

**APLICACIÓN DE MODELOS ARIMA PARA LA PROYECCIÓN DEL RECAUDO
DEL IMPUESTO DE INDUSTRIA, COMERCIO, AVISOS Y TABLEROS ICA**

ADRIANA MARCELA ROSAS GUALDRÓN



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA
BUCARAMANGA
2016**

**APLICACIÓN DE MODELOS ARIMA PARA LA PROYECCIÓN DEL RECAUDO
DEL IMPUESTO DE INDUSTRIA, COMERCIO, AVISOS Y TABLEROS ICA**

ADRIANA MARCELA ROSAS GUALDRÓN

**Proyecto de trabajo para optar por el grado académico de Especialista en
Estadística**

Director

GIAMPAOLO ORLANDONI

Doctor HC en Estadística



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA

BUCARAMANGA

2016

DEDICATORIA

A Dios

AGRADECIMIENTOS

A Dios por darme el impulso de seguir los latidos del corazón

A mis padres, hermanas, hermano y sobrinas por su apoyo incondicional

A mi director, profesor Giampaolo Orlandoni y al evaluador, profesor Gabriel Yáñez por su colaboración y apoyo

A los docentes que con su conocimiento y experiencia contribuyeron en mi proceso de aprendizaje

A mis amigos Javier, Alejandra, Nixon y Zaira por su acogida

A mi perro Ñoki y a la la UIS por ser una universidad tan mágica al albergar dentro de sus instalaciones, lagos, árboles, pájaros, caimanes, tortugas, peces, gatos y perros con guirnaldas, transmitiendo un sentimiento de felicidad en quien la visita.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN.....	13
1. ANTECEDENTES.....	16
2. MARCO TEÓRICO.....	22
3. FORMULACIÓN DEL MODELO ARIMA.....	23
3.1 PRESENTACIÓN DEL MODELO AR.....	23
3.2 PRESENTACIÓN DEL MODELO MA.....	24
3.3 PRESENTACIÓN DEL MODELO ARMA.....	26
3.4 PRESENTACIÓN DEL MODELO ARIMA.....	26
3.5 PRESENTACIÓN DE MODELOS SARIMA o ARIMA(p,d,q)(P,D,Q) _s	27
4. RESULTADOS.....	29
4.1 ANÁLISIS DESCRIPTIVO.....	29
4.2 IDENTIFICACIÓN DEL MODELO.....	33
4.3 ESTIMACIÓN DEL MODELO ARIMA(p,d,q)(P,D,Q) _s	43
4.4 DIAGNÓSTICO DEL MODELO.....	44
4.5 PRONOSTICO DEL MODELO ESTIMADO ARIMA(0,1,1)(0,1,1) ₆ ...	47
5. CONCLUSIONES.....	50
BIBLIOGRAFÍA.....	51
ANEXOS.....	52

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Diferencia entre Bogotá y otros Municipios.....	18
Tabla 2. Medidas de resumen del recaudo ICA histórico años 2000-2014...	30
Tabla 3. Medidas de resumen del recaudo del impuesto ICA por sectores económicos 2000-2014.....	31
Tabla 4. Participación, variación y contribución anual del recaudo ICA por sectores económicos año 2014.....	32
Tabla 5. Medidas de resumen recaudo ICA por sectores económicos año 2014.....	33
Tabla 6. Criterios de selección del modelo $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$	43
Tabla 7. Errores del modelo $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$	44
Tabla 8. Recaudo ICA real vs predicción para el año 2015.....	49
Tabla 9. Predicciones para el año 2016.....	49

LISTA DE GRÁFICOS

	Pág.
Gráfico 1. Evolución del recaudo del impuesto de industria y comercio año 2000-2014.....	30
Gráfico 2. Diagrama de caja recaudo ICA años 2000-2014.....	31
Gráfico 3. Diagrama de caja del recaudo ICA por sectores económicos año 2014.....	33
Gráfico 4. Función de autocorrelación (FAC) serie original de recado...	34
Gráfico 5. Primera diferencia serie original recaudo ICA.....	35
Gráfico 6. Función de autocorrelación (FAC) serie original diferenciada...	35
Gráfico 7. Primera diferencia sobre el logaritmo del recaudo ICA.....	36
Gráfico 8. Función de autocorrelación (FAC) diferencia sobre el logaritmo del recaudo ICA.....	37
Gráfico 9. Periodograma integrado de la primera diferencia sobre el logaritmo del recaudo.....	37
Gráfico 10. Primera diferencia de la parte estacional serie ICA.....	38
Gráfico 11. Función de autocorrelación (FAC) primera diferencia parte estacional serie ICA.....	39
Gráfico 12. Diferencia estacional aplicada a la primera diferencia del recaudo ICA.....	40
Gráfico 13. Función de autocorrelación (FAC) y función de autocorrelación parcial (FACP) de la diferencia estacional aplicada sobre la primera	

diferencia del recaudo ICA.....	41
Gráfico 14. Residuos modelo $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$	45
Gráfico 15. Distribución normal de los residuos $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$	46
Gráfico 16. Periodograma integrado de los residuos	
Modelo $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$	47
Gráfico 17. Serie observada y estimada modelo $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$	48

RESUMEN

TÍTULO: APLICACIÓN DE MODELOS ARIMA PARA LA PROYECCIÓN DEL RECAUDO DEL IMPUESTO DE INDUSTRIA Y COMERCIO ICA*.

AUTOR: Adriana Marcela Rosas Gualdrón**

PALABRAS CLAVE: Recaudo, impuesto, estacionariedad, estacionalidad, modelo ARIMA (Modelo Autoregresivo Integrado de Media Móvil), proyección.

Con el fin de pronosticar el comportamiento del recaudo del impuesto de industria, comercio, avisos y tableros (ICA), para el año 2016, se plantea la metodología de modelos ARIMA, por su capacidad de predicción a corto plazo. Se definen cuatro fases:

La primera es la identificación, describiendo el comportamiento del recaudo histórico y evaluando la posibilidad de convertir la serie estacionaria tanto en su parte regular como estacional. La segunda fase consiste en la estimación del modelo, teniendo en cuenta el criterio AIC, menores errores y aleatoriedad de los residuos. La tercera es la validación: en esta fase se toma el recaudo del año 2015 cuyas cifras ya han sido causadas y se contrasta la proyección referente a este año con el fin de garantizar la calidad del modelo. La última fase es la predicción, en cuyo caso se pronostica el recaudo año 2016, teniendo en cuenta un intervalo de confianza del 80%.

Cabe anotar que el recaudo está constituido por el valor a pagar más los intereses de mora y se encuentra expresado en miles de millones de pesos. La frecuencia de la serie de tiempo analizada es bimestral y las variaciones estacionales es una característica importante que es tenida en cuenta en la serie de tiempo para predecir el modelo. Adicionalmente, se usa la función de autocorrelación para identificar si el proceso es estacionario y posteriormente se utiliza la función de autocorrelación parcial para detectar el modelo.

Una vez garantizada la estacionariedad del proceso, se establece que el modelo que se ajusta al comportamiento histórico de la serie es un $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$. Para validar si el modelo seleccionado es adecuado, se usa: el test de Box Ljung, la prueba de Shapiro Wilk y el periodograma integrado. Concluyendo que los residuos no están autocorrelacionados, se distribuyen normal y aleatoriamente.

* Trabajo de grado.

** Facultad de Ciencias. Especialización en Estadística. Director: Dr Giampaolo Orlandoni Merli

ABSTRACT

TITLE: TAX COLLECTION FORECASTING ON INDUSTRY, COMMERCE, BOARDS AND ADVERTISING: ARIMA MODELING APPLICATION*.

AUTHOR: Adriana Marcela Rosas Gualdron**

KEYWORDS: Collection, tax, stationarity, seasonality, ARIMA (Autoregressive integrated moving average model), projection.

In order to predict the behavior of tax collection on industry, commerce, boards and advertising (ICA) for the year 2016, the methodology of ARIMA models arises by their ability to predict short term. In order to achieve the goal there are four different phases:

The first is identifying, describing the behavior of the historical collection and assess the possibility of converting the stationary series both seasonal and regular part. The second phase consists of the estimation model, taking into account the criteria AIC, small errors and randomness of residuals. The third is validation: at this stage the 2015 collection whose figures already taken have been caused and as the screening of this year in contrast to ensure the quality of the model. The last phase is the prediction, in which case the collection is expected by 2016, taking a confidence interval of 80%.

It should be noted that collection is made up the value to pay more interest on arrears and is expressed in thousands of pesos. The frequency of the time series analyzed bimonthly seasonal variation is a very important characteristic to be accounted for in a time series forecasting model. Traditionally, the role of autocorrelation function is used to identify if the process is stationary and then the partial autocorrelation function is used to detect the model.

Once, guaranteed the stationarity of the process provides that the historical model behavior of the series is set in an $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$. To validate if the selected model is appropriate, Box Ljung test, Shapiro Wilk test and integrated periodogram are used. Concluding that the residuals are not correlated, normally distributed and randomly.

* Graduation project

** Science Faculty. Mathematics School. Director: Dr Giampaolo Orlandoni Merli

INTRODUCCIÓN

Actualmente el impuesto de industria comercio, avisos y tableros (ICA), es entendido como un único impuesto cuyo nombre es denominado de esta forma, dado que los avisos y tableros son complementarios al impuesto de industria y comercio, el cual se encuentra regulado por el acuerdo 65 de 2002¹, cuya creación tiene origen siempre y cuando las empresas, personas naturales y sociedades de hecho, entre otras, perciban ingresos producto del desarrollo de actividades industriales, comerciales, financieras y de servicios dentro de la jurisdicción de Bogotá.

El recaudo del (ICA), se fundamenta en los principios de legalidad, equidad, progresividad y eficiencia.

La progresividad se refiere al reparto de la carga tributaria según la capacidad contributiva reflejada en la base gravable, asignación monetaria sobre la cual se liquida el impuesto, la cual se encuentra sustentada en los ingresos netos, entendido como todo aquel ingreso percibido en Bogotá descontando devoluciones, rebajas y descuentos, cuya periodicidad de declaración es bimestral, incluyendo la tarifa impositiva según el tipo de sector y actividad económica.

La equidad se aplica cuando a un mismo grupo económico se le otorga tratamiento homogéneo según la tarifa a la que corresponda la actividad económica.

La eficiencia es el resultado de minimizar los costos de cobro al invitar al contribuyente mediante campañas de beneficios tributarios para que se ponga al día en sus obligaciones, aumentando de esta manera el recaudo.

Para entender la estructura del impuesto de industria, comercio, avisos y tableros ICA, se estudia la normativa sustancial y procedimental de los tributos que se encuentran establecidos en el Estatuto Tributario de Bogotá, donde el impuesto en mención hace parte del capítulo II y a través del cual se define: la autorización legal

¹ COLOMBIA. CONCEJO DE BOGOTÁ D.C. Ley 14. Por la cual se adoptan modificaciones al impuesto de industria, comercio, avisos y tableros y se dictan otras disposiciones.

del impuesto; el hecho generador; actividad industrial, comercial y de servicio; periodo gravable; percepción del ingreso; causación del impuesto en las empresas de servicios públicos domiciliarios; actividades no sujetas; sujeto pasivo, activo y base gravable; tratamiento especial del sector financiero; base gravable especial para el sector financiero; base especial para la distribución de derivados del petróleo; tarifas del impuesto; sistema preferencial del impuesto para los contribuyentes del régimen simplificado y exenciones del impuesto². Normatividad que se encuentra estipulada en los artículos que van del 31 al 56 del Estatuto Tributario de Bogotá.

La serie de tiempo a estudiar es el recaudo (ICA) proveniente de los años 2000 a 2015, particionado en dos tramos: 2000 a 2014 y 2015. Describiendo el comportamiento del recaudo en el primer tramo y evaluando la calidad del modelo en el segundo tramo. Finalmente, se proyecta el recaudo del año 2016, aplicando modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles ARIMA con estacionalidad bimestral.

Se usa modelos ARIMA con el propósito de predecir el comportamiento de las series temporales a corto plazo; para su construcción se evalúa 4 fases: identificación, estimación, validación y predicción.

En la fase de identificación, se plantea la inquietud ¿la serie es estacionaria o no?, entendiendo como estacionaria aquella serie que oscila alrededor de la media, lo cual implica que carece de tendencia y no depende del tiempo. Si la serie resulta estacionaria, se procede a identificar el orden del modelo, en caso contrario se transforma aplicando una diferencia, cuyo impacto se refleja en la media. Existen dos instrumentos para detectar la estacionariedad y el orden (p,q) del modelo: la función de autocorrelación (ACF) y la función de autocorrelación parcial (PACF). La primera, mide el coeficiente de autocorrelación entre la variable Y_t y la misma variable en el periodo Y_{t-i} , para un determinado retardo i . La función PACF “se define como coeficiente de correlación entre observaciones separadas por k

² Estatuto Tributario de Bogotá 2009. Capítulo II, Artículos 31 al 56 p 25 - 38

periodos, cuando elimina de la relación entre las dos variables la dependencia lineal debida a los valores intermedios”³

Para un modelo ARIMA(p,d,q) la función de autocorrelación decrece rápidamente hacia cero de forma regular, sinusoidal o alternando valores positivos y negativos. A su vez, la PACF presenta valores distintos de cero dependiendo del orden del modelo autorregresivo o de medias móviles.

En la segunda fase, se estiman los parámetros del modelo, eligiendo los que resultan significativos, con menor AIC.

En la fase de validación, se contrasta el pronóstico del modelo frente al recaudo real del año 2015, graficando los residuos y aplicando la prueba Ljung-Box para probar la aleatoriedad de los residuos.

En la última fase, se selecciona los periodos a predecir y se evalúa la capacidad predictiva. Concluyendo que el modelo SARIMA que mejor describe el comportamiento del recaudo del ICA, se basa en la combinación de los procesos de memoria larga (AR) y memoria corta (MA) tanto en la parte regular como estacional.

³ PEÑA, Daniel. Análisis de series temporales, Alianza Editorial. p 128

1. ANTECEDENTES

El concepto genérico del impuesto ICA se crea a partir de la ley 97 de 1913, la cual confiere autorización a ciertos concejos municipales para impulsar el cobro y destinación de algunos impuestos y contribuciones, contemplando la posibilidad de efectuar el cobro sobre el “Impuesto por colocación de avisos en la vía pública, interior y exterior de coches, de tranvía, estaciones de ferrocarriles, cafés y cualquier establecimiento público, considerando también el expendio de licor destilado”⁴

Con la ley 56 de 1981, se cobra el impuesto de industria y comercio, avisos y tableros para las actividades desarrolladas por el sector comercial y de servicios, cuyo hecho generador son los ingresos brutos aplicando algunas deducciones, estableciéndose un tratamiento especial para aquellas actividades pertenecientes al sector industrial relacionadas con la generación y transmisión de energía eléctrica. Considerando así, que el sujeto pasivo (en quien recae el cobro del impuesto) eran los propietarios de obras de generación de energía, cuyo recaudo pertenece al municipio donde se establezca o desarrolle la actividad; el hecho generador estipulado mediante el artículo 7 de la ley de 1981, establece que es el kilovatio gastado en la generación de energía y no los ingresos brutos provenientes del desarrollo de la actividad, aplicando una tarifa de cinco pesos anual por kilovatio, cifra ajustada a través del índice de precios al consumidor publicado por el DANE. El sujeto activo (quien recibe el recaudo del impuesto), es el municipio donde funciona la planta de generación de energía y si la obra afecta más de una localidad, el recaudo sería distribuido por municipios.

Luego se reorganiza y unifica el impuesto mediante la ley 14 de 1983, estableciendo que el hecho generador de las centrales generadoras de energía se determinaban a partir del promedio de los ingresos brutos obtenidos del año anterior, evidenciando

⁴COLOMBIA. CONGRESO DE LA REPÚBLICA. Ley 97. Por la cual se otorga autorizaciones especiales a ciertos concejos Municipales.

la actividad efectiva de la planta generadora en el transcurso del año, más no por kilovatio.

Esta ley también generó un cambio en el cobro del impuesto dado que ya no dependía única y exclusivamente de la existencia de un establecimiento, fábrica o lugar físico donde se llevara a cabo el desarrollo de la actividad económica, sino que también migro a la idea de poder gravar el hecho intangible, es decir la realización de la actividad. Lo anterior, aplico para el sector industrial, comercial y servicios cuyo promedio de ingresos brutos, excluyendo ingresos percibidos por concepto de exportaciones y venta de bienes raíces o activos fijos, multiplicado por una tarifa comprendida entre un rango de 2 y 7 por mil mensual para actividades pertenecientes al sector industrial y de 2 al 10 por mil mensual para actividades del sector comercial y de servicios, según lo establecido a discreción por los concejos municipales, según el artículo 33 de la ley 14 de 1983. Teniendo en cuenta que los concejos poseían la facultad de establecer tarifas y conceder exenciones y tratamientos especiales para gestionar los tributos de acuerdo a las necesidades previstas en la jurisdicción.

En la ciudad de Bogotá, la tarifa por mil se establece según la agrupación de la actividad (industrial, comercial, financiera o servicios) determinada mediante el código de Clasificación Internacional Industrial Uniforme CIIU a declarar. Este permite asociar un sector a las actividades económicas que se desarrollan.

En la tabla 1, se establece las características del ICA en Bogotá en comparación con los demás municipios.

Tabla 1. Diferencia entre Bogotá y otros Municipios

Gravamen	Jurisdicción	Responsables Impuesto	Base Gravable	Tarifas	Criterios Tarifas
Industria y Comercio	Bogotá	la persona natural o jurídica o sociedad de hecho que realice actividades industriales, comerciales y/o de servicios en la respectiva jurisdicción.	Ingresos netos del contribuyente	Rango autorizado por ley: Entre 2 y 30 por mil (Tarifa única)	No especificados
	Municipios diferentes a Bogotá	la persona natural o jurídica o sociedad de hecho que realice actividades industriales, comerciales y/o de servicios en la respectiva jurisdicción.	Promedio mensual de ingresos brutos del contribuyente.	Rangos autorizados por ley: Entre 2 y 7 por mil mensual para actividades industriales : 2 a 10 por mil para actividades comerciales y de servicios.	Por actividades: Industrial, comercial y servicios.

Fuente: Estatutos Tributarios Municipales.

La falencia en la aplicación de esta ley, que fue el pilar fundamental para trazar el marco legal del impuesto, consistió en que no se estableció claramente el lugar en donde se generaba los ingresos; surgiendo inconvenientes a la hora de determinar la municipalidad u origen de los ingresos producto del desarrollo de la actividad económica.

Es así como a través del decreto 1421 de 1993 se dicta un régimen especial para el Distrito (Bogotá), gozando de autonomía para ejercer el cobro del impuesto, donde el Consejo de Bogotá queda facultado a través de la ley para estipular la periodicidad de causación que pasa de ser anual a bimestral de los contribuyentes que cumplieran con las condiciones para pertenecer al régimen común y así mismo se establece que la base gravable se crea a partir de los ingresos netos percibidos en el periodo gravable (bimestral).

De manera que aquel contribuyente que percibía ingresos provenientes de varios municipios o del extranjero, a la hora de liquidar el impuesto ya no era sobre el total de los ingresos obtenidos por desarrollo de la actividad económica, sino que el cobro se ejercía sobre la porción que se generaba únicamente en Bogotá deduciendo: devoluciones, rebajas, descuentos e ingresos recibidos a través de actividades no sujetas, aplicando una tarifa según actividad económica. Adicionalmente, el

impuesto de avisos y tableros se establece complementario, es decir se incorpora al impuesto de industria y comercio, así el hecho generador consiste en la colocación de vallas y avisos puestos en espacio público y el sujeto pasivo recae en quien realiza la propaganda.

El problema actual de la administración tributaria consiste en determinar si lo que el contribuyente declaró es realmente lo que obtuvo como ingresos en Bogotá, o si por el contrario se descuenta más de la cuenta argumentando que sus ingresos netos se generaron en otros municipios.

Para aminorar acciones que se puedan encaminar hacia lo anteriormente expuesto, los contribuyentes sujetos al impuesto de industria y comercio están obligados a llevar contabilidad cuyos balances y estado de resultados deben estar certificados por un contador y revisor fiscal, de manera que si la administración fiscaliza aleatoriamente a cualquier contribuyente, sus cifras deben coincidir exactamente con lo reportado en la declaración privada para evitar sanciones y en el peor de los casos cárcel por falsedad en documento.

Mediante la ley 1430 de 2010, se abre la posibilidad de ampliar a los sujetos pasivos, teniendo en cuenta no solo a personas naturales (el dueño asume todas las responsabilidades financieras en las que pueda incurrir la empresa para su funcionamiento, cubriendo las deudas financieras y tributarias con su patrimonio), jurídicas (es la empresa y no la persona la que asume las obligaciones financieras y tributarias, por tanto ante cualquier mora u incumplimiento responde con los bienes en propiedad planta y equipo y capital que posea la empresa) o sociedades de hecho (las obligaciones pueden recaer sobre alguno de los socios) que realizan actividades económicas sujetas al impuesto sino también considera aquellos sujetos que llevan a cabo el hecho gravado a través de patrimonios autónomos, definido por la superintendencia financiera como los bienes que administra una entidad fiduciaria, recayendo la obligación en los fideicomitentes o beneficiarios, que son los que le entregan una parte de su patrimonio para que el Fiduciario lo administre.

Con la ley 1559 de 2012 se define la base gravable para el impuesto de industria y comercio de los distribuidores de productos gravados con el impuesto al consumo como los ingresos brutos provenientes de la venta de los productos. La reforma tributaria que impulso la ley 1607 de 2012 exoneró los aportes relacionados a SENA, ICBF y SALUD que se efectuaban sobre la nómina y que fue reemplazado por el impuesto de renta para la equidad CREE.

En Argentina, George McCandless, Ma Florencia Gabrielli y Tomás E Murphy realizaron un estudio para el área de economía y finanzas del Banco Central de Argentina, cuyo trabajo se basó en los modelos econométricos de predicción de corto y mediano plazo, evaluando las variables: PIB, importaciones e inversión. En la primera sesión del estudio se describe las características generales de las variables y en la segunda parte contrastan la formulación del modelo ARIMA y VAR (Modelos de vectores autoregresivos). Con el propósito de determinar el modelo más adecuado para realizar predicciones, solo se describirá los resultados a los que llegaron los autores en la parte de modelos ARIMA.

En la primera parte, graficaron el comportamiento del PIB, importaciones e inversión de los años comprendidos entre 1980 y 2000, reflejándose una tendencia similar en las 3 variables, producto del proceso hiperinflacionario producido por asuntos políticos, los cuales afectaron el comportamiento de los consumidores, revertiéndose la tendencia a partir del año 1990, al producirse estabilización monetaria con una nueva apertura que ejerce influencia en las importaciones e inversión, y así mismo sobre el PIB⁵. Los autores, deciden tomar las series a partir de los años 1990 a 2000, ya que el propósito es analizar las series sin incluir factores atípicos que puedan distorsionar la proyección.

Así mismo, se centran en garantizar la estacionariedad de las series mediante el estadístico de Dickey – Fuller Aumentado (ADF), útil para evaluar la presencia de raíces unitarias, teniendo en cuenta como hipótesis nula: la serie es no estacionaria.

⁵ MCCANDLESS, George. GABRIELLI, Ma Florencia y MURPHY, Tomás E. Modelos econométricos de predicción macroeconómica en Argentina (online). Documento de trabajo No 19. Junio 2001.

“En términos formales se tiene que $Y_t = \rho Y_{t-1} + \mu_t$, donde μ_t es ruido blanco. Luego, $H_0: \rho = 1$ (problema de raíces unitarias, serie no estacionaria) y $ADF = \frac{\hat{\rho}}{SE(\hat{\rho})}$. En el caso de este estadístico, la H_0 plantea el caso de no estacionariedad. Por lo tanto, si en valor absoluto el valor crítico es mayor al valor del módulo del estadístico la regla de decisión dice que no se rechaza la H_0 y, por lo tanto, la serie en cuestión resulta no estacionaria. Si ocurre lo contrario (rechazo de H_0), sin embargo, hay dos opciones posibles: la primera es que la serie sea estacionaria o integrada de orden cero $I(0)$ que se da si el estadístico ADF tiene signo negativo, la segunda opción surge cuando el ADF es positivo indicando que la serie en cuestión es no estacionaria, integrada de orden $d > 1$ o de orden superior a uno”⁶ Una vez garantizada la estacionariedad, los autores prueban diferentes modelos y eligen el modelo teniendo en cuenta los resultados del anexo A.

⁶ MCCANDLESS, George. GABRIELLI, Ma Florencia y MURPHY, Tomás E. Modelos econométricos de predicción macroeconómica en Argentina (online). Documento de trabajo No 19. Junio 2001.

2. MARCO TEÓRICO

Los modelos ARIMA se originan de la metodología implementada por Box – Jenkins, donde los procesos de las series de tiempo deben ser estacionarios tanto en media como en varianza, sin embargo muchas series económicas no son estacionarias (la serie no oscila alrededor de un valor constante), dado que en algunos casos poseen tendencia, estacionalidad y ciclos.

Cuando el modelo es estacional autoregresivo integrado de media móvil se conoce con la expresión: SARIMA o $ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$ donde:

- El ARIMA (p,d,q) modela la parte regular (no estacional), que es la dependencia detectada en observaciones consecutivas.
- El ARIMA (P,D,Q) modela la parte estacional que se genera cuando existe un patrón de comportamiento que se repite en un determinado periodo de tiempo s, el cual puede ser estacionario o no estacionario. Donde, P es el orden estacional del proceso AR, D es el proceso integrado estacional y Q corresponde al proceso MA estacional.

Tanto la parte regular como estacional d y D reflejan las diferencias que se deben aplicar para transformar los procesos ARMA en estacionarios.

Para determinar si proceso es estacionario o no, existe el gráfico de la función de autocorrelación (ACF), el cual establece si la serie en el momento t esta correlacionada con ella misma en el momento t-1 para un determinado retardo.

Una vez garantizada la estacionariedad del proceso se aplica la metodología de modelos ARIMA.

3. FORMULACIÓN DEL MODELO ARIMA

Mediante las ecuaciones formuladas a continuación se ilustra cada uno de los procesos del modelo ARIMA.

3.1 PRESENTACIÓN DEL MODELO AR

$$\widehat{Y}_t = \phi \widehat{Y}_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

La ecuación (1) refleja el proceso autorregresivo más conocido como AR(1).

La varianza del proceso está dada por:

$$\sigma_t^2 = \frac{\sigma^2}{(1-\phi^2)} \quad (2)$$

El proceso es estacionario si cumple las siguientes condiciones:

1. “Las distribuciones marginales de todas las variables son idénticas.
2. Las distribuciones finito – dimensionales de cualquier conjunto de variables sólo dependen de los retardos entre ellas.

La primera condición establece que la media y la varianza de todas las variables son las mismas. La segunda condición impone que la dependencia entre las variables sólo depende de sus retardos”⁷.

Una serie temporal Y_t estacionaria sigue un proceso autorregresivo de orden p si:

$$\widehat{Y}_t = \phi_1 \widehat{Y}_{t-1} + \dots + \phi_p \widehat{Y}_{t-p} + \varepsilon_t \quad (3)$$

Utilizando la notación de operadores

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) \widehat{Y}_t = \varepsilon_t \quad (4)$$

Donde: $B(Y_t) = Y_{t-1}$

⁷ PEÑA, Daniel. Análisis de series temporales, Alianza Editorial. p 87

Y llamando $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ al polinomio de grado p en el operador del retardo, cuyo primer término es la unidad, se tiene:

$$\phi_p(B)\hat{Y}_t = \varepsilon_t \quad (5)$$

Que es la expresión general de un proceso autorregresivo. Llamaremos a la ecuación característica del proceso

$$\phi_p(B) = 0 \quad (6)$$

Considerada como función de B. Esta ecuación tendrá p raíces $G_1^{-1}, \dots, G_p^{-1}$ en general distintas y se puede escribir

$$\phi_p(B) = \prod_{i=1}^p (1 - G_i B) \quad (7)$$

De manera que los coeficientes G_i son los factores de la ecuación característica. Se demuestra que el proceso es estacionario si $|G_i| < 1$ para todo i⁸

Los procesos autorregresivos consisten en procesos estacionarios lineales caracterizados por “tener coeficientes de autocorrelación distintos de 0 y que decrecen con el retardo. Estos procesos tienen memoria relativamente larga, ya que el valor actual está correlacionado con todos los anteriores, aunque con coeficientes decrecientes”⁹.

3.2 PRESENTACIÓN DEL MODELO MA

Se define el proceso de media móvil de orden MA(1) en el que se supone que $|\theta| < 1$ indicando “el proceso es invertible y tiene la propiedad de que el efecto de los valores pasados decrece con el tiempo”¹⁰

$$\hat{Y}_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} \quad (8)$$

Donde $\hat{Y}_t = Y_t - \mu$

8 Ibid. p 123

9 Ibid. p 142

10 Ibid. p 143

μ : Media del proceso

ε_t : Proceso de ruido blanco definido por:

1. $E[Y_t] = 0, t = 1, 2, \dots$
2. $Var(Y_t) = \sigma^2, t = 1, 2, \dots$
3. $Cov(Y_t, Y_{t-k}) = 0, k = \pm 1, \pm 2, \dots$

La primera condición establece que la esperanza es siempre constante e igual a cero, la segunda condición que la varianza es constante y la tercera que las variables del proceso están incorrelacionadas para todos los retardos. Por ejemplo si se lanza una moneda en instantes $t=1, 2, \dots$ y se define $Y_t = -1$ si se obtiene cara y $Y_t = +1$ si se obtiene cruