Sobre anillos fuertemente graduados y epsilon-fuertemente graduados

Luis Augusto Martínez Sánchez

Trabajo de Grado para optar al título de Magister en Matemáticas

Director

Héctor Edonis Pinedo Tapia

Doctor en Ciencias

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2021

Dedicatoria

Este trabajo es dedicado a la persona que siempre ha estado conmigo, a la que amo con el alma, mi madre.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mis padres, **Zoraida Sánchez** y **Luis Martínez**, dos grandes personas que me han respaldado en todo momento. Gracias a ellos he podido estudiar y paso a paso ir cumpliendo mis sueños. Me siento muy feliz por ser su hijo.

Agradezco al profesor **Héctor Edonis Pinedo Tapia** por todo su apoyo en el desarrollo de este trabajo, por sus ideas e interés, y por contribuir en mi formación como matemático.

Por otra parte, quiero expresar mi gratitud a **Johana Estefany**, quien me ha acompañado durante estos dos años, y me ha ayudado a ser una mejor persona.

Además, agradezco a la **Universidad Industrial de Santander** por su importante apoyo económico en esta época de pandemia, y por prestar una educación de calidad a todos sus estudiantes.

Finalmente, quiero agradecer a mis compañeros de maestría, Yerly y Andrés. Con quienes tuve la oportunidad de trabajar y compartir ideas.

Tabla de Contenido

Resumen

Título: Sobre anillos fuertemente graduados y epsilon-fuertemente graduados [*]

Autor: Luis Augusto Martínez Sánchez [**]

Palabras Clave: Anillo graduado por un grupo, anillo fuertemente graduado, anillo epsilon-fuertemente graduado, anillo casi epsilon-fuertemente graduado, álgebra de camino de Leavitt.

Descripción: En este trabajo abordamos algunas propiedades de las clases de anillos fuertemente graduados, epsilon-fuertemente graduados y casi epsilon-fuertemente graduados por un grupo G. En primer lugar, realizamos un estudio de resultados conocidos, los cuales relacionan los anillos fuertemente graduados con conceptos categóricos. En particular, hablamos del Teorema de Dade. Posteriormente, estudiamos los anillos epsilon-fuertemente graduados desde un punto de vista categórico, y demostramos una caracterización funtorial de estos anillos mediante los funtores *Ind* y *Coind*. Además, mostramos condiciones suficientes para que un anillo casi epsilon-fuertemente graduado sea epsilon-fuertemente graduado. Seguidamente, establecemos una versión del Teorema de Dade para la familia de anillos casi-epsilon fuertemente graduados, y algunas consecuencias de este.

Introducimos la categoría SIMS-gr de módulos simétricamente graduados y la usamos para mostrar una caracterización de los anillos fuertemente graduados. A partir de esta caracterización, podremos ver algunas propiedades que cumplen los anillos epsilon-fuertemente graduados y que no cumplen los fuertemente graduados, además de las que ya son con conocidas. Finalmente, determinamos condiciones suficientes para que un anillo epsilon-fuertemente graduado pueda ser escrito como suma directa de anillos fuertemente graduados y un anillo epsilon-fuertemente graduado trivialmente. Para presentar ejemplos de este resultado, usamos algunas nociones básicas de las álgebras de camino de Leavitt.

---

[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Doctor en Ciencias.

Abstract

Title: On strongly graded rings and epsilon-strongly graded rings [*]

Author: Luis Augusto Martínez Sánchez [**]

Keywords: Graded ring, strongly graded ring, epsilon-strongly graded ring, nearly epsilon-strongly graded ring, Leavitt path algebra.

Description: In this work we address some properties of the classes of strongly graded, epsilon-strongly graded and nearly epsilon-strongly graded rings by a group G. First, we carry out a study of known results, which relate the strongly graded rings with categorical concepts. In particular, we talk about Dade's Theorem. Subsequently, we study the epsilon-strongly graded rings from a categorical point of view, and we demonstrate a functorial characterization of these rings. Furthermore, we show sufficient conditions for a nearly epsilon-strongly graded ring to be epsilon-strongly graded. Next, we establish a version of Dade's Theorem for the nearly-epsilon strongly graded rings, and some consequences of it.

We introduce the category SIM S-gr of symmetrically graded modules and use it to show a characterization of strongly graded rings. From this characterization, we will be able to see some properties that epsilon-strongly graded rings meet and that strongly graduated ones do not, in addition to those that are already known. Finally, we determine sufficient conditions so that a epsilon-strongly graded ring can be written as a direct sum of strongly graded rings and a trivially graded ring. To present examples of this result, we use some basic notions of Leavitt's path algebras.

---

[*] Grade work

[**] Faculty of Sciences. Math school. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Doctor of Science.

Introducción

La teoría de anillos y módulos graduados por estructuras algebraicas ha sido motivo de múltiples estudios por parte de la comunidad matemática. Aunque tales graduaciones pueden presentarse en contextos más generales, este trabajo se desarrolla en el marco de las graduaciones por grupos. Surgiendo así, una extensión de la teoría de anillos y módulos clásica.

Algunas estructuras matemáticas como los productos cruzados, pertenecen a una clase especial de anillos graduados por un grupo G, los anillos fuertemente graduados. El matemático Everett Dade, en su trabajo fundamental Dade (1980), estableció algunas propiedades de tales anillos, presentando en particular, una caracterización de los mismos mediante la relación entre ciertas categorías. En esta misma dirección, los estudios realizados en Năstăsescu and Oystaeyen (2004) exhiben relaciones entre anillos unitarios fuertemente graduados y conceptos categóricos.

Recientemente, una clase más general que la conformada por los anillos fuertemente graduados por un grupo G, ha motivado el desarrollo de varios trabajos como Lännström (2019, 2020) y Nysted and Öinert (2019). Se trata de la familia de anillos epsilon-fuertemente graduados, introducida en Nysted et al. (2018). La cual contiene, entre otros, importantes objetos matemáticos como los productos cruzados parciales y las álgebras de camino de Leavitt asociadas a grafos dirigidos finitos (Nysted and Öinert (2019)).

Los anillos epsilon-fuertemente graduados tendrán lugar en este proyecto, pues uno de los objetivos es escribirlos como suma directa de anillos fuertemente graduados por ciertos grupos, y un anillo con la graduación trivial. En este sentido, los resultados presentados en Kuo and Szeto

(2014) y Kuo and Szeto (2016) tendrán un papel muy importante.

Por otro lado, en Lännström (2020) se introducen algunas clases más generales que la de los anillos epsilon-fuertemente graduados, entre ellas, la de los anillos casi epsilon-fuertemente graduados. Las álgebras de camino de Leavitt asociadas a grafos dirigidos arbitrarios son ejemplos de tales anillos (Nysted and Öinert (2019)). Los anillos casi epsilon-fuertemente graduados serán motivo de estudio en este trabajo, debido a que se busca presentar una versión del Teorema de Dade para esta clase de anillos.

El presente documento se encuentra divido en tres capítulos. En el Capítulo 1 se estudiará el Teorema de Dade y algunos conceptos preliminares que serán usados posteriormente. Específicamente, se introducirán los funtores inducido y coinducido asociados a un anillo unitario $G-$graduado, y las relaciones que estos tienen con el hecho de que este sea fuertemente graduado.

En el Capítulo 2 se estudian los anillos epsilon-fuertemente graduados y se demuestra la Proposición 2.1.1, y algunas consecuencias de la misma. Posteriormente se consideran los anillos casi epsilon-fuertemente graduados, y se presentan condiciones suficientes para que estos sean epsilon-fuertemente graduados (Proposición 2.2.3). Además, se prueba el Teorema 2.2.1 que es una versión del Teorema de Dade para la clase de anillos casi epsilon-fuertemente graduados. Para finalizar este capítulo, se establece una caracterización de los anillos fuertemente graduados en el Teorema 2.2.2.

El objetivo del Capítulo 3 es descomponer a un anillo epsilon-fuertemente graduado por un grupo G, como suma directa de anillos fuertemente graduados por ciertos subgrupos de G, y un anillo trivialmente graduado. En ese sentido, es demostrado el Teorema 3.1.1. Además, se

consideran ejemplos de este teorema usando álgebras de camino de Leavitt asociadas a grafos dirigidos finitos (Ejemplo 3.1.6).

Los resultados obtenidos en este trabajo pueden ser encontrados en Martínez et al. (2020).

1. Sobre las categorías de anillos y módulos graduados

El objetivo de este capítulo es presentar el Teorema 1.3.1 y algunos resultados que relacionan los funtores inducido y coinducido asociados a un anillo $G-$gradudo R, con el hecho de que este sea fuertemente graduado (Teorema 1.3.3). En la primera sección se presenta un corto repaso sobre algunos conceptos categóricos que serán utilizados frecuentemente.

1.1. Categorías

Definición 1.1.1. *Una categoría $\mathscr{C}$ está definida por:*

(a) Una colección no vacía $Ob(\mathscr{C})$, cuyos elementos se llaman objetos de $\mathscr{C}$.

(b) Una colección no vacía de conjuntos disjuntos $\{Hom_{\mathscr{C}}(A,B)\}_{A,B\in Ob(\mathscr{C})}$. Para $A,B \in Ob(\mathscr{C})$, los elementos de $Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ son llamados morfismos del objeto A en el objeto B. Además, un elemento $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ es denotado por $f : X \to Y$.

(c) Una operación entre morfismos llamada composición, denotada por $\circ$, tal que si A,B,C son objetos de $\mathscr{C}$, entonces $Hom_{\mathscr{C}}(A,B) \times Hom_{\mathscr{C}}(B,C) \to Hom_{\mathscr{C}}(A,C)$, $(f,g) \mapsto g \circ f$ es una función. Además, la operación $\circ$ satisface las siguiente condiciones:

(i) Para cada A,B y C objetos de $\mathscr{C}$, $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$, $g \in Hom_{\mathscr{C}}(B,C)$ y $h \in Hom_{\mathscr{C}}(C,D)$ se tiene que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(ii) Para cada $A \in Ob(\mathscr{C})$ existe un morfismo $i_A \in Hom_{\mathscr{C}}(A,A)$ tal si $B \in Ob(\mathscr{C})$, $g \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ y $h \in Hom_{\mathscr{C}}(B,A)$, entonces $g \circ i_A = g$ y $i_A \circ h = h$.

Ejemplo 1.1.1. *Algunos ejemplos de categorías son los siguientes:*

(i) Si R es un anillo, $R-mod$ $(mod-R)$ es la categoría cuyos objetos son $R-$módulos a izquierda (derecha) y sus morfismos los $R-$homomorfismos.

(ii) **Ring** *es la categoría de anillos unitarios y sus homomorfismos.*

(iii) **Grp** *es la categoría de grupos y sus homomorfismos.*

(iv) **Ab** *es la categoría cuyos objetos y morfismos son los grupos abelianos y sus homomorfismos, respectivamente.*

(v) Si $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in I}$ es una colección de categorías, es posible definir la categoría producto $\prod_{i\in I}\mathscr{C}_i$, donde $Ob(\prod_{i\in I}\mathscr{C}_i) = \prod_{i\in I} Ob(\mathscr{C}_i)$ y $Hom_{\prod_{i\in I}\mathscr{C}_i}((A_i),(B_i)) = \prod_{i\in I} Hom_{\mathscr{C}_i}(A_i,B_i)$. Además, la composición es definida componente a componente.

Definición 1.1.2. *Dadas dos categorías $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$, se dice que $\mathscr{B}$ es una subcategoría de $\mathscr{C}$ si satisface las siguientes condiciones:*

(i) Todo objeto de $\mathscr{B}$ es un objeto de $\mathscr{C}$.

(ii) Si D y E son objetos de $\mathscr{B}$, entonces $Hom_{\mathscr{B}}(D,E) \subseteq Hom_{\mathscr{C}}(D,E)$.

(iii) La composición de morfismos en $\mathscr{B}$ es la inducida por la composición de morfismos en $\mathscr{C}$.

Si $\mathscr{C}$ es una categoría y $\varphi \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ es un morfismo, se dice que φ es una retracción (corretracción) si existe $\sigma \in Hom_{\mathscr{C}}(B,A)$ tal que $\varphi \circ \sigma = i_B$ ($\sigma \circ \varphi = i_A$). Además, si φ es retracción y corretracción, se dice que φ es isomorfismo. En este caso, los objetos A y B son llamados isomorfos y se escribe $A \simeq B$.

Definición 1.1.3. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías. Un funtor covariante $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una regla que actúa en los objetos y los morfismos de $\mathscr{C}$ de tal forma que $F(C) \in Ob(\mathscr{D})$ y $F(f) \in Hom_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$ para cada $A,B,C \in Ob(\mathscr{C})$ y $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$. Además:*

(i) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, para cada $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ y $g \in Hom_{\mathscr{C}}(B,C)$.

(ii) $F(i_A) = i_{F(A)}$, para cada $A \in Ob(\mathscr{C})$.

Ejemplo 1.1.2. *Sean R un anillo y M un $R-$módulo a izquierda. Entonces M induce el funtor covariante $Hom_R(M,-) : R-mod \to \mathbf{Ab}$ que a cada $R-$módulo a izquierda N lo envía en el grupo abeliano $Hom_R(M,N)$, y a cada $R-$homomorfismo $\phi \in Hom_R(N,N')$ lo envía en $\phi_* : Hom_R(M,N) \to Hom_R(M,N')$, $\alpha \mapsto \phi \circ \alpha$. Algunas propiedades básicas de este funtor pueden ser encontradas en los Capítulos 2 y 3 de Rotman (2009).*

Definición 1.1.4. *Sean $F,G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dos funtores covariantes. Una transformación natural $\alpha : F \to G$ consiste de una familia de morfismos $\{\alpha_X : F(X) \to G(X)\}_{X \in Ob(\mathscr{C})}$, tal que si $X,Y \in Ob(\mathscr{C})$ y $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{c} X \\ {\scriptstyle f}\downarrow \\ Y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & G(X) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow[\alpha_Y]{} & G(Y) \end{array}$$

Cuando α_X es un isomorfismo para cada $X \in Ob(C)$, se dice que α es un isomorfismo natural, y se escribe que $F \simeq G$.

Ejemplo 1.1.3. *Considere el funtor F : **Ring** $\to$ **Grp**, que a cada anillo $(R,+,*)$ lo envía en el grupo de elementos invertibles $(U(R),*)$, y actúa por restricción en los morfismos. Por otro lado, sea G : **Ring** $\to$ **Grp** definido por $G(S) = GL_n(S)$ con la multiplicación usual. Además, $G(f)(a_{i,j}) = (f(a_{i,j}))$ para cada $f \in Hom_{\mathbf{Ring}}(R,S)$. Es posible definir una transformación natural $det_n : G \to F$ asociando a cada anillo unitario R el homomorfismo $det_R : GL_n(R) \to U(R)$, $A \mapsto det(A)$.*

Para finalizar esta sección, se presenta la noción de categorías equivalentes y par adjunto. Ambas definiciones serán utilizadas posteriormente.

Definición 1.1.5. *Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor covariante. Se dice que:*

(i) F es fiel (pleno), si la función $Hom_{\mathscr{C}}(A,B) \to Hom_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$, $f \mapsto F(f)$, es inyectiva (sobreyectiva) para cada par de objetos A y B de $\mathscr{C}$.

(ii) F es representativo, si para cada objeto B de $\mathscr{D}$, existe un objeto A de $\mathscr{C}$ tal que $F(A) \simeq B$.

Definición 1.1.6. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una equivalencia si existe un funtor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tal que $FG \simeq i_D$ y $GF \simeq i_C$. En este caso se dice que $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son equivalentes.*

Una prueba del siguiente resultado puede ser vista en la Proposición 1.3 de Jacobson (1989).

Teorema 1.1.1. *Un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una equivalencia si y solo si F es fiel, pleno y representativo.*

Por lo anterior es fácil deducir que la composición de equivalencias es una equivalencia, y que todo isomorfismo es una equivalencia.

Observación 1.1.1. *Si $\mathscr{C}$ es una categoría y $\varphi \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$, se dice que φ es monomorfismo si para cada objeto C de $\mathscr{C}$ y $\alpha,\beta \in Hom_{\mathscr{C}}(C,A)$ tales que $\varphi\circ\alpha = \varphi\circ\beta$, se tiene que $\alpha = \beta$. De manera dual se establece la definición de epimorfismo. No es difícil verificar que si $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ es fiel y pleno, se tiene que ϕ es monomorfismo o epimorfismo, si $F(\phi)$ es respectivamente monomorfismo o epimorfismo, para cada morfismo ϕ en $\mathscr{C}$. Esta afirmación será últil en el Teorema 2.2.3.*

Definición 1.1.7. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías. Dados dos funtores covariantes $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ y $G:\mathscr{D}\to\mathscr{C}$, se dice que (F,G) es un par adjunto si se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) Para cada par de objetos $C\in ob(\mathscr{C})$ y $D\in ob(\mathscr{D})$, existen biyecciones

$$\tau_{C,D} : Hom_{\mathscr{D}}(F(C),D) \to Hom_{\mathscr{C}}(C,G(D)).$$

(ii) Para cada $f\in Hom_{\mathscr{C}}(C',C)$ y $g\in Hom_{\mathscr{D}}(D,D')$, los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathscr{D}}(F(C),D) & \xrightarrow{\tau_{C,D}} & Hom_{\mathscr{C}}(C,G(D)) \\ {\scriptstyle F(f)^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ Hom_{\mathscr{D}}(F(C'),D) & \xrightarrow[\tau_{C',D}]{} & Hom_{\mathscr{C}}(C',G(D)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Hom_{\mathscr{D}}(F(C),D) & \xrightarrow{\tau_{C,D}} & Hom_{\mathscr{C}}(C,G(D)) \\ {\scriptstyle g_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(g)_*} \\ Hom_{\mathscr{D}}(F(C),D') & \xrightarrow[\tau_{C,D'}]{} & Hom_{\mathscr{C}}(C,G(D')) \end{array}$$

1.2. Anillos graduados

A menos que se diga lo contrario, a lo largo de este trabajo los anillos serán considerados asociativos y unitarios. Además, dado un anillo R y $X, Y \subseteq R$, se denotará por XY a la colección de sumas finitas de elementos xy, donde $x \in X$ y $y \in Y$.

Definición 1.2.1. *Sean R un anillo y G un grupo. Una $G-$graduación sobre R es una colección $\{R_g\}_{g\in G}$ de subgrupos aditivos de R, que satisface las siguientes condiciones:*

(i) $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$;

(ii) $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ *para cada* $g, h \in R$.

En este caso se dice que R es un anillo $G-$graduado. Además, si $R_g R_h = R_{gh}$ para cada $g, h \in G$, R es llamado fuertemente $G-$graduado o simplemente fuertemente graduado.

En adelante, cuando se diga que un anillo R es $G-$graduado, se hace referencia a que $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$, donde $\{R_g\}_{g\in G}$ es una $G-$graduación sobre R.

Ejemplo 1.2.1. *Sea R un anillo y $S := R[x]$ el anillo de polinomios con coeficientes en R. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ defina*

$$S_n = \begin{cases} Rx^n, \ si \quad n \geq 0 \\ 0, \ si \quad n < 0 \end{cases}$$

Es claro que S es un anillo $\mathbb{Z}-$graduado.

Ejemplo 1.2.2. *Un contexto de Morita es una sextupla (A,B,M,N,τ,μ), donde A y B son anillos unitarios, M es un $(A,B)-$bimódulo, N un $(B,A)-$bimódulo y $\tau : M\otimes_B N \to A$, $\mu : N\otimes_A M \to B$ son morfismos de bimódulos tales que para cada $m,m' \in M$ y $n,n' \in N$ se tiene que:*

(a) $\tau(m\otimes n)m' = m\mu(n\otimes m')$,

(b) $\mu(n\otimes m)n' = n\tau(m\otimes n')$.

Considere $C = (A,B,M,N,\tau,\mu)$ un contexto de Morita. A partir de C se puede construir el anillo

$$S := \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix},$$

donde el producto es definido por

$$\begin{pmatrix} a & m \\ n & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & m' \\ n' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+\tau(m\otimes n') & am'+mb' \\ na'+bn' & \mu(n\otimes m')+bb' \end{pmatrix},$$

donde $\{a,a'\}\subseteq A$, $\{b,b'\}\subseteq B$, $\{n,n'\}\subseteq N$ y $\{m,m'\}\subseteq M$.

Es posible dar una $\mathbb{Z}-$graduación al anillo S definiendo

$$S_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},\ S_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix},\ S_1 = \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } S_n = 0, \text{ en otro caso.}$$

Una demostración de la siguiente proposición puede ser encontrada en [Năstăsescu and Oystaeyen (2004), Proposición 1.1.1]

Proposición 1.2.1. *Sea R un anillo $G-$graduado y considere $U(R)$ el subgrupo multiplicativo de elementos invertibles de R. Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(i) R_e *es subanillo de* R *y* $1 \in R_e$.

(ii) Si $r \in U(R) \cap R_g$, *entonces* $r^{-1} \in R_{g^{-1}} \cap U(R)$.

Según la Definición 1.2.1, cualquier anillo R puede ser graduado por un grupo G. En efecto, basta considerar $R_e = R$ y $R_g = 0$ para cada $g \in G \setminus \{e\}$. Esta última graduación es denominada **graduación trivial**. El siguiente ejemplo muestra anillos que solo admiten la graduación trivial sobre ciertos grupos.

Ejemplo 1.2.3. *Si* $\mathbb{K}$ *es un campo, entonces* $\mathbb{K}$ *solo puede ser* $\mathbb{Z}-$*graduado trivialmente. En efecto, sea* $\mathbb{K} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{K}_n$ *una* $\mathbb{Z}-$*graduación de* $\mathbb{K}$*, y suponga que existe un elemento no nulo* $a \in \mathbb{K}_n$ *para algún* $n \neq 0$ *(note que* $a \neq 1$*). Ya que* $a^{-1} \in \mathbb{K}_{-n}$*, se puede suponer que* $n > 0$*. Sea* $b \in \mathbb{K}$ *tal que* $(1-a)b = 1$*. Existen* $n_1, n_2, \cdots, n_r \in \mathbb{Z}$ *y* $b_{n_j} \in \mathbb{K}_{n_j}$ *para cada* $1 \leq j \leq r$ *únicos, tales que* $b = b_{n_1} + \cdots + b_{n_r}$*. Sin perder generalidad asuma que* $n_1 < \cdots < n_r$*. En ese sentido, la igualdad* $b_{n_1} + \cdots + b_{n_r} - ab_{n_1} - \cdots - ab_{n_r} = 1$ *contradice el hecho de que* $1 \in \mathbb{K}_0$*, pues* b_{n_1} *es el único elemento con grado más pequeño y* ab_{n_r} *es el único elemento con grado más grande.*

Si R y S son anillos graduados y $\phi : R \to S$ es un morfismo de anillos tal que $\phi(R_g) \subseteq S_g$ para cada $g \in G$, se dice que ϕ es un homomorfismo graduado. $G-Ring$ denota la categoría cuyos objetos y morfismos son respectivamente los anillos $G-$graduados, y homomorfismos graduados. Además, $G-Strg$ es la subcategoría de $G-Ring$ cuyos objetos son los anillos fuertemente $G-$graduados. Si $R \in G-Ring$ y $g \in G$, los elementos no nulos de R_g son llamados homogéneos de grado g, y se escribe $deg(r) = g$, para cada $r \in R_g$. Además, se denota por $h(R)$ a la colección de elementos homogéneos de R.

Si $R \in G-Ring$ y S es un subanillo (respectivamente ideal izquierdo, ideal derecho, ideal bilátero) de R tal que $S = \bigoplus_{g\in G}(R_g \cap S)$, se dice que S es subanillo (respectivamente ideal izquierdo, ideal derecho, ideal bilátero) graduado de R. En este caso, la graduación sobre S es $\{S_g\}_{g\in G}$, donde $S_g := R_g \cap S$, para cada $g \in G$. Además, si I es un ideal graduado de R, entonces $\{(R_g + I)/I\}_{g\in G}$ es una $G-$graduación del anillo cociente R/I. En efecto, sean $g_1, g_2, \cdots, g_n \in G$ y $r_{g_i} + I \in (R_{g_i} + I)/I$ para cada i, tales que $(r_{g_1} + I) + \cdots + (r_{g_n} + I) = I$. Entonces $r_{g_1} + \cdots + r_{g_n} \in I$ y por tanto $r_{g_i} \in I$, para cada i. Esto indica que $r_{g_1} + I = \cdots = r_{g_n} + I = I$ y la suma $\sum_{g\in G}(R_g + I)/I$ es directa. Por otro lado, es claro que $R/I = \sum_{g\in G}(R_g + I)/I$.

Ejemplo 1.2.4. *Sean R un anillo $G-$graduado y $C_R(R_e) = \{t \in R : ts = st \text{ para cada } s \in R_e\}$. Considere $r = r_{g_1} + \cdots + r_{g_n} \in C_R(R_e)$, donde $r_{g_i} \in R_{g_i}$, para cada $i = 1, \cdots, n$. Dado $s \in R_e$, se sabe que $sr_{g_1} + \cdots + sr_{g_n} = r_{g_1}s + \cdots + r_{g_n}s$. Así, por la unicidad en la descomposición se tiene que $sr_{g_i} = r_{g_i}s$, para cada $i = 1, \cdots, n$. Esto muestra que $C_R(R_e)$ es subanillo graduado de R.*

Ejemplo 1.2.5. *Sean R un anillo $G-$graduado y N un subgrupo normal de G. Para cada $C \in G/N$ considere $R_C = \bigoplus_{g\in C} R_g$. No es difícil verificar que $\{R_C\}_{C\in G/N}$ es una $G/N-$ graduación de R. Más aún, note que si $1 \in R_g R_{g^{-1}}$ para algún $g \in G$, entonces $1 \in R_C R_{C^{-1}}$, donde $C = gN$, pues $R_g R_{g^{-1}} \subseteq R_C R_{C^{-1}}$. Por tanto, si R es fuertemente $G-$graduado, entonces también es fuertemente $G/N-$graduado. Usando esto, es posible definir un funtor covariante $U_{G/N} : G-strg \to G/N-Strg$ como muestra Lännström (2020) en la Proposición 2.1.*

La siguiente proposición muestra una caracterización útil de los anillos fuertemente graduados.

Proposición 1.2.2. *Sea R un anillo $G-$ graduado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *R es fuertemente graduado;*

(ii) *$R_{g_i}R_{g_i^{-1}} = R_e$ para algún sistema de generadores $\{g_i : i \in I\}$ de G;*

(iii) *$1 \in R_hR_{h^{-1}}$ para cada $h \in G$.*

Demostración. Es claro que $(i) \Rightarrow (ii)$. Para mostrar que $(ii) \Rightarrow (iii)$, sea $h \in G$. Existen $i_1, \cdots i_k \in I$ y $m_1, \cdots m_k \in \mathbb{Z}$ tales que $h = g_{i_1}^{m_1} \cdots g_{i_k}^{m_k}$. Note que para cada $j \in \{1, \cdots k\}$

$$R_e = R_{g_j}R_{g_j^{-1}} = R_{g_j}R_eR_{g_j^{-1}} \subseteq R_{g_j^2}R_{g_j^{-2}} \subseteq \cdots \subseteq R_{g_j^{m_j}}R_{g_j^{-m_j}}$$

Por tanto, $R_e = R_{g_j^{m_j}}R_{g_j^{-m_j}}$ para cada j. Lo anterior implica que

$$R_e \subseteq R_{g_1^{m_1}} \cdots R_{g_k^{m_k}}R_{g_k^{-m_k}} \cdots R_{g_1^{-m_1}} \subseteq R_hR_{h^{-1}},$$

y por tanto $1 \in R_hR_{h^{-1}}$.

Finalmente, tome $g, h \in G$. Note que $R_{gh} \subseteq R_{gh}R_{h^{-1}}R_h \subseteq R_gR_h$. Esto muestra que $R_gR_h = R_{gh}$ y R es fuertemente graduado. Luego $(iii) \Rightarrow (i)$. □

El siguiente ejemplo muestra un anillo $G-$ *graduado* R, el cual satisface que $R_g \cap U(R) \neq \emptyset$ para cada $g \in G$. Los anillos con este tipo de graduaciones son llamados **productos cruzados**. Según la Proposición 1.2.2, es claro que todo producto cruzado es fuertemente graduado.

Ejemplo 1.2.6. *Sobre $\mathbb{C}$ considere la siguiente $\mathbb{Z}_2-$graduación:*

$$\mathbb{C}_0 = \mathbb{R} \text{ y } \mathbb{C}_1 = i\mathbb{R}$$

Note que $U(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C}_0 = \mathbb{C}_0^*$ y $U(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C}_1 = \mathbb{C}_1^*$, luego $\mathbb{C}$ es un producto cruzado con esta graduación.

El siguiente ejemplo muestra una graduación fuerte que no es producto cruzado.

Ejemplo 1.2.7. *Sea K un campo y $R := M_3(K)$, con la graduación sobre $\mathbb{Z}_2$ definida como sigue:*

$$R_{\bar{0}} = \begin{pmatrix} K & K & 0 \\ K & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}, R_{\bar{1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & K \\ K & K & 0 \end{pmatrix}.$$

Es claro que R es fuertemente graduado ya que $1 \in R_{\bar{1}}R_{\bar{1}}$, en efecto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, R no es un producto cruzado pues no hay elementos invertibles en $R_{\bar{1}}$.

El siguiente lema conocido, muestra que bajo ciertas condiciones un anillo fuertemente graduado es un producto cruzado.

Lema 1.2.1. *Sea R un anillo fuertemente graduado tal que $R_e \simeq R_g$ como R_e-bimódulos, para cada $g \in G$. Entonces R es un producto cruzado.*

Demostración. Sea $g \in G$ y $\phi : R_e \to R_g$ isomorfismo en $R_e - mod$. Si $u_g := \phi(1)$, entonces $R_g = \phi(R_e) = R_e u_g$. Análogamente se puede encontrar $v_{g^{-1}} \in R_{g^{-1}}$ tal que $R_{g^{-1}} = v_{g^{-1}}R_e$. Ya que R es fuertemente graduado, $1 \in R_{g^{-1}}R_g = v_{g^{-1}}R_e u_g$. Luego existe $r \in R_e$ tal $w_g := v_{g^{-1}}r \in R_{g^{-1}}$ es inverso a izquierda de u_g. Además, ya que $(u_g w_g - 1)u_g = 0$ se tiene que $u_g w_g - 1 \in ker(\phi) = 0$. Por tanto $u_g \in U(R) \cap R_g$. □

La siguiente definición motiva una caracterización general de los productos cruzados.

Definición 1.2.2. *Sean R un anillo unitario, G un grupo y $\sigma : G \to Aut(R)$, $\alpha : G \times G \to U(R)$ funciones. Una cuadrupla (R, G, σ, α) es llamada* ***sistema cruzado****, si dados $g, h, k \in G$ y $r \in R$ se satisface lo siguiente:*

(i) $\sigma_g(\sigma_h(r)) = \alpha(g,h)\sigma_{gh}(r)\alpha(g,h)^{-1}$,

(ii) $\alpha(g,h)\alpha(gh,k) = \sigma_g(\alpha(h,k))\alpha(g,hk)$,

(iii) $\alpha(g,e) = \alpha(e,g) = 1$.

Finalmente, la Proposición 1.4.2 de Năstăsescu and Oystaeyen (2004) presenta una caracterización de los productos cruzados. A continuación es enunciado este resultado.

Teorema 1.2.1. *Sean (R, G, σ, α) un sistema cruzado y $R *_{\sigma,\alpha} G$ el R-módulo a izquierda libre con base $\{\delta_g\}_{g \in G}$. Entonces $R *_{\sigma,\alpha} G$ es un anillo unitario con el producto*

$$(r\ \delta_g)(r'\ \delta_h) = r\sigma_g(r')\alpha(g,h)\delta_{gh}.$$

Además, es un producto G-cruzado con la graduación

$$R *_{\sigma,\alpha} G = \bigoplus_{g \in G} (R *_{\sigma,\alpha} G)_g, \text{ donde } (R *_{\sigma,\alpha} G)_g = R\delta_g \text{ para cada } g \in G.$$

Recíprocamente, cada producto $G-$cruzado A es de la forma $R *_{\sigma,\alpha} G$ para algún sistema cruzado (R, G, σ, α).

1.3. Módulos graduados

Definición 1.3.1. *Sean R un anillo $G-$graduado y M un $R-$módulo a izquierda. Una graduación sobre M es una familia $\{M_g\}_{g\in G}$ de subgrupos aditivos de M que satisface:*

(i) $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$.

(ii) $R_g M_h \subseteq M_{gh}$ *para cada* $g,h \in G$.

En este caso se dice que M es un módulo $G-$graduado. Además, si $R_g M_h = M_{gh}$ para cada $g,h \in G$, M es llamado fuertemente $G-$graduado.

Si M y N son $R-$módulos $G-$graduados y $\phi : M \to N$ es un morfismo de $R-$módulos tal que $\phi(M_g) \subseteq N_g$ para cada $g \in G$, ϕ es llamado $R-$homomorfismo graduado o simplemente homomorfismo graduado. En este trabajo, $R-gr$ denota la categoría cuyos objetos y morfismos son respectivamente los $R-$módulos izquierdos $G-$graduados, y R-homomorfismos graduados. Análogamente se define la categoría $gr-R$ de los $R-$módulos $G-$graduados a derecha.

Si $M \in R-gr$ y N es un $R-$submódulo de M tal que $N = \bigoplus_{g\in G}(N \cap M_g)$, se dice que N es submódulo graduado de M o que es $gr-$submódulo de M. Es claro de esta definición, que si $\{N_i\}_{i\in I}$ es una colección de $gr-$submódulos de M, entonces $\cap_{i\in I} N_i$ es $gr-$submódulo de M. En ese sentido, si N es submódulo de M, se puede definir al $gr-$submódulo de M más pequeño que contiene a N, este es denotado por $(N)^g = \langle \cup_{n\in N}\{n_g : g \in G\}\}$. De manera análoga, es posible definir al $gr-$submódulo de M más grande que está contenido en N, denotado por $(N)_g$. A saber, $(N)_g = \langle N \cap h(M)\}$, donde $h(M) = \cup_{g\in G} M_g$. Note que $(N)_g \subseteq N \subseteq (N)^g$.

Ejemplo 1.3.1. *Sean M un $R-$módulo graduado y N un $gr-$submódulo de M. Sobre el $R-$módulo M/N se puede definir la $G-$graduación $\{(M_g+N)/N\}_{g\in G}$. Además, con esta graduación la proyección canónica $M \to M/N$ es un homomorfismo graduado.*

Ejemplo 1.3.2. *Sean R un anillo $G-$graduado y $r \in R_h$, para algún $h \in G$. Note que $S \cap R_g = R_{gh^{-1}}r$, para cada $g \in G$, donde $S = Rr$. En ese sentido, la $G-$graduación $\{S_g := R_{gh^{-1}}r\}_{g\in G}$ da a S estructura de ideal izquierdo graduado. De manera más general, sean $M \in R-gr$ y $S = RM_h$, para algún $h \in G$. Como $S \cap M_g = R_{gh^{-1}}M_h$, para cada $g \in G$, entonces S es un submódulo graduado de M con la graduación $\{R_{gh^{-1}}M_h\}_{g\in G}$.*

Ejemplo 1.3.3. *Sean $M \in R-gr$ y $g \in G$. La $g-$suspensión de M se define como el $R-$módulo $G-$graduado $M(g) := \bigoplus_{h\in G} M(g)_h = M$, donde $M(g)_h = M_{hg}$ para cada $h \in G$. La graduación anterior está bien definita pues $R_tM(g)_h = R_tM_{hg} \subseteq M_{thg} = M(g)_{th}$, para cada $t,h \in G$. Análogamente se define la $g-$suspensión para un objeto de $gr-R$.*

La $g-$suspensión de un módulo permite definir un endofuntor de $R-gr$, que termina siendo un isomorfismo. En efecto, para $g \in G$ fijo, se define

$$T_g : R-gr \longrightarrow R-gr$$

que envía a cada M en el módulo $M(g)$, y a cada morfismo $\phi \in Hom_{R-gr}(M,N)$ lo envía en $T(\phi) = \phi$. Es claro que $T_g \circ T_{g^{-1}} = T_{g^{-1}} \circ T_g = I_{R-gr}$.

Ejemplo 1.3.4. *Sean R un anillo $G-$graduado y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de $R-$módulos graduados. Considere $\prod_{i\in I} M_i$ y $\bigoplus_{i\in I} M_i$ el producto directo y la suma directa externa, respectivamente. Si para cada $g \in G$ se define*

$$(\prod_{i\in I} M_i)_g := \prod_{i\in I}(M_i)_g \text{ y } (\bigoplus_{i\in I} M_i)_g = \bigoplus_{i\in I}(M_i)_g,$$

no es difícil verificar que $\{(\prod_{i\in I} M_i)_g\}_{g\in G}$ *y* $\{(\bigoplus_{i\in I} M_i)_g\}_{g\in G}$ *definen* $G-$*graduaciones sobre los módulos* $\prod_{i\in I} M_i$ *y* $\bigoplus_{i\in I} M_i$*, respectivamente.*

Para una prueba detallada de las afirmaciones hechas en el Ejemplo 1.3.4, y algunas otras propiedades de la categoría $R-gr$, el lector puede consultar Soler (2019).

Con el fin de continuar con los objetivos de esta sección, se mostrará una caracterización de los anillos fuertemente graduados presentada por el matemático Everret Dade, mediante la relación que eventualmente hay entre las categorías $R_e - mod$ y $R-gr$.

Notación 1.3.1. *Sea R un anillo* $G-$*graduado. Considere los siguientes funtores:*

(i) $Ind := R\otimes_{R_e} - : R_e - mod \longrightarrow R-gr$*, definido como sigue:*

Objetos: Dado $N \in R_e - mod$*, el* $R-$*módulo* $Ind(N) := R\otimes_{R_e} N$ *se considera con la graduación* $(R\otimes_{R_e} N)_g = R_g \otimes_{R_e} N$.

Morfismos: Si $M,N \in R_e - mod$ *y* $\phi \in Hom_{R_e}(M,N)$, $Ind(\phi) := i_R \otimes \phi$.

(ii) $(-)_g : R-gr \longrightarrow R_e - mod$*, definido por:*

Objetos: $(-)_g(N) := N_g$ *para cada* $N \in R-gr$*. Note que* $N_g \in R_e - mod$ *pues* $R_e N_g \subseteq N_g$.

Morfismos: Si $M,N \in R-gr$ *y* $\varphi \in Hom_{R-gr}(M,N)$, $(-)_g$ *es la restricción a la componente g, es decir,* $(-)_g(\varphi) := \varphi_g : M_g \to N_g$*, que a cada* $m \in M_g$ *lo envía en* $\varphi(m) \in N_g$.

Sea $g \in G$. Según el Ejemplo 1.3.3, es claro que $(-)_g = (-)_e \circ T_g$, y al ser T_g un isomorfismo, se puede concluir que $(-)_g$ es una equivalencia si y solo si $(-)_e$ lo es.

Lema 1.3.1. *[Năstăsescu and Oystaeyen (2004), Teorema 2.5.5] Sea R un anillo G−graduado. Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(i) $(-)_e \circ Ind \simeq I_{R_e-mod}$.

(ii) $(Ind, (-)_e)$ *es un par adjunto.*

Demostración. (i) Si $N \in R_e - mod$, se tiene R_e-isomorfismo $\eta_N : R_e \otimes_{R_e} N \to N$ definido por $r \otimes n \to rn$ para cada $r \in R_e, n \in N$. Resta verificar que $\{\eta_N : N \in R_e - mod\}$ es un isomorfismo natural entre $(-)_e \circ Ind$ y I_{R_e-mod}. En ese sentido, sean $M, N \in R_e - mod$ y $\varphi \in Hom_{R_e}(M,N)$. Note que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} R_e \otimes_{R_e} M & \xrightarrow{\eta_M} & M \\ {\scriptstyle i_{R_e}\otimes\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ R_e \otimes_{R_e} N & \xrightarrow[\eta_N]{} & N \end{array}$$

En fecto, $\varphi(\eta_M(r \otimes m)) = \varphi(rm) = r\varphi(m) = \eta_N(i_{R_e} \otimes \varphi(r \otimes n))$, para cada $r \in R_e$ y $m \in M$.

(ii) Sean $M \in R_e - mod$ y $N \in R - gr$. Considere:

$$\rho_{M,N} : Hom_{R-gr}(R \otimes_{R_e} M, N) \to Hom_{R_e-mod}(M, N_e)$$

que envía a cada $\phi \in Hom_{R-gr}(R \otimes_{R_e} M, N)$ en $\rho_{M,N}(\phi) \in Hom_{R_e-mod}(M, N_e)$, este último definido por $\rho_{M,N}(\phi)(m) = \phi(1 \otimes m)$ para cada $m \in M$. Es claro que $\rho_{M,N}(\phi) \in Hom_{R_e-mod}(M, N_e)$ pues ϕ es graduado. Por otro lado, considere

$$\sigma_{M,N} : Hom_{R_e-mod}(M, N_e) \to Hom_{R-gr}(R \otimes_{R_e} M, N)$$

que a cada $\varphi \in Hom_{R_e-mod}(M,N_e)$ lo envía en $\sigma_{M,N}(\varphi) \in Hom_{R-gr}(R\otimes_{R_e} M,N)$, definido por $\sigma_{M,N}(\varphi)(r\otimes m) = r\varphi(m)$ para cada $r \in R$ y $m \in M$. Note que si $\phi \in Hom_{R-gr}(R\otimes_{R_e} M,N)$, entonces

$$\sigma_{M,N}(\rho_{M,N}(\phi))(r\otimes m) = r\rho_{M,N}(\phi)(m) = r\phi(1\otimes m) = \phi(r\otimes m)$$

para cada $r \in R$ y $m \in M$. Luego $\rho_{M,N}$ es inversa a derecha de $\sigma_{M,N}$. Análogamente se verifica que $\sigma_{M,N}$ es inversa a derecha de $\rho_{M,N}$. Finalmente, sean $\alpha \in Hom_{R_e}(M',M)$ y $\beta \in Hom_{R-gr}(N,N')$. Como para cada $\phi \in Hom_{R-gr}(R\otimes_{R_e} M,N)$ y $m' \in M'$ se tiene que:

$$(\rho_{M,N}(\phi)\circ\alpha)(m') = \phi(1\otimes\alpha(m')) = \phi((i_R\otimes\alpha)(1\otimes m')) = \rho_{M',N}(\phi\circ Ind(\alpha))(m')$$

entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Hom_{R-gr}(R\otimes_{R_e} M,N) & \xrightarrow{\rho_{M,N}} & Hom_{R_e}(M,N_e) \\ {\scriptstyle Ind(\alpha)^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^*} \\ Hom_{R-gr}(R\otimes_{R_e} M',N) & \xrightarrow[\rho_{M',N}]{} & Hom_{R_e}(M',N_e) \end{array}$$

Análogamente, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Hom_{R-gr}(R\otimes_{R_e} M,N) & \xrightarrow{\rho_{M,N}} & Hom_{R_e}(M,N_e) \\ {\scriptstyle \beta_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{e*}} \\ Hom_{R-gr}(R\otimes_{R_e} M,N') & \xrightarrow[\rho_{M,N'}]{} & Hom_{R_e}(M,N'_e) \end{array}$$

es conmutativo. Esto muestra que $(Ind,(-)_e)$ es un par adjunto. □

Observación 1.3.1. *Sea R un anillo G−graduado. Para cada g ∈ G considere la subcategoría de R − gr:*

$$Ob(C_g) := \{M \in R-gr:\ M_g = 0\}.$$

Algunas observaciones sobre C_g son las siguientes:

(i) Si $M \in C_g$ y N es $gr-$submódulo de M, entonces $N \in C_g$.

(ii) Si $M \in C_g$ y $N \in R-gr$ es imagen homomorfa de M, entonces $N \in C_g$.

(iii) Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de objetos de C_g, entonces $\bigoplus_{i\in I} M_i$ y $\prod_{i\in I} M_i$ son objetos de C_g.

(iv) Si $C_g = \{0\}$ para algún $g \in G$, entonces $C_h = \{0\}$ para cada $h \in G$.

(v) Sea $M \in R-gr$ y $\Gamma := \{N \leq_{gr} M : N \in C_g\}$. Es claro que $\Gamma \neq \emptyset$ pues $0 \in \Gamma$. Considere

$$t_{C_g}(M) = \langle T \rangle \tag{1}$$

el $R-$módulo izquierdo generado por T, donde $T = \cup_{N\in\Gamma} h(N)$. Es claro que $t_{C_g}(M)$ es un $gr-$submódulo de M. Más aún, note que $t_{C_g}(M) \in C_g$ y es el $gr-$submódulo de M más grande con esta propiedad.

(vi) Si $M \in R-gr$, entonces $t_{C_g}(M/t_{C_g}(M)) = 0$. Caso contrario, existe un submódulo graduado N de M que contiene propiamente a $t_{C_g}(M)$ y además $N_g = 0$. Lo cual no es cierto.

Sean R un anillo $G-$graduado y $M \in R-gr$. Considere $t_M : M \to M_e$ definida por $t_M(m) = m_e$, para cada $m = \sum_{g\in G} m_g \in M$. Note que t_M es R_e-lineal y además $t_M(rm) = \sum_{h\in G} r_{h^{-1}} m_h$, para cada $r \in R$.

Proposición 1.3.1. *Sean R un anillo $G-$graduado y $M \in R-gr$. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(i) $rad(M) := \{m \in M : t_M(rm) = 0$ *para cada* $r \in R\}$ *es submódulo graduado de* M.

(ii) $rad(M) = t_{C_e}(M)$.

Demostración. Sea $m = m_{g_1} + \cdots + m_{g_n} \in rad(M)$, donde $m_{g_i} \in M_{g_i}$, para cada i. Si $r \in R$, note que

$$t_M(rm_{g_i}) = t_M(r_{g_i^{-1}} m_{g_i}) = t_M(r_{g_i^{-1}} m) = 0,$$

para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Como r fue arbitrario, entonces las componentes homogéneas de m son elementos de $rad(M)$, luego $rad(M)$ es submódulo graduado de M. Esto prueba (i).

Por otro lado, note que si $m \in rad(M)_e$, entonces $t_M(rm) = rm = 0$ para cada $r \in R_e$, y por tanto $m = 0$. Luego $rad(M) \in C_e$ y por tanto $rad(M) \subseteq t_{C_e}(M)$. Finalmente, sea N submódulo graduado de M tal que $N_e = 0$, y tome $n \in N$. Entonces $t_M(rn) = \sum_{g \in G} r_{g^{-1}} n_g \in N_e = \{0\}$, luego $n \in rad(M)$ y $N \subseteq rad(M)$. En particular, $t_{C_e}(M) \subseteq rad(M)$ y se concluye que $rad(M) = t_{C_e}(M)$. □

Sea $M \in R - gr$. *En el caso extremo de que* $t_{C_g}(M) = 0$ *(respectivamente* $t_{C_g}(M) = M$*) se dice que* M *es libre de* C_g-*torsión o* $g-$*fiel (respectivamente que es de* C_g-*torsión). Note que* M *es* $g-$*fiel si y solo si cada* $gr-$*submódulo* N *de* M *cumple que* $N \cap M_g \neq 0$. *Por otro lado, note que si* $M \in R - gr$ *y* $g \in G$, *entonces* $M/RM_g \in Ob(C_g)$. *Este hecho será usado más adelante.*

El siguiente resultado que se presentará es debido al matemático Everett C. Dade. La versión original de este teorema puede ser encontrada en Dade (1980).

Teorema 1.3.1. *[Năstăsescu and Oystaeyen (2004), Teorema 3.1.1] Sea* R *un anillo* $G-$*graduado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *R es fuertemente graduado;*

(ii) *Cada $R-$módulo graduado es fuertemente graduado;*

(iii) *Para cada $M \in R-gr$ el morfismo graduado $\tau_M : R \otimes_{R_e} M_e \to M$, $r \otimes m \to rm$, es un isomorfismo en $R-gr$;*

(iv) *$\tau = \{\tau_M : R \otimes_{R_e} M_e \to M\}_{M \in R-gr}$ es un isomorfismo natural entre los funtores $Ind \circ (-)_e$ y I_{R-gr};*

(v) *$(-)_e : R-gr \longrightarrow R_e-mod$ es una equivalencia de categorías;*

(vi) *$Ind : R_e-mod \longrightarrow R-gr$ es una equivalencia de categorías;*

(vii) *Para cada $M \in R-gr$, existe un $N \in R_e-mod$ tal que $R \otimes_{R_e} N \simeq M$ en $R-gr$;*

(viii) *$Ob(C_g) = \{0\}$, para cada $g \in G$.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sean $M \in R-gr$ y $g,h \in G$. Note que

$$M_{gh} = R_e M_{gh} = R_g R_{g^{-1}} M_{gh} \subseteq R_g M_h \subseteq M_{gh},$$

luego M es fuertemente graduado.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Ya que M es fuertemente graduado, entonces τ_M es sobre pues para cada $g \in G$ $\tau_M(R_g \otimes_{R_e} M_e) = M_g$. Por otro lado, sea $K = ker(\tau_M)$. Entonces $K_e = (R_e \otimes_{R_e} M_e) \cap K = ker((\tau_M)_e)$. Y como $(\tau_M)_e : R_e \otimes_{R_e} M_e \to M_e$, $r \otimes m \mapsto rm$, es un isomorfismo de R_e-módulos, se concluye que $K_e = 0$. En ese sentido, $K_g = R_g K_e = 0$ para cada $g \in G$, es decir, $K = 0$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Resta verificar que para cada $M,N \in R-gr$ y $\varphi \in Hom_{R-gr}(M,N)$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} R \otimes_{R_e} M_e & \xrightarrow{\tau_M} & M \\ {\scriptstyle i_R \otimes \varphi_e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ R \otimes_{R_e} N_e & \xrightarrow{\tau_N} & N \end{array}$$

Sea $r \otimes m \in R \otimes_{R_e} M_e$ un tensor elemental. Note que:

$$\varphi(\tau_M(r \otimes m)) = \varphi(rm) = r\varphi(m) = r\varphi_e(m) = \tau_N(i_R \otimes \varphi_e(r \otimes m)).$$

Ya que $r \otimes m \in R \otimes_{R_e} M_e$ fue arbitrario, el diagrama anterior es conmutativo.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Por el primer inciso del Lema 1.3.1, se sabe que $(-)_e \circ Ind \simeq I_{R_e-mod}$. Así, del isomorfismo natural $Ind \circ (-)_e \simeq I_{R-gr}$, se concluye que $(-)_e$ es una equivalencia.

$(v) \Rightarrow (vi)$ Sea $F : R_e - mod \to R - gr$ un funtor tal que $F \circ (-)_e \simeq I_{R-gr}$ y $(-)_e \circ F \simeq I_{R_e-mod}$. Note que

$$Ind \circ (-)_e = I_{R-gr} \circ Ind \circ (-)_e \simeq F \circ (-)_e \circ Ind \circ (-)_e \simeq F \circ I_{R_e-mod} \circ (-)_e \simeq I_{R-gr}.$$

Así, por el Lema 1.3.1 se concluye que Ind es una equivalencia.

$(vi) \Rightarrow (vii)$ Ya que Ind es una equivalencia, entonces es un funtor representativo.

$(vii) \Rightarrow (i)$ Note que si $N \in R_e - mod$, entonces:

$$R_g(R \otimes_{R_e} N)_e = R_g(R_e \otimes N) = R_g R_e \otimes N = R_g \otimes N = (R \otimes_{R_e} N)_g.$$

Dado $M \in R-gr$, existe $N \in R_e - mod$ tal que $R \otimes_{R_e} N \simeq M$ en $R-gr$, luego $R_g M_e = M_g$ para cada $g \in G$. En ese sentido, si $h \in G$ y $M = R(h)$, entonces $R_g R_h = R_g M_e = M_g = R_{gh}$ y R es fuertemente graduado.

$(viii) \Leftrightarrow (i)$ Es claro que $(i) \Rightarrow (viii)$. Recíprocamente suponga que $(viii)$ es cierta, y sea $M \in R-gr$ no nulo. Note que RM_g es un $gr-$submódulo de M con la graduación $\{R_{hg^{-1}}M_g\}_{h\in G}$ por el Ejemplo 1.3.2. Además, como $(M/RM_g)_g = 0$ y $Ob(C_g) = \{0\}$, se tiene que $M = RM_g$ y por tanto $M_{pg} = (RM_g)_{pg} = R_pM_g$ para cada $p \in G$. En particular, tomando $q \in G$ arbitrario y cambiando M por $M(q)$, se tiene la relación

$$M_{pgq} = M(q)_{pg} = R_pM(q)_g = R_pM_{gq}$$

para cada $p,q \in G$. Si $h \in G$ es arbitrario, y $q = g^{-1}h$, entonces $M_{ph} = R_pM_h$ para cada $p,h \in G$. En particular, R es fuertemente graduado. □

En el Ejemplo 3.2.4 de Năstăsescu and Oystaeyen (2004) se muestra que la equivalencia entre las categorías $R-gr$ y R_e-mod no es una condición suficiente para que el anillo R sea fuertemente graduado. A continuación se comenta dicho ejemplo.

Ejemplo 1.3.5. *Sea R un anillo no nulo tal que $R \simeq R \times R$ como anillos (por ejemplo $R = K^I$, donde K es un campo e I es infinito), y considere el grupo $G = \{e,g\}$, donde $g^2 = e$. Si R es $G-$graduado trivialmente, entonces $R-gr$ es equivalente a $R-mod \times R-mod$. En efecto, el funtor $F : R-gr \longrightarrow R-mod \times R-mod$ definido por:*

1. *Objetos: Dado $M = M_e \oplus M_g \in R-gr$, $F(M) = (M_e, M_g)$. Note que M_e y M_g son $R-$módulos pues R es graduado trivialmente.*

2. *Morfismos: Dado $\phi \in Hom_{R-gr}(M,N)$, $F(\phi) = (\phi_e, \phi_g)$.*

es una equivalencia. Para mostrar esto, considere el funtor $G : R-mod \times R-mod \longrightarrow R-gr$ *definido como sigue:*

1. *Objetos: Si* $(P,Q) \in R-mod \times R-mod$*, entonces* $G(P,Q) = P \oplus Q$*, donde* $G(P,Q)_e = P \times 0$ *y* $G(P,Q)_g = 0 \times Q$.

2. *Morfismos: Si* $(P,Q) \xrightarrow{(\alpha,\beta)} (P',Q')$ *es un morfismo, entonces* $G(\alpha,\beta) = \alpha \times \beta$.

Es claro que $F \circ G \simeq I_{R-mod \times R-mod}$ *y* $G \circ F \simeq I_{R-gr}$*, luego* F *es una equivalencia. Además, como* $R-mod \times R-mod$ *y* $R-mod$ *son equivalentes, entonces* $R-gr$ *y* $R-mod$ *son equivalentes. Sin embargo, R no es fuertemente graduado.*

A continuación se mostrarán condiciones suficientes para que la equivalencia entre las categorías $R-gr$ y R_e-mod implique que R sea fuertemente graduado.

Definición 1.3.2. *Sean R un anillo* $G-$*graduado y* $M \in R-gr$*. M es llamado* $gr-$*simple si M no tiene* $gr-$*submódulos no triviales. Además, se define*

$$\Omega_{R-gr} := \{[M] :\ M \text{ es } gr-simple\}, \text{ donde } [M] = \{M' \in R-gr :\ M \simeq M' \text{ en } R-gr\}.$$

Análogamente;

$$\Omega_{R_e} := \{[S] :\ S \text{ es } R_e-simple\}, \text{ donde } [S] = \{S' \in R_e-mod :\ S \simeq S' \text{ en } R_e-mod\}.$$

Ejemplo 1.3.6. *Sean R un anillo* $G-$*graduado y* $N \in R_e-mod$ *un módulo simple. Considere el módulo graduado*

$$T_N := Ind(N)/t_{C_e}(Ind(N)).$$

Por la Observación 1.3.1 se tiene que T_N es $e-$fiel. Por otro lado, se tienen los siguientes isomorfismos en $R_e - mod$:

$$(T_N)_e \simeq (R_e \otimes_{R_e} N)/t_{C_e}(N)_e = R_e \otimes_{R_e} N \simeq N,$$

luego $(T_N)_e$ es R_e-simple. En ese sentido, si P es $gr-$submódulo no nulo de T_N, entonces $P_e = (T_N)_e$. Por tanto, $T_N = R(T_N)_e = RP_e \subseteq P$ y T_N es $gr-$simple.

Lema 1.3.2. *Sea R un anillo $G-$graduado. Existe una correspondencia biyectiva entre Ω_{R_e} y $\{[M] \in \Omega_{R-gr} : M \text{ es } e-fiel\}$.*

Demostración. Sea $N \in R_e - mod$ un módulo simple. Por el Ejemplo 1.3.6 se sabe que $T_N = Ind(N)/t_{C_e}(Ind(N))$ es $gr-$simple. Por otro lado, si M,N son R_e-módulos simples tales que $T_N \simeq T_M$ en $R-gr$, entonces al aplicar el funtor $(-)_e$ se concluye que

$$N \simeq (T_N)_e \simeq (T_M)_e \simeq M$$

en $R_e - mod$.

Finalmente, sea $M \in R-gr$ $e-$fiel y $gr-$simple. Ya que $M_e \neq 0$, es posible definir el morfismo graduado $\phi : R \otimes_{R_e} M_e \to M$, $r \otimes m \mapsto rm$, para cada $r \in R$ y $m \in M$. Ya que ϕ es sobre pues M es $gr-$simple, entonces $(R \otimes_{R_e} M_e)/ker(\phi) \simeq M$ en $R-gr$. Note que $ker(\phi) = t_{C_e}(R \otimes_{R_e} M_e)$. En efecto, $ker(\phi)_e = ker(\phi) \cap (R_e \otimes_{R_e} N) = 0$ pues este es el kernel del isomorfismo canónico entre $R_e \otimes_{R_e} M_e \simeq M_e$. Por tanto, $ker(\phi) \subseteq t_{C_e}(R \otimes_{R_e} M_e)$. Recíprocamente, sea $g \in G$ y $r_g \otimes m \in t_{C_e}(R \otimes_{R_e} M_e)_g = t_{C_e}(R \otimes_{R_e} M_e) \cap (R_g \otimes_{R_e} M_e)$. Entonces $0 = (R \cdot r_g \otimes m)_e = R_{g^{-1}} \cdot r_g \otimes m$ y al evaluar en ϕ se deduce que $R_{g^{-1}} \cdot r_g m = 0$. Esto implica que el $gr-$submódulo $N = R \cdot r_g m$ de M es tal

que $N_e = 0$ y por la $e-$fidelidad de M se tiene que $N = 0$, en particular $r_g m = 0$. Esto muestra que $t_{C_e}(R \otimes_{R_e} M_e) = ker(\phi)$, y además $M \simeq (T_M)_e$. Por lo anterior, la función que toma a $[N] \in \Omega_{R_e}$ y lo envía en $[T_N] \in \{[M] \in \Omega_{R-gr} : \ M \ es \ e-fiel\}$, es biyectiva. □

Teorema 1.3.2 (Năstăsescu and Oystaeyen (2004), Teorema 3.2.1)**.** *Sea R un anillo $G-$graduado tal que las categorías $R-gr$ y R_e-mod son equivalentes. Si Ω_{R_e} es finito, entonces R es fuertemente graduado.*

Demostración. La equivalencia de las categorías $R-gr$ y R_e-mod implica que $|\Omega_{R_e}| = |\Omega_{R-gr}|$. En efecto, sea $F : R-gr \to R_e-mod$ una equivalencia. Sea $M \in R-gr$ un módulo $gr-$simple, y suponga que $F(M)$ no es un R_e-módulo simple. Entonces existe $N \in R_e-mod$ y $0 \to N \xrightarrow{f} F(M)$ una sucesión exacta en R_e-mod. Ya que F es una equivalencia, existe $N' \in R-gr$ tal que $F(N') \simeq N$. Sin perder generalidad, suponga que $F(N') = N$. El hecho de que F sea pleno, implica que existe $f' \in Hom_{R-gr}(N', M)$ tal que $F(f') = f$. No es difícil ver que $0 \to N' \xrightarrow{f'} M$ es una sucesión exacta en $R-gr$, lo que contradice la $gr-$simplicidad de M. Así, $F(M)$ es R_e-simple.

Teniendo en cuenta lo anterior, defina la función $\mathscr{L}_F : \Omega_{R-gr} \to \Omega_{R_e}$, que a cada $[M] \in \Omega_{R-gr}$ lo envía en $[F(M)] \in \Omega_{R_e}$. Note que $\mathscr{L}_F$ está bien definida pues los funtores preservan isomorfismos. Además, si $[M]$ y $[M']$ son elementos de Ω_{R-gr} tales que $\mathscr{L}_F([M]) = \mathscr{L}_F([M'])$, entonces $F(M) \simeq F(M')$. Nuevamente, no es difícil verificar que $M \simeq M'$ y por tanto $\mathscr{L}_F$ es inyectiva. Esto muestra que $|\Omega_{R-gr}| \leq |\Omega_{R_e-mod}|$. Para terminar la demostración, note que la hipótesis indica que existe una equivalencia $G : R_e-mod \to R-gr$. Así, basta aplicar el razonamiento anterior para mostrar que $|\Omega_{R_e}| \leq |\Omega_{R-gr}|$.

Por el Lema 1.3.2 es posible concluir que $\Omega_{R-gr} = \{[M] \in \Omega_{R-gr} : \ M \text{ es } e-fiel\}$, es decir, cada módulo $gr-$simple es $e-$fiel. Si se supone que R no es fuertemente graduado, por el Teorema 1.3.1 existe $M \in C_e$ no nulo. En particular, ya que C_e es cerrada bajo subobjetos se puede asumir que M es finitamente generado. Por el Lema de Zorn existe N un $gr-$submódulo maximal de M, luego M/N es $gr-$simple. Además, ya que C_e es cerrada bajo objetos cociente, se tiene que $M/N \in C_e$. Luego existe un módulo graduado $gr-$simple que no es $e-$fiel, que es una contradicción. □

A continuación se define el funtor coinducido asociado a un anillo graduado. Este funtor será utilizado para dar una caracterización de los anillos epsilon-fuertemente graduados.

Notación 1.3.2. *Sea R un anillo $G-$graduado. El funtor covariante $Coind : R_e - mod \to R - gr$ es definido como sigue:*

1. *Objetos: Sea $N \in R_e - mod$ y considere $Hom_{R_e}(R,N)$ como $R-$módulo a izquierda. Para cada $g \in G$, defina el subgrupo de $Hom_{R_e}(R,N)$ dado por:*

$$N'_g := \{f \in Hom_{R_e}(R,N) : \ f(R_t) = 0 \text{ para cada } t \in G \setminus \{g^{-1}\}\}.$$

Denote por $Coind(N) := \sum_{g\in G} N'_g$. Es claro que la suma anterior es una suma directa. En efecto, sean $\{g_1, g_2, \cdots, g_n\} \subset G$ y $f_{g_k} \in N'_{g_k}$ para $k = 1, \cdots, n$, tales que $f_{g_1} + \cdots + f_{g_n} = 0$. Si $r \in R_{g_1^{-1}}$, entonces $f_{g_k}(r) = 0$ para cada $k \neq 1$, luego $f_{g_1}(r) = 0$. Lo anterior muestra que $f(R_{g_1^{-1}}) = 0$ y por tanto $f_{g_1} = 0$. De la misma forma se verifica que $f_{g_2} = \cdots = f_{g_n} = 0$. Con esto se concluye que $Coind(N) = \bigoplus_{g\in G} N'_g$. Por otro lado, si $r_h \in R_h$ y $f \in N'_g$, entonces $r_h \cdot f \in N'_{hg}$. Para verificar esto, considere $t \in G$ tal que $t \neq g^{-1}h^{-1}$ y $a \in R_t$. Note que

$r_h \cdot f(a) = f(ar_h) = 0$, *es decir,* $R_h\ N'_g \subset N'_{hg}$. *De lo anterior se deduce que* $Coind(N) \in R-gr$. *Este es llamado módulo coinducido por* N.

2. *Morfismos: Si* $M,N \in R_e - mod$ *y* $\beta \in Hom_{R_e}(M,N)$, *se define* $Coind(\beta) := \beta_*$, *es decir, dados* $g_1,\cdots,g_k \in G$ *y* $\phi_i \in M'_{g_i}$, *se tiene que:*

$$\beta_*(\phi_1 + \cdots + \phi_k) = \beta \circ \phi_1 + \cdots + \beta \circ \phi_k.$$

Observación 1.3.2. *Con relación al funtor Coind se pueden hacer las siguientes observaciones:*

(i) Si $0 \to N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} P$ *es una sucesión exacta en* $R_e - mod$, *entonces la sucesión*

$$0 \to Coind(N) \xrightarrow{Coin(\alpha)} Coind(M) \xrightarrow{Coind(\beta)} Coind(P)$$

es exacta en $R-gr$. *En efecto, sea* $g \in G$ *y* $f \in Coind(N)_g$ *tal que* $0 = Coind(\alpha)(f) = \alpha \circ f$, *entonces* $f = 0$ *y por tanto* $Coind(\alpha)$ *es inyectiva. Además, es claro que* $Im(Coind(\alpha)) \subseteq ker(Coind(\beta))$. *Finalmente, sea* $g \in G$ *y* $\varphi \in ker(Coind(\beta))_g$, *es decir,* $\beta \circ \varphi = 0$. *Ya que el funtor* $Hom_{R_e}(R,-) : R_e - mod \to R - mod$ *es exacto a izquierda, existe* $\phi \in Hom_{R_e}(R,N)$ *tal que* $\alpha \circ \phi = \varphi$. *Note que* $\phi \in Coind(N)_g$. *En efecto, si* $g^{-1} \neq h \in G$ *y* $x \in R_h$, *entonces* $\alpha(\phi(x)) = \varphi(x) = 0$ *(pues* $\varphi \in Coind(\beta)_g$*), y como* α *es inyectiva, entonces* $\phi(x) = 0$. *Lo anterior muestra que* $\phi \in Coind(N)_g$, $Coind(\alpha)(\phi) = \varphi$ *y* $ker(Coind(\beta))_g \subseteq Im(Coind(\alpha))_g$. *Como* $g \in G$ *fue arbitrario, se concluye la exactitud de la sucesión en cuestión.*

(ii) Si R *es proyectivo en* $R_e - mod$, *entonces Coind es un funtor exacto. En efecto, suponga que* $0 \to N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} P \to 0$ *es una sucesión exacta en* $R_e - mod$. *Según el inciso anterior,*

resta verificar que $Coind(\beta)$ es sobre. En ese sentido, tome $g \in G$ y sea $\varphi \in Coind(P)_g \subseteq Hom_{R_e}(R,P)$. Como R es proyectivo, el funtor $Hom_{R_e}(R,-) : R_e - mod \to R - mod$ es exacto, luego existe $\phi \in Hom_{R_e}(R,M)$ tal que $\beta \circ \phi = \varphi$. Es claro que $\phi \in Coind(M)_g$, luego $Coind(\beta)(\phi) = \varphi$. Con esto se concluye que $Coind(P)_g \subseteq Im(Coind(\beta))_g$ y al ser g arbitrario, la sucesión es exacta.

(iii) Si R es un anillo $G-$graduado tal que $Supp(R) = \{g \in G : R_g \neq 0\}$ es finito, entonces $Coind(N) = Hom_{R_e}(R,N)$ para cada $N \in R_e - mod$. En efecto, basta suponer que $Supp(R) = \{g_1, \cdots, g_n\}$, tomar $f \in Hom_{R_e}(R,N)$ y definir $f_{g_i} : R \to N$

$$f_{g_i}(r) = \begin{cases} f(r), \ si\, r \in R_{g_i} \\ \\ 0, \ en\, tro\, caso \end{cases}$$

para cada $r \in h(R)$. Es claro que $f_{g_i} \in Coind(N)_{g_i^{-1}}$ y $f = f_{g_1} + \cdots + f_{g_n}$. En particular, como es mostrado en el Corolario 2.5.7 de Năstăsescu and Oystaeyen (2004), esto permite concluir que si el soporte de R es finito, entonces cada $R-$módulo puede ser encajado en un $R-$módulo graduado.

(iv) Sea $N \in R_e - mod$. Es claro que $N'_g \simeq Hom_{R_e}(R_{g^{-1}}, N)$ en $R_e - mod$, para cada $g \in G$. En efecto, basta considerar $N'_g \xrightarrow{\sigma} Hom_{R_e}(R_{g^{-1}}, N)$, $f \mapsto f|_{R_{g^{-1}}}$, para cada $f \in N'_g$. El siguiente resultado permitirá concluir que si N es inyectivo en $R_e - mod$, entonces $Coind(N)$ es $gr-$inyectivo.

Lema 1.3.3. *[Năstăsescu and Oystaeyen (2004), Teorema 2.5.5] Sea R un anillo $G-$graduado, entonces*

(i) $(-)_e \circ Coind \simeq I_{R_e-mod}$.

(ii) $((-)_e, Coind)$ *es un par adjunto.*

Demostración. Para verificar (i), considere $N \in R_e - mod$. Defina $\tau_N : Coind(N)_e \to N$, $f \mapsto f(1)$, para cada $f \in Coind(N)_e$. Note que si $r \in R_e$, entonces $\tau_N(rf) = (rf)(1) = f(r) = rf(1) = r\tau_N(f)$, luego τ_N es un morfismo en $R_e - mod$. Por otro lado, es claro que τ_N es inyectiva. Además, dado $n \in N$, considere $f : R \to N$ definida para cada $r \in h(R)$ como sigue

$$f(r) = \begin{cases} rn, \ si\, r \in R_e \\ \\ 0, \ en\ otro\ caso \end{cases}$$

Note que $f \in Coind(N)_e$ y $\tau_N(f) = n$, luego τ_N es biyectiva. Finalmente, sean N y N' R_e-módulos a izquierda, y $\phi \in Hom_{R_e-mod}(N, N')$. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Coind(N)_e & \xrightarrow{\tau_N} & N \\ {\scriptstyle Coind(\phi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ Cond(N') & \xrightarrow[\tau_{N'}]{} & N' \end{array}$$

el cual es conmutativo pues si $f \in Coind(N_e)$, entonces

$$\tau_{N'}(Coind(\phi)(f)) = Coind(\phi)(f)(1) = (\phi \circ f)(1) = \phi(\tau_N(f)).$$

Por tanto, $\{\tau_N : Coind(N)_e \to N\}_{N \in R_e-mod}$ es un isomorfismo natural entre los funtores I_{R_e-mod} y $(-)_e \circ Coind$.

Por otro lado, sean $M \in R - gr$ y $N \in R_e - mod$, defina

$$\psi_{M,N} : Hom_{R_e}(M_e, N) \to Hom_{R-gr}(M, Coind(N))$$

donde para cada $\phi \in Hom_{R_e}(M_e,N)$, $\psi_{M,N}(\phi) \in Hom_{R-gr}(M,Coind(N))$ es definido como sigue: dado $h \in G$ y $m_h \in M_h$, $\psi_{M,N}(\phi)(m_h) : R \to N$ es un morfismo en $R_e - mod$ que envía a cada $r = \sum_{g\in G} r_g \in R$ en $\phi(r_{h^{-1}} \cdot m_h)$. Para construir la inversa de $\psi_{M,N}$, considere:

$$\omega_{M,N} : Hom_{R-gr}(M,Coind(N)) \to Hom_{R_e}(M_e,N)$$

que a cada $\varphi \in Hom_{R-gr}(M,Coind(N))$ lo envía en $\omega_{M,N}(\varphi)$, definido por $\omega_{M,N}(\varphi)(m) = \varphi(m)(1)$ para cada $m \in M_e$. Note que si $r \in R_e$ y $m \in M_e$, entonces:

$$\omega_{M,N}(\varphi)(rm) = \varphi(rm)(1) = (r\varphi(m))(1) = \varphi(m)(r) = r\varphi(m)(1) = r\omega_{M,N}(\varphi)(m)$$

luego $\omega_{M,N}$ está bien definida.

Además, note que si $\phi \in Hom_{R_e}(M_e,N)$ y $m \in M_e$, entonces:

$$\omega_{M,N}(\psi_{M,N}(\phi))(m) = \psi_{M,N}(\phi)(m)(1) = \phi(m)$$

luego $\omega_{M,N}(\psi_{M,N}(\phi)) = \phi$. Análogamente, se muestra que $\psi_{M,N}$ es inversa a izquierda de $\omega_{M,N}$.

Finalmente, considere un par de morfismos $\alpha \in Hom_{R-gr}(M',M)$ y $\beta \in Hom_{R_e-mod}(N,N')$. Si $h \in G$, $m'_h \in M'_h$ y $\phi \in Hom_{R_e-mod}(M_e,N)$, note que

$$\alpha^*(\psi_{M,N}(\phi))(m'_h)(r) = (\psi_{M,N} \circ \alpha)(m'_h)(r) = \phi(r_{h^{-1}}\alpha(m'_h)).$$

Por otra parte:

$$\psi_{M',N}(\alpha_e^*(\phi))(m'_h)(r) = \psi_{M',N}(\phi \circ \alpha_e)(m'_h)(r) = \phi(\alpha_e(r_{h^{-1}}m'_h)) = \phi(\alpha(r_{h^{-1}}m'_h)) =$$

$$\phi(r_{h^{-1}}\alpha(m'_h)).$$

Luego el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Hom_{R_e-mod}(M_e,N) & \xrightarrow{\psi_{M,N}} & Hom_{R-gr}(M,Coind(N)) \\ \alpha_e^* \downarrow & & \downarrow \alpha^* \\ Hom_{R_e-mod}(M'_e,N) & \xrightarrow[\psi_{M',N}]{} & Hom_{R-gr}(M',Coind(N)) \end{array}$$

De forma análoga se puede verificar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Hom_{R_e-mod}(M_e,N) & \xrightarrow{\psi_{M,N}} & Hom_{R-gr}(M,Coind(N)) \\ \beta_* \downarrow & & \downarrow Coind(\beta)_* \\ Hom_{R_e-mod}(M_e,N') & \xrightarrow[\psi_{M,N'}]{} & Hom_{R-gr}(M,Coind(N')) \end{array}$$

es conmutativo. Con lo cual queda probada la afirmación (ii). □

Observación 1.3.3. *Sean R un anillo $G-$graduado, $M \in R-gr$ y $g \in G$. Con la notación usada en la prueba del Lema 1.3.1, se sabe que $\rho_{M_g,M(g)}$ es biyectiva. En particular, existe $\kappa_{g,M} \in Hom_{R-gr}(Ind(M_g),M(g)) = Hom_{R-gr}(Ind(M_g)(g^{-1}),M)$ tal que $\rho_{M_g,M(g)}(\kappa_{g,M}) = i_{M_g}$. Además, ya que $\kappa_{g,M} = \sigma_{M_g,M(g)}(i_{M_g})$, entonces $\kappa_{g,M}(r \otimes m) = rm$ para cada $r \in R$ y $m \in M_g$. Análogamente, por el Lema 1.3.3 el morfismo $\lambda_{g,M} \in Hom_{R-gr}(M,Coind(M_g)(g^{-1}))$, tal que para cada $h \in G$, $\lambda_{g,M}(m_h)(r) = r_{gh^{-1}}m_h$, está bien definido.*

Definición 1.3.3. *Sean R un anillo $G-$graduado, $M \in R-gr$ y N un $gr-$submódulo de M. Se dice que N es submódulo $gr-$esencial de M, si $N \cap P \neq \{0\}$ para cada $gr-$submódulo no nulo P de M.*

Como se prueba en la Proposición 2.3.5 de Năstăsescu and Oystaeyen (2004), el hecho de que un módulo graduado M tenga submódulos $gr-$esenciales implica que para cada $m \in M$ existe $a \in h(R)$ tal que $am \neq 0$.

El siguiente lema, entre otras cosas, permite calcular el submódulo $t_{C_g}(M)$ para cada $M \in R-gr$ y $g \in G$.

Lema 1.3.4. *[Năstăsescu and Oystaeyen (2004), Proposición 2.6.3] Sean R un anillo G−graduado y $M \in R-gr$. Usando la notación de la Observación 1.3.3, las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(i) $ker(\kappa_{g,M}), coker(\kappa_{g,M}), ker(\lambda_{g,M})$ *y* $coker(\lambda_{g,M})$ *están en* C_g*, para cada* $g \in G$*.*

(ii) $t_{C_g}(M) = ker(\lambda_{g,M})$*, para cada* $g \in G$*.*

(iii) $Im(\lambda_{g,M})$ *es submódulo* $gr-$*esencial de* $Coind(M_g)(g^{-1})$*, para cada* $g \in G$*.*

Demostración. (i) Note que $ker(\kappa_{g,M})_g = ker(\kappa_{g,M}) \cap (R_e \otimes_{R_e} M_g)$, que es el kernel del isomorfismo $R_e \otimes_{R_e} M_g \simeq M_g \ r \otimes m \mapsto rm$, por tanto $ker(\kappa_M)_g = 0$ y $ker(\kappa_{g,M}) \in C_g$. Además, ya que $Im(\kappa_{g,M}) = RM_g$, entonces $coker(\kappa_{g,M})_g = (M/RM_g)_g = 0$. Así mismo, note que

$$ker(\lambda_{g,M})_g = \{m \in M_g : rm_g = 0 \text{ para cada } r \in R_e\} = \{0\},$$

esto implica que:

$$Im(\lambda_{g,M})_g = (\lambda_{g,M})(M_g) = Im((\lambda_{g,M})_g) \simeq M_g,$$

donde el último isomorfismo es en la categoría $R_e - mod$.

Por otro lado, en $R_e - mod$ se tiene que

$$Coind(M_g)(g^{-1})_g = Coind(M_g)_e \simeq Hom_{R_e}(R_e, M_g) \simeq M_g,$$

y por tanto

$$coker(\lambda_M)_g \simeq Coind(M_g)(g^{-1})_g / Im(\lambda_M)_g = 0.$$

(ii) Por el inciso anterior se sabe que $ker(\lambda_{g,M}) \subseteq t_{C_g}(M)$. Recíprocamente, considere $h \in G$ y $m_h \ t_{C_g}(M)_h$. Ya que C_g es cerrada bajo submódulos, entonces $R_{gh^{-1}} m_h = 0$. Por tanto, para cada

$r \in R$, $0 = r_{gh^{-1}} m_h = \lambda_{g,M}(m_h)(r)$, es decir, $m_h \in ker(\lambda_{g,M})$. Esto muestra que $t_{C_g}(M) = ker(\lambda_{g,M})$.

(iii) Primero se probará el caso $g = e$, es decir, que $Im(\lambda_{e,M})$ es submódulo $gr-$esencial de $Coind(M_e)$. Sean $0 \neq N$ un $gr-$submódulo de $Coind(M_e)$, $h \in G$ y $0 \neq \varphi \in N \cap Coind(M_e)_h$. Existe $r_{h^{-1}} \in R_{h^{-1}}$ tal que $\varphi(r_{h^{-1}}) \neq 0$. Note que $r_{h^{-1}}\varphi = \lambda_{e,M}(\varphi(r_{h^{-1}})) \in Im(\lambda_{e,M})$. En efecto, para cada $a \in R$

$$\lambda_{e,M}(\varphi(r_{h^{-1}}))(a) = a_e \varphi(r_{h^{-1}}) = \varphi(a_e r_{h^{-1}}) = \varphi(a r_{h^{-1}}) = r_{h^{-1}}\varphi(a),$$

luego $\lambda_{e,M}(\varphi(r_{h^{-1}})) = r_{h^{-1}}\varphi \in N \cap Im(\lambda_{e,M})$ ya que a fue arbitrario. Por tanto $Im(\lambda_{e,M})$ es submódulo $gr-$esencial de $Coind(M_e)$. Para el caso general, tome $g \in G$. Del razonamiento anterior se deduce que $\lambda_{e,M(g)} \in Hom_{R-gr}(M(g), Coind(M_g))$ es tal que $Im(\lambda_{e,M(g)})$ es submódulo $gr-$esencial de $Coind(M_g)$. Por otro lado, ya que

$$Hom_{R-gr}(M(g), Coind(M_g)) = Hom_{R-gr}(M, Coind(M_g)(g^{-1})),$$

entonces $Im(\lambda_{g,M})$ es submódulo $gr-$esencial de $Coind(M_g)(g^{-1})$, que era lo que se buscaba. □

Corolario 1.3.1. *Sea R un anillo $G-$graduado. Si R es fuertemente graduado, entonces para cada $M \in R-gr$ y para cada $g \in G$ se tiene que:*

$$ker(\lambda_{g,M}) = \{m \in M : \textstyle\sum_{h \in G} r_{gh^{-1}} m_h = 0, \text{ para cada } r \in R\} = \{0\}.$$

Recípricamente, si existe $g \in G$ tal que $ker(\lambda_{g,M}) = \{0\}$ para cada $M \in R-gr$, entonces R es fuertemente graduado.

Demostración. Si R es es fuertemente graduado, el Teorema 1.3.1 muestra que $C_g = 0$ para cada $g \in G$. Luego $ker(\lambda_{g,M}) = t_{C_g}(M) = 0$, para cada $M \in R-gr$. Recíprocamente, si existe $g \in G$ tal

que $t_{C_g}(M) = ker(\lambda_{g,M}) = 0$ para cada $M \in R-gr$, entonces $C_g = 0$ y R es fuertemente graduado por el Teorema 1.3.1. □

Teorema 1.3.3. *[Năstăsescu and Oystaeyen (2004), Proposición 2.6.7] Sea R un anillo graduado por un grupo G. Si R es fuertemente graduado, entonces Ind ≃ Coind.*

Demostración. Sea $N \in R_e - mod$ y $M := Ind(N)$. Entonces $M_e = R_e \otimes_{R_e} N \simeq N$ en $R_e - mod$, y por tanto $Coind(M_e) \simeq Coind(N)$ en $R-gr$. Según la notación de la Observación 1.3.3 se tiene el morfismo graduado $\lambda_{e,Ind(N)} : Ind(N) \to Coind(N)$, donde para cada $h \in G$, $r_h \in R_h$ y $n \in N$ se define $\lambda_{e,Ind(N)}(r_h \otimes n) : R \to N$ por $\lambda_{e,Ind(N)}(r_h \otimes n)(a) = a_{h^{-1}} r_h n$, siendo $a = \sum_{g \in G} a_g \in R$. Denote por $\eta_N := \lambda_{e,Ind(N)}$ para cada $N \in R_e - mod$. Por el Lema 1.3.4 se sabe que $ker(\eta_N), coker(\eta_N) \in C_e$. Pero ya que R es fuertemente graduado, el Teorema 1.3.1 dice que $C_e = 0$ y por tanto η_N es isomorfismo para cada $N \in R_e - mod$. Resta verificar que la familia de morfismos $\{\eta_N : N \in R_e - mod\}$ es un isomorfismo natural entre los funtores Ind y $Coind$. En ese sentido, sean N y N' en $R_e - mod$ y $\varphi \in Hom_{R_e}(N, N')$. Note que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Ind(N) & \xrightarrow{\eta_N} & Coind(N) \\ {\scriptstyle i_R \otimes \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} \\ Ind(N') & \xrightarrow[\eta_{N'}]{} & Coind(N') \end{array}$$

En efecto, si $h \in G$, $r_h \otimes n \in Ind(N)_h$ y $a \in R$, entonces

$$\varphi \circ \eta_N(r_h \otimes n)(a) = \varphi(a_{h^{-1}} r_h n) = a_{h^{-1}} r_h \varphi(n) = \eta_{N'}(r_h \otimes \varphi(n))(a)$$

luego $(\varphi \circ \eta_N)(r_h \otimes n) = (\eta_{N'} \circ (i_R \otimes \varphi))(r_h \otimes n)$, y por la aditividad se concluye lo que se buscaba.

□

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco del Teorema 1.3.3 no es válido.

Ejemplo 1.3.7. *Sean R un anillo $G-$graduado trivialmente y $N \in R_e - mod = R - mod$. Note que $Ind(N) = R \otimes_R N$, y por la Observación 1.3.2 $Coind(N)_e \simeq Hom_R(R,N)$. Esto implica que $Ind(N) \simeq Coind(N)$ en $R_e - mod$. Sea $\gamma_N : Ind(N) \to Coind(N)$ que a cada $r \otimes n \in Ind(N)$ lo envía en el $R-$homomorfismo $\gamma_N(r \otimes n) : R \to N$, este último definido por $\gamma_N(r \otimes n)(a) = arn$, para cada $a \in R$. Note que γ_N es sobre pues si $\phi \in Hom_R(R,N)$, entonces $\gamma_N(1 \otimes \phi(1)) = \phi$. Además, si $arn = 0$ para cada $a \in R$, entonces $rn = 0$, es decir, $r \otimes n$ está en el kernel del isomorfismo canónico entre $R \otimes_R N$ y N, luego $r \otimes n = 0$. Finalmente, sean $N, N' \in R_e - mod$ y $\phi \in Hom_{R_e}(N,N')$. El siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} Ind(N) & \xrightarrow{\gamma_N} & Coind(N) \\ {\scriptstyle i_R \otimes \phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_*} \\ Ind(N') & \xrightarrow[\gamma'_N]{} & Coind(N') \end{array}$$

En efecto, si $r \otimes n \in R \otimes_R N$ y $a \in R$, entonces:

$$\phi(\gamma_N(r \otimes n))(a) = \phi(arn) = \gamma_{N'}(r \otimes \phi(n))(a) = (\gamma_{N'} \circ i_R \otimes \phi)(r \otimes n)(a)$$

por tanto $\phi(\gamma_N(r \otimes n)) = (\gamma_{N'} \circ i_R \otimes \phi)(r \otimes n)$. Esto muestra que la familia $\{\gamma_N : N \in R_e - mod\}$ es un isomorfismo natural. Sin embargo, R no es fuertemente graduado.

Definición 1.3.4. *Sean R un anillo $G-$graduado y $M \in R - gr$. Se dice que M es C_e-cerrado si satisface las siguientes condiciones:*

1. $t_{C_e}(M) = 0$.

2. *Para cada diagrama en $R-gr$:*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & M & & & & \\ & & & & \uparrow{\scriptstyle \omega} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow[\phi]{} & P & \longrightarrow & coker(\phi) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde que $coker(\phi) \in C_e$, existe un único morfismo graduado $\psi : P \to M$ tal que $\psi \circ \phi = \omega$.

Proposición 1.3.2. *Sea R un anillo $G-$graduado. Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(i) Si $N \in R_e - mod$, entonces $Coind(N)$ es C_e-cerrado.

(ii) R es fuertemente graduado si y solo si $Coind \circ (-)_e \simeq I_{R-gr}$

Demostración. (i) Sea $M := t_{C_e}(Coind(N))$. Ya que $((-)_e, Coind)$ es un par adjunto, hay una correspondencia biyectiva entre $Hom_{R_e}(M_e, N)$ y $Hom_{R-gr}(M, Coind(N))$. Como $M_e = 0$, entonces $Hom_{R_e}(M_e, N) = \{0\}$, por tanto la inclusión de M en $Coind(N)$ es el morfismo cero, es decir, $M = 0$. Esto prueba que $Coind(N)$ satisface la condición (i) de la Definición 1.3.4.

Por otro lado, considere el siguiente diagrama en $R-gr$:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & Coind(N) & & & & \\ & & & & \uparrow{\scriptstyle \omega} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow[\phi]{} & Q & \longrightarrow & coker(\phi) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde que $coker(\phi) \in C_e$. Según la notación utilizada en el Lema 1.3.3, existen biyecciones:

$$\psi_{Q,N} : Hom_{R_e}(Q_e, N) \to Hom_{R-gr}(Q, Coind(N))$$

y

$$\psi_{P,N} : Hom_{R_e}(P_e,N) \to Hom_{R-gr}(P,Coind(N)),$$

tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Hom_{R_e}(Q_e,N) & \xrightarrow{\psi_{Q,N}} & Hom_{R-gr}(Q,Coind(N)) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_e^*} & & \downarrow{\scriptstyle \phi^*} \\ Hom_{R_e}(P_e,N) & \xrightarrow[\psi_{P,N}]{} & Hom_{R-gr}(P,Coind(N)). \end{array}$$

Ya que $coker(\phi) \in C_e$, entonces ϕ_e es un isomorfismo en $R_e - mod$, por tanto si $\gamma := \psi_{P,N}^{-1}(\omega)$, entonces:

$$\psi_{Q,N}(\gamma \circ \phi_e^{-1}) \circ \phi = \phi^*(\psi_{Q,N}(\gamma \circ \phi_e^{-1})) = \psi_{P,N}(\phi_e^*(\gamma \circ \phi_e^{-1})) = \psi_{P,N}(\gamma) = \omega.$$

Luego $\psi_{Q,N}(\gamma \circ \phi_e^{-1})$ satisface la condición (ii) de la Definición 1.3.4. Más aún, suponga que $\kappa \in Hom_{R-gr}(Q,Coind(N))$ es otro morfismo que satisface que $\phi^*(\kappa) = \omega$, y sea $\lambda \in Hom_{R_e}(Q_e,N)$ tal que $\psi_{Q,N}(\lambda) = \kappa$. Entonces

$$\psi_{P,N} \circ \phi_e^*(\gamma \circ \phi_e^{-1}) = \psi_{P,N} \circ \phi_e^*(\lambda),$$

por tanto $\gamma = \lambda \circ \phi_e$, es decir, $\lambda = \gamma \circ \phi_e^{-1}$. Por tanto $\kappa = \psi_{Q,N}(\gamma \circ \phi_e^{-1})$, y $Coind(N)$ es C_e-cerrado.

(ii) Suponga que R es fuertemente graduado. Por el Teorema 1.3.3 y el Teorema de Dade, se sabe que $Ind \simeq Coind$ y $Ind \circ (-)_e \simeq I_{R-gr}$, luego $Coind \circ (-)_e \simeq I_{R-gr}$. Por otro lado, suponga que $Coind \circ (-)_e \simeq I_{R-gr}$. Dado $M \in R-gr$ no cero, se tiene el $gr-$isomorfismo $M \simeq Coind(M_e)$, y por tanto $M_e \neq 0$. Esto muestra que $C_e = 0$, y por el Teorema de Dade se concluye que R es fuertemente graduado. □

Proposición 1.3.3. *[Năstăsescu and Oystaeyen (2004), Teorema 2.6.9] Sea R un anillo graduado por un grupo G. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Existe un isomorfismo natural entre los funtores Ind y Coind;

(ii) La transformación natural $\eta : Ind \to Coind$ *es un isomorfismo natural;*

(iii) Para cada $g \in G$ *el* R_e-*módulo izquierdo* R_g *es proyectivo y finitamente generado. Además, el siguiente morfismo es un isomorfismo en* $R-gr$*:*

$$\eta : R \to Coind(R_e),$$

que a cada elemento homogéneo $s \in R_g$ *lo envía en* $\eta(s) : R \to R_e$ *definida por* $\eta(s)(r) = r_{g^{-1}}s$*, para cada* $r = \sum_{g\in G} r_g \in R$*;*

Para finalizar este capítulo, se presentarán algunas nociones sobre módulos libres, proyectivos e inyectivos en la categoría $R-gr$.

Definición 1.3.5. *Sean R un anillo* $G-$*graduado y* $F \in R-gr$*. Se dice que F es* $gr-$*libre si tiene una base de elementos homogéneos.*

Ejemplo 1.3.8. *Sea R un anillo* $G-$*graduado, y* $S = \bigoplus_{i\in I} R(g_i) \in R-gr$ *con su graduación usual* $S_h = \bigoplus_{i\in I} R(g_i)_h$*, para cada* $h \in G$*. Para cada* $i \in I$*, sea*

$$e_i = (a_j)_{j\in I} = \begin{cases} a_j = 1, \text{ si } j = i \\ a_j = 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Note que $deg(e_i) = g_i^{-1}$*, luego* $\{e_i : i \in I\}$ *es una base de elementos homogéneos para S. Así, S es* $gr-$*libre.*

Ejemplo 1.3.9. *Sean R un anillo $G-$graduado y $F \in R-gr$ un módulo $gr-$libre con base $\{b_i : i \in I\}$, donde $deg(b_i) = g_i^{-1}$. Considere $\psi : \bigoplus_{i\in I} R(g_i) \to F$ definida por $\psi(e_i) = b_i$, para cada $i \in I$. Es claro que ψ es un isomorfismo en $R-gr$.*

Ejemplo 1.3.10. *Sea $M \in R-gr$ y $h(M) = \cup_{g\in G} M_g$. Para cada $x \in h(M)$ escriba $deg(x) = g_x^{-1}$. Considere $\psi : \bigoplus_{x\in h(M)} R(g_x) \to M$ definida por $\psi(e_x) = x$. Según el ejemplo anterior, se tiene que ψ es un $gr-$epimorfismo y por tanto M es isomorfo al cociente de un módulo $gr-$libre.*

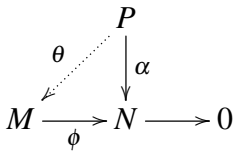
Note que si $F \in R-gr$ es $gr-$libre, entonces es libre como $R-$módulo. Sin embargo, el recíproco de esta afirmación no es cierto.

Ejemplo 1.3.11. *(Hazrat (2016), Ejemplo 1.2.3) Sea R un anillo conmutativo y considere $M_n(R)$ con la $\mathbb{Z}-$graduación trivial. Por otro lado, defina la siguiente graduación sobre $M_n(R)$ visto como $M_n(R)-$módulo derecho.*

$$M_n(R)_i = \begin{cases} e_{ii}M_n(R), \ si\, 1 \leq i \leq n \\ \\ 0, \ en\ otro\ caso \end{cases}$$

donde e_{ii} es la matriz que tiene 1 en la componente (i,i) y cero en las restantes. Ya que cada elemento homogéneo del módulo $M_n(R)$ es divisor de cero, se concluye que este módulo no es $gr-$libre. No obstante, claramente es libre visto como $M_n(R)-$módulo.

Definición 1.3.6. *Sea P un $R-$módulo graduado. Se dice que P es $gr-$proyectivo si para cada par de módulos $M,N \in R-gr$ y homomorfismos graduados $M \xrightarrow{\phi} N \to 0$, $P \xrightarrow{\alpha} N$ existe un homomorfismo graduado $P \xrightarrow{\theta} M$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*



Ejemplo 1.3.12. *Sean $M \in R-gr$ un módulo $gr-$libre. Razonando igual al caso no graduado, es posible verificar que M es $gr-$proyectivo.*

La prueba del siguiente resultado puede ser encontrada en [Hazrat (2016), Proposición 1.2.15].

Proposición 1.3.4. *Sea R un anillo $G-$graduado y $P \in R-gr$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) P es proyectivo como $R-$módulo;

(ii) P es $gr-$proyectivo;

(iii) El funtor $Hom_{R-gr}(P,-)$ es exacto;

(iv) Cada sucesión exacta corta de homomorfismos de $R-$módulos graduados

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$$

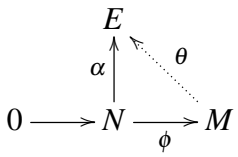
escinde, vía un morfismo graduado;

(v) P es isomorfo en $R-gr$ a un sumando directo de un módulo graduado $gr-$libre.

Ejemplo 1.3.13. *Sea R un anillo $G-$graduado. Sobre el anillo $M_n(R)$ considere la $G-$graduación $\{M_n(R_g)\}_{g\in G}$. Con la graduación del Ejemplo 1.3.2 se tiene que $M_n(R)e_{ii}$ es un ideal izquierdo*

graduado de $M_n(R)$. Además, como $M_n(R) = \bigoplus_{1\leq i\leq n} M_n(R)e_{ii}$ y $M_n(R)$ es $gr-$libre, entonces $M_n(R)e_{ii}$ es proyectivo en $M_n(R) - gr$.

Definición 1.3.7. *Sea $E \in R - gr$. Se dice que E es $gr-$inyectivo si para cada par de módulos $M,N \in R - gr$ y homomorfismos graduados $0 \to N \xrightarrow{\phi} M$, $N \xrightarrow{\alpha} E$, existe un homomorfismo graduado $M \xrightarrow{\theta} E$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*



Siguiendo un razonamiento análogo al caso proyectivo, es posible verificar que si $E \in R-gr$ es inyectivo como $R-$módulo, entonces E es $gr-$inyectivo. Sin embargo, como se muestra en el Remark 2.3.3 de Năstăsescu and Oystaeyen (2004), el recíproco de esta afirmación no es cierto. Por otro lado, según el Corolario 2.5.2 de Năstăsescu and Oystaeyen (2004), si G es un grupo finito entonces E es $gr-$inyectivo si y solo si es inyectivo como $R-$módulo.

2. Anillos casi epsilon-fuertemente graduados

El objetivo de este capítulo estudiar algunas propiedades de los anillos epsilon-fuertemente graduados y casi epsilon-fuertemente graduados. Se presentará una caracterización de los anillos epsilon utilizando los funtores *Ind* y *Coind*. Posteriormente, se mostrará una versión del teorema de Dade para los anillos casi epsilon. A lo largo de este capítulo S representará un anillo asociativo unitario $G-$graduado $S = \bigoplus_{g\in G} S_g$, y $R := S_e$.

2.1. Anillos epsilon-fuertemente graduados

Definición 2.1.1. *Un anillo $G-$graduado S es llamado epsilon-fuertemente graduado si S_g es un $(S_gS_{g^{-1}}, S_{g^{-1}}S_g)-$bimódulo unitario, para cada $g \in G$.*

Ejemplo 2.1.1. *[Nysted et al. (2018), Proposición 40] Sean A un anillo conmutativo con identidad $1_A \neq 0$ y B un ideal unitario de A tal que $1_B \neq 1_A$. Considere:*

$$S = \begin{pmatrix} A & A & B \\ A & A & B \\ B & B & A \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} A & A & 0 \\ A & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \text{ y } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & B \\ B & B & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que S es un anillo $\mathbb{Z}_2$-graduado si se define $S_{\overline{0}} = R$ y $S_{\overline{1}} = T$. Por otro lado, considere $\varepsilon_{\overline{0}} = diag(1_A, 1_A, 1_A) \in S_{\overline{0}}S_{\overline{0}}$ y $\varepsilon_{\overline{1}} = diag(1_B, 1_B, 1_B) \in S_{\overline{1}}S_{\overline{1}}$. Es claro que para cada $r \in S_{\overline{0}}$ y $t \in S_{\overline{1}}$ se tiene que $r = \varepsilon_{\overline{0}}r = r\varepsilon_{\overline{0}}$ y $t = \varepsilon_{\overline{1}}t = t\varepsilon_{\overline{1}}$. Con esto se concluye que S es epsilon-fuertemente graduado. Además, es claro que S no es fuertemente $\mathbb{Z}_2-$graduado.

Observación 2.1.1. *Sea S un anillo epsilon-fuertemente graduado. Se tienen las siguientes observaciones:*

(i) Dado $g \in G$, el hecho de que S_g es unitario como $S_gS_{g^{-1}}-$módulo a izquierda, implica que $S_g = S_gS_{g^{-1}}S_g$. Los anillos graduados que satisfacen esta última condición son llamados simétricamente graduados. En ese sentido, todo anillo epsilon-fuertemente graduado es simétricamente graduado. En el Ejemplo 2.3.5 se mostrará que las álgebras de camino de

Leavitt son simétricamente graduadas.

(ii) Sea $g \in G$. Por la Definición 2.1.1 existen $a_g, a'_g \in S_g S_{g^{-1}}$ tales que $a_g s = s$ y $t a'_g = t$, para cada $s \in S_g$ y $t \in S_{g^{-1}}$. Note que $a_g = a_g a'_g = a'_g$. Este elemento será denotado por ε_g, en particular $\varepsilon_e = 1$. Así, se tiene que $\varepsilon_g s = s = s\varepsilon_{g^{-1}}$, para cada $s \in S_g$. No es difícil verificar que $\{\varepsilon_g : g \in G\} \subseteq Z(R)$.

A continuación, se presenta una caracterización de los anillos epsilon-fuertemente graduados en la que intervienen los funtores *Ind* y *Coind*. Las primeras cuatro afirmaciones de este resultado fueron probadas en [Nysted et al. (2018), Proposición 7].

Proposición 2.1.1. *Sea S un anillo $G-$graduado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) S es epsilon-fuertemente graduado;

(ii) S es simétricamente graduado y $S_g S_{g^{-1}}$ es un anillo unitario, para cada $g \in G$;

(iii) Para cada $g \in G$ existe $\varepsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que $\varepsilon_g s = s = s\varepsilon_{g^{-1}}$ para cada $s \in S_g$;

(iv) S_g es proyectivo y finitamente generado como $R-$módulo izquierdo, para cada $g \in G$. Además, el morfismo en $R-mod$:

$$\eta'_g : S_g \to Hom_R(S_{g^{-1}}, R),$$

donde para cada $s \in S_g$, $\eta'_g(s) : S_{g^{-1}} \to R$ es definido por $\eta'_g(s)(r) = rs$ para cada $r \in S_{g^{-1}}$, es un isomorfismo;

(v) Existe un isomorfismo natural entre Ind y Coind.

Demostración. Suponga que S es epsilon-fuertemente graduado. En la Observación 2.1.1 se mostró que S es simétricamente graduado. Por otro lado, si $r = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in S_g S_{g^{-1}}$, entonces:

$$\varepsilon_g r = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_g a_i) b_i = r = \sum_{i=1}^{n} a_i (b_i \varepsilon_g) = r\varepsilon_g,$$

luego $S_g S_{g^{-1}}$ es unitario. De donde $(i) \Rightarrow (ii)$.

Si se asume que (ii) es cierta, entonces $S_g S_{g^{-1}}$ es un anillo unitario con identidad ε_g, para cada $g \in G$. Ya que S es simétricamente graduado, dado $s \in S_g$ existe $n \in \mathbb{N}$ y $a_i, c_i \in S_g$, $b_i \in S_{g^{-1}}$ para cada $i = 1, 2 \ldots, n$, tales que $s = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i$. En ese sentido:

$$\varepsilon_g s = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_g a_i b_i) c_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i = \sum_{i=1}^{n} a_i (b_i c_i \varepsilon_{g^{-1}}) = s\varepsilon_{g^{-1}},$$

luego $(ii) \Rightarrow (iii)$. Además, es claro que (iii) implica (i).

Suponga que (iii) es verdad, y tome $g \in G$. Entonces existe $\varepsilon_{g^{-1}} \in S_{g^{-1}} S_g$ tal que $s = s\varepsilon_{g^{-1}}$ para cada $s \in S_g$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a_i \in S_{g^{-1}}$, $b_i \in S_g$ para cada $i = 1, \cdots, n$ tales que $\varepsilon_{g^{-1}} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Para cada $i = 1, \cdots, n$ defina $\varphi_i \in Hom_R(S_g, R)$ por $\varphi_i(s) = sa_i$ para $s \in S_g$. Note que si $s \in S_g$, entonces:

$$s = s\varepsilon_{g^{-1}} = \sum_{i=1}^{n} (sa_i) b_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(s) b_i,$$

luego $\{b_i, \varphi_i\}_{i=1}^{n}$ es una base dual para S_g como $R-$módulo a izquierda. Esto muestra que S_g es finitamente generado y proyectivo. Por otro lado, si $s \in S_g$ es tal que $S_{g^{-1}} s = \{0\}$, entonces $s = \varepsilon_g s = 0$. Luego η_g' es inyectiva. Finalmente, sea $\phi \in Hom_R(S_{g^{-1}}, R)$ y $s \in S_{g^{-1}}$ dado. Note que:

$$\phi(s) = \phi(s\varepsilon_g) = s \sum_{i=1}^{k} c_i \phi(d_i) = \eta_g'(\sum_{i=1}^{k} c_i \phi(d_i))(s),$$

donde $\varepsilon_g = \sum_{i=1}^{k} c_i d_i$ para algunos $c_i \in S_g$ y $d_i \in S_{g^{-1}}$. Por tanto, $\eta'_g(\sum_{i=1}^{k} c_i \phi(d_i)) = \phi$ y η'_g es sobre. Luego $(iii) \Rightarrow (iv)$.

Para mostrar $(iv) \Rightarrow (iii)$, tome $g \in G$ y $s \in S_g$. Si $\{b_i, \varphi_i\}_{i=1}^{k}$ es una base dual de S_g en $R-mod$, entonces $s = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(s) b_i$. Ya que $\eta'_{g^{-1}}$ es sobre, para cada $i = 1, \cdots, k$ existen $a_i \in S_{g^{-1}}$ tales que $\eta'_{g^{-1}}(a_i) = \varphi_i$. Luego $s = s\sum_{i=1}^{k} a_i b_i = s\varepsilon_{g^{-1}}$, donde $\varepsilon_{g^{-1}} = \sum_{i=1}^{k} a_i b_i \in S_{g^{-1}} S_g$. Por otro lado, realizando el mismo procedimiento se puede encontrar $\varepsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que $s'\varepsilon_g = s'$ para cada $s' \in S_{g^{-1}}$. Esto muestra que $S_{g^{-1}}(1-\varepsilon_g) = 0$, luego para cada $s \in S_g$ se tiene que $S_{g^{-1}}(1-\varepsilon_g)s = 0$. Así, $\eta_g(s - \varepsilon_g s) = 0$ y $s = \varepsilon_g s$. Que era lo que se quería demostrar.

Suponga que (iv) es cierta. Por el inciso (iii) de la Proposición 1.3.3, restaría mostrar que el morfismo en $S-gr$:

$$\eta : S \to Coind(R), \tag{2}$$

que a cada elemento homogéneo $s \in S_g$ lo envía en $\eta(s) : S \to R$ definida por $\eta(s)(r) = r_{g^{-1}} s$, para cada $r = \sum_{g \in G} r_g \in S$, es un isomorfismo. En ese sentido, basta verificar que para cada $g \in G$, $\eta_g : S_g \to Coind(R)_g$ es un isomorfismo en $R-mod$. Sea $s \in ker(\eta_g)$. Entonces para cada $r \in S_{g^{-1}}$ se tiene que $rs = 0$, esto implica que $s \in ker(\eta'_g) = \{0\}$. Luego η_g es monomorfismo. Para mostrar que η_g es epimorfismo, sea $\phi \in Coind(R)_g$. Defina $\phi' \in Hom_R(S_{g^{-1}}, R)$ como $\phi' = \phi|_{S_{g^{-1}}}$. Ya que η'_g es sobre, existe $s \in S_g$ tal que $\eta'_g(s) = \phi'$. Resta mostrar que $\eta_g(s) = \phi$. En efecto, sea $r = \sum_{h \in G} r_h \in S$. Entonces:

$$\phi(r) = \phi(r_{g^{-1}}) = \phi'(r_{g^{-1}}) = \eta'_g(s)(r) = rs = \eta_g(s)(r).$$

Ya que $r \in S$ fue arbitrario, se deduce que $\eta_g(s) = \phi$ y por tanto η es isomorfismo en $R-gr$. Así, por

la Proposición 1.3.3 existe un isomorfismo natural entre *Ind* y *Coid*. Esto muestra que (iv) implica (v). Recíprocamente, si existe un isomorfismo natural entre *Ind* y *Coind*, entonces el morfismo presentado en (2) es un isomorfismo. Luego $\eta_g : S_g \to Coind(R)_g$ es un isomorfismo en $R-mod$, para cada $g \in G$. Siguiendo el mismo proceso presentado anteriormente, η'_g es isomorfismo en $R-mod$. Esto finaliza la demostración. □

En el Ejemplo 1.3.7 se mostró que si S es trivialmente $G-$graduado, entonces $Ind \simeq Coind$. Se puede hacer una verificación más rápida de este hecho usando el resultado anterior, teniendo en cuenta que S es epsilon-fuertemente graduado, donde

$$\varepsilon_g = \begin{cases} 0, \ si\ g \neq e \\ \\ 1, \ si\ g = e \end{cases}$$

Observación 2.1.2. *Con relación al inciso (iv) de la proposición anterior, note que si S es epsilon-fuertemente graduado, entonces S_g es proyectivo y finitamente generado en $mod-R$ para cada $g \in G$. Ya que si $\varepsilon_g = \sum_{i=1}^{n} a_g^{(i)} b_{g^{-1}}^{(i)} \in S_g S_{g^{-1}}$ es tal que $\varepsilon_g s = s$ para cada $s \in S_g$, entonces $\{\phi_i, a_g^{(i)}\}_{i=1}^{n}$ es base dual de S_g en $mod-R$, donde $\phi_i : S_g \to R$ es definida como $\phi_i(s) = b_{g^{-1}}^{(i)} s$, si $s \in S_g$.*

Como consecuencia de la caracterización funtorial de los anillos epsilon-fuertemente graduados, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 2.1.1. *Si S es un anillo epsilon-fuertemente graduado, entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(i) Para cada $g \in G$, el funtor $Ind \circ (-)_g$ preserva la $gr-$simplicidad.

(ii) Si $E \in S-gr$ es $gr-$inyectivo y $t_{C_g}(E) = 0$, entonces $Ind(E_g)$ es inyectivo.

(iii) Si $M \in S-gr$ es $gr-$proyectivo, entonces M_g es proyectivo para cada $g \in G$.

Demostración. (i) Sea $g \in G$. Si $M_g = 0$, ya está. Suponga que $M_g \neq 0$, y sea $0 \neq m \in M_g$. Ya que M es $gr-$simple, entonces $\bigoplus_{h\in G} S_{hg^{-1}}m = M$ y por tanto $Rm = M_g$, es decir, M_g es $R-$módulo simple. Por otro lado, el módulo $Ind(M_g)/t_{C_e}(Ind(M_g))$ es $gr-$simple por el Lema 1.3.2. Finalmente, ya que S es epsilon-fuerte, entonces $Ind(M_g) \simeq Coind(M_g)$, y por la Proposición 1.3.2 se tiene que $t_{C_e(Ind(M_g))} = 0$. Luego $Ind(M_g)$ es $gr-$simple.

(ii) Según la notación utilizada en la Observación 1.3.3 y el inciso (ii) del Lema 1.3.4, se tiene que $\lambda_{g,E} : E \to Coind(E_g)(g^{-1})$ es monomorfismo. Ya que E es $gr-$inyectivo, entonces $Im(\lambda_{g,E})$ es sumando directo de $Coind(E_g)(g^{-1})$. Por otro lado, según el inciso (iii) del Lema 1.3.4 se sabe que $Im(\lambda_{g,E})$ es submódulo $gr-$esencial de $Coind(E_g)(g^{-1})$, con lo cual $Im(\lambda_{g,E}) = Coind(E_g)(g^{-1})$. Lo anterior permite concluir que $E \simeq Coind(E_g)(g^{-1})$, y por tanto

$$Ind(E_g) \simeq Coind(E_g) \simeq E(g),$$

lo que muestra que $Ind(E_g)$ es $gr-$inyectivo.

(iii) Como Ind es exacto a derecha y $Coind$ es exacto a izquierda, el isomorfismo $Ind \simeq Coind$ implica que tanto Ind como $Coind$ son exactos. Así, $T_{g^{-1}} \circ Coind$ es exacto para cada $g \in G$. Finalmente, como $((-)_g, T_{g^{-1}} \circ Coind)$ es par adjunto y $R-gr$ tiene suficientes objetos proyectivos, se concluye que $(-)_g$ preserva la proyectividad para cada $g \in G$. □

Como se puede ver en el Remark 1.5.3 de Hazrat (2016), el funtor $(-)_e$ no siempre preserva la proyectividad.

Para finalizar la sección, se presentará una clase de ejemplos de anillos epsilon-fuertemente graduados. A saber, los productos cruzados parciales. Estos están relacionados con acciones parciales, las cuales han sido ampliamente estudiadas en los últimos años. El lector interesado puede consultar Dokuchaev (2019) y sus referencias, donde encontrará estudios recientes sobre las aplicaciones de las acciones parciales.

Se dará la definición de acción parcial de un grupo sobre un álgebra, aunque estas pueden ser definidas sobre conjuntos arbitrarios, como se puede ver en [Dokuchaev and Exel (2005), Definición 1.1].

Definición 2.1.2. *Sean A un álgebra no necesariamente unitaria y G un grupo. Una acción parcial algebraica de G en A es un par $\theta = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$, que consiste de una colección de ideales $\{D_g\}_{g\in G}$ de A e isomorfismos de álgebras $\{\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g\}_{g\in G}$, que satisfacen:*

(i) $D_e = A$ *y* θ_e *es la función identidad,*

(ii) $\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_{gh}$, *para cada* $g,h \in G$,

(iii) $\theta_g(\theta_h(x)) = \theta_{gh}(x)$, *para cada* $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$.

Ejemplo 2.1.2. *Sea S un anillo epsilon-fuertemente graduado por un grupo G. Para cada $g \in G$, existe $\varepsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que $\varepsilon_g s = s = s\varepsilon_{g^{-1}}$, para cada $s \in S_g$. Además, $\varepsilon_g = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} v_{g^{-1}}^{(i)}$, donde $u_g^{(i)} \in S_g$ y $v_{g^{-1}}^{(i)} \in S_{g^{-1}}$, para cada $i = 1, \cdots, n_g$. Tales elementos quedan fijos salvo se diga lo contrario.*

Sea $g \in G$. Defina

$$\gamma_g : Z(S_e)\varepsilon_{g^{-1}} \to Z(S_e)\varepsilon_g,\ r\varepsilon_{g^{-1}} \mapsto \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} r v_{g^{-1}}^{(i)}.$$

Por el Remark 15 de Nysted et al. (2018), se sabe que $\gamma = (\{\gamma_g\}_{g\in G}, \{Z(S_e)\varepsilon_g\}_{g\in G})$ *es una acción parcial de* G *sobre* $Z(S_e)$.

Observación 2.1.3. *Las siguientes identidades relacionadas con la acción parcial* γ *del Ejemplo 2.1.2, serán usadas frecuentemente:*

(i) $\gamma_g(\varepsilon_h\varepsilon_{g^{-1}}) = \varepsilon_g\varepsilon_{gh}$, *para cada* $g,h \in G$. *En efecto, usando la definición de acción parcial es posible ver que* $\gamma_g(Z(S_e)\varepsilon_{g^{-1}} \cap Z(S_e)\varepsilon_h) = Z(S_e)\varepsilon_g \cap Z(S_e)\varepsilon_{gh}$. *Y como* γ_g *es isomorfismo, se concluye lo que se busca.*

(ii) $sr = \gamma_g(r\varepsilon_{g^{-1}})s$, *para cada* $g \in G$, $s \in S_g$ *y* $r \in Z(S_e)$. *En efecto, note que:*

$$\gamma_g(r\varepsilon_{g^{-1}})s = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} r v_{g^{-1}}^{(i)} s = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)} v_{g^{-1}}^{(i)} sr = \varepsilon_g sr = sr.$$

La acción parcial definida anteriormente, es un ejemplos de acción parcial algebraica donde los ideales D_g's son unitarios. Esta clase de acciones tienen propiedades muy especiales. Por ejemplo, el lector puede consultar [Dokuchaev and Exel (2005), Teoremas 3.1 y 4.5].

Ejemplo 2.1.3. *Sea* α *una acción parcial de un grupo* G *sobre un álgebra* A. *El anillo de grupo inclinado* $A \rtimes_\alpha G$ *es el conjunto de todas las sumas formales finitas:*

$$A \rtimes_\alpha G = \{\textstyle\sum_{g\in G} a_g\delta_g : a_g \in D_g\},$$

donde los δ_g *son símbolos. La suma es definida de manera natural, y el producto es determinado por* $(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}$. *Note que el producto está bien definido pues* $\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h \in$

$D_{g^{-1}} \cap D_h$ y $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_{gh}$. Como se puede ver en el Teorema 3.1 de Dokuchaev and Exel (2005), una condición suficiente para que este producto sea asociativo es que D_g sea unitario, para cada $g \in G$.

Suponga que los ideales D_g's son unitarios, y considere $B_g = D_g\delta_g$, para cada $g \in G$. Es claro que $\{B_g\}_{g\in G}$ es una graduación sobre el anillo $A \rtimes_\alpha G$. Además, note que el anillo $A \rtimes_\alpha G$ es epsilon-fuertemente graduado, donde $\varepsilon_g = 1_g\delta_e$ para cada $g \in G$.

Según el ejemplo anterior, dada una acción parcial α de un grupo G sobre un álgebra unitaria A, tal que D_g es unitario para cada $g \in G$, es posible construir un anillo epsilon-fuertemente gradudo $A \rtimes_\alpha G$ tal que $(A \rtimes_\alpha G)_e \simeq A$. En ese sentido, una pregunta natural es que si S es un anillo epsilon-fuertemente $G-$graduado, ¿existe un anillo unitario A y una acción parcial α de G sobre A tal que $A \rtimes_\alpha G \simeq S$ en $G-Ring$? La respuesta a esta pregunta es que no. Basta tomar un anillo fuertemente graduado que no sea un producto cruzado y utilizar el Teorema 1.2.1.

2.2. Anillos casi epsilon-fuertemente graduados

El objetivo de esta sección es mostrar una versión del Teorema de Dade en la clase de anillos casi epsilon-fuertemente graduados. Antes de definir los anillos casi epsilon-fuertemente graduados, es necesario hablar de los módulos $s-$unitarios. Varios ejemplos de estos anillos pueden ser encontrados en Nysted (2019).

Definición 2.2.1. *Sean R un anillo no necesariamente unitario y M un $R-$módulo a izquierda (derecha). Se dice que M es $s-$unitario si $m \in Rm$ ($m \in mR$), para cada $m \in M$. Si M es un $R-$bimódulo, se dice que M es $s-$unitario si es $s-$unitario como $R-$módulo a izquierda y a de-*

recha. Además, el anillo R es llamado s−unitario a izquierda (derecha) si es s−unitario como R−módulo a izquierda (derecha). Finalmente, R es llamado s−unitario si es s−unitario como R−bimódulo.

Ejemplo 2.2.1. *Sea $A \neq 0$ un anillo con identidad multiplicativa 1, y considere $S = A \times A$ con la adición componente a componente y multiplicación definida por*

$$(a,b)(c,d) = (ac,ad), \text{ para cada } a,b,c,d \in A.$$

Es fácil ver que S es un anillo. Más aún, S es s−unitario a izquierda pues $(1,0)$ es identidad a izquierda de S. Sin embargo, S no es s−unitario a derecha ya que $(0,1) \notin (0,1)S = \{(0,0)\}$.

El siguiente resultado será usado posteriormente. Una demostración del mismo puede ser encontrada en [Nysted (2019), Proposición 2.8]

Proposición 2.2.1. *Sean R un anillo no necesariamente unitario y M un R−módulo izquierdo (derecho). Entonces M es s−unitario a izquierda (derecha) si y solo si, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada colección finita $m_1, m_2, \cdots, m_n \in M$ existe $e \in R$ tal que $em_i = m_i$ ($m_i e = m_i$), para cada $i = 1, \cdots, n$.*

Definición 2.2.2. *Un anillo G−graduado S es llamado casi epsilon-fuertemente graduado si S_g es $(S_g S_{g^{-1}}, S_{g^{-1}} S_g)$−bimódulo s−unitario, para cada $g \in G$.*

Ya que cada módulo unitario es $s-$unitario, se tiene que todo anillo epsilon-fuertemente graduado es casi epsilon-fuertemente graduado. Sin embargo, el recíproco de la afirmación anterior no es cierto como se mostrará posteriormente.

El siguiente resultado será utilizado más adelante.

Proposición 2.2.2. *[Nysted and Öinert (2019), Proposición 3.3] Sea S un anillo $G-$graduado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) S es casi epsilon-fuertemente graduado;

(ii) S es simétricamente graduado y para cada $g \in G$ el anillo $S_g S_{g^{-1}}$ es $s-$unitario;

(iii) Para cada $g \in G$ y $s \in S_g$ existen $\varepsilon_g(s) \in S_g S_{g^{-1}}$ y $\varepsilon'_g(s) \in S_{g^{-1}} S_g$ tal que $\varepsilon_g(s)s = s = s\varepsilon'_g(s)$.

Demostración. Suponga que S es casi epsilon-fuertemente graduado y sea $s \in S_g$. Ya que S_g es $S_g S_{g^{-1}}-$módulo izquierdo $s-unitario$, existe $\varepsilon_g(s) \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que $s = \varepsilon_g(s)s \in S_g S_{g^{-1}} S_g$. Luego S es simétricamente graduado. Por otro lado, considere $r = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in S_g S_{g^{-1}}$, donde $a_i \in S_g$ y $b_i \in S_{g^{-1}}$ para cada $i = 1, \cdots, n$. Ya que S_g es un $S_g S_{g^{-1}}-$módulo izquierdo $s-$unitario y $S_{g^{-1}}$ es $S_g S_{g^{-1}}-$módulo derecho $s-$unitario, por la Proposición 2.2.1 existen $p \in S_g S_{g^{-1}}$ y $q \in S_{g^{-1}} S_g$ tales que $pa_i = a_i$ y $b_i q = b_i$ para cada $i = 1, \cdots, n$. Por tanto $pr = r = rq$, y $S_g S_{g^{-1}}$ es $s-$unitario. Luego (i) implica (ii).

Para probar $(ii) \Rightarrow (iii)$, considere $g \in G$ y $s \in S_g$. Como $S_g = S_g S_{g^{-1}} S_g$, existe $n \in \mathbb{N}$ y $a_i, c_i \in S_g$, $b_i \in S_{g^{-1}}$ para cada $i = 1, 2 \ldots, n$, tales que $s = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i$. Ya que $S_g S_{g^{-1}}$ y $S_{g^{-1}} S_g$ son $s-$unitarios, existen $\varepsilon_g(s) \in S_g S_{g^{-1}}$ y $\varepsilon'_g(s) \in S_{g^{-1}} S_g$ tales que $\varepsilon_g(s)(a_i b_i) = a_i b_i$ y $(b_i c_i)\varepsilon'_g(s) = b_i c_i$ para cada $i = 1, \cdots, n$. Esto muestra que $\varepsilon_g(s)s = s = s\varepsilon'_g(s)$. Que era lo que se quería probar. Finalmente, $(iii) \Rightarrow (i)$ es inmediato. □

El siguiente resultado pretende dar condiciones suficientes para que un anillo casi epsilon-fuertemente graduado sea epsilon-fuertemente graduado.

Proposición 2.2.3. *Sea S un anillo $G-$graduado. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

(i) Si S_g es $R-$módulo izquierdo finitamente generado para cada $g \in G$, entonces S es epsilon-fuertemente graduado si y solo si S es casi epsilon-fuertemente graduado.

(ii) Si η'_g es epimorfismo en $R-mod$ y S_g es proyectivo en $R-mod$ para cada $g \in G$, entonces S_g es $S_{g^{-1}}S_g-$módulo derecho $s-$unitario.

Demostración. (i) Sea $g \in G$. Se probará que $\eta'_g : S_g \to Hom_R(S_{g^{-1}}, R)$ es isomorfismo en $R-mod$. En efecto, si $s \in S_g$ es tal que $S_{g^{-1}}s = \{0\}$, se tiene que $0 = \varepsilon_g(s)s = s$, luego η'_g es inyectiva. Por otro lado, sean $s_1, \cdots, s_k \in S_{g^{-1}}$ tales que $\langle s_1, \cdots, s_k \rangle = S_{g^{-1}}$, y sea $\varphi \in Hom_R(S_{g^{-1}}, R)$. Ya que S es casi epsilon, por la Proposición 2.2.1 existe $\varepsilon' \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que $s_i\varepsilon' = s_i$ para cada $i = 1, \cdots, n$. Escriba $\varepsilon' = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, y sea $b \in S_{g^{-1}}$. Existen $r_1, \cdots, r_k \in R$ tales que $b = r_1 s_1 + \cdots + r_k s_k$, luego $b\varepsilon' = b$. Por tanto:

$$\varphi(b) = b\sum_{i=1}^n a_i\varphi(b_i) = \eta'_g(\sum_{i=1}^n a_i\varphi(b_i))(b).$$

Ya que $b \in S_g$ fue arbitrario, se tiene que $\eta'_g(\sum_{i=1}^n a_i\varphi(b_i)) = \varphi$. Por lo anterior se concluye que η'_g es isomorfismo, para cada $g \in G$.

Finalmente, sean $g \in G$ arbitrario y $s_1, \cdots, s_k \in S_g$ tales que $\langle s_1, \cdots, s_k \rangle = S_g$. Además, sea $\varepsilon' \in S_{g^{-1}}S_g$ tal que $s_i\varepsilon' = s_i$ para cada $i = 1, \cdots, n$. Escriba $\varepsilon' = \sum_{i=1}^n a_i b_i$. Para cada $i = 1, \cdots, n$, considere $\varphi_i : S_g \to R$ que a cada $s \to sa_i$. Note que $\varphi_i \in Hom_R(S_g, R)$ y además, dado $s \in S_g$, se tiene que:

$$s = s\varepsilon' = \sum_{i=1}^n (sa_i)b_i = \sum_{i=1}^n \varphi_i(s)b_i.$$

Esto muestra que S_g es S_e-módulo izquierdo proyectivo. Por la Proposición 2.1.1 S es epsilon-fuertemente graduado.

(ii) Sean $g \in G$ y $\{b_i, \varphi_i\}_{i\in I}$ base dual de S_g en $R-$mod. Dado $s \in S_g$, denote por $J := \{j \in I : \varphi_j(s) \neq 0\}$. Es claro que J es finito y $s = \sum_{j\in J} \varphi_j(s) b_j$. Ya que $\eta'_{g^{-1}}$ es sobreyectiva, para cada $j \in J$ existe $a_j \in S_{g^{-1}}$ tal que $\eta'_{g^{-1}}(a_j) = \varphi_j$. Por tanto $s = \sum_{j\in J} \eta'_{g^{-1}}(a_j)(s) b_j = s\sum_{j\in J} a_j b_j = s\varepsilon'_g(s)$. Donde $\varepsilon'_g(s) = \sum_{j\in J} a_j b_j \in S_{g^{-1}} S_g$. □

Lema 2.2.1. *Sea S un anillo simétricamente graduado por un grupo G. Si $M \in S-gr$, entonces $\varepsilon M := \bigoplus_{g\in G} S_g S_{g^{-1}} M_g$ es $gr-$submódulo de M.*

Demostración. Para mostrar que εM es submódulo de M, tome $g, h \in G$. Se debe verificar que $S_g(\varepsilon M)_h \subseteq (\varepsilon M)_{gh}$. Como S es simétricamente graduado, note que

$$S_{(gh)^{-1}} M_{gh} = S_{(gh)^{-1}} S_{gh} S_{(gh)^{-1}} M_{gh} \subseteq S_{(gh)^{-1}} S_{gh} M_e \subseteq S_{(gh)^{-1}} M_{gh},$$

luego $S_{(gh)^{-1}} M_{gh} = S_{(gh)^{-1}} S_{gh} M_e$. Por tanto:

$$(\varepsilon M)_{gh} = S_{gh} S_{(gh)^{-1}} M_{gh} = S_{gh} S_{(gh)^{-1}} S_{gh} M_e = S_{gh} M_e,$$

luego

$$S_g(\varepsilon M)_h = S_g S_h S_{h^{-1}} M_h \subseteq S_{gh} M_e = (\varepsilon M)_{gh},$$

lo que prueba que εM es submódulo de M.

Por otra parte, tome $h \in G$. Se probará que $\varepsilon M \cap M_h = S_h S_{h^{-1}} M_h$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x_{g_i} \in S_{g_i} S_{g_i^{-1}} M_{g_i}$ no nulos para cada i, tales que $x = x_{g_1} + \cdots + x_{g_n} \in \varepsilon M \cap M_h$. Note que $x \in M_{g_1} + \cdots + M_{g_n}$, luego $x \in (M_{g_1} + \cdots + M_{g_n}) \cap M_h$. Si $h \notin \{g_1, \cdots, g_n\}$, entonces:

$$x \in (M_{g_1} + \cdots + M_{g_n}) \cap M_h \subseteq (\sum_{g \in G \setminus \{h\}} M_g) \cap M_h = 0.$$

Por otro lado, si $h \in \{g_1, \cdots, g_n\}$, por lo anterior se deduce que $x - x_h = 0$, y por tanto $x \in S_h S_{h^{-1}} M_h$. En cualquier caso, $x \in S_h S_{h^{-1}} M_h$. Esto muestra que $\varepsilon M \cap M_h \subset S_h S_{h^{-1}} M_h$.

□

Lema 2.2.2. *Sea S un anillo simétricamente $G-$graduado. El funtor $\varepsilon Id : S-gr \to S-gr$ que a cada $M \in S-gr$ lo envía en εM y a cada morfismo en su restricción, está bien definido.*

Demostración. Por el lema anterior se sabe que εM es un objeto de $S-gr$ para cada $M \in S-gr$. □

El siguiente teorema muestra que si S es casi epsilon-fuertemente graduado, entonces $\varepsilon Id \simeq Ind \circ (-)_e$.

Teorema 2.2.1. *Sea S un anillo $G-$graduado tal que $S_g S_{g^{-1}}$ es $s-$unitario, para cada $g \in G$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) S es simétricamente graduado;

(ii) Para cada $M \in S-gr$ y $g,h \in G$, se tiene que $S_g M_h = S_g S_{g^{-1}} M_{gh}$;

(iii) Para cada $M \in S-gr$ y $g,h \in G$, la función multiplicación $m_{g,h} : S_g \otimes M_h \to S_g S_{g^{-1}} M_{gh}$ es un isomorfismo en $S_e - mod$;

(iv) εM es $gr-$submódulo de M para cada $M \in S-gr$, y la familia de funciones multiplicación:

$$\{\tau_M : S \otimes M_e \to \bigoplus_{g \in G} S_g S_{g^{-1}} M_g\}_{M \in S-gr},$$

es un isomorfismo natural entre εId y $Ind \circ (-)_e$.

Demostración. Suponga que S es simétricamente graduado, y sea $M \in S-gr$. Si $g,h \in G$, es claro que

$$S_g M_h = S_g S_{g^{-1}} S_g M_h \subseteq S_g S_{g^{-1}} M_{gh},$$

lo que muestra que (i) es equivalente a (ii), pues S es unitario. Por otro lado, suponga que (ii) es cierta. El hecho de que $m_{g,h}$ es sobreyectiva se deduce de la igualdad $S_g M_h = S_g S_{g^{-1}} M_{gh}$. Para la inyectividad, tome $x \in ker(m_{g,h})$. Escriba $x = \sum_{i=1}^{n} s_g^{(i)} \otimes m_h^{(i)}$. Ya que S es casi epsilon-fuertemente graduado, entonces S_g es $S_g S_{g^{-1}}-$módulo $s-$unitario. Luego existe $p \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que $ps_g^{(i)} = s_g^{(i)}$ para cada $1 \leq i \leq n$. Escribiendo $p = \sum_{j=1}^{n_p} u_g^{(j)} v_{g^{-1}}^{(j)}$, se tienen las siguientes igualdades:

$$x = \sum_{i=1}^{n} s_g^{(i)} \otimes m_h^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} ps_g^{(i)} \otimes m_h^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_p} u_g^{(j)} v_{g^{-1}}^{(j)} s_g^{(i)} \otimes m_h^{(i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_p} u_g^{(j)} \otimes v_{g^{-1}}^{(j)} s_g^{(i)} m_h^{(i)} = \sum_{j=1}^{n_p} u_g^{(j)} \otimes v_{g^{-1}}^{(j)} m_{g,h}(x) = 0.$$

Esto prueba que $m_{g,h}$ es isomorfismo.

Suponga que (iii) es cierta. Si $g \in G$, es claro que

$$S_g = S_g S_e = m_{g,e}(S_g \otimes S_e) = S_g S_{g^{-1}} S_g,$$

luego (iii) implica (i).

Ahora se probará que (iii) implica (iv). En principio, como $(iii) \Rightarrow (i)$, entonces S es simétricamente graduado y el funtor εId está bien definido por el Lema 2.2.2. Por otro lado, tome $M \in S-gr$. Es claro que τ_M es un morfismo en la categoría $S-gr$, ya que $\tau_M(S_g \otimes M_e) = S_g M_e =$

$m_{g,e}(S_g \otimes M_e) = S_g S_{g^{-1}} M_g$, para cada $g \in G$. Para mostrar que τ_M es sobre, note que para cada $g \in G$, $(\tau_M)_g = m_{g,e}$. Por tanto

$$\tau_M(S_g \otimes M_e) = m_{g,e}(S_g \otimes M_e) = S_g S_{g^{-1}} M_g$$

luego τ_M es sobreyectiva. Por otro lado, tome $g \in G$ y $x \in ker(\tau_M)_g$, es decir, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$ donde $a_i \in S_g$ y $b_i \in M_e$ para cada i. Se tiene que $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = m_{g,e}(x)$, luego $x \in ker(m_{g,e}) = \{0\}$. Esto muestra que $ker(\tau_M) = \{0\}$. Finalmente, considere $M, N \in S-gr$ y $\phi \in Hom_{S-gr}(M,N)$. Note que el siguientes diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S \otimes M_e & \xrightarrow{\tau_M} & \bigoplus_{g\in G} S_g S_{g^{-1}} M_g \\ {\scriptstyle i_S \otimes \phi_e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon Id(\phi)} \\ S \otimes N_e & \xrightarrow[\tau_N]{} & \bigoplus_{g\in G} S_g S_{g^{-1}} N_g \end{array}$$

En efecto, sea $g \in G$ y $s \otimes m \in S_g \otimes M_e$ un tensor elemental. Entonces $\varepsilon Id(\phi)(\tau_M(s \otimes m)) = \phi(sm) = s\phi_e(m) = \tau_N((i_S \otimes \phi_e)(s \otimes m))$, que era lo que se buscaba. Esto prueba (iv).

Finalmente, asuma que (iv) es cierta. Si $g \in G$, entonces $S_g = S_g S_e = \tau_S(S_g \otimes S_e) = S_g S_{g^{-1}} S_g$, pues τ_S es isomorfismo. Luego S es simétricamente graduado, y $(iv) \Rightarrow (i)$.

□

Definición 2.2.3. *Sea $M \in S-gr$. Se dice que M es simétricamente graduado, si $M_g = S_g S_{g^{-1}} M_g$, para cada $g \in G$. Además, se denotará por SIMS-gr la subcategoría plena de S-gr cuyos objetos son los módulos simétricamente $G-$graduados. La definición es análoga para el caso en que se estén considerando módulos a derecha.*

Ejemplo 2.2.2. *Sea S un anillo simétricamente graduado y $N \in S_e-mod$. Dado $g \in G$, note que*

$$S_gS_{g^{-1}}Ind(N)_g = S_gS_g^{-1}S_g \otimes_{S_e} N = S_g \otimes_{S_e} N = Ind(N)_g,$$

luego $Ind(N)$ es simétricamente graduado. Por tanto, cuando S es simétricamente graduado, el funtor Ind toma valores en SIMS-gr, es decir, $Ind : S_e - mod \to$SIMS-gr.

Proposición 2.2.4. *Suponga que $S_gS_{g^{-1}}$ es un ideal unitario de R, con elemento identidad ε_g, para cada $g \in G$. Si $M = \oplus_{g\in G}M_g$ es un $S-$módulo izquierdo (derecho) $G-$graduado, entonces las siguientes son equivalentes:*

(i) M simétricamente graduado a izquierda (derecha);

(ii) Para cada $m_g \in M_g$ se tiene que $\varepsilon_g m_g = m_g$ ($m_g\varepsilon_{g^{-1}} = m_g$).

Demostración. Suponga que M es simétricamente graduado a izquierda, y tome $g \in G$. Si $m \in M_g = S_gS_{g^{-1}}M_g$, entonces $m = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$, donde $x_i \in S_gS_{g^{-1}}$ y $m_i \in M_g$. Luego $\varepsilon_g m = m$. Por otro lado, es claro que (ii) implica (i). □

Observación 2.2.1. *Sea S un anillo epsilon-fuertemente graduado. Note que:*

(i) Si $M \in S-gr$, $N \in SIMS-gr$ y $N \xrightarrow{\varphi} M \to 0$ es una sucesión exacta en $S-gr$, entonces $M \in SIMS-gr$. En efecto, tome $g \in G$ y $m \in M_g$. Existe $n \in N_g$ tal que $\varphi(n) = m$. Por tanto:

$$\varepsilon_g m = \varepsilon_g\varphi(n) = \varphi(\varepsilon_g n) = \varphi(n) = m,$$

luego $M \in SIMS-gr$.

(ii) Si $M \in SIMS-gr$ y N es submódulo graduado de M, entonces $N \in SIMS-gr$.

(iii) Si $N \in R_e-mod$, entonces $Coind(N) \in SIMS-gr$. En efecto, por la Proposición 2.1.1 se sabe que $Ind(N) \simeq Coind(N)$ en $S-gr$. Y como $Ind(N)$ es simétricamente graduado por el Ejemplo 2.2.2, se deduce la afirmación.

(iii) Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de objetos de $SIMS-gr$, entonces $\prod_{i\in I} M_i$ y $\bigoplus_{i\in I} M_i$ son objetos de $SIMS-gr$. En efecto, sea $g \in G$ y tome $(m_i)_{i\in I} \in (\prod_{i\in I} M_i)_g$. Entonces $m_i \in (M_i)_g$ para cada i, y por tanto $\varepsilon_g(m_i)_{i\in I} = (\varepsilon_g m_i)_{i\in I} = (m_i)_{i\in I}$. Se razona de manera análoga para $\bigoplus_{i\in I} M_i$.

Definición 2.2.4. *Si S es un anillo $G-$graduado. Para cada $g \in G$, se define*

$$C'_g = \{M \in SIMS-gr : \ M_g = 0\}.$$

Teorema 2.2.2. *Sea S un anillo $G-$graduado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) S es fuertemente graduado;

(ii) S es simétricamente graduado y $C'_g = \{0\}$ para cada $g \in G$.

Demostración. Es claro que (i) implica (ii). Recíprocamente, tome M simétricamente graduado y $h \in G$. Note que M/SM_h es simétricamente graduado pues dado $g \in G$ y $m \in M_g$, existen $x_i \in S_g S_{g^{-1}}$ y $y_i \in M_g$ tales que $m = \sum x_i y_i$. Luego $\overline{m} = \sum x_i \overline{y_i} \in S_g S_{g^{-1}}(M/SM_h)_g$. Además, $(M/SM_h)_h = 0$, luego $M = SM_h$. De donde $M_{gh} = S_g M_h$ para cada $g,h \in G$. En particular, como S es simétricamente graduado, se tiene que $S_g S_h = S_{gh}$ para cada $g,h \in G$. □

Teorema 2.2.3. *Sea S un anillo $G-$graduado. Las siguientes afirmaciones son válidas*

(i) Si S es casi epsilon-fuertemente graduado, entonces las categorías $SIMS-gr$ y S_e-mod son equivalentes vía los funtores $Ind : S_e - mod \to SIMS - gr$ y $(-)_e : SIMS - gr \to S_e - mod$.

(ii) Un morfismo $\phi : M \to N$ en $SIMS-gr$ es monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo si y solo si $\phi_e : M_e \to N_e$ es respectivamente monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo en $S_e - mod$.

(iii) Si S es epsilon-fuertemente graduado, entonces

$$C'_e := \{M \in SIMS - gr : M_e = 0\} = \{0\}.$$

Demostración. Ya que $\varepsilon Id = I_{SIMS-gr}$ si consideramos εId definido en la categorías $SIMS - gr$, la afirmación (i) se sigue del Teorema 2.2.1. Así mismo, como $(-)_e : SIMS - gr \to S_e - mod$ es una equivalencia, por la Observación 1.1.1 se deduce la afirmación (ii). Finalmente, tome M simétricamente graduado. Por el inciso (i) se tiene que existe $N \in S_e-$mod tal que $Ind(N) \simeq M$. Ya que $Ind(N) \simeq Coind(N)$ y $t_{C_e}(Coind(N)) = 0$, entonces $C'_e = 0$. □

2.3. Álgebras de camino de Leavitt

El objetivo de esta sección es presentar ejemplos de anillos epsilon-fuertemente graduados y casi epsilon-fuertemente graduados. En ese sentido, se estudiará una colección de resultados presentados en Nysted and Öinert (2019).

Definición 2.3.1. *Sea S un anillo $G-$graduado. Una involución $()^* : S \to S$ es llamada antigraduada si $(S_g)^* = S_{g^{-1}}$.*

Proposición 2.3.1. *[Nysted and Öinert (2019), Proposición 3.5] Sean S un anillo $G-$graduado y $(-)^* : S \to S$ una involución antigraduada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) S es epsilon-fuertemente graduado;

(ii) Para cada $g \in G$ existe $\varepsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que $\varepsilon_g s = s$ para cada $s \in S_g$ y $\varepsilon_g^* = \varepsilon_g$;

(iii) Para cada $g \in G$ existe $\varepsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que $s\varepsilon_{g^{-1}} = S$ para cada $s \in S_g$ y $\varepsilon_g^* = \varepsilon_g$.

Demostración. Suponga que S es epsilon-fuertemente graduado, y sea $g \in G$. Existe $\varepsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que $\varepsilon_g s = s$ para cada $s \in S_g$, y además ε_g es el elemento identidad de $S_g S_{g^{-1}}$. Teniendo en cuenta que $\varepsilon_g^* \in (S_g S_{g^{-1}})^* = S_g S_{g^{-1}}$, se tiene que:

$$\varepsilon_g^* = \varepsilon_g^* \varepsilon_g = (\varepsilon_g^* \varepsilon_g)^* = (\varepsilon_g^*)^* = \varepsilon_g,$$

y por tanto $(i) \Rightarrow (ii)$. Suponga que (ii) es cierta y sea $s \in S_g$ dado. Se tiene que $s^* \in S_{g^{-1}}$ y por tanto $\varepsilon_{g^{-1}} s^* = s^*$, es decir, $s = s\varepsilon_{g^{-1}}^* = s\varepsilon_{g^{-1}}$. Esto prueba que $\varepsilon_g s = s = s\varepsilon_{g^{-1}}$ para cada $s \in S_g$, y por tanto que S es epsilon-fuertemente graduado. Luego $(ii) \Rightarrow (i)$. De manera análoga se muestra que $(i) \Leftrightarrow (iii)$. □

La versión casi epsilon de la proposición anterior es la siguiente:

Proposición 2.3.2. *[Nysted and Öinert (2019), Proposición 3.6] Sea S un anillo $G-$graduado y $(-)^* : S \to S$ una involución antigraduada. Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(i) Si para cada $g \in G$ y $s \in S_g$ existe $\varepsilon_g(s) \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que $\varepsilon_g(s)s = s$ y $\varepsilon_g(s)^* = \varepsilon_g(s)$, entonces S es casi epsilon-fuertemente graduado.

(ii) Si para cada $g \in G$ y $s \in S_g$ existe $\varepsilon'_g(s) \in S_{g^{-1}} S_g$ tal que $s\varepsilon'_g(s) = s$ y $\varepsilon'_g(s)^* = \varepsilon'_g(s)$, entonces S es casi epsilon-fuertemente graduado.

Demostración. (i) Dado $s \in S_g$, se sabe que $s^* \in S_{g^{-1}}$. Por hipótesis existe $\varepsilon_{g^{-1}}(s^*) \in S_{g^{-1}} S_g$ tal que $\varepsilon_{g^{-1}}(s^*)s^* = s^*$ y $\varepsilon_{g^{-1}}(s^*)^* = \varepsilon_{g^{-1}}(s^*)$. Por tanto

$$s = (s^*)^* \varepsilon_{g^{-1}}(s^*)^* = s\varepsilon_{g^{-1}}(s^*).$$

Esto muestra que $\varepsilon_g(s)s = s = s\varepsilon_{g^{-1}}(s^*)$, luego S es casi epsilon-fuertemente graduado. El otro inciso es análogo. □

A continuación se introducirá la graduación estándar sobre un álgebra de camino de Leavitt, por un grupo G. Para un estudio a profundidad de las álgebras de camino de Leavitt el lector puede ver Abrams and Aranda Pino (2008) y Ambili et al. (2020).

Definición 2.3.2. *Un grafo dirigido es una cuadrupla $E = (E^0, E^1, r, s)$, donde E^0 y E^1 son respectivamente los conjuntos de vértices y aristas, y $r, s : E^1 \to E^0$ son funciones. Un camino en E es una secuencia finita de aristas $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ tales que $r(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ para cada $i = 1, \cdots, n-1$. En este caso se dice que la longitud de α es n, y se escribe $l(\alpha) = n$. La familia de todos los caminos de longitud n en E es denotada por E^n. En particular, los vértices de E son considerados como caminos de longitud cero. Finalmente, $E^* := \cup_{n\in\mathbb{N}_0} E^n$ denotará la familia de caminos de longitud finita.*

Observación 2.3.1. *Sea E un grafo dirigido.*

- *Si $\alpha = \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in E^n$, se omitirán las comas para representar a α, esto es, se escribirá $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$.*
- *Dados $\alpha, \beta \in E^*$, se dice que α es subcamino inicial de β si existe $\gamma \in E^*$ tal que $r(\alpha) = s(\gamma)$ y $\beta = \alpha\gamma$.*

- *Las funciones s, r se pueden extender a E^* como sigue: dado $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$, $s(\alpha) := s(\alpha_1)$ y $r(\alpha) = r(\alpha_n)$.*

- *Se define $E^0_{reg} := \{v \in E^0 : \ 0 < |s^{-1}(v)| < \infty\}$.*

Ejemplo 2.3.1. *Sean E un grafo dirigido, R un anillo conmutativo con 1 y $F_R(E)$ el $R-$módulo libre con base E^*. Sobre $F_R(E)$ considere el siguiente producto: dados $\alpha, \beta \in E^*$, entonces:*

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \alpha\beta, \ si\, r(\alpha) = s(\beta) \\ \\ 0, \ en\, otro\, caso \end{cases}$$

donde $\alpha\beta$ es la concatenación de α y β. Extendiendo este producto distributivamente, $F_R(E)$ adquiere estructura de $R-$álgebra asociativa. $F_R(E)$ es conocida como el álgebra de camino de E con coeficientes en R. Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{Z}$ denote por $(F_R(E))_n$ al $R-$submódulo de $F_R(E)$ generado por E^n, donde $(F_R(E))_n = 0$ si $n < 0$. Entonces:

$$F_R(E) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (F_R(E))_n \text{ es una } \mathbb{Z}-\text{graduación de } F_R(E).$$

En efecto, dados $r\alpha \in (F_R(E))_n$ y $r'\beta \in F_R(E)_m$, se tiene que $l(\alpha\beta) \in \{0, n+m\}$.

Ejemplo 2.3.2. *Sean E un grafo dirigido y $(E^1)^* := \{e^* : e \in E^1\}$. Considere el grafo $\hat{E} := (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, r', s')$, donde $r'|_{E^1} = r$, $s'|_{E^1} = s$, y*

$$r'(e^*) = s(e) \text{ y } s'(e^*) = r(e), \text{ para cada } e^* \in (E^1)^*.$$

Note que en el álgebra de camino $F_R(\hat{E})$ vale lo siguiente:

- *$uu = u$ y $uv = 0$ para cada $u, v \in E^0$ distintos.*

- $s(e)e = e = er(e)$ *y* $r(e)e^* = e^* = e^*s(e)$ *para cada* $e \in E^1$.

El grafo $\hat{E}$ *es conocido como grafo extendido de* E.

Notación 2.3.1. *Sean* E *un grafo dirigido y* $\hat{E}$ *su grafo extendido. Si* $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n \in E^n$ *es un camino de longitud n, se define* $\alpha^* := \alpha_n^* \cdots \alpha_1^* \in (\hat{E})^n$.

Definición 2.3.3. *Sean* E *un grafo dirigido y* A *un anillo. Una* $E-$*familia de Leavitt en* A *es una colección* $\{a_v, b_e, c_{e^*} : v \in E^0,\ e \in E^1\}$, *que satisface las siguientes condiciones:*

1. $a_v a_v = a_v$ *y* $a_v a_u = 0$ *para cada* $u, v \in E_0$ *tales que* $u \neq v$.

2. $a_{s(e)} b_e = b_e = b_e a_{r(e)}$ *y* $a_{r(e)} c_{e^*} = c_{e^*} = c_{e^*} a_{s(e)}$ *para cada* $e \in E^1$.

3. $c_{e^*} b_e = a_{r(e)}$ *y* $c_{e^*} b_{e'} = 0$ *para cada* $e, e' \in E^1$ *tales que* $e \neq e'$.

4. $a_v = \sum_{\{e \in E^1:\ s(e)=v\}} b_e c_{e^*}$ *para cada* $v \in E^0_{reg}$.

Observación 2.3.2. *Sean* A *un anillo,* E *un grafo dirigido y* $\hat{E}$ *su grafo extendido. Si* $\{a_v, b_e, c_{e^*} : v \in E^0,\ e \in E^1\}$ *es una* $E-$*famililia de Leavitt en* A, *note que:*

- *Sin perder generalidad se puede decir que* $\{v, e, e^* :\ v \in E^0, e \in E^1\} \subset A$, *simplemente haciendo las identificaciones* $v \equiv a_v$, $e \equiv b_e$ *y* $e^* \equiv c_{e^*}$ *para cada* $v \in E^0$ *y* $e \in E^1$.

- *Teniendo en cuenta el inciso anterior, los elementos de* $(\hat{E})^*$ *se pueden ver como elementos de* A.

Lema 2.3.1. *Sea* A *una* $R-$*álgebra generada por una* $E-$*familia de Leavitt* $\{v, e, e^* :\ v \in E^0,\ e \in E^1\}$, *entonces para* $r, r' \in R$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E^*$ *tales que* $r(\alpha) = r(\beta)$ *y* $r(\gamma) = r(\delta)$, *se tiene que:*

$$(r\alpha\beta^*)(r'\gamma\delta^*) = \begin{cases} (rr')\alpha\kappa^*\delta^*, \text{ si } \beta = \gamma\kappa \text{ donde } \kappa \in E^* \\ (rr')\alpha\kappa\delta^*, \text{ si } \gamma = \beta\kappa \text{ donde } \kappa \in E^* \\ 0, \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Si $\beta = \gamma\kappa$ para algúna $\kappa \in E^*$, entonces:

$$(r\alpha\beta^*)(r'\gamma\delta^*) = (rr')(\alpha\kappa^*\gamma^*\gamma\delta^*) = (rr')(\alpha\kappa^* r(\gamma)\delta^*) = (rr')(\alpha\kappa^*\delta^*).$$

El caso en que $\gamma = \beta\kappa$ es análogo. Finalmente, suponga que no está en alguno de los casos anteriores. Escribiendo $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_{l(\gamma)}$ y $\beta = \beta_1 \cdots \beta_{l(\beta)}$, existe $1 \leq i \leq l(\gamma)$ mínimo tal que $\gamma_i \neq \beta_i$. Por la condición 3) de la Definición 2.3.3, se deduce que:

$$\beta^*\gamma = \beta^*_{l(\beta)} \cdots \beta^*_i \cdots \beta^*_1 \gamma_1 \cdots \gamma_i \cdots \gamma_{l(\gamma)} = \beta^*_{l(\beta)} \cdots \beta^*_i \gamma_i \cdots \gamma_{l(\gamma)} = 0,$$

luego $(r\alpha\beta^*)(r'\gamma\delta^*) = 0$. □

Observación 2.3.3. *Si B es una $R-$álgebra generada por una $E-$familia de Leavitt $\{v, e, e^* : v \in E^0, e \in E^1\}$. Se dice que E es universal para las $E-$familias de Leavitt en $R-$álgebras, si para cada $R-$álgebra A que contiene una $E-$familia de Leavitt $\{a_v, b_e, c_{e^*} : v \in E^0, e \in E^1\}$, existe un único homomorfismo de $R-$álgebras $\phi : B \to A$ tal que $\phi(v) = a_v$, $\phi(e) = b_e$ y $\phi(e^*) = c_{e^*}$ para cada $v \in E^0$ y $e \in E^1$. Note que esta propiedad caracteriza a B por isomorfismos de $R-$álgebras.*

Definición 2.3.4. *Sean E un grafo y R un anillo conmutativo con 1. El álgebra de camino de Leavitt de E con coeficientes en R, denotada por $L_R(E)$, es la $R-$álgebra universal para las $E-$familias de Leavitt en $R-$álgebras.*

Observación 2.3.4. *Según el Lema 2.3.1 y el inciso 3) de la Definición 2.3.3, la $R-$álgebra $L_R(E)$ es generada, como grupo abeliano, por el conjunto*

$$\{\sum_{i=1}^{n} r_i\alpha_i\beta_i^* : \ n \in \mathbb{N}, \alpha_i, \beta_i \in E^* \text{ y } r(\alpha_i) = r(\beta_i), \ i = 1 \cdots, n\}.$$

Lema 2.3.2. *Sean E un grafo dirigido y R un anillo conmutativo. Existe un ideal I de la $R-$álgebra $F_R(\hat{E})$, tal que $(F_R(\hat{E})/I) \simeq L_R(E)$ como $R-$álgebras.*

Demostración. Sobre $F_R(\hat{E})$ considere el ideal I generado por los siguietes subconjuntos:

$$\{e^*f - \delta_{e,f}r(e) : \ e, f \in E^1\} \cup \{v - \sum_{\{e \in E^1 : \ s(e)=v\}} ee^* : \ v \in E^0_{reg}\}.$$

Por la forma de definir el producto en el álgebra de camino $F_R(\hat{E})$, la familia $\{v, e, e^* : \ v \in E^0, e \in E^1\}$ satisface las condiciones 1-2 de la Definición 2.3.3. Luego la colección de clases $\{\bar{v}, \bar{e}, \bar{e^*} : \ v \in E^0, e \in E^1\}$ es una $E-$familia de *Leavitt* que genera a $F_R(\hat{E})/I$. Más aún, si A es una $R-$álgebra que contiene una $E-$familia de *Leavitt* $\{a_v, b_e, c_{e^*} : v \in E^0, \ e \in E^1\}$, existe un único homomorfismo de $R-$álgebras $\phi : F_R(\hat{E})/I \to A$ tal que $\phi(\bar{v}) = a_v$, $\phi(\bar{e}) = b_e$ y $\phi(\bar{e^*}) = c_{e^*}$ para cada $v \in E^0$ y $e \in E^1$. Por la propiedad universal de $L_R(E)$, se tiene que $F_R(\hat{E})/I \simeq L_R(E)$. □

Ejemplo 2.3.3. *Sea E un grafo dirigido. Siguiendo la idea del Ejemplo 2.3.1, se definirá una $\mathbb{Z}-$graduación sobre $L_R(E)$. Para esto, sea $F_R(\hat{E})$ la $R-$álgebra de camino de $\hat{E}$ con coeficientes en R. Para cada $v \in E^0$ y $e \in E^1$, defina:*

$$deg(v) = 0 \qquad deg(e) = 1 \qquad deg(e^*) = -1.$$

De manera general, dados $\alpha, \beta \in E^*$ tales que $r(\alpha) = s(\beta)$, se tiene que:

$$deg(\alpha\beta) = l(\alpha) + l(\beta),\ deg(\alpha\beta^*) = l(\alpha) - l(\beta),\ deg(\alpha^*\beta) = l(\beta) - l(\alpha).$$

Note que para cada $n \in \mathbb{Z}$:

$$(F_R(\hat{E}))_n = \{\sum_{i=1}^{n} r_i \kappa_i : \ n \in \mathbb{N}, \ r_i \in R, \ \kappa_i \in (\hat{E})^*, \ l(\kappa_i) = n \text{ para cada } i\}$$

Si I es el ideal de $F(\hat{E})$ generado por los conjuntos

$$\{e^* f - \delta_{e,f} r(e) : \ e, f \in E^1\} \cup \{v - \sum_{\{e \in E^1 : \ s(e)=v\}} e e^* : \ v \in E^0_{reg}\},$$

por el Lema 2.3.2 se sabe que $(F(\hat{E})/I) \simeq L_R(E)$. Además, note que los elementos generadores de I son homogéneos de grado cero pues son sumas de elementos que están en la componente cero. Por tanto $F(\hat{E})/I \simeq L_R(E)$ es $\mathbb{Z}-$graduado. Más aún, por la Observación 2.3.4 se tiene que para cada $k \in \mathbb{Z}$:

$$(L_R(E))_k = \{\sum_{i=1}^{n} r_i \alpha_i \beta_i^* : \ n \in \mathbb{N}, \alpha_i, \beta_i \in E^*, \ l(\alpha_i) - l(\beta_i) = k \text{ para cada } i\}.$$

La graduación anterior es conocida como $\mathbb{Z}-$graduación canónica.

El siguiente ejemplo muestra que la graduación anterior se puede generalizar para cualquier grupo.

Ejemplo 2.3.4. *Sean G un grupo y E un grafo. Considere la $G-$graduación sobre $F_R(\hat{E})$ definida como sigue.*

- *$deg(v) = e$ para cada $v \in E^0$.*
- *Si $e \in E^1$, tome $g \in G$ y defina $deg(e) = g$, $deg(e^*) = g^{-1}$.*

De manera general, dados $\alpha, \beta \in E^*$, tenemos que:

$$deg(\alpha\beta) = deg(\alpha)deg(\beta),\ deg(\alpha\beta^*) = deg(\alpha)deg(\beta)^{-1},\ deg(\alpha^*\beta) = deg(\alpha)^{-1}deg(\beta).$$

Note que para cada $g \in G$:

$$(F_R(\hat{E}))_g = \{\textstyle\sum_{i=1}^n r_i\kappa_i :\ n \in \mathbb{N},\ r_i \in R,\ \kappa_i \in (\hat{E})^*,\ deg(\kappa_i) = g \text{ para cada } i\}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, el ideal I generado por los conjuntos

$$\{e^*f - \delta_{e,f}r(e) :\ e,f \in E^1\} \cup \{v - \textstyle\sum_{\{e\in E^1:\ s(e)=v\}} ee^* :\ v \in E^0_{reg}\},$$

tiene generadores homogéneos. Por ejemplo, los elementos del conjunto de la derecha tienen grado e. Esto muestra que I es un ideal graduado de $F_R(\hat{E})$, y por tanto $F_R(E)/I \simeq L_R(E)$ es $G-$graduado. Más aún, para cada $g \in G$ se tiene que:

$$(L_R(E))_g = \{\textstyle\sum_{i=1}^n r_i\alpha_i\beta_i^* :\ \alpha_i,\beta_i \in E^*,\ deg(\alpha_i)deg(\beta_i)^{-1} = g \text{ para cada } i\}.$$

La graduación anterior es conocida como $G-$graduación canónica.

Ejemplo 2.3.5. *Si E es un grafo y G un grupo, entonces $S := L_R(E)$ es simétricamente graduada con la $G-$graduación canónica. En efecto, sea $g \in G$ y $0 \neq \alpha\beta^* \in S_g$. Ya que $\beta\alpha^* \in S_{g^{-1}}$ y $r(\alpha) = r(\beta)$, se tiene que:*

$$\alpha\beta^* = \alpha r(\beta)\beta^* = \alpha\beta^*\beta\beta^* = (\alpha\beta^*)(\beta\alpha^*)(\alpha\beta^*) \in S_gS_{g^{-1}}S_g.$$

Lema 2.3.3. *Sea E un grafo dirigido y $S = L_R(E)$ el álgebra de camino de Leavitt. La función $(-)^* : S \to S$ que a cada $\sum_{i=1}^n r_i\alpha_i\beta_i^* \in S$ lo envía en $\sum_{i=1}^n r_i\beta_i\alpha_i^* \in S$ es una involución antigraduada sobre $L_R(E)$.*

Demostración. Sea $g \in G$ y $\sum_{i=1}^{n} r_i \alpha_i \beta_i^* \in S_g$. Se tiene que $deg(\alpha_i)\deg(\beta_i)^{-1} = g$, y por tanto $deg(\beta_i)deg(\alpha_i)^{-1} = g^{-1}$, para cada i. Esto muestra que $\sum_{i=1}^{n} r_i \beta_i \alpha_i^* \in S_{g^{-1}}$, luego $(S_g)^* \subset S_{g^{-1}}$. De manera análoga se muestra que $S_{g^{-1}} \subset (S_g)^*$. Esto demuestra que $(-)^*$ es antigraduada. □

A continuación se estudiará la demostraciónn del Teorema 4.1 presentado en Nysted and Öinert (2019). Este será utilizado en la última parte de este trabajo.

Teorema 2.3.1. *Sean E un grafo dirigido finito, R un anillo conmutativo unitario y G un grupo. Entonces $L_R(E)$ es epsilon-fuertemente graduada con la $G-$graduación estándar.*

Demostración. Sea $g \in G$. Se busca $\varepsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$ que cumpla con la condición (ii) de la Proposición 2.3.1. En ese sentido, sea X la colección de expresiones formales $\alpha\beta^*$, tales que $r(\alpha) = r(\beta)$. Además, para cada $g \in G$, considere:

$$X_g := \{x \in X : deg(x) = g\}.$$

Dados $\alpha\beta^*$, $\kappa\delta^* \in X_g$, se escribe $\alpha\beta^* \leq \kappa\delta^*$ si y solo si α es subcamino inicial de κ. Es claro que $\leq$ es reflexiva y transitiva en X_g. Por tanto, si se define la relación $\backsim$ en X_g por $\alpha\beta^* \backsim \kappa\delta^*$ si y solo si $\alpha\beta^* \leq \kappa\delta^*$ y $\kappa\delta^* \leq \alpha\beta$, entonces $\backsim$ es una relación de equivalencia en X_g. Note que $\alpha\beta^* \backsim \gamma\delta^*$ si y solo si $\alpha = \gamma$.

Por otro lado, sobre $X_g/\backsim = \{[x] : x \in X_g\}$ defina la relación $\preceq$, donde $[x] \preceq [y]$ si y solo si $x \leq y$. Es claro que $\preceq$ es un orden parcial sobre $X_g/\backsim$. Considere la siguiente función:

$$\zeta_g : X_g/\backsim \longrightarrow L_R(E)_e,\ [x] \mapsto xx^*, \text{ para cada } x \in X_g.$$

Note que ζ_g está bien definida. En efecto, sean $x, y \in X_g$ que están en la misma clase, es decir, existen $\alpha, \beta, \delta \in E^*$ tales que $y = \alpha\delta^*$ y $x = \alpha\beta^*$. Entonces:

$$xx^* = \alpha\beta^*\beta\alpha^* = \alpha\alpha^* = \alpha r(\delta)\alpha^* = \alpha\delta^*\delta\alpha^* = yy^*.$$

Además, note que si $x = \alpha\beta^*, y = \kappa\delta^*$ pertenecen a X_g, entonces:

(i) Si $[x] \preceq [y]$, entonces $\zeta_g([x])y = y$.

(ii) Si $[x] \not\preceq [y]$ y $[y] \not\preceq [x]$, entonces $\zeta_g([x])y = 0$.

Para mostrar (i), tome $\alpha' \in E^*$ tal que $\kappa = \alpha\alpha'$. Entonces:

$$\zeta_g([x])y = xx^*y = \alpha\beta^*\beta\alpha^*\alpha\alpha'\delta^* = \alpha\alpha'\delta^* = y,$$

luego (i) queda probada. Finalmente, si x, y satisfacen (ii), entonces α no es subcamino inicial κ y κ no es subcamino inicial de α. En ese sentido, por el Lema 2.3.1 se deduce que:

$$\zeta_g(x)y = \alpha\beta^*\beta\alpha^*\kappa\delta^* = (\alpha\alpha^*)(\kappa\delta^*) = 0,$$

lo que prueba (ii).

Note que existen $n_g \in \mathbb{N}$ y $m_1, \cdots, m_{n_g} \in X_g$ tales que $M_g := \{[m_1], \cdots, [m_{n_g}]\} \subseteq X_g/\backsim$ es el conjunto de elementos minimales de $X_g/\backsim$ respecto del orden $\preceq$. Además, para cada $\kappa\delta^* \in X_g$ existe un único $j \in \{1, \cdots, n_g\}$ tal que $[m_j] \preceq [\kappa\delta^*]$. En efecto, si $[\kappa\delta^*]$ no es minimal de $X_g/\backsim$, entonces existen $\kappa^{(1)}, \delta^{(1)} \in E^*$ tales que $r(\kappa^{(1)}) = r(\delta^{(1)})$, $[\kappa^{(1)}\delta^{(1)}] \preceq [\kappa\delta^*]$ y además $[\kappa^{(1)}\delta^{(1)*}] \neq [\kappa\delta^*]$, es decir, $\kappa^{(1)}$ es subcamino inicial de κ y $l(\kappa^{(1)}) < l(\kappa)$. Aplicando este mismo proceso, después de un número finito de veces se encontrará el minimal. Para probar la unicidad, suponga que existen $[m_i] = [\alpha\beta^*]$ y $[m_j] = [\phi\psi^*]$ elementos diferentes de M_g tales que $[m_i], [m_j] \leq$

$[\kappa\delta^*]$. Entonces existen $\theta, \rho \in E^*$ las cuales satisfacen $\kappa = \alpha\theta = \beta\rho$. Luego α es subcamino inicial de β o β es subcamino inicial de α. En cualquier caso, se puede concluir que $[m_i] = [m_j]$ por la minimalidad de estos elementos.

Para finalizar la prueba, defina

$$\varepsilon_g = \sum_{j=1}^{n_g} \zeta_g([m_j]).$$

Note que $M_e = E^0$ y por tanto $\varepsilon_e = \sum_{v \in E^0} v$. Así, ε_e está bien definido por la finitud de E^0. Por otro lado, para cada $1 \leq j \leq n_g$ se tiene que $\zeta_g([m_j]) = m_j m_j^* \in S_g S_{g^{-1}}$, luego $\varepsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$. Además, dado $\alpha\beta^* \in S_g$ arbitrario, existe un único $1 \leq j \leq n_g$ tal que $[m_j] \preceq [\alpha\beta^*]$. Lo anterior permite cuncluir que:

$$\varepsilon_g \alpha\beta^* = \zeta_g([m_j])\alpha\beta^* + \sum_{i \neq j} \zeta_g([m_i])\alpha\beta^* = \alpha\beta^* + 0 = \alpha\beta^*.$$

Finalmente, note que

$$\varepsilon_g^* = (\sum_{i=1}^{n_g} m_i m_i^*)^* = \sum_{i=1}^{n_g} m_i m_i^* = \varepsilon_g.$$

Luego ε_g satisface la condición (ii) de la Proposición 2.3.1. Esto muestra que $L_R(E)$ es epsilon-fuertemente graduado. □

El siguiente teorema permite encontrar ejemplos de anillos casi epsilon-fuertemente graduados que no son epsilon-fuertemente graduados. Una prueba del mismo puede ser encontrada en [Nysted and Öinert (2019), Teorema 4.2]

Teorema 2.3.2. *Si E es un grafo dirigido y R es un anillo asociativo unitario, entonces $L_R(E)$ es casi epsilon-fuertemente graduado con su $G-$graduación estándar.*

Ejemplo 2.3.6 (Nysted and Öinert (2019), Ejemplo 4.2)**.** *Sea R un anillo conmutavio unitario, y considere el siguiente grafo dirigido*

$$E := \bullet_{v_1} \xrightarrow{(\infty)} \bullet_{v_2}$$

Donde (∞) significa que hay una cantidad infinita numerable de aristas con dominio v_1 y rango v_2. A saber, $E^1 := \{f_1, f_2, \cdots\}$. Se sabe que $L_R(E)$ es casi epsilon-fuertemente $\mathbb{Z}-$graduado, con su $\mathbb{Z}-$graduación estándar. Se probará que $L_R(E)$ no es epsilon-fuertemente graduado. Para ello, note que:

(i) $S_0 = span_R\{v_1, v_2, f_1f_1^*, f_1f_2^*, \cdots, f_if_j^*, \cdots\}$.

(ii) $S_1 = span_R\{f_1, f_2, \cdots\}$,

(iii) $S_{-1} = span_R\{f_1^*, f_2^*, \cdots\}$.

Si S_1 fuera finito, se podría definir $\varepsilon_1 := \sum_{i\in\mathbb{N}} f_if_i^*$, pero este no es el caso. Por tanto, la única opción es que $\varepsilon_1 = v_1$. Sin embargo, note que $v_1 \notin S_1S_{-1}$. En efecto, suponga que $v_1 = \sum_{j\in J} r_jf_{p_j}f_{q_j}^*$, para $J \subseteq \mathbb{N}$ finito y $p_j, q_j \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 \neq v_2 = f_k^*f_k = f_k^*v_1f_k = \sum_{j\in J} f_k^*f_{p_j}f_{q_j}^*f_k$. Luego existe $j \in J$ tal que $f_k = f_{p_j} = f_{q_j}$, es decir, $k = p_j = q_j$. Esto implica que J no es finito, que es una contradicción. Por tanto $\varepsilon_1 \notin S_1S_{-1}$ y $L_R(E)$ no es epsilon-fuertemente graduado.

3. Anillos fuertemente graduados a partir de anillos epsilon-fuertemente graduados

3.1. Construcción de anillos fuertemente graduados

El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema 3.1.1, que es el resultado más importante de esta tesis. Es importante mencionar que el método mediante el cual se probará este teorema, es motivado por el trabajo desarrollado en Kuo and Szeto (2014).

La siguiente proposición muestra una manera sencilla de conseguir anillos fuertemente graduados a partir de anillos epsilon-fuertemente graduados.

Proposición 3.1.1. *Sea S un anillo epsilon-fuertemente graduado. Si S_g es S_e-módulo fiel a izquierda (o derecha) para cada $g \in H := Supp(S)$, entonces H es subgrupo de G y S_H es fuertemente $H-$graduado.*

Demostración. Se probará la afirmación en el caso en que S_g es S_e-fiel a izquierda, para cada $g \in Supp(S)$. El otro caso es análogo.

Si $g \in H$, es claro que $g^{-1} \in H$. Por otro lado, note que si $g \in H$, existe $\varepsilon_g \in S_g S_{g^{-1}}$ tal que $(\varepsilon_g - 1)s = 0$, para cada $s \in S_g$. Así, por la fidelidad de S_g se concluye que $\varepsilon_g = 1$. Esto muestra que $S_g S_{g^{-1}} = S_e$, para cada $g \in H$. Finalmente, sean $g, h \in H$. Si suponemos que $gh \notin H$, entonces

$$S_g = S_g S_e = S_g S_h S_{h^{-1}} \subseteq S_{gh} S_{h^{-1}} = 0,$$

que es absurdo. Así, H es subgrupo de G y por la Proposición 1.2.2, se tiene que S_H es fuertemente graduado. □

Notación 3.1.1. *Sea S un anillo epsilon-fuertemente $G-$graduado.*

(i) Para cada $H \subseteq G$, denote por $I_H := \{\varepsilon_h : h \in G\}$ y $B(I_H)$ el semigrupo Booleano generado por I_H. Además, $B(I_H)^* := B(I_H) \setminus \{0\}$. Como los elementos de $B(I_H)$ son idempotentes centrales de S_e, es posible definir un orden parcial en $B(I_H)$ como sigue:

$$a \leq b \text{ si y solo si } a = ab, \text{ para cada } a, b \in B(I_H).$$

Suponga que $a, b \in B(I_G)$ y $a \wedge b$ denota la máxima cota inferior de $\{a, b\}$. Es claro que $a \wedge b$ existe en $B(I_G)$, más aún, $a \wedge b = ab$.

(ii) Si $a \in B(I_G)^*$, se define:

$$G(a) := \{g \in G : \varepsilon_g a \neq 0\} \text{ y } N(a) := \{g \in G : \varepsilon_g a = a\}.$$

Es claro que $a \in B(I_G)^*$ es minimal si y solo si $G(a) = N(a)$.

Definición 3.1.1. *Sean S un anillo epsilon-fuertement $G-$graduado y $H \subseteq G$. Un elemento $a \in Z(S_e)$ es llamado γ_H-invariante, si $\gamma_h(a\varepsilon_{h^{-1}}) = a\varepsilon_h$ para cada $h \in H$. En particular, si a es γ_G-invariante, se dirá que a es $\gamma-$invariante, donde γ es la acción parcial definida en el Ejemplo 2.1.2.*

Lema 3.1.1. *Sea S un anillo epsilon-fuertemente graduado y $a \in B(I_G)^*$ un elemento minimal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $N(a)$ es subgrupo de G;

(ii) a es $\gamma-$invariante;

(iii) $a \in Z(S)$.

Demostración. Suponga que (i) es cierta, y sea $g \in G$. Si $g \notin N(a)$, entonces $g^{-1} \notin N(a)$ y por tanto $\gamma_g(a\varepsilon_{g^{-1}}) = \gamma_g(0) = 0 = a\varepsilon_g$. Para el caso en que $g \in N(a)$, tome $n \in \mathbb{N}$ y $h_1, h_2, \cdots, h_n \in N(a)$ tales que $a = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_{h_i}$. Esto es posible pues $a \in B(I_G)^*$. Como $g^{-1} \in N(a)$, entonces $g^{-1}h_i \in N(a)$ y $a = a\varepsilon_{g^{-1}h_i}$, para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Esto muestra que

$$a = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_{h_i} \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_{g^{-1}h_i},$$

y por tanto

$$\gamma_g(a\varepsilon_{g^{-1}}) = \prod_{i=1}^{n} \gamma_g(\varepsilon_{h_i}\varepsilon_{g^{-1}}) \prod_{i=1}^{n} \gamma_g(\varepsilon_{g^{-1}h_i}\varepsilon_{g^{-1}}) = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_{gh_i}\varepsilon_g \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_{h_i}\varepsilon_g =$$

$$\prod_{i=1}^{n} \varepsilon_{gh_i}\varepsilon_g a\varepsilon_g = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_{gh_i} a\varepsilon_g = a\varepsilon_g.$$

Como el $g \in G$ fue arbitrario, se concluye que (i) implica (ii).

Asumiendo que (ii) es válida, sean $g \in G$ y $s \in S_g$. Entonces

$$sa = \gamma_g(a\varepsilon_{g^{-1}})s = a\varepsilon_g s = as,$$

luego a conmuta con los elementos homogéneos de S, y por tanto $a \in Z(S)$. Esto prueba que $(ii) \Rightarrow (iii)$. Por otro lado, sean $g, h \in N(a)$ y suponga que $a \in Z(S)$. Si $g^{-1} \notin N(a)$, entonces $aS_{g^{-1}} = 0$ y por tanto $a\varepsilon_g = 0$, que es una contradicción. Con esto se verifica que $g^{-1} \in N(a)$. Análogamente, como $a \in Z(S)$, es claro que a es $\gamma-$invariante y por tanto

$$a = a\varepsilon_g = \gamma_g(a\varepsilon_{g^{-1}}) = \gamma_g(a\varepsilon_{g^{-1}}\varepsilon_h) = \gamma_g(a\varepsilon_{g^{-1}})\gamma_g(\varepsilon_{g^{-1}}\varepsilon_h) = a\varepsilon_g\varepsilon_{gh} = a\varepsilon_{gh},$$

luego $N(a) \leq G$. □

Observación 3.1.1. *Por la demostración del Lema 3.1.1, es claro que si S es epsilon-fuertemente $G-$graduado y $H \leq G$, entonces $a \in Z(S_e)$ es γ_H-invariante si y solo si $a \in Z(S_H)$*

Lema 3.1.2. *Sea S un anillo epsilon-fuertemente gradudo y $a,b \in B(I_G)^*$ elementos minimales y $\gamma-$invariantes. Entonces*

(i) $(aS_g)(aS_h) = aS_{gh}$*, para cada* $g,h \in N(a)$*. En particular,* $aS = (aS)_{N(a)} = \bigoplus_{g\in N(a)} aS_g$ *es fuertemente* $N(a)-$*graduado.*

(ii) $(aS)_N \oplus (bS)_N$ *es fuertemente* $N-$*graduado, donde* $N := N(a) \cap N(b)$.

Demostración. Por el Lema 3.1.1 se tiene que $a \in Z(S)$. Por tanto, si $g,h \in N(a)$, entonces

$$aS_{gh} = a\varepsilon_g S_{gh} \subseteq aS_g S_{g^{-1}} S_{gh} \subseteq aS_g S_h = (aS_g)(aS_h),$$

esto muestra que $aS = \bigoplus_{g\in N(a)} aS_g$ es fuertemente $N(a)-$graduado.

Para mostrar (ii), note que tanto $(aS)_N$ como $(bS)_N$ son fuertemente $N-$graduados. Además

$$((aS)_N \oplus (bS)_N)_g = aS_g \oplus bS_g, \text{ para cada } g \in N.$$

Luego

$$(aS_g \oplus bS_g)(aS_{g^{-1}} \oplus bS_{g^{-1}}) = (aS_g)(aS_{g^{-1}}) + (bS_g)(bS_{g^{-1}}) = aS_e + bS_e =$$

$$aS_e \oplus bS_e = ((aS)_N \oplus (bS)_N)_e,$$

lo que prueba (iii), pues $(aS)_N \oplus (bS)_N$ es unitario. □

Corolario 3.1.1. *Sean E un grafo dirigido finito, R un anillo unitario y G un grupo. Si $S := L_R(E)$ tiene la $G-$graduación canónica y $a \in B(I_G)^*$ es minimal, entonces $(aS)_{N(a)}$ es fuertemente $N(a)-$graduado.*

Es posible dar ejemplos donde $N(a) = G$ para algún elemento minimal $a \in B(I_G)^*$.

Ejemplo 3.1.1. *Sea E el siguiente grafo:*

$$\bullet_{v_1} \xrightarrow{f} \bullet_{v_2} \qquad \bullet_{v_3}$$

graduado por $\mathbb{Z}_2$ como sigue; $deg(v_1) = deg(v_2) = deg(v_3) = \overline{0}$ y $deg(f) = \overline{1}$. Note que

(i) $S_{\overline{0}} = span_R\{v_1, v_2, v_3\}$ *y* $\varepsilon_{\overline{0}} = v_1 + v_2 + v_3$.

(ii) $S_{\overline{1}} = span_R\{f, f^*\}$ *y* $\varepsilon_{\overline{1}} = v_1 + v_2$.

Note que $B(I_{\mathbb{Z}_2}) = \{\varepsilon_{\overline{0}}, \varepsilon_{\overline{1}}\}$ y $N(\varepsilon_{\overline{1}}) = \mathbb{Z}_2$. Luego $(v_1 + v_2)S$ es fuertemente $\mathbb{Z}_2-$graduado.

Ejemplo 3.1.2. *Si S es el anillo del Ejemplo 2.1.1, entonces $B(I_G) = \{\varepsilon_{\overline{0}}, \varepsilon_{\overline{1}}\}$ y $N(\varepsilon_{\overline{1}}) = \mathbb{Z}_2$. Así, por el Lema 3.1.2 se tiene que $\varepsilon_{\overline{1}}S$ es fuertemente $\mathbb{Z}_2-$graduado. De hecho, note que $\varepsilon_{\overline{1}}S = \varepsilon_{\overline{1}}R \oplus \varepsilon_{\overline{1}}T$, y*

$$\varepsilon_1 S = \begin{pmatrix} B & B & B \\ B & B & B \\ B & B & B \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1 R = \begin{pmatrix} B & B & 0 \\ B & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \quad y \quad \varepsilon_1 T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & B \\ B & B & 0 \end{pmatrix}$$

que es justamente la graduación presentada en el Ejemplo 1.2.7.

El siguiente es un ejemplo en el que $N(a)$ es subgrupo propio de G, para cierto minimal a de $B(I_G)^*$.

Ejemplo 3.1.3. *Sea E el siguiente grafo dirigido:*

$$\bullet_{v_1} \xrightarrow{f} \bullet_{v_2} \xleftarrow{g} \bullet_{v_3} \qquad \bullet_{v_4}$$

graduado por $\mathbb{Z}_4$ *como sigue;* $deg(v_1) = deg(v_2) = deg(v_3) = deg(v_4) = \overline{0}$, $deg(f) = deg(g) = \overline{2}$. *Es claro que*

(i) $S_{\overline{0}} = span_R\{v_1, v_2, v_3, v_4, fg^*, gf^*\}$ *y* $\varepsilon_{\overline{0}} = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$.

(ii) $S_{\overline{1}} = \{0\}$ *y* $\varepsilon_{\overline{1}} = 0$.

(iii) $S_{\overline{2}} = span_R\{f, f^*, g^*, g\}$ *y* $\varepsilon_{\overline{2}} = v_1 + v_2 + v_3$.

(iv) $S_{\overline{3}} = \{0\}$ *y* $\varepsilon_{\overline{3}} = 0$.

Note que $B(I_{\mathbb{Z}_4}) = \{\varepsilon_{\overline{0}}, \varepsilon_{\overline{2}}, 0\}$ *y* $\varepsilon_{\overline{2}}$ *es el único elemento minimal de* $B(I_{\mathbb{Z}_4})$. *Además,* $N(\varepsilon_{\overline{2}}) = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ *que es subgrupo de* $\mathbb{Z}_4$. *Así, por el Lema 3.1.1 y el Lema 3.1.2 se tiene que* $(v_1 + v_2 + v_3)S$ *es fuertemente* $\mathbb{Z}_2-$*graduado.*

Sin embargo, también hay ejemplos de anillos epsilon-fuertemente graduados para los que ningún elemento minimal de $B(I_G)$ es $\gamma-$invariante.

Ejemplo 3.1.4. *Considere el siguiente grafo:*

$$\bullet_{v_1} \xleftarrow{f_1} \bullet_{v_2} \xrightarrow{f_2} \bullet_{v_3} \xleftarrow{f_3} \bullet_{v_4} \xleftarrow{f_4} \bullet_{v_5}$$

Considerando $S := L_R(E)$ con la $\mathbb{Z}-$graduación canónica, note que $\varepsilon_n = 0$ para cada $|n| > 2$ y por tanto para cada $a \in B(I_{\mathbb{Z}})^*$ minimal, $N(a)$ no es subgrupo de $\mathbb{Z}$.

Proposición 3.1.2. *Sea S un anillo epsilon-fuertemente graduado con identidad 1_S. Si $\{e_1, \cdots, e_k\}$ es un conjunto de elementos $\gamma-$invariantes y minimales de $B^*(I_G)$, entonces $S = \oplus_{i=1}^k e_i S \oplus e'S$, donde $e' = 1_S - \sum_{j=1}^k e_j$. Además:*

(i) $e_i S$ es fuertemente $N(e_i)-$graduado, para cada $i = 1, 2, \cdots, k$.

(ii) Si $e' = 0$, entonces S_N es fuertemente $N-$graduado, donde $N = \cap_{i=1}^k N(e_i)$.

(iii) Si $e' \neq 0$, entonces $e'S$ es epsilon-fuertemente $G-$graduado.

Demostración. Por la minimalidad de los e_i's, $\{e_1, e_2, \cdots, e_k, e'\}$ es una familia de idempotentes ortogonales. Luego $S = \oplus_{j=1}^k e_j S \oplus e'S$. Además, por el Lema 3.1.2 se sabe que $e_j S$ es fuertemente $N(e_j)-$graduado. Si $e' = 0$, entonces S es fuertemente $N-$graduado por el Lema 3.1.2. Por otro lado, suponga que $e' \neq 0$. Se probará que $e'S = \bigoplus_{g \in G} e'S_g$ es epsilon. Para ello, note que $e' \in Z(S)$ pues por el Lema 3.1.1 $e_i \in Z(S)$ para cada $i = 1, 2, \cdots, k$. En particular, $e'S_g = S_g e'$ para cada $g \in G$.

Finalmente, defina $\varepsilon'_g = e'\varepsilon_g$ para cada $g \in G$. Por el razonamiento anterior, y el hecho de que e' es idempotente, se tiene que

$$\varepsilon'_g = e'\varepsilon_g = e'e'\varepsilon_g = e'\varepsilon_g e' \in e'S_g S_{g^{-1}} e' \subseteq (e'S_g)(e'S_{g^{-1}}) = (e'S)_g (e'S)_{g^{-1}}.$$

Finalmente, si $g \in G$ y $s_g \in S_g$, se concluye que

$$\varepsilon'_g(e's_g) = e'\varepsilon_g s_g = e's_g = e's_g\varepsilon_{g^{-1}} = e's_g e'\varepsilon_{g^{-1}} = (e's_g)\varepsilon'_{g^{-1}}$$

luego $e'S$ es epsilon-fuertemente $G-$graduado. Lo que finaliza la prueba. □

Ejemplo 3.1.5. *Considere el anillo S del Ejemplo 3.1.2. Ya que* $B(I_G) = \{\varepsilon_{\overline{0}}, \varepsilon_{\overline{1}}\}$ *y* $\varepsilon_{\overline{1}}$ *es minimal y* $\gamma-$*invariante, por la Proposción 3.1.2 se tiene que* $S = \varepsilon_{\overline{1}}S \oplus (\varepsilon_{\overline{0}} - \varepsilon_{\overline{1}})S$*, donde* $\varepsilon_{\overline{1}}S$ *es fuertemente* $\mathbb{Z}_2-$*graduado y* $(\varepsilon_{\overline{0}} - \varepsilon_{\overline{1}})S$ *es epsilon-fuertemente* $\mathbb{Z}_2-$*graduado. En el Ejemplo 3.1.2 se estudió la estructura de* $\varepsilon_{\overline{1}}S$*. Además, por la demostración de la Proposición 3.1.2 se sabe que los respectivos epsilon de* $(\varepsilon_{\overline{0}} - \varepsilon_{\overline{1}})S$ *son* $\varepsilon'_{\overline{0}} = (\varepsilon_{\overline{0}} - \varepsilon_{\overline{1}})\varepsilon_{\overline{0}} = \varepsilon_{\overline{0}} - \varepsilon_{\overline{1}}$ *y* $\varepsilon'_{\overline{1}} = (\varepsilon_{\overline{0}} - \varepsilon_{\overline{1}})\varepsilon_{\overline{1}} = 0$*. Luego* $(\varepsilon_{\overline{0}} - \varepsilon_{\overline{1}})S$ *es* $\mathbb{Z}_2-$*graduado trivialmente. Note que una cosa similar ocurre con el Ejemplo 3.1.1*

Observación 3.1.2. *Sean G un grupo finito y S un anillo epsilon-fuertemente* $G-$*graduado, con identidad* 1_S*. Ya que* $B(I_G)$ *es finito, se puede suponer que* $\{e_1, \cdots, e_k\}$ *es el conjunto de todos sus elementos minimales no nulos. Si cada* e_i *es* $\gamma-$*invariante, entonces* $S = \oplus_{i=1}^{k} e_i S \oplus e'S$*, donde* $e' = 1_S - \sum_{j=1}^{k} e_j$ *y se satisfacen las condiciones* $(i)-(iii)$ *de la Proposición 3.1.2. Si* $e' \neq 0$*, denote por* $S^{(1)} := e'S$ *y* $1_{(1)} := e'$*. Por la demostración de la Proposición 3.1.2, se sabe que* $S^{(1)}$ *es epsilon-fuertemente* $G-$*graduado y tiene a* $1_{(1)}$ *como elemento identidad. Además,* $\varepsilon_g^{(1)} := e'\varepsilon_g = 1_{(1)}\varepsilon_g$ *es el respectivo epsilon de* $S^{(1)}$*, para cada* $g \in G$*. Aplicando a* $S^{(1)}$ *el procedimiento que se ha venido usando, considere* $I_G^{(1)} := \{\varepsilon_g^{(1)} : g \in G\}$ *y* $B(I_G^{(1)})$ *el semigrupo Booleano generado por* $I_G^{(1)}$*. En primer lugar, note que* $|B(I_G^{(1)})| < |B(I_G)|$*. En efecto, es claro que la función* $B(I_G) \ni \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_{g_i} \mapsto e' \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_{g_i} \in B(I_G^{(1)})$ *es sobreyectiva, pero no es inyectiva pues para cada* $i = 1, 2, \cdots, k$*, se tiene que* $e'e_i = 0$*.*

Sean $\{e_1^{(1)}, \cdots, e_{k_1}^{(1)}\}$ *todos los elementos minimales no nulos de* $B(I_G^{(1)})$*. Note que estos elementos son* $\gamma^{(1)}-$*invariantes si y solo si son* $\gamma-$*invariantes. En efecto, tome* $r \in \{1, 2, \cdots, k_1\}$

arbitrario y suponga que $e_r^{(1)}$ *es* $\gamma^{(1)}-$*invariante. Como* $e_r^{(1)}e' = e_r^{(1)}$*, para cada* $g \in G$ *se tiene que*

$$\gamma_g(e_r^{(1)}\varepsilon_{g^{-1}}) = \gamma_g(e_r^{(1)}e'\varepsilon_{g^{-1}}) = \gamma_g^{(1)}(e_r^{(1)}e'\varepsilon_{g^{-1}}) = e_r^{(1)}e'\varepsilon_g = e_r^{(1)}\varepsilon_g,$$

luego $e_r^{(1)}$ *es* $\gamma-$*invariante. La igualdad* $\gamma_g(e_r^{(1)}e'\varepsilon_{g^{-1}}) = \gamma_g^{(1)}(e_r^{(1)}e'\varepsilon_{g^{-1}})$ *es válida pues*

$$\gamma_g(e_r^{(1)}e'\varepsilon_{g^{-1}}) = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)}e_r^{(1)}e'v_{g^{-1}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n_g} e'u_g^{(i)}e_r^{(1)}e'v_{g^{-1}}^{(i)}e' = \gamma_g^{(1)}(e_r^{(1)}e'\varepsilon_{g^{-1}}),$$

donde $\varepsilon_g = \sum_{i=1}^{n_g} u_g^{(i)}v_{g^{-1}}^{(i)}$*, para cada* $g \in G$*. Recíprocamente, si* $e_r^{(1)}$ *es* $\gamma-$*invariante, entonces para cada* $g \in G$ *se tiene que*

$$e_r^{(1)}e'\varepsilon_g = e_r^{(1)}\varepsilon_g = \gamma_g(e_r^{(1)}\varepsilon_{g^{-1}}) = \gamma_g(e_r^{(1)}e'\varepsilon_{g^{-1}}) = \gamma_g^{(1)}(e_r^{(1)}e'\varepsilon_{g^{-1}}),$$

luego $e_r^{(1)}$ *es* $\gamma^{(1)}-$*invariante.*

El hecho de que los elementos $e_i^{(1)}$ *son idempotentes ortogonales de* $S^{(1)}$*, permite concluir que*

$$S^{(1)} = \oplus_{i=1}^{k_1} e_i^{(1)}S^{(1)} \oplus 1_{(2)}S^{(1)},$$

donde $1_{(2)} := 1_{(1)} - \sum_{i=1}^{k_1} e_i^{(1)}$*. Además, si los elementos de* $\{e_1^{(1)}, \cdots, e_{k_1}^{(1)}\}$ *son* $\gamma^{(1)}-$*invariantes (o equivalentemente,* $\gamma-$*invariantes), por la Proposición 3.1.2 se sabe que* $e_i^{(1)}S^{(1)}$ *es fuertemente* $N(e_i^{(1)})-$*graduado para cada* $i = 1, 2, \cdots, k_1$*. Ahora, si* $1_{(2)} = 0$*, entonces* S *es fuertemente* $N-$*graduado, donde*

$$N = \cap_{i=1}^{k} N(e_i) \cap_{i=1}^{k_1} N(e_i^{(1)}).$$

Por otra parte, si $1_{(2)} \neq 0$*, entonces* $S^{(2)} := 1_{(2)}S^{(1)}$ *es epsilon-fuertemente graduado por* G*, donde sus respectivos epsilon son*

$$\varepsilon_g^{(2)} := 1_{(2)}\varepsilon_g^{(1)} = 1_{(2)}1_{(1)}\varepsilon_g, \text{ para cada } g \in G.$$

Por el mismo argumento del inicio se verifica $|B(I_G^{(2)})| < |B(I_G^{(1)})| < |B(I_G)|$. *Luego, si se asume que todos los elementos minimales no nulos de* $B(I_G^{(2)})$ *son* $\gamma-$*invariantes, es posible aplicar a* $S^{(2)}$ *el mismo proceso que a* $S^{(1)}$. *Sin embargo, la finitud de* $B(I_G)$ *implica que este procedimiendo se debe detener en una cantidad finita de pasos, en cada uno de las cuales se supone que todos los elementos minimales no nulos del respectivo* $B(I_G^{(j)})$ *son* $\gamma-$*invariantes. En ese sentido, sea* l *el último de esos pasos. Entonces* $S^{(l)} = 1_{(l)}S^{(l-1)}$ *es epsilon-fuertemente* $G-$*graduado, donde los respectivos epsilon son*

$$\varepsilon_g^{(l)} = 1_{(l)}\varepsilon_g^{(l-1)} = 1_{(l)}1_{(l-1)}\varepsilon_g^{(l-2)} = \cdots = 1_{(l)}1_{(l-1)}\cdots 1_{(1)}\varepsilon_g, \text{ para cada } g \in G.$$

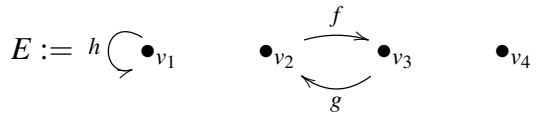
Además, $1_{(l)} = 1_{(l-1)} - \sum_{i=1}^{k_{l-1}} e_i^{(l-1)}$, *siendo* $\{e_1^{(l-1)}, \cdots, e_{k_{l-1}}^{l-1}\}$ *todos los minimales no nulos (que se asumen* $\gamma-$*invariantes) de* $B(I_G^{(l-1)})$. *Por la suposición, a* $S^{(l)}$ *no es posible aplicar el procedimiento en cuestión, es decir,* $\varepsilon_g^{(l)} = 0$ *para cada* $g \neq e$. *Note que*

$$\varepsilon_e^{(l)} = 1_{(l)}1_{(l-1)}\cdots 1_{(1)}\varepsilon_e = 1_{(l)}1_{(l-1)}\cdots 1_{(1)}$$

es la identidad de $S^{(l)}$.

Teorema 3.1.1. *Sea* S *un anillo epsilon-fuertemente* $G-$*graduado, donde* G *es un grupo finito. Según la notación la Observación 3.1.2, si para cada paso* j, $1_{(j)} \neq 0$ *y los elementos minimales no nulos de* $B(I_G^{(j)})$ *son* $\gamma-$*invariantes, entonces* S *se puede escribir como una suma directa de anillos fuertemente graduados, y un anillo epsilon-fuertemente* $G-$*graduado trivialmente.*

Ejemplo 3.1.6. *Considere el siguiente grafo dirigido graduado por* $\mathbb{Z}_8$.

$E :=$ 

donde $deg(f) = deg(g) = \overline{2}$ *y* $deg(h) = \overline{4}$. *Note que*

(i) $S_{\overline{2}} = span_R\{f, g, fgfgf, fgfgfgfgf, \cdots\}$ *y* $\varepsilon_{\overline{2}} = v_2 + v_3$.

(ii) $S_{\overline{4}} = span_R\{h, h^*, fg, g^*f^*, \cdots\}$ *y* $\varepsilon_{\overline{4}} = v_1 + v_2 + v_3$.

(iii) $S_{\overline{6}} = span_R\{g^*, f^*, \cdots\}$ *y* $\varepsilon_{\overline{6}} = v_2 + v_3$.

Por otro lado, es claro que $N(v_2 + v_3) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\} \leq \mathbb{Z}_8$ *y por tanto* $(v_2 + v_3)S$ *es fuertemente* $N(v_2 + v_3)-$*graduado. Además,* $1 - (v_2 + v_3) = v_1 + v_4$, *luego* $S^{(1)} = (v_1 + v_4)S$ *es epsilon-fuertemente graduado por* $\mathbb{Z}_8$. *Hasta el momento se tiene la siguiente descomposición*

$$S = (v_2 + v_3)S \oplus S^{(1)}$$

Por otro lado, $B(I^{(1)}_{\mathbb{Z}_8}) = \{v_1 + v_4, v_1\}$ *y* $N(v_1) = \{\overline{0}, \overline{4}\} \leq \mathbb{Z}_8$. *De donde* $v_1S^{(1)} = v_1S$ *es fuertemente* $N(v_1)-$*graduado y*

$$S^{(1)} = v_1S^{(1)} \oplus S^{(2)}, \text{ donde } S^{(2)} = v_4S^{(1)}.$$

Es claro que $S^{(2)}$ *es graduado trivialmente. Así,*

$$S = (v_2 + v_3)S \oplus v_1S^{(1)} \oplus S^{(2)}.$$

Definición 3.1.2. *Sea S un anillo epsilon-fuertemente* $G-$*graduado. Un elemento* $s \in S_g$ *es llamado epsilon-invertible, si existe* $t \in S_{g^{-1}}$ *tal que* $st = \varepsilon_g$ *y* $ts = \varepsilon_{g^{-1}}$. *Además, se dice que S es epsilon-producto cruzado, si para cada* $g \in G$, *existe al menos un elemento epsilon-invertible en* S_g.

Corolario 3.1.2. *Sea G un grupo finito y S un anillo epsilon-fuertemente graduado por G, que satisface las condiciones del Teorema 3.1.1. Si S es un epsilon producto cruzado, entonces S se puede escribir como una suma directa de anillos que son pruductos cruzados, y un anillo graduado trivialmente.*

Demostración. Sigún la demostración del Teorema 3.1.1, basta mostrar que si $e \in B(I_G)^*$ es un elemento minimal y $\gamma-$invariante, entonces $(eS)_{N(e)} = \bigoplus_{g\in N(e)} eS_g$ es un producto cruzado. En ese sentido, tome $g \in N(e)$. En primer lugar, note que $e\varepsilon_g = e = e\varepsilon_{g^{-1}}$. Por otro lado, tomemos $s \in S_g$ y $t \in S_{g^{-1}}$ tal que $st = \varepsilon_g$ y $ts = \varepsilon_{g^{-1}}$. Como $e \in Z(S)$ por el Lema 3.1.1, entonces

$$(es)(et) = est = e\varepsilon_g = e = e\varepsilon_{g^{-1}} = ets = (et)(es).$$

Esto muestra que $U(eS) \cap eS_g \neq \emptyset$.

□

Referencias Bibliográficas

Abrams, G. and Aranda Pino, G. (2008). The leavitt path algebras of arbitrary graphs. *Houston J. Math*, 2:423–442.

Ambili, A., Hazrat, R., and Sury, B. (2020). *Leavitt Path Algebras and Classical K-Theory*. Springer.

Dade, E. (1980). Group-graded rings and modules. *Mathematische Zeitschrift*, 174:241–262.

Dokuchaev, M. (2019). Recent developments around partial actions. *São Paulo Journal of Mathematical Sciences.*, 13:195–247.

Dokuchaev, M. and Exel, R. (2005). Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Transactions of the american mathematical society*, 357:1931–1952.

Hazrat, R. (2016). *Graded rings and graded Grothendieck groups*. Cambridge University Press.

Jacobson, N. (1989). *Basic Algebra II*. Freeman and Company.

Kuo, J.-M. and Szeto, G. (2014). The structure of a partial galois extension. *Monatsh Math*, 175:565–576.

Kuo, J.-M. and Szeto, G. (2016). The structure of a partial galois extension ii. *J. Algebra Appl*, 15.

Lännström, D. (2019). Chain conditions for epsilon-strongly graded rings with applications toleavitt path algebras. *Algebras and Representation Theory*, 23:1707–1726.

Lännström, D. (2020). Induced quotient gradings of epsilon-strongly graded ring. *J. Algebra Appl*, 19.

Martínez, L., Pinedo, H., and Soler, Y. (2020). On the structure of nearly epsilon and epsilon-strongly graded rings. *Preprint*.

Năstăsescu, C. and Oystaeyen, F. V. (2004). *Methods of Graded Rings*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Nysted, P. (2019). A survey of s-unital and locally unital rings. *Revista integración, temas de matemáticas*, 37:251–260.

Nysted, P. and Öinert, J. (2019). Group gradations on leavitt path algebras. *J. Alg. Apply*, 19.

Nysted, P., Öinert, J., and Pinedo, H. (2018). Epsilon-strongly graded rings, separability and semisimplicity. *J. Alg. Apply*, 514:1–24.

Rotman, J. (2009). *An Introduction to Homological Algebra*. Springer.

Soler, Y. (2019). Anillos y módulos graduados por grupos. Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander, Colombia.