ESTUDIO DE LAS CONDICIONES DE ACEPTABILIDAD FÍSICA EN ESFERAS POLÍTROPAS ANISÓTROPAS RELATIVISTAS

DANIEL FELIPE SUÁREZ URANGO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2021

ESTUDIO DE LAS CONDICIONES DE ACEPTABILIDAD FÍSICA EN ESFERAS POLÍTROPAS ANISÓTROPAS RELATIVISTAS

DANIEL FELIPE SUÁREZ URANGO

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Física

Director
LUIS ALBERTO NÚÑEZ DE VILLAVICENCIO MARTÍNEZ
Doctor en Ciencias - Física

Codirector
HÉCTOR FROILÁN HERNÁNDEZ GUERRA
Doctor en Física

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2021

AGRADECIMIENTOS

Doy gracias a mis padres, y a mis hermanos. A mi novia. Porque sin ellos no hubiese sido posible.

A Luis, que ha sido más que un profesor. A los profesores Héctor y Justo por las discusiones y lo aprendido. A mis compañeros de estudio, Fabián y David.

A todos los que estuvieron conmigo en estos años, gracias.

PUBLICACIONES DERIVADAS DE ESTE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

- Artículos publicados
  - H. Hernández, D. Suárez-Urango y L. A. Núñez. Acceptability conditions and relativistic barotropic equation of state. The European Physical Jounal C, vol. 81, no.241, 2021.

- Artículos aceptados para su publicación
  - D. Suárez-Urango, L. A. Núñez y H. Hernández. Relativistic anisotropic polytropic spheres: physical acceptability. Preprint arXiv:2102.00496, 2021. Aceptado en Journal of Physics Conference Series. Trabajo presentado (modalidad póster) en el XXII Simposio Chileno de Física.

- Artículos enviados para su publicación
  - D. Suárez-Urango, J. Ospino, H. Hernández y L. A. Núñez. Acceptability conditions and relativistic anisotropic generalized polytropes. Preprint arXiv:2104.08923. 2021.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO DE LAS CONDICIONES DE ACEPTABILIDAD FÍSICA EN ESFERAS POLÍTROPAS ANISÓTROPAS RELATIVISTAS.*

AUTOR: DANIEL FELIPE SUÁREZ URANGO.**

PALABRAS CLAVES: CONDICIONES DE ACEPTABILIDAD FÍSICA, ECUACIÓN DE ESTADO POLÍTROPA, ESFERAS ANISÓTROPAS, RELATIVIDAD GENERAL.

DESCRIPCIÓN:

El análisis de la aparición y propagación de inestabilidades en modelos estelares ha sido tema de investigación por décadas. Solo aquellos modelos estables ante perturbaciones de sus variables termodinámicas pueden representar objetos reales de interés físico. Típicamente, las estrellas son modeladas como esferas hidrostáticas autogravitantes, suponiendo una ecuación de estado (EoS) y/o un perfil de densidad. En este trabajo se estudiaron condiciones de aceptabilidad física para esferas anisótropas estáticas en Relatividad General. El estudio se realizó considerando una EoS polítropa generalizada, $P = \kappa\rho^{1+1/n} + \alpha\rho - \beta$, y dos estrategias para introducir la anisotropía en los modelos.

La primera estrategia emplea un método heurístico que permite obtener configuraciones anisótropas como desviaciones de modelos isótropos. Las ecuaciones de Lane-Emden se integraron numéricamente y se identificó la porción del espacio de parámetros que genera modelos físicamente aceptables. Los modelos polítropos son más estables cuando se considera la densidad de energía y desviaciones pequeñas en la anisotropía.

La segunda estrategia consistió en un algoritmo para generar soluciones exactas a partir de una EoS barótropa y un ansatz para las funciones métricas. Empleando este procedimiento se obtuvieron dos modelos que cumplen con los criterios de aceptabilidad física. Algunos modelos polítropos anisótropos pueden tener velocidad del sonido tangencial singular, para índices polítropos mayores que uno, cuando esta estrategia es utilizada. La EoS polítropa generalizada está libre de esta patología en la velocidad del sonido tangencial.

*Trabajo de Investigación.

**Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Luis Alberto Núñez de Villavicencio Martínez. Codirector: Hector Froilán Hernández Guerra.

ABSTRACT

TITLE: STUDY OF THE PHYSICAL ACCEPTABILITY CONDITIONS IN RELATIVISTIC ANISOTROPIC POLYTROPIC SPHERES.[***]

AUTHOR: DANIEL FELIPE SUÁREZ URANGO.[****]

KEYWORDS: PHYSICAL ACCEPTABILITY CONDITIONS, POLYTROPIC EQUATION OF STATE, ANISOTROPIC SPHERES, GENERAL RELATIVITY.

DESCRIPTION:

The analysis of the appearance and propagation of instabilities in stellar models has been the subject of research for decades. Only those stable models against disturbances of their thermodynamic variables can represent real objects of physical interest. Typically, stars are modeled as self-gravitating hydrostatic spheres, supposing an equation of state (EoS) and/or a density profile.
This work studied the physical acceptability conditions for static anisotropic spheres in General Relativity. The study was carried out considering a generalized polytropic EoS, $P = \kappa\rho^{1+1/n} + \alpha\rho - \beta$, and two strategies to introduce anisotropy in the models.
The first strategy uses a heuristic method that allows obtaining anisotropic configurations as deviations from isotropic models. The Lane-Emden equations were numerically integrated and the portion of the parameter space that generates physically acceptable models was identified. Polytropic models are more stable when considering energy density and small deviations in anisotropy.
The second strategy consisted of an algorithm to generate exact solutions from a barotropic EoS and an ansatz for the metric functions. Using this procedure, two models were obtained that fulfill the physical acceptability criteria. Some anisotropic models may have singular tangential sound velocity, for polytropic indices greater than one, when this strategy is used. Generalized polytropic EoS is free from this pathology at the tangential speed of sound.

[***] Research Work.

[****] Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Advisor: Luis Alberto Núñez de Villavicencio Martínez. Co-advisor: Héctor Froilán Hernández Guerra.

INTRODUCCIÓN

Gracias a Albert Einstein hoy aceptamos la gravedad como la manifestación de la curvatura del espacio-tiempo a causa de la materia y la energía. Esta nueva visión permitió entender y teorizar fenómenos más allá de lo imaginable para ese entonces. Cuando de objetos compactos se trata, la relatividad -especial y general- juega un papel muy importante en determinar su estructura debido a los grandes potenciales gravitacionales presentes [55].
Un claro ejemplo de estos objetos son las estrellas de neutrones, conocidas también como remanentes, por ser el punto final de la evolución de cuerpos estelares masivos (mayores a 8 masas solares). Una vez que la estrella acaba su combustible nuclear, contrarresta el colapso gravitacional con la presión de degeneración de neutrones causa del principio de exclusión de Pauli.
Típicamente, una estrella de neutrones tiene un radio aproximado de 10 kilómetros y una masa total de 1.5 veces la masa del Sol. Además, posee un rango amplio de densidades en la materia que la compone: desde $\sim 10^{15}\, g/cm^3$ en el centro, hasta $\sim 10^{10}\, g/cm^3$ en las capas más superficiales. Lo anterior, aunado a la complejidad de las fuertes interacciones a altas densidades, los cambios de fase en su composición y los grandes campos magnéticos a los que está sometida, sugiere que las propiedades físicas del fluido que la constituye varíen según la dirección en que se midan [53, 35, 43]. Particularmente, en [31] se muestra que la aparición de cizallamiento en el flujo de fluido, los flujos disipativos y/o la inhomogeneidad de la densidad de energía generan anisotropía en la presión.
El modelado físico-matemático de estos objetos comienza al emplear las ecuaciones de campo de Einstein para una métrica y un tensor de energía-impulso conocido. Esto resulta en ecuaciones que describen el comportamiento de las variables físicas en función de las variables geométricas dentro de la estrella. Por lo tanto, la densidad y las presiones pueden encontrarse a partir de funciones métricas conocidas, y viceversa. De esta manera, suponer una ecuación de estado (EoS por sus siglas en inglés), que describa los procesos físicos más importantes entre sus variables termodinámicas, es una de las estrategias más utilizadas para modelar objetos compactos. Sin embargo, esto representa un reto para la ciencia pues en la Tierra no existe materia tan densa como la que se encuentra en una estrella de neutrones.
Lo anterior conlleva al desarrollo de EoS teóricas, basadas en extrapolaciones de la teoría nuclear e interacciones entre partículas que conocemos, para describir configuraciones materiales ultradensas [49]. No obstante, EoS para materia den-

sa son una aproximación importante para entender las características del interior estelar. Por ejemplo, la EoS polítropa $P = \kappa\hat{\rho}^{1+1/n}$ (donde $\hat{\rho}$ es densidad de masa) es uno de los modelos más extendidos en astrofísica para describir estrellas newtonianas [14, 1, 41, 33] y relativistas [48, 6, 32]. Es particularmente interesante pues permite modelar distintos escenarios astrofísicos con solo variar el índice polítropo n. El estudio de esferas polítropas relativistas inició con el trabajo de R. F. Tooper [60] al reemplazar $\hat{\rho}$ por densidad de energía (ρ) en la EoS polítropa newtoniana.

El análisis de las EoS bajo perturbaciones de sus variables físicas permite diferenciar entre modelos estables e inestables, dándonos pistas sobre qué modelos son físicamente aceptables y por lo tanto podrían describir objetos reales. En consecuencia, comenzaron a formarse criterios de estabilidad a medida que surgieron más y más soluciones matemáticas a las ecuaciones de campo de Einstein. El trabajo de M. Delgaty y K. Lake [17] fue pionero en considerar condiciones de aceptabilidad física para descartar modelos estelares. Posteriormente B. V. Ivanov [37] complementó estas condiciones y las extendió a configuraciones anisótropas.

En Relatividad General las inestabilidades en objetos compactos han sido consideradas bajo dos enfoques complementarios. El primero de estos se inició con las obras de S. Chandrasekhar [12, 13], R. F. Tooper [62, 61] y J. M. Bardeen [4] al tener en cuenta la propagación de perturbaciones dinámicas a través de toda la configuración material. Más tarde este formalismo variacional sería generalizado a objetos anisótropos [18] con el fin de investigar su estabilidad. El segundo enfoque implica el principio de Arquímedes que obliga a la presión y a la densidad de energía a disminuir de adentro hacia fuera, identificando inestabilidades convectivas locales dentro de la distribución material [7, 57, 40].

Por otra parte, L. Herrera y colaboradores [30, 19, 20] analizaron la aceleración de marea generada por una perturbación en elementos de fluidos contiguos. Mostraron que es posible identificar una distribución de la fuerza radial total que cambia de signo dentro de la configuración material. El enfoque de fracturas describe el comportamiento de la distribución de materia ante inestabilidades, justo después que la configuración se aleja del equilibrio. Últimamente este formalismo ha sido extendido para tener en cuenta la reacción del gradiente de presión ante perturbaciones locales de la densidad [24, 25]. Particularmente M. Sharif y S. Sadiq [56] realizaron este análisis a un par de modelos con EoS polítropa ($n =$ 1.0 y $n =$ 2.0), concluyendo que el primero es potencialmente inestable.

Recientemente se desarrolló un criterio de estabilidad basado en el principio de flotabilidad [7, 57, 40, 28]. El modelo será inestable si la densidad de un elemento de fluido desplazado hacia el centro de la esfera es mayor que la densidad del fluido que le rodea. En el caso contrario, el elemento desplazado retornará a su posición inicial y la esfera será estable frente a perturbaciones convectivas. Otros criterios de estabilidad consisten en el cumplimiento de las condiciones de energía [27, 10], análisis de curvas masa-densidad central [26, 63] y condición de causalidad [27].

En este trabajo se estudia la estabilidad en esferas anisótropas relativistas a través del cumplimiento de 9 condiciones de aceptabilidad física. Desde el enfoque de soluciones numéricas, tres diferentes tipos de EoS polítropa son utilizadas para describir la física de la materia en objetos compactos. La primera EoS, $P = \kappa\hat{\rho}^{1+1/n}$, es una ley de potencia entre la presión radial y la densidad de masa. En la segunda, la relación se da entre la presión radial y la densidad de energía, $P = \kappa\rho^{1+1/n}$. En la última, se considerada una ecuación de estado que consiste en la suma de una polítropa más un término lineal y una constante: $P = \kappa\rho^{1+1/n} + \alpha\rho - \beta$. La anisotropía de la presión consiste en un procedimiento heurístico que permite obtener modelos como desviaciones de modelos isótropos [15]. El resultado será un espacio de parámetros en función del número de condiciones cumplidas para cada modelo.

Desde el enfoque de soluciones analíticas, se precisará un algoritmo para generar soluciones anisótropas exactas a partir de una EoS barótropa -que solo depende de ρ- y un ansatz para la función métrica $\lambda(r)$. Utilizando este procedimiento, con la EoS polítropa maestra, se obtendrán modelos analíticos que cumplan con condiciones de aceptabilidad física.

Este documento se encuentra organizado de la siguiente manera: en el primer capítulo se exponen las ecuaciones de campo de Einstein que modelan la estructura de los objetos compactos estudiados. Posteriormente, en el capítulo 2, se presentan 3 EoS utilizadas para describir la relación entre las variables termodinámicas del sistema. Luego, en el siguiente capítulo, se dan a conocer las 9 condiciones de aceptabilidad física que deben cumplir los modelos obtenidos para representar objetos realistas. En el cuarto capítulo se detallará la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales que modela a las estrellas; así como también las soluciones analíticas para una EoS polítropa maestra y dos funciones métricas $\lambda(r)$ conocidas. Por último, en el capítulo 5 y 6 se presentan los resultados y conclusiones obtenidas, respectivamente.

CAPÍTULO 1

MODELADO DE ESFERAS ANISÓTROPAS

1.1 ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN PARA ESFERAS ANISÓTROPAS HIDROSTÁTICAS

Las estrellas de neutrones se modelarán como distribuciones de materia autogravitantes, esféricamente simétricas, y en equilibrio hidrostático. A lo largo de este trabajo se utilizarán unidades geometrizadas tales que $c = G = 1$, siendo c la velocidad de la luz y G la constante gravitacional de Newton.

Las ecuaciones que detallan la estructura de la estrella hipersimplificada se obtienen a través de las ecuaciones de campo de Einstein, dadas por

$$R^{\nu}_{\ \mu} - \frac{1}{2} g^{\nu}_{\ \mu} R = -8\pi T^{\nu}_{\ \mu}. \tag{1.1}$$

Este conjunto de ecuaciones relacionan la medida de la curvatura -por medio del tensor de Ricci ($R^{\nu}_{\ \mu}$) y el escalar de curvatura (R)- con el tensor de energía-momento ($T^{\nu}_{\ \mu}$). Como dijo J. A. Wheeler: «La materia le dice al espacio cómo curvarse; el espacio le dice a la materia cómo moverse».

El elemento de línea, en coordenadas tipo Schwarzschild (t, r, θ, ϕ), que describe al espacio-tiempo en el interior de una estrella estática ultradensa puede escribirse como

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2\nu(r)}\mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^{2\lambda(r)}\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right), \tag{1.2}$$

donde todas las funciones dependen únicamente de la coordenada radial.

Por otra parte, el tensor de energía-momento que representa a un fluido no pascaliano, compatible con simetría esférica, es

$$T^{\nu}_{\ \mu} = \mathrm{diag}(\rho, -P, -P_{\perp}, -P_{\perp}), \tag{1.3}$$

donde ρ es densidad de energía, P presión radial y $P_{\perp}$ presión tangencial. De esta manera, las ecuaciones de campo de Einstein para esta geometría y distribución de materia son [8]

$$\rho(r) = \frac{\text{e}^{-2\lambda}\left(2r\lambda' - 1\right) + 1}{8\pi r^2}, \tag{1.4}$$

$$P(r) = \frac{\text{e}^{-2\,\lambda}\left(2r\,\nu' + 1\right) - 1}{8\pi\,r^2} \qquad \text{y} \tag{1.5}$$

$$P_{\perp}(r) = -\frac{\text{e}^{-2\lambda}}{8\pi}\left[\frac{\lambda' - \nu'}{r} - \nu'' + \nu'\lambda' - (\nu')^2\right], \tag{1.6}$$

donde la prima denota derivación respecto a la coordenada radial r.

1.2 ECUACIONES DE ESTRUCTURA RELATIVISTAS

Las ecuaciones de campo de Einstein contienen toda la información requerida para describir la interacción entre la gravedad y la materia. Sin embargo, este sistema puede ser escrito de forma más sencilla para su integración y para que la relación entre sus variables físicas sea más evidente.
Definiendo la masa encerrada en una esfera de radio r [46] tal que

$$m(t,r) = \frac{r^2}{2}R^3_{232} \;\Leftrightarrow\; m(t,r) = 4\pi\int_0^r T^0_0 r^2 \text{d}r, \tag{1.7}$$

podemos reescribir la ecuación (1.4) como $\left(r\text{e}^{-2\lambda}\right)' = 1 - 8\pi\rho r^2$ para integrarla y obtener

$$\text{e}^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r}. \tag{1.8}$$

Luego, utilizando (1.8) en (1.5) se tiene

$$\nu' = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r-2m)}. \tag{1.9}$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio hidrostático se obtiene introduciendo la derivada respecto a r de (1.5) en (1.6), quedando

$$P' = -\left(\rho + P\right)\nu' + \frac{2}{r}\left(P_{\perp} - P\right). \tag{1.10}$$

Esta ecuación, para configuraciones con presión isótropa ($P = P_{\perp}$), es conocida como ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff [8]. En ella se puede apreciar cómo la compresión debido a la gravedad es balanceada por la fuerza de gradiente de presión. El segundo término del lado derecho es consecuencia de la naturaleza anisotrópa del fluido, y la dirección de esta fuerza dependerá del signo de Δ ($= P_{\perp} - P$). La ecuación (1.10) también puede obtenerse al derivar covariante-

mente las componentes del tensor energía-momento dando como resultado las ecuaciones de conservación.
Comúnmente (1.7) es escrita en forma diferencial como

$$m' = 4\pi r^2 \rho. \tag{1.11}$$

De modo que (1.10) y (1.11) forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales -con cuatro incógnitas- conocidas como ecuaciones de estructura relativistas. Por consiguiente, es necesario suponer dos EoS que relacionen las variables de estado entre sí para dar única solución al sistema. De esta manera, el modelado se reduce a integrar (1.10) y (1.11) con condiciones de frontera apropiadas.

1.3 CONDICIONES DE FRONTERA Y SOLUCIÓN EXTERIOR

La integración numérica de (1.10) y (1.11) se realiza considerando P_c y ρ_c como condiciones iniciales del sistema, donde el subíndice c indica que la variable es evaluada en el centro de la esfera. En el caso de EoS barótropas ($P = P(\rho)$), la presión en el centro queda determinada únicamente por la densidad de energía central. Además, se tiene que $m(r = 0) = 0$ dado que es la masa encerrada por una esfera de radio nulo.
Se requiere que el sistema y su solución sean regular en toda la esfera, por lo tanto P' y m' deben estar libres de singularidades en $r = 0$. Siendo P_c un valor finito, de (1.9) se observa que $\nu'_c = 0$. Además, en configuraciones con simetría esférica se tiene que $P(r = 0) = P_\perp(r = 0) = P_c$, por tanto $\Delta_c = 0$. Entonces, P'_c en (1.10) será finito siempre y cuando $\Delta \to 0$, al menos tan rápido como r^2, cuando $r \to 0$. Por otra parte, de (1.11) es inmediato observar que $m'_c = 0$.
La condición $P(r = r_b) = P_b = 0$ determina el radio total de la esfera, donde el subíndice b indica que la variable es evaluada en el borde de la configuración. De aquí que la masa total del modelo sea $M = m(r_b)$.
Por último, la geometría del espacio-tiempo fuera de la distribución material es descrita por la métrica de Schwarzschild exterior[21] definida como

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right). \tag{1.12}$$

Entonces, es necesario acoplar las soluciones -exterior e interior- con el fin de evitar discontinuidades en la superficie del modelo. Para esto, se debe cumplir con la continuidad de la primera y segunda forma fundamental, dando como resultado

$$\mathrm{e}^{2\nu_b} = 1 - \frac{2M}{r_b}\,, \tag{1.13}$$

$$\mathrm{e}^{-2\lambda_b} = 1 - \frac{2M}{r_b} \qquad \text{y} \tag{1.14}$$

$$P(r_b) = 0\,. \tag{1.15}$$

CAPÍTULO 2

ECUACIÓN DE ESTADO POLÍTROPA

Las EoS polítropas tienen una venerable tradición en astrofísica, su simplicidad permite tener una visión aproximada de la estructura estelar sin las complicaciones inherentes de una EoS realista. En el contexto de la gravedad newtoniana, la teoría de las polítropas consiste en una relación como una ley de potencia,

$$P = \kappa \hat{\rho}^{1+1/n}\,, \tag{2.1}$$

entre la presión y la densidad ($\hat{\rho}$), donde κ y n son usualmente llamadas constante polítropa e índice polítropo, respectivamente. Este tipo de ecuación resulta ser muy versátil pues permite modelar distintos escenarios astrofísicos solamente con variar n [60]. Por ejemplo, para $n = 3$ tenemos la EoS que modela a un gas completamente degenerado en el límite relativista (enana blanca) [2], mientras que $n = 0$ corresponde a un fluido incompresible [48].
Bajo el contexto de la Relatividad General surgen dos posibilidades a considerar para la EoS polítropa. En el primer caso se mantiene (2.1), la EoS relaciona la presión con la densidad de masa bariónica ($\hat{\rho}$). El segundo caso es una generalización de (2.1) al sustituir $\hat{\rho}$ por la densidad de energía total (ρ),

$$P = \kappa \rho^{1+1/n}\,. \tag{2.2}$$

Esta ambigüedad se da gracias a la equivalencia entre masa y energía. Claramente, ambas EoS polítropas relativistas conducen a (2.1) en el límite newtoniano.
En general, para sistemas relativistas, la densidad de masa bariónica (o de masa en reposo) está relacionada con la densidad de energía relativista por medio de

$$\rho = \hat{\rho} + \rho_{int}\,, \tag{2.3}$$

donde ρ_{int} es la densidad de energía interna. Esta última surge de la energía del movimiento cinético, interacciones de partículas (distintas de la gravitacional), fuerzas externas, radiación, etc. [36].
Herrera y Barreto establecen en detalle el formalismo general para modelar esferas polítropas anisótropas en el marco newtoniano [33] y relativista [32]. A continuación se da un breve resumen del caso relativista para las dos posibilidades

mencionadas anteriormente.

2.1 ECUACIÓN DE ESTADO POLÍTROPA I

En este caso se mantiene la EoS polítropa (2.1). La primera y segunda ley de la termodinámica pueden ser escritas como

$$\mathrm{d}\left(\frac{\rho+P}{\mathcal{N}}\right)-\frac{\mathrm{d}P}{\mathcal{N}}=T\mathrm{d}\left(\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{N}}\right)\ ,$$

donde T es la temperatura, $\mathcal{S}$ la entropía por unidad de volumen propio y $\mathcal{N}$ la densidad de partículas tal que $\hat{\rho}=\mathcal{N}m_0$. Entonces, para un proceso adiabático se tiene que

$$\mathrm{d}\left(\frac{\rho+P}{\mathcal{N}}\right)-\frac{\mathrm{d}P}{\mathcal{N}}=0\ \Rightarrow\ \mathrm{d}\left(\frac{\rho}{\mathcal{N}}\right)+P\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathcal{N}}\right)=0\ . \tag{2.4}$$

Utilizando (2.1) y sabiendo que $\mathcal{N}=\hat{\rho}/m_0$, se tiene

$$\kappa\hat{\rho}^{\gamma-2}=\frac{\mathrm{d}\left(\rho/\hat{\rho}\right)}{\mathrm{d}\hat{\rho}}\,,$$

donde $\gamma=1+1/n$ se conoce como exponente polítropo. Ahora, considerando $\gamma\neq 1$, se integra la última ecuación dando como resultado

$$\rho=C_1\hat{\rho}+\frac{P}{\gamma-1}\,,$$

siendo C_1 una constante de integración igual a 1 pues en el límite no relativista $\rho\to\hat{\rho}$. De lo anterior se tiene una relación entre P y ρ dada por

$$\rho=\hat{\rho}+\frac{P}{\gamma-1}=\hat{\rho}+nP\,. \tag{2.5}$$

2.2 ECUACIÓN DE ESTADO POLÍTROPA II

Como se mencionó anteriormente, otra posibilidad consiste en suponer que la relación polítropa está definida por (2.2). Utilizando esta en (2.4) se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\hat{\rho}}=\frac{\kappa\rho^{\gamma}+\rho}{\hat{\rho}}\,, \tag{2.6}$$

quedando

$$\int\frac{\mathrm{d}\rho}{\kappa\rho^{\gamma}+\rho}=\ln\left(\frac{\hat{\rho}}{C_2}\right)\qquad \text{para}\quad \gamma\neq 1\,. \tag{2.7}$$

Entonces, para este caso, la relación entre las densidades está dada por

$$\rho = \frac{\hat{\rho}}{\left(1 - \kappa \hat{\rho}^{1/n}\right)^n} \,, \tag{2.8}$$

donde nuevamente C_2 es una constante de integración igual a 1. En el límite no relativista, donde $n\kappa\hat{\rho}^{1/n} \ll 1$, esta última igualdad tiende a (2.5).

2.3 ECUACIÓN DE ESTADO POLÍTROPA MAESTRA

Ahora, se propone una tercera EoS dada por

$$P = \kappa \rho^{1+\frac{1}{n}} + \alpha\rho - \beta \,, \tag{2.9}$$

donde α y β son constantes. La ecuación de estado polítropa maestra (2.9) ha sido implementada recientemente [29, 47] con el fin de evitar singularidades en la velocidad del sonido tangencial de configuraciones anisótropas. Esta patología se presenta cuando se utiliza la estrategia de dar una EoS polítropa y una función métrica con el fin de encontrar soluciones analíticas a las ecuaciones de campo de Einstein. Formalmente se despeja $P_\perp$ de la ecuación de equilibrio hidrostático (1.10), obteniendo

$$P_\perp = \frac{r}{2}\left[P' + (\rho + P)\,\frac{m + 4\pi r^3 P}{r\,(r - 2m)}\right] + P \,. \tag{2.10}$$

Utilizando (1.8) y suponiendo (2.2), esta última ecuación es escrita como

$$P_\perp = \frac{r}{2}\left[\frac{\kappa(n+1)}{n}\rho^{1/n}\right]\rho' + \frac{\mathrm{e}^{2\lambda}}{4}\,(\rho + P)\left(8\pi r^2 P - \mathrm{e}^{-2\lambda} + 1\right) + P \,. \tag{2.11}$$

Por lo tanto, la velocidad del sonido tangencial es

$$\begin{aligned} v_{s_\perp}^2 &= \frac{\mathrm{d}P_\perp}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\mathrm{d}P_\perp}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\rho} \\ &= \frac{v_s^2}{2}\left(3 + r\frac{\rho''}{\rho'}\right) + \frac{1}{\rho'}\left[\frac{\mathrm{e}^{2\lambda}}{4}\,(\rho + P)\left(8\pi r^2 P - \mathrm{e}^{-2\lambda} + 1\right)\right]' + \frac{r}{2}\left(v_s^2\right)' \,, \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde

$$\left(v_s^2\right)' = \frac{\kappa(n+1)}{n^2}\rho^{\frac{1}{n}-1}\rho' \,.$$

Es evidente, en el último término del lado derecho en (2.12), que la velocidad del sonido tangencial será infinita en el borde para $n > 1$ si $\rho_b = 0$.

Lo anterior motivó a extender la EoS polítropa estándar a (2.9). Así, cuando $P = 0$ (borde de la estrella) se tiene que

$$\beta = \kappa \rho_b^{1+\frac{1}{n}} + \alpha \rho_b \,, \tag{2.13}$$

y por lo tanto la densidad es distinta de cero en la superficie, permitiendo modelar configuraciones materiales donde la densidad es discontinua en la frontera.
De la ecuación (2.9) se observa directamente que cuando $\alpha = \beta = 0$ la EoS (2.2) es recuperada. Otro caso especial se da cuando $n = 1$, lo cual corresponde a una ecuación de estado cuadrática de la forma $P = \kappa\rho^2 + \alpha\rho - \beta$ utilizada para describir posibles objetos compactos anisótropos cargados [22]. Por último, cuando $\beta = 0$, se tiene $P = \kappa\rho^{1+\frac{1}{n}} + \alpha\rho$. Esta relación, más conocida como ecuación de estado generalizada, ha sido utilizada para encontrar modelos matemáticos de objetos compactos incorporando el factor de radiación [44].

CAPÍTULO 3

CONDICIONES DE ACEPTABILIDAD FÍSICA

Desde la primera solución a las ecuaciones de campo de Einstein [54], las estrategias para encontrar soluciones -analíticas o numéricas- que modelen objetos compactos han sido numerosas. Sin embargo, estas soluciones dejan de ser relevantes si no son físicamente aceptables. Un claro ejemplo se presenta en [17], donde se evalúa la aceptabilidad física de 127 soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein a través de su regularidad en el origen, densidad y presión positivas, presión nula en un radio finito, gradiente de densidad y gradiente de presión menores que cero, y velocidad del sonido menor que la velocidad de la luz. De todas las posibles soluciones, que podrían describir configuraciones materiales relativistas, solo 16 satisfacen todas las condiciones. De estas 16, solo 9 tienen una velocidad del sonido que decrece monótonamente con el aumento del radio. Por lo tanto, es claro que no basta elegir EoS que cierren el sistema de ecuaciones de estructura con el fin de encontrar una solución matemática al problema.

Por consiguiente, los objetos modelados deben cumplir con condiciones de aceptabilidad para que sean de interés físico. Estas condiciones han sido identificadas a través de los años y compiladas en [37]. En este trabajo las 10 condiciones originales han sido reducidas a 8 (ver apéndice A), y se ha añadido el criterio de estabilidad convectiva [28] para un total de 9 condiciones de aceptabilidad física. Estas son:

Primera condición (C1)

Consiste en que la compacidad ($\mu = 2m/r$) siempre debe ser menor que 1 con el fin de evitar singularidades dentro de la estrella, lo cual asegura:

a) Potenciales métricos positivos, finitos y libres de singularidades en el interior de la esfera. En el centro deben satisfacer $\mathrm{e}^{-\lambda(0)} = 1$ y $\mathrm{e}^{\nu(0)} = constante$.

b) Condición de acoplamiento: en la superficie de la esfera $r = r_b$ la solución interior debe coincidir de forma continua con la solución exterior de Schwarzschild

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right),$$

lo cual determina la métrica en la superficie como

$$\mathrm{e}^{\nu(R)} = \mathrm{e}^{-\lambda(R)} = 1 - \frac{2M}{r_b}.$$

c) Disminución del corrimiento al rojo interior (Z) al aumentar r [38, 9], ya que este depende solamente de ν:

$$Z(r) = \mathrm{e}^{-\nu/2} - 1.$$

En la superficie, el corrimiento al rojo y la compacidad (μ) están relacionados por

$$Z(r_b) = (1 - \mu(r_b))^{-1/2} - 1\,, \quad \text{siendo} \quad \mu(r_b) = 2m(r_b)/r_b = \mu_b\,.$$

Segunda condición (C2)

Las densidades y las presiones no deben ser negativas dentro de la esfera. Para ρ esto coincide con la condición de energía nula (NEC). En el centro deben ser finitas $\rho(0) = \rho_c$, $P(0) = P_c$ y $P_\perp(0) = P_{\perp_c}$. Además, $P(0) = P_\perp(0)$ [9]. Consistente con modelos estelares en equilibrio.

Tercera condición (C3)

El máximo de la densidad y las presiones se encuentra en el centro, tal que $\rho'(0) = P'(0) = P'_\perp(0) = 0$, y decrecen monótonamente hacia fuera de la esfera, por lo tanto $\rho' \leq 0$, $P' \leq 0$, $P'_\perp \leq 0$. Consistente con modelos estelares en equilibrio.

Cuarta condición (C4)

Condiciones de energía [39, 50]. La solución debe satisfacer la condición de energía dominante (DEC) $\rho \geq P$, y $\rho \geq P_\perp$. Es deseable que incluso la condición sobre la traza del tensor energía-momento (TEC), $\rho \geq P + 2P_\perp$, se satisfaga. Por lo tanto, si se cumple esta última se cumplirá DEC.
La Relatividad General propone una forma de describir la manera en la que la materia afecta la curvatura del espacio-tiempo. Esta teoría de la gravedad, por sí misma, no nos proporciona información sobre las características que debe tener una configuración material con el fin de modelar objetos reales. Por lo tanto, se puede considerar imponer suposiciones sobre el tensor de energía-momento para describir una distribución de materia real. Las restricciones sobre el tensor de energía-momento, que se deben mantener para describir una configuración

material razonable, son conocidas como condiciones de energía. Entonces, para una distribución material descrita por el tensor de energía-momento T_{ab} y un observador con cuadrivelocidad v^a se tiene:

- Condición de energía débil (WEC): esta condición supone que la densidad de energía de materia, medida por un observador con cuadrivelocidad v^a, nunca es negativa. Lo anterior se resume en $T^a_b v_a v^b \geq 0$, para cualquier vector tipo tiempo v^a.

- condición sobre la traza (SEC): la gravedad siempre es atractiva en Relatividad General. Esto puede escribirse como la condición $T^a_b v_a v^b \geq -\frac{1}{2}T$, para cualquier vector tipo tiempo v^a.

- Condición de energía dominante (DEC): esta condición impone que la velocidad del flujo de energía siempre es menor que la velocidad de la luz (causalidad). Esto es $T^a_b v_a v^b \geq 0$, $F^a F_b \leq 0$, siendo $F^a = -T^a_b v^b$ el cuadrivector de flujo.

Quinta condición (C5)

Condición de causalidad. La velocidad del sonido tangencial y radial no debe sobrepasar la velocidad de la luz. Las velocidades del sonido son definidas como $v_s^2 = \mathrm{d}P/\mathrm{d}\rho$ y $v_{s\perp}^2 = \mathrm{d}P_\perp/\mathrm{d}\rho$. Por lo tanto, la condición puede escribirse como

$$0 < \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho} \leq 1\,, \quad 0 < \frac{\mathrm{d}P_\perp}{\mathrm{d}\rho} \leq 1.$$

Sexta condición (C6)

Criterio de estabilidad para el índice adiabático $\gamma = \frac{\rho+P}{P} v_s^2 \geq \frac{4}{3}$, consecuencia del criterio de estabilidad dinámica [11], debido a la capacidad que posee la materia de cambiar su volumen cuando se ejerce presión sobre ella.

Séptima condición (C7)

Condición de estabilidad de Harrison-Zeldovich-Novikov [26], implicando que $\mathrm{d}M(\rho_c)/\mathrm{d}\rho_c \geq 0$. Al aumentar la densidad central de un modelo también lo hace su masa total. Como consecuencia, este criterio encuentra un punto crítico que separa las configuraciones estables de las inestables cuando la masa total disminuye al aumentar su densidad central.

Octava condición (C8)

Estabilidad contra fracturas. Este concepto fue introducido por Herrera y colaboradores [30, 19, 20, 34] para describir el comportamiento de configuraciones autogravitantes anisótropas justo después de partir del equilibrio, cuando la fuerza radial cambia su signo en algún punto dentro de la configuración.
De esta manera, la ecuación de equilibrio hidrostático

$$\mathcal{R} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} + (\rho + P)\frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r-2m)} - \frac{2(P_\perp - P)}{r} = 0\,, \tag{3.1}$$

es perturbada para establecer el efecto de las fluctuaciones en la distribución de fuerza total. Ver apéndice B para más detalles del esquema considerado en este trabajo.

Novena condición (C9)

Condición de estabilidad convectiva adiabática: $\rho'' \leq 0$. La estabilidad convectiva implica el principio de flotabilidad, el cual conduce a que la presión y la densidad de energía deben disminuir hacia fuera en cualquier configuración de materia hidrostática [7, 57, 40]. Ver apéndice C para más detalles.

CAPÍTULO 4

SOLUCIONES NUMÉRICA Y ANALÍTICA

La solución numérica para fluidos isótropos relativistas, descritos por una EoS polítropa estándar, tiene una venerable tradición en Astrofísica e implica la integración de la bien conocida ecuación diferencial de Lane-Emden [60]. En esta sección se determinarán las ecuaciones de estructura adimensionales, a través de un cambio de variables, para cada una de las EoS descritas en la sección 2. Además, se darán los detalles de la integración numérica de los sistemas de ecuaciones resultantes.

Por otra parte, se precisará un algoritmo para generar soluciones anisótropas exactas a partir de una EoS barótropa y un ansatz para la función métrica $\lambda(r)$. Este procedimiento se empleará con la EoS polítropa maestra y dos funciones «semilla» $\lambda(r)$: una tipo métrica Tolman VII [17, 59] y una generalización de la solución de un parámetro de Buchdahl [17, 9].

4.1 SOLUCIÓN NUMÉRICA

Años atrás, L. Herrera y W. Barreto desarrollaron un formalismo general para modelar esferas polítropas -newtonianas y relativistas- anisótropas usando una estrategia heurística [15, 32, 33]. Para esto suponen que la fuerza debido a la anisotropía en la presión, en la ecuación de equilibrio hidrostático, es múltiplo de la fuerza gravitacional. Es decir,

$$\Delta \equiv P_{\perp} - P = Cr(\rho + P)\left[\frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r-2m)}\right], \tag{4.1}$$

donde C cuantifica la anisotropía en cada modelo.

Reemplazando esta última ecuación en (1.10) se tiene

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -h\frac{(\rho + P)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r-2m)}, \tag{4.2}$$

donde $h = 1 - 2C$. Cuando $h = 1$ ($C = 0$) el caso isótropo claramente es recuperado.

Por consiguiente, se debe integrar numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales compuesto por (4.2) y (1.11), suponiendo las EoS (2.1), (2.2) y (2.9), para encontrar el perfil de densidad y de presión característico de cada modelo.

4.1.1 Ecuación de Lane-Emden anisótropa Cuando las ecuaciones de estructura son dotadas de EoS polítropas como (2.1), (2.2) o (2.9), pueden escribirse de forma adimensional y son conocidas como ecuaciones de Lane-Emden. Estas son muy convenientes a la hora de integrar numéricamente pues evitan trabajar con cantidades cuyos órdenes de magnitud son muy diferentes. Además, estas cantidades pueden cambiar considerablemente en distintas regiones de la estrella para una misma variable. De esta manera, para cada EoS polítropa se tendrá una ecuación de Lane-Emden asociada. Las soluciones serán parametrizadas por el índice polítropo n, la razón entre presión y densidad en el centro (σ) y el factor de anisotropía C. Para el caso de la EoS polítropa maestra también se tendrán como parámetros la razón entre densidad central y densidad superficial ($\varkappa$) y el coeficiente α del término lineal en (2.9).

Ecuación de Lane-Emden I

Para la primera EoS polítropa (2.1), donde la presión es función de la densidad de masa bariónica, se introduce el cambio de variables

$$\eta\left(\xi\right) = \frac{m}{4\pi\rho_c a^3}\,, \quad r = a\xi, \tag{4.3}$$

y

$$\hat{\psi}^n\left(\xi\right) = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_c} \tag{4.4}$$

para la masa, el radio y la densidad de masa, respectivamente. Donde

$$a^2 = \frac{\sigma\left(n+1\right)}{4\pi\rho_c} \text{ y } \sigma = \frac{P_c}{\rho_c}\,.$$

De esta manera, la presión radial puede ser escrita como

$$P = \kappa\hat{\rho}_c^{1+\frac{1}{n}}\hat{\psi}^{n+1} = \Sigma\hat{\rho}_c\hat{\psi}^{n+1}\,, \tag{4.5}$$

de donde es claro que $\Sigma = \kappa\hat{\rho}_c^{1/n} = P_c/\hat{\rho}_c$, y está relacionado con σ a través de

$$\Sigma = \frac{\sigma}{1-\sigma n}\,.$$

De otra parte, la diferencia entre las presión tangencial y radial (4.1) será

$$\Delta = \frac{C\left(n+1\right)\left(\eta+\sigma\xi^3\hat{\psi}^{n+1}\right)}{\xi-2\sigma\left(n+1\right)\eta}\left[\left(1-\sigma n\right)\hat{\psi}^n+\sigma n\hat{\psi}^{n+1}+\sigma\hat{\psi}^{n+1}\right]P_c\,. \tag{4.6}$$

Por último, las ecuaciones de estructura (4.2) y (1.11) se transforman en el sistema de ecuaciones de Lane-Emden I dado por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\psi}} &= -\frac{h\left(\eta+\sigma\xi^3\hat{\psi}^{n+1}\right)\left[(1-\sigma n)+\sigma\,(n+1)\,\hat{\psi}\right]}{\xi\left[\xi-2\sigma\,(n+1)\,\eta\right]} \quad \text{y} && (4.7)\\ \dot{\eta} &= \xi^2\hat{\psi}^n\left(1-\sigma n+\sigma n\hat{\psi}\right)\,, && (4.8)\end{aligned}$$

donde el punto indica derivada respecto a ξ.

Ecuación de Lane-Emden II

En este caso, cuando $P=P(\rho)$, se mantiene el cambio de variables (4.3) -con la misma definición para a^2- y se toma

$$\psi^n(\xi)=\frac{\rho}{\rho_c} \tag{4.9}$$

para la densidad de energía adimensional. Así, la presión radial puede ser escrita como

$$P=\kappa\rho_c^{1+\frac{1}{n}}\psi^{n+1}=\sigma\rho_c\psi^{n+1}\,, \tag{4.10}$$

de donde es directo observar que $\sigma=\kappa\rho_c^{1/n}=P_c/\rho_c$. Además, la diferencia entre las presión tangencial y radial (4.1) será

$$\Delta=\frac{C(n+1)\left(\eta+\sigma\xi^3\psi^{n+1}\right)}{\xi-2\sigma(n+1)\eta}(\psi^n+\sigma\psi^{n+1})P_c\,. \tag{4.11}$$

De esta manera, a partir de las ecuaciones de estructura (4.2) y (1.11), se obtiene el sistema de ecuaciones de Lane-Emden II dado por

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{h(\eta+\sigma\xi^3\psi^{n+1})(1+\sigma\psi)}{\xi\left[\xi-2\sigma(n+1)\eta\right]} \quad \text{y} && (4.12)\\ \dot{\eta} &= \xi^2\psi^n\,. && (4.13)\end{aligned}$$

Ecuación de Lane-Emden maestra

Empleando el mismo cambio de variable de la sección anterior, es decir,

$$\Psi^n(\xi)=\frac{\rho}{\rho_c}\,,\quad \eta\left(\xi\right)=\frac{m}{4\pi\rho_c a^3}\ \text{ y }\ r=a\xi \tag{4.14}$$

en las ecuaciones de estructura (4.2) y (1.11), para la ecuación de estado (2.9), se obtiene el sistema de ecuaciones de Lane-Emden maestra (ver apéndice D para más detalles) dado por

$$\begin{aligned}
\dot{\Psi} &= -\frac{h\left\{\eta+\xi^3\left[\Upsilon\left(\Psi^{n+1}-\varkappa^{1+\frac{1}{n}}\right)+\alpha\left(\Psi^n-\varkappa\right)\right]\right\}}{\xi^2\left[1-2\,\frac{\Upsilon(n+1)\eta}{\xi}\right]\left[1+\frac{\alpha n}{\Upsilon(n+1)\Psi}\right]} \\
&\quad\times\left[1+\frac{\Upsilon\left(\Psi^{n+1}-\varkappa^{1+\frac{1}{n}}\right)+\alpha\left(\Psi^n-\varkappa\right)}{\Psi^n}\right] \quad \text{y} \qquad (4.15) \\
\dot{\eta} &= \xi^2\Psi^n\,, \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

donde

$$a^2=\frac{\Upsilon\left(n+1\right)}{4\pi\rho_c}\,,\quad \Upsilon=\kappa\rho_c^{1/n}=\frac{\sigma-\alpha\left(1-\varkappa\right)}{1-\varkappa^{1+\frac{1}{n}}}\,,\quad \sigma=\frac{P_c}{\rho_c}\ \text{ y }\ \varkappa=\frac{\rho_b}{\rho_c}\,.$$

Es evidente que cuando $\alpha=\beta=0$ el sistema de ecuaciones de Lane-Emden II es recuperado. Se ha escogido la letra Ψ para distinguirla de esta última.
La presión radial y la diferencia entre las presiones (4.1) pueden ser escritas como

$$P=\left[\Upsilon\left(\Psi^{n+1}-\varkappa^{1+\frac{1}{n}}\right)+\alpha\left(\Psi^n-\varkappa\right)\right]\rho_c=\rho_c\mathcal{P} \quad \text{y} \qquad (4.17)$$

$$\Delta=\frac{C\Upsilon(n+1)\left(\eta+\xi^3\mathcal{P}\right)\left(\Psi^n+\mathcal{P}\right)\rho_c}{\xi-2\Upsilon\left(n+1\right)\eta}\,, \qquad (4.18)$$

respectivamente.

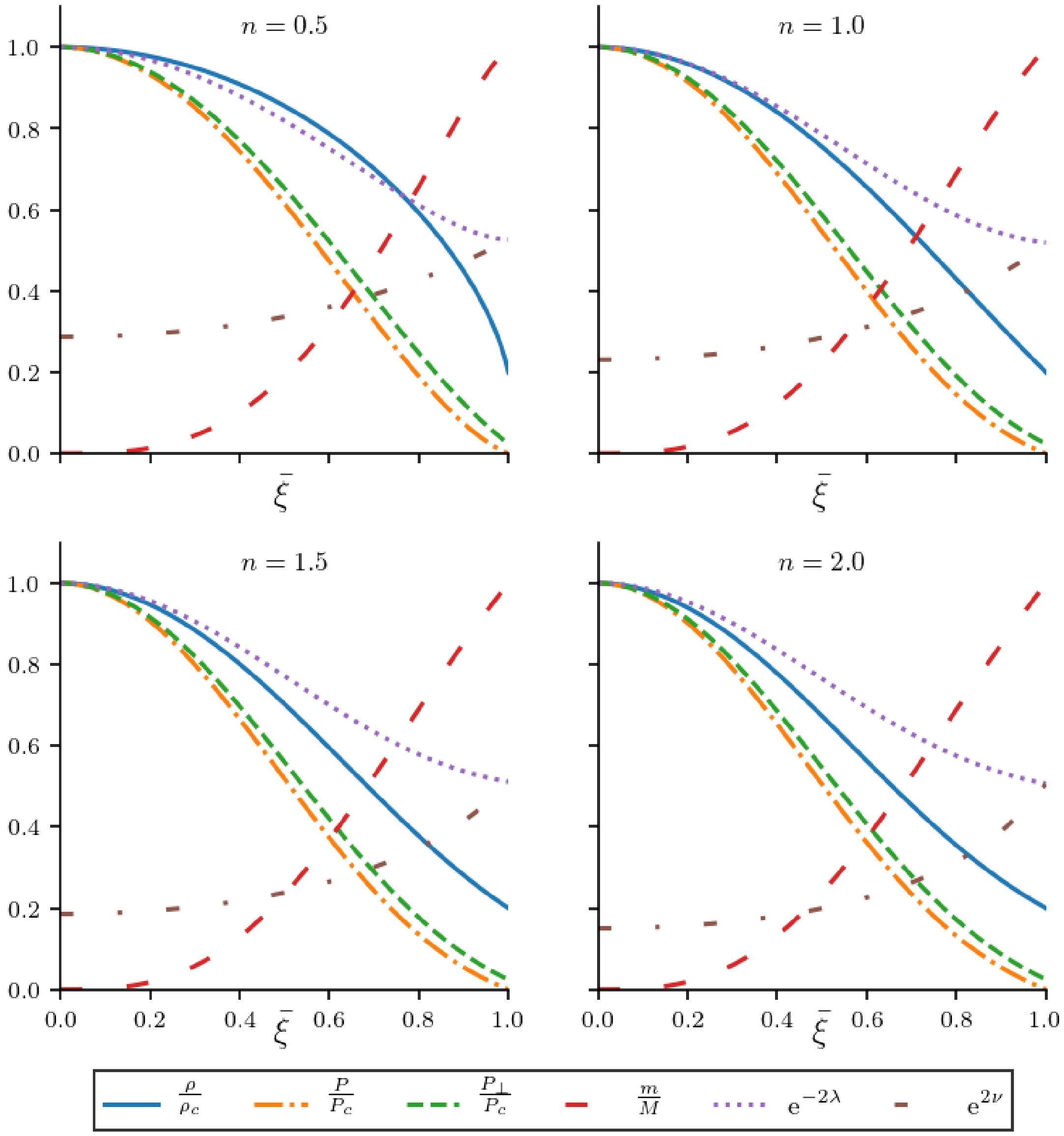
4.1.2 Integración numérica Los sistemas de ecuaciones (4.7)-(4.8), (4.12)-(4.13) y (4.15)-(4.16) fueron integrados numéricamente utilizando Python, implementando el método *RK45* por medio de la rutina *solve_ivp*, para valores iniciales

$$\psi(\xi=0)=\psi_c=1\,,\quad \eta(\xi=0)=\eta_c=0\,.$$

Teniendo en cuenta que el épsilon de la máquina utilizada (ε_m) $\sim 10^{-16}$ (es decir, el menor valor que cumple con 1.0 $+\ \varepsilon_m >$ 1.0), el espacio de integración se inició en $\xi_c = 10^{-15}$ con un paso adaptativo propio de la rutina implementada. Por otra parte, el borde de la configuración (ξ_b) fue determinado por la condición $0 \leq P(\xi) \leq 10^{-15}$. Sin embargo, a medida que n y σ aumentan, la integración de los sistema de ecuaciones Lane-Emden I y II no pudo cumplir esta condición.
Las variables físicas encontradas, a partir de la solución de la ecuación de Lane-Emden maestra y en función de $\bar{\xi}$ ($=\xi/\xi_b$), son mostradas en la figura 4.1 para modelos con $C=$ 0.05, $\sigma=$ 0.2, $\alpha=$ -0.01, $\varkappa=$ 0.2 y valores del índice polítropo n

desde 0.5 hasta 2.0. En esta gráfica se observa que la presión radial y tangencial, la densidad de energía, la masa y las funciones métricas son bien comportadas y propias de modelos estelares. El coeficiente métrico e$^{2\lambda}$ siempre es mayor o igual que la unidad, mientras que e$^{2\nu}$ siempre es menor que 1 y tiene un valor mínimo en el centro. Nótese que en el borde e$_b^{-2\lambda}$ $=$ e$_b^{2\nu}$. Las configuraciones obtenidas a partir de la solución de los sistemas de ecuaciones Lane-Emden serán llamadas «modelos Lane-Emden».

Figura 4.1: Variables físicas adimensionales y funciones métricas para modelos Lane-Emden maestra.



Para verificar que los resultados obtenidos son confiables, las soluciones logradas son comparadas con las presentadas por T. Dallas y V. Geroyannis en [16].

Se ha escogido este trabajo porque incluye los resultados numéricos de Tooper [60] y Bludman [6]. En la tabla E.1 (apéndice E) se muestran los radios y masas adimensionales en el borde (ξ_b, η_b) para la EoS polítropa maestra con $\alpha = \beta = 0$, contra los radios y masas adimensionales ($\bar{\xi}_b, \bar{\eta}_b$) obtenidos en [16] para la EoS polítropa II. Los datos son comparados por medio del cálculo del error relativo porcentual como

$$\text{Error } \xi_b = \frac{|\bar{\xi}_b - \xi_b|}{\bar{\xi}_b} \times 100 \quad \text{y} \quad \text{Error } \eta_b = \frac{|\bar{\eta}_b - \eta_b|}{\bar{\eta}_b} \times 100 \,.$$

Los errores obtenidos cuando $n < 3$ son menores a 0.2 % para ξ_b y menores a 0.16 % para η_b. Sin embargo, cuando $n \geq 3$ el error aumenta por los altos valores obtenidos en [16], posiblemente debido a la baja precisión y poca eficiencia del método empleado hace 27 años. Los resultados obtenidos de la solución de la ecuación de Lane-Emden I y II, tanto los códigos y rutinas utilizadas para la integración numérica, pueden ser consultados en GitHub.*

4.2 SOLUCIÓN ANALÍTICA

Como se mencionó anteriormente, solucionar las ecuaciones de estructura (1.10) y (1.11) es equivalente a resolver las ecuaciones de campo de Einstein (1.4)-(1.6). Dando una EoS $P = P(\rho)$, se puede integrar formalmente ν' de la ecuación (1.5), resultando

$$\nu(r) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{r}\left\{\mathrm{e}^{2\lambda}\left[8\pi^2 P(\rho) + 1\right] - 1\right\}\mathrm{d}r + \mathbf{C}\,, \tag{4.19}$$

donde **C** es una constante de integración determinada por las condiciones (1.13) y (1.14). La integral en (4.19) puede ser resuelta analíticamente si se proporciona una función $\lambda(r)$ que permita obtener $\rho(r)$ a través de (1.4). De esta manera, la EoS para la presión tangencial, por medio de (1.6) -o equivalentemente de (1.10)-, es

$$P_\perp = P(\rho) + \frac{\mathrm{e}^{2\lambda}}{4}(\rho + P(\rho))\left(8\,\pi\, r^2 P(\rho) - \mathrm{e}^{-2\lambda} + 1\right) + \frac{r}{2}v_s^2\rho'\,, \tag{4.20}$$

donde v_s^2 es la velocidad del sonido radial. Por último, la función masa puede ser determinada por medio de (1.8) o (1.11).

4.2.1 Ecuación de estado polítropa maestra La estrategia reseñada se empleará con la EoS polítropa maestra y dos funciones $\lambda(r)$ que generan los perfiles

*https://github.com/danielfsu/TrabajoDeInvestigacion de densidad:

$$\textbf{Semilla 1:} \qquad \mathrm{e}^{2\lambda} = \left[1 + Ar^2 + Br^4\right]^{-1} \;\Rightarrow\; \rho = -\frac{3A + 5Br^2}{8\pi} \tag{4.21}$$

y

$$\textbf{Semilla 2:} \qquad \mathrm{e}^{2\lambda} = \frac{K(1 + Ar^2)}{K + Br^2} \;\Rightarrow\; \rho = \frac{(KA - B)\,(3 + Ar^2)}{8\pi K\,(1 + Ar^2)^2}\,. \tag{4.22}$$

Donde A, B y κ son parámetros a determinar por las condiciones $P(r_b) = 0$ y $m(r_b) = M$. La función semilla 1 corresponde a un elemento métrico tipo Tolman VII con dos parámetros [17, 59]. Esta familia de soluciones brinda perfiles de densidad parabólicos frecuentemente considerados en modelos estables de estrellas de neutrones (ver [52, 5, 3, 51]). La segunda función semilla (4.22) es una generalización de la solución con un parámetro de Buchdahl [17, 9], obtenida cuando $B = -A$ y $K = 2$.

Utilizando (1.4), la EoS maestra (2.9) puede ser escrita como

$$P = \kappa\left[\frac{e^{-2\lambda}\,(2r\lambda' - 1) + 1}{8\pi r^2}\right]^{1+\frac{1}{n}} + \alpha\left[\frac{e^{-2\lambda}\,(2r\lambda' - 1) + 1}{8\pi r^2}\right] - \beta\,. \tag{4.23}$$

Lo anterior permite dividir (4.19) en dos partes, así

$$\nu = \int\left[4\pi\, r\,(\alpha\,\rho - \beta)\,\mathrm{e}^{2\,\lambda} - \frac{1 - \mathrm{e}^{2\,\lambda}}{2r}\right]\mathrm{d}r + 4\pi\kappa\int r\mathrm{e}^{2\,\lambda}\rho^{1+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}r + \mathbf{C}\,, \tag{4.24}$$

lo cual resulta útil cuando se consideran casos particulares de (2.9).

Polítropa maestra y semilla 1 (EoS-1)

El primer modelo se obtiene integrando (4.24) por medio de (4.21), resultando

$$\nu = \frac{\lambda\,(1 + 5\alpha)}{4} + \frac{A(1 + \alpha) + 16\pi\beta}{4\sqrt{A^2 - 4\,B}}\mathrm{arctanh}\left(\frac{A + 2Br^2}{\sqrt{A^2 - 4B}}\right) + 4\pi\kappa\int r\mathrm{e}^{2\,\lambda}\rho^{1+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}r + \mathbf{C}\,. \tag{4.25}$$

La integración del último término, para n = 0.5, 1.0, 1.5 y 2.0, se muestra en el apéndice F. Los parámetros β y A se encuentran a partir de las condiciones en la frontera $P(r_b) = 0$ y $m(r_b) = M$, respectivamente. De lo anterior se tiene

$$\beta = k\rho_b^{1+\frac{1}{n}} + \alpha\rho_b \quad \text{y} \quad A = -\frac{\mu_b + Br_b^4}{r_b^2}\,,$$

que al reemplazarse en el perfil de densidad (4.21) se obtiene

$$\rho = \frac{3\mu_b - \left(5Br^2 - 3Br_b^2\right) r_b^2}{8\pi r_b^2} \,. \tag{4.26}$$

Evaluando esta última expresión en el centro y borde de la configuración, es fácil observar que

$$\rho_c = \frac{3\left(\mu_b + Br_b^4\right)}{8\pi r_b^2} \quad \text{y} \quad \rho_b = \frac{5\mu_b}{8\pi r_b^2} - \frac{2}{3}\rho_c \,, \tag{4.27}$$

con la función masa expresada como

$$m = \frac{\mu_b}{2}\frac{r^5}{r_b^4} + \frac{4\pi\rho_c}{3}\left(1 - \frac{r^2}{r_b^2}\right) r^3 \,. \tag{4.28}$$

Finalmente, la constante B, por medio de (4.27), está relacionada con $\varkappa$ (= ρ_b/ρ_c) a través de

$$B = \frac{3\mu_b\left(1 - \varkappa\right)}{r_b^4\left(3\varkappa + 2\right)} \,. \tag{4.29}$$

En la figura 4.2 se muestran los perfiles de las funciones métricas y las variables físicas para distintos valores del índice polítropo n, con σ (= P_c/ρ_c) igual a 0.12. Al igual que en la solución numérica, la presión radial y tangencial, la densidad de energía, la masa y las funciones métricas son bien comportadas y propias de modelos estelares. El coeficiente métrico $\mathrm{e}^{2\lambda}$ siempre es mayor o igual que la unidad, mientras que $\mathrm{e}^{2\nu}$ siempre es menor que 1 y tiene un valor mínimo en el centro. Los modelos obtenidos a partir de (4.21) y (4.23) serán llamados «EoS-1».

Polítropa maestra y semilla 2 (EoS-2)

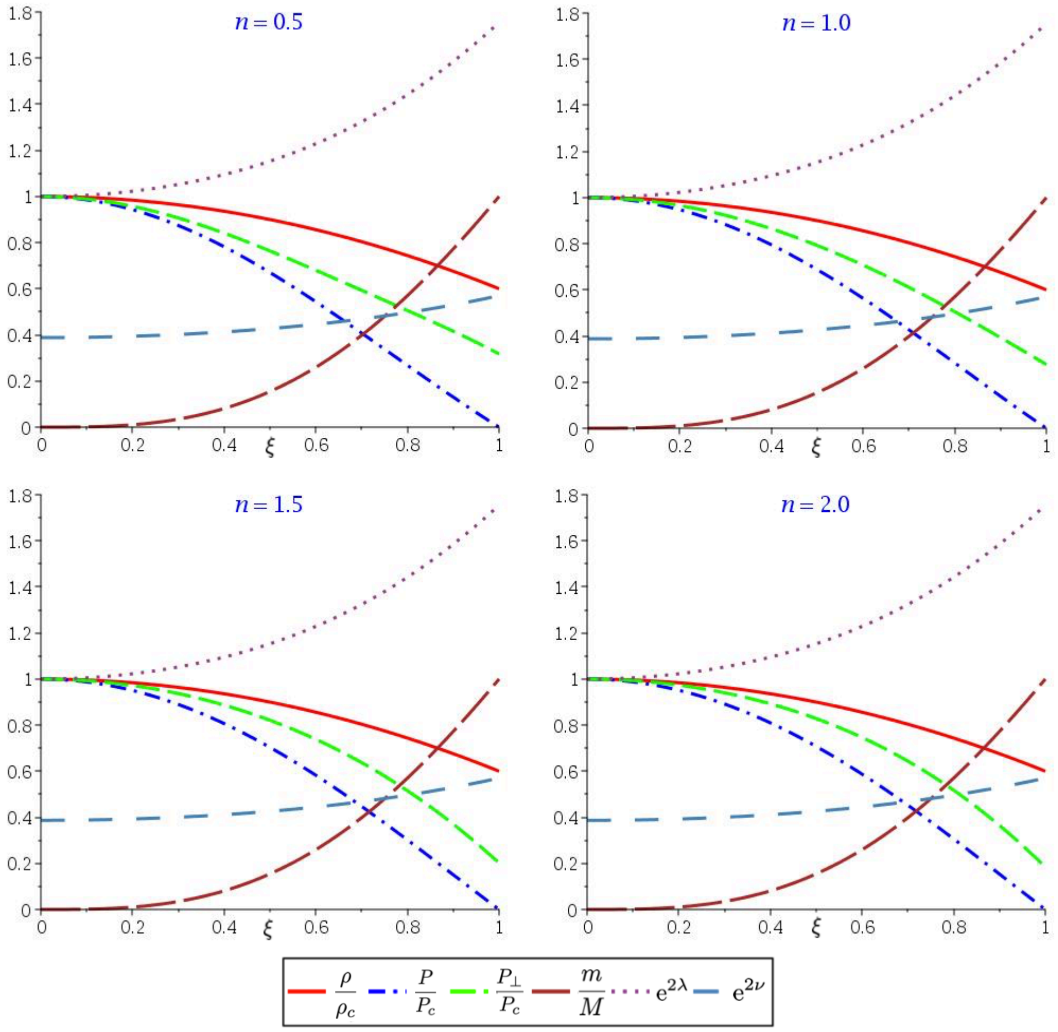
En este caso, la integración de (4.19) se realiza utilizando (4.22), de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \nu = \; & - \left[\frac{1+3\alpha}{4} + \frac{A\left(1+\alpha\right)}{2B} - \frac{8\pi\beta}{B}\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{B}\right)\right] \ln\left(2 + Br^2\right) \\ & - \frac{4\pi A\beta\, r^2}{B} + \frac{\alpha \ln\left(1 + Ar^2\right)}{2} 4\pi\kappa \int r\mathrm{e}^{2\lambda}\, \rho^{1+\frac{1}{n}}\, \mathrm{d}r + \mathbf{C} \,. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Nuevamente, la estrategia de integración utilizada para n = 0.5, 1.0, 1.5 y 2.0, se muestra en el apéndice F. Una vez más, los parámetros β y A se hallan a partir de las condiciones de frontera, teniéndose

$$\beta = k\rho_b^{1+\frac{1}{n}} + \alpha\rho_b \quad \text{y} \quad A = \frac{2\mu_b + Br_b^2}{2\left(1 - \mu_b\right) r_b^2} \,.$$

Figura 4.2: Variables físicas adimensionales y funciones métricas para modelos EoS-1.



Por lo tanto, la densidad puede ser escrita como

$$\rho = \frac{\left(2 + Br_b^2\right)\left\{\left[6\left(1-\mu_b\right) + Br^2\right] r_b^2 + 2\mu_b r^2\right\}\mu_b}{8\pi\left\{\left[2\left(1-\mu_b\right) + Br^2\right] r_b^2 + 2\mu_b r^2\right\}^2}\,, \tag{4.31}$$

y la densidad en el centro y borde de la configuración como

$$\rho_c = \frac{3\mu_b\left(2 + Br_b^2\right)}{16\pi(1-\mu_b)r_b^2} \quad \text{y} \quad \rho_b = \frac{\mu_b\left(3\mu_b + 4\pi r_b^2\rho_c\right)}{32\pi^2 r_b^4\,\rho_c}\,, \tag{4.32}$$

respectivamente.

Para este modelo, la masa está dada por

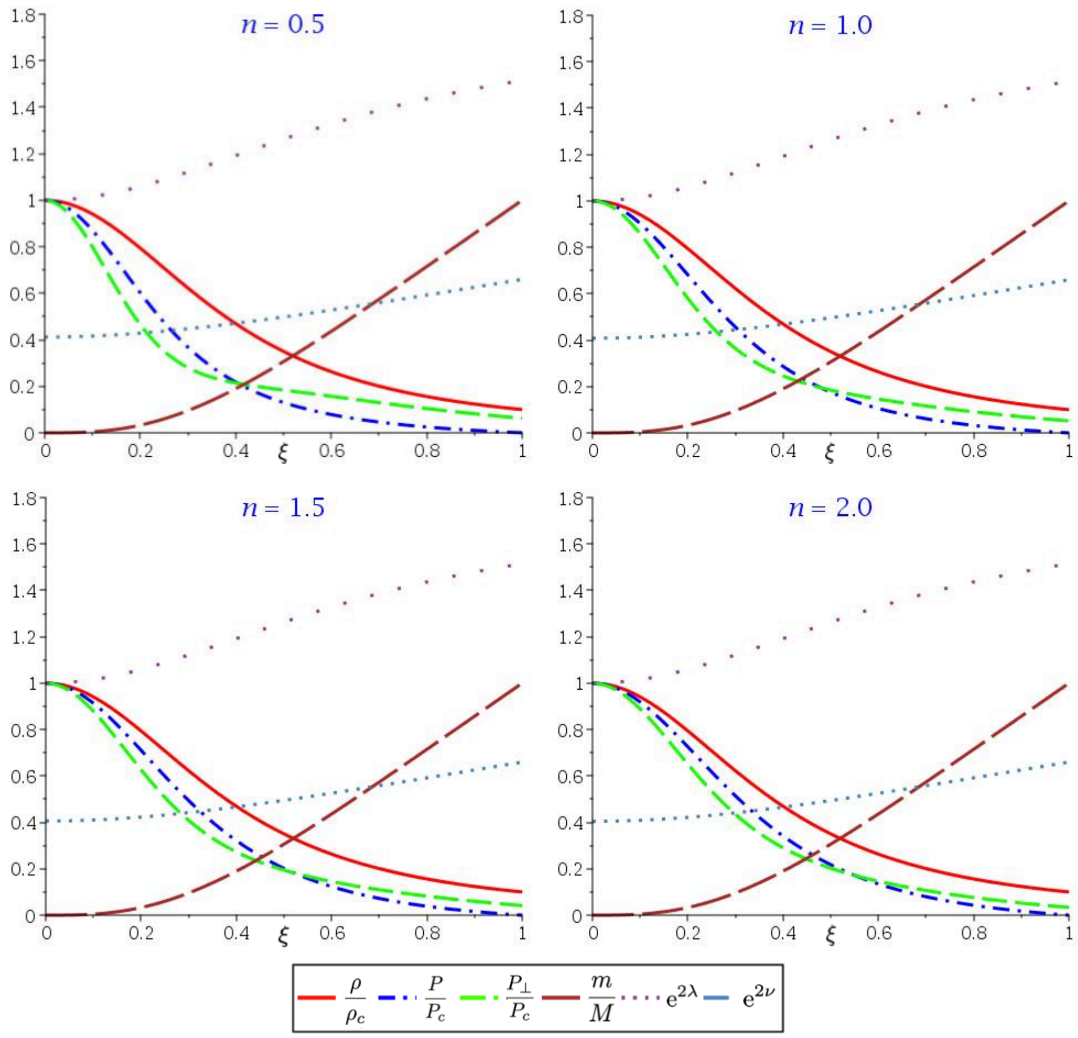
$$m = \frac{4\pi\mu_b\rho_c r^3}{8\pi\rho_c r^2 + 3\mu_b\left(1 - \frac{r^2}{r_b^2}\right)}, \tag{4.33}$$

y la constante B, utilizando el parámetro $\varkappa$ y (4.32), es

$$B = \frac{(1-\mu_b)\sqrt{24\varkappa+1} - \mu_b - 6\varkappa + 1}{3\varkappa r_b^2}. \tag{4.34}$$

En la figura 4.3 se muestran los perfiles de las funciones métricas y las variables

Figura 4.3: Variables físicas adimensionales y funciones métricas para modelos EoS-2.



físicas de este modelo, para distintos valores del índice polítropo n, con σ (= P_c/ρ_c) igual a 0.12. Al igual que en las soluciones anteriores, la presión radial y tangencial, la densidad de energía, la masa y las funciones métricas son bien comportadas y propias de modelos estelares. El coeficiente métrico e$^{2\lambda}$ siempre es mayor o igual que la unidad, mientras que e$^{2\nu}$ siempre es menor que 1 y tiene un valor mínimo en el centro. Los modelos obtenidos a partir de (4.22) y (4.23) serán llamados «EoS-2».

CAPÍTULO 5

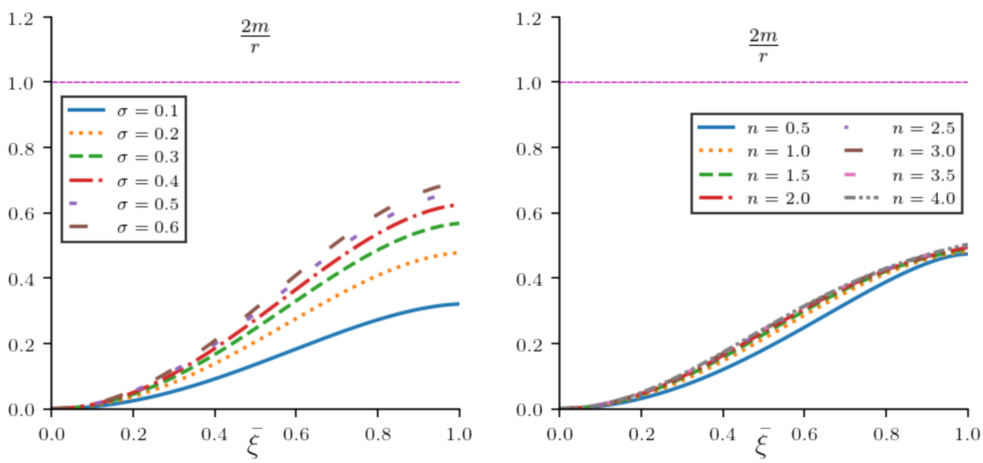
RESULTADOS: CONDICIONES DE ACEPTABILIDAD FÍSICA

Todas las variables físicas en este capítulo serán expresadas en su forma adimensional y graficadas en función de $\bar{\xi}$ $(= \xi/\xi_b)$.

5.1 RESULTADOS DE MODELOS NUMÉRICOS

A partir de la integración numérica de las ecuaciones de Lane-Emden podemos calcular las variables físicas necesarias para evaluar los modelos bajo las condiciones expuestas en la sección 3. A continuación, se muestran los resultados obtenidos en cada condición utilizando la EoS polítropa maestra para modelos con parámetros C = 0.05, α = -0.01 y $\varkappa$ = 0.2. Al final de esta sección se presenta un espacio de parámetros en función del número de condiciones cumplidas como resultado general. Los resultado obtenidos para las 3 ecuaciones de Lane-Emden en un amplio rango de parámetros pueden ser consultados en GitHub.*

Figura 5.1: Compacidad para modelos Lane-Emden maestra.



5.1.1 C1: compacidad Utilizando las equivalencias (4.3) es simple obtener la compacidad en función de las nuevas variables, esto es

$$\mu = \frac{2m}{r} \equiv \frac{2\sigma\,(n+1)\,\eta}{\xi}\,. \tag{5.1}$$

*https://github.com/danielfsu/TrabajoDeInvestigacion

Este resultado es válido para las EoS polítropa I, II y maestra. En la figura 5.1 se observa esta cantidad que mide el grado de compactación del objeto. La gráfica de la izquierda con índice polítropo $n = 0.8$ y distintos valores de σ. La gráfica de la derecha con $\sigma = 0.2$ para distintos valores de n. Todos los modelos graficados cumplen con la condición **C1**. Es bien sabido que una singularidad aparece cuando $\mu = 1$.

5.1.2 C2: densidad, presión radial y presión tangencial

Polítropa I

La densidad de masa a partir de (4.4) está dada por $\hat{\rho}/\hat{\rho}_c = \hat{\psi}^n$. Mientras que la densidad de energía, utilizando (2.5), puede escribirse como

$$\frac{\rho}{\rho_c} = (1 - \sigma n)\,\hat{\psi}^n + \sigma n \hat{\psi}^{n+1}\,, \tag{5.2}$$

donde $\hat{\rho}_c/\rho_c = 1 - \sigma n$. La presión radial puede obtenerse fácilmente de (4.5), esto es

$$\frac{P}{P_c} = \hat{\psi}^{n+1}\,. \tag{5.3}$$

La presión tangencial, despejándola de la ecuación (4.6), queda

$$\frac{P_\perp}{P_c} = \frac{C\,(n+1)\left(\eta + \sigma \xi^3 \hat{\psi}^{n+1}\right)}{\xi - 2\sigma\,(n+1)\,\eta}\left[(1 - \sigma n)\,\hat{\psi}^n + \sigma(n+1)\hat{\psi}^{n+1}\right] + \hat{\psi}^{n+1}\,. \tag{5.4}$$

Polítropa II

Por otra parte, tomando el cambio de variables (4.9), la densidad de energía es

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \psi^n(\xi)\,. \tag{5.5}$$

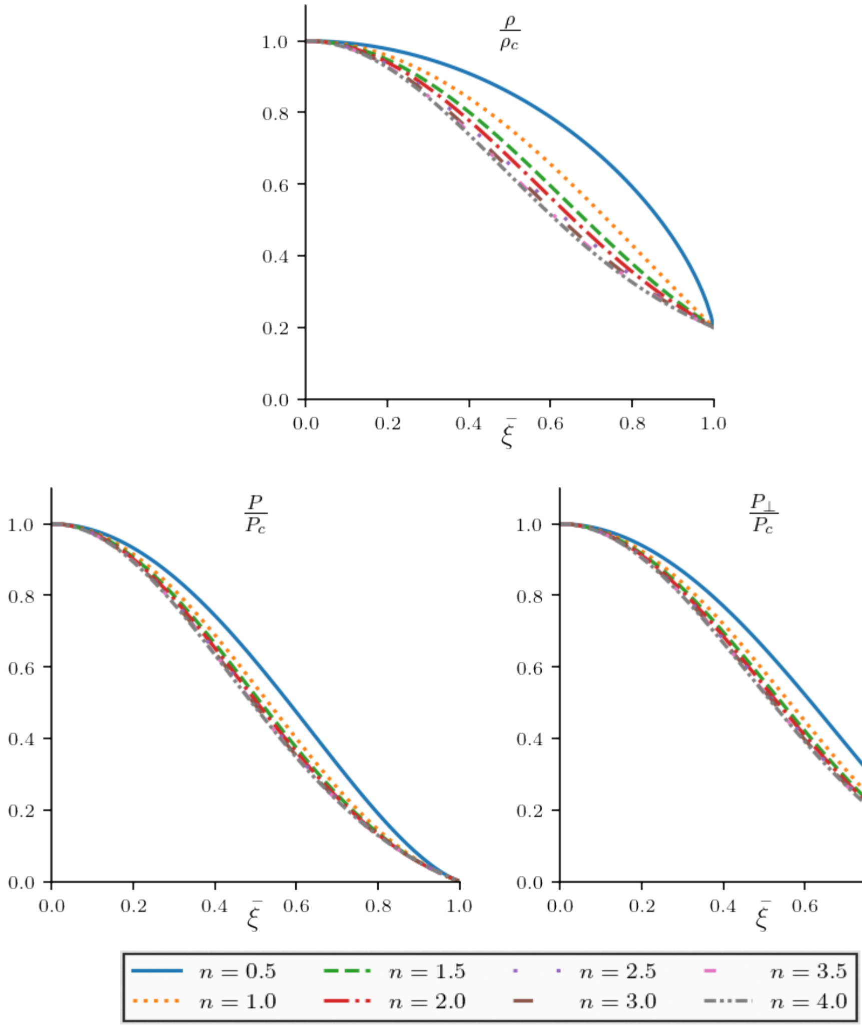
Reemplazando esta en la EoS polítropa II, se obtiene la ecuación (4.10) y por lo tanto

$$\frac{P}{P_c} = \psi^{n+1}\,. \tag{5.6}$$

Por último, la presión tangencial puede ser despejada de (4.11) quedando

$$\frac{P_\perp}{P_c} = \frac{C(n+1)\,(\eta + \sigma \xi^3 \psi^{n+1})\,(\psi^n + \sigma \psi^{n+1})}{\xi - 2\sigma(n+1)\eta} + \psi^{n+1}\,. \tag{5.7}$$

Figura 5.2: Densidad de energía, presión radial y presión tangencial para modelos Lane-Emden maestra.



Polítropa maestra

De igual manera que en el caso anterior, la densidad de energía para la EoS polítropa maestra es (5.5). La presión radial, a partir de (4.17), será

$$\frac{P}{P_c} = \frac{\Upsilon\left(\Psi^{n+1} - \varkappa^{1+\frac{1}{n}}\right) + \alpha\left(\Psi^n - \varkappa\right)}{\sigma} = \frac{\mathcal{P}}{\sigma}, \tag{5.8}$$

donde $\mathcal{P}$ es una cantidad útil para simplificar la escritura de las ecuaciones. Por otra parte, la presión tangencial al ser despejada de (4.18) da como resultado

$$\frac{P_\perp}{P_c} = \frac{1}{\sigma}\left[\frac{C\Upsilon(n+1)\left(\eta + \xi^3\mathcal{P}\right)\left(\Psi^n + \mathcal{P}\right)}{\xi - 2\Upsilon(n+1)\eta} + \mathcal{P}\right]. \tag{5.9}$$

Los resultados son mostrados en la figura 5.2 para modelos con $\sigma = 0.2$ y distintos valores del índice polítropo n. Todas las configuraciones allí presentadas cumplen con la condición **C2** al tener presión radial, presión tangencial y densidad de energía positivas y finitas en el centro.

5.1.3 C3: gradiente de densidad y gradientes de presión

Polítropa I

Los gradientes de densidad de energía, de presión radial y de presión tangencial se obtuvieron derivando las ecuaciones (5.2), (5.3) y (5.4) respecto a ξ, dando como resultado

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho_c} = n\left[(1-\sigma n)\,\hat{\psi}^{n-1} + \sigma\,(n+1)\,\hat{\psi}^{n}\right]\dot{\hat{\psi}}\,, \tag{5.10}$$

$$\frac{\dot{P}}{P_c} = (n+1)\,\hat{\psi}^{n}\dot{\hat{\psi}} \qquad \text{y} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\dot{P}_\perp}{P_c} = {} & \frac{C\sigma\,(n+1)}{\xi - 2\sigma\,(n+1)\,\eta}\Bigg\{\hat{\psi}^{n-1}\dot{\hat{\psi}}\left[n\,(1-\sigma n) + \sigma\,(n+1)^2\,\hat{\psi}\right]\left(\eta + \sigma\xi^3\hat{\psi}^{n+1}\right) \\ & + \xi^2\hat{\psi}^{2n}\left[1 - \sigma n + \sigma\,(n+1)\,\hat{\psi}\right]\left[1 - \sigma n + \sigma\,(n+3)\,\hat{\psi} + \sigma\,(n+1)\,\xi\dot{\hat{\psi}}\right] \\ & - \frac{\hat{\psi}^{n}\left[1 - \sigma n + \sigma\,(n+1)\,\hat{\psi}\right]\left(\eta + \sigma\xi^3\hat{\psi}^{n+1}\right)\left[1 - 2\sigma\,(n+1)\,\dot{\eta}\right]}{\xi - 2\sigma\,(n+1)\,\eta}\Bigg\} \\ & + (n+1)\,\hat{\psi}^{n}\dot{\hat{\psi}}\,, \end{aligned} \tag{5.12}$$

respectivamente.

Polítropa II

Derivando ahora (5.5), (5.6) y (5.7) respecto a ξ se tiene

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho_c} = n\psi^{n-1}\dot{\psi}\,, \tag{5.13}$$

$$\frac{\dot{P}}{P_c} = (n+1)\psi^{n}\dot{\psi} \qquad \text{y} \tag{5.14}$$

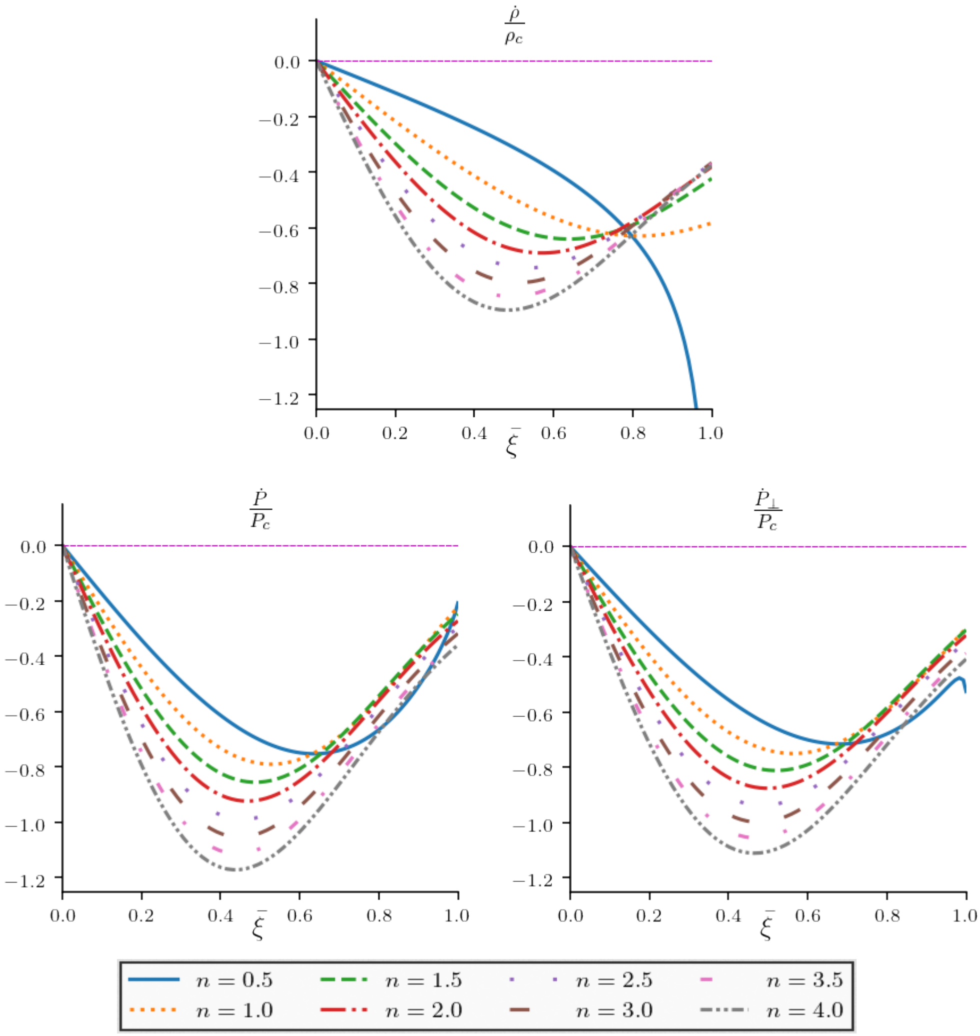
$$\begin{aligned}\frac{\dot{P}_\perp}{P_c} = {} & \frac{C\sigma\,(n+1)}{\xi - 2\sigma\,(n+1)\,\eta}\Bigg\{\psi^{n-1}\dot{\psi}\left[n + \sigma\,(n+1)\,\psi\right]\left(\eta + \sigma\xi^3\psi^{n+1}\right) \\ & + (1+\sigma\psi)\,\xi^2\psi^{2n}\left[1 + 3\sigma\psi + \sigma\,(n+1)\,\xi\dot{\psi}\right] \end{aligned}$$

$$
- \frac{\psi^n (1+\sigma\psi)(\eta + \sigma\xi^3\psi^{n+1})\left[1 - 2\sigma(n+1)\dot{\eta}\right]}{\xi - 2\sigma(n+1)\eta} \Bigg\}
$$

$$
+ (n+1)\psi^n \dot{\psi}\,, \tag{5.15}
$$

para el gradiente de densidad, gradiente de presión radial y gradiente de presión tangencial, respectivamente.

Figura 5.3: Gradientes de densidad de energía, de presión radial y de presión tangencial para modelos Lane-Emden maestra.



Polítropa maestra

Por último, derivando (5.5), (5.8) y (5.9) respecto a ξ resulta

$$
\frac{\dot{\rho}}{\rho_c} = n\Psi^{n-1}\dot{\Psi}\,, \tag{5.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{P}}{P_c} &= \frac{\dot{\mathcal{P}}}{\sigma} = \frac{\Psi^{n-1}\left[\Upsilon(n+1)\Psi + \alpha n\right]\dot{\Psi}}{\sigma} \qquad \text{y} \qquad (5.17)\\
\frac{\dot{P}_\perp}{P_c} &= \frac{C\Upsilon(n+1)}{\sigma\left[\xi - 2\Upsilon(n+1)\eta\right]}\left\{\left(n\Psi^{n-1}\dot{\Psi} + \dot{\mathcal{P}}\right)\left(\eta + \xi^3\mathcal{P}\right) + \left(\Psi^n + \mathcal{P}\right)\left(\dot{\eta} + 3\xi^2\mathcal{P} + \xi^3\dot{\mathcal{P}}\right)\right.\\
&\left. - \frac{\left(\Psi^n + \mathcal{P}\right)\left(\eta + \xi^3\mathcal{P}\right)\left[1 - 2\Upsilon(n+1)\dot{\eta}\right]}{\left[\xi - 2\Upsilon(n+1)\eta\right]^2}\right\} + \frac{\dot{\mathcal{P}}}{\sigma}\,, \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

correspondientes al gradiente de densidad, de presión radial y de presión tangencial, respectivamente. Los modelos Lane-Emden maestra mostrados en la figura 5.3, con $\sigma = 0.2$ y distintos valores de n, cumplen con la condición **C3** al tener gradientes de presión radial, de presión tangencial y de densidad de energía menores que cero.

5.1.4 C4: condición de energía sobre la traza La condición de energía sobre la traza del tensor energía-momento puede ser escrita como

$$\frac{\rho}{\sigma\rho_c} - \frac{P}{P_c} - \frac{2P_\perp}{P_c} \geq 0\,. \qquad (5.19)$$

Evaluando (5.19) en el centro de la configuración se tiene

$$\frac{1}{\sigma} - 1 - 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma \leq \frac{1}{3}\,. \qquad (5.20)$$

Esta desigualdad se cumplirá siempre y cuando el perfil de densidad, a lo largo de la coordenada radial, caiga más lento que la presión radial y tangencial. La restricción sobre la razón entre presión y densidad en el centro puede observarse en la figura 5.4. A la izquierda, modelos con índice polítropo $n = 0.8$ y distintos valores de σ. A la derecha, con $\sigma = 0.2$ para distintos valores de n. Solo los modelos con $\sigma \leq 0.3$ cumplen **C4**, independientemente de n.

Polítropa I

La ecuación (5.19), en las nuevas variables, queda

$$
\begin{aligned}
&\left[(1/\sigma) - n\right]\hat{\psi}^n + n\hat{\psi}^{n+1} - 3\hat{\psi}^{n+1} \qquad (5.21)\\
&-\frac{2C(n+1)\left(\eta + \sigma\xi^3\hat{\psi}^{n+1}\right)}{\xi - 2\sigma(n+1)\eta}\left[(1-\sigma n)\hat{\psi}^n + \sigma(n+1)\hat{\psi}^{n+1}\right] \geq 0\,. \qquad (5.22)
\end{aligned}
$$

Polítropa II

Análogamente y utilizando (5.5), (5.6) y (5.7), la condición sobre la traza, ahora en las variables de Lane-Emden II, queda como

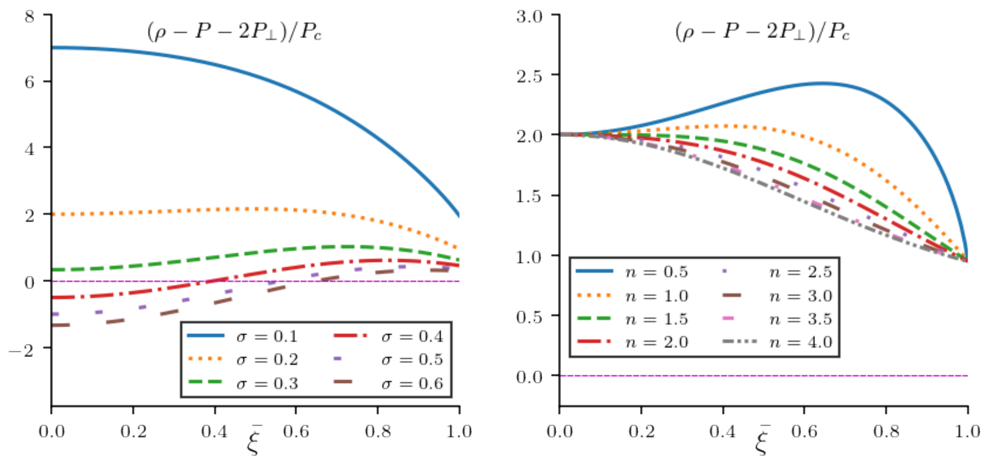
$$\frac{\psi^n}{\sigma} - 3\psi^{n+1} - \frac{2C(n+1)\,(\eta + \sigma\xi^3\psi^{n+1})\,(\psi^n + \sigma\psi^{n+1})}{\xi - 2\sigma(n+1)\eta} \geq 0\,. \tag{5.23}$$

Polítropa maestra

De igual manera, la condición sobre la traza en las variables de Lane-Emden maestra es

$$\Psi^n - 3\mathcal{P} - \frac{2C\Upsilon(n+1)\,(\eta + \xi^3\mathcal{P})\,(\Psi^n + \mathcal{P})}{\xi - 2\Upsilon(n+1)\eta} \geq 0\,. \tag{5.24}$$

Figura 5.4: Condición de energía sobre la traza para modelos Lane-Emden maestra.



5.1.5 C5: velocidades del sonido La velocidad del sonido radial puede obtenerse a través de los gradientes de presión y densidad de energía, así

$$v_s^2 = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho} = \frac{P'}{\rho'}\,. \tag{5.25}$$

Análogamente, la velocidad del sonido tangencial será

$$v_{s\perp}^2 = \frac{\mathrm{d}P_\perp}{\mathrm{d}\rho} = \frac{P'_\perp}{\rho'}\,. \tag{5.26}$$

Polítropa I

Utilizando los gradientes (5.10) y (5.11) en (5.25), se tiene

$$v_s^2 = \frac{\sigma\,(n+1)\,\hat{\psi}}{n\left[1-\sigma n+\sigma(n+1)\hat{\psi}\right]}\,. \tag{5.27}$$

Mientras que la velocidad del sonido tangencial, empleando (5.10) y (5.12) en (5.26), será

$$\begin{aligned} v_{s_\perp}^2 &= \frac{C\sigma\,(n+1)}{\xi-2\sigma\,(n+1)\,\eta}\left\{\left(1+v_s^2\right)\left(\eta+\sigma\xi^3\hat{\psi}^{n+1}\right)\right. \\ &+ \frac{\xi^2\hat{\psi}^{n+1}\left[1-\sigma n+\sigma\,(n+3)\,\hat{\psi}+\sigma\,(n+1)\,\xi\dot{\hat{\psi}}\right]}{n\dot{\hat{\psi}}} \\ &- \left.\frac{\hat{\psi}\left(\eta+\sigma\xi^3\hat{\psi}^{n+1}\right)\left[1-2\sigma\,(n+1)\,\xi^2\hat{\psi}^n\left(1-\sigma n+\sigma n\hat{\psi}\right)\right]}{n\dot{\hat{\psi}}\left[\xi-2\sigma\,(n+1)\,\eta\right]}\right\} \\ &+ v_s^2\,. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Polítropa II

En este caso, la velocidad del sonido radial, a partir de (5.13) y (5.14), es

$$v_s^2 = \sigma\left(\frac{n+1}{n}\right)\psi\,. \tag{5.29}$$

Por otra parte, la velocidad del sonido tangencial, a través de (5.13) y (5.15), puede escribirse como

$$\begin{aligned} v_{s_\perp}^2 &= \frac{C\sigma\,(n+1)}{\xi-2\sigma\,(n+1)\,\eta}\left\{\left(1+v_s^2\right)\left(\eta+\sigma\xi^3\psi^{n+1}\right)\right. \\ &+ \frac{(1+\sigma\psi)\,\xi^2\psi^{n+1}}{n}\left[\frac{1+3\sigma\psi}{\dot{\psi}}+\sigma\,(n+1)\,\xi\right] \\ &- \left.\frac{\psi\,(1+\sigma\psi)\,(\eta+\sigma\xi^3\psi^{n+1})\,[1-2\sigma\,(n+1)\,\xi^2\psi^n]}{n\dot{\psi}\,[\xi-2\sigma\,(n+1)\,\eta]}\right\} \\ &+ v_s^2\,. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Polítropa maestra

Nuevamente, la velocidad del sonido radial será calculada por medio de (5.25) y los gradientes (5.16) y (5.18), obteniendo

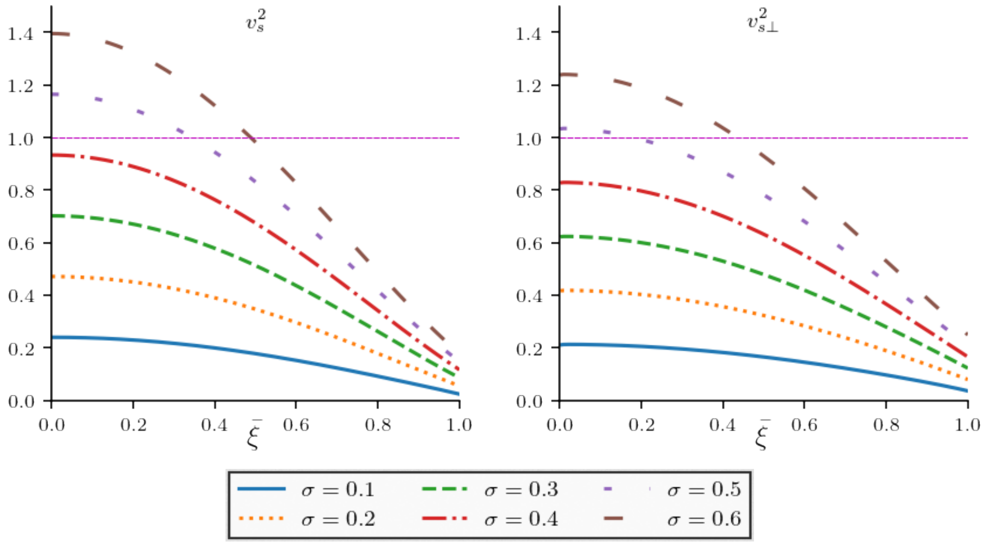
$$v_s^2 = \Upsilon \left(\frac{n+1}{n} \right) \Psi + \alpha \,. \tag{5.31}$$

De la misma forma, la velocidad del sonido tangencial -usando (5.16) y (5.18)- será

$$\begin{aligned} v_{s\perp}^2 &= \frac{C\Upsilon\,(n+1)}{\xi - 2\Upsilon\,(n+1)\,\eta} \Bigg\{ \left(1+v_s^2\right)\left(\eta + \xi^3\mathcal{P}\right) \\ &+ \left(\Psi^n + \mathcal{P}\right)\xi^2\Psi \left(\frac{\Psi^n + 3\mathcal{P}}{n\Psi^n\dot{\Psi}} + \frac{v_s^2\xi}{\Psi} \right) \\ &- \frac{\Psi\left(\Psi^n+\mathcal{P}\right)\left(\eta+\xi^3\mathcal{P}\right)\left[1-2\Upsilon\,(n+1)\,\xi^2\Psi^n\right]}{n\Psi^n\dot{\Psi}\left[\xi - 2\Upsilon\,(n+1)\,\eta\right]} \Bigg\} + v_s^2 \,. \end{aligned} \tag{5.32}$$

En la figura 5.5 se muestran las velocidades del sonido para modelos Lane-Emden maestra con $n = 0.8$ y distintos valores de σ. En esta se observa que los modelos dejan de cumplir la condición de causalidad **C5** a medida que σ aumenta, pues la velocidad del sonido sobrepasa la de la luz.

Figura 5.5: Velocidades del sonido, radial y tangencial, al cuadrado para modelos Lane-Emden maestra.



5.1.6 C6: índice adiabático

Por definición, el índice adiabático es

$$\Gamma = \frac{\rho + P}{P} v_s^2 \,. \tag{5.33}$$

Polítropa I

Reemplazando la velocidad radial (5.27) en (5.33), y empleando (5.2) y (5.3), se tiene que

$$\Gamma = \frac{n+1}{n} \,. \tag{5.34}$$

El índice adiabático solo será igual al índice polítropo γ cuando se describe un gas perfecto, es decir, un gas ideal -sistema de partículas no interactuantes- no degenerado. Esto es de esperarse al modelar configuraciones estelares con una ecuación de estado polítropa que solo tiene en cuenta la densidad de masa bariónica.

De la ecuación (5.34) y la condición **C5** se tiene

$$\frac{n+1}{n} \geq \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad n \leq 3 \,.$$

Polítropa II

Siguiendo la definición del índice adiabático (5.33), la condición **C5** puede ser escrita como

$$\frac{(n+1)(1+\sigma\psi)}{n} \geq \frac{4}{3} \,, \tag{5.35}$$

en las variables de Lane-Emden II. En comparación con la polítropa I, el índice adiabático no es constante, sino que depende de ψ. Sin embargo, evaluando la condición en el borde de la configuración, donde ψ es cero, se tiene que n nuevamente debe ser menor que 3.

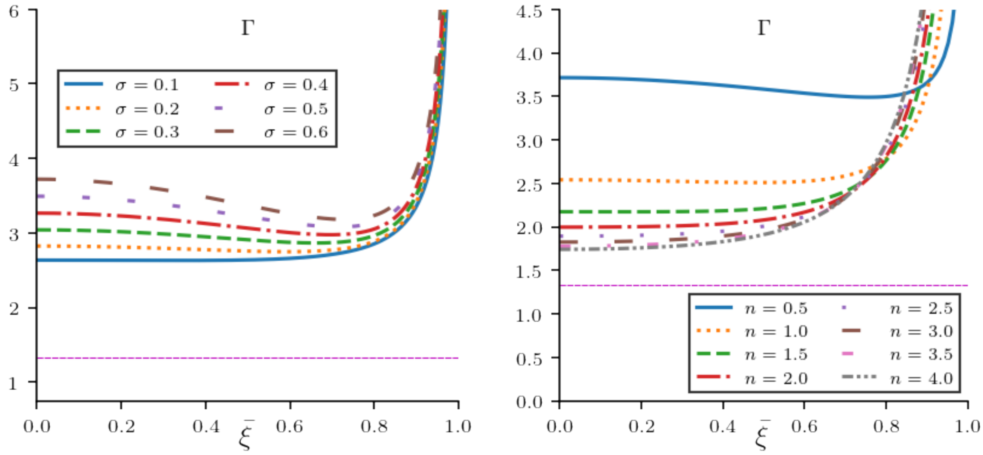
Polítropa maestra

De igual manera para la polítropa maestra, la condición sobre el índice adiabático puede escribirse como

$$\frac{\Psi^n + \mathcal{P}}{\mathcal{P}} \left[\Upsilon \left(\frac{n+1}{n} \right) \Psi + \alpha \right] \geq \frac{4}{3} \,. \tag{5.36}$$

De la figura 5.6 es claro observar que, a diferencia de las dos EoS anteriores, no hay restricción para el índice polítropo n. Esto se debe a que la densidad en el borde es diferente de cero, haciendo que Γ crezca. La gráfica de la izquierda con

Figura 5.6: Índice adiabático para modelos Lane-Emden maestra.



índice polítropo $n=$ 0.8 para distintos valores de σ. La gráfica de la derecha con $\sigma=$ 0.2 y distintos valores de n.

5.1.7 C7: derivada de la masa total, en función de la densidad central, respecto de la densidad central La gráfica M contra ρ_c se construye al integrar el sistema de ecuaciones para un rango amplio de densidades centrales. Recordando que κ, ρ_c y σ se relacionan mediante

$$\sigma = \kappa \rho_c^{\frac{1}{n}} = \frac{P_c}{\rho_c}$$

para las EoS polítropa I y II, y por medio de

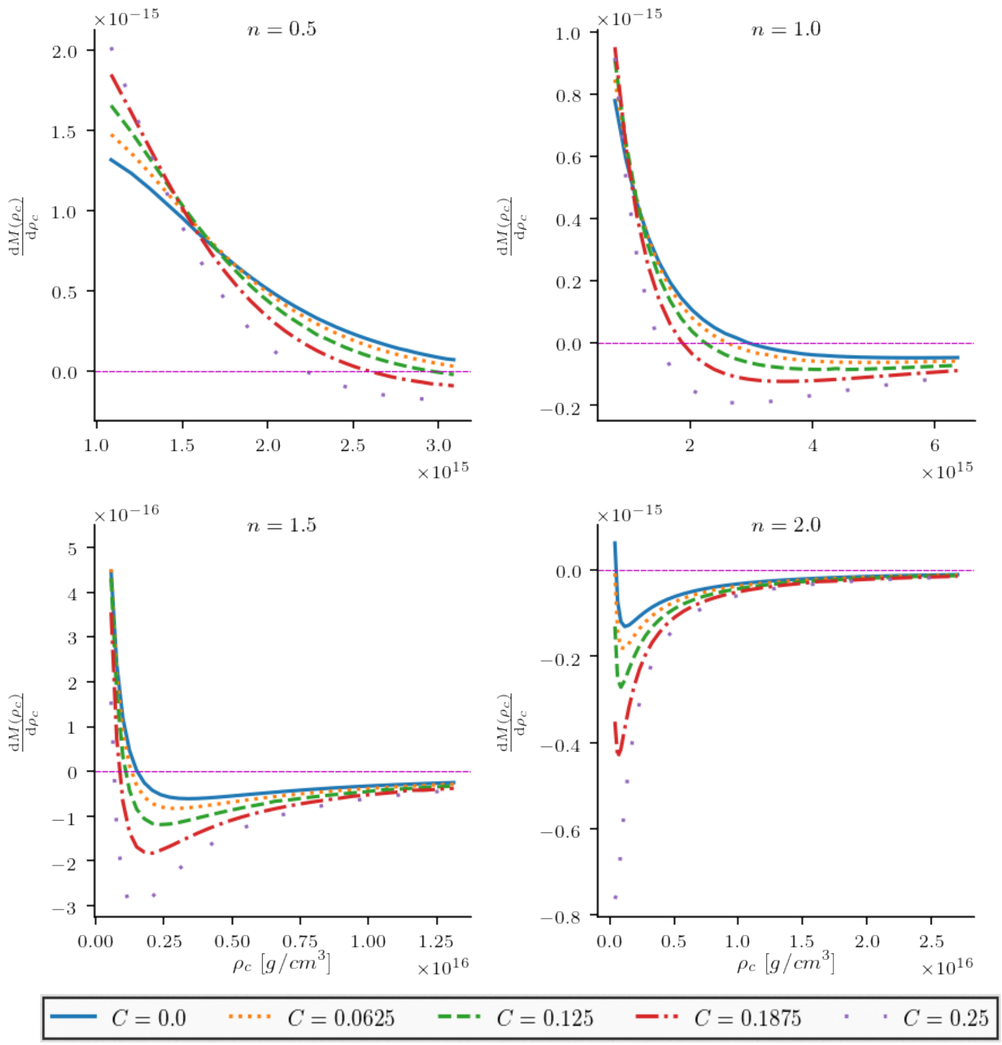
$$\Upsilon = \frac{\sigma - \alpha(1-\varkappa)}{1+\varkappa^{1+\frac{1}{n}}} = \kappa \rho_c^{\frac{1}{n}} \tag{5.37}$$

para la EoS polítropa maestra, se ajustó un valor fijo de la constate polítropa κ y se varió el parámetro de integración σ desde 0.1 hasta 0.9 en pasos de $1/40$. Por consiguiente, habrá un valor de κ que corresponda a cada índice polítropo n. Además, para cada valor de densidad central corresponde un único valor de masa total. Por último, la derivada se calculó a partir de la diferenciación discreta de los puntos obtenidos a lo largo de ρ_c.
La forma de las curvas obtenidas depende de n dado que la masa total puede expresarse como

$$M = \left[\frac{c^2(n+1)}{(4\pi)^{\frac{1}{3}}G}\right]^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\kappa}{c^2}\right)^{\frac{n}{2}} \Upsilon^{\frac{3-n}{2}} \eta_b \tag{5.38}$$

en kilogramos, para las EoS polítropa maestra. Recordar que para las EoS polítropa I y II, donde $\alpha = \beta = 0$, $\Upsilon \to \sigma$, siendo el cambio de variable para la masa igual para las tres EoS. Sin embargo, el factor de anisotropía C puede alterar la curva ya que este hace que las soluciones del sistema de ecuaciones varíen considerablemente como se aprecia en la figura 5.7 para distintos valores de n. Por el contrario, de (5.38) puede notarse que la densidad central se encuentra implícita en σ y κ. En consecuencia, cambiar el valor de la constante κ (y por lo tanto la densidad central) solo afectaría los valores de la abscisa, sin cambiar la forma de la curva en las gráficas de d$M(\rho_c)/\rho_c$. Por esta razón, una forma más general de ver el cumplimiento de la condición **C7** se presenta en las figura H.1, donde la derivada está en función del parámetro de integración σ.

Figura 5.7: d$M(\rho_c)/$dρ_c en función de ρ_c para modelos Lane-Emden maestra.



A priori, muchos de los modelos cumplen con esta condición de aceptabilidad para los n y σ descritos. Sin embargo, hay ciertos rangos donde la derivada es negativa y no son apreciables a simple vista: ver tablas G.1, G.2 y G.3 (siendo

esta última complemento de las figuras H.1 y H.2) en apéndice G. En general se encontró que para 0.5 $\leq n \leq$ 2.0 el rango de σ aceptados disminuye cuando se aumentan el factor de anisotropía C y el índice polítropo n. Es decir, el aumento de la anisotropía y del índice polítropo desfavorece el número de modelos estables. En particular, para la EoS polítropa maestra, ningún modelo es estable cuando $n \geq$ 2.5. En la EoS polítropa I, cuando $n >$ 3.0, no se pudo determinar esta condición pues no se encontró borde para estos modelos.
Los valores presentados en la tabla G.2 coinciden con los resultados obtenidos por Bludman [6] para la EoS polítropa II (con densidad de energía).

5.1.8 C8: fracturas Definiendo $\mathcal{R}$ de la ecuación (4.2) como

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} + h(\rho + P)\frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r-2m)} = 0\,, \tag{5.39}$$

y siguiendo el esquema planteado en el apéndice B para la condición **C8**, se tiene que la ecuación de equilibrio hidrostático perturbada (B.9) es

$$\delta\mathcal{R} = \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial m}\delta m + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P}\delta P + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P'}\delta P'\,, \tag{5.40}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\rho} &= \frac{h\,(m + 4\pi r^3 P)}{r(r-2m)}\,, \quad \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial m} = \frac{h(\rho+P)(1+8\pi r^2 P)}{(r-2m)^2}\,,\\
\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P} &= \frac{h\,[m + 4\pi r^3(\rho + 2P)]}{r(r-2m)}\,, \quad \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P'} = 1\,,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\delta P &= \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho = v_r^2\delta\rho\,,\\
\delta P' &= \frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}\right)\delta\rho = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\right)\delta\rho\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(v_s^2\rho'\right)\delta\rho = \frac{1}{\rho'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(v_s^2\rho'\right)\delta\rho = \left[\left(v_s^2\right)' + v_s^2\frac{\rho''}{\rho'}\right]\delta\rho\,,\\
\delta m &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\rho}\right)\delta\rho = \frac{m'}{\rho'}\delta\rho = \frac{4\pi r^2\rho}{\rho'}\delta\rho\,,
\end{aligned}$$

quedando

$$\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\rho} = \underbrace{\frac{h\,(m + 4\pi r^3 P)}{r(r-2m)}}_{\mathcal{R}_1} + \underbrace{\frac{h\,(\rho+P)\,(1+8\pi P r^2)}{(r-2m)^2}\,\frac{4\pi r^2\rho}{\rho'}}_{\mathcal{R}_2}$$

$$+\quad \underbrace{\frac{h\left[m+4\pi r^{3}\left(\rho+2P\right)\right]}{r(r-2m)}v^{2}}_{\mathcal{R}_3}+\underbrace{\left[\left(v^{2}\right)'+v^{2}\frac{\rho''}{\rho'}\right]}_{\mathcal{R}_4}. \tag{5.41}$$

De la ecuación (5.41) se observa que el primer y tercer término siempre serán positivos puesto que la densidad, la presión y la masa siempre son cantidades mayores o iguales a cero. De otra parte, el tercer término siempre será negativo, ya que la densidad es una función decreciente, y por lo tanto su gradiente será menor que cero.
Por último, el cuarto término podrá ser positivo o negativo dado que la segunda derivada de ρ -asociada a la condición **C9**- puede tener ambos signos. Por lo tanto, las inestabilidades debido a movimientos convectivos pueden inducir fracturas (o estabilidad) en los modelos descritos.

Polítropa I

La ecuación (5.41), escrita en las variables de Lane-Emden I, es

$$\begin{aligned}
a\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\rho} \quad\equiv\quad & \frac{h\sigma\left(n+1\right)\left(\eta+\sigma\xi^{3}\hat{\psi}^{n+1}\right)}{\xi\left[\xi-2\sigma\left(n+1\right)\eta\right]} \\
&+\frac{h\left[\left(1-n\sigma\right)\hat{\psi}^{n}+\sigma\left(n+1\right)\hat{\psi}^{n+1}\right]\left[1+2\sigma^{2}\xi^{2}(n+1)\hat{\psi}^{n+1}\right]}{\left[\xi-2\sigma\left(n+1\right)\eta\right]^{2}} \\
&\times\frac{\sigma\xi^{2}\left(n+1\right)\left[\left(1-\sigma n\right)\hat{\psi}^{n}+\sigma n\hat{\psi}^{n+1}\right]}{n\hat{\psi}^{n-1}\dot{\hat{\psi}}\left[(1-\sigma n)+\sigma(n+1)\hat{\psi}\right]} \\
&+\frac{h\sigma^{2}(n+1)^{2}\hat{\psi}\left[\eta+\xi^{3}\left(1-\sigma n\right)\hat{\psi}^{n}+\sigma\xi^{3}\left(n+2\right)\hat{\psi}^{n+1})\right]}{n\xi\left[\xi-2\sigma(n+1)\eta\right]\left[\left(1-n\sigma\right)+\sigma\left(n+1\right)\hat{\psi}\right]} \\
&+\frac{\sigma(n+1)\left[\hat{\psi}^{n}\ddot{\hat{\psi}}+n\hat{\psi}^{n-1}\left(\dot{\hat{\psi}}\right)^{2}\right]}{n\hat{\psi}^{n-1}\dot{\hat{\psi}}\left[(1-\sigma n)+\sigma(n+1)\hat{\psi}\right]}=\bar{\mathcal{R}}\,.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Polítropa II

Por otra parte, la ecuación (5.41) para las variables Lane-Emden II es

$$\begin{aligned}
a\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\rho} \quad\equiv\quad & \frac{h\sigma\left(n+1\right)\left(\eta+\sigma\xi^{3}\psi^{n+1}\right)}{\xi\left[\xi-2\sigma\left(n+1\right)\eta\right]} \\
&+\frac{h\sigma(n+1)\xi^{2}\psi^{n+1}\left(1+\sigma\psi\right)\left[1+2\sigma^{2}(n+1)\xi^{2}\psi^{n+1}\right]}{n\dot{\psi}\left[\xi-2\sigma(n+1)\eta\right]^{2}}
\end{aligned}$$

$$
+\frac{h\sigma^2(n+1)^2\psi\left(\eta+\xi^3\psi^n+2\sigma\xi^3\psi^{n+1}\right)}{n\xi\left[\xi-2\sigma(n+1)\eta\right]}
$$

$$
+\frac{\sigma(n+1)\left[n\left(\dot{\psi}\right)^2+\psi\ddot{\psi}\right]}{n\dot{\psi}}=\bar{\mathcal{R}}\,. \tag{5.43}
$$

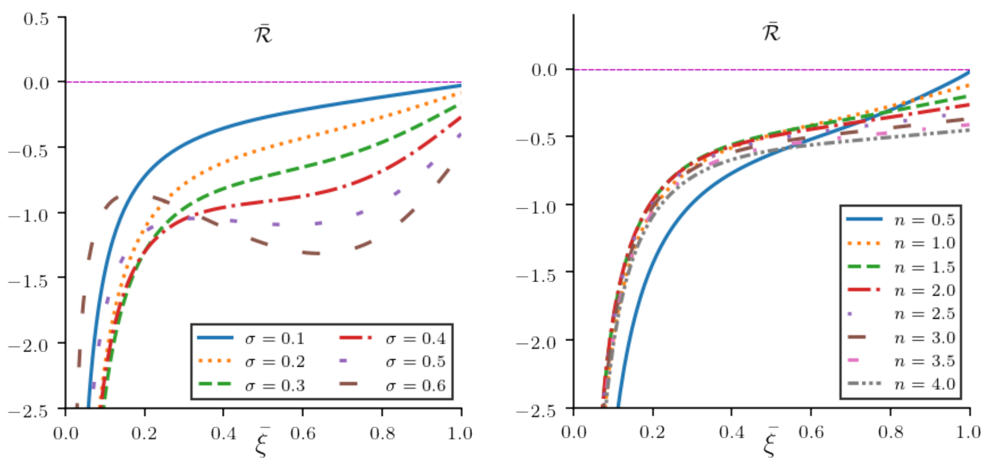
Polítropa maestra

De igual manera, para la EoS polítropa maestra, la ecuación (5.41) puede darse como

$$
\begin{aligned}
a\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\rho} \equiv\ & \frac{h\Upsilon(n+1)\left(\eta+\xi^3\mathcal{P}\right)}{\xi\left[\xi-2\Upsilon(n+1)\eta\right]} \\
& +\frac{h\Upsilon(n+1)\xi^2\Psi\left(\Psi^n+\mathcal{P}\right)\left[1+2\Upsilon(n+1)\xi^2\mathcal{P}\right]}{n\dot{\Psi}\left[\xi-2\Upsilon(n+1)\eta\right]^2} \\
& +\frac{h\Upsilon(n+1)\left(\eta+\xi^3\Psi^n+2\xi^3\mathcal{P}\right)\left[\Upsilon(n+1)\Psi+\alpha n\right]}{n\xi\left[\xi-2\Upsilon(n+1)\eta\right]} \\
& +\frac{\Upsilon(n+1)\left[n\left(\dot{\Psi}\right)^2+\Psi\ddot{\Psi}\right]}{n\dot{\Psi}}+\frac{\alpha\left[(n-1)\left(\dot{\Psi}\right)^2+\Psi\ddot{\Psi}\right]}{\Psi\dot{\Psi}}=\bar{\mathcal{R}}\,. \quad (5.44)
\end{aligned}
$$

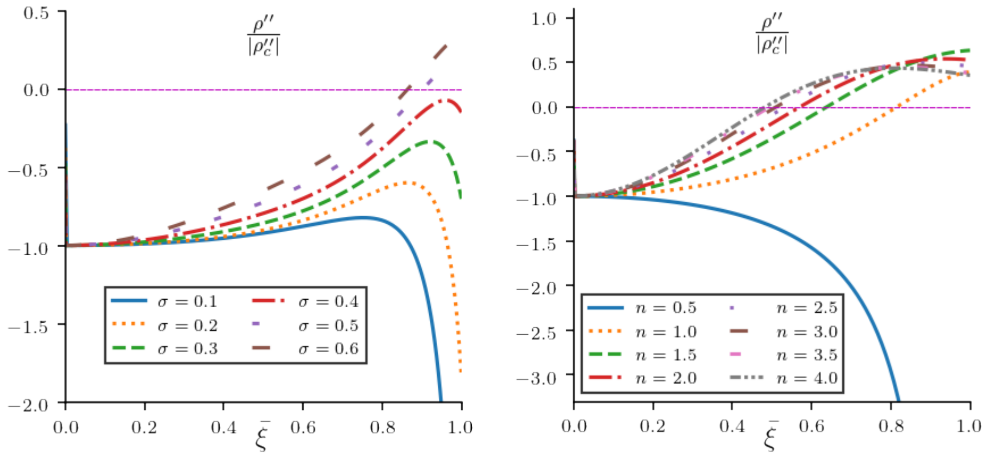
Los resultados obtenidos, para modelos Lane-Emden maestra (figura 5.8), muestran que todas las configuraciones modeladas son estables ante perturbaciones locales de la densidad, bajo el concepto de fracturas, al no presentar cambio de signo en la distribución de la fuerza radial. La gráfica de la izquierda con índice polítropo $n=0.8$ y distintos valores de σ. La gráfica de la derecha con $\sigma=0.2$ para distintos valores de n.

Figura 5.8: Ecuación de equilibrio hidrostático perturbada adimensional para modelos Lane-Emden maestra.



Un estudio detallado de la contribución de los 4 términos que componen la ecuación (5.41) reveló que la magnitud de $\mathcal{R}_2$ es tan grande que los otros términos no hacen que la suma total pase a ser positiva en la mayor parte de la esfera. Sin embargo, cerca de la superficie, $\mathcal{R}_2$ tiende a cero. Por lo tanto, la reacción del gradiente de presión ($\mathcal{R}_4$) es la que hace que la fuerza radial se mantenga negativa y no cambie de signo (ver figura H.3). Con esto se puede inferir que la segunda derivada de la densidad, dentro de la ecuación de equilibrio hidrostático perturbada, tiene una contribución minúscula al momento de determinar un cambio de signo en la distribución de la fuerza radial una vez la esfera ha sido perturbada.

Figura 5.9: Segunda derivada de la densidad adimensional para modelos Lane-Emden maestra.



5.1.9 C9: estabilidad convectiva El cálculo de la segunda derivada de la densidad respecto de r puede hacerse directamente desde la ecuación (4.4) para la densidad adimensional, esto es

$$\left(\dot{\hat{\psi}^n}\right) = n\hat{\psi}^{n-1}\dot{\hat{\psi}}\,,$$

y por lo tanto

$$\left(\ddot{\hat{\psi}^n}\right) = n\left[(n-1)\,\hat{\psi}^{n-2}\left(\dot{\hat{\psi}}\right)^2 + \hat{\psi}^{n-1}\ddot{\hat{\psi}}\right]\,. \tag{5.45}$$

Análogamente, para la ecuación de estado polítropa II y polítropa maestra se tendrá que la segunda derivada de la densidad es

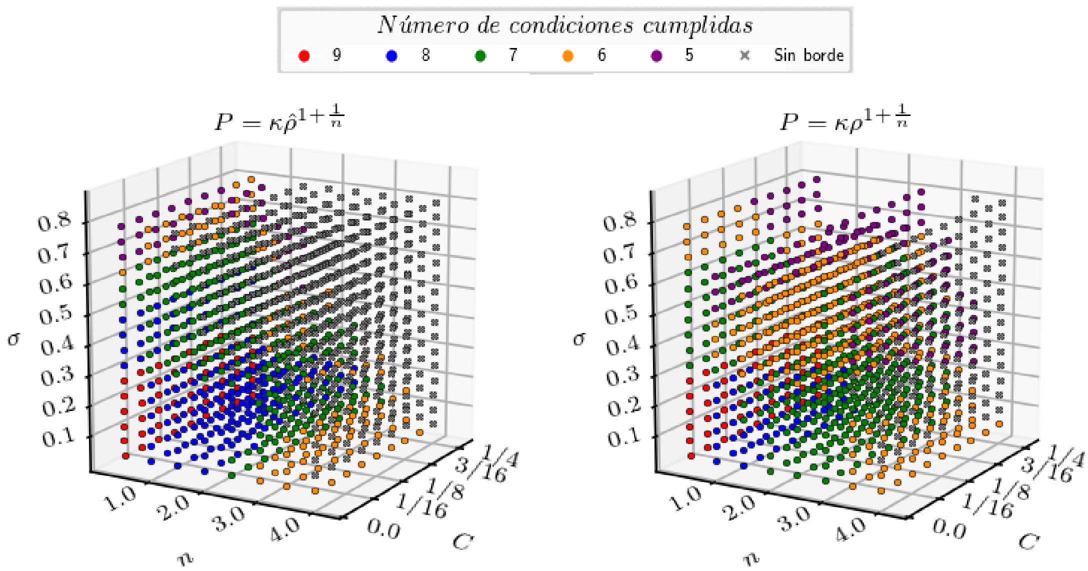
$$\left(\ddot{\psi^n}\right) = n\left[(n-1)\,\psi^{n-2}\left(\dot{\psi}\right)^2 + \psi^{n-1}\ddot{\psi}\right] \qquad \text{y} \tag{5.46}$$

$$(\ddot{\Psi^n}) = n\left[(n-1)\,\Psi^{n-2}\left(\dot{\Psi}\right)^2 + \Psi^{n-1}\ddot{\Psi}\right], \tag{5.47}$$

respectivamente.
Los resultados muestran que solo aquellos perfiles de densidad enteramente cóncavos serán estables ante movimientos convectivos. En las configuraciones modeladas (figura 5.9) ocurre cuando el índice polítropo n es menor que 1.0. La gráfica de la izquierda con índice polítropo n = 0.8 y distintos valores de σ. La gráfica de la derecha con σ = 0.2 para distintos valores de n. A medida que σ aumenta, los modelos con n = 0.8 dejan de cumplir esta condición.

5.1.10 Espacio de parámetros A continuación se presentan espacios de parámetros con base en el número de condiciones cumplidas para cada una de las EoS utilizadas. Los parámetros C, n y σ variando desde 0 hasta 0.25, 0.5 a 4.0 y 0.05 a 0.8, respectivamente. Las figuras 5.10 y 5.11 recopilan los resultados obtenidos en este trabajo.
En la figura 5.10 izquierda se observa que a medida que σ y n aumentan, aparecen configuraciones en las que no se pudo determinar el borde de la esfera, debido a que no se cumplió (por más grande que fuera el intervalo de integración) la condición $0 \leq P(\xi) \leq 10^{-15}$. Por lo tanto el problema de valor en la frontera no tiene solución [62]. A estos modelos se les ha llamado «sin borde» y son representados en el espacio de parámetros con una «x».

Figura 5.10: Espacio de parámetros para las EoS polítropa estándar.



En cuanto a la EoS polítropa II (figura 5.10 derecha), los modelos que cumplen

4 condiciones o menos no se muestran en la figura. En este caso, solo algunos modelos con $n = 4.0$ no tienen borde. Los dos espacios difieren principalmente en la cantidad de modelos sin borde, siendo mucho mayor el número para la EoS polítropa con densidad de masa.

Para cada índice polítropo n (desde 0.5 hasta 4.0) de la EoS polítropa maestra se construyó un espacio de parámetros. En la figura 5.11 ($n = 0.5$) se observa que un gran número de modelos cumplen con todas las condiciones de aceptabilidad física. A medida que n es mayor el número de condiciones cumplidas -para un mismo conjunto de parámetros- disminuye (figuras H.4, H.5, H.6, H.7 en apéndice H). Tanto así que, cuando $n = 4.0$, ningún modelo cumple todas las condiciones. Para esta EoS, a todos los modelos se les determinó el borde. Los modelos que cumplen 4 condiciones o menos no se muestran en la figura.

Finalmente, en la figura 5.12, se presenta el espacio de parámetros correspondiente a los trabajos de R. F. Tooper [60] (C = 0), y L. Herrera y W. Barreto [32] ($C = 0$, -0.25 y 0.25) para la EoS polítropa II (densidad de energía). En general, cuando $C > 0$, se obtienen modelos más estables para valores pequeños del factor de anisotropía.

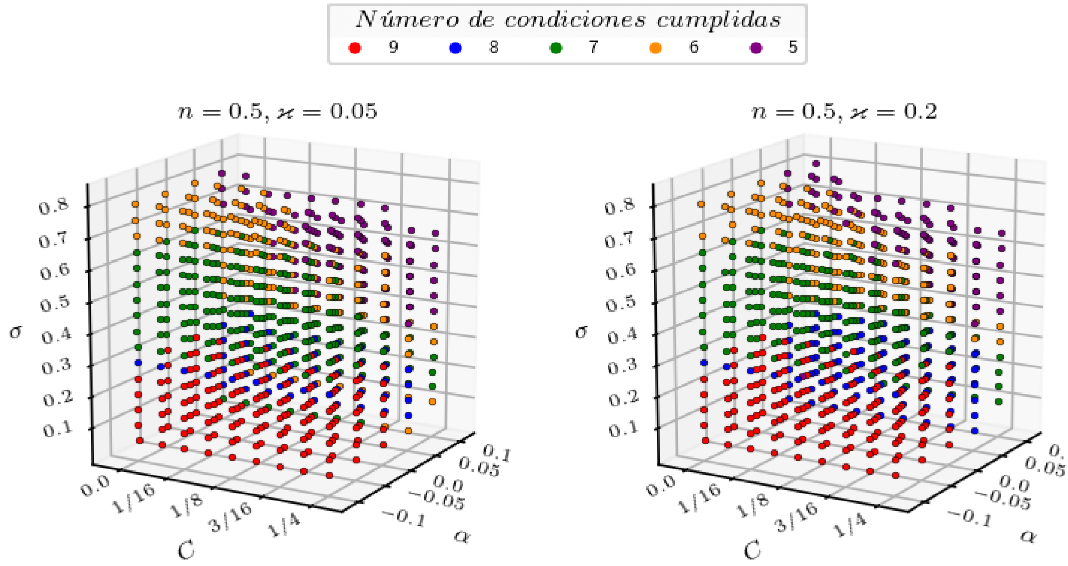
5.1.11 Los parámetros más significativos La variación de n describe un amplio rango de materiales. Para la EoS polítropa II, el caso $n = 0$ es asociado con un fluido incompresible [6], mientras que $n = 3$ es usado para modelar un gas completamente degenerado en el límite relativista [36].

El parámetro σ, la razón entre la presión y la densidad de energía en el centro, indica la rigidez del material y qué tan relevante es el régimen relativista. En el caso donde $\sigma \to 0$, la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (1.10) se reduce a la ecuación de equilibrio hidrostático newtoniana [60].

El coeficiente del término lineal α en la EoS polítropa maestra está estrechamente relacionado con la velocidad del sonido. Valores positivos de α disminuyen la velocidad del sonido radial y tangencial, mientras que valores negativos tienen el efecto contrario. Sin embargo, los modelos con valores negativos son más estables (ver figura 5.11).

Por último, el parámetro $\varkappa$ (la razón entre la densidad en el borde y la densidad central) no tiene mayor incidencia en la variación del espacio de parámetros. Cuando $\varkappa$ = 0.05 (figura 5.11 izquierda) el espacio de parámetros no difiere notablemente del mismo conjunto de datos implementado con $\varkappa = 0.2$ (figura 5.11 derecha). La siguiente sección es dedicada al análisis del signo del factor de anisotropía C.

Figura 5.11: Espacio de parámetros para la EoS polítropa maestra, para modelos con índice polítropo $n = 0.5$.



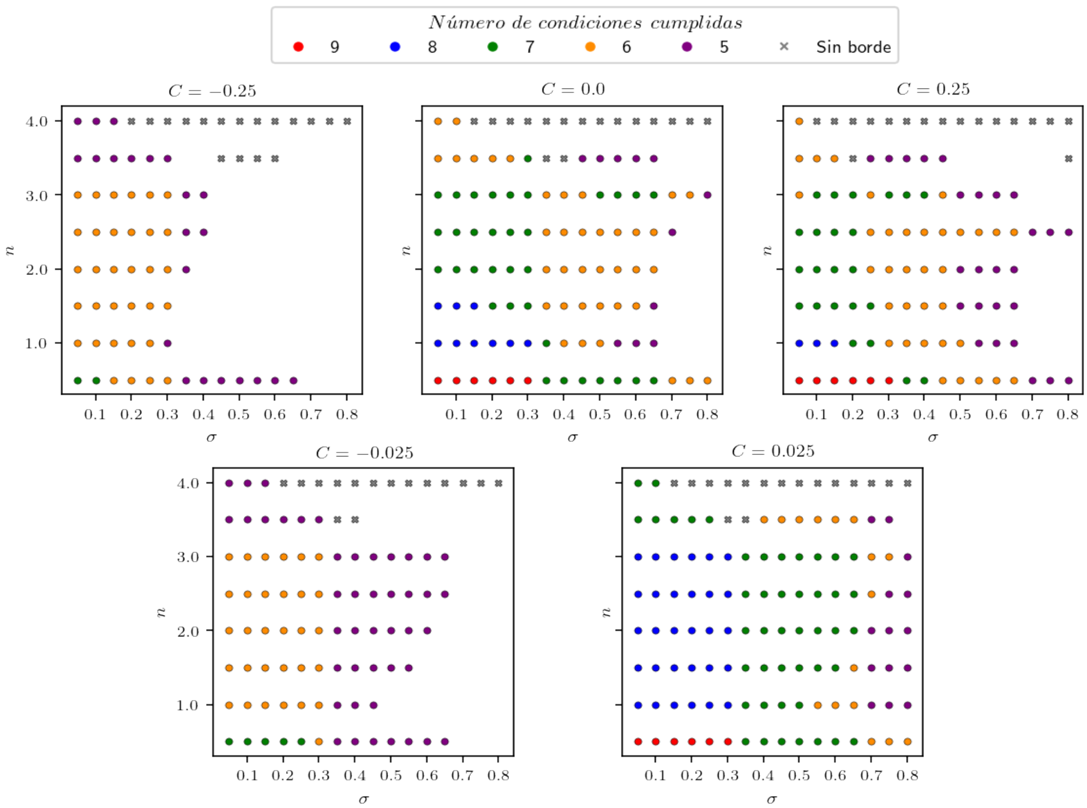
5.1.12 Sobre el signo de la anisotropía Recordando que la presión anisótropa está definida como

$$\Delta \equiv P_{\perp} - P = Cr(\rho + P) \left[\frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} \right] ,$$

es claro que existen dos posibilidades para el signo del factor de anisotropía C. Cuando es positivo, $P_{\perp} > P$, y una fuerza de repulsión -en dirección contraria a la fuerza gravitacional- aparece en la ecuación de equilibrio hidrostático (1.10). Cuando es negativo, se tiene $P_{\perp} < P$, implicando una fuerza de atracción en el mismo sentido que la fuerza gravitacional. Sin embargo, modelos con C negativo violan la condición **C2**, pues $P_{\perp b} < 0$ si $\rho_b \neq 0$. Por otra parte, la condición **C3** y la ecuación (4.2) requieren que h $(= 1 - 2C)$ sea positivo. Por lo tanto, el valor del factor de anisotropía se restringe a $0 < C < 1/2$.

Por otra parte, cuando $\rho_b = 0$, la presión tangencial en el borde también es cero. Por lo tanto, C podría tomar valores negativos cuando se utilizan EoS como (2.1) y (2.2). En la figura 5.12 se presenta el espacio de parámetros para la EoS polítropa II, para valores específicos del factor de anisotropía. En esta se observa cómo los modelos con C positivo son más estables que su contraparte negativa.

Figura 5.12: Rebanadas del espacio de parámetros de la EoS polítropa II para distintos valores de C.



5.2 RESULTADOS DE MODELOS ANALÍTICOS

A continuación se mostrarán modelos EoS-1 y EoS-2 para distintos valores del índice polítropo n, con parámetros listados en la tabla 5.1. Los otros valores de α corresponden a: -0.10 ($n =$ 1.0), -0.15 ($n =$ 1.5) y -0.25 ($n =$ 2.0). El parámetro σ puede tomar valores entre 0.10 y 0.18 aproximadamente.

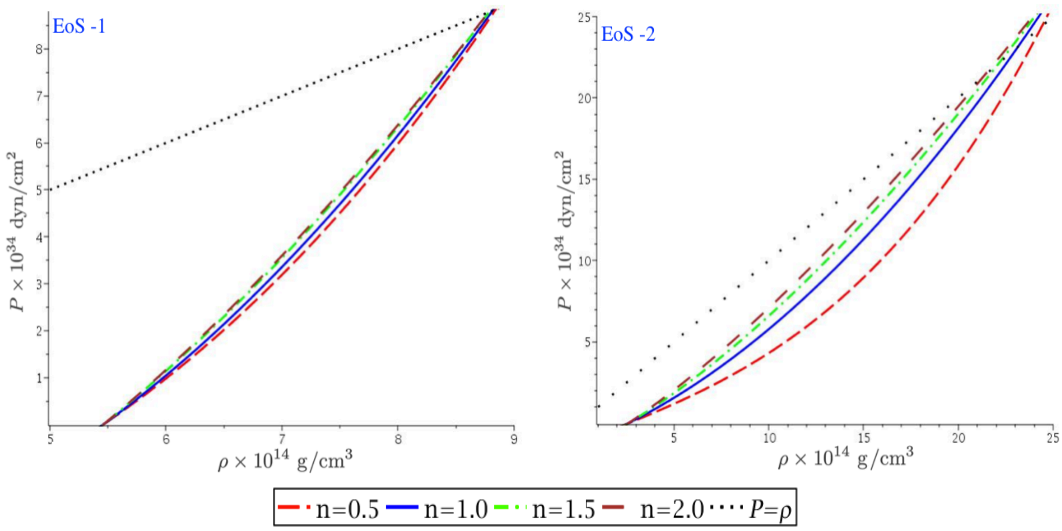
Tabla 5.1: Parámetros físicos para modelos EoS-1 y EoS-2

Parámetros de entrada	EoS-1	EoS-2
$\mu = 2M/r_b$	0.43	0.34
$\varkappa = \rho_b/\rho_c$	0.60	0.10
α	0.05 ($n =$ 0.5)	0.05

La figura 5.13 muestra la presión radial contra densidad de energía, con densidades correspondientes a un objeto de radio $r_b = 10$ Km y $\sigma =$ 0.12, para ambas configuraciones materiales. La línea punteada representa el límite $P = \rho$. Los modelos EoS-2 resultantes son más rígidos que los modelos EoS-1.
La distribución de las variables físicas y funciones métricas para el interior de los

modelos se muestran en las figuras 4.2 (EoS-1) y 4.3 (EoS-2). Como se indica en **C1**, e$^{2\lambda} \geq 1$ y tiene un máximo en el borde de la esfera, mientras que e$^{2\nu}$ siempre es menor que la unidad y tiene un mínimo en el centro. En este caso, para $\sigma =$ 0.12, la densidad y las presiones -radial y tangencial- decrecen rápidamente como una función del radio pero siempre manteniendo las condiciones $\rho > P$ y $\rho > P_{\perp}$. Esto garantiza el cumplimiento de **C2**, **C3**, y **C4**.

Figura 5.13: Presión radial como función de la densidad de energía para modelos EoS-1 (izquierda) y EoS-2 (derecha).



Como se muestra en la figura 5.14, el índice adiabático es mayor que 4/3 en ambas casos, cumpliendo con la condición **C6**. Mientras que en la figura 5.15 se muestra que las velocidades del sonido, radial y tangencial, no exceden la velocidad de la luz (condición **C5**).

Las condiciones **C7** y **C9** tienen que ver exclusivamente con las propiedades intrínsecas de las funciones semilla. En el caso de **C7**, se puede observar que las ecuaciones (4.28) y (4.33) son las masas correspondientes a las ecuaciones de estado EoS-1 y EoS-2, respectivamente. Por inspección, de (4.28) es sencillo observar que M es una función lineal de la densidad de energía central (ρ_c). Mientras que (4.33) tiene un comportamiento asintótico hacia un valor de $\approx$ 1.31 $M_{\odot}$ (ver gráfica de la izquierda en la figura 5.16).

Por otra parte, para la condición **C9** ($\rho'' < 0$) es fácil apreciar que para la EoS-1:

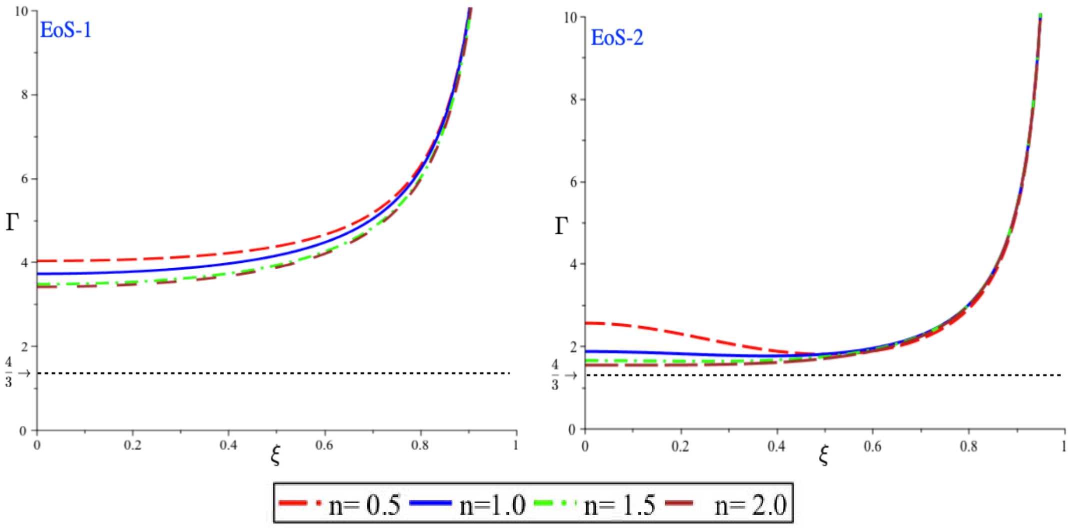
$$\rho''(r) = -\frac{5B}{4\pi} = \text{constant} < 0\,,$$

ya que $B > 0$. Con los valores de la tabla 5.1, $\rho'' =$ -0.054 cm^{-4}. Mientras que para la EoS-2 se tiene:

$$\rho''(r) = \frac{A\,(2A - B)\,(3A^2r^4 + 22Ar^2 - 5)}{8\pi(1 + Ar^2)^4}\,,$$

cuyo perfil es mostrado en la parte derecha de la figura 5.16. Claramente, EoS-1 cumple el criterio de estabilidad convectiva **C9**, pero EoS-2 es estable solo en una región cerca del núcleo.

Figura 5.14: Índice adiabático para modelos EoS-1 y EoS-2.



Respecto a la estabilidad contra fracturas (**C8**), en la figura 5.17 se muestra la ecuación de equilibrio perturbada $\delta\mathcal{R}/\delta\rho$. Los recuadros muestran la misma función sin la reacción del gradiente de presión ($\mathcal{R}_4$ en (5.41)). Claramente, cuando la perturbación en la densidad no afecta al gradiente de presión, el signo de la fuerza radial total puede cambiar apareciendo fracturas dentro de la configuración material. Sin embargo, si el gradiente de presión reacciona, entonces $\delta\mathcal{R}/\delta\rho$ no cambia de signo, y el modelo es estable ante fracturas [25]. Nótese que los modelos EoS-1 siguen siendo estables ante perturbaciones locales de la densidad cuando no se tiene en cuenta la reacción del gradiente de presión, mientras que los modelos EoS-2 dejan de serlo.

Figura 5.15: Velocidad del sonido, radial y tangencial, al cuadrado para modelos EoS-1 y EoS-2.

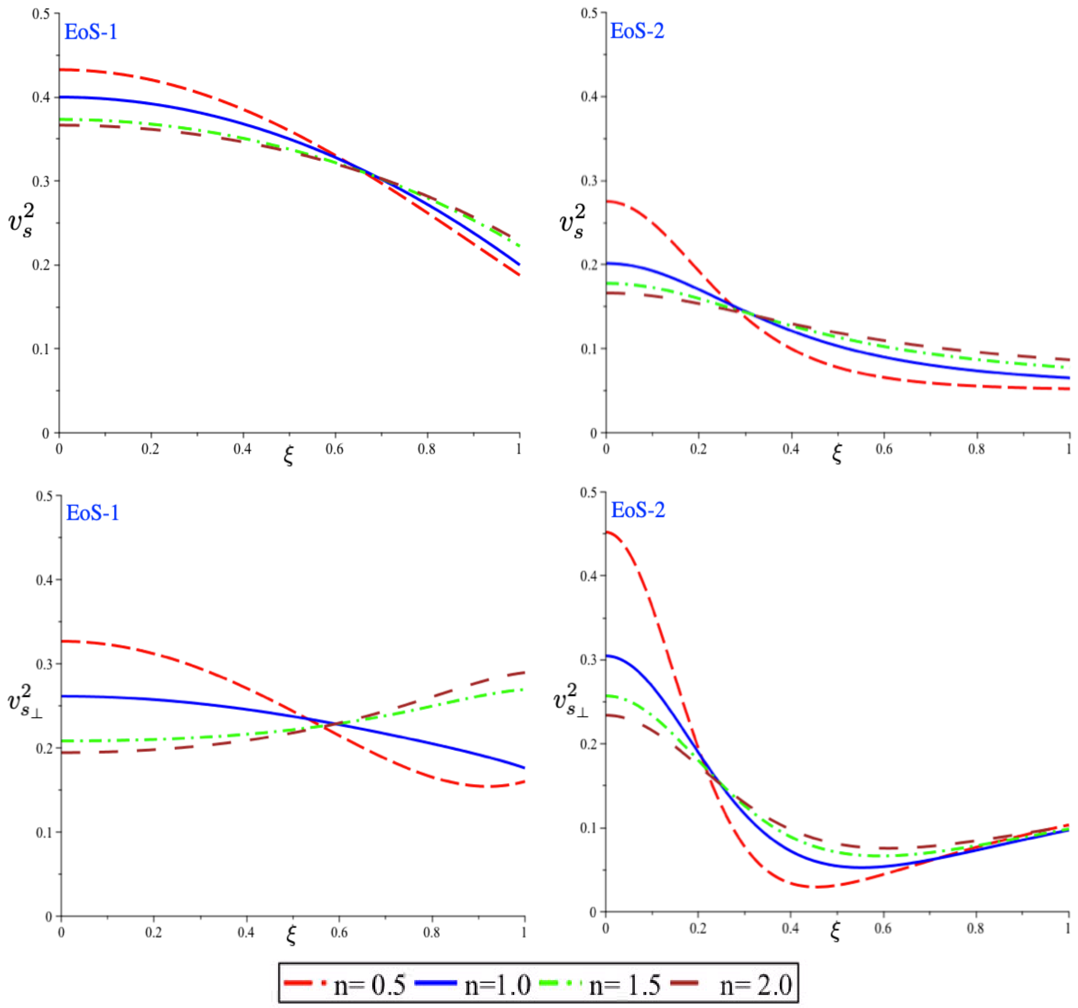


Figura 5.16: Masa total en función de la densidad central, y segunda derivada de la densidad de energía para modelos EoS-1 y EoS-2.

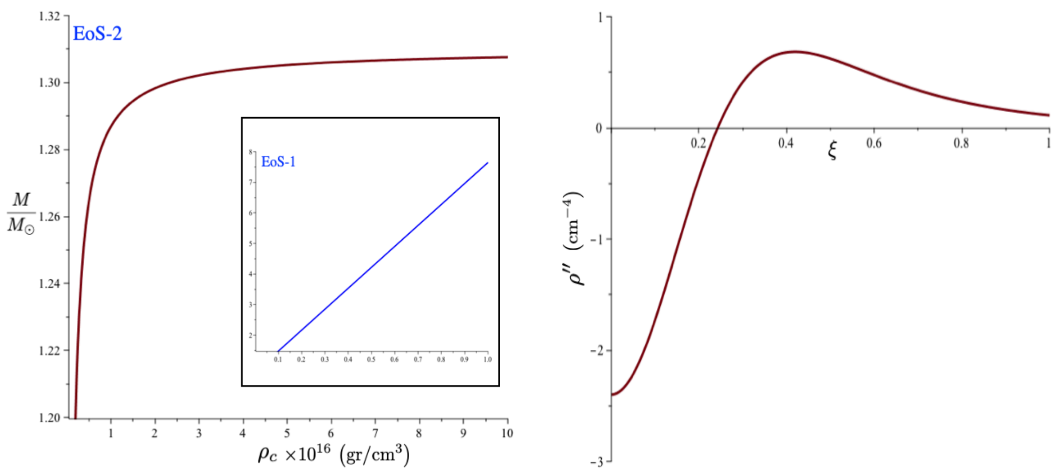
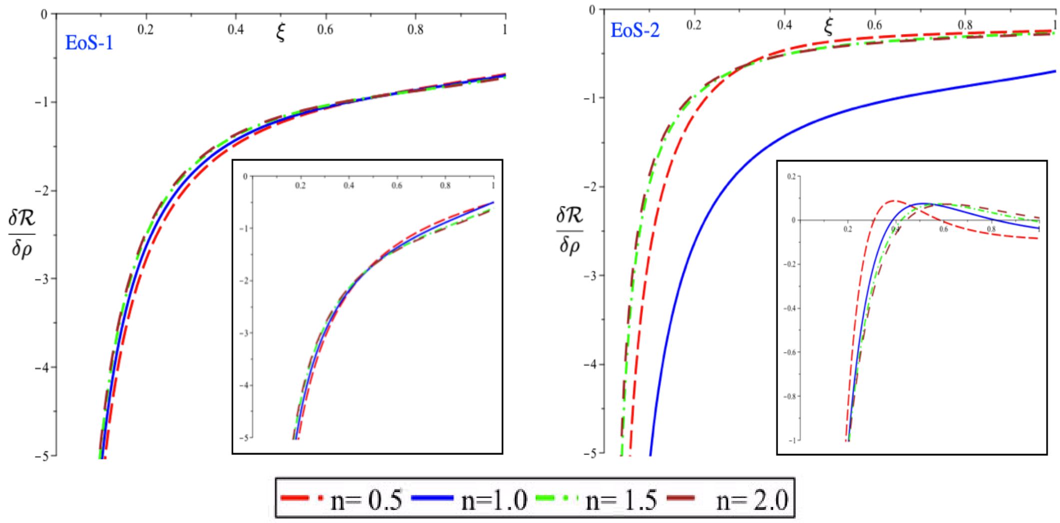


Figura 5.17: Ecuación de equilibrio perturbada para modelos EoS-1 y EoS-2.



CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

En general, y con base en el espacio de parámetros presentado, se concluye que modelos con índice polítropo bajo -materia poco compresible- cumplen mayor número de condiciones de aceptabilidad física. Por lo tanto, estos son más estables e ideales para modelar objetos astrofísicos compactos como estrellas de neutrones. La alta rigidez en los modelos desfavorece la estabilidad de los objetos en estudio, ya sea incumpliendo la condición sobre la traza, violando el principio de causalidad o presentado fracturas. Por otra parte, se concluye que la EoS polítropa maestra es más apta para modelar objetos astrofísicos pues cumple con más condiciones que las otras dos EoS polítropas.

De manera contraria, la EoS polítropa I, donde no fue posible encontrar el borde o superficie de la estrella para un alto número de modelos [62], hace pensar que EoS de este tipo no son compatibles con la naturaleza propia de objetos compactos.

Se precisó un algoritmo para generar soluciones anisótropas exactas a partir de EoS barótropa y un ansatz para la función métrica $\lambda(r)$. Utilizando este procedimiento con la EoS polítropa maestra, se obtuvieron modelos analíticos que cumplieron con las condiciones de aceptabilidad física estudiadas. Los resultados obtenidos con estos modelos coinciden con los obtenidos en modelos numéricos.

Asimismo, se modelaron esferas autogravitantes anisótropas utilizando ecuaciones de estado polítropas y un ansatz para la anisotropía de la presión [15]. La solución de las ecuaciones de estructura estelar se obtuvo por integración numérica. Posteriormente, la estabilidad de los modelos se evaluó a través de 9 condiciones de aceptabilidad física. Como resultado final se presentó un espacio de parámetros en función del número de condiciones cumplidas. Las conclusiones para cada una de las condiciones evaluadas se muestran a continuación:

- Todos los modelos estudiados cumplen con las condiciones de aceptabilidad **C1**, **C2** y **C3**. Esto garantiza soluciones libres de singularidades, condiciones de acoplamiento y configuraciones con densidad y presiones positivas que decrecen con el radio.

- En general, se encontró que solo aquellos modelos con σ (razón entre presión radial central y densidad central) menores o iguales a $1/3$ cumplen la condición sobre la traza **C4**.

- La condición **C5**, referente a la causalidad, dejó ver que modelos con alta rigidez (σ por encima de 0.5) propenden a tener velocidades del sonido mayores a la velocidad de la luz.

- En cuanto a la condición **C6**, las ecuaciones de estado polítropa I y polítropa II se ven limitadas en el índice polítropo n debido a la restricción sobre el índice adiabático Γ, encontrándose que solo cumplen modelos con $n \leq 3$. Sin embargo, para la ecuación de estado polítropa maestra esta restricción desaparece, observándose que todos los modelos cumplen con esta condición de aceptabilidad.

- El criterio de estabilidad de Harrison-Zeldovich-Novikov, para n entre 0.5 y 2.0, concluye que el aumento de la anisotropía (C) y del índice polítropo n desfavorece el número de modelos estables en las tres ecuaciones de estado polítropas. Para valores de n mayores que 2.5, no se presentó una tendencia clara en las ecuaciones de estado polítropa I y polítropa II. Sin embargo, para la polítropa maestra todos los modelos son inestables en este intervalo de n. Los valores críticos obtenidos para σ, en la EoS polítropa II,coinciden con los presentados en [6].

- Los modelos descritos, utilizando las tres ecuaciones de estado, son estables ante perturbaciones locales de la densidad para sigmas aproximadamente menores a 0.7. En cambio, para sigmas altos, se presenta fractura dentro de la configuración material. Sin embargo, estos modelos violan el principio de causalidad y la condición sobre la traza, por lo que no representan objetos astrofísicos reales. Esto último no concuerda con lo presentado en [56], donde uno de los dos modelos polítropos -con densidad de energía- estudiados presenta fracturas pero cumple con la condición de causalidad **C5**.

- El análisis bajo inestabilidades convectivas adiabáticas arrojó que solo aquellos modelos con índice polítropo muy bajo ($n \leq 1.0$) son estables ante movimientos convectivos. Además, se concluyó que las inestabilidades convectivas no afectan -en el cambio de signo- a la fuerza total generada debido a perturbaciones locales de la densidad (fracturas). También se observó que modelos con $\varkappa$ altos generan concavidad en el perfil de densidad, haciendo que esta condición se cumpla para índices polítropos un poco más altos.

La anisotropía en la presión fue analizada para valores negativos del factor de anisotropía C. En el caso de la EoS polítropa maestra, donde $\rho_b \neq 0$, la anisotropía negativa deriva en modelos que no cumplen **C2**. Por otra parte, para el caso de la EoS polítropa II, se mostró que los modelos con C positivo son más estables que su contraparte negativa. En general, modelos más estables se obtienen cuando C es pequeño. Claramente, este último resultado depende de la forma de la anisotropía.

Se presentó el espacio de parámetros correspondiente a los trabajos de R. F. Tooper [60] (C = 0), y L. Herrera y W. Barreto [32] ($C = 0$, -0.25 y 0.25) para la EoS polítropa II (densidad de energía).

Las 10 condiciones presentadas en [37] fueron reducidas a 8 a través del estudio analítico de las 3 primeras condiciones allí planteadas.

Como trabajo a futuro se puede pensar en modelos estelares conformado por distintos índices polítropos n, pues difícilmente un solo n podrá determinar toda la estructura de una estrella de neutrones. Esto se debe al amplio rango de densidades que puede haber en estas: distintas densidades significa distinta materia, distintas interacciones y, por lo tanto, distinta física.

Tabla 6.1: Parámetros para la solución numérica de la ecuación de Lane-Emden maestra, modelando dos candidatos de objetos compactos.

	Objeto			
Parámetros de entrada	J0737-3039 $n = 0.5$	J1518+4904 $n = 1.0$	GMn075 $n = 0.75$	PMn075 $n = 0.75$
C	0.09	0.125	0.05	0.05
α	-0.01	0.01	-0.01	0.0
$\varkappa$	0.05	0.15	0.17	0.0
σ	0.10	0.15	0.175	0.175
$\rho_c \times 10^{15}$ (g/cm^3)	0.66	1.79	1.41	1.41
Parámetros de salida				
M ($M_\odot$)	1.33	1.56	1.50	1.56
r_b (km)	11.49	9.88	10.0	10.9
μ	0.34	0.47	0.44	0.42
$\rho_b \times 10^{14}$ (g/cm^3)	0.33	2.69	2.4	0.0

6.1 MODELANDO OBJETOS REALES

A continuación se muestran 2 candidatos a objetos reales utilizando la ecuación de estado polítropa maestra: púlsar J0737-3039 [42] y púlsar 1518+49 [58]. Además, se presenta un modelo genérico con $M = 1.5\, M_\odot$ y $R = 10\, km$ (GMn075) y un modelo obtenido a partir de la EoS polítropa II (PMn075). Las densidades centrales utilizadas son propias de objetos compactos como estrellas de neutrones ($\sim 10^{15} g/cm^3$), al igual que las masas y radios totales obtenidos. Los parámetros y modelos descritos son presentados en la tabla 6.1.

Por otra parte, se presentan los parámetros de salida correspondientes a la tabla 5.1. Los resultados obtenidos son físicamente realistas y podrían modelar objetos compactos como el púlsar en PSR J1738+0333 [23] (EoS-1), y el compañero -de menor masa- en J0453+1559 [45] (EoS-2).

Tabla 6.2: Parámetros físicos de salida para modelos EoS-1 y EoS-2.

Parámetros de salida	EoS-1	EoS-2
$\rho_c \times 10^{15}$ (g/cm^3)	0.91	2.59
$\rho_b \times 10^{14}$ (g/cm^3)	5.46	2.59
M $(M_\odot)$	1.46	1.15

BIBLIOGRAFÍA

[1] M. Abramowicz. Polytropes in n-dimensional spaces. *Acta astronomica*, 33:313–318, 1983.

[2] F. Araújo and C. Chirenti. Newtonian and relativistic polytropes. *arXiv preprint arXiv:1102.2393*, 2011.

[3] M. Azam, S. A. Mardan, and M. A. Rehman. Cracking of compact objects with electromagnetic field. *Astrophysics and Space Science*, 359(1):14, Aug 2015.

[4] J. M. Bardeen. *Stability and dynamics of spherically symmetric masses in general relativity*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1965.

[5] P. Bhar, M. H. Murad, and N. Pant. Relativistic anisotropic stellar models with Tolman VII spacetime. *Astrophysics and Space Sciences*, 359:13, Sept. 2015.

[6] S. Bludman. Stability of general-relativistic polytropes. *The Astrophysical Journal*, 183:637–648, 1973.

[7] H. Bondi. Massive spheres in general relativity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 282(1390):303–317, 1964.

[8] R. L. Bowers and E. Liang. Anisotropic spheres in general relativity. *The Astrophysical Journal*, 188:657, 1974.

[9] H. A. Buchdahl. General relativistic fluid spheres. *Physical Review*, 116(4):1027, 1959.

[10] S. M. Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.

[11] R. Chan, L. Herrera, and N. Santos. Dynamical instability for radiating anisotropic collapse. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 265(3):533–544, 1993.

[12] S. Chandrasekhar. Dynamical instability of gaseous masses approaching the schwarzschild limit in general relativity. *Physical Review Letters*, 12(4):114, 1964.

[13] S. Chandrasekhar. A general variational principle governing the radial and the non-radial oscillations of gaseous masses. *The Astrophysical Journal*, 139:664, 1964.

[14] S. Chandrasekhar. *An introduction to the study of stellar structure*. Dover, New York, 1967.

[15] M. Cosenza, L. Herrera, M. Esculpi, and L. Witten. Some models of anisotropic spheres in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 22(1):118–125, 1981.

[16] T. Dallas and V. Geroyannis. The boundary conditions for relativistic polytropic fluid spheres. *Astrophysics and space science*, 201(2):249–271, 1993.

[17] M. Delgaty and K. Lake. Physical acceptability of isolated, static, spherically symmetric, perfect fluid solutions of einstein's equations. *Computer Physics Communications*, 115(2-3):395–415, 1998.

[18] K. Dev and M. Gleiser. Anisotropic stars ii: stability. *General relativity and gravitation*, 35(8):1435–1457, 2003.

[19] A. Di Prisco, E. Fuenmayor, L. Herrera, and V. Varela. Tidal forces and fragmentation of self-gravitating compact objects. *Physics Letters A*, 195(1):23–26, 1994.

[20] A. Di Prisco, L. Herrera, and V. Varela. Cracking of homogeneous self-gravitating compact objects induced by fluctuations of local anisotropy. *General Relativity and Gravitation*, 29(10):1239–1256, 1997.

[21] J. Droste. The field of a single centre in einstein's theory of gravitation, and the motion of a particle in that field. *Ned. Acad. Wet., SA*, 19:197, 1917.

[22] T. Feroze and A. A. Siddiqui. Charged anisotropic matter with quadratic equation of state. *General Relativity and Gravitation*, 43(4):1025–1035, 2011.

[23] P. Freire et al. The relativistic pulsar–white dwarf binary PSR J1738+ 0333–II. The most stringent test of scalar–tensor gravity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 423(4):3328–3343, 2012.

[24] G. González, A. Navarro, and L. A. Núñez. Cracking of anisotropic spheres in general relativity revisited. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 600, page 012014. IOP Publishing, 2015.

[25] G. A. Gonzalez, A. Navarro, and L. A. Nunez. Cracking isotropic and anisotropic relativistic spheres. *Canadian Journal of Physics*, 95(11):1089–1095, 2017.

[26] B. K. Harrison, K. S. Thorne, M. Wakano, and J. A. Wheeler. Gravitation theory and gravitational collapse. *Gravitation Theory and Gravitational Collapse*, 1965.

[27] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*, volume 1. Cambridge university press, 1973.

[28] H. Hernández, L. A. Núñez, and A. Vásquez-Ramírez. Convection and cracking stability of spheres in general relativity. *The European Physical Journal C*, 78(11):883, 2018.

[29] H. Hernández, D. Suárez-Urango, and L. Núñez. Acceptability conditions and relativistic barotropic equation of state. *Eur. Phys. J. C*, 81(241), 2021.

[30] L. Herrera. Cracking of self-gravitating compact objects. *Physics Letters A*, 165(3):206–210, 1992.

[31] L. Herrera. Stability of the isotropic pressure condition. *Physical Review D*, 101(10):104024, 2020.

[32] L. Herrera and W. Barreto. General relativistic polytropes for anisotropic matter: The general formalism and applications. *Physical Review D*, 88(8):084022, 2013.

[33] L. Herrera and W. Barreto. Newtonian polytropes for anisotropic matter: General framework and applications. *Physical Review D*, 87(8):087303, 2013.

[34] L. Herrera, E. Fuenmayor, and P. Leon. Cracking of general relativistic anisotropic polytropes. *Physical Review D*, 93(2):024047, 2016.

[35] L. Herrera and N. O. Santos. Local anisotropy in self-gravitating systems. *Physics Reports*, 286(2):53–130, 1997.

[36] G. P. Horedt. *Polytropes: applications in astrophysics and related fields*, volume 306. Springer Science & Business Media, 2004.

[37] B. Ivanov. Analytical study of anisotropic compact star models. *The European Physical Journal C*, 77(11):738, 2017.

[38] B. V. Ivanov. Maximum bounds on the surface redshift of anisotropic stars. *Physical Review D*, 65(10):104011, 2002.

[39] C. A. Kolassis, N. O. Santos, and D. Tsoubelis. Energy conditions for an imperfect fluid. *Classical and Quantum Gravity*, 5(10):1329, 1988.

[40] A. Kovetz. Schwarzschild's criterion for convective instability in general relativity. *Zeitschrift fur Astrophysik*, 66:446, 1967.

[41] A. Kovetz. Slowly rotating polytropes. *The Astrophysical Journal*, 154:999, 1968.

[42] A. G. Lyne et al. A double-pulsar system: a rare laboratory for relativistic gravity and plasma physics. *Science*, 303(5661):1153–1157, 2004.

[43] M. Mak and T. Harko. Anisotropic stars in general relativity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2030):393–408, 2003.

[44] S. Mardan, A. Asif, and I. Noureen. New classes of generalized anisotropic polytropes pertaining radiation density. *The European Physical Journal Plus*, 134(5):1–13, 2019.

[45] J. Martinez et al. Pulsar J0453+ 1559: a double neutron star system with a large mass asymmetry. *The Astrophysical Journal*, 812(2):143, 2015.

[46] C. W. Misner and D. H. Sharp. Relativistic Equations for Adiabatic, Spherically Symmetric Gravitational Collapse. *Physical Review*, 136:571–576, Oct. 1964.

[47] R. Nasheeha, S. Thirukkanesh, and F. Ragel. Anisotropic models for compact star with various equation of state. *The European Physical Journal Plus*, 136(1):1–20, 2021.

[48] U. S. Nilsson and C. Uggla. General relativistic stars: polytropic equations of state. *Annals of Physics*, 286(2):292–319, 2000.

[49] F. Özel and P. Freire. Masses, radii, and the equation of state of neutron stars. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 54:401–440, 2016.

[50] O. M. Pimentel, F. D. Lora-Clavijo, and G. A. González. Ideal magnetohydrodynamics with radiative terms: energy conditions. *Classical Quantum Gravity*, 34(7):075008, 2017.

[51] A. M. Raghoonundun. *Exact Solutions for Compact Objects in General Relativity*. PhD thesis, University of Calgary, Alberta-Canada, 2016.

[52] A. M. Raghoonundun and D. W. Hobill. Possible physical realizations of the Tolman VII solution. *Physical Review D*, 92(12):124005, Dec. 2015.

[53] M. Ruderman. Pulsars: structure and dynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 10(1):427–476, 1972.

[54] K. Schwarzschild. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin*, pages 189–196, 1916.

[55] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. John Wiley & Sons, 2008.

[56] M. Sharif and S. Sadiq. Cracking in anisotropic polytropic models. *Modern Physics Letters A*, 33(24):1850139, 2018.

[57] K. S. Thorne. Validity in general relativity of the schwarzschild criterion for convection. *The Astrophysical Journal*, 144:201, 1966.

[58] S. E. Thorsett and D. Chakrabarty. Neutron star mass measurements. I. Radio pulsars. *The Astrophysical Journal*, 512(1):288, 1999.

[59] R. C. Tolman. Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid. *Physical Review*, 55(4):364–373, 1939.

[60] R. F. Tooper. General relativistic polytropic fluid spheres. *The Astrophysical Journal*, 140:434, 1964.

[61] R. F. Tooper. Stability of massive stars in general relativity. *The Astrophysical Journal*, 140:811–814, 1964.

[62] R. F. Tooper. Adiabatic fluid spheres in general relativity. *The Astrophysical Journal*, 142:1541, 1965.

[63] Y. B. Zeldovich and I. D. Novikov. *Relativistic astrophysics. Vol.1: Stars and relativity*. University of Chicago Press, 1971.

ANEXO A

SOBRE LA CONDICIÓN DE ACEPTABILIDAD C1

Las 10 condiciones de aceptabilidad presentadas en [37] pueden ser reducidas a 8 si se integran las tres primeras condiciones: 1) potenciales métricos positivos, finitos y libre de singularidades en el interior de la esfera, 2) condición de acoplamiento en la superficie de la esfera $r = r_b$, y 3) disminución del corrimiento al rojo interior (Z) al aumentar r. Veamos:
El coeficiente métrico e$^{-2\lambda}$, dado por (1.8), será positivo siempre y cuando

$$\frac{2m}{r} < 1\,, \tag{A.1}$$

ya que si la densidad es continua y mayor que cero, entonces la masa también lo será. Además, es finito en el centro puesto que m/r en este punto es igual a cero, debido a que la función masa cae más rápido al depender de r^3.
Por otra parte, la derivada del potencial métrico ν, dado por (1.9), siempre será positiva puesto que m, P y r siempre son positivos, y e$^{2\lambda} > 0$ si se garantiza (A.1). Por lo tanto, ν siempre será una función creciente. Aplicando la condición de acoplamiento y teniendo en cuenta (A.1) se tiene

$$\mathrm{e}^{2\nu_b} = 1 - \frac{2M}{r_b} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{2\nu_b} < 1\,,$$

y por consiguiente

$$cte < \mathrm{e}^{2\nu(r)} < 1\,. \tag{A.2}$$

Es simple ver que el corrimiento al rojo interior $Z(r) = \mathrm{e}^{-2\nu} - 1$ siempre disminuirá a medida que r aumente, puesto que e$^{-2\nu(r)}$ es decreciente. En conclusión, es suficiente con garantizar que $2m/r < 1$ para que se cumplan estas tres condiciones de aceptabilidad.

