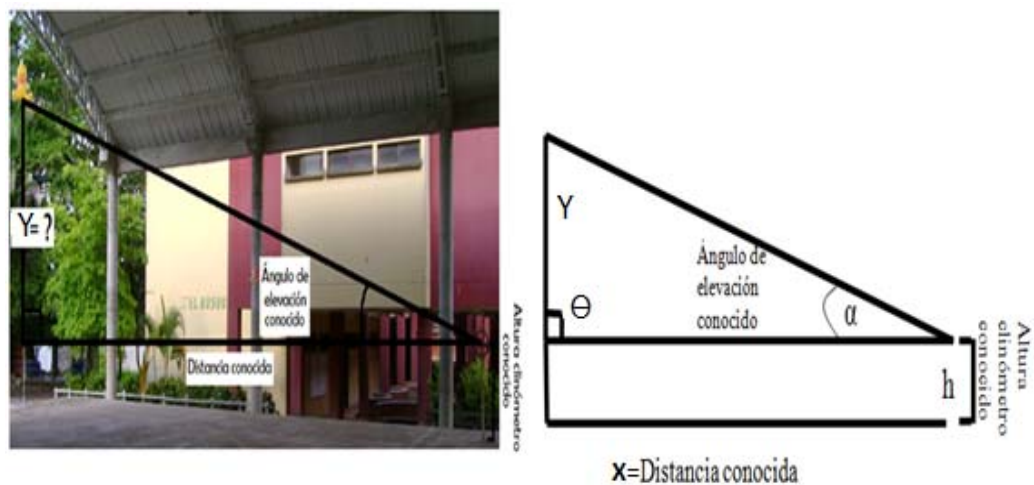


Figura 20. Ubicación de datos y variables, problema 2

Categoría 4. Determinación de las relaciones que dan solución del problema:

$$\tan \alpha = \frac{h}{\text{Distancia conocida}}$$

$$\text{altura } y = h + \text{altura clinómetro}$$

Tercer problema. Halle la distancia horizontal que hay desde el pie del clinómetro hasta el pie del objeto.

Categoría 1. La representación gráfica del problema se presenta en la figura 21.

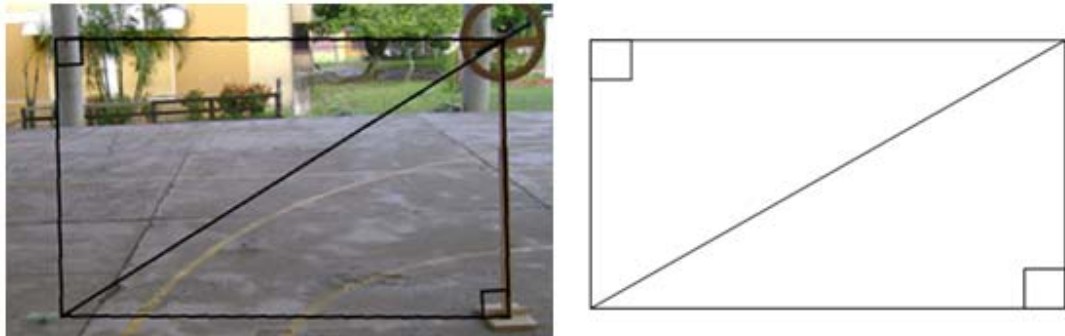


Figura 21. Representación gráfica de los problemas 1 y 3

Categoría 2. Identificación de datos y variables

Datos: h =altura del clinómetro

α =un ángulo recto

Θ =ángulo de depresión (formado entre la línea visual del clinómetro, al registrar cero grados y la línea visual hacia el objeto)

Variables:

x =la distancia horizontal que va desde el pie del clinómetro hasta el objeto

Categoría 3. La ubicación de variables en el dibujo se muestra en la figura 22.

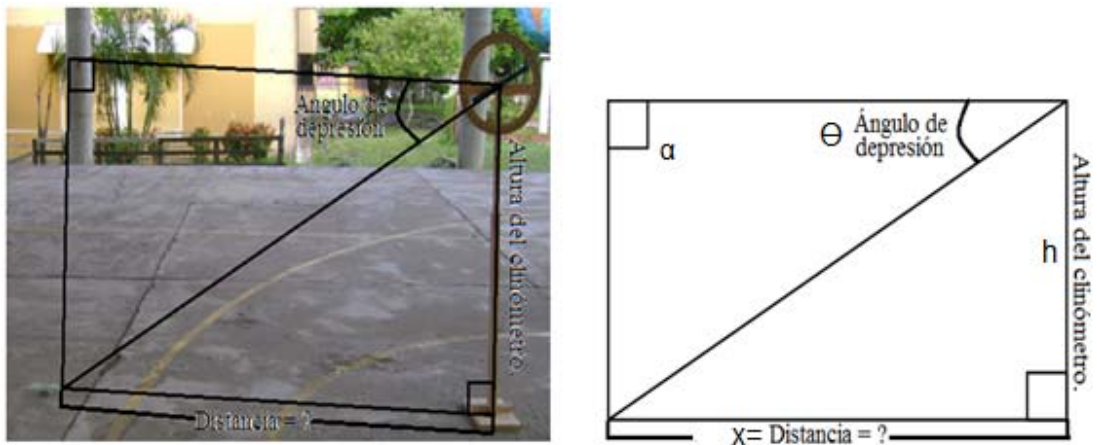


Figura 22. Ubicación de datos y variables, problema 3

Categoría 4. Determinación de las relaciones para dar solución

- $\tan \alpha = \frac{h}{\text{Distancia desconocida}}$

Problema cuatro. Halle la distancia entre dos objetos.

Categoría 1. La representación gráfica del triángulo rectángulo que resulta en el problema se presenta en la figura 23.

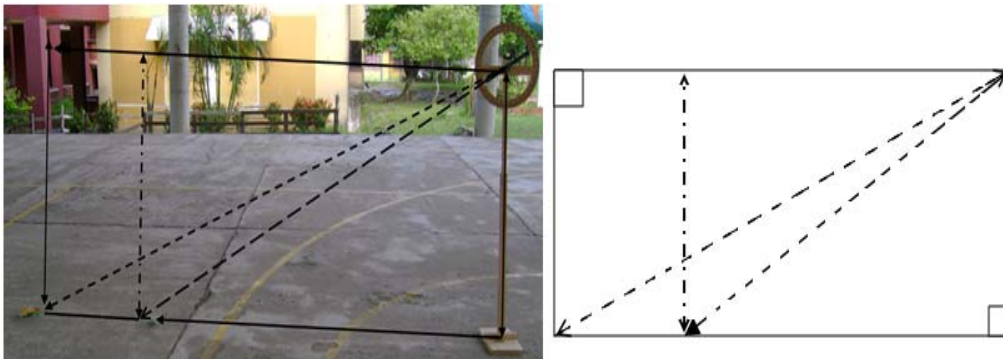


Figura 23. Representación gráfica del problema 4

Categoría 2. Identificación de variables.

Datos: h =la altura del clinómetro

Θ_1 =ángulo de depresión objeto uno (objeto que se encuentra lejos del clinómetro)

Θ_2 =ángulo de depresión objeto dos (objeto que se encuentra cerca al clinómetro)

α =el ángulo recto

Variable: x =la distancia entre dos objetos

y =la distancia del objeto uno a la base del clinómetro

z =la distancia del objeto dos a la base del clinómetro

Categoría 3. Ubicación de variables en el dibujo:

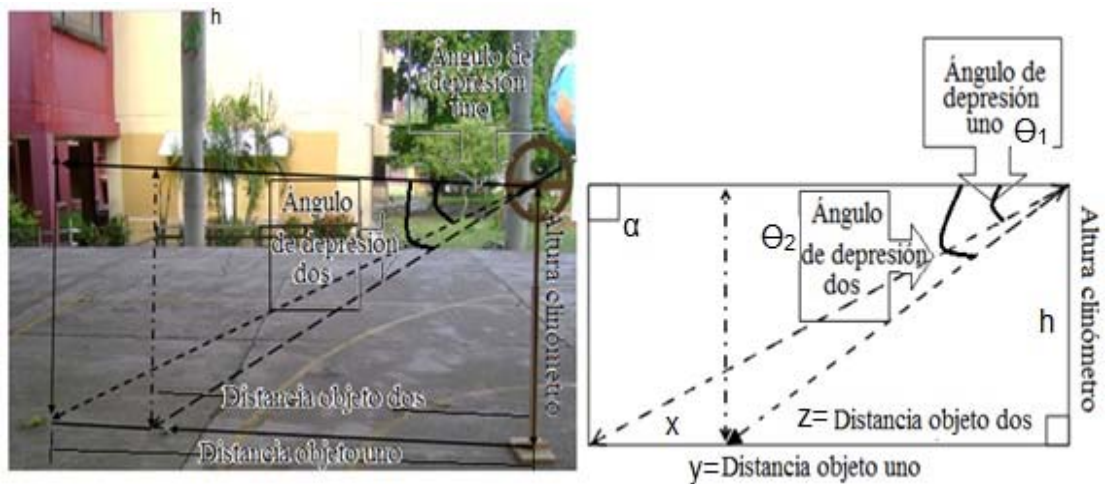


Figura 24. Ubicación de datos y variables, problema 4

Categoría 4. Las relaciones que resuelven el problema:

Cálculo de distancia, objeto uno: $\tan \alpha = \frac{\text{Altura clinómetro}}{\text{Distancia uno}}$

Cálculo de distancia, objeto dos: $\tan \alpha'' = \frac{\text{Altura clinómetro}}{\text{Distancia dos}}$

Distancia uno – distancia dos = distancia entre objetos

6. TERCERA PRUEBA

Una vez realizadas la prueba de presaberes y la propuesta didáctica, se realizó una tercera prueba, que sirvió como indicadora de los alcances de la propuesta didáctica y determinó posibles fortalecimientos o falencias adquiridos por los estudiantes.

6.1 EJERCICIOS PROPUESTOS EN LA TERCERA PRUEBA

Esta prueba constó de cuatro enunciados, escogidos según las características observadas en las dos pruebas anteriores; así se midió el impacto de la implementación del clinómetro como propuesta didáctica en el aula; concluyendo si es un referente como material de apoyo que fortalezca el tema de las razones trigonométricas, o como una propuesta didáctica en el aula, o, en el peor de los casos, que no deba ser usado como herramienta pedagógica. Los enunciados son los siguientes:

- 1.** Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60m de largo. Encuentre el ángulo de elevación del Sol en ese momento.

- 2.** A una cierta hora del día, un asta de bandera de 3 metros de altura da una sombra de 0,8 metros. En ese mismo instante, un árbol cercano da una sombra de 1,2 metros. ¿Qué altura tiene el árbol?

- 3.** Para alcanzar la cima de un muro de 5 metros de altura, se utiliza una escalera de 8 metros. Si el extremo de la escalera queda 2 metros más allá del muro, determine la inclinación de la escalera respecto a la horizontal.

4. Una persona a bordo de una embarcación que se dirige hacia un islote ve el extremo superior de un faro de 20 metros de alto, con un ángulo de elevación de 18° . Tiempo después de navegar en la dirección del faro, lo ve con un ángulo de elevación de 35° . ¿Qué distancia recorrió la embarcación durante el tiempo transcurrido?

6.2 SOLUCIÓN ALTERNATIVA DE LA TERCERA PRUEBA

Esta prueba tuvo un grado de complejidad mayor que la primera y la segunda, de manera que se pudo realizar un análisis comparativo entre las diferentes pruebas y las categorías.

1. Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60 metros de largo. Encuentre el ángulo de elevación del Sol en ese momento.

Se pidió determinar un ángulo; por lo tanto, el ángulo es una **variable**, pero en la propuesta didáctica encontramos que el ángulo fue medido con el clinómetro, o sea que siempre fue un **dato**; por lo tanto, el alumno debió aplicar un criterio un poco diferente en su planteamiento para que lo llevara a la solución de la situación. Este enunciado nos permitió evaluar si los estudiantes crearon una imagen prototípica en la que siempre tienen un ángulo como dato.

Categoría 1. El estudiante debió realizar un dibujo similar al siguiente.

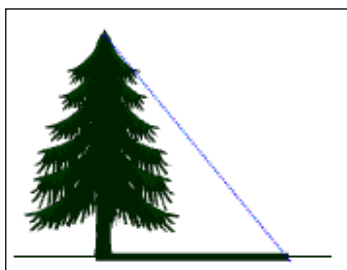


Figura 25. Esquema del árbol

Categoría 2.

Datos: h =altura del árbol (50 metros); x =sombra del árbol (60 metros)

Variables: Θ =ángulo de elevación

Categoría 3.

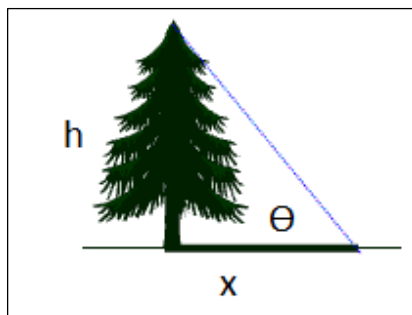


Figura 26. Ubicación de datos y variables, problema del árbol

Categoría 4. $\tan \Theta = h/x$.

2. A una cierta hora del día, un asta de bandera de 3 metros de altura da una sombra de 0,8 metros. En ese mismo instante, un árbol cercano da una sombra de 1,2 metros. ¿Qué altura tendrá el árbol?

El problema es una situación en que se plantean dos (2) triángulos rectángulos cuyos ángulos de elevación resultan ser los mismos, porque la sombra producida por el Sol se encuentra en el mismo instante del día.

Categoría 1. El estudiante debió realizar un dibujo similar al siguiente.



Figura 27. Esquema del asta de bandera

Categoría 2.

- Para el asta de la bandera

Datos: altura del asta=3m; tamaño de la sombra=0,8m

Variables: Θ =ángulo de elevación

- Datos para la situación del árbol

Datos: tamaño de la sombra= 1,2m

Variables: Θ =ángulo de elevación hasta la cima del árbol

h = altura del árbol.

Categoría 3.

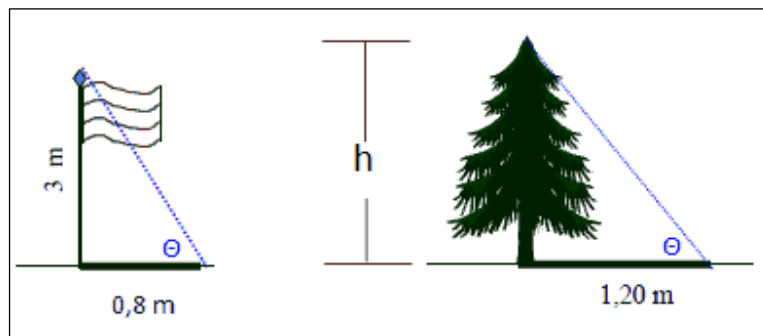


Figura 28. Ubicación de datos y variables en el asta de la bandera

Categoría 4: $\tan \Theta = 3/0,8$ $\tan \Theta = h/1,2$

3. Para alcanzar la cima de un muro de 5 metros de altura, se utiliza una escalera de 8 metros. Si el extremo de la escalera queda 2 metros más allá del muro, determine la inclinación de la escalera respecto a la horizontal.

Este fue el cuarto problema planteado en la prueba de presaberes; solo se cambiaron los valores numéricos, debido a que los resultados obtenidos en este enunciado fueron bajos, de manera que luego de sugerir el uso clinómetro en el aula cambiaron los resultados en cada una de las categorías.

Categoría 1.

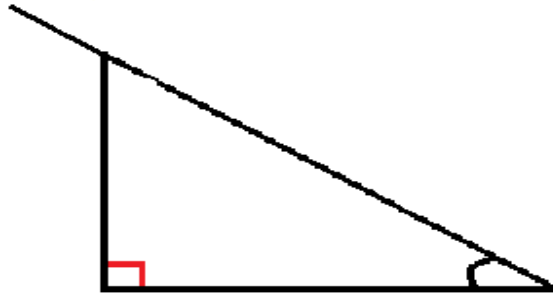


Figura 29. Esquema del muro

Categoría 2.

Datos: altura del muro 5m; escalera 8 metros=2 metros (más allá de la escalera)+6 metros (más acá de la escalera)

Variables: Θ =ángulo comprendido entre el suelo y la escalera

Categoría 3.

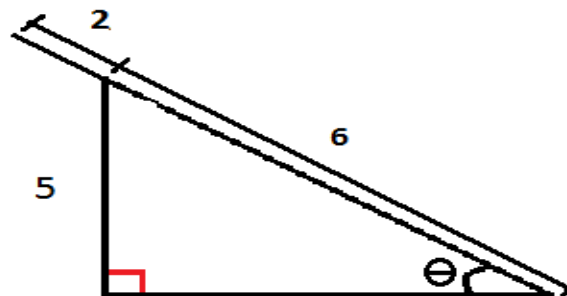


Figura 30. Ubicación de datos y variables en el muro

Categoría 4. $\text{Sen}\Theta=5/6$.

4. Una persona a bordo de una embarcación que se dirige hacia un islote ve el extremo superior de un faro de 20 metros de alto con un ángulo de elevación de 18° . Tiempo después de navegar en la dirección del faro, lo ve con un ángulo de

elevación de 35° . ¿Qué distancia recorrió la embarcación durante el tiempo transcurrido?

El problema planteaba una situación similar a la encontrada en el cuarto problema de la segunda prueba. Se diferencian en que al trabajar con el clinómetro se usaron ángulos de depresión (antes se usaron ángulos de elevación). El alumno ya tenía definido qué son ángulos de depresión y de elevación.

Categoría 1. El estudiante debía realizar un dibujo similar al siguiente sin tener en cuenta sus datos.

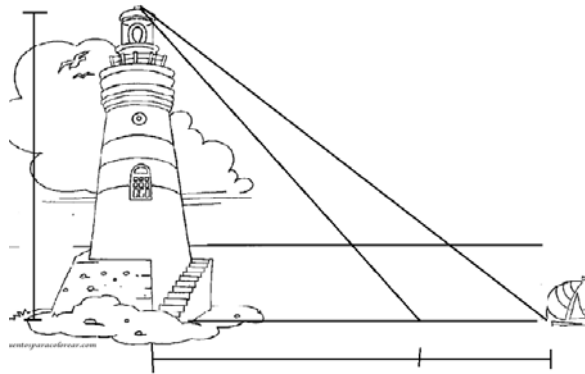


Figura 31. Esquema del faro

Categoría 2.

Datos: altura del faro (20m), $\theta_1=18^{\circ}$, $\theta_2=35^{\circ}$.

Variables: x =la distancia recorrida por el barco

y =la distancia del faro a la posición final del barco

Se pueden tomar a las hipotenusas h_1 y h_2 como variables

Categoría 3.

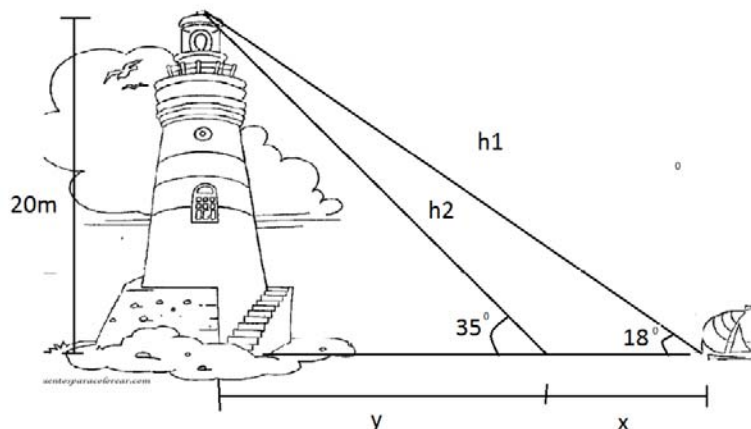


Figura 32. Ubicación de datos y variables del faro

Categoría 4.

Para la solución de esta situación problema, debían plantearse dos relaciones trigonométricas; una por cada triángulo rectángulo.

$$\tan 18^\circ = \frac{20}{x+y} \quad \tan 35^\circ = \frac{20}{y}$$

7. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LAS CATEGORÍAS

A continuación se presentan los resultados obtenidos en las categorías durante las tres pruebas destacando y evidenciando las características más importantes; en términos generales la implementación de la propuesta didáctica permitió que los estudiantes mejoraran en cada una de las categorías y así obtuvieron mejores planteamientos.

7.1 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA CATEGORÍA 1

El análisis para esta categoría incluyó la especificación de un dibujo que cuenta con las características de un triángulo rectángulo y que en el caso de ser representado en una figura, puede determinar las condiciones que asimilan a un triángulo. En esta categoría, se presentaron menos dificultades a la hora de establecer el planteamiento del problema; además, pudimos determinar que los estudiantes mostraron avances y tomaron el dibujo como parte fundamental del planteamiento.

En la construcción del triángulo (primer problema de los presaberes), se observó que en el establecimiento de este dibujo no tuvieron dificultades y a que éste fue tomado a partir del que había al inicio de la prueba. Haciendo la relación de este ejercicio con la tercera prueba (problema del árbol), el diseño era un triángulo, a pesar de la representación del árbol como parte del triángulo. Ya para la prueba didáctica, se percibió que tomaron como segundo paso realizar el dibujo. Luego, se esperó que, al igual que en la primera prueba, como en la tercera, tomaran la figura en el inicio de este planteamiento; pero con este material didáctico esto se revirtió, aunque no fue esto un aspecto negativo.

En el problema dos de la prueba diagnóstica (altura del árbol), se observaron algunas dificultades, entre ellas, que no pudieron interpretar el problema. En la práctica número tres (problema dos) se notó un mejor planteamiento realizado por los estudiantes seleccionados. La mayor dificultad que se presentó fue el dibujo con la inclusión de dos triángulos que no estuvieron relacionados en cuanto a su proyección, ya que el problema contaba con que había que relacionar la proyección de la sombra producida por el Sol para dos objetos en una misma hora del día, además del desconocimiento de semejanza de triángulos. En la prueba didáctica (problema 2), acerca del cálculo de la altura del objeto, la totalidad de los estudiantes hicieron el dibujo de una forma clara y se representó mejor que en el primer problema.

Para el problema de la inclinación de la escalera, se incluyeron medidas adicionales que cumplieron una variación en la elaboración del dibujo, características que se tuvieron en cuenta a la hora de evaluar estos resultados.

La dificultad se presentó en el momento de ubicar parte de la escalera por encima del muro. Estas representaciones fueron elaboradas como triángulos rectángulos, sin tener en cuenta su longitud adicional. Este aspecto se mejoró significativamente en la tercera prueba, ya que la totalidad de los estudiantes plasmaron este dibujo de forma clara y correcta, aspecto que fue mejorado gracias al planteamiento que se dio en la propuesta pedagógica con la utilización del clinómetro, puesto que en los problemas en que se adicionaron medidas, el estudiante pudo visualizar e interpretar de forma más clara este tipo de situaciones.

El problema que pedía calcular la altura en que se apoyaba la escalera, presentó algunas características similares a los anteriores. En la prueba diagnóstica, 20% de los estudiantes (9) no realizó ningún dibujo y 23% (10 estudiantes) usó un esquema que no correspondía a un triángulo rectángulo. Además, se notó que en

algunos dibujos la ubicación de la escalera fue representada aparte del muro. En la práctica con el clinómetro, en el problema sobre el cálculo de la distancia que hay entre dos objetos, se presentó la mayor dificultad.

Al principio, los estudiantes tuvieron apuros en el momento de ubicar los objetos; además, se logró establecer que también presentaron dificultades para visualizar la forma en que debían realizar el dibujo, pero 75% de los estudiantes (9) lo representaron de forma correcta sin evidenciar dificultades en su interpretación.

Ya en la tercera prueba, en el problema del recorrido de una embarcación, mostraron avances en la elaboración de este dibujo, considerado como el problema que mayor dificultad presentaba.

La figura 33 muestra los resultados obtenidos en las tres pruebas respecto a los dibujos que realizaron los estudiantes en las diferentes situaciones problema. En la prueba de presaberes se obtuvieron buenos resultados, pues una gran cantidad de estudiantes logró el dibujo en la mayoría de los problemas; pero una vez se realizó la propuesta didáctica, se mejoraron los resultados, porque la mayoría elaboró los dibujos de las diferentes situaciones propuestas. A continuación, la figura 33 muestra los resultados obtenidos en esta categoría para las diferentes pruebas.

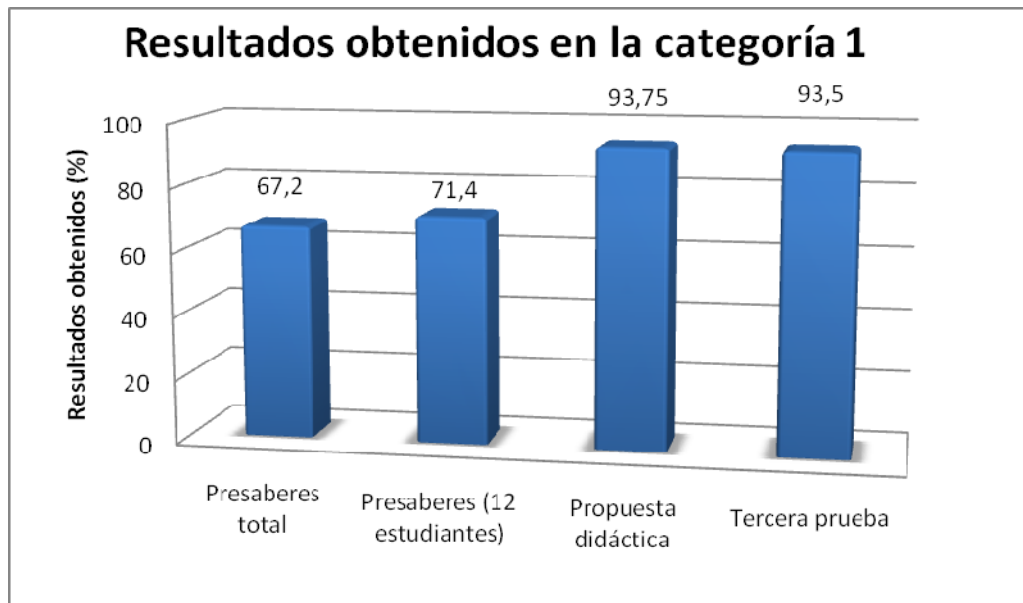


Figura 33. Resultados obtenidos en la categoría 1

7.2 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA CATEGORÍA 2

Dentro de las categorías planteadas en las pruebas, está contenida la etapa de identificación de variables. En el taller, todas las variables que debían identificarse estaban relacionadas con medidas longitudinales y angulares. Estas variables debían establecerse como parte del planteamiento del problema, de forma que fueran claras y entendibles; además, que correspondieran al contenido del problema. Se esperaba que el estudiante las especificara en un apartado de su propio desarrollo.

En esta categoría, se evaluaron puntos en que los estudiantes debían determinar las variables que correspondían a cada uno de los problemas.

Los problemas relacionados en esta práctica de presaberes tienen como base los contenidos en algunos de los textos escolares, pues se buscó analizar la relación

que ofrecen los estudiantes sobre el contenido del problema y el establecimiento de los datos y variable.

Una de las dificultades que pudieron establecerse para la práctica número uno, fue que los estudiantes no identificaron si las variables correspondían a medidas longitudinales o a medidas angulares, ni reconocieron la variable incógnita. Sin embargo, en aquellos problemas en que se les estableció un dibujo, la situación cambió, ya que 97% de los estudiantes caracterizaron, aparentemente sin dificultad, cuáles fueron las variables, tanto conocidas como desconocidas.

En los problemas dos y tres, 67% de los estudiantes (29) no presentó dificultades al establecer los datos, puesto que fueron identificados al menos dos de ellos. En este problema, realizaron una comparación entre los dos ejercicios que los llevó a que utilizaran la misma gráfica y sus correspondientes valores. A pesar de esto, los demás estudiantes, 33% (14), no tuvieron en cuenta esta relación y algunos determinaron que el valor de los ángulos correspondían a dos ángulos de 45° y uno de 90° , pero no los indicaron como variables desconocidas fuera del dibujo. En el caso del problema tres, la mayor dificultad se evidenció porque no tuvieron en cuenta el esquema y así no establecieron sus posibles ubicaciones.

Además, se observó que, cuando el problema incluyó medidas adicionales, cumplían una función extra dentro de este mismo (problema cuatro), en que se estableció una variable conocida que se consideró como adicional a la parte sobre la que está apoyada la escalera (si el extremo de la escalera queda 2 metros más allá del muro). Algunos estudiantes no tomaron esta longitud como una variable, que generaría cambios en la resolución del problema.

Los estudiantes que no determinaron las variables para los diferentes problemas continuaron presentando la misma dificultad en el último ejercicio. En este caso, hubo estudiantes, 62% (27), que no determinaron al menos dos de las tres

variables, de manera que este fue el problema en que se presentó el mayor porcentaje de falencias por parte de los estudiantes, debido a que no determinaron las variables.

Para la práctica con el clinómetro, se buscó que las dificultades que se presentaron en la prueba diagnóstica sobre la detección de variables fuesen superadas. Una de las bondades que se brindó con el uso del clinómetro fue que gracias a la medición directa de los ángulos el estudiante determinó las variables. A partir de esto, se dio mayor claridad en el cálculo y la especificación de los ángulos, como parte de las variables que dieron solución al problema.

El análisis para esta práctica se hizo de forma general para los cuatro problemas establecidos, porque en ella el estudiante fue artífice de sus propios problemas y a partir de la medición directa con el clinómetro y la cinta métrica se le dio la posibilidad de observar y determinar las variables establecidas para estos problemas; de ese modo, se facilitó el reconocimiento de las variables conocidas, que para este caso pudo ser la altura del clinómetro, el ángulo medido con el clinómetro, la distancia horizontal entre el pie del clinómetro y el objeto, el ángulo de 90° formado entre el clinómetro y la horizontal generada por el suelo.

Vale la pena anotar que en esta práctica los estudiantes establecieron primero las variables y luego el dibujo (característica brindada gracias al uso del clinómetro). También lograron establecer la diferencia entre las medidas longitudinales y angulares; además, se formaron elementos que permiten realizar mediciones con poco margen de error, prácticas útiles en diversas actividades y cálculo de medidas.

Dos de las dificultades evidenciadas al principio del trabajo fueron las siguientes: primero, la falta de identificación de las variables desconocidas y, segundo, que no realizaban correctamente la lectura de un ángulo determinado; pero, luego de la

orientación dada en el proceso didáctico, se determinó que resultó más sencillo para los estudiantes en los demás ejercicios.

En el desarrollo de primer problema, algunos estudiantes, 25% (3), se equivocaron al establecer la distancia entre la visual del clinómetro y el objeto (hipotenusa) como una variable conocida. En este problema, se definió que las variables conocidas serían la altura del clinómetro, el ángulo medido por este objeto y la distancia desde el pie del clinómetro hasta el pie del objeto. Los demás estudiantes no tuvieron dificultad en esta identificación.

Entre las características que se encontraron en esta práctica está la conexión que dieron los estudiantes en estos problemas en relación con los tratados en la primera prueba.

