

CONSTRUCCIÓN DEL TETRAEDRO AUTOPOLAR DE UNA SUPERFICIE DE  
SEGUNDO ORDEN

ZARETH MELISSA ZAMBRANO MARTÍNEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2025

CONSTRUCCIÓN DEL TETRAEDRO AUTOPOLAR DE UNA SUPERFICIE DE  
SEGUNDO ORDEN

ZARETH MELISSA ZAMBRANO MARTÍNEZ

Trabajo de grado para optar al título de  
Matemática

Director  
Luis Ángel Pérez Fernández  
Magíster en Educación Matemática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2025

## **DEDICATORIA**

A mis padres,

No habría podido alcanzar esta meta sin cada uno de los sacrificios que hicieron por mí.

## **Agradecimientos**

En primer lugar, agradezco a Dios por cada una de las oportunidades que me ha dado. A mi angelito, mi nonita, que desde el cielo me ha acompañado en cada paso, y a la hermosa familia que me regaló, por su amor incondicional, su apoyo constante y por estar presente en cada etapa de este camino.

A Luis Ángel, por ser mi maestro, por creer en mí desde el primer semestre y por inspirarme a seguir adelante.

Al profesor Gilberto Arenas Díaz, por el apoyo que siempre me brindó.

A los compañeros de vida y de estudio que me regaló la hermosa Universidad Industrial de Santander, porque no tengo dudas de que este recorrido habría sido mucho más difícil sin ellos.

Y, finalmente, me agradezco a mí misma: por cada sacrificio que hice para llegar hasta aquí, por no rendirme ante la frustración y las dificultades, y por demostrarme que soy capaz de alcanzar mis metas.

## CONTENIDO

	pág.
<b>Introducción</b>	<b>11</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1. Espacio Proyectivo . . . . .	13
1.2. Proyectividades . . . . .	14
1.3. Involuciones . . . . .	22
1.4. Elementos imaginarios . . . . .	27
1.5. Cónica proyectiva . . . . .	29
1.6. Superficies de segundo orden . . . . .	33
<b>2. Polaridad</b>	<b>35</b>
2.1. Polar de un punto con respecto a una cónica . . . . .	35
2.2. Triángulo autopolar . . . . .	38
2.3. Polar de un punto con respecto a una superficie . . . . .	44
2.4. Tetraedro autopolar a una superficie de segundo orden y algunas propiedades	45
<b>3. Exploración para la construcción del tetraedro autopolar común con Software de geometría dinámica</b>	<b>50</b>
3.1. Construcción del tetraedro autopolar común para casos particulares . . . . .	50
3.2. Exploraciones y conjeturas para otros casos . . . . .	54
<b>Conclusiones</b>	<b>58</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>60</b>

## LISTA DE FIGURAS

	pág.
1.1. Perspectividad elemental . . . . .	15
1.2. Perspectividad entre haces de puntos . . . . .	16
1.3. Perspectividad entre haces de rectas . . . . .	17
1.4. Proyectividad . . . . .	18
1.5. Recta de Pappus . . . . .	19
1.6. Cuadrángulo completo . . . . .	20
1.7. Cuadrilátero completo . . . . .	20
1.8. Conjugados armónicos a través cuadrángulo completo . . . . .	21
1.9. Conjugados armónicos a través de un cuadrilátero completo . . . . .	22
1.10. Ejemplo de una involución . . . . .	23
1.11. Segundo punto doble de una involución . . . . .	24
1.12. Puntos dobles de un involución hiperbólica . . . . .	25
1.13. Construcción puntos dobles (a) . . . . .	26
1.14. Construcción puntos dobles (b) . . . . .	27
1.15. Cónica puntual real . . . . .	29
1.16. Cónica puntual imaginaria . . . . .	30
1.17. Sexto punto de una cónica . . . . .	31
1.18. Intersección de dos cónicas . . . . .	32
1.19. Cónicas que se tocan interior y exteriormente . . . . .	32
1.20. Tres rectas dadas (a, b, c) y una recta m que las interseca . . . . .	33
1.21. 5 rectas de la familia que genera el hiperboloide de una hoja . . . . .	34
1.22. Hiperboloide de una hoja . . . . .	34
1.23. Hiperboloide hiperbólico vista 1 . . . . .	34
1.24. Hiperboloide hiperbólico vista 2 . . . . .	34
1.25. 3 rectas que pertenecen al cono . . . . .	34
1.26. Cono cuádrico . . . . .	34
2.1. Recta polar definición (a) . . . . .	35
2.2. Lugar geométrico del cuarto armónico de P . . . . .	36
2.3. Recta polar definición (b) . . . . .	36
2.4. Pares de puntos conjugados que forman una involución . . . . .	37
2.5. T. autopolar círculo . . . . .	38

2.6. T. autopolar parábola . . . . .	38
2.7. Punto conjugado común . . . . .	38
2.8. $w_3$ lugar geométrico . . . . .	39
2.9. Vértice real del triángulo autopolar común a dos cónicas . . . . .	40
2.10. Puntos de intersección de la recta $RQ$ y las dos cónicas . . . . .	41
2.11. Triángulo autopolar común a dos cónicas . . . . .	42
2.12. Puntos dobles de una involución en una cuerda . . . . .	43
2.13. Relación entre cuerdas comunes y el triángulo autopolar a dos cónicas. . . . .	43
2.14. Plano polar de $P$ . . . . .	45
2.15. Segundo vértice $Q$ . . . . .	46
2.16. 4 vértices del tetraedro autopolar . . . . .	46
2.17. Tetraedro autopolar de una superficie de segundo orden $C$ . . . . .	46
2.18. T. autopolar a un cono . . . . .	47
2.19. T. autopolar a un hiperboloide de una hoja . . . . .	47
2.20. Corte $A$ . . . . .	47
2.21. Corte $B$ . . . . .	47
2.22. Corte $C$ . . . . .	47
2.23. Corte $A'$ . . . . .	48
2.24. Corte $B'$ . . . . .	48
2.25. Corte $C'$ . . . . .	48
2.26. Recta polar de $R$ con respecto a una cónica imaginaria . . . . .	48
2.27. Plano polar perpendicular a un plano de simetría de la superficie . . . . .	49
3.1. Ejemplo 1 (a) . . . . .	51
3.2. Ejemplo 1 (b) . . . . .	51
3.3. Ejemplo 2 (a) . . . . .	52
3.4. Ejemplo 2 (b) . . . . .	52
3.5. Ejemplo 2 (a) . . . . .	52
3.6. Ejemplo 2 (b) . . . . .	52
3.7. Ejemplo 4 (a) . . . . .	53
3.8. Ejemplo 4 (b) . . . . .	53
3.9. Ejemplo 5 (a) . . . . .	53
3.10. Ejemplo 5 (b) . . . . .	53
3.11. Ejemplo 6 (a) . . . . .	54
3.12. Ejemplo 6 (b) . . . . .	54
3.13. Ejemplo 7 (a) . . . . .	54

3.14.Ejemplo 7 (b) . . . . .	54
3.15.Ejemplo 8 (a) . . . . .	55
3.16.Ejemplo 8 (b) . . . . .	55
3.17.Ejemplo 9 (a) . . . . .	56
3.18.Ejemplo 9 (b) . . . . .	56
3.19.Ejemplo 10 (a) . . . . .	56
3.20.Ejemplo 10 (b) . . . . .	56

## RESUMEN

**TÍTULO:** CONSTRUCCIÓN DEL TETRAEDRO AUTOPOLAR DE UNA SUPERFICIE DE SEGUNDO ORDEN \*

**AUTOR:** ZARETH MELISSA ZAMBRANO MARTÍNEZ \*\*

**PALABRAS CLAVE:** TETRAEDRO AUTOPOLAR, TRIÁNGULO AUTOPOLAR COMÚN, INVOLUCIÓN, ELEMENTOS IMAGINARIOS, POLARIDAD, SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN.

### DESCRIPCIÓN:

Los objetivos de este trabajo son construir el tetraedro autopolar asociado a una superficie de segundo orden y mostrar cómo es posible obtener elementos geométricos reales a partir de elementos imaginarios. Estos elementos, aunque no se representan de manera visible, existen teóricamente y poseen propiedades que permiten deducir construcciones reales dentro del espacio proyectivo. Se emplean herramientas como la polaridad, las involuciones y las propiedades de las cónicas para fundamentar dichas construcciones. Asimismo, se exploran configuraciones como el tetraedro autopolar común a dos superficies de segundo orden y el triángulo autopolar común. Todas las construcciones fueron realizadas mediante un software de geometría dinámica, lo cual permitió una visualización más clara y una validación interactiva de los resultados obtenidos.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Luis Ángel Pérez Fernández, Magíster en Educación Matemática.

## ABSTRACT

**TITLE:** CONSTRUCTION OF THE AUTOPOLAR TETRAHEDRON OF A SECOND-ORDER SURFACE \*

**AUTHOR:** ZARETH MELISSA ZAMBRANO MARTÍNEZ \*\*

**KEYWORDS:** AUTOPOLAR TETRAHEDRON, COMMON AUTOPOLAR TRIANGLE, INVOLUTION, IMAGINARY ELEMENTS, POLARITY, SECOND-ORDER SURFACES.

### DESCRIPTION:

The aim of this work is to construct the autopolar tetrahedron associated with a second-order surface and to show how real geometric objects can be obtained from imaginary elements. These elements, although not visually representable, exist theoretically and possess properties that allow for the construction of real objects within projective space. Tools such as polarity, involutions, and the properties of conics are employed to support these constructions. In addition, configurations such as the common autopolar tetrahedron of two second-order surfaces and the common autopolar triangle are explored. All constructions were carried out using dynamic geometry software, which allowed for a clearer visualization and interactive validation of the results obtained.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Luis Ángel Pérez Fernández, Magíster en Educación Matemática.

## Introducción

La geometría proyectiva nace a raíz de los esfuerzos realizados por los artistas del Renacimiento para representar de manera más realista el mundo que les rodeaba. La teoría de la perspectiva se extendió considerablemente a principios del siglo XVII por un pequeño grupo de matemáticos franceses, entre los que se encontraba Gérard Desargues (1591-1661), quien, inducido por las crecientes necesidades de los artistas y arquitectos de crear una teoría más profunda de la perspectiva, publicó en París en 1639 un trabajo sobre las secciones cónicas que aprovechó la idea de las proyecciones. Este trabajo de Desargues ha sido reconocido como uno de los clásicos en el desarrollo de la geometría proyectiva.<sup>1</sup>

El impulso definitivo a la geometría proyectiva fue dado por Jean Victor Poncelet (1788-1867) con su obra *“Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras”* en 1822. Poncelet no pudo ignorar que la introducción de los números complejos en la geometría analítica permite simplificar los cálculos y obtener resultados (por ejemplo, el teorema de Bézout) en cualquier generalidad. Para obtener el equivalente, introdujo el principio de *continuidad* que puede enunciarse de la siguiente forma: *si al modificar continuamente una figura, los objetos llegan a desaparecer, siguen existiendo como objetos imaginarios, ya que algunos objetos dependientes de estos objetos imaginarios pueden seguir existiendo en la realidad.*

El principio de Poncelet pone de manifiesto que, aunque algunos objetos geométricos en su representación física no sean perceptibles, su caracterización a partir de otros les ofrece una existencia teórica útil para resolver problemas de construcción de otros objetos cuya representación física sí existe. De acuerdo con Chasles los objetos imaginarios no entran por sí mismos explícitamente en el razonamiento, sino que están representados por elementos siempre reales que pueden servir para determinarlos. En otras palabras, aunque los elementos imaginarios no pueden construirse, están en una relación de dependencia con elementos reales, y estos sí son posibles de construir. Este trabajo se centra en la construcción del tetraedro autopolar de una superficie de segundo orden y el estudio de algunas propiedades de este, utilizando como

---

<sup>1</sup> L. U. Vilumbrales. “Geometría proyectiva plana”. En: *Un paseo por la Geometría*. Departamento de Matemáticas del País Vasco, 2002, págs. 91-114.

herramientas básicas de construcción las rectas y las cónicas, destacando el uso de los objetos geométricos imaginarios, no perceptibles a simple vista.

El primer capítulo llamado preliminares, presenta los conceptos básicos necesarios para presentar el espacio en el que se desarrollará el trabajo, el *espacio proyectivo*. Se encuentran allí los elementos y propiedades fundamentales que serán de utilidad para alcanzar los objetivos propuestos. En el segundo capítulo se exponen las nociones necesarias sobre la polaridad, como la definición de polar, el triángulo autopolar de una cónica y la generalización de estas ideas al espacio tridimensional mediante la noción de tetraedro autopolar asociado a una superficie de segundo orden. Finalmente, el tercer capítulo está dedicado a la exploración de construcciones y conjeturas relacionadas con el tetraedro autopolar común a dos superficies de segundo orden.

## 1. Preliminares

### 1.1. Espacio Proyectivo

De la geometría de Euclides se extraen las siguientes proposiciones:

- (a) Dos puntos distintos determinan una y sólo una recta.
- (b) Tres puntos distintos no colineales, de la misma manera que una recta y un punto que no está sobre la recta, determinan uno y sólo un plano.
- (c) Dos rectas que son coplanares, es decir que están en un mismo plano, se intersectan en un punto o son paralelas.
- (d) Una recta que no está en un plano dado intersecta al plano en un punto o es paralela al plano.
- (e) Dos planos distintos se intersectan en una recta o son paralelos.

Note que estas proposiciones son completamente independientes de nociones métricas y sólo se refieren a puntos, rectas y planos e intersecciones entre estos.

Para la construcción de un espacio en la geometría proyectiva se considera añadir ciertos objetos al espacio euclidiano. Estos objetos no serán definidos pero, con el objeto de distinguirlos entre sí, los llamaremos *punto ideal*, *recta ideal* y *plano ideal*. Además, para que no haya confusión con los puntos, rectas y planos del espacio euclidiano, éstos serán llamados, puntos ordinarios, rectas ordinarias y planos ordinarios del espacio ordinario.

Los elementos ideales no tienen propiedades inherentes; para empezar, se dotan con propiedades tales que en el espacio proyectivo, se puede asegurar que las siguientes proposiciones permanecen para todas las combinaciones posibles de elementos ideales y ordinarios:

- (a') Dos puntos distintos determinan una recta y sólo una recta.
- (b') Tres puntos distintos no colineales, igualmente que una recta y un punto que no está sobre la línea, determinarán uno y sólo un plano.
- (c') Dos rectas coplanares distintas, se intersectan en un único punto.

(d') Toda recta que no está en un plano dado intersectará al plano en un único punto.

(e') Dos planos distintos se intersectan en una y sólo una recta.

Considere un plano ordinario y sus rectas ordinarias. A cada una de estas rectas ordinarias se adjunta un punto ideal (también llamado *punto en el infinito*), de tal manera que dos rectas ordinarias distintas que se intersectan tendrán puntos ideales distintos, mientras que dos rectas ordinarias paralelas tendrán el mismo punto ideal.

Una recta ordinaria junto con su punto ideal se llamará una *recta extendida*, y un plano ordinario junto con la totalidad de los puntos ideales adjuntos a sus rectas ordinarias se llamará un *plano extendido*.

De una vez se llamará cualquier punto, ordinario o ideal, un *punto proyectivo*; cualquier línea extendida o ideal, una *recta proyectiva*; y cualquier plano, extendido o ideal un *plano proyectivo*. Sin embargo, hablaremos simplemente de puntos, rectas y planos del espacio proyectivo.<sup>2</sup>

## 1.2. Proyectividades

**Definición 1.2.1.** *Por una figura en un espacio proyectivo, se entenderá toda la colección de puntos, rectas y planos en el espacio. En esta sección, restringiremos nuestra atención a dos tipos de figuras en un plano proyectivo:*

- *La totalidad de puntos sobre una de las rectas del plano, las llamaremos un haz de puntos. El haz de puntos sobre la recta  $p$  será denotado por  $p(A, B, C, D, \dots)$  donde  $A, B, C, D, \dots$  son puntos distintos sobre  $p$ . Los puntos  $A, B, C, D, \dots$  los llamaremos elementos y la recta  $p$  la llamaremos base del haz.*

*Y la versión dual en el plano*

- *La totalidad de rectas sobre un punto del plano, la llamaremos un haz de rectas. El haz de rectas sobre el punto  $P$  será denotado  $P(a, b, c, d, \dots)$  donde  $a, b, c, d, \dots$  son rectas distintas sobre el punto  $P$ . Las rectas  $a, b, c, d, \dots$  las llamaremos elementos y al punto  $P$  lo llamaremos centro del haz.*

---

<sup>2</sup> Ph.D. Frank Ayres JH. *Theory and Problems of Projective Geometry*. McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1970.

Se dice que entre los elementos de dos haces hay una correspondencia uno-a-uno, si existe una regla que asocia a cada elemento de un haz (el primero), un único elemento del otro (el segundo), y recíprocamente, asocia cada elemento del segundo un único elemento del primero. En una correspondencia de este tipo entre dos haces (entre dos figuras de cualquier clase), a cada elemento y su asociado se les llama elementos correspondientes u *homólogos*.

Un ejemplo un poco trivial es la correspondencia que asocia cada elemento de una figura dada, con él mismo; la que se llama *identidad*.

Consideremos en la figura 1.1 el haz de rectas  $P(a, b, c, d, \dots)$  cortada por cualquier recta  $p$  que no está sobre  $P$ . Una correspondencia uno a uno entre el haz de rectas y el haz de puntos resultante (sobre  $p$ ), se establece automáticamente por las relaciones “sobre”. En efecto, a cada elemento del haz de rectas sobre  $P$ , se le asocia un único punto, o sea, el punto del haz de puntos sobre  $p$ , que está sobre la recta.