ANEXO B

FRACTURAS

El enfoque de fracturas desarrollado por González, Navarro y Núñez [25] propone un nuevo esquema para analizar la estabilidad de esferas autogravitantes al examinar las influencias de las fluctuaciones locales de la densidad en la estabilidad de configuraciones de materia.

Una perturbación en la densidad, $\rho \to \rho + \delta\rho$, induce una perturbación de su gradiente,

$$\rho'(\rho + \delta\rho) \approx \rho'(\rho) + \delta\rho' = \rho'(\rho) + \frac{\mathrm{d}\rho'}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho\,, \tag{B.1}$$

donde las variables primadas expresan derivadas respecto a la coordenada radial, y esta debe ser consistente con la expresión

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\rho + \delta\rho] = \rho'(\rho) + \delta\rho' = \rho'(r) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\delta\rho, \tag{B.2}$$

de tal manera que se pueda intercambiar la prima y la δ así

$$\delta\rho' = \frac{\mathrm{d}\rho'}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\delta\rho. \tag{B.3}$$

Para tener un esquema de perturbación consistente, se debe considerar perturbaciones locales de la densidad, las cuales pueden ser descritas apropiadamente por cualquier función de soporte compacto, $\delta\rho = \delta\rho(r)$, definida en un intervalo cerrado $\Delta\tilde{r} \ll r_b$, siendo r_b el radio total de la configuración.

Estas perturbaciones locales generan fluctuaciones en la masa, la presión radial, la presión tangencial y el gradiente de presión, las cuales pueden ser representadas por términos lineales en la fluctuación de la densidad como

$$P(\rho + \delta\rho) \approx P(\rho) + \delta P \approx P(\rho) + \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho\,, \tag{B.4}$$

$$P_\perp(\rho + \delta\rho) \approx P_\perp(\rho) + \delta P_\perp \approx P_\perp(\rho) + \frac{\mathrm{d}P_\perp}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho\,, \tag{B.5}$$

$$P'(\rho + \delta\rho) \approx P'(\rho) + \delta P' \approx P'(\rho) + \frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho\,, \tag{B.6}$$

$$m(\rho + \delta\rho) \approx m(\rho) + \delta m \approx m(\rho) + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho\,, \tag{B.7}$$

donde la última parte en cada ecuación representa la variable perturbada calculada por medio de una expansión en series de Taylor a primer orden.

Para establecer el efecto de las perturbaciones en la fuerza total, se expande (3.1) como

$$\mathcal{R} \approx \mathcal{R}_0 \left(\rho, P, P_\perp, P', m\right) + \delta\mathcal{R}, \tag{B.8}$$

donde

$$\delta\mathcal{R} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \rho}\delta\rho + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial m}\delta m + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P}\delta P + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P_\perp}\delta P_\perp + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P'}\delta P' \tag{B.9}$$

es la ecuación de equilibrio hidrostático perturbada y

$$\mathcal{R}_0(\rho, P, P_\perp, P', m) = 0 \tag{B.10}$$

ya que inicialmente la configuración está en equilibrio.

Las fracturas serán identificadas cuando se presente un cambio de signo en la ecuación de equilibrio perturbada (B.9).

ANEXO C

ESTABILIDAD CONVECTIVA

Cuando un elemento de fluido es desplazado hacia el centro de la configuración, si su densidad se incrementa más rápido que la densidad del fluido que le rodea (ρ_s), entonces el elemento de fluido (ρ_e) caerá hacia el centro de la esfera y el objeto será inestable bajo este tipo de perturbación. Si, por el contrario, la densidad del elemento es menor que la del medio entonces este retornará a su posición inicial y la esfera será estable frente a perturbaciones convectivas. Se tiene entonces:

- Si $\rho_e > \rho_s$, la gravedad tenderá a atraer al elemento de fluido hacia el centro de la esfera y el sistema será inestable.
- Si $\rho_e = \rho_s$, el sistema será metaestable.
- Si $\rho_e < \rho_s$, el elemento de fluido retornará a su posición inicial y el sistema será estable.

Con base en lo anterior y siguiendo a Bondi [7], Hernández, Núñez y Vásquez-Ramírez [28] proponen un criterio de estabilidad teniendo en cuenta la flotabilidad del sistema. Para esto consideran un cubo infinitesimal con densidad $\rho(r_p)$ que es desplazado hacia el centro de la esfera y cuya posición inicial es denotada como r_p. Se tiene entonces:

$$\rho(r_p) \rightarrow \rho(r_p) + \delta\rho(r)\,, \quad \text{siendo} \quad \delta\rho(r) = \rho'(r)(-\delta r) \quad \text{y} \quad r = r_p - \delta r\,,$$

donde r es la posición actual del cubo y $-\delta r$ el desplazamiento hacia el centro. Ya que $\rho'(r)$ es menor que cero, entonces $\delta\rho(r)$ es una cantidad positiva, y la densidad del cubo luego de ser desplazado siempre será mayor que al inicio. Por otra parte, al expandir la densidad del medio que rodea al cubo desplazado se obtiene:

$$\rho(r_p - \delta r) \approx \rho(r_p) + \rho'(r_p)(-\delta r)\,. \tag{C.1}$$

El sistema será estable contra convección si la densidad del medio es mayor o igual que la densidad del cubo, entonces:

$$\rho(r_p) + \rho'(r_p)(-\delta r) \;\geq\; \rho(r_p) + \rho'(r)(-\delta r)\;, \quad \text{y por lo tanto} \quad \rho'(r_p) \leq \rho'(r).$$

Finalmente, expandiendo $\rho'(r)$ alrededor de r_p se tiene:

$$\rho'(r_p) + \rho''(r_p)\delta r \;\leq\; \rho'(r_p) \quad \Rightarrow \quad \rho''(r) \leq 0\,,$$

es el criterio de estabilidad adiabática contra convección. Por lo tanto, los perfiles de densidad con la segunda derivada menor o igual que cero serán estables contra movimientos convectivos adiabáticos.

ANEXO D

ECUACIÓN DE LANE-EMDEN MAESTRA

La ecuación de equilibrio hidrostático (4.2) puede escribirse como

$$\frac{r\,(r-2m)}{\rho+P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}+h\left(m+4\pi P r^3\right)=0\,. \tag{D.1}$$

Proponiendo el cambio de variable para la densidad dado por

$$\rho=\rho_c\Psi^n\,, \tag{D.2}$$

se tiene que la presión radial es

$$P=\kappa\rho_c^{\gamma}\Psi^{n\gamma}+\alpha\rho_c\Psi^n-\beta=\kappa\rho_c^{1+\frac{1}{n}}\Psi^{n+1}+\alpha\rho_c\Psi^n-\beta\,, \tag{D.3}$$

y su gradiente será

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}=\kappa\rho_c^{1+\frac{1}{n}}(n+1)\Psi^n\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}r}+\alpha\rho_c n\Psi^{n-1}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}r}\,. \tag{D.4}$$

Ahora, reemplazando (D.2), (D.3) y (D.4) en (D.1) queda

$$\begin{aligned}\frac{r\,(r-2m)}{\rho_c\Psi^n+\kappa\rho_c^{1+\frac{1}{n}}\Psi^{n+1}+\alpha\rho_c\Psi^n-\beta}&\left[\kappa\rho_c^{1+\frac{1}{n}}(n+1)\Psi^n+\alpha\rho_c n\Psi^{n-1}\right]\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}r}\\ &+h\left[m+4\pi\left(\kappa\rho_c^{1+\frac{1}{n}}\Psi^{n+1}+\alpha\rho_c\Psi^n-\beta\right)r^3\right]=0\,,\end{aligned} \tag{D.5}$$

y factorizando $\rho_c\Psi^n$ en el primer miembro es

$$\begin{aligned}\frac{r\,(r-2m)}{1+\kappa\rho_c^{\frac{1}{n}}\Psi+\alpha-(\beta/\rho_c\Psi^n)}&\left[\kappa\rho_c^{\frac{1}{n}}(n+1)+\frac{\alpha n}{\Psi}\right]\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}r}\\ &+h\left[m+4\pi\left(\kappa\rho_c^{1+\frac{1}{n}}\Psi^{n+1}+\alpha\rho_c\Psi^n-\beta\right)r^3\right]=0\,.\end{aligned} \tag{D.6}$$

Luego, introduciendo

$$r=a\xi\,,\quad \Upsilon=\kappa\rho_c^{\frac{1}{n}}\,,$$

y factorizando ρ_c en el segundo miembro

$$\begin{aligned}\frac{a^2\xi\,[\xi-(2m/a)]}{1+\Upsilon\Psi+\alpha-(\beta/\rho_c)\,\Psi^{-n}}&\left[\Upsilon(n+1)+\frac{\alpha n}{\Psi}\right]\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}\\ +h\left\{m+4\pi\rho_c\left[\Upsilon\Psi^{n+1}+\alpha\Psi^n-(\beta/\rho_c)\right](a\xi)^3\right\}&=0\,.\end{aligned} \tag{D.7}$$

Multiplicando todo por $1/4\pi a^3\rho_c$ se tiene

$$\begin{aligned}\frac{a^2\xi\left[\xi-(2m/a)\right]}{(1+\alpha)+\Upsilon\Psi-(\beta/\rho_c)\,\Psi^{-n}}\left[\Upsilon(n+1)+\frac{\alpha n}{\Psi}\right]\frac{1}{4\pi\rho_c a^4}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}\\ +h\left\{\frac{m}{4\pi\rho_c a^3}+\xi^3\left[\Upsilon\Psi^{n+1}+\alpha\Psi^n-(\beta/\rho_c)\right]\right\}=0\,.\end{aligned} \tag{D.8}$$

Introduciendo la masa adimensional como

$$\eta(\xi)=\frac{m}{4\pi a^3\rho_c} \tag{D.9}$$

se tiene que la ecuación de equilibrio hidrostático ahora es

$$\begin{aligned}\frac{\xi\left[\xi-2\left(4\pi\rho_c a^2\eta\right)\right]}{(1+\alpha)+\Upsilon\Psi-(\beta/\rho_c)\,\Psi^{-n}}\left[\Upsilon(n+1)+\frac{\alpha n}{\Psi}\right]\frac{1}{4\pi\rho_c a^2}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}\\ +h\left\{\eta+\xi^3\left[\Upsilon\Psi^{n+1}+\alpha\Psi^n-(\beta/\rho_c)\right]\right\}=0\,.\end{aligned} \tag{D.10}$$

Por último, haciendo que

$$\frac{\Upsilon(n+1)}{4\pi a^2\rho_c}=1\,,$$

se tiene que la ecuación de equilibrio hidrostático adimensional es

$$\begin{aligned}\frac{\xi\left[\xi-2\Upsilon\left(n+1\right)\eta\right]}{(1+\alpha)+\Upsilon\Psi-(\beta/\rho_c)\,\Psi^{-n}}\left[1+\frac{\alpha n}{\Upsilon(n+1)\Psi}\right]\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}\\ +h\left\{\eta+\xi^3\left[\Upsilon\Psi^{n+1}+\alpha\Psi^n-(\beta/\rho_c)\right]\right\}=0\,.\end{aligned} \tag{D.11}$$

Ahora, evaluando la presión en el borde ($P(r_b)=0$) se tiene

$$0=\kappa\rho_b^{1+\frac{1}{n}}+\alpha\rho_b-\beta \quad\Rightarrow\quad \beta=\kappa\rho_b^{1+\frac{1}{n}}+\alpha\rho_b\,, \tag{D.12}$$

y por otra parte, evaluando la presión en el centro, es decir, $P(r_c)=P_c$ se obtiene

$$P_c=\kappa\rho_c^{1+\frac{1}{n}}+\alpha\rho_c-\kappa\rho_b^{1+\frac{1}{n}}+\alpha\rho_b\,. \tag{D.13}$$

Entonces, despejando κ

$$\kappa=\frac{P_c-\alpha\left(\rho_c-\rho_b\right)}{\rho_c^{1+\frac{1}{n}}-\rho_b^{1+\frac{1}{n}}}=\frac{\rho_c\left\{(P_c/\rho_c)-\alpha\left[1-(\rho_b/\rho_c)\right]\right\}}{\rho_c^{1+\frac{1}{n}}\left[1-(\rho_b/\rho_c)^{1+\frac{1}{n}}\right]}\,, \tag{D.14}$$

y por lo tanto

$$\kappa\rho_c^{\frac{1}{n}}=\frac{\sigma-\alpha\left(1-\varkappa\right)}{1-\varkappa^{1+\frac{1}{n}}}=\Upsilon\,, \tag{D.15}$$

donde

$$\sigma = \frac{P_c}{\rho_c} \quad , \quad \varkappa = \frac{\rho_b}{\rho_c}\,, \tag{D.16}$$

y entonces

$$\beta/\rho_c = \Upsilon \varkappa^{1+\frac{1}{n}} + \alpha\varkappa \tag{D.17}$$

Por último, reemplazando (D.17) en (D.11) y despejando la derivada de Ψ respecto de ξ se obtiene la ecuación (4.15).

ANEXO E

TABLA DE RESULTADOS NUMÉRICOS

Tabla E.1: Resultados numéricos para el radio adimensional total (ξ_b) y la masa adimensional total (η_b).

n	σ	$\bar{\xi}_b$	$\bar{\eta}_b$	ξ_b	η_b	Error ξ_b	Error η_b
0.5	0.1	2.2899149	2.1743665	2.2896375	2.1743331	0.0121140	0.0015361
0.5	0.2	2.0008463	1.4374281	2.0002204	1.4374827	0.0312818	0.0037985
0.5	0.3	1.8013545	1.0360530	1.8010134	1.0360421	0.0189358	0.0010521
0.5	0.4	1.6543434	0.7912060	1.6541752	0.7912222	0.0101672	0.0020488
0.5	0.5	1.5408662	0.6296190	1.5407260	0.6296335	0.0090988	0.0022966
0.5	0.6	1.4502055	0.2466507	1.4501277	0.5164131	0.0053648	0.0459885
0.5	0.7	1.3758251	0.4341211	1.3756719	0.4341043	0.0111351	0.0038745
0.5	0.8	1.3135016	0.3717053	1.3132584	0.3717350	0.0185154	0.0079929
0.5	0.9	1.2603785	0.3231648	1.2600492	0.3232059	0.0261271	0.0127211
1.0	0.1	2.5990904	1.7514303	2.5990533	1.7516821	0.0014274	0.0143768
1.0	0.2	2.2770773	1.1426392	2.2770090	1.1430276	0.0029995	0.0339915
1.0	0.3	2.0641578	0.8191600	2.0642173	0.8192368	0.0028825	0.0215880
1.0	0.4	1.9132110	0.6249320	1.9132780	0.6250091	0.0035020	0.0123341
1.0	0.5	1.8008932	0.4981034	1.8007430	0.4981980	0.0083403	0.0189920
1.0	0.6	1.7143088	0.4100782	1.7141068	0.4101486	0.0117832	0.0171650
1.0	0.7	1.6457426	0.3460940	1.6460912	0.3461630	0.0211819	0.0199368
1.0	0.8	1.5902887	0.2978706	1.5906602	0.2979485	0.0233605	0.0261590
1.0	0.9	1.5446745	0.2604534	1.5450785	0.2605392	0.0261544	0.0329541
1.5	0.1	3.0384531	1.4822851	3.0388682	1.4818792	0.0136616	0.0273834
1.5	0.2	2.6993542	0.9603537	2.6996730	0.9604423	0.0118102	0.0092216
1.5	0.3	2.4930930	0.6883216	2.4938352	0.6881240	0.0297702	0.0287032
1.5	0.4	2.3610743	0.5270033	2.3623382	0.5268336	0.0535307	0.0322009
1.5	0.5	2.2749304	0.4225705	2.2758505	0.4225830	0.0404452	0.0029628
1.5	0.6	2.2192244	0.3505492	2.2202434	0.3505633	0.0459169	0.0040251

1.5	0.7	2.1847994	0.2984557	2.1859141	0.2985171	0.0510207	0.0205826
1.5	0.8	2.1658485	0.2593501	2.1671415	0.2594416	0.0596995	0.0352844
1.5	0.9	2.1584874	0.2291082	2.1600575	0.2292243	0.0727408	0.0506922
2.0	0.1	3.6991137	1.2986696	3.7011015	1.2966263	0.0537372	0.1573379
2.0	0.2	3.3982202	0.8402878	3.4021697	0.8393876	0.1162226	0.1071312
2.0	0.3	3.2711601	0.6054579	3.2742363	0.6053608	0.0940400	0.0160325
2.0	0.4	3.2479783	0.4679903	3.2503696	0.4680683	0.0736243	0.0166756
2.0	0.5	3.2962720	0.3800232	3.2981002	0.3801318	0.0554627	0.0285746
2.0	0.6	3.3991472	0.3200750	3.4009005	0.3201997	0.0515806	0.0389659
2.0	0.7	3.5468480	0.2772848	3.5484753	0.2774299	0.0458802	0.0523144
2.0	0.8	3.7330520	0.2456511	3.7350571	0.2458178	0.0537121	0.0678686
2.0	0.9	3.9530316	2.2216192	3.9549109	0.2218208	0.0475407	0.0909578
2.5	0.1	4.7819311	1.1692071	4.7852138	1.1685864	0.0686480	0.0530873
2.5	0.2	4.7206405	0.7605863	4.7274717	0.7604132	0.1447092	0.0227627
2.5	0.3	4.9855690	0.5556082	4.9900448	0.5557537	0.0897751	0.0261857
2.5	0.4	5.5448808	0.4385707	5.5474284	0.4387590	0.0459451	0.0429326
2.5	0.5	6.4335864	0.3664225	6.4337204	0.3665965	0.0020828	0.0474862
2.5	0.6	7.7273997	0.3201853	7.7240890	0.3203531	0.0428436	0.0523947
2.5	0.7	9.5224408	0.2904496	9.5122894	0.2906159	0.1066050	0.0572664
2.5	0.8	11.896799	0.2720695	11.873258	0.2722314	0.1978810	0.0595142
2.5	0.9	14.846216	0.2618675	14.798762	0.2619965	0.3196363	0.0492654
3.0	0.1	6.8258757	1.0784798	6.8318282	1.0781291	0.0872049	0.0325180
3.0	0.2	7.9506791	0.7130411	7.9582780	0.7132163	0.0955755	0.0245708
3.0	0.3	10.832767	0.5386306	10.824876	0.5389066	0.0728484	0.0512336
3.0	0.4	17.819725	0.4515841	17.755065	0.4518153	0.3628575	0.0511931
3.0	0.5	37.205905	0.4213950	36.834862	0.4215217	0.9972683	0.0300715
3.0	0.6	91.072151	0.4493197	89.004531	0.4491800	2.2703097	0.0310937
3.0	0.7	162.58420	0.5266224	157.41642	0.5260771	3.1785257	0.1035391
3.0	0.8	187.22718	0.5968721	181.54912	0.5961929	3.0327117	0.1137982
3.0	0.9	187.04853	0.6375377	181.97580	0.6369264	2.7119838	0.0958861

3.5	0.1	11.885462	1.0206889	11.881212	1.0206595	0.0357597	0.0028804
3.5	0.2	23.712771	0.7054464	23.567083	0.7058925	0.6143845	0.0603955
3.5	0.3	376.82058	0.6368433	322.07000	0.6371420	14.529614	0.0469095
3.5	0.4	13818.997	2.7345514	5766.5323	2.7211863	58.270978	0.4887493
3.5	0.5	2862.8296	2.0187202	2060.3227	2.0188945	28.031946	0.0086342
3.5	0.6	1640.3217	1.8365236	1317.8512	1.8368838	19.658979	0.0196131
3.5	0.7	1348.6870	1.7394286	1112.6243	1.7398914	17.503150	0.0266064
3.5	0.8	1305.3333	1.6776073	1076.1829	1.6781893	17.554932	0.0346923
3.5	0.9	1381.7216	1.6386898	1122.3716	1.6393844	18.770061	0.0423875
4.0	0.1	39.638016	1.0039294	38.961823	1.0043683	1.7059194	0.0437182
4.0	0.2	26236.577	11.886958	10987.800	11.845775	58.120298	0.3464570
4.0	0.3	62629.238	6.6479326	9016.0526	6.5989618	85.604084	0.7366320
4.0	0.4	13422356	128.89449	11740.483	5.4359746	99.912530	95.782617
4.0	0.5	5541106.3	76.919092	19888.179	5.8579897	99.641079	92.384219
4.0	0.6	4945111.5	59.744953	31003.555	8.5636548	99.373046	85.666313
4.0	0.7	7089655.1	52.170850	35491.419	11.283085	99.499392	78.391967
4.0	0.8	20204036	49.908999	35690.955	12.443796	99.823347	75.067030
4.0	0.9	25271×10^{10}	1761.1008	34637.677	12.677090	99.999863	99.280161

Resultados numéricos para el radio adimensional total (ξ_b) y la masa adimensional total (η_b) para distintos valores de n y σ. Las variables con barra son los resultados presentados en [16] para el mismo conjunto de datos. A la derecha, la comparación de los dos resultados a través del error relativo porcentual, tomando las variables con barra como valor teórico. Los errores obtenidos cuando $n < 3$ son menores a 0.2 % para ξ_b y menores a 0.16 % para η_b.

ANEXO F

INTEGRALES POLÍTROPAS

En las ecuaciones (4.25) y (4.30) la integral

$$I_p = 4\pi\kappa \int r\mathrm{e}^{2\lambda}\rho^{1+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}r + \mathbf{C}\,, \tag{F.1}$$

se dejó indicada. Aquí se muestran las soluciones para distintos valores de n.

F.1 EoS-1

• $n = \frac{1}{2}$:

$$I_p = -\frac{\kappa}{512\pi^2}\left[25Br^2\left(5Br^2+8A\right)+5\left(7A^2-25B\right)\mathrm{e}^{-2\lambda}-\frac{2A\left(19A^2-75B\right)}{\sqrt{A^2-4B}}\mathcal{Y}\right]\,,$$

donde

$$\mathcal{Y} = \mathrm{arctanh}\left(\frac{A+2Br^2}{\sqrt{A^2-4B}}\right)\,.$$

• $n = 1$

$$I_p = \frac{\kappa}{64\pi}\left[50Br^2+5A\mathrm{e}^{-2\lambda}-\frac{2\left(13A^2-50B\right)}{\sqrt{A^2-4B}}\mathcal{Y}\right]\,,$$

• $n = \frac{3}{2}$

Para este caso y el siguiente, se definirán las dos variables auxiliares

$$\mathcal{X}_1 = 5\sqrt{A^2-4B} \quad \text{y} \quad \mathcal{X}_2 = -5Br^2-3A\,,$$

de tal manera que

$$I_p = \frac{5\kappa}{128\pi^{\frac{2}{3}}\mathcal{X}_1}\left\{2\sqrt[3]{2}\sqrt{3}\left[\left(-A-\mathcal{X}_1\right)^{\frac{5}{3}}\left(\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_2\right)\right]-\sqrt[3]{2}\,\mathcal{T}-12\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2^{\frac{2}{3}}\right\}\,,$$

donde

$$\mathcal{T}_1 = \mathrm{arctan}\left(\frac{2\sqrt[3]{2\mathcal{X}_2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{-A-\mathcal{X}_1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,,\quad \mathcal{T}_2 = \mathrm{arctan}\left(\frac{2\sqrt[3]{2\mathcal{X}_2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{-A+\mathcal{X}_1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

y

$$\mathcal{T} = -2\ln\left(\frac{\sqrt[3]{-A-\mathcal{X}_1}}{\sqrt[3]{2}}-\sqrt[3]{\mathcal{X}_2}\right)\left(-A-\mathcal{X}_1\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad 2\left(-A+\mathcal{X}_1\right)^{\frac{5}{3}} \ln \left(\frac{\sqrt[3]{-A+\mathcal{X}_1}}{\sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{\mathcal{X}_2}\right) \\
&+ \quad \left(-A-\mathcal{X}_1\right)^{\frac{5}{3}} \ln \left[\frac{\left(-A-\mathcal{X}_1\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{4}} + \frac{\sqrt[3]{\mathcal{X}_2}\sqrt[3]{-A-\mathcal{X}_1}}{\sqrt[3]{2}} + \mathcal{X}_2^{\frac{2}{3}}\right] \\
&- \quad \left(-A+\mathcal{X}_1\right)^{\frac{5}{3}} \ln \left[\frac{\left(-A+\mathcal{X}_1\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{4}} + \frac{\sqrt[3]{\mathcal{X}_2}\sqrt[3]{-A+\mathcal{X}_1}}{\sqrt[3]{2}} + \mathcal{X}_2^{\frac{2}{3}}\right] .
\end{aligned}
$$

- $n = 2$

$$
I_p = -\frac{5\kappa}{4\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\left(A\mathcal{X}_1 + 13A^2 - 50B\right)\mathcal{Y}_1}{\sqrt{2}\mathcal{X}_1\sqrt{-A-\mathcal{X}_1}} + \frac{\left(A\mathcal{X}_1 - 13A^2 + 50B\right)\mathcal{Y}_2}{\sqrt{2}\mathcal{X}_1\sqrt{-A+\mathcal{X}_1}} + \sqrt{\mathcal{X}_2}\right] ,
$$

donde

$$
\mathcal{Y}_1 = \text{arctanh}\left(\frac{\sqrt{2\mathcal{X}_2}}{\sqrt{-A-\mathcal{X}_1}}\right) \quad \text{y} \quad \mathcal{Y}_2 = \text{arctanh}\left(\frac{\sqrt{2\mathcal{X}_2}}{\sqrt{-A+\mathcal{X}_1}}\right) .
$$

F.2 EoS-2

- $n = \frac{1}{2}$:

$$
\begin{aligned}
I_p = \quad &- \quad \frac{\kappa}{768\pi^2 K^2} \left[\frac{3\left(3A^2K^2 - 12ABK + 13B^2\right)}{\left(Ar^2+1\right)^2} + \frac{6(B-AK)^2}{\left(Ar^2+1\right)^4}\right. \\
&+ \quad \frac{4(5B-3AK)(B-AK)}{\left(Ar^2+1\right)^3} + \frac{3(3B-AK)^3}{\left(Ar^2+1\right)(B-AK)} \\
&- \quad \left.\frac{3B(3B-AK)^3}{(B-AK)^2} \ln\left(\frac{Ar^2+1}{Br^2+K}\right)\right] .
\end{aligned}
$$

- $n = 1$:

$$
I_p = \frac{\kappa}{32\pi K} \left\{\frac{2\left[B\left(4Ar^2+5\right) - AK\left(2Ar^2+3\right)\right]}{\left(Ar^2+1\right)^2} + \frac{(AK-3B)^2}{AK-B} \ln\left(\frac{Ar^2+1}{Br^2+K}\right)\right\} .
$$

- $n = \frac{3}{2}$:

$$
\begin{aligned}
I_p = \quad &- \quad \frac{3\kappa\left[\frac{\left(Ar^2+3\right)(AK-B)}{K\left(Ar^2+1\right)^2}\right]^{\frac{2}{3}}}{160\pi^{2/3}B\left(Ar^2+3\right)} \left\{\left[\frac{2}{Ar^2+1}+1\right]^{\frac{1}{3}}\right. \\
&\times \quad \left.\left[2(3AK-7B)\mathcal{F} - 5\left(Ar^2+1\right)(2B-AK)\mathcal{G}\right] + 5B\left(Ar^2+3\right)\right\} ,
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} &= F_1\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3},1;\frac{8}{3};-\frac{2}{Ar^2+1},\frac{B-AK}{ABr^2+B}\right)\,,\\
\mathcal{G} &= F_1\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3},1;\frac{5}{3};-\frac{2}{Ar^2+1},\frac{B-AK}{ABr^2+B}\right)\,.
\end{aligned}
$$

Aquí, F_1 es la función hipergeométrica de dos variables de Appell $F_1(a;b_1,b_2;c;x,y)$.

• $n=2$:

$$
I_p=\frac{\kappa\sqrt{\left(Ar^2+3\right)\left(AK-B\right)}\left[\left(Ar^2+1\right)\mathcal{T}-2\sqrt{B}\sqrt{Ar^2+3}\sqrt{3B-AK}(AK-B)\right]}{8\sqrt{KB}(Ar^2+1)\sqrt{Ar^2+3}(AK-B)\sqrt{6\pi B-2\pi AK}}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T} = &\ \sqrt{2B}(7B-3AK)\sqrt{3B-AK}\,\text{arctanh}\left(\frac{\sqrt{Ar^2+3}}{\sqrt{2}}\right)\\
&- \ 2(AK-3B)^2\text{arctanh}\left(\frac{\sqrt{B}\sqrt{Ar^2+3}}{\sqrt{3B-AK}}\right)\,.
\end{aligned}
$$

ANEXO G

TABLAS COMPLEMENTARIAS

Tabla G.1: Rangos de σ en los cuales la derivada de $M(\rho_c)$ respecto de ρ_c es positiva (modelos estables) para la ecuación de Lane-Emden I.

		n		
		0.5	1.0	1.5
C	0	-	-	-
	1/32	-	-	-
	1/16	-	-	-
	3/32	-	-	-
	1/8	-	-	-
	5/32	-	-	-
	3/16	-	-	-
	7/32	-	-	$\leq 0.125 \wedge \geq 0.225$
	1/4	-	$\leq 0.25 \wedge \geq 0.325$	$\leq 0.1 \wedge \geq 0.25$

		n		
		2.0	2.5	3.0
C	0	-	≥ 0.1	≥ 0.1
	1/32	-	≥ 0.125	≥ 0.1
	1/16	-	≥ 0.125	≥ 0.1
	3/32	-	≥ 0.125	≥ 0.1
	1/8	$< 0.1 \wedge \geq 0.15$	≥ 0.125	≥ 0.1
	5/32	≥ 0.15	≥ 0.125	≥ 0.1
	3/16	≥ 0.175	≥ 0.125	≥ 0.1
	7/32	≥ 0.175	≥ 0.125	≥ 0.1
	1/4	≥ 0.175	≥ 0.125	≥ 0.1

Tabla G.2: Rangos de σ en los cuales la derivada de $M(\rho_c)$ respecto de ρ_c es positiva (modelos estables) para la ecuación de Lane-Emden II.

		n			
		0.5	1.0	1.5	2.0
C	0	-	≤ 0.4	≤ 0.175	≤ 0.1
	1/32	-	≤ 0.375	≤ 0.175	≤ 0.1
	1/16	-	≤ 0.35	≤ 0.15	≤ 0.1
	3/32	-	≤ 0.3	≤ 0.15	≤ 0.1
	1/8	≤ 0.775	≤ 0.275	≤ 0.125	≤ 0.1
	5/32	≤ 0.675	≤ 0.25	≤ 0.125	≤ 0.1
	3/16	≤ 0.6	≤ 0.225	< 0.1	≤ 0.1
	7/32	≤ 0.5	≤ 0.2	< 0.1	≤ 0.1
	1/4	≤ 0.425	≤ 0.175	≤ 0.1	≥ 0.825

		n			
		2.5	3.0	3.5	4.0
C	0	≤ 0.1	≥ 0.475	$\geq 0.25 \wedge \leq 0.325$	$\geq 0.125 \wedge \geq 0.15$
	1/32	≥ 0.825	≥ 0.45	$\geq 0.25 \wedge \leq 0.3$	$\geq 0.1 \wedge \leq 0.15$
	1/16	≥ 0.775	≥ 0.425	$\geq 0.225 \wedge \leq 0.275$	$\geq 0.1 \wedge \leq 0.125$
	3/32	≥ 0.725	$\geq 0.4 \wedge \leq 0.85$	$\geq 0.225 \wedge \leq 0.25$	$\geq 0.1 \wedge \leq 0.125$
	1/8	≥ 0.675	$\geq 0.375 \wedge \leq 0.75$	$\geq 0.2 \wedge \leq 0.25$	$\geq 0.125 \wedge \leq 0.4$
	5/32	≥ 0.625	$\geq 0.35 \wedge \leq 0.675$	$\geq 0.2 \wedge \leq 0.225$	$\geq 0.1 \wedge \leq 0.375$
	3/16	≥ 0.55	$\geq 0.325 \wedge \leq 0.6$	$\geq 0.175 \wedge \leq 0.2$	$\geq 0.1 \wedge \leq 0.35$
	7/32	≥ 0.5	$\geq 0.3 \wedge \leq 0.525$	$\geq 0.15 \wedge \leq 0.175$	$\geq 0.1 \wedge \leq 0.325$
	1/4	≥ 0.45	$\geq 0.25 \wedge \leq 0.45$	$\geq 0.15 \wedge \leq 0.175$	$\geq 0.275 \wedge \leq 0.5$

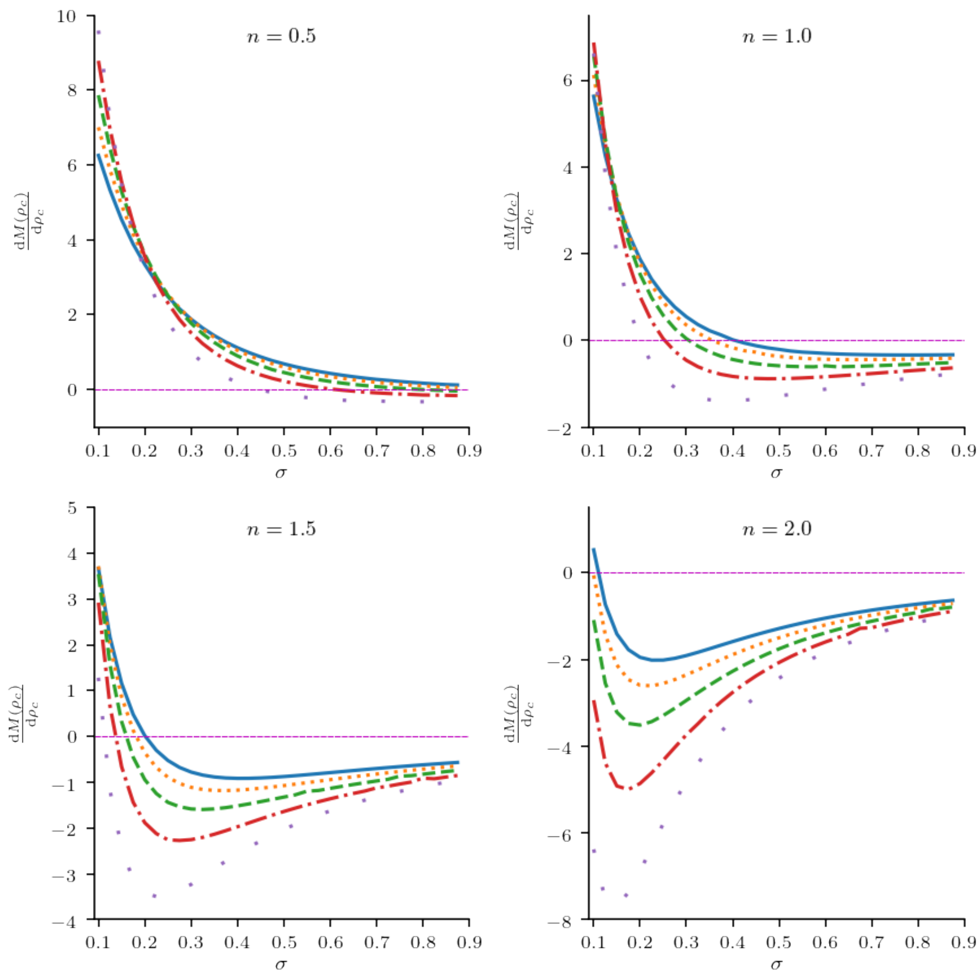
Tabla G.3: Rangos de σ en los cuales la derivada de $M(\rho_c)$ respecto de ρ_c es positiva (modelos estables) para la ecuación de Lane-Emden maestra.

		n							
		0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
C	0	-	≤ 0.425	≤ 0.2	< 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1
	1/32	-	≤ 0.4	≤ 0.2	< 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1
	1/16	-	≤ 0.35	≤ 0.175	< 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1
	3/32	-	≤ 0.325	≤ 0.175	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1
	1/8	≤ 0.8	≤ 0.3	≤ 0.15	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1
	5/32	≤ 0.7	≤ 0.275	≤ 0.15	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1
	3/16	≤ 0.625	≤ 0.25	≤ 0.125	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1
	7/32	≤ 0.525	≤ 0.225	≤ 0.125	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1
	1/4	≤ 0.45	≤ 0.2	< 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1	≤ 0.1

ANEXO H

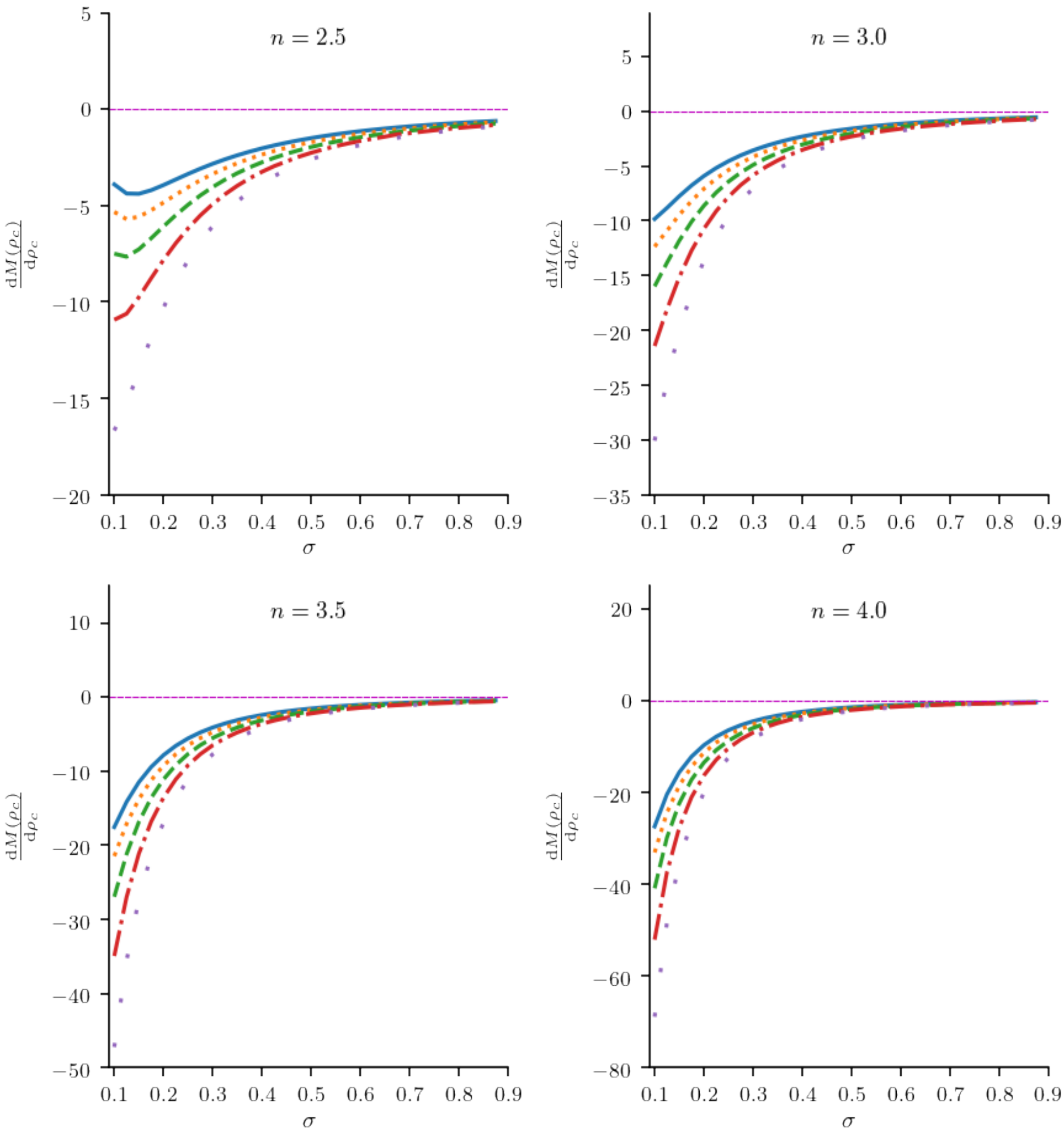
GRÁFICAS COMPLEMENTARIAS

Figura H.1: d$M(\rho_c)$/dρ_c en función de σ para la ecuación de Lane-Emden maestra (a).



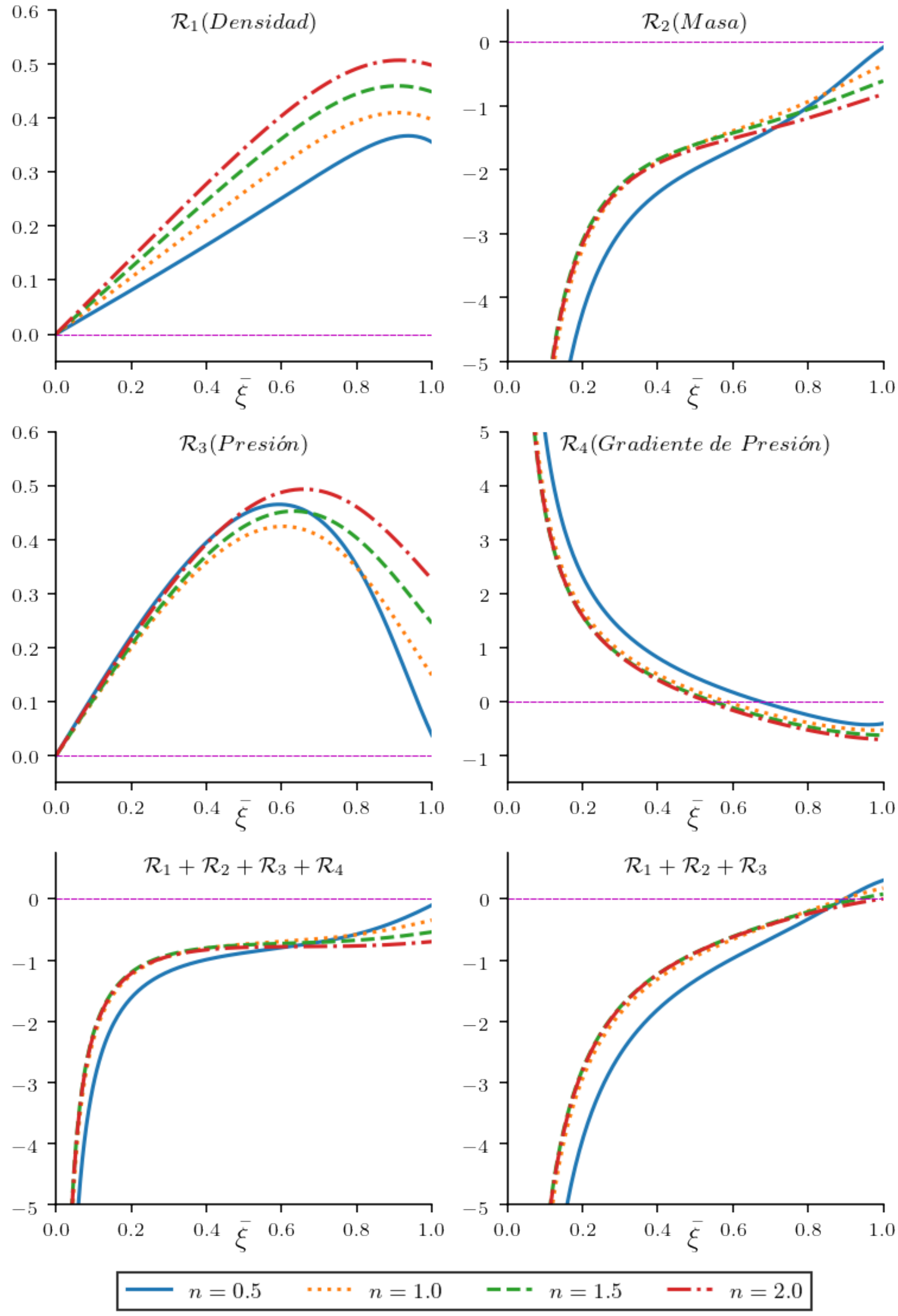
d$M(\rho_c)$/dρ_c en función de σ para la ecuación de Lane-Emden maestra. Para valores del índice polítropo n desde 0.5 hasta 2.0, $\alpha =$ -0.01 y $\varkappa =$ 0.2. Variando σ y el factor de anisotropía C. Entre más bajo sea n más modelos cumplen **C7**. El factor de anisotropía C desfavorece el número de modelos estables (ver tabla G.3).

Figura H.2: d$M(\rho_c)/$dρ_c en función de σ para la ecuación de Lane-Emden Lane-Emden maestra (b).



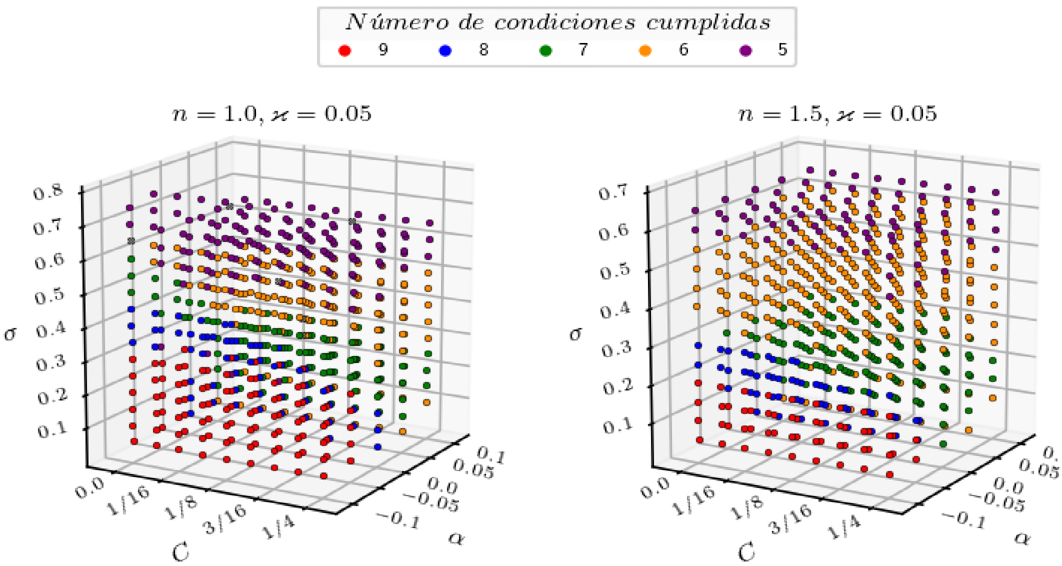
d$M(\rho_c)/$dρ_c en función de σ para la ecuación de Lane-Emden maestra. Para valores del índice polítropo n desde 2.5 hasta 4.0, $\alpha =$ -0.01 y $\varkappa =$ 0.2. Variando σ y el factor de anisotropía C. Ninguno de los modelos graficados cumple con la condición **C7** (ver tabla G.3).

Figura H.3: Términos de la ecuación de equilibrio hidrostático perturbada para modelos Lane-Emden maestra.



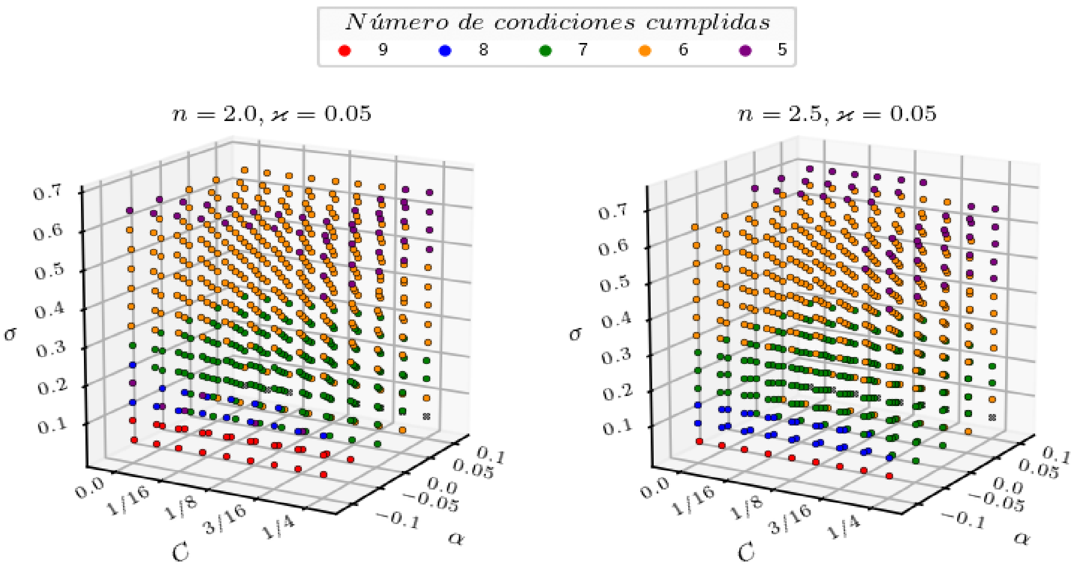
Términos de la ecuación de equilibrio hidrostático perturbada, como función de $\bar{\xi}$, para modelos Lane-Emden maestra. Parámetros $C=$ 0.125, $\sigma=$ 0.2, $\alpha=$ -0.01 y $\varkappa=$ 0.25, para distintos valores de n. De la gráfica inferior derecha se observa que es la reacción del gradiente de presión -ante inestabilidades locales no constantes de la densidad- lo que evita el cambio de signo dentro de la configuración material.

Figura H.4: Espacio de parámetros para la EoS polítropa maestra. Modelos con índice polítropo $n = 1.0$ y 1.5.



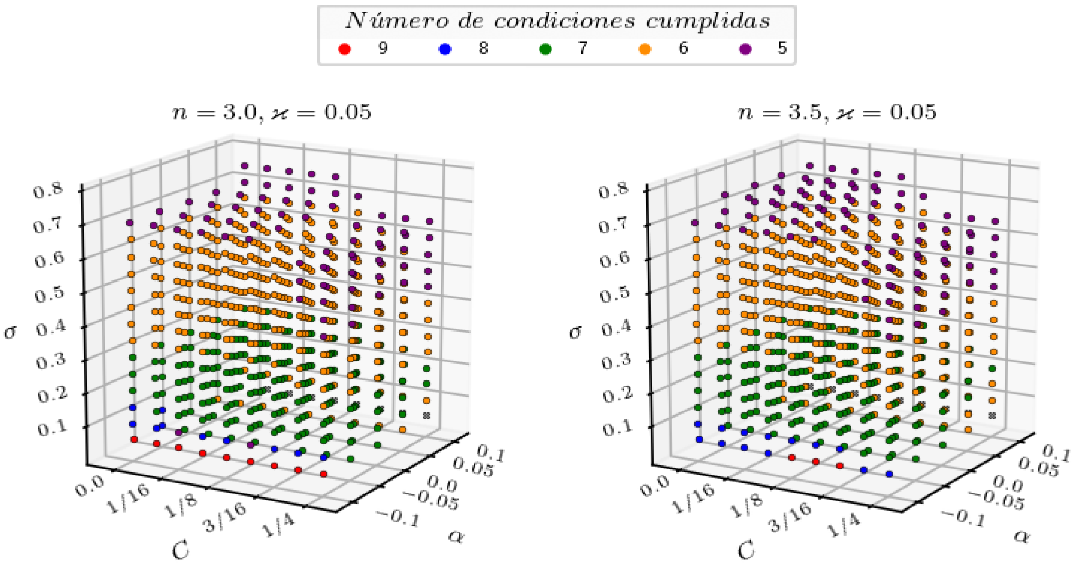
Espacio de parámetros para la EoS polítropa maestra, para modelos con $\varkappa = 0.05$ e índice polítropo $n = 1.0$ (izquierda) y 1.5 (derecha). Los parámetros C, α y σ variando desde 0.0 a 0.25, -0.1 a 0.1 y 0.05 a 0.8, respectivamente. Configuraciones que cumplen 4 condiciones o menos han sido dejadas en blanco. A medida que n aumenta, disminuye el número de modelos que cumplen con todas las condiciones.

Figura H.5: Espacio de parámetros para la EoS polítropa maestra. Modelos con índice polítropo $n = 2.0$ y 2.5.



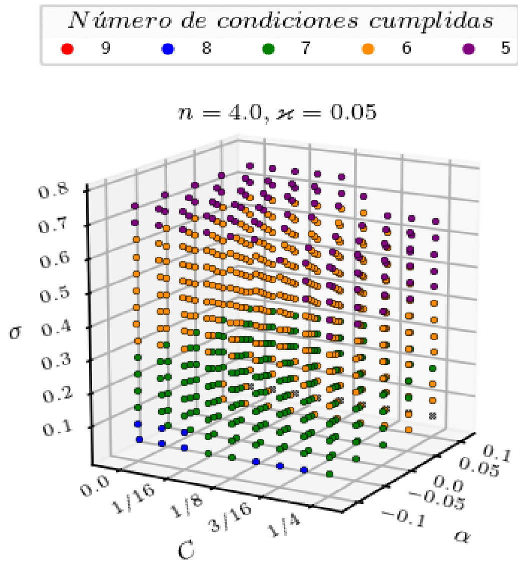
Espacio de parámetros para la EoS polítropa maestra, para modelos con $\varkappa = 0.05$ e índice polítropo $n = 2.0$ (izquierda) y 2.5 (derecha). Los parámetros C, α y σ variando desde 0.0 a 0.25, -0.1 a 0.1 y 0.05 a 0.8, respectivamente. Configuraciones que cumplen 4 condiciones o menos han sido dejadas en blanco. A medida que n aumenta, disminuye el número de modelos que cumplen con todas las condiciones.

Figura H.6: Espacio de parámetros para la EoS polítropa maestra. Modelos con índice polítropo $n = 3.0$ y 3.5.



Espacio de parámetros para la EoS polítropa maestra, para modelos con $\varkappa = 0.05$ e índice polítropo $n = 3.0$ (izquierda) y 3.5 (derecha). Los parámetros C, α y σ variando desde 0.0 a 0.25, -0.1 a 0.1 y 0.05 a 0.8, respectivamente. Configuraciones que cumplen 4 condiciones o menos han sido dejadas en blanco. A medida que n aumenta, disminuye el número de modelos que cumplen con todas las condiciones.

Figura H.7: Espacio de parámetros para la EoS polítropa maestra. Modelos con índice polítropo $n = 4.0$.



Espacio de parámetros para la EoS polítropa maestra, para modelos con índice polítropo $n = 4.0$ y $\varkappa = 0.05$. Los parámetros C, α y σ variando desde 0.0 a 2.5, -0.1 a 0.1 y 0.05 a 0.8, respectivamente. Configuraciones que cumplen 4 condiciones o menos han sido dejadas en blanco. No hay modelos que cumplan todas las condiciones de aceptabilidad.