Las dificultades que mostraron los estudiantes en estos ejercicios, para los ítems dos y tres, fueron leves, ya que las identificaron con mayor facilidad. En el ejercicio cuatro, nuevamente se presentaron dificultades con la determinación de las variables, puesto que 41% de los estudiantes (5) no logró visualizar el problema y dichos estudiantes presentaron apuros para determinar las dos medidas angulares que se requerían. Este inconveniente no se presentó por el uso del material didáctico, sino por la complejidad del problema. Finalmente, se evidenció la satisfacción de los practicantes al obtener sus propios resultados en esta prueba.

La concepción del manejo de variables en este punto de la práctica estuvo dada de forma más clara: se evidenciaron mejores resultados en la determinación de las variables como parte del planteamiento del problema; esto se reflejó en los resultados obtenidos en comparación con la primera prueba. Hacemos esta comparación entre estas dos pruebas, porque se realizaron de forma individual y los ejercicios estaban estrechamente relacionados en cuanto a su contenido. En el

establecimiento de las variables para los problemas uno y tres, la totalidad de los estudiantes estableció de forma clara estas variables.

Para el caso de los problemas dos y cuatro, se observó la misma dificultad en la determinación de los ángulos que forman parte de los datos. Esta situación, que se presentó de la misma manera en la práctica anterior, mostró nuevamente que manejar dos ángulos como parte del mismo problema les generaba confusión al establecer los datos.

Los resultados en esta categoría en la prueba de presaberes fueron muy bajos: cerca de la mitad de los estudiantes logró establecer los datos y las variables en cada uno de los problemas planteados. En la propuesta didáctica, la mayoría de los estudiantes tuvo en cuenta que debían establecerse los datos y las variables como parte de la solución. Finalmente, en la tercera prueba bajaron los resultados respecto a la propuesta didáctica, pero se mejoró notablemente en relación con la prueba de presaberes. A continuación, la figura 34 muestra los resultados obtenidos en esta categoría para las diferentes pruebas.

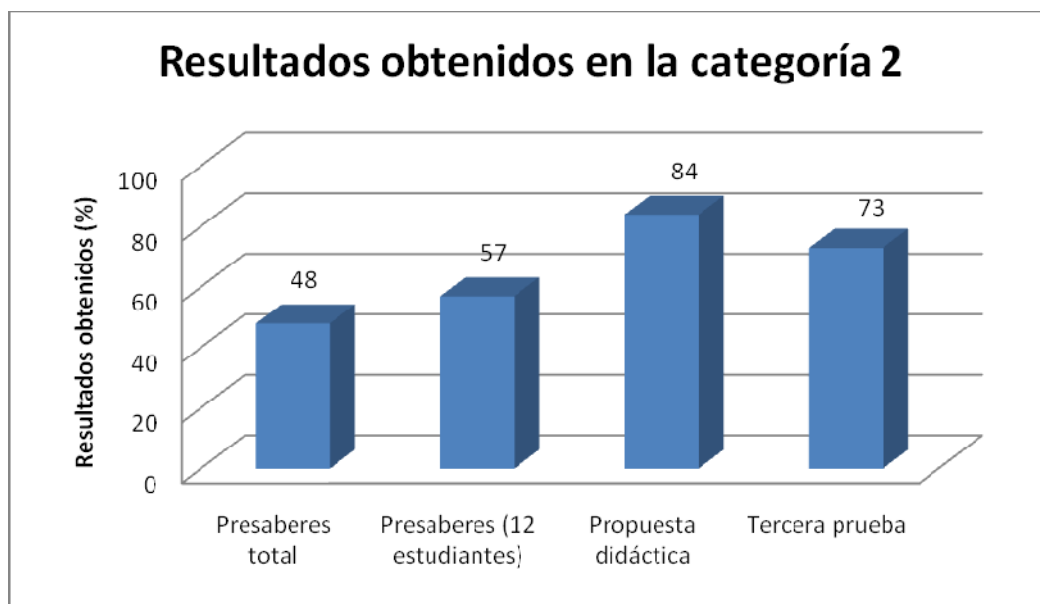


Figura 34. Resultados obtenidos en la categoría 2

7.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA CATEGORÍA 3

Esta categoría se consideró como una de las más sencillas, porque una vez que tuvieron la primera y la segunda categoría establecidas, los estudiantes debían ubicar de forma clara y sencilla estos valores sobre el dibujo. Pero los datos obtenidos y tabulados en las tres pruebas mostraron que en realidad es una categoría en la que empezaron a tener serias dificultades.

En los cuatro problemas de la prueba diagnóstica, se notaron dificultades similares; por ejemplo, establecieron las medidas longitudinales en ubicaciones incorrectas; el valor de un cateto lo pusieron en la posición correspondiente a la hipotenusa; las medidas de los ángulos no fueron situadas como datos o incógnitas o, en su defecto, no ubicaron su valor; establecieron la altura de un objeto tomando los valores de las distancias horizontales; en reiteradas ocasiones, las medidas angulares fueron puestas en los lados del triángulo. Estas fallas pudieron ser causadas porque algunos estudiantes no pueden reconocer entre medidas angulares y longitudinales.

En la prueba didáctica, se logró mejorar este aspecto, pero no en su totalidad. A pesar de que los estudiantes mostraron facilidad a la hora de tomar los datos de los problemas y realizar el dibujo, en el momento de ubicar estos valores presentaban la misma dificultad mostrada en la prueba diagnóstica.

Dentro de los problemas detectados está la ubicación incorrecta del ángulo de depresión, porque lo establecieron como el ángulo complementario; las medidas longitudinales fueron ubicadas de forma correcta; en uno de los problemas, un estudiante no tuvo en cuenta la longitud del clinómetro, a pesar de tener el dibujo de forma correcta.

Durante la propuesta didáctica en esta categoría, pudo establecerse que los estudiantes mejoraron su perspectiva respecto a la ubicación de los datos, porque tuvieron la posibilidad de manipular los elementos de medición y fue el ángulo el que presentó mayor dificultad a la hora de ser ubicado.

En la tercera prueba, los estudiantes mostraron progreso, puesto que la ubicación de las medidas longitudinales y el ángulo de elevación fueron establecidas en el lugar correcto. Entre las dificultades encontradas está la ubicación de las medidas longitudinales consideradas como adicionales, porque en la identificación de las variables no fueron tenidas en cuenta y además se observó que el dibujo había sido mal elaborado; tampoco aplicaron semejanza de triángulos y, por ende, presentaron dificultades en la elaboración de la gráfica y en el lugar de las variables.

Cabe destacar que, a pesar de haberse presentado estas dificultades, se logró avanzar en la identificación y la ubicación tanto de medidas longitudinales como de las angulares, resultado que atribuimos al uso del clinómetro. Además, con lo que respecta a la prueba tres, se notó el avance en esta categoría y se vio mayor interés por parte de los estudiantes a la hora de plantear estos problemas.

En esta categoría, debemos tener en cuenta que es un acople entre la primera y la segunda categoría; pues en gran medida, si se realizaban de forma correcta estas dos categorías, seguramente se obtendrían buenos resultados en la tercera categoría. En este caso, en la prueba de presaberes se obtuvieron unos resultados muy bajos, en que menos de la mitad de la población logró desarrollar correctamente la categoría durante la actividad. Con la propuesta didáctica, mejoraron los resultados y en la tercera prueba se obtuvieron similares resultados a los encontrados en la propuesta didáctica. A continuación, la figura 35 muestra los resultados obtenidos en esta categoría para las diferentes pruebas.

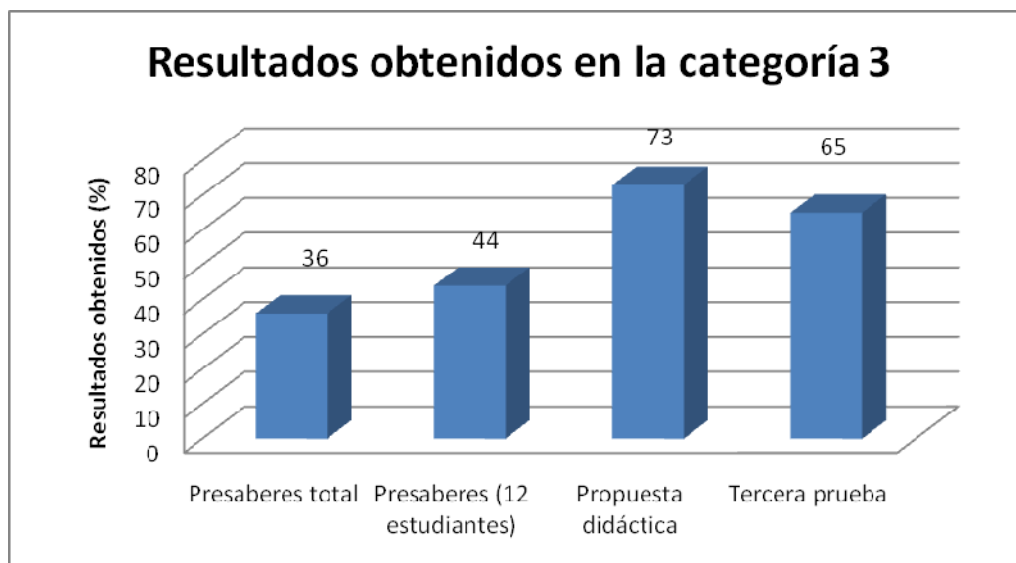


Figura 35. Resultados obtenidos en la categoría 3

7.4 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA CATEGORÍA 4

En el planteamiento de las relaciones que permitieron dar solución a los problemas, se pudieron usar varias estrategias de solución, con lo que se dio una oportunidad para que el estudiante no se limitara con un solo método.

Durante la prueba de presaberes, los estudiantes mostraron gran dificultad en el instante en que establecieron esta categoría, característica que se dio a partir de que plantearon algunas relaciones que no los llevaron a la solución del problema o, por el contrario, no establecieron alguna relación. Además, en esta instancia del planteamiento, si no se estableció por lo menos la determinación de las variables, difícilmente podría establecerse esta categoría. En lo que respecta al grupo seleccionado para las otras dos prácticas, en esta categoría tuvieron dificultad.

Las falencias encontradas con mayor frecuencia durante el planteamiento de las razones trigonométricas fueron:

Plantearon razones trigonométricas reemplazando un lado por un ángulo. Realizaron un tanteo para llegar a la respuesta y en ese tanteo plantearon imágenes prototípicas de un triángulo rectángulo, con ángulos internos de 30° . Utilizaron identidades trigonométricas usando equivocadamente un ángulo 90° .