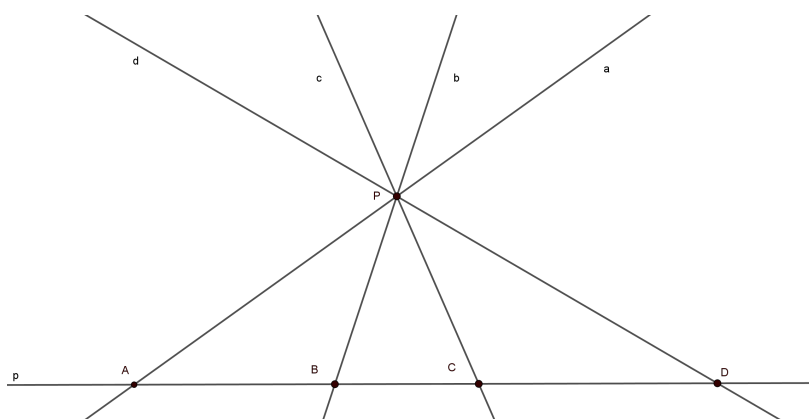


Figura 1.1: Perspectividad elemental

A la correspondencia uno-a-uno descrita anteriormente se le llama una perspectiva y se escribe

$$P(a, b, c, d, \dots) \stackrel{=}{\wedge} p(A, B, C, D, \dots)$$

Decimos que el haz de rectas  $P(a, b, c, d, \dots)$  es perspectivo con el haz de puntos  $p(A, B, C, D, \dots)$  y se observa que

$$P(a, b, c, d, \dots) \stackrel{=}{\wedge} p(A, B, C, D, \dots)$$

también implica

$$p(A, B, C, D, \dots) \stackrel{P}{\bar{\wedge}} P(a, b, c, d, \dots)$$

Este tipo de perspectiva se llama una perspectiva elemental<sup>2</sup>.

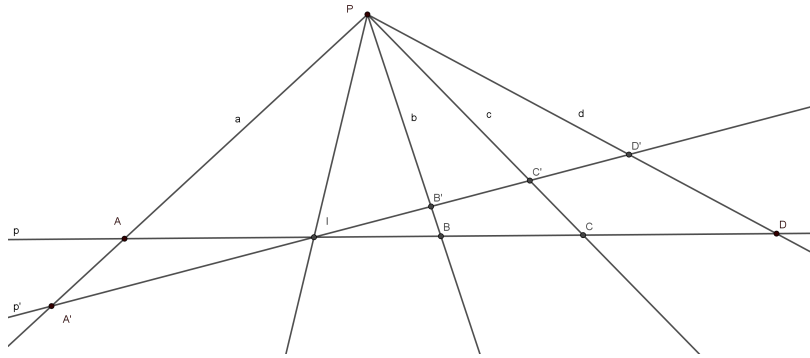


Figura 1.2: Perspectividad entre haces de puntos

Considere ahora en la Figura 1.2 el haz de rectas  $P(a, b, c, d, \dots)$  cortado por dos rectas distintas  $p$  y  $p'$  de las cuales ninguna está sobre  $P$ . Observe que las siguientes perspectivas elementales quedan establecidas

$$\begin{aligned} P(a, b, c, d, \dots) &\stackrel{P}{\bar{\wedge}} p'(A', B', C', D', \dots) \\ P(a, b, c, d, \dots) &\stackrel{P}{\bar{\wedge}} p(A, B, C, D, \dots) \end{aligned}$$

Por ser reversibles estas perspectivas, las podemos combinar como sigue:

$$p'(A', B', C', D', \dots) \stackrel{P}{\bar{\wedge}} P(a, b, c, d, \dots) \stackrel{P}{\bar{\wedge}} p(A, B, C, D, \dots)$$

Se ha establecido una correspondencia uno a uno entre los haces de puntos sobre  $p$  y  $p'$ , en la cual cada punto del haz sobre  $p$  y su correspondiente en  $p'$  ( $A$  y  $A'$ ,  $B$  y  $B'$ ,  $C$  y  $C'$ , ...) determinan una única recta en el haz sobre  $P$ . A continuación, la sucesión anterior de perspectivas elementales es reemplazada por

$$p(A, B, C, D, \dots) \stackrel{P}{\bar{\wedge}} p'(A', B', C', D', \dots)$$

El haz de puntos  $p(A, B, C, D, \dots)$  es *perspectivo* por medio del punto  $P$  con el haz de puntos  $p'(A', B', C', D', \dots)$  o dichos haces de puntos son *perspectivos* desde el punto  $P$ .

El punto  $P$  se llama el *centro de perspectiva*.

**Definición 1.2.2.** Dos haces de puntos sobre rectas distintas  $p$  y  $p'$  son *perspectivos desde un punto  $P$*  si existe una correspondencia uno-a-uno entre los puntos de los haces y si las rectas a través de los puntos correspondientes contienen a  $P$ .

Observe también en la Figura 1.2 que el punto común a  $p$  y  $p'$  desempeña un papel único. Denotaremos este punto  $I$  como un punto sobre  $p$  e  $I'$  como un punto sobre  $p'$ . Entonces el correspondiente de  $I$  es  $I' = I$  a este punto lo llamaremos un punto invariante o auto-correspondiente de la perspectiva.

Ahora observe su dual en la Figura 1.3

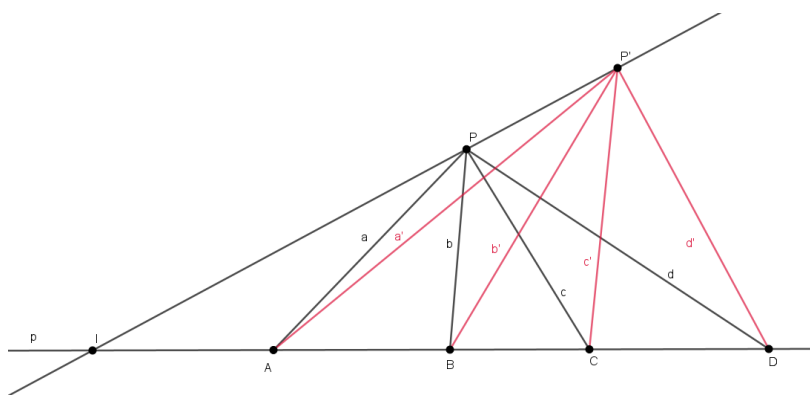


Figura 1.3: Perspectividad entre haces de rectas

**Definición 1.2.3.** Dos haces de rectas  $P(a, b, c, d, \dots)$  y  $P'(a', b', c', d', \dots)$ , definidos sobre puntos distintos, son llamados *perspectivos desde la recta  $p$*  si existe una correspondencia biunívoca entre ellos y si las intersecciones de las rectas correspondientes están sobre  $p$ .<sup>2</sup>

Esta perspectiva ilustrada en la figura 1.3 se indica escribiendo

$$P(a, b, c, d, \dots) \stackrel{=p}{\wedge} P'(a', b', c', d', \dots)$$

En este caso, la recta  $p$  se llama *eje de perspectiva*.

**Definición 1.2.4.** Una correspondencia uno a uno entre dos haces de puntos se denomina *proyectiva* si es el resultado de una sucesión de perspectivas. De manera más concisa, dicha correspondencia se llama una *proyectividad* y se denota con el símbolo  $\bar{\wedge}$ .

**Ejemplo 1.2.5.** Dado un haz de rectas  $P(a, b, c, d)$ , se desea encontrar una proyectividad

$$P(a, b, c, d) \bar{\wedge} P(b, a, d, c).$$

Considérense las rectas  $a, b, c$  y  $d$ , las cuales se intersectan en un punto  $P$ , y una recta  $p$  que las corta pero no pasa por  $P$ . Además, sean  $A, B, C$  y  $D$  los puntos obtenidos como proyecciones desde un punto arbitrario  $Q$ , el cual pertenece a la recta  $a$ , pero no a la recta  $p$ , y es distinto de  $P$ .

Defínase  $QB = b'$ ,  $QC = c'$ ,  $QD = d'$ , con  $c' \cap d = C'$  y  $BC' = c'$ . Entonces,

$$P(a, b, c, d) \stackrel{\bar{\wedge}^p}{=} Q(a, b', c', d') \stackrel{\bar{\wedge}^d}{=} B(b, b', c', p) \stackrel{\bar{\wedge}^c}{=} P(b, a, d, c)$$

Así,

$$P(a, b, c, d) \bar{\wedge} P(b, a, d, c)$$

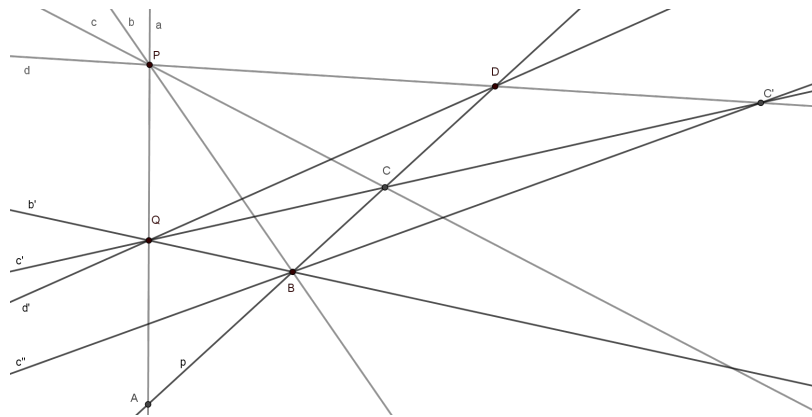


Figura 1.4: Projectividad

**Teorema 1.2.6.** *Dados tres puntos colineales y distintos  $A, B, C$ , y otro tres distintos y colineales  $A', B', C'$  sobre rectas distintas o sobre la misma recta, existe por lo menos una projectividad que envía  $A, B, C$ , en  $A', B', C'$  respectivamente.<sup>2</sup>*

**Teorema 1.2.7.** *Sean  $l$  y  $l'$  dos rectas distintas con  $X$  su punto de incidencia, si  $A, B, C$  son puntos de  $l$  y  $A', B', C'$  son puntos de  $l'$  distintos de  $X$ , entonces  $AB' \cap A'B = D$ ,  $BC' \cap B'C = E$ , son colineales.*

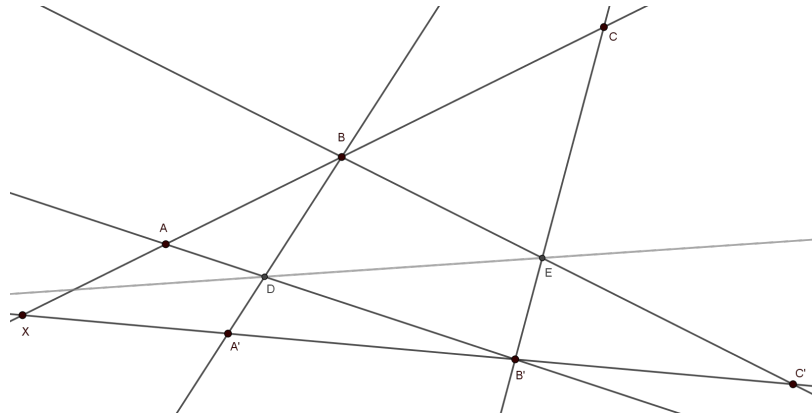


Figura 1.5: Recta de Pappus

En el teorema anterior, la recta determinada por  $D$  y  $E$  se llama *la recta de Pappus* o también *eje de proyectividad*

**Definición 1.2.8.** *Las figuras radiadas son el conjunto de todas las rectas y planos que pasan por un mismo punto.*

En un haz radiado pasan todas sus rectas por el mismo punto.

**Definición 1.2.9.** *Las rectas que no son coplanares se llaman alabeadas, si bien esta denominación se aplica con más propiedad a las curvas que no tienen ninguna porción plana.*

Se denominará, de manera general, *haz de rectas* al conjunto de las diferentes posiciones de una recta, denominada *rayo del haz*, que se mueve siguiendo una ley arbitraria y engendra una superficie. Dependiendo de la naturaleza de esta superficie, el haz generador se clasificará como *plano*, *radiado*, *tangencial* o *alabeado*, según si la superficie es plana, cónica, tangencial o alabeada, respectivamente.

Al referirse a haces alabeados de segundo orden, se establece que una recta no puede cortar a más de dos de sus rayos sin cortar a todos los demás.

**Definición 1.2.10.** *El cuadrángulo completo, consta de cuatro puntos distintos  $P, Q, R, S$ , no colineales tres a tres y de las seis rectas determinadas por dichos puntos. Los cuatro puntos son los vértices y las seis rectas son los lados del cuadrángulo completo.<sup>2</sup>*

Los lados que no comparten un mismo vértice se denominan un par de *lados opuestos* del cuadrángulo completo. Los tres pares de lados opuestos determinan tres puntos adicionales  $A, B, C$ , denominados *puntos diagonales* del cuadrángulo completo. En la

figura, estos tres puntos son no colineales y determinan un triángulo, conocido como el *triángulo diagonal* del cuadrángulo completo.

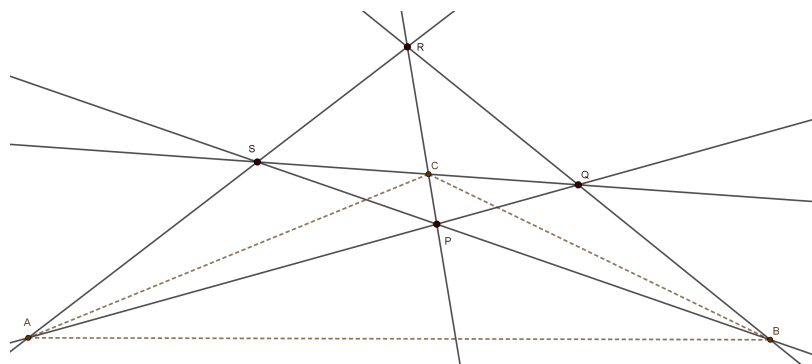


Figura 1.6: Cuadrángulo completo

**Definición 1.2.11.** *El cuadrilátero completo consta de cuatro rectas distintas  $p, q, r, s$ , no concurrentes tres a tres, y de los seis puntos de intersección determinados por estas rectas. Las cuatro rectas son los lados y los seis puntos son los vértices del cuadrilátero completo.<sup>2</sup>*

Dos vértices que no pertenecen a un mismo lado se denominan un par de *vértices opuestos* del cuadrilátero completo. Los tres pares de vértices opuestos determinan tres rectas adicionales  $a, b, c$ , denominadas *rectas diagonales* del cuadrilátero completo. En la figura, estas tres rectas no son concurrentes y determinan un triángulo, conocido como el *triángulo diagonal* del cuadrilátero completo.

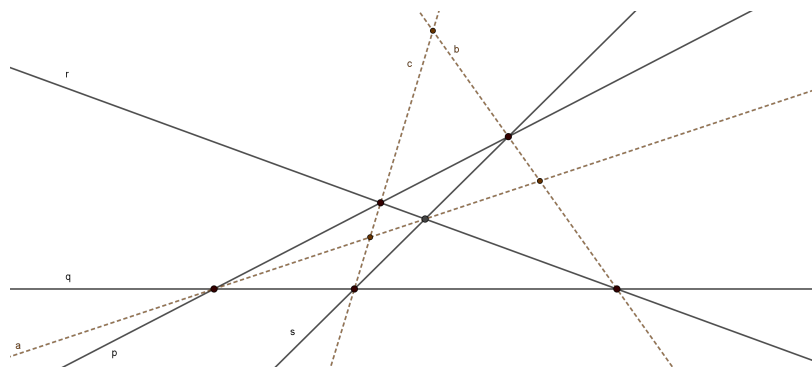


Figura 1.7: Cuadrilátero completo

**Definición 1.2.12.** *Se dice que cuatro puntos  $A, B, C, D$  colineales forman un conjunto armónico de puntos cuando existe un cuadrángulo completo que tiene dos lados opuestos sobre  $A$ , otros dos lados opuestos sobre  $B$ , mientras que el tercer par de lados opuestos está individualmente sobre  $D$  y  $E$ .*

El punto  $D(E)$  se denomina el *conjugado armónico* de  $E(D)$  con respecto a  $A$  y  $B$ . Esta relación se representará mediante la notación  $H(A, B; D, E)$ . Se observa que, en  $H(A, B; D, E)$ , tanto  $A$  como  $B$  desempeñan roles equivalentes, por lo que también se puede escribir  $H(B, A; D, E)$ . De manera análoga,  $D$  y  $E$  cumplen funciones equivalentes, lo que permite utilizar las notaciones  $H(A, B; E, D)$  o  $H(B, A; E, D)$ . En cualquiera de estos casos, se dice que el par  $(A, B)$  es *separado armónicamente* por el par  $(D, E)$ .

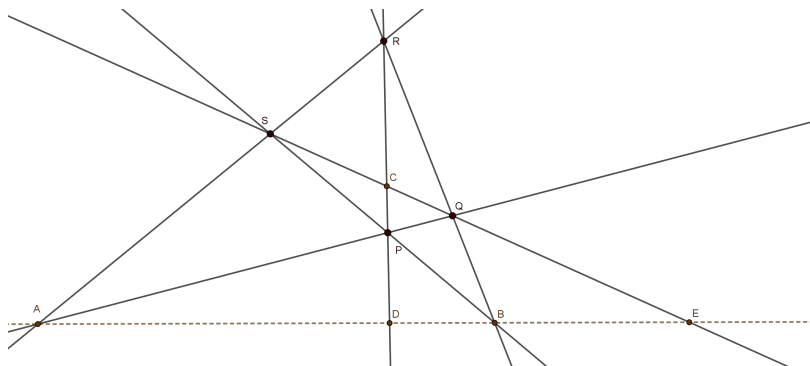


Figura 1.8: Conjugados armónicos a través cuadrángulo completo

**Definición 1.2.13.** Se dice que cuatro rectas concurrentes  $a, b, d, e$ , forman un conjunto armónico de rectas cuando existe un cuadrilátero completo que tiene dos de sus vértices opuestos sobre  $a$ , otros dos vértices opuestos sobre  $b$ , mientras que el tercer par de vértices opuestos está individualmente sobre  $d$  y  $e$ .

A la recta  $d(e)$  se le denomina *conjugada armónica* de  $e(d)$  con respecto a  $a$  y  $b$ . Esta relación se representa mediante la notación  $H(a, b; d, e)$ . Se observa que, en  $H(a, b; d, e)$ , tanto  $a$  como  $b$  desempeñan roles equivalentes, por lo que también se puede escribir  $H(b, a; d, e)$ . De manera análoga,  $d$  y  $e$  cumplen funciones equivalentes, lo que permite utilizar las notaciones  $H(a, b; e, d)$  o  $H(b, a; e, d)$ . En cualquiera de estos casos, se dice que el par  $(a, b)$  es *separado armónicamente* por el par  $(d, e)$ .

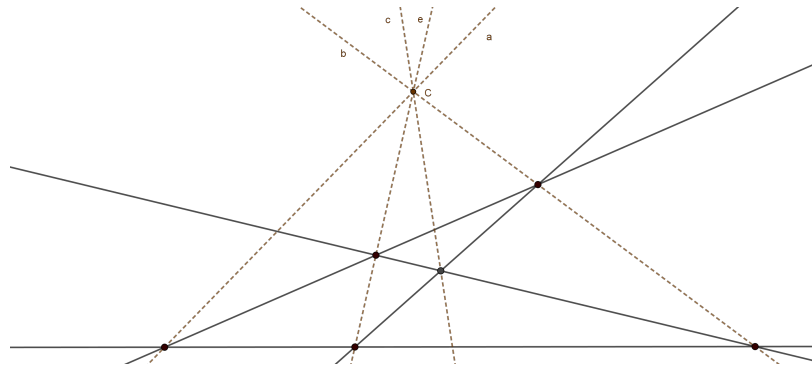


Figura 1.9: Conjugados armónicos a través de un cuadrilátero completo

### 1.3. Involuciones

**Definición 1.3.1.** Si una proyectividad en una recta transforma un punto  $A$  en un punto distinto  $A'$  y transforma  $A'$  en  $A$ , se dice que los puntos  $A, A'$  se corresponden entre sí recíprocamente.<sup>2</sup>

**Definición 1.3.2.** Una involución es una proyectividad entre rectas sobre un punto (puntos sobre una recta) de tal forma que la correspondencia entre  $x$  y  $x'$  ( $X$  y  $X'$ ) es recíproca.

Se dice que dos figuras proyectivas están en *involución* cuando sus pares de elementos se corresponden doblemente. Es decir, si al elemento  $A$  de la primera figura le corresponde el elemento  $A'$  de la segunda, entonces  $A'$ , considerado como parte de la primera, tiene como correspondiente a  $A$ , visto ahora como parte de la segunda. Los pares  $(A, A'), (B, B'), (C, C'), \dots$  se denominan *conjugados entre sí*.

**Teorema 1.3.3.** Una involución está determinada por dos cualesquiera de sus pares recíprocos.

**Ejemplo 1.3.4.** Dado el rango de puntos  $l(A, B, C, D)$ , se busca construir una involución tal que

$$l(A, B, C, D) \bar{\wedge} l(B, A, D, C).$$

Para ello, se proyectan los puntos dados desde un punto  $P$  que no pertenece a  $l$  y se traza una recta arbitraria  $q$  que pase por  $C$ , distinta de  $l$  y de  $PC$ . De este modo, se obtienen los puntos  $A', B', C', D'$ , donde  $C' = C$ . Al formar la recta  $A'B$ , se determina el punto  $D''$  sobre la recta  $PD = r$ . Así, se obtiene la siguiente secuencia de proyectividades:

$$l(A, B, C, D) \stackrel{\bar{P}}{\wedge} q(A', B', C', D') \stackrel{\bar{B}}{\wedge} r(D'', P, D, D') \stackrel{\bar{A'}}{\wedge} l(B, A, D, C).$$

Finalmente, se concluye que:

$$l(A, B, C, D) \bar{\cap} l(B, A, D, C).$$

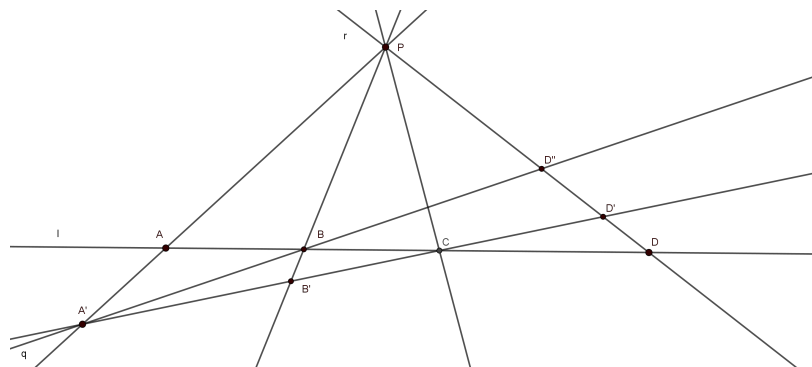


Figura 1.10: Ejemplo de una involución

**Definición 1.3.5.** *Los elementos auto correspondientes de dos figuras en la involución se denominan elementos dobles de la involución.*

Dados cuatro puntos  $A, B, C, D$  en involución sobre una recta  $l$ , donde el recíproco de  $A$  es  $C$  y el recíproco de  $B$  es  $D$ , se dice que los puntos  $A$  y  $C$  separan a los puntos  $B$  y  $D$  si alguno de los puntos  $C$  o  $A$  se encuentra entre  $B$  y  $D$ . En caso contrario, se dice que los puntos no están separados.

**Definición 1.3.6.** *Una involución donde los pares recíprocos son separados será llamada elíptica, de lo contrario será llamada hiperbólica.*

**Teorema 1.3.7.** *El punto medio de los elementos dobles de una involución es siempre real.<sup>3</sup>*

El punto medio mencionado previamente se llama el *centro de la involución*.

Los términos elipse, parábola e hipérbola en griego tienen significados que se asocian con el número de soluciones de determinados problemas:<sup>4</sup>

- Elíptica cuando no hay solución.
- Hiperbólica cuando hay dos soluciones.

<sup>3</sup> A. G. Pickford. *Elementary Projective Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 1909.

<sup>4</sup> G. A. Hernández Galvis. "Secciones circulares de un cono con base cónica". Tesis de pregrado. Universidad Industrial de Santander, 2021.

- Parabólica cuando hay una única solución.

**Teorema 1.3.8.** *Una involución hiperbólica tiene exactamente dos puntos dobles reales.*<sup>5</sup>

**Teorema 1.3.9.** *Una involución elíptica tiene exactamente dos puntos dobles imaginarios.*<sup>5</sup>

En el caso de las involuciones, estas se denominan *elípticas* cuando sus puntos dobles son imaginarios conjugados, e *hiperbólicas* cuando sus puntos dobles son reales. No existen involuciones parabólicas.

El siguiente teorema establece que cualquier par recíproco en una recta forma una cuaterna armónica con los puntos dobles de la involución. Este resultado es fundamental, ya que una involución queda determinada a partir de una cuaterna armónica, y esta última se define a partir de un cuadrángulo completo.

**Teorema 1.3.10.** *Si una involución tiene un punto doble, tiene un segundo punto doble distinto del primero, formando una cuaterna armónica con cualquier otro par recíproco.*<sup>2</sup>

*Demostración.* Consideremos una involución entre los puntos de una recta. Vea la Figura 1.12, donde la involución sobre  $o$  se determina por el punto doble  $M$  y cualquier par recíproco  $B, B'$ . Sobre  $M$  tomemos dos rectas  $r$  y  $s$  distintas de  $o$ ; sobre  $r$  tomemos cualquier punto  $P \neq M$ . Sea  $BP \cap s = Q$ ,  $B'P \cap s = S$ ,  $BS \cap B'Q = R$ ,  $PR \cap s = K$  y  $PR \cap o = N$ .

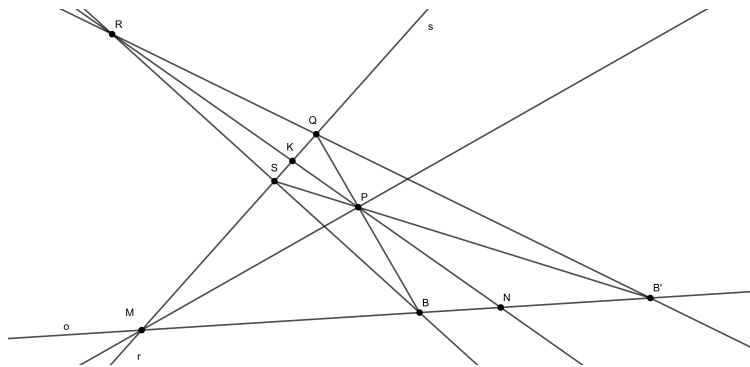


Figura 1.11: Segundo punto doble de una involución

- a. Entonces  $o(M, N, B, B') \stackrel{=P}{\wedge} s(M, K, Q, S) \stackrel{=R}{\wedge} l(M, N, B', B)$  resulta  $N \neq M$  como el segundo punto doble.

<sup>5</sup> John J. Milne. *An Elementary Treatise on Cross-Ratio Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 1911.



En la recta  $AP$ , existe un único punto  $Q$  que asegura que los cuadrángulos construidos satisfagan las condiciones expuestas en la Figura 1.12. Sin embargo, si se considera cualquier punto  $Q'$  sobre la recta  $AP$ , se traza la recta  $A'Q'$ , se llama  $R'$  a la intersección de  $A'Q'$  con  $AS$  y se trazan las rectas  $R'A', R'B, R'B'$  para obtener los puntos  $T' = BR' \cap Q'S$  y  $U' = T'Q' \cap R'B'$ .

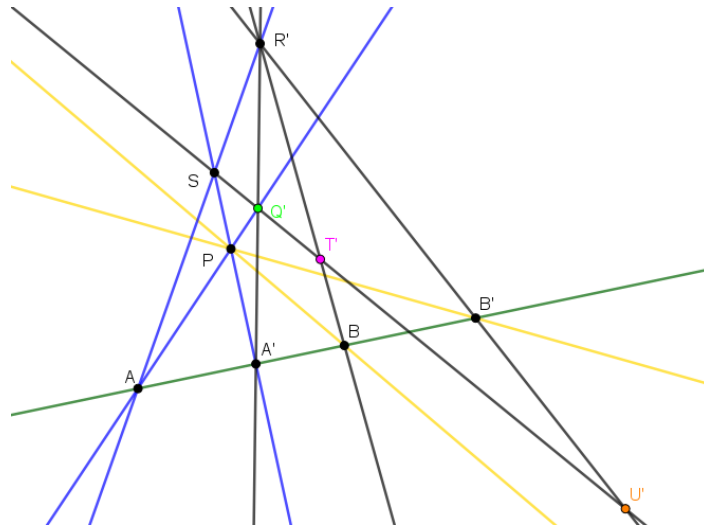


Figura 1.13: Construcción puntos dobles (a)

En la configuración anterior, presentada en la Figura 1.13, las rectas  $BP, Q'T'$  y  $BR'$  no concurren como en la Figura 1.12. Sin embargo, el lugar geométrico del punto  $U'$  cuando  $Q'$  se mueve a lo largo de la recta  $AP$ , es una cónica  $c$  (ver Figura 1.14), dado que se forman dos haces proyectivos no perspectivas con centros  $P$  y  $S$ , que corresponde a la definición de cónica y se expondrá más adelante en la sección 1.5.

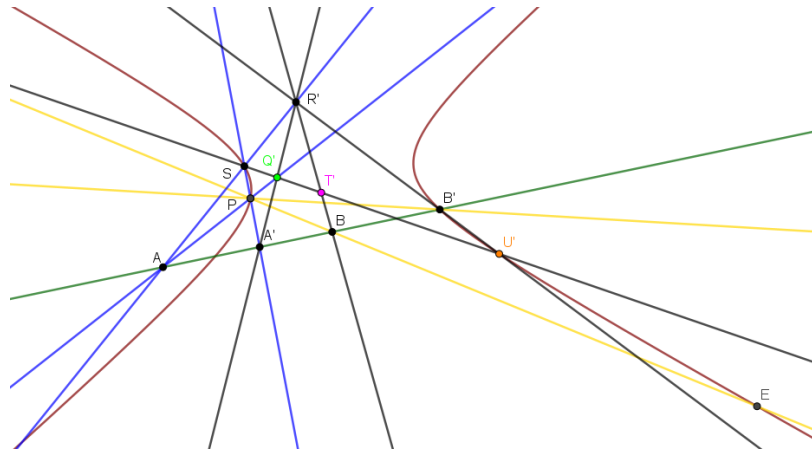


Figura 1.14: Construcción puntos dobles (b)

El punto  $U$  buscado es la intersección de la cónica  $c$  con la recta  $BP$ , la recta  $SU$  será una diagonal del cuadrángulo que contiene al primer punto doble  $N$  sobre  $AA'$ ,  $Q$  será entonces la intersección de las rectas  $SU$  y  $AP$ .  $R$  la intersección de las rectas  $A'Q$  y  $AS$ . Por último, el segundo punto doble  $M$  buscado es la intersección de  $RP$  y  $AA'$

**Teorema 1.3.12.** *Dadas dos involuciones entre los puntos de una recta tenemos que.*<sup>2</sup>

- *Si las dos involuciones son hiperbólicas, entonces existe otra involución hiperbólica en la misma recta, cuyos pares recíprocos son los puntos dobles de las involuciones hiperbólicas.*
- *Si una involución es hiperbólica y la otra elíptica, entonces existe otra involución hiperbólica en la misma recta, cuyos pares recíprocos son los puntos dobles de las involuciones.*
- *Si las dos involuciones son elípticas, entonces existe otra involución hiperbólica en la misma recta, cuyos pares recíprocos son los puntos dobles de las involuciones elípticas.*

#### 1.4. Elementos imaginarios

Los puntos imaginarios pueden considerarse como situaciones particulares dentro de una configuración más amplia, en la cual los puntos dejan de tener una “existencia” convencional. Así, los puntos ordinarios, imaginarios y los que se encuentran en el infinito definen diferentes tipos de figuras, permitiendo una transformación continua entre ellos. Este principio se conoce como el *principio de continuidad*. En este enfoque, no es posible

definir los puntos imaginarios de manera independiente, sino únicamente a través de sus interacciones con otros objetos ordinarios. Un ejemplo de esto se observa cuando una recta corta un círculo: si desplazamos la recta paralelamente, de tal forma que la distancia entre la recta y el centro del círculo exceda el radio de este, los puntos de intersección dejan de ser reales y se convierten en puntos imaginarios. En términos generales, tanto los puntos ordinarios como los imaginarios se definen de manera axiomática, según su relación con otros objetos, tales como las rectas.

Una manera de concebir un par de puntos imaginarios es como los puntos dobles de una involución donde los pares recíprocos son separados ( $ABA'B'$ ); y la mejor manera concebir un par de rectas imaginarias es como las rectas dobles de una involución donde los pares recíprocos son separados ( $aba'b$ ).

De este modo, las tangentes desde cualquier punto a una cónica son las rectas dobles (reales, coincidentes o imaginarias) de la involución de rectas conjugadas que la cónica determina en el punto.

Nótese que un par de puntos imaginarios conjugados no es lo mismo que dos puntos imaginarios. Porque si  $A-A'$  es un par de puntos imaginarios conjugados y  $B-B'$  otro par de puntos imaginarios conjugados, entonces  $A$  y  $B$  son dos puntos imaginarios pero no son un par.

**Definición 1.4.1.** *Un par de puntos imaginarios se representa, pues, por cada par de elementos conjugados  $A-A'$  y  $B-B'$  de una involución o, puesto que estos  $B$  y  $B'$  están separados por aquellos  $A$  y  $A'$ , lo designaremos abreviadamente por la figura simple  $ABA'B'$ , cuyos elementos están dispuestos en el orden en que los escribimos.*<sup>6</sup>

Un par de puntos imaginarios  $A, B, A', B'$  admite infinitas representaciones, dado que existen infinitos pares de elementos conjugados en la involución  $A - A', B - B', \dots$ . Los dos elementos imaginarios definidos por una misma involución se denominan *conjugados entre sí*.

**Teorema 1.4.2.** *Por un par de puntos imaginarios conjugados pasa una única recta real.*<sup>7</sup>

---

<sup>6</sup> Eduardo Torroja. *Tratado de la Geometría de Posición y sus Aplicaciones a la Geometría de la Medida*. Madrid: Establecimiento Tipográfico de G. Juste, 1899.

<sup>7</sup> J. L. S. Hatton. *The Theory of the Imaginary in Geometry Together with the Trigonometry of the Imaginary*. Cambridge: CUP Archive, 1920.

**Teorema 1.4.3.** *Cada recta real que contiene un punto imaginario, contiene su imaginario conjugado.*<sup>7</sup>

**Teorema 1.4.4.** *Un par de puntos imaginarios conjugados y un par de puntos reales tienen siempre un par de conjugados armónicos reales.*<sup>7</sup>

**Teorema 1.4.5.** *Cada recta imaginaria contiene uno y solo un punto real.*<sup>7</sup>

**Teorema 1.4.6.** *El punto de intersección de un par de rectas imaginarias conjugadas es real.*<sup>7</sup>

## 1.5. Cónica proyectiva

**Definición 1.5.1.** *Considere la proyectividad no-perspectiva  $R(a,b,c,\dots) \bar{\wedge} S(a', b', c', \dots)$  entre haces de rectas sobre centros distintos  $R$  y  $S$ . Se denomina cónica puntual al conjunto de todos los puntos  $A = a \cap a'$ ,  $B = b \cap b'$ ,  $C = c \cap c'$ , ..., comunes a los pares de rectas correspondientes de los haces.*<sup>2</sup>

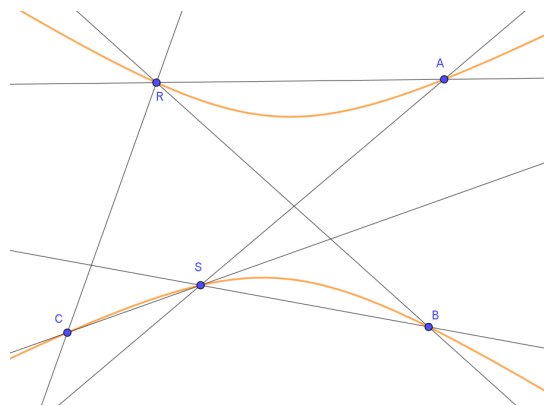


Figura 1.15: Cónica puntual real

Dos haces proyectivos pueden tener dos pares de rayos correspondientes paralelos, un par de tales rayos o ningún par.

- Si los haces proyectivos tienen dos pares de rayos correspondientes paralelos (su punto de intersección está en el infinito), la cónica se denomina hipérbola.
- Si tienen un par de tales rayos, la cónica se denomina parábola.
- Si no tienen tal par, la cónica se denomina elipse. Hay dos casos particulares de lo anterior.

- Si los haces proyectivos son directamente iguales, la cónica es un círculo.

Esta clasificación también la podemos ver como

- **Elipse:** Es la cónica que no tiene ningún punto en la recta del infinito.
- **Parábola:** Es la cónica que es tangente a la recta del infinito en un único punto.
- **Hipérbola:** Es la cónica que tiene dos puntos en la recta del infinito.

**Teorema 1.5.2.** *Una cónica puntual queda determinada de manera única por cinco cualesquiera de sus puntos.<sup>2</sup>*

**Definición 1.5.3.** *El dual de una cónica puntual, es decir, la totalidad de rectas que unen puntos correspondientes de dos haces proyectivos no-perspectivos de puntos sobre rectas distintas (ejes), lo llamamos una cónica tangencial. Considere la proyectividad  $r(A,B,C,\dots) \bar{\wedge} s(A,B,C,\dots)$  sobre ejes distintos  $r$  y  $s$ . Entonces  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $r$ ,  $s$  son segmentos de la cónica tangencial, generados por la proyectividad.*

**Teorema 1.5.4.** *Cinco rectas distintas, tres de las cuales no son concurrentes, determinan una cónica tangencial única.*

**Definición 1.5.5.** *Considere la proyectividad no-perspectiva imaginaria  $R(a,b,c,\dots) \bar{\wedge} S(a',b',c',\dots)$  entre haces de rectas sobre centros distintos  $R$  y  $S$ . Se denomina cónica puntual al conjunto de todos los puntos  $A = a \cap a'$ ,  $B = b \cap b'$ ,  $C = c \cap c'$ ,  $\dots$ , comunes a los pares de rectas correspondientes de los haces.*

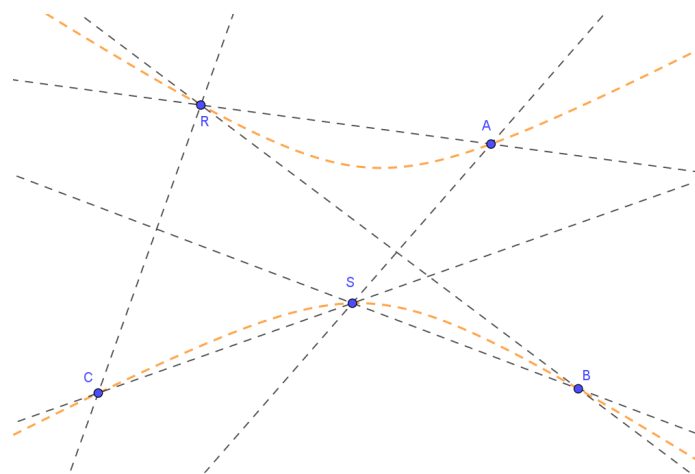


Figura 1.16: Cónica puntual imaginaria

**Ejemplo 1.5.6.** *Determinación de un sexto punto en una cónica proyectiva.*

Sea una cónica determinada por cinco puntos  $R, S, A, B, C$ , los cuales están relacionados mediante la proyectividad no-perspectiva  $R(a, b, c, \dots) \bar{\wedge} S(a', b', c', \dots)$  entre haces de rectas con centros distintos  $R$  y  $S$ , donde  $A = a \cap a', B = b \cap b'$  y  $C = c \cap c'$ .

Para encontrar un sexto punto sobre la cónica, se traza una recta arbitraria  $p$  que pasa por el centro  $R$ . El objetivo es determinar la intersección de  $p$  con la cónica  $w$ , lo que requiere hallar su rayo homólogo  $p'$ .

Primero, se determina el centro de proyectividad  $H$ . Luego, se considera la intersección de  $p$  con  $c'$ , denotada como  $PC'$ . Dado que la recta que une  $PC'$  con  $P'C$  debe pasar por  $H$ , se traza la recta que une  $H$  con  $PC'$ , cuya intersección con  $c'$  define el punto  $P'C$ .

Finalmente, al trazar la recta que pasa por  $S$  y  $P'C$ , se obtiene el rayo homólogo buscado  $p'$ . La intersección entre  $p$  y  $p'$ , denotada como  $P$ , es el sexto punto sobre la cónica.

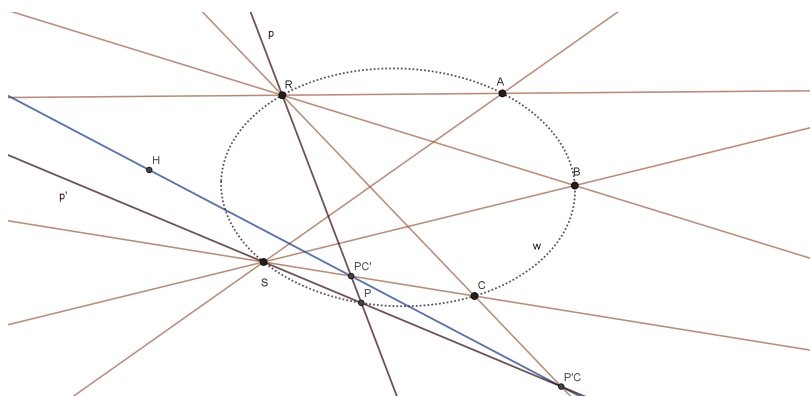


Figura 1.17: Sexto punto de una cónica

**Teorema 1.5.7.** *Dos cónicas se intersecan en cuatro puntos reales, o en dos puntos reales y dos puntos imaginarios, o en cuatro puntos imaginarios.*<sup>8</sup>

<sup>8</sup> John Wellesley Russell. *An Elementary Treatise on Pure Geometry with Numerous Examples*. Oxford: Clarendon Press, 1905.

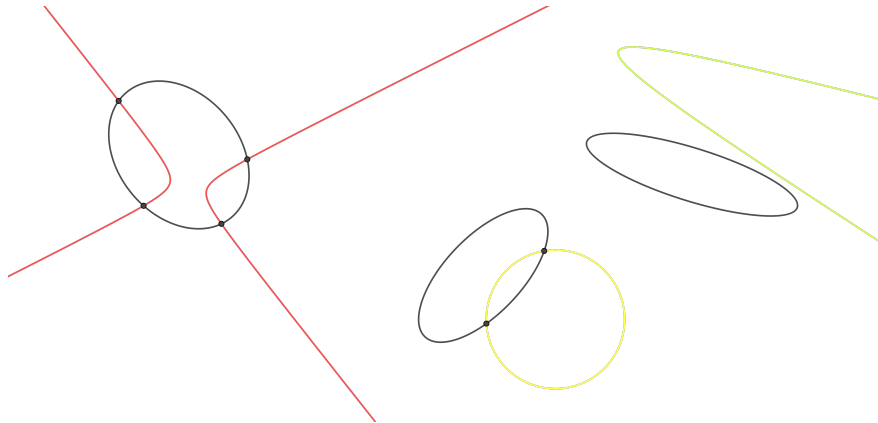


Figura 1.18: Intersección de dos cónicas

Además de las intersecciones mostradas en la Figura 1.15, existen casos especiales en los que las cónicas pueden tocarse externamente o internamente.

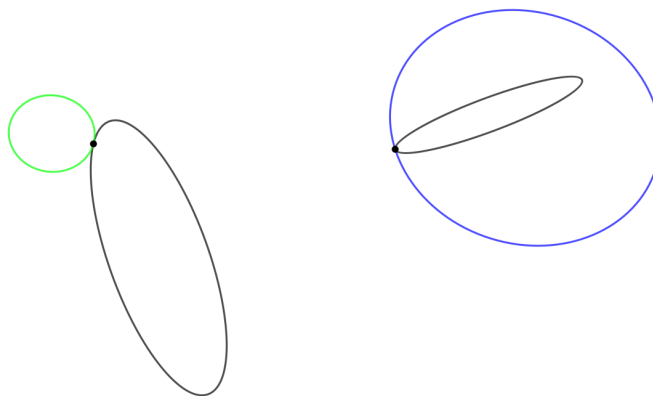


Figura 1.19: Cónicas que se tocan interior y exteriormente

**Definición 1.5.8.** *Se le llama cuerda de una cónica a una recta que contiene dos puntos de la misma.*

**Definición 1.5.9.** *Llamamos cuerda común de dos cónicas, a la recta determinada por dos puntos de intersección de dichas cónicas (reales o imaginarios).*

Si dos cónicas se cortan en dos puntos reales, la recta que une los otros puntos de intersección es real, incluso si estos últimos puntos son imaginarios.

Si dos cónicas se cortan en dos puntos reales y dos imaginarios, un par de cuerdas comunes son reales y dos son imaginarias.

## 1.6. Superficies de segundo orden

**Definición 1.6.1.** *Dos radiaciones correlativas, generan una superficie  $S$ , lugar de los puntos de intersección de sus pares de elementos homólogos, superficie que pasa por los vértices de ambas radiaciones, y que llamaremos de segundo orden. Porque todas sus secciones planas son curvas de segundo orden.*<sup>6</sup>

Las superficies de segundo orden se caracterizan porque una recta las corta o toca únicamente en dos puntos, por ejemplo **la esfera, el elipsoide, el paraboloides elíptico y el hiperboloide de dos hojas.**

Ciertas superficies de segundo orden también se generan a partir de rectas y son llamadas **cuádricas regladas**, un ejemplo es un **el hiperboloide de una hoja**, y se puede caracterizar como el lugar geométrico de las rectas que cortan simultáneamente a tres rectas dadas donde ningún par de dichas rectas dadas se cortan en un punto ordinario ni del infinito.

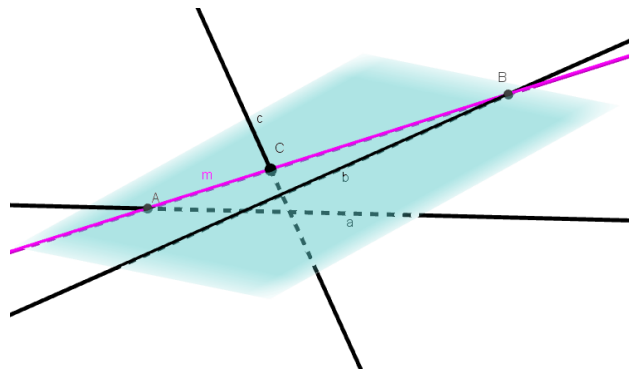


Figura 1.20: Tres rectas dadas (a, b, c) y una recta m que las interseca

Para construir la recta m, que interseca las tres rectas dadas (a, b y c), considere un punto C sobre la recta c, y considere un plano que contiene a C, y a la recta b, este plano corta a la recta a en un punto A, la recta AC corta a la recta b en un punto B. Así, la recta ABC, considerada anteriormente como **m** es una recta del hiperboloide de una hoja.

Al cambiar el punto C sobre c, se obtiene una nueva recta de la superficie, así, el lugar geométrico de la recta ABC cuando C se mueve es el hiperboloide de una hoja.

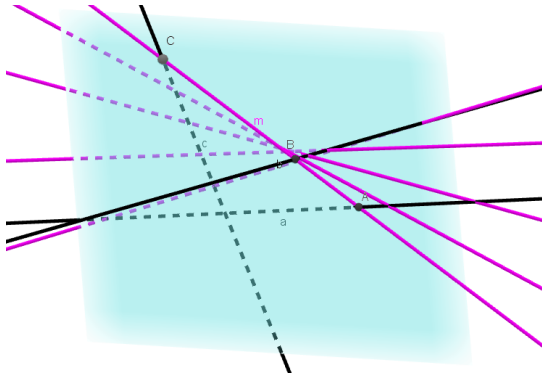


Figura 1.21: 5 rectas de la familia que genera el hiperboloide de una hoja

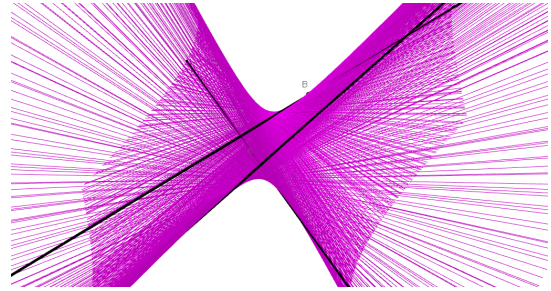


Figura 1.22: Hiperboloide de una hoja

El **hiperboloide hiperbólico** también es un ejemplo de superficie reglada. Se genera de la siguiente manera: se considera un plano arbitrario, denominado *plano directriz*, junto con dos rectas alabeadas. La familia de rectas que cortan a ambas rectas dadas y que son paralelas al plano directriz determina el **hiperboloide hiperbólico**.

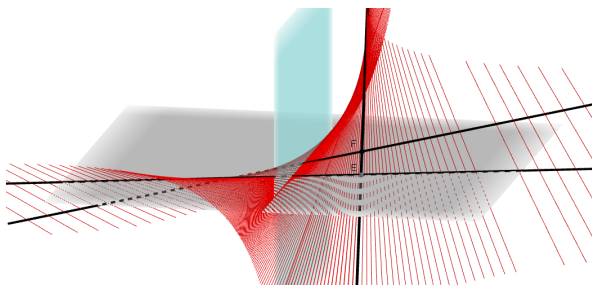


Figura 1.23: Hiperboloide hiperbólico vista 1

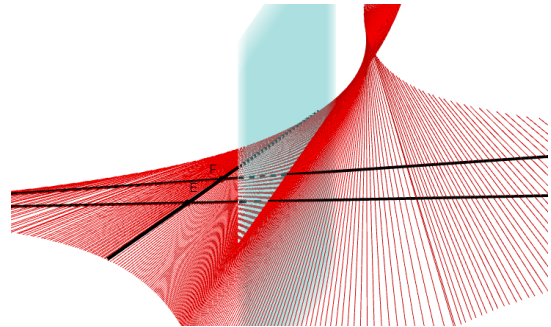


Figura 1.24: Hiperboloide hiperbólico vista 2

Otro ejemplo de estas cuádricas es el **cono cuádrico**, proyectando una cónica desde un punto exterior a su plano se obtiene una superficie denominada cono cuádrico.

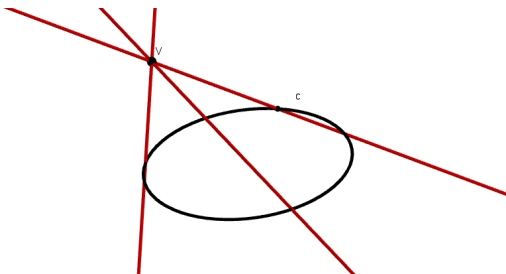


Figura 1.25: 3 rectas que pertenecen al cono

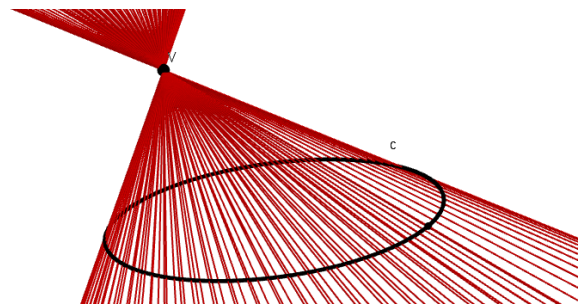


Figura 1.26: Cono cuádrico

## 2. Polaridad

### 2.1. Polar de un punto con respecto a una cónica

**Definición 2.1.1.** Una recta es la polar de un punto dado  $P$  respecto a una cónica si y solo si<sup>9</sup>

- Es el lugar geométrico de los puntos de intersección de tangentes a la cónica en los pares de puntos de corte por cualquier transversal a través de  $P$ .
- Es el lugar geométrico de los puntos tomados en cualquier transversal a través de  $P$  tal que estén armónicamente conjugados con  $P$  con respecto al par de puntos en los que la transversal es cortada por la cónica.

**Teorema 2.1.2.** Sean  $w$  una cónica y  $P$  un punto. Sean  $l$  y  $m$  rectas a través de  $P$ , con  $m \cap w = \{A, B\}$  y  $l \cap w = \{C, D\}$ . Sean  $a, b, c$  y  $d$  las rectas tangentes a través de  $A, B, C$  y  $D$ . Entonces la recta que pasa a través de  $a \cap b$  y  $c \cap d$  es la polar de  $P$ .<sup>4</sup>

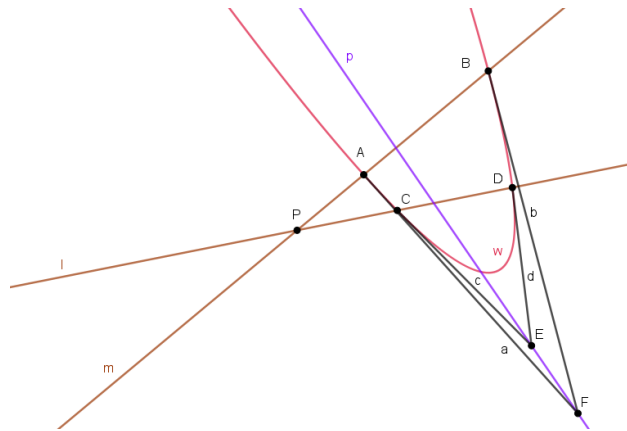


Figura 2.1: Recta polar definición (a)

**Teorema 2.1.3.** Si  $P$  es un punto en el plano de una cónica, y se traza cualquier cuerda a través de él, el lugar geométrico del cuarto armónico de  $P$  respecto a los puntos en los que la cónica interseca a la cuerda es una recta.<sup>5</sup>

<sup>9</sup> Luigi Cremona. *Elements of Projective Geometry*. 3rd. Oxford: Clarendon Press, 1913.

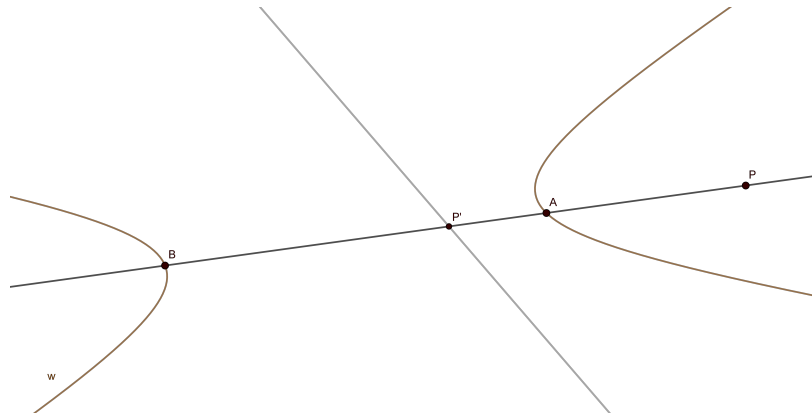


Figura 2.2: Lugar geométrico del cuarto armónico de  $P$

En la Figura 2.2, la cuerda que pasa por  $P$  intersecta a la cónica  $w$  en los puntos  $A$  y  $B$ . Si  $P'$ , es el conjugado armónico de  $P$  con respecto a  $A$  y  $B$ , al variar  $A$  sobre la cónica, el lugar geométrico de  $P'$  es la recta polar de  $P$  respecto a la cónica. Por lo tanto, para determinar dicho lugar geométrico, basta con construir dos de sus puntos, lo cual se realiza aplicando la Definición 1.2.12.

**Ejemplo 2.1.4.** *Construir el lugar geométrico mencionado en el Teorema 2.1.3.<sup>5</sup>*

Sea  $P$  un punto en el plano de la cónica  $w$ , trace dos cuerdas a través de  $P$ , estas cuerdas intersectan a  $w$  en  $A, B, C$  y  $D$ . Luego, las rectas  $BD$  y  $AC$  se intersectan en el punto  $F$ , similarmente las rectas  $BC$  y  $DA$  en el punto  $H$ . Así, por la Definición 1.2.12, los puntos  $DP_1CP$  y  $BP_2AP$  forman cada uno, una cuaterna armónica. Es decir, la recta  $P_1P_2$  es el lugar geométrico del cuarto armónico de  $P$  para los puntos en los cuales  $w$  intersecta la cuerda.

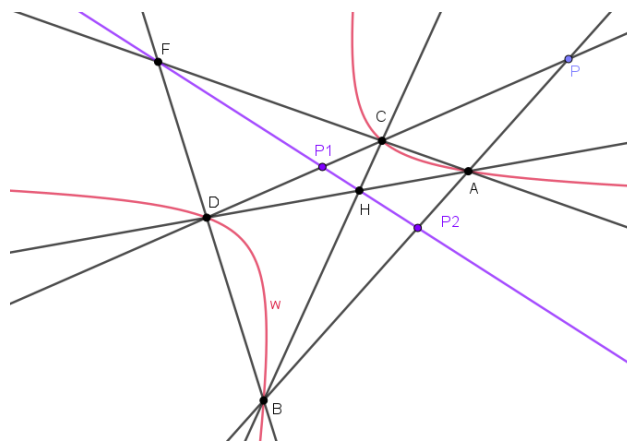


Figura 2.3: Recta polar definición (b)

**Definición 2.1.5.** Si una recta  $p$  es la recta polar de un punto  $P$  con respecto a una cónica dada, entonces  $P$  es el polo de  $p$  con respecto a la misma cónica.<sup>6</sup>

**Teorema 2.1.6.** Si un punto  $A$  está en la polar  $b$  de otro  $B$ , este se encuentra en la polar  $a$  del primero y se dice que los dos puntos  $A$  y  $B$  son conjugados respecto de la curva, y también se llaman conjugadas las rectas  $a$  y  $b$ .

En un sistema plano polar a cada punto corresponde una recta; el punto se llama polo de la recta y la recta polar del punto.

En una radiación polar a toda recta corresponde un punto, llamado recta y punto polar uno de otro.

Dos puntos se llaman conjugados si cada uno de ellos está en el polar del otro. Un punto es conjugado con todos los puntos de su polar. Por lo tanto, si dos puntos  $A$  y  $B$  son conjugados con un tercero  $C$ , la recta  $AB$  que los une es la polar de este último. Todo punto situado en su polar es conjugado de sí mismo y se llama punto doble del sistema polar.

Dos rectas se llaman conjugadas si cada una de ellas pasa por el polo de la otra. Una recta es conjugada con todas las que pasan por su polo. De modo que, si dos rectas  $a$  y  $b$  son conjugadas con una tercera  $c$ , el punto de intersección de  $a$  y  $b$  es el polo de  $c$ . Toda recta que pasa por su polo es conjugada de sí misma y se llama recta doble del sistema polar.

**Teorema 2.1.7.** Los pares de puntos en una recta que son conjugados respecto a una cónica forman una involución desde el polo de la recta, donde<sup>8</sup>

- Los puntos dobles reales o imaginarios conjugados son la intersección de la recta con la cónica.
- Las rectas dobles reales o imaginarias conjugadas son las tangentes desde el polo de la recta a la cónica.

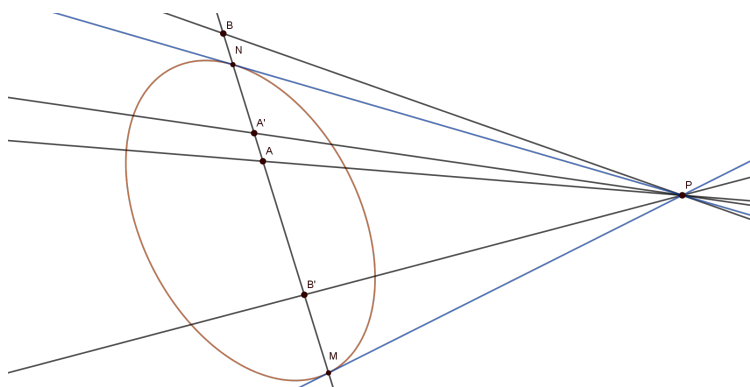


Figura 2.4: Pares de puntos conjugados que forman una involución

## 2.2. Triángulo autopolar

**Definición 2.2.1.** Se dice que un triángulo es autopolar con respecto a una cónica si cada vértice es el polo del lado opuesto. Claramente, cada lado es entonces la recta polar del vértice opuesto.

**Teorema 2.2.2.** Los puntos diagonales del cuadrángulo completo cuyos vértices son cuatro puntos distintos cualesquiera sobre una cónica son, a su vez, los vértices de un triángulo autopolar con respecto a la cónica.<sup>2</sup>

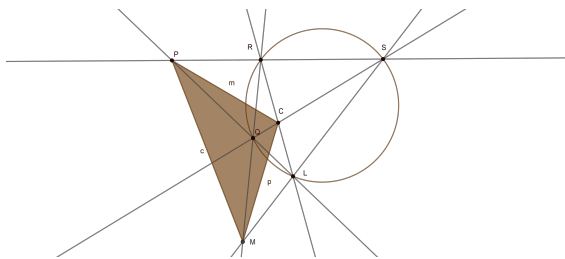


Figura 2.5: T. autopolar círculo

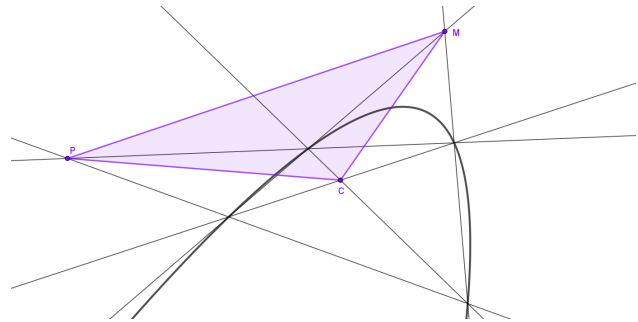


Figura 2.6: T. autopolar parábola

**Definición 2.2.3.** Dados un punto  $P$  y dos cónicas  $w_1$  y  $w_2$  en un plano, el conjugado común de  $P$  es la intersección  $P'$  de las polares de  $P$  respecto  $w_1$  y  $w_2$ .<sup>10</sup>

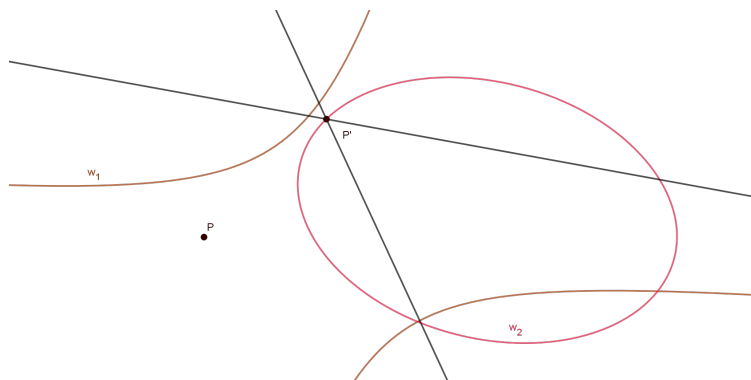


Figura 2.7: Punto conjugado común

**Teorema 2.2.4.** El lugar geométrico de los puntos conjugados comunes para dos cónicas, de todos los puntos que se encuentran en una recta dada, es una cónica.<sup>10</sup>

<sup>10</sup> J. L. S. Hatton. *The Principles of Projective Geometry Applied to the Straight Line and Conic*. Cambridge: Cambridge University Press, 1913.

*Demostración.* Sea  $P$  un punto arbitrario en una recta  $l$ . Sean  $S$  y  $T$  los polos de la recta  $l$  con respecto a las cónicas  $w_1$  y  $w_2$ , respectivamente. Las polares de  $P$  respecto a  $w_1$  y  $w_2$  son las rectas  $SP'$  y  $TP'$ , las cuales pasan por  $S$  y  $T$ , e intersectan en  $P'$ , que es el punto conjugado común de  $P$  con respecto a  $w_1$  y  $w_2$ . Dado que  $P$  es un punto libre sobre la recta  $l$ , las rectas  $SP'$  y  $TP'$  generan dos haces proyectivos con centros en  $S$  y  $T$ , respectivamente. En consecuencia, por la Definición 1.5.1, el lugar geométrico descrito es una cónica  $w_3$ . □

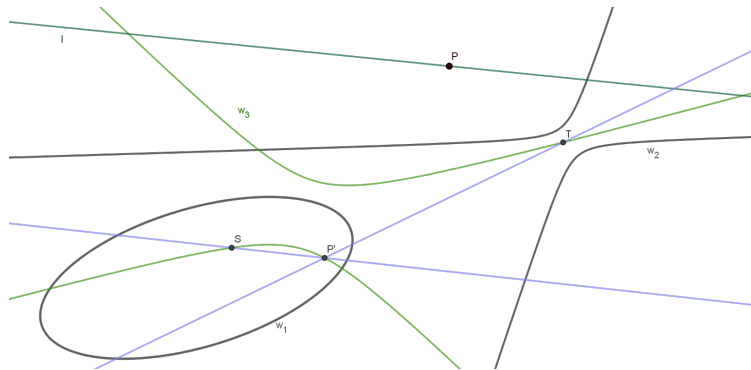


Figura 2.8:  $w_3$  lugar geométrico

**Teorema 2.2.5.** *Un vértice del triángulo autopolar común de dos cónicas es siempre real.*<sup>8</sup>

*Demostración.* Considere una recta  $l$ ; el lugar geométrico de los puntos conjugados de los puntos en  $l$  respecto a ambas cónicas es una cónica  $cl$ . De manera análoga, si se toma otra recta  $m$ , el lugar geométrico de los puntos conjugados de los puntos en  $m$  respecto a ambas cónicas es otra cónica  $cm$ . Estas dos cónicas comparten un punto real en común, que corresponde al punto conjugado de la intersección de  $l$  y  $m$ . Luego, por el Teorema 1.5.7, existe otro punto real en común, denotado por  $U$ .

Sea  $Q$  el punto conjugado sobre la recta  $l$  y  $R$  el punto conjugado sobre la recta  $m$ , ambos asociados al punto  $U$  para las dos cónicas. Dado que la polar de  $U$  respecto a ambas cónicas pasa por los puntos  $Q$  y  $R$ , la recta  $QR$  es, por definición, la polar de  $U$  respecto a ambas cónicas. En consecuencia,  $U$  constituye un vértice real del triángulo autopolar común a las dos cónicas. □

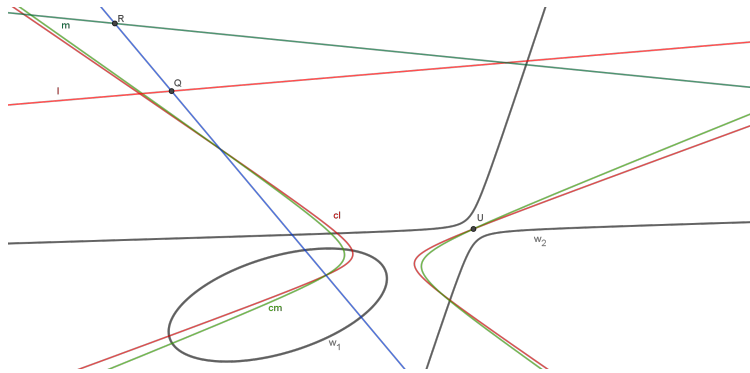


Figura 2.9: Vértice real del triángulo autopolar común a dos cónicas

De manera similar, los otros dos puntos, reales o imaginarios, en los cuales las cónicas se cortan, son los otros dos vértices del triángulo autopolar común.

**Teorema 2.2.6.** *Los otros dos vértices del triángulo autopolar común de dos cónicas son reales si las cónicas cortan en cuatro puntos reales o cuatro puntos imaginarios; pero si las cónicas cortan en dos puntos reales y dos imaginarios, los otros dos vértices son imaginarios.*<sup>8</sup>

Siguiendo la demostración del Teorema 2.2.5, en cuanto a los puntos de intersección de la recta  $RQ$  con las dos cónicas, se pueden presentar los siguientes casos, dependiendo del orden en que aparecen en la recta:

- **Caso 1:** Los puntos son reales y aparecen en el orden  $A, B, B', A'$  o  $A, A', B, B'$ , de manera que los pares  $A, A'$  y  $B, B'$  son puntos no separados.
- **Caso 2:** Los puntos son reales y aparecen en el orden  $A, B, A', B'$ , lo que implica que los pares  $A, A'$  y  $B, B'$  son puntos separados.
- **Caso 3:** Los puntos  $A, A'$  son reales, mientras que  $B, B'$  son puntos imaginarios conjugados.
- **Caso 4:** Los cuatro puntos  $A, A', B$  y  $B'$  son imaginarios conjugados respectivamente.