Durante el planteamiento del teorema de Pitágoras, se encontraron las siguientes situaciones por corregir: No reconocieron en dónde se podían reemplazar un cateto y la hipotenusa. Erraron en una ecuación similar al teorema de Pitágoras, tomaron: “La suma de sus catetos elevados al cuadrado y divididos entre dos” o “el cuadrado de la hipotenusa es igual a la resta de los catetos”, situación que es representada como evidencia 6 en los anexos.

A partir de la aplicación de la propuesta didáctica, este grupo superó de forma significativa este planteamiento y mostró fluidez en el análisis y la correlación en las diferentes razones usadas para esta categoría.

Adicionalmente a este aspecto, la interacción que tuvieron los estudiantes con los elementos utilizados les permitió identificar las longitudes establecidas y su ubicación y con esto se les facilitó la determinación y el refuerzo de las razones trigonométricas para usar en la solución.

Para el caso de la variable desconocida, cada participante pudo observar y analizar la situación problema, hasta predecir un rango de valores para la incógnita antes de hallar su resultado. Esto generó mayor claridad durante el desarrollo del planteamiento.

La determinación de una relación, que les permitiera llegar a la solución de un problema, fue la categoría que presentó más inconvenientes. El estudiante debía tener claras las categorías anteriores y además debía tener un buen concepto de las razones trigonométricas, factores que complicaron los resultados en la

categoría final, de manera que provocaron que estos fueran inferiores, comparados con las otras categorías.

Este trabajo está basado en el planteamiento de problemas usando razones trigonométricas y no en la solución como tal del problema, pero consideramos que el clinómetro también sirve para conceptualizar las razones trigonométricas y se deja como alternativa para otro trabajo de grado en que se busque conceptualizar las razones trigonométricas o angulares, o conversiones de grados a radianes. A continuación, la figura 36 muestra los resultados obtenidos en esta categoría para las diferentes pruebas.

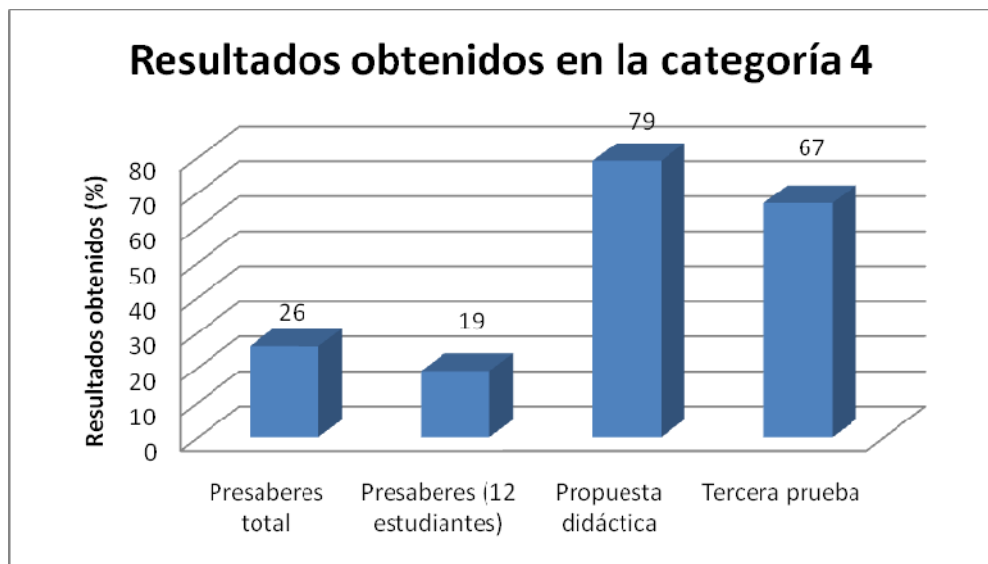


Figura 36. Resultados obtenidos en la categoría 4

8. RESULTADOS DE IMPLEMENTAR LA PROPUESTA EN EL AULA

A partir de la prueba de presaberes, se seleccionaron los estudiantes que se caracterizaron por comprender parte de los problemas y por mostrar algún interés y habilidad en el proceso que se estuvo desarrollando. Siguiendo un desarrollo coherente a través de una serie de pasos, aportando ideas propias para una posible solución. La figura 37 presenta un cuadro en que se resumen los resultados, divididos por categorías y por pruebas. Los valores encontrados son expresados en porcentajes.

Resultados en %																
	Categoría uno				Categoría dos				Categoría tres				Categoría cuatro			
	43 estudiantes	Grupo seleccionado (total, 12 estudiantes)			43 estudiantes	Grupo seleccionado (total, 12 estudiantes)			43 estudiantes	Grupo seleccionado (total, 12 estudiantes)			43 estudiantes	Grupo seleccionado (total, 12 estudiantes)		
	Presaberes total	Presaberes	Propuesta didáctica	Tercera prueba	Presaberes total	Presaberes	Propuesta didáctica	Tercera prueba	Presaberes total	Presaberes	Propuesta didáctica	Tercera prueba	Presaberes total	Presaberes	Propuesta didáctica	Tercera prueba
Problema uno	85	91	100	100	61	67	75	83	47	58	75	83	53	17	100	75
Problema dos	88	100	100	91	49	58	100	58	51	58	92	58	26	33	83	58
Problema tres	51	50	100	100	21	50	92	83	33	33	67	67	7	8	92	67
Problema cuatro	56	58	75	83	35	33	67	75	14	25	58	50	19	17	42	67
PROBLEMA CINCO	56	58			75	75										

Figura 37. Matriz de resultados por categorías y pruebas

Una vez realizadas las pruebas que buscaron implementar una alternativa didáctica dentro del aula, se compararon entre sí y sirvieron como base para determinar los resultados de esta implementación. De esta manera, se muestran a continuación los aspectos más notorios encontrados en el planteamiento de problemas de las razones trigonométricas. Es importante recalcar que en algunos aspectos hubo evolución de los estudiantes, mientras que en otros, no.

La primera prueba determinó qué conocimientos previos poseían los estudiantes antes de la propuesta didáctica. Se observó un resultado un poco bajo debido a que fueron encontrados errores de todo tipo en los planteamientos de los problemas; luego, en la segunda prueba, bajo la actividad que sugiere el uso del clinómetro, los estudiantes tuvieron un desarrollo sobresaliente. La tercera prueba, siendo similar a la primera, tuvo un grado de mayor dificultad.

Se concluyó que los resultados fueron muy positivos porque sirvieron para corregir varios aspectos en los planteamientos y mejoraron la estructura de los planteamientos a través de la conexión entre las categorías. Los resultados de la tercera prueba bajaron con respecto de la segunda, pero aun así se mantuvo por encima de la primera.

La etapa de presaberes determinó una serie de fortalezas y debilidades en los estudiantes, al plantear problemas de las razones trigonométricas. Entre sus debilidades, encontramos que a la mayoría de estudiantes se le dificultaron las situaciones problema y se le facilitaron las situaciones que incluyen una representación gráfica en el problema. El ejercicio 4 es similar al problema 5, pero el ejercicio 5 está representado gráficamente, mientras que el problema 4 solamente describe los elementos del triángulo y el estudiante construyó su gráfica.

Los estudiantes no entendieron la redacción del problema 4, o crearon cierta barrera de apatía y miedo que los hizo pensar que el enunciado era difícil. Se buscó que la propuesta didáctica estuviera bajo otro ambiente, para que el alumno se relacionara mejor con el problema. Pimm, citado por (Polya, 1999, p.83), afirma lo siguiente:

“Es claro que el discurso matemático incluye términos especializados y significados distintos de los habituales en el habla cotidiana y por ello el lenguaje usado en matemáticas que es ‘claro’ para los docentes, no siempre lo es para los estudiantes”.

La evidencia 1 muestra el caso planteado por varios estudiantes; el ejercicio 5 se planteó de forma correcta, pero por otro lado, en el problema 4 solo realizaron la representación gráfica. En otros casos, no plantearon ni la representación gráfica.

En la prueba de presaberes se encontraron otras situaciones similares; por ejemplo, un estudiante que hizo buenos planteamientos durante esta etapa, al plantear el problema 3, construyó un triángulo rectángulo correctamente, pero no entendió la pregunta planteada y enunció que la pregunta no era clara; de esta manera, no logró reconocer la variable incógnita y dejó inconcluso el problema. Esta situación se presenta en la evidencia 2.

En el desarrollo de la propuesta didáctica, el profesor participó en la construcción de la situación problema, que consistió en una situación real vivida en ese momento; por lo tanto, el estudiante siempre comprendió cuál era la metodología de trabajo y cuáles eran los objetivos en cada problema; además, entendió cuáles eran los datos y las variables, lo que le permitió abordar cada problema; también, manejó su propio contexto real y ningún enunciado se planteó a través de una lectura. Según Alder, citado por el Ministerio de Educación UDCRESS (2001).

“debemos encontrar medios para desarrollar en los alumnos la capacidad de leer e interpretar la matemática, y su aplicación, porque el divorcio entre el pensamiento y la experiencia directa, priva al primero de cualquier contenido real y lo transforma en una caja vacía de símbolo sin significado”.

Finalmente, la propuesta didáctica les brindó herramientas a los estudiantes en su mayoría, para que en la tercera prueba logaran sobrepasar de un contexto a otro. De esta manera, fueron muy pocos los problemas dejados en blanco, a pesar de que estos eran de mayor dificultad que en las situaciones anteriores. Es importante recomendar que, una vez sea implementado la actividad de aula que da como alternativa el uso del clinómetro, debe realizarse una actividad de refuerzo en que se incluyan problemas basados en fuentes biográficas, en busca de que el alumno no pierda la conexión con libros, autores o lecturas.

El contexto real de la propuesta didáctica permitió que los estudiantes predijeran y verificaran sus resultados; además, fueron capaces de encontrar errores que posteriormente corrigieron. Algunos estudiantes hallaron una distancia incorrecta, pero observaron que no era congruente con la realidad. Luego de analizar la situación encontraron que debían corregir los ángulos medidos y realizaron nuevamente el planteamiento del problema y agregaron una retroalimentación de la situación; una vez rectificada la situación, coincidió la parte práctica con la teórica.

La cinta métrica y el clinómetro también sirvieron para que los estudiantes manejaran escalas de metros o pies, con lo que se retomó el concepto de las representaciones de las magnitudes. Un ejemplo de la importancia de tal situación se presentó con una estudiante que inicialmente tuvo dificultad en el registro de las longitudes usando la cinta métrica y que luego aproximaba acertadamente las distancias planteadas en los problemas.

Profesor: ¿Qué haces?

Yuliseth: Tomando la medida.

Profesor: ¿Cuál medida?

Yuliseth: La que está entre el aparato y el piso del objeto.

Profesor: ¿Cuánto tienes?

Yuliseth: 48,9 pies.

Profesor: ¿Estás segura?

Yuliseth: Digo... uhmmm ¡48,9 metros!

Profesor: ¿Cómo vienen las medidas en esta cinta métrica?

(Yuliseth tomó la cinta métrica y la observó por un lado y por el otro, reconociéndola, pero sin tener una claridad exacta. Así, el profesor repasó el uso de la cinta métrica).

Profesor: Y... ¿cuánto mide la distancia entre la base del clinómetro y la base del objeto?

Yuliseth: (Una vez que ella rectificó) 4,88 metros (luego se rio). ... Antes pensaba que eran 48 metros.

Otra situación particular que sirvió como proceso de retroalimentación fue cuando los estudiantes no tomaron con precisión la medida de un ángulo con el clinómetro y esto provocó un error en el resultado, de manera que la parte teórica no se aproximó a la distancia observada. Una vez que notaron que había un error en el resultado, analizaron qué situaciones pudieron afectar al resultado y finalmente llegaron a la conclusión de que era el ángulo registrado con el clinómetro.

Teniendo claro que en la resolución de problemas es muy importante realizar una gráfica que plantee la situación problema y citando a (Santos, 1997, P. 54), tenemos que:

“En la fase de comprensión del problema, el pensar en una figura o un diagrama muchas veces no solamente ayuda a identificar los elementos

importantes del problema sino que también puede sugerir una estrategia para resolverlo”.

Un error que presentaron algunos estudiantes en la prueba de presaberes, fue que visualizaron un triángulo isósceles, cuando todas las situaciones problema estaban representadas con triángulos rectángulos que no eran isósceles. Una vez se realizó la propuesta didáctica, siempre se planteó un triángulo rectángulo para los diferentes problemas, pues el estudiante abstrae la figura de una situación real. En la tercera prueba, todos los planteamientos fueron representados a través de triángulos rectángulos, ya que el uso del clinómetro así lo permitió.

En la tercera prueba se pidió determinar un ángulo; por lo tanto, el ángulo es una **variable**, pero en la propuesta didáctica encontramos que el ángulo fue medido con el clinómetro, o sea, siempre fue un **dato**; de esta manera, el alumno debe aplicar un criterio un poco diferente en su planteamiento para que pudiera llevarlo a la solución de la situación. Este enunciado nos permitió evaluar si los estudiantes crearon una imagen prototípica en la que siempre tienen un ángulo como dato. Algunos estudiantes se sintieron confundidos porque pensaron que el ángulo siempre se iba a obtener como parte de la información, pero, una vez sobrepasaron ese obstáculo, continuaron con el planteamiento del problema.

En la prueba de presaberes, algunos estudiantes plantearon el problema de la escalera sin tener en cuenta la parte que sobresalía de la escalera y su propuesta decía que la escalera estaba sobre el borde del muro y en casos extremos hicieron representaciones sin sentido que les impidió continuar con el planteamiento del problema. Pero una vez planteada la propuesta didáctica, no se encontraron casos similares, debido a que la situación problema surge de una situación real, que es más fácil de percibir y de plasmar en una gráfica.

La evidencia 3 muestra uno de los errores más evidentes en el dibujo durante la propuesta didáctica; y es importante recalcarlo para que otros docentes interesados en usarla lo tengan presente: algunos estudiantes tomaron uno de los catetos como si fuera el piso y no tuvieron en cuenta que el triángulo rectángulo se crea sobre una paralela al piso que pasa sobre el ojo del clinómetro, teniendo en cuenta la altura del clinómetro. En algunos casos, esto afectó el resto de sus procedimientos.

En los presaberes, se encontró que a algunos estudiantes no les gustó o no les pareció necesario realizar un listado de los datos y las variables; incluso, no hicieron un dibujo que representara la situación problema. De esta manera, no consideraron necesarias las categorías 1, 2 y 3, pero esto no les afectó el resto del planteamiento del problema. Tal situación se encuentra en la evidencia 4.

Los estudiantes en algunos casos confundieron un ángulo con un lado, e inversamente, tal vez porque no tenían los conceptos claros para diferenciar uno del otro. Esta situación se mejoró con la propuesta didáctica; además, los estudiantes reconocieron los datos con facilidad; en este caso: la altura del clinómetro, el ángulo medido con el clinómetro y la distancia horizontal entre el pie del clinómetro.

Al pasar de una situación problema a otra dentro de la propuesta didáctica, algunos estudiantes relacionaron de forma errónea todos los datos del enunciado. No tuvieron presente que algunos datos y variables han cambiado respecto al nuevo problema. Esta situación se desarrolló entre ejercicios muy similares (el segundo y el tercero). Una vez se registraron las conclusiones del segundo problema, se planteó el problema tres y unos minutos después...

Profesor: ¿Qué datos tienes, Yuliseth?

Yuliseth: La altura del aparato, la distancia del objeto al clinómetro... (En ese instante, ella no recordó que esa distancia del objeto a la base del clinómetro había cambiado respecto al ejercicio anterior).

Profesor: ¿Qué le piden en el enunciado?

Yuliseth: La distancia del objeto al clinómetro.

Profesor: Pero hace un momento me dijo que esa distancia ya la tenía... ¿no?

Yuliseth: Profesor, acá no piden eso... piden otra... esta distancia (señaló con el dedo la distancia entre el ojo del clinómetro y el objeto).

Un problema no se define solamente en el dibujo; también deben incluirse los datos y las variables con sus respectivas relaciones. A continuación, tenemos algunos casos encontrados en desarrollo de la propuesta didáctica; pero antes, citamos a (Polya, 1998, p. 93):

“El estudio detallado de un problema se inicia trazando una figura que comprende la incógnita y los datos reuniendo estos diversos elementos en la forma requerida por la condición del problema. A fin de comprender bien el problema, tenemos que considerar por separado cada uno de los datos y cada una de las partes de la condición; juntaremos después todas las partes y la consideraremos como un todo, tratando de ver simultáneamente las diversas relaciones requeridas por el problema. Es evidente que no podríamos manejar, separar y combinar todos estos detalles sin una figura trazada en el papel”.

En la implementación de la propuesta didáctica usando el clinómetro, se desarrolló una situación similar en la mayoría de los estudiantes, en particular en los problemas en que se trabajó con ángulos de depresión, pues ubicaron el ángulo en una posición diferente a la observada. Este error fue posiblemente causado por la imagen prototípica generada por los ejercicios típicos con triángulos

rectángulos, o porque todavía tenían presente el primer ejercicio planteado en la propuesta didáctica, aunque por la definición de “ángulos alternos internos” el ángulo registrado es igual al ángulo visualizado con el clinómetro, así como se muestra en la figura 38.

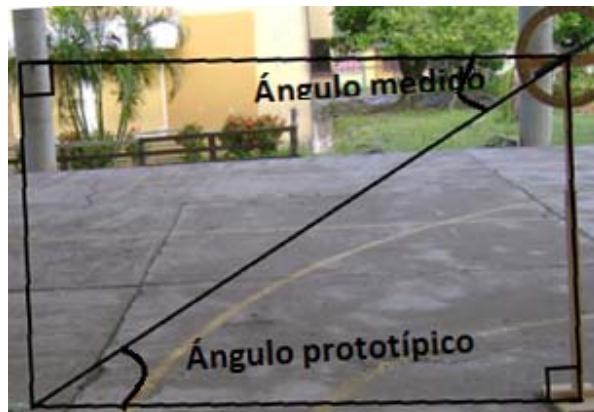


Figura 38. Ubicación de ángulos alternos

Esto no afectó ninguno de sus ítems; no representó los ángulos de depresión tal y como se observan, pero sí los ubicó correctamente. A continuación, se presenta un caso que refleja tal situación.

Una vez que entregó la hoja de la prueba, fue llamado por el profesor

Profesor: ¿El ángulo que dibujó acá es el que ha observado con el clinómetro?

Pelayo: Sí.

Profesor: ¿Está seguro?

Pelayo: (Una vez que tomó la hoja y reflexionó) Ese no es... déjeme rectificar.

(Pensó que el ejercicio estaba mal y que debía borrarlo; pero siguió reflexionando y llegó a la conclusión de que los ángulos eran los mismos, aunque no logró explicar exactamente por qué lo eran).

Profesor: Se puede mostrar con la definición de ángulos alternos e internos.

Pelayo: Ah...

Un error frecuente que se presentó en los estudiantes, durante la propuesta didáctica con el uso del clinómetro, fue que en los problemas en que debían tomarse dos o más ángulos de medición, al pasarlos a la representación gráfica, invirtieron el orden de los ángulos y esto afectó el resto del planteamiento enunciado.

En el tercer punto, se encontró que el teorema de Pitágoras daba solución a la situación problema, a pesar de que solo requiere de la cinta métrica como alternativa de solución.

Patiño: (Señalando con sus dedos) La altura del clinómetro ya la tengo; la distancia al objeto solamente tengo que medirla y aplico el teorema de Pitágoras y listo, tengo la distancia que me piden... Y no uso el clinómetro.

Algunos estudiantes, en la prueba de presaberes, representaron equivocadamente figuras prototípicas, como triángulos rectángulos con ángulos de 30° , 45° o 60° , sin que estos ángulos estuvieran indicados o presentados en el problema, o con la ubicación de un ángulo dado en la posición del ángulo recto. En la propuesta didáctica, esta situación no se presentó, debido a que el ángulo se registró directamente con el clinómetro; esto no dejó espacio para ángulos de 30° , 45° o 60° , a menos de que estos fueran medidos. La evidencia 5 muestra el caso de un estudiante que utiliza ángulos prototípicos para dar una solución equivocada del problema.

En la prueba de presaberes, los estudiantes para dar solución a los enunciados, plantearon los siguientes teoremas: la suma de los ángulos internos de un triángulo equivale a 180° , el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas.

También se evidenció que las categorías están notablemente conectadas, de manera que si se cometía un error en una de las categorías, posiblemente seguía

alterando las otras. Además, los estudiantes desconocieron con qué definiciones podrían abordar los problemas; así, la categoría que más se afectó fue la cuarta, en que se tomó la definición que diera solución problema. Así, citando a (Polya, 1998, p.108), tenemos que:

“resolver un problema esencialmente es encontrar la relación entre los datos y la incógnita”.

Varios estudiantes en la prueba inicial ubicaron la hipotenusa en un cateto, reemplazando mal los datos y luego esto provocó que el planteamiento de la definición que da solución a la situación problema también resultara erróneo. En la propuesta didáctica, se tomaron las medidas de forma directa, lo que permitió que ningún estudiante invirtiera los lados de los triángulos. Varios estudiantes se equivocaron en una ecuación similar al teorema de Pitágoras y tomaron “la suma de sus catetos elevados al cuadrado y divididos entre dos” o “el cuadrado de la hipotenusa es igual a la resta de los catetos”, situación representada en la evidencia 6.

Los dos enunciados 1^a y 1^b son muy similares en la prueba de presaberes; lo único que los diferencia es una simple conversión de radianes a grados, pero la conversión que debía realizarse en el enunciado 1^b resultó ser un obstáculo grande, debido a que solamente realizada por la mitad de los estudiantes que desarrollaron el punto 1^a. Consideramos que esta situación puede corregirse con la implementación de la propuesta didáctica que usa el clinómetro, pero no fue tomada en cuenta en la propuesta didáctica porque no era un objetivo de este trabajo.

En términos generales, durante la propuesta didáctica, todos los estudiantes mantuvieron optimismo y motivación no sobra resaltarlos, porque eso es un objetivo secundario del uso del clinómetro. Los errores encontrados en el desarrollo de la

prueba fueron aislados de tal manera que la mayoría de ellos no fue determinante, porque no provocó una serie de errores. Todos los estudiantes encontraron que la situación era representada a través de un triángulo rectángulo. No todos los estudiantes plasman sus variables antes de realizar el ejercicio, aunque no afectó el resto de las categorías establecidas (esta conducta parece que fuera más por pereza que por otra cosa).

En los resultados obtenidos, se evidencian mejoras en cada una de las categorías y es el dibujo la que con mayor facilidad y rapidez establecen los estudiantes. Para el caso de la determinación de los datos, también se registraron progresos, gracias a que el estudiante pudo manipular y analizar estos registros. Para el caso de la variable desconocida, cada participante pudo observar y analizar la situación problema, hasta predecir un rango de valores para la incógnita antes de hallar su resultado, lo que generó mayor claridad en el planteamiento. La determinación de una relación que sirviera para dar solución de un problema siguió siendo la categoría que presentó más inconvenientes.

Es importante resaltar el trabajo en equipo durante la propuesta didáctica, pues permitió que los estudiantes buscaran alternativas de solución; cuando se enfrentaron ante un error, descartaban otras posibilidades, debidamente justificadas, hasta dar con la correcta. Así citamos a (Millis, 1996):

“Comprobando los resultados de esta forma de trabajo con modelos de aprendizaje tradicionales, se ha encontrado que los estudiantes aprenden más cuando utilizan el aprendizaje colaborativo, recuerdan por más tiempo (memoria a largo plazo), desarrollan habilidades de razonamiento superior y de pensamiento crítico y se sienten más confiados y aceptados por ellos mismos y por los demás”.

Teniendo como parte fundamental el análisis de los resultados de la aplicación de la propuesta didáctica, cabe destacar que se logró un mejor desempeño en relación con las demás pruebas, lo que nos lleva a la conclusión de que estas prácticas, en un contexto real y el fortalecimiento en el uso de unidades métricas establecen mejoramientos tanto en los presaberes como en el interés por la aplicación de las razones trigonométricas.

Las figuras 38 y 39 muestran los resultados comparativos entre las diferentes pruebas. Se tomaron como escala general en todas las pruebas números del 0 al 100. En la tercera prueba, casi todos los alumnos subieron sus resultados respecto a la primera; en la mayoría, fue representativa su diferencia. Al comparar la tercera con la segunda prueba la mitad de la población bajó sus resultados en la tercera. Pero debe tenerse en cuenta que los resultados altos en la propuesta didáctica son la consecuencia del enfoque que se realizó para esta prueba.

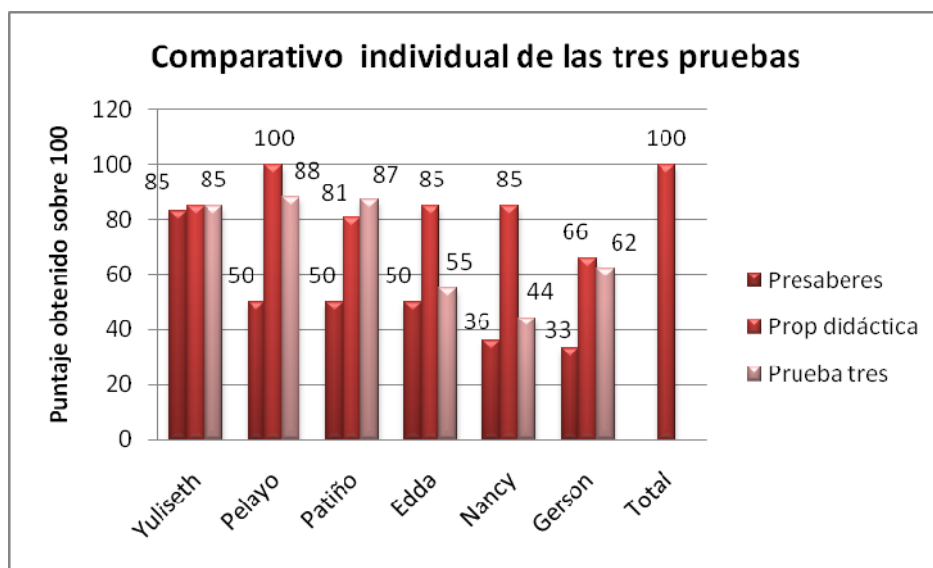


Figura 39. Resultados obtenidos de las tres pruebas, Colegio Café Madrid

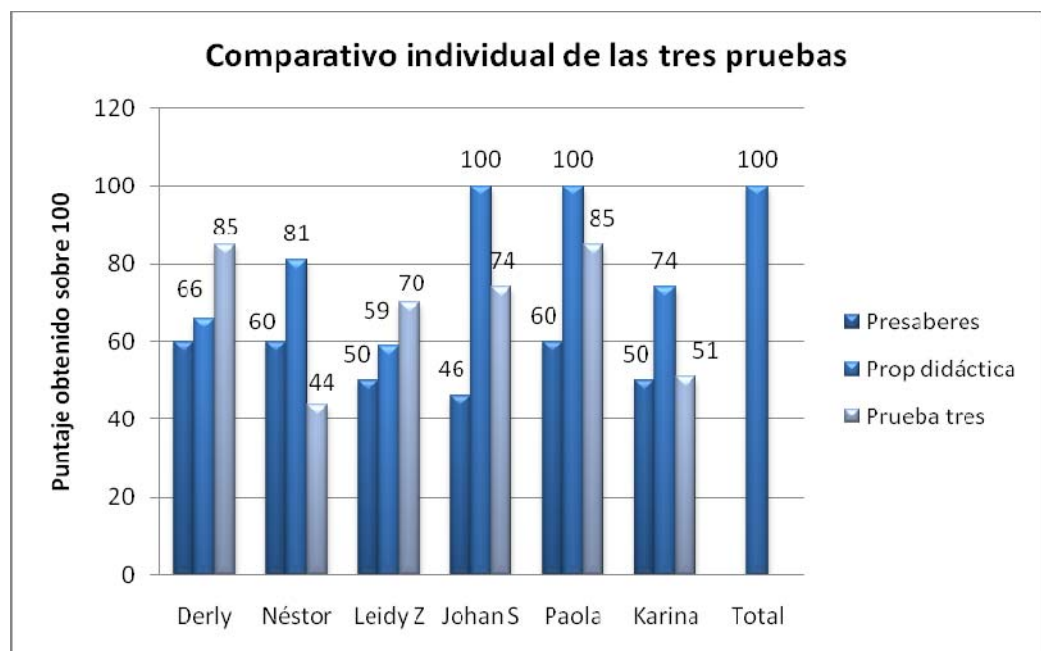


Figura 40. Resultados obtenidos de las tres pruebas, Colegio Carare

9. CONCLUSIONES

Luego de finalizado este proyecto, surge una serie de conclusiones, de acuerdo con los resultados obtenidos:

Se diseñó una estrategia didáctica por medio de un mecanismo que desarrolla la capacidad interpretativa en el planteamiento y desarrollo de problemas relacionados con la aplicación de razones trigonométricas.

El trabajo de grado 'Planteamiento de problemas relacionados con razones trigonométricas a partir de la utilización del clinómetro' resultó un cambio importante en la forma de interpretar la enseñanza de situaciones cotidianas y sus aplicaciones en la utilización de un instrumento que sirve de apoyo para el planteamiento y la resolución de problemas trigonométricos.

El manejo de los elementos utilizados dentro de esta actividad permitió el desarrollo de una mejor comprensión sobre la caracterización y la ubicación de ciertas medidas al relacionarlas con el contorno, además del mejoramiento de la representación gráfica de un problema.

Las actividades se desarrollaron con la utilización de implementos que permiten la interacción directa con el contexto propio de la institución educativa, que carece de implementos avanzados para mediciones directas. De esta manera, facilita la comprensión de los conceptos matemáticos, tales como la medición o la representación gráfica de ángulos; además, el cálculo específico de medidas longitudinales, que dan una interpretación de su importancia en los diferentes contextos de aplicación.

El clinómetro puede ser usado como una herramienta en el aula de clase, que permite al estudiante encontrar nociones básicas de las razones trigonométricas, o para mejorar las competencias. Asimismo, puede usarse como un elemento que

permite fortalecer o repasar el tema y no deja de ser importante al usarlo como un corrector de errores que se presenten en el aula de clase.

Con la utilización del clinómetro, el estudiante mejoró su interpretación de las medidas angulares presentes en los problemas y queda de manifiesto que la aplicación de situaciones problema en un contexto que conoce y puede manipular despertaron un mayor interés y un mejoramiento en el desarrollo de las actividades planteadas como situación problema, puesto que al estudiante, a partir de la consecución de sus propios datos con la medición directa, no solo de longitudes, sino también de ángulos, se le permitió plantear sus propios problemas y buscar estrategias de desarrollo en la obtención de su respuesta.

Sucesivamente, la elaboración y el empleo del clinómetro ayudaron al ejercicio del pensamiento creativo de los estudiantes y los llevó a pensar sobre nuevos problemas que se podrían desarrollar a partir de las mediciones que con esta herramienta lograrían determinar; además, permitió el desarrollo de competencias crítico-analíticas en lo que respecta a los problemas planteados en textos de matemáticas, en donde se plantean situaciones de problemas, con mediciones determinadas que dentro de un contexto real no son propias de una aplicación en la vida real.

Se incluyó en el proceso una estrategia práctica para desarrollar el pensamiento crítico, la habilidad para pensar de manera original y para elaborar nuevas ideas en diferentes campos, donde la utilización de mediciones fue pieza clave en la solución de problemas. Los trabajos realizados sobre planteamiento de problemas reales, basados en la medición directa de longitudes y de ángulos, aportan información relevante acerca de la importancia del uso de este mecanismo, además de un parámetro de comparación con otros métodos.

La implementación de la propuesta didáctica y el trabajo grupal permitieron un desarrollo en la construcción de las matemáticas, ya que durante este proceso el

estudiante recolecta información, luego la clasifica en variables conocidas y desconocidas, realiza una representación de la situación problema, establece respectivas relaciones, así mismo va discutiendo ideas, plantea conjeturas que él mismo puede concluir y finalmente puede determinar y constatar sus resultados.

10. BIBLIOGRAFÍA

Adams, J.L. (1986). *Guía y juegos para superar bloqueos mentales*. Barcelona: editorial.

Alonso, J. (19). *Motivación y aprendizaje en el aula: Cómo enseñar a pensar*. Madrid: Santillana.

Federación de Asociaciones de Ingenieros Industriales FAIL. (1982). España: Revista DINA.

Halmos, P.R. (1980). *The heart of Mathematics*, *American Mathematical Monthly*.

Matemática Práctica 10 (1998). Bogotá. Editorial Voluntad

Matemáticas 10 (2004). Bogotá. Editorial Santillana.

Ministerio de Educación Nacional (2009). Recuperado el 11 de marzo de 2011 de: <http://menweb.mineducacion.gov.co/lineamientos/matematicas/desarrollo.asp?id=16>.

Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México D.F.: Editorial Trillas S.A.

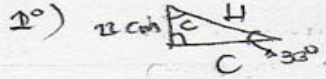
Pozo, J. (1994). *La solución de problemas*. España: Grupo Santillana.

Santos, L M. (1997). *Principios y Métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México D.F.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York.

Sociedad Andaluza de Educación (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla.

11. ANEXOS

1°) 

$$hip^2 = ady^2 + op^2$$

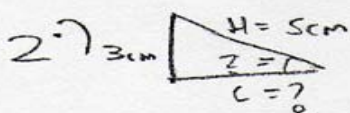
$$3cm^2 + 4cm^2 = hip^2 = (3)^2 + (4cm)^2$$

$$hip^2 = 9 + 16$$

$$hip^2 = 25$$

$$hip = \sqrt{25}$$

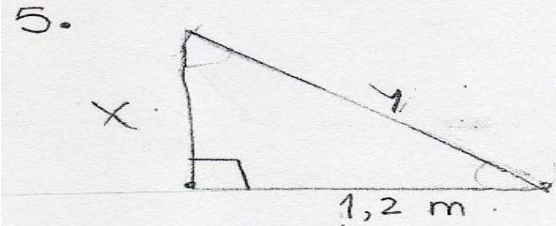
$$hip = 5cm$$

2°) 

$$hip^2 = ady^2 + op^2$$

$$op^2 = \frac{ady^2}{hip^2} = \frac{9}{6}$$

Evidencia 1; prueba presaberes

5. 

en que parte se ubica
el angulo; des de
elevacion?

Evidencia 2; prueba presaberes



Evidencia 3, Propuesta didáctica

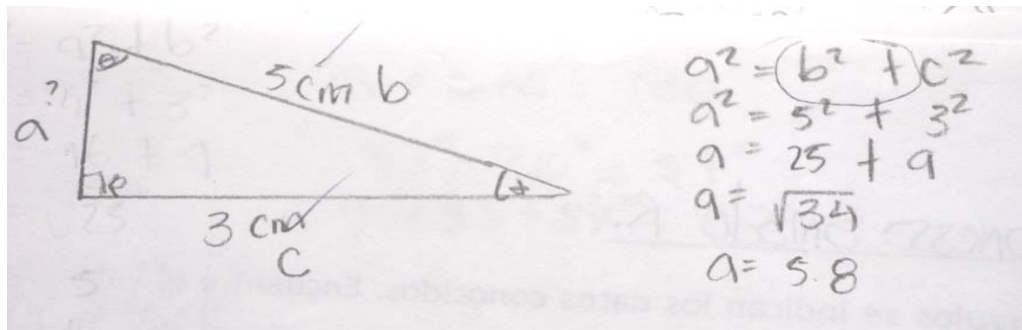
$$\begin{aligned}
 1. \quad C &= 180 (90 + 33) \\
 C &= 57^\circ \\
 C^2 &= a^2 + b^2 \\
 C^2 &= 4^2 + 3^2 \\
 C^2 &= 16 + 9 \\
 C^2 &= 25 \\
 C &= \sqrt{25} \\
 C &= 5
 \end{aligned}$$

Evidencia 4; prueba presaberes

$$\begin{aligned}
 b. \quad \tan B &= a/18 \text{ m} \\
 \tan 45^\circ &= a/18 \text{ m} \\
 \tan 45^\circ \times 18 \text{ m} &= a \\
 1 \times 18 \text{ m} &= a \\
 \boxed{18 = a}
 \end{aligned}$$

la Altura sería mayor y igual a el punto de vista hasta el Pic del árbol

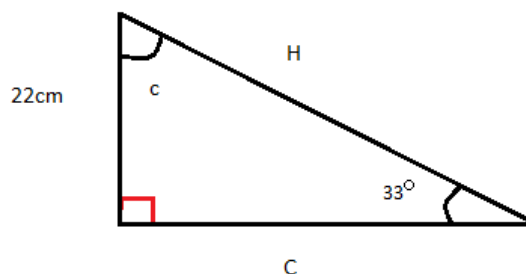
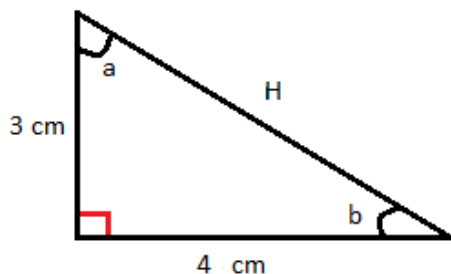
Evidencia 5; prueba presaberes



Evidencia 6, prueba de presaberes

EJERCICIOS PLANTEADOS EN LA PRUEBA PRESABERES

1. Desde un punto situado a 18 metros del pie de un árbol, se observa el extremo superior del árbol con un ángulo de elevación de 62° .
 - a) ¿Cuál es la altura del árbol?
 - b) Si el ángulo de elevación hubiera sido de $\pi/4$, ¿cuál será la altura del árbol?
2. Para alcanzar la cima de un muro de 6 metros de altura, se utiliza una escalera de 10 metros. Si el extremo de la escalera queda 2 metros más allá del muro, determine la inclinación respecto a la horizontal. Escriba su respuesta en radianes.
3. Una escalera se encuentra apoyada contra un muro, de manera que la distancia entre el pie de la escalera y la base del muro es de 1,2 metros. ¿A qué altura del suelo se apoya la escalera y cuál es su largo, si se forma con él un ángulo de 70° ?
4. Construya un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene 5 cm y uno de sus catetos tiene 3 cm. Luego, halle el otro cateto y los ángulos internos del triángulo.
5. En los siguientes triángulos, se indican los datos conocidos. Encuentre el valor de las incógnitas:



PLANTEAMIENTO DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

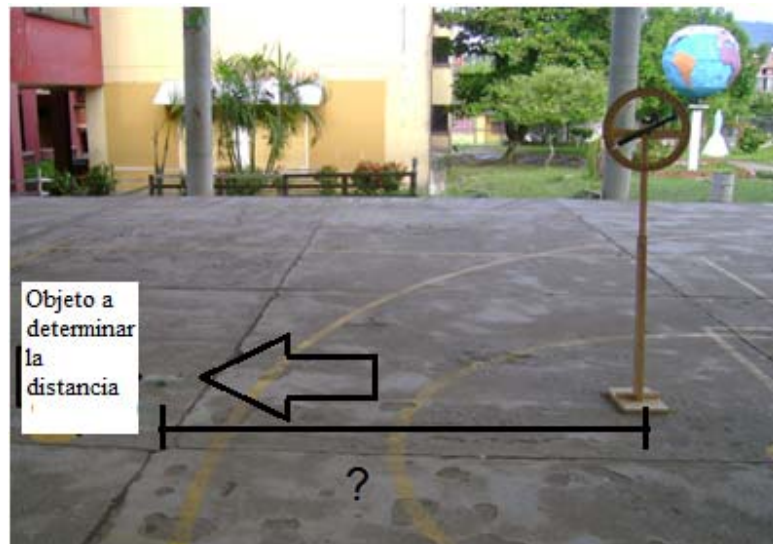
1. Cambiamos la posición del objeto inicial (segundo problema). Con una modificación del lugar del objeto, los estudiantes deberán determinar la distancia que hay desde el ojo del observador hasta el pie del objeto.



2. Se ubicará un objeto colgado en una de las vigas de amarre de la cubierta de la institución educativa. Se pedirá a los estudiantes que establezcan una relación que determine la altura del objeto a partir del suelo.



3 Se ubicará un objeto sobre el suelo de la cancha. El clinómetro se pondrá a determinada distancia para que los estudiantes planteen una relación que establezca la distancia horizontal desde el pie del clinómetro hasta el pie del objeto.



4 Hallar la distancia comprendida entre los dos objetos.



PLANTEAMIENTO DE LA TERCERA PRUEBA

1. Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60m de largo. Encuentre el ángulo de elevación del Sol en ese momento.
2. A una cierta hora del día, un asta de bandera de 3 metros de altura da una sombra de 0,8 metros. En ese mismo instante, un árbol cercano da una sombra de 1,2 metros. ¿Qué altura tiene el árbol?
3. Para alcanzar la cima de un muro de 5 metros de altura, se utiliza una escalera de 8 metros. Si el extremo de la escalera queda 2 metros más allá del muro, determine la inclinación de la escalera respecto a la horizontal.
4. Una persona a bordo de una embarcación que se dirige hacia un islote ve el extremo superior de un faro de 20 metros de alto con un ángulo de elevación de 18° . Tiempo después de navegar en la dirección del faro, lo ve con un ángulo de elevación de 35° . ¿Qué distancia recorrió la embarcación durante el tiempo transcurrido?