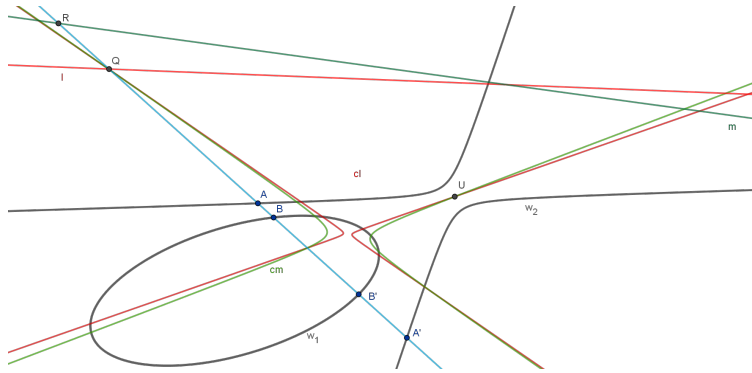


Figura 2.10: Puntos de intersección de la recta  $RQ$  y las dos cónicas

Los vértices del triángulo autopolar común situados en la recta  $RQ$  son los conjugados armónicos comunes de los puntos  $A, A'$  y  $B, B'$ , es decir, los elementos dobles de la involución.

Para cada uno de los cuatro casos anteriores, se tienen las siguientes posibilidades para los puntos dobles respectivamente:

- **Caso 1:** Los elementos dobles  $M$  y  $N$  son reales, pues los puntos son no separados, entonces la involución es hiperbólica.
- **Caso 2:** Los puntos dobles  $M$  y  $N$  son imaginarios conjugados, ya que los puntos son separados, por lo tanto, la involución es elíptica.
- **Caso 3:** Los puntos dobles son reales, pues  $M$  y  $N$  son conjugados armónicos de dos puntos reales y un par de puntos imaginarios conjugados.
- **Caso 4:** Los elementos dobles son reales, dado que  $M$  y  $N$  son conjugados armónicos de dos pares de puntos imaginarios conjugados.

Los casos 3 y 4 son consecuencia del Teorema 1.3.12.

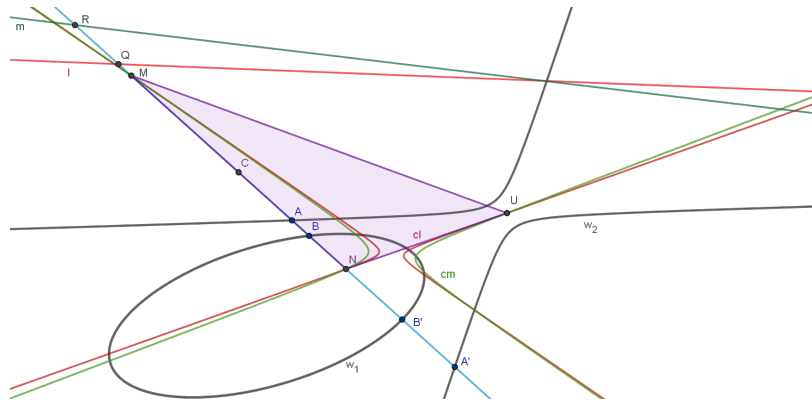


Figura 2.11: Triángulo autopolar común a dos cónicas

**Teorema 2.2.7.** *El triángulo autopolar común a dos cónicas es único.*<sup>3</sup>

*Demostración.* Si  $P$  y  $K$  son dos puntos que tienen la misma polar para dos cónicas  $w_1$  y  $w_2$ , entonces las polares de  $P$  y  $K$  se intersecarán en un único punto  $W$ . Luego, el triángulo autopolar  $PKW$  asociado a  $w_1$  y  $w_2$  es único.

Si existe un punto  $M$  que tiene la misma polar para dos cónicas  $w_1$  y  $w_2$ , esta polar interseca a las cónicas  $w_1$  y  $w_2$  en cuatro puntos, como se muestra en la Figura 2.9. Luego, por el Teorema 2.2.6, existen dos puntos dobles  $P$  y  $K$  (reales o imaginarios) únicos. Por lo tanto, el triángulo  $MKW$  es único.

□

**Teorema 2.2.8.** *En una cuerda común a dos cónicas, la involución de los puntos conjugados es igual en cada cónica, siendo los puntos dobles los puntos de intersección de las dos cónicas.*<sup>5</sup>

*Demostración.* Del Teorema 2.1.7, los puntos dobles, ya sean reales o imaginarios, de las dos cónicas deben ser los puntos de intersección de dichas cónicas. Ahora, considere  $P$  en la cuerda  $AB$  común a las cónicas  $w_1$  y  $w_2$ . Dado que  $A$  y  $B$  son puntos dobles de la involución, entonces, por el Teorema 2.1.3,  $P'$  es el conjugado armónico de  $P$  con respecto a los puntos dobles. Es decir, las polares de  $P$  respecto a  $w_1$  y  $w_2$  se intersecan en  $P'$ . Así, la involución de los puntos conjugados en la cuerda común es la misma para cada cónica.

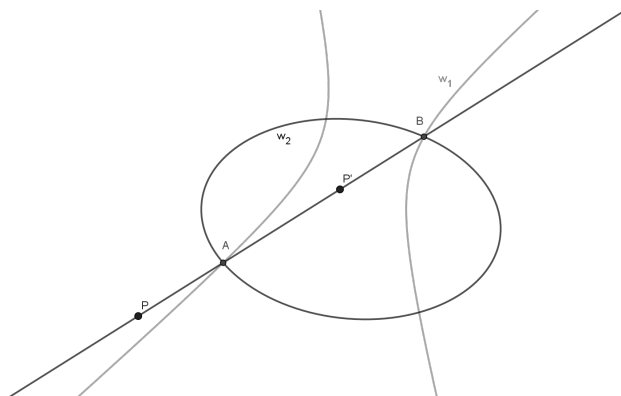


Figura 2.12: Puntos dobles de una involución en una cuerda

□

El Teorema 2.1.7 establece que las cuerdas comunes contienen los vértices del triángulo autopolar común, ya que cada vértice posee la misma polar con respecto a ambas cónicas.

El siguiente teorema describe la conexión existente entre un par de cuerdas comunes y el triángulo autopolar común de dos cónicas.

**Teorema 2.2.9.** *La intersección de un par de cuerdas comunes de dos cónicas tiene la misma polar respecto a las cónicas.*<sup>5</sup>

*Demostración.* Las cuerdas comunes reales o imaginarias  $AB$ ,  $CD$  a  $w_1$  y  $w_2$  se intersecan en  $P$ . Entonces, por el Teorema 2.2.8, las dos polares de  $P$  respecto a  $w_1$  y  $w_2$  intersecan a  $AB$  en  $P_2$  (el conjugado armónico de  $P$  respecto a  $A$  y  $B$ ) y, de manera similar, intersecan a  $CD$  en  $P_1$  (el conjugado armónico de  $P$  respecto a  $C$  y  $D$ ). Por lo tanto, las polares con respecto a  $w_1$  y  $w_2$  son coincidentes. □

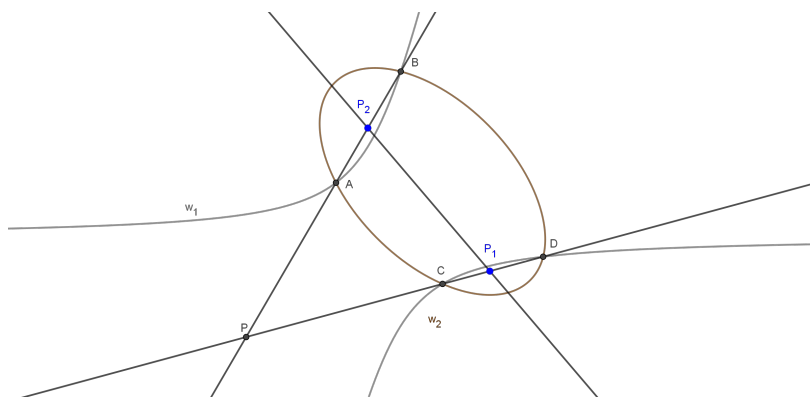


Figura 2.13: Relación entre cuerdas comunes y el triángulo autopolar a dos cónicas.

El Teorema 2.2.9 implica que las cuerdas comunes a dos cónicas vienen por pares y que, el triángulo autopolar común tiene vértices en los tres puntos diagonales del cuadrángulo completo determinado por las cuerdas comunes. Así pues, en caso de que las cónicas se corten en cuatro puntos reales es fácil construir el triángulo autopolar, en caso contrario usamos el procedimiento expuesto en el Teorema 2.2.5, donde al menos un par de cuerdas comunes a dos cónicas es siempre real.

**Teorema 2.2.10.** *El centro de la cónica es el polo de la recta del infinito.*<sup>11</sup>

**Teorema 2.2.11.** *La recta diametral de una cónica pasa por su centro y es la polar de un polo en el infinito.*

La recta conjugada de la recta diametral pasa por su polo en el infinito, por tanto la recta conjugada de una recta diametral está en el infinito.

Si el *triángulo autopolar* tiene un vértice que coincide con el centro de la cónica, su lado opuesto será una recta en el infinito que corresponde a la polar del centro y los otros dos lados del *triángulo autopolar* serán diámetros conjugados de la cónica.

### 2.3. Polar de un punto con respecto a una superficie

**Teorema 2.3.1.** *Si por un punto  $A$  del espacio se trazan los planos que cortan a una superficie  $S$  de segundo orden, las rectas polares de dicho punto respecto de las secciones cónicas de corte están todas en un mismo plano  $\alpha$ .*<sup>6</sup>

En efecto, cada par de las rectas polares en cuestión se cortan en un punto distinto al de cualquier otro par. Es decir, no son concurrentes tres a tres.

**Definición 2.3.2.** *El plano  $\alpha$  mencionado en el teorema anterior se llama plano polar de  $A$  respecto a la superficie  $S$ .*

El plano polar de un punto  $A$  respecto a una superficie de segundo orden pasa por  $A$  si, dicho punto pertenece a la superficie. Recíprocamente, si  $A$  pertenece a su propio plano polar, entonces  $A$  está sobre la superficie; en caso contrario, se encuentra fuera de ella.

**Definición 2.3.3.** *Todo plano  $\alpha$  es polar de un punto  $A$  respecto de una superficie de segundo orden  $S$ ,  $A$  se llama polo de aquel plano.*

---

<sup>11</sup> L. S. Bustamante. "Projeções da Esfera". Doctoral dissertation, Tese de Concurso para Professor Catedrático. Escola Nacional de Belas Artes da antiga Universidade do Brasil, 1960.

**Teorema 2.3.4.** Si un punto  $A$  está en el plano polar  $\beta$  de otro punto  $B$ , entonces  $B$  está en el plano polar  $\alpha$  de  $A$ .<sup>6</sup>

Tanto el par de puntos  $A$  y  $B$  como el par de planos  $\alpha$  y  $\beta$  se llaman *conjugados respecto a la superficie*.

## 2.4. Tetraedro autopolar a una superficie de segundo orden y algunas propiedades

**Definición 2.4.1.** Un tetraedro  $ABCD$  se llama autopolar respecto a una superficie de segundo orden si y solo si cada una de sus caras está en el plano polar del vértice opuesto. Es decir,  $A$  es el polo del plano  $BCD$ , el plano  $ABC$  es polar del vértice  $D$ , etc.<sup>6</sup>

En todo tetraedro autopolar cada arista es polar de los vértices que no están en ella; cada cara y cada par de vértices son conjugados respecto a la superficie.

**Ejemplo 2.4.2.** Construcción de un tetraedro autopolar de una superficie de segundo orden.

Sea  $C$  una superficie de segundo orden y  $P$  un punto en el espacio, considerado como uno de los cuatro vértices del tetraedro autopolar.

Se construyen dos planos distintos,  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , que contienen a  $P$ . Las intersecciones de estos planos con la superficie  $C$  generan las cónicas  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente. De acuerdo con el Teorema 2.3.1, las polares de  $P$  con respecto a  $C_1$  y  $C_2$  se encuentran contenidas en un mismo plano, el cual se define como el plano polar de  $P$  respecto a  $C$  y se denota por  $\alpha_P$ .

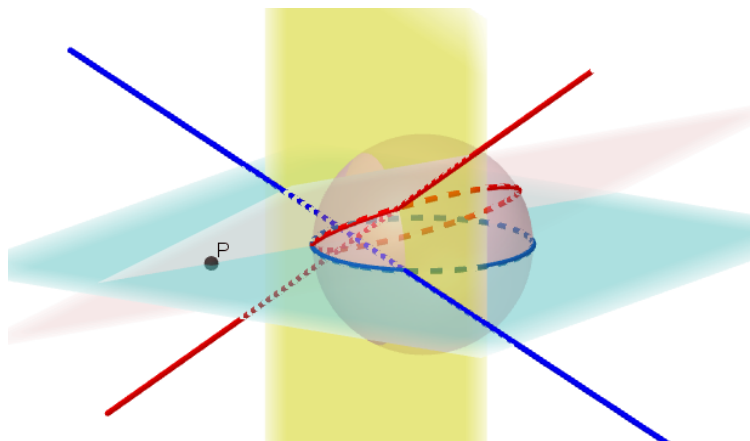


Figura 2.14: Plano polar de  $P$

A continuación, se selecciona un punto  $Q$  arbitrario en el plano  $\alpha_P$  y se determina su plano polar  $\alpha_Q$  con respecto a  $C$  mediante el mismo procedimiento. La relación de polaridad establece que  $P$  pertenece al plano  $\alpha_Q$ .

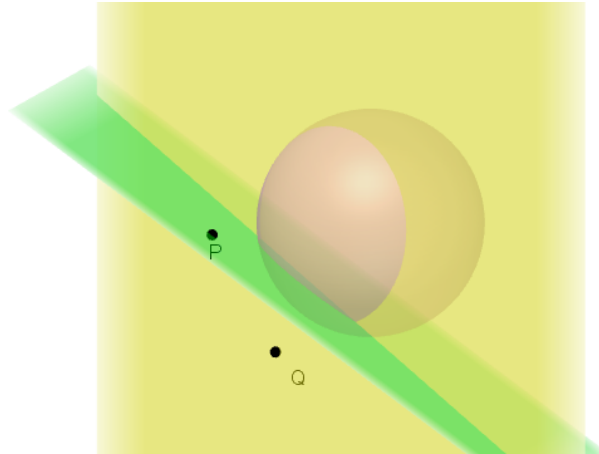


Figura 2.15: Segundo vértice Q

Posteriormente, se considera la recta  $r$ , obtenida como la intersección de los planos  $\alpha_P$  y  $\alpha_Q$ , y se elige un punto  $R$  sobre ella. Se construye el plano polar de  $R$ , denotado por  $\alpha_R$ , el cual, por la propiedad de la polaridad, contiene a los puntos  $P$  y  $Q$ . Finalmente, del Teorema 2.1.6, se deduce que las tres rectas de intersección de los planos  $\alpha_P$ ,  $\alpha_Q$  y  $\alpha_R$  son concurrentes en un punto  $S$ , que constituye el cuarto vértice del tetraedro autopolar.

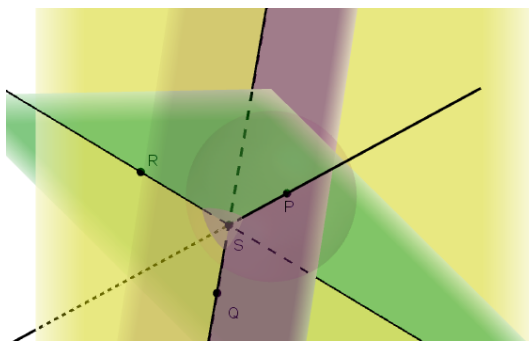


Figura 2.16: 4 vértices del tetraedro autopolar

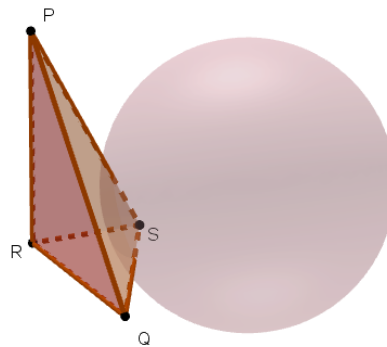


Figura 2.17: Tetraedro autopolar de una superficie de segundo orden C

Tetraedro autopolar respecto a otras superficies

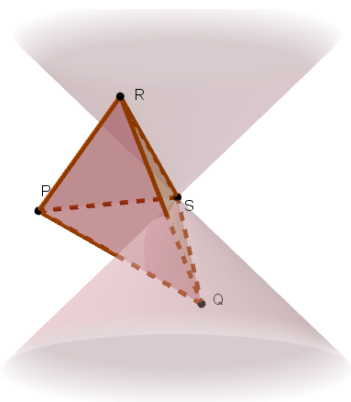


Figura 2.18: T.autopolar a un cono

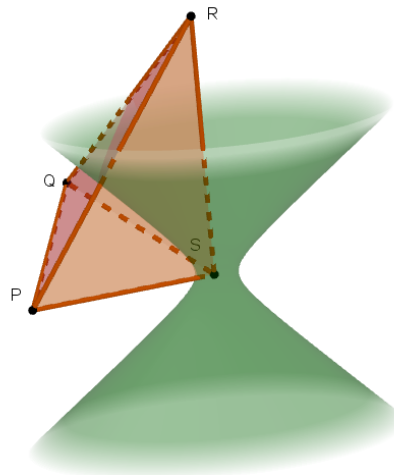


Figura 2.19: T. autopolar a un hiperboloide de una hoja

**Teorema 2.4.3.** *El centro de una superficie de segundo orden es el polo del plano del infinito.<sup>11</sup>*

Si el *tetraedro autopolar* tiene un vértice que coincide con el centro de la superficie, la cara opuesta a ese vértice será un plano en el infinito, que corresponde al plano polar del centro. Las tres aristas concurrentes en el centro serán diámetros conjugados con respecto al plano diametral, el cual está determinado por las otras dos caras del *tetraedro autopolar*.

Cada cara de un *tetraedro autopolar* de una superficie de segundo orden, corta a la superficie en una cónica (real o imaginaria) donde los vértices del *tetraedro autopolar* que yacen en esa cara forman un *triángulo autopolar* de la cónica de corte.

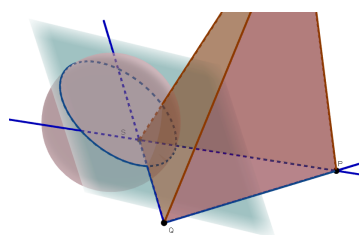


Figura 2.20: Corte A

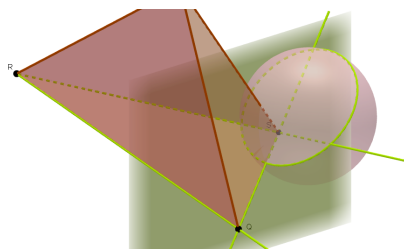


Figura 2.21: Corte B

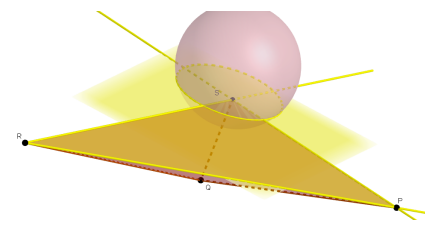


Figura 2.22: Corte C

Observe ahora con un tetraedro autopolar de a un elipsoide

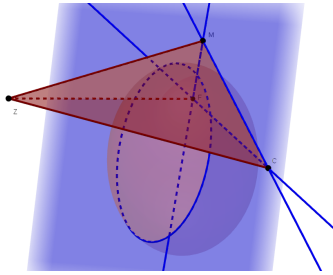


Figura 2.23: Corte A'

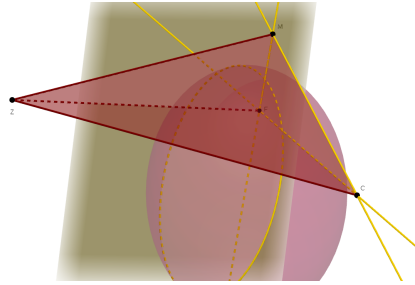


Figura 2.24: Corte B'

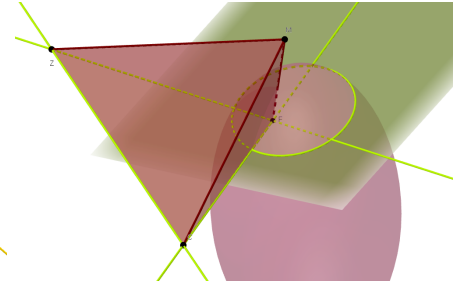


Figura 2.25: Corte C'

Un hecho importante es que al trazar un plano  $I$  que pase por un vértice  $R$  del tetraedro autopolar y que interseque la superficie en una cónica imaginaria, es posible determinar la recta polar  $i$  del vértice  $R$  con respecto a dicha cónica sin necesidad de conocerla explícitamente. Para ello, basta con considerar el plano polar  $\alpha_R$  del vértice  $R$ , dado que la intersección entre el plano  $\alpha_R$  y el plano  $I$  proporciona la recta  $i$ , la cual corresponde a la polar de  $I$  respecto a la cónica imaginaria y esta es una recta real.

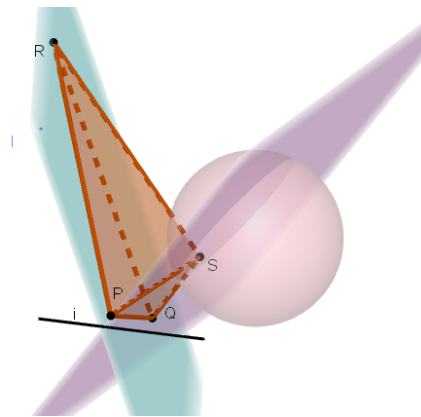


Figura 2.26: Recta polar de  $R$  con respecto a una cónica imaginaria

**Teorema 2.4.4.** *En una superficie de segundo orden que tenga tres ejes de simetría perpendiculares, el plano polar de cualquier punto en el plano que contiene dos de los ejes de simetría, es perpendicular a este último plano.*

*Demostración.* Sea  $S$  una superficie de segundo orden con ejes de simetría  $a$ ,  $b$  y  $c$ ,  $P$  un punto en el plano  $ab$  y  $\pi$  el plano polar de  $P$  respecto a  $S$ . Del Teorema 2.3.1 se sigue que cualquier plano trazado por  $P$  corta a  $S$  en una cónica  $c$  de modo que, la polar  $p$  del punto  $P$  respecto a  $c$  está en  $\pi$ .

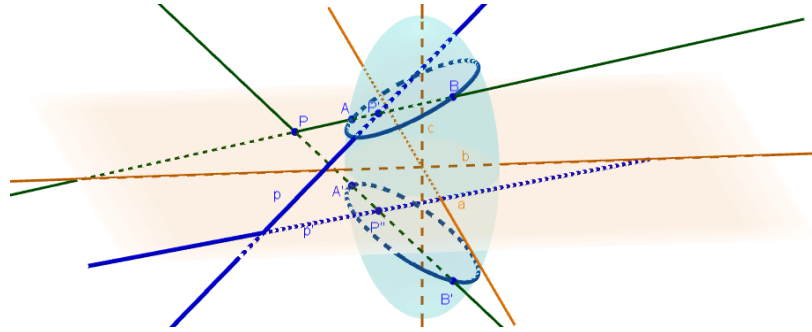


Figura 2.27: Plano polar perpendicular a un plano de simetría de la superficie

Dado que,  $S$  es simétrica respecto al plano  $ab$  y  $P$  se encuentra en él, la recta  $p'$  simétrica de  $p$  es polar de la cónica  $c'$ , que se encuentra también contenida en  $S$ , simétrica de  $c$ . Como las rectas  $p$  y  $p'$  son simétricas respecto al plano  $ab$  y están en el mismo plano  $\pi$ , se deduce que  $\pi$  es perpendicular al plano  $ab$ .

□

### 3. Exploración para la construcción del tetraedro autopolar común con Software de geometría dinámica

El desarrollo teórico y las construcciones realizadas en los capítulos anteriores permiten preguntarse por la existencia de un tetraedro autopolar común a dos superficies de segundo orden. Este capítulo recoge las construcciones obtenidas para algunos casos particulares y exploraciones que, aunque preliminares, permiten plantear conjeturas relevantes.

**Definición 3.0.1.** *Un tetraedro  $ABCD$  se llama tetraedro autopolar común a dos superficies de segundo orden si cada uno de sus vértices es el polo, con respecto a ambas superficies, del plano que pasa por los otros tres vértices. Es decir,  $A$  es el polo del plano  $BCD$ ,  $B$  del plano  $ACD$ ,  $C$  del plano  $ABD$  y  $D$  del plano  $ABC$ , con respecto a ambas superficies.*

#### 3.1. Construcción del tetraedro autopolar común para casos particulares

En esta sección las construcciones que se presentan están relacionadas con superficies que tienen tres ejes de simetría perpendiculares, tales como las esferas, los elipsoides y los hiperboloides de dos hojas, y se abordan casos en los que al menos un par de ejes correspondientes en cada superficie son paralelos.

Todas las construcciones desarrolladas en esta sección siguen el mismo procedimiento general, el cual se describe a continuación:

- a. Se considera un plano que pase por el centro de ambas superficies (plano diametral) que contenga dos ejes de simetría de cada superficie, este se considerará como base para el tetraedro autopolar. La intersección de este plano con cada superficie da lugar a dos cónicas.
- b. A partir de las dos cónicas obtenidas, se construye el triángulo autopolar común a ambas que se denota por  $PQR$  y que se considera la primera cara (base) del tetraedro autopolar común a las dos superficies de segundo orden.
- c. Para la construcción del tetraedro autopolar común, se seleccionan dos vértices del triángulo autopolar, por ejemplo  $P$  y  $Q$  y un plano por estos dos puntos, que corte a ambas superficies en una cónica real.

Del Teorema 2.4.4 se sigue que las polares de cada vértice con respecto a las dos cónicas coinciden, porque se encuentran sobre el mismo plano perpendicular al plano base del tetraedro y en el mismo plano polar del vértice en cuestión. En particular, al hallar la polar de  $P$  respecto a cada cónica, se obtiene una misma recta que está en el plano polar de  $P$ , común respecto a ambas superficies. De esta forma, el plano polar de  $P$  está determinado por la recta obtenida y el lado  $QR$  del triángulo autopolar. Este plano constituye una de las caras del tetraedro autopolar común. Aplicando un procedimiento análogo con los otros dos vértices,  $Q$  y  $R$ , se obtienen las otras dos caras restantes del tetraedro.

- d. Finalmente, se considera la intersección de las tres caras construidas. Esta intersección resulta ser un punto real en el infinito, lo que concuerda con lo establecido en el Teorema 2.4.3. En efecto, si una de las caras del tetraedro autopolar pasa por el centro de las superficies, entonces el polo de dicho plano se encuentra en el infinito.

A continuación, se presentan algunos ejemplos que siguen el procedimiento expuesto.

**Ejemplo 3.1.1.** *Tres vértices del tetraedro autopolar común a dos elipsoides con 1 par de ejes correspondientes paralelos, del Teorema 2.4.3 se tiene que el cuarto vértice es un punto en el infinito.*

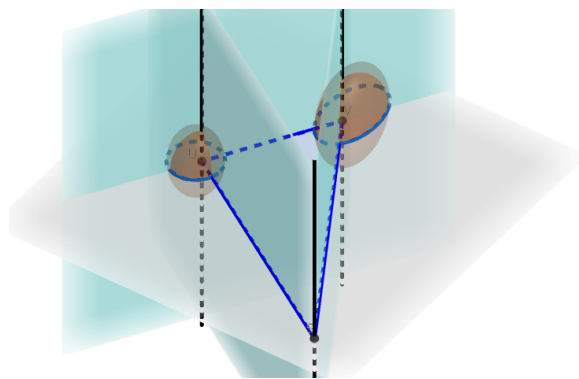


Figura 3.1: Ejemplo 1 (a)

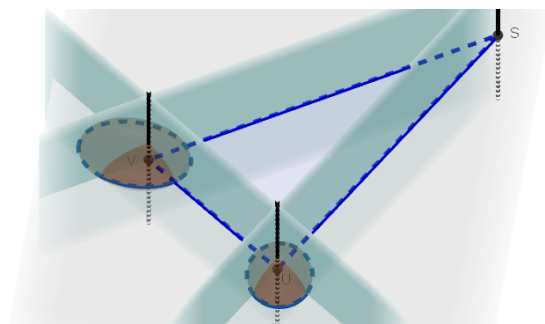


Figura 3.2: Ejemplo 1 (b)

**Ejemplo 3.1.2.** *Dos vértices del tetraedro autopolar común a dos elipsoides disjuntos con un eje coincidente y dos paralelos. Del Teorema 2.4.3 y Teorema 2.2.5, se tiene que el tercer vértice del triángulo autopolar común es un punto real en el infinito y del Teorema 2.4.3 se concluye que es un punto real en el infinito.*

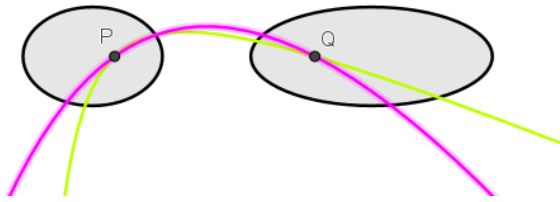


Figura 3.3: Ejemplo 2 (a)

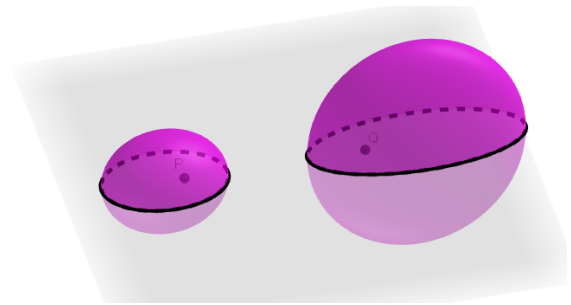


Figura 3.4: Ejemplo 2 (b)

**Ejemplo 3.1.3.** *Tres vértices del tetraedro autopolar común a dos elipsoides disjuntos como se muestra en la siguiente figura, con los 3 ejes paralelos, ninguno de ellos coincidentes. Del Teorema 2.4.3 se concluye que el tercer vértice es un punto real en el infinito.*

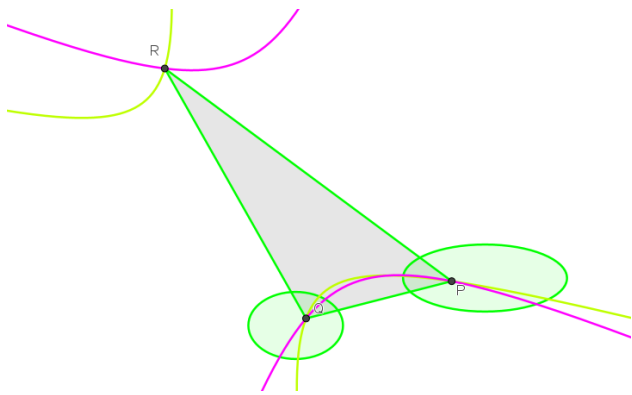


Figura 3.5: Ejemplo 2 (a)

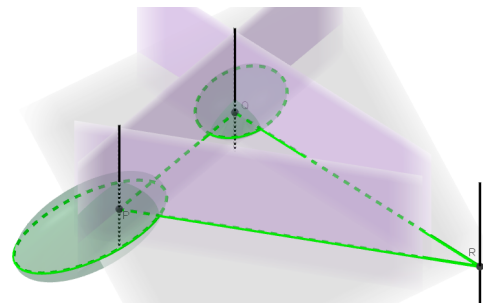


Figura 3.6: Ejemplo 2 (b)

**Ejemplo 3.1.4.** *Si se consideran dos superficies diferentes, por ejemplo, un hiperboloide de dos hojas y una esfera, con la condición de que el plano que se toma como base contiene dos ejes de simetría y es perpendicular al par de ejes que son paralelos también se obtiene un triángulo autopolar común real y por el Teorema 2.4.3 se sabe que, el cuarto vértice del tetraedro es un punto real en el infinito.*

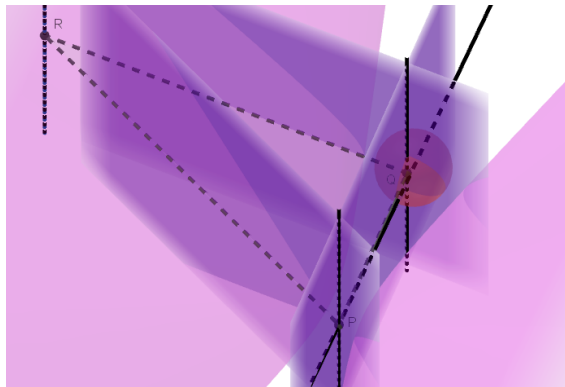


Figura 3.7: Ejemplo 4 (a)

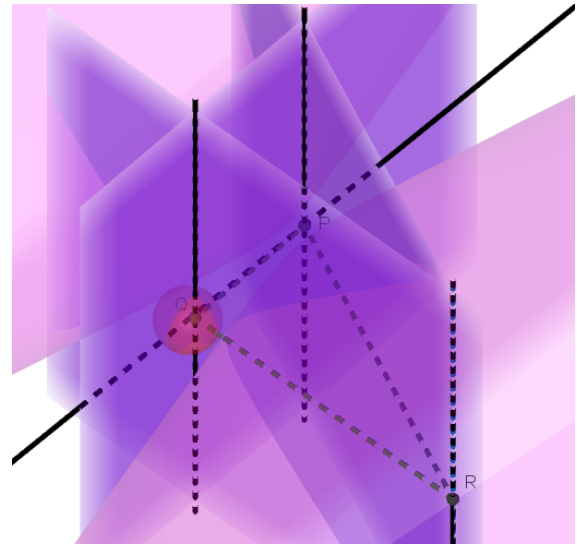


Figura 3.8: Ejemplo 4 (b)

**Ejemplo 3.1.5.** *Este ejemplo corresponde a un caso particular en el que se consideran dos superficies concéntricas, en este caso por el Teorema 2.2.5 se tiene que los otros dos vértices del triángulo autopolar común son reales, y del Teorema 2.2.11 se tiene que esos vértices están en el infinito. Finalmente del Teorema 2.4.3 se concluye que el cuarto vértice del tetraedro autopolar común también está en el infinito.*

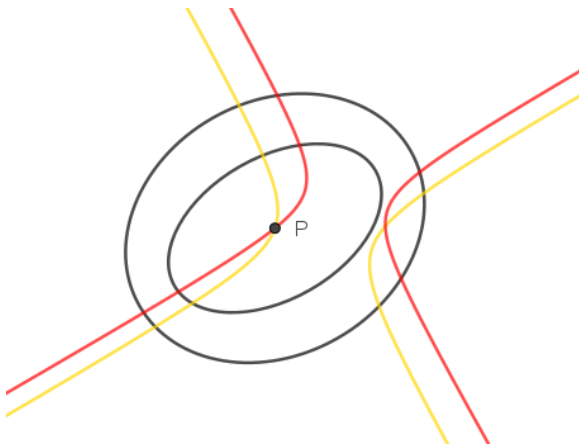


Figura 3.9: Ejemplo 5 (a)

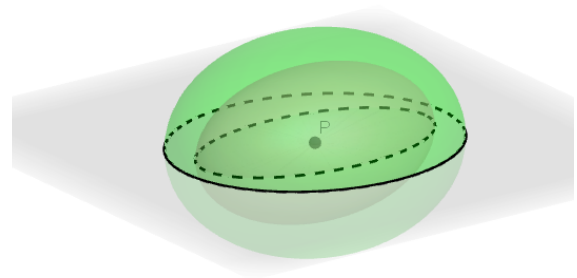


Figura 3.10: Ejemplo 5 (b)

**Ejemplo 3.1.6.** *Dos esferas se cortan a lo largo de dos círculos máximos que a su vez se cortan en dos puntos reales. Del Teorema 1.5.7 y Teorema 2.2.5 se concluye que el triángulo autopolar común de las cónicas resultantes tiene un solo vértice real que además está en el infinito y sus otros dos vértices son imaginarios.*

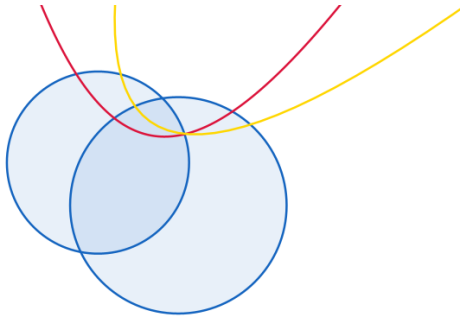


Figura 3.11: Ejemplo 6 (a)

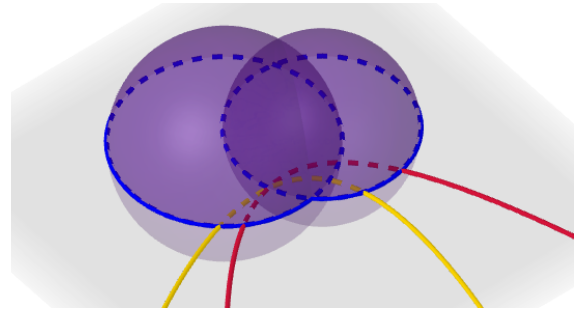


Figura 3.12: Ejemplo 6 (b)

**Ejemplo 3.1.7.** *Una esfera en el interior de otra, pero sin compartir el mismo centro. Por el Teorema 2.2.5 se tiene que el otro vértice del triángulo autopolar común es real, y del Teorema 2.2.11 se tiene que está en el infinito, finalmente del Teorema 2.4.3 se concluye que el cuarto vértice del tetraedro autopolar común también está en el infinito.*

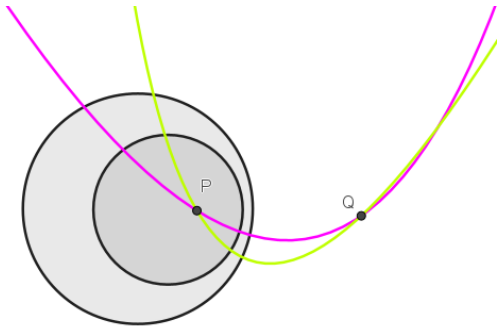


Figura 3.13: Ejemplo 7 (a)

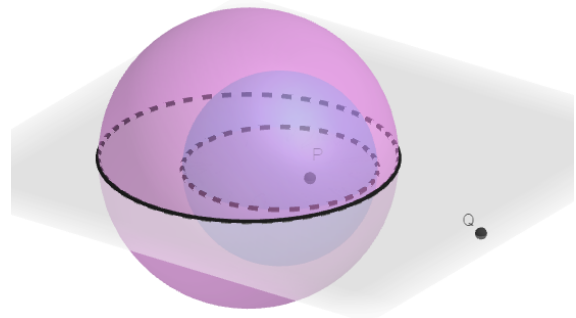


Figura 3.14: Ejemplo 7 (b)

### 3.2. Exploraciones y conjeturas para otros casos

Una de las ventajas que ofrece el software de geometría dinámica es que permite explorar y reproducir las construcciones. En este trabajo, se descartaron experimentalmente algunas hipótesis que fueron surgiendo de manera intuitiva y a la luz de los elementos teóricos presentados. A continuación se presentan algunos ejemplos de estas.

**Ejemplo 3.2.1.** *Una primera hipótesis que se descartó fue si al cortar la superficie con un plano, se obtenían dos cónicas cuyo triángulo autopolar común es el triángulo determinado por el tetraedro autopolar y el plano de corte. A partir de esta idea, se esperaba poder construir las caras del tetraedro. Sin embargo, dicha suposición resultó*

ser incorrecta, ya que al trazar dos planos distintos que corten a ambas superficies, los dos triángulos autopolares de cada par de cónicas de corte, no tienen los lados correspondientes coplanares. Esta idea se ilustra en la siguiente figura, donde los lados correspondientes  $RP$  y  $SU$  no son coplanares.

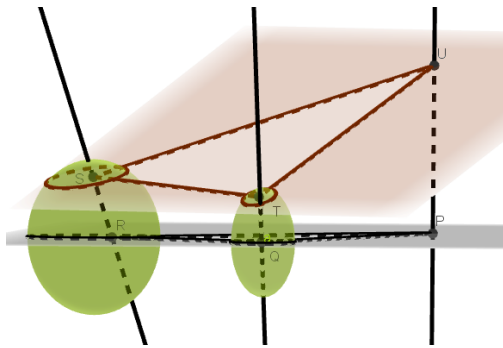


Figura 3.15: Ejemplo 8 (a)

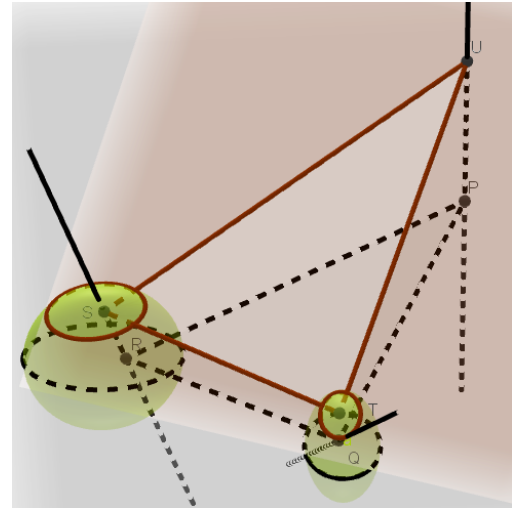


Figura 3.16: Ejemplo 8 (b)

**Ejemplo 3.2.2.** En este caso se consideran dos superficies donde ningún par de ejes correspondientes son paralelos. Aunque el triángulo autopolar común obtenido resulta ser real, sus vértices no tienen planos polares comunes respecto a las dos superficies. Es decir, las rectas polares de cada vértice respecto a las cónicas de corte con otro plano no coinciden, por lo tanto el plano polar del vértice respecto a una superficie, es distinto al plano polar respecto a la otra superficie. En la figura 3.18, las rectas verde y azul son las polares de  $P$  respecto en un plano de corte arbitrario que contiene a la recta  $PQ$ . Estas no son coincidentes.

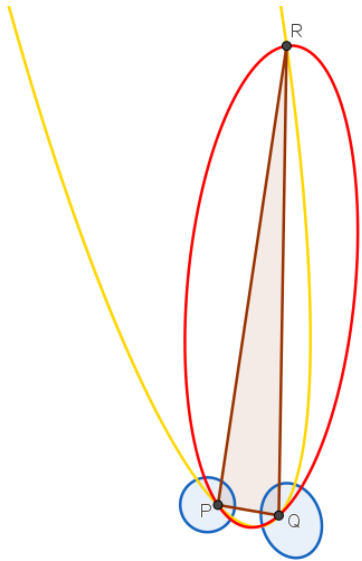


Figura 3.17: Ejemplo 9 (a)

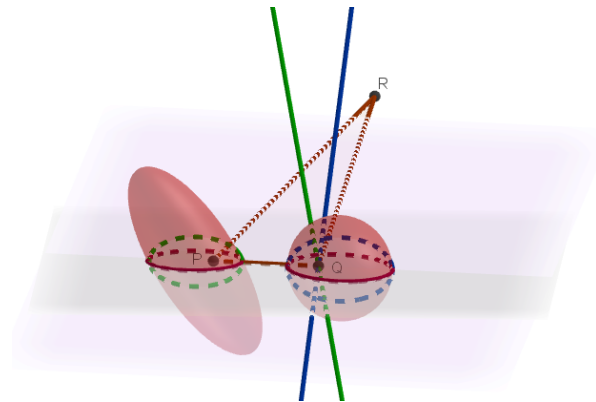


Figura 3.18: Ejemplo 9 (b)

**Ejemplo 3.2.3.** *En este último ejemplo, se consideran dos superficies que tienen al menos un eje paralelo, pero el plano que se consideró de base para el tetraedro, no contiene los otros dos ejes de simetría. Aunque el triángulo autopolar común obtenido resulta ser real, sus vértices no tienen planos polares comunes respecto a las dos superficies, al igual que en el ejemplo anterior.*

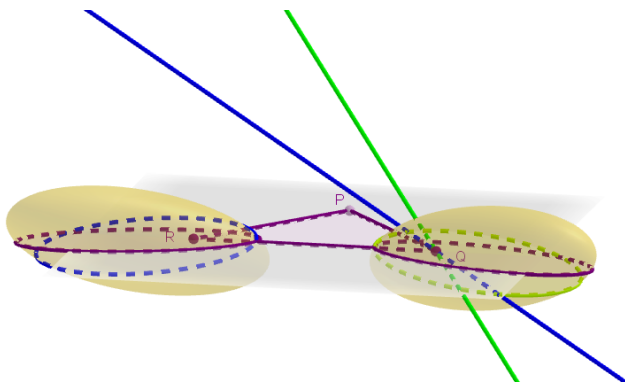


Figura 3.19: Ejemplo 10 (a)

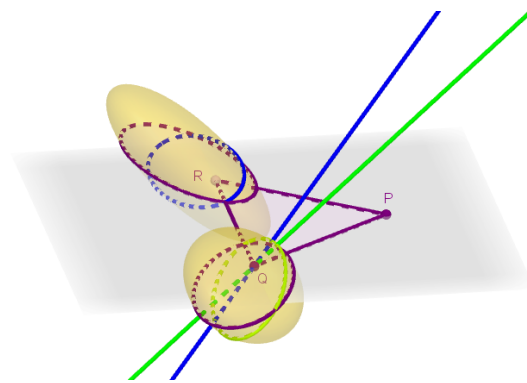


Figura 3.20: Ejemplo 10 (b)

Como conclusión de estos tres últimos ejemplos, resultado de exploraciones hechas en el software de geometría dinámica conjeturamos que: no siempre existe un tetraedro autopolar común a las dos superficies con base en cualquier plano diametral a las dos superficies.

La conjetura anterior suscita las siguientes preguntas que quedan abiertas.

- a. ¿Existe algún plano diametral a las dos superficies que no contenga dos ejes de simetría de cada una, sobre el cual repose la base del tetraedro autopolar?
- b. ¿Existe algún plano que no sea diametral a ambas superficies que contenga la base del tetraedro autopolar?
- c. ¿Bajo qué condiciones, además de las expuestas, se garantiza la existencia de un tetraedro autopolar común a las dos superficies?
- d. ¿Es el tetraedro autopolar común a dos superficies único, en caso de que exista?

## Conclusiones

Este trabajo se centró en la construcción del tetraedro autopolar de una superficie de segundo orden y el estudio de algunas propiedades de este, utilizando como herramientas básicas de construcción las rectas, las cónicas y planos, destacando el uso de los objetos geométricos imaginarios, no perceptibles a simple vista. Para este propósito, se presentaron los elementos teóricos del espacio proyectivo, necesarios para el estudio de la polaridad tanto en el plano como en el espacio, relacionados con las nociones de triángulo autopolar y tetraedro autopolar.

En el contexto teórico presentado, el concepto que permitió la introducción de los objetos imaginarios fue el de involución. Donde los puntos imaginarios emergen como los puntos dobles de una involución elíptica. Como este concepto es netamente proyectivo, la caracterización de las cónicas y las superficies cuádricas a partir de proyectividades, permite establecer relaciones geométricas entre las cónicas y las involuciones y, por lo tanto, con los objetos imaginarios. De esta relación se desprende la noción de polar de un punto respecto a una cónica y respecto a una superficie.

Para la construcción del tetraedro autopolar de una superficie de segundo orden, fue fundamental comprender cómo se extienden las nociones de polaridad en el plano al espacio proyectivo tridimensional. Aunque inicialmente se consideró que dicha construcción requeriría el uso de elementos imaginarios, se comprobó que no era necesario: el tetraedro pudo construirse a partir de elementos reales, gracias a las propiedades de la polaridad en el espacio. Sin embargo, para estudiar algunas de sus propiedades y para construir el tetraedro autopolar común a dos superficies sí que fueron útiles los objetos imaginarios, dado que cuando las cónicas no se cortan en puntos reales, los objetos imaginarios sirven como puente para construir el triángulo autopolar común, gracias a las propiedades proyectivas del cuadrángulo completo y su estrecho vínculo con las involuciones inducidas por la polaridad de un punto respecto a una cónica.

Una de las hipótesis que se empezó a indagar al plantear la pregunta de cómo construir el tetraedro autopolar común a dos superficies de segundo orden fue extender la idea del triángulo autopolar al espacio y considerar que cualquier plano cortaría tanto al tetraedro como a las superficies en dos cónicas y su respectivo triángulo autopolar. Sin embargo, este resultado no se cumple en general, sino únicamente cuando el plano de

corte pasa por tres de los vértices del tetraedro autopolar. Como resultado obtuvimos que el tetraedro autopolar permite determinar la recta polar de cualquiera de sus vértices con respecto a las cónicas imaginarias generadas por planos que contienen al vértice, si dichos planos no intersectan a la superficie en cónicas reales. Este hecho resalta el papel de los elementos imaginarios en la estructura proyectiva, aun cuando el tetraedro mismo esté constituido por elementos reales.

En cuanto al uso del software de geometría dinámica se refiere, esta herramienta constituye un laboratorio donde se pueden explorar algunas conjeturas y ayudar con la elaboración de demostraciones a partir del reconocimiento de propiedades invariantes y de relaciones figurales que en el papel y el lápiz es muy difícil percibir. Este fue el caso de la construcción de los puntos dobles de una involución donde la cónica proyectiva emerge de manera experimental y la figura misma ofrece los elementos para constituir una demostración. También el caso donde se obtienen configuraciones para conjeturar que en ciertos planos no existe base para un *tetraedro autopolar* a las superficies.

Varias cuestiones que aunque no hacen parte de los objetivos trazados, podrían resultar interesantes para otros trabajos es determinar condiciones de existencia y unicidad del *tetraedro autopolar* común a dos superficies más generales que las expuestas en este documento y estudiar la posibilidad de construirlo de manera sintética, prescindiendo de ecuaciones y apelando a las propiedades figurales como ha sido una de las filosofías de este trabajo.

## Bibliografía

- Bustamante, L. S. "Projeções da Esfera". Doctoral dissertation, Tese de Concurso para Professor Catedrático. Escola Nacional de Belas Artes da antiga Universidade do Brasil, 1960 (vid. págs. 44, 47).
- Ceppi, Héctor y Alejo M. Fournier. *Geometría proyectiva*. Buenos Aires: Editorial Guillermo Kraft, 1951.
- Cremona, Luigi. *Elements of Projective Geometry*. 3rd. Oxford: Clarendon Press, 1913 (vid. pág. 35).
- Frank Ayres JH., Ph.D. *Theory and Problems of Projective Geometry*. MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1970 (vid. págs. 14, 16-20, 22, 24, 27, 29, 30, 38).
- Hatton, J. L. S. *The Principles of Projective Geometry Applied to the Straight Line and Conic*. Cambridge: Cambridge University Press, 1913 (vid. pág. 38).
- *The Theory of the Imaginary in Geometry Together with the Trigonometry of the Imaginary*. Cambridge: CUP Archive, 1920 (vid. págs. 28, 29).
- Hernández Galvis, G. A. "Secciones circulares de un cono con base cónica". Tesis de pregrado. Universidad Industrial de Santander, 2021 (vid. págs. 23, 35).
- Milne, John J. *An Elementary Treatise on Cross-Ratio Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 1911 (vid. págs. 24, 35, 36, 42, 43).
- Pickford, A. G. *Elementary Projective Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 1909 (vid. págs. 23, 42).
- Russell, John Wellesley. *An Elementary Treatise on Pure Geometry with Numerous Examples*. Oxford: Clarendon Press, 1905 (vid. págs. 31, 37, 39, 40).
- Torroja, Eduardo. *Tratado de la Geometría de Posición y sus Aplicaciones a la Geometría de la Medida*. Madrid: Establecimiento Tipográfico de G. Juste, 1899 (vid. págs. 28, 33, 37, 44, 45).

Veblen, Oswald y John Wesley Young. *Projective Geometry*. Vol. 1. Boston: Ginn y Company, 1910.

Vilumbrales, L. U. "Geometría proyectiva plana". En: *Un paseo por la Geometría*. Departamento de Matemáticas del País Vasco, 2002, págs. 91-114 (vid. pág. 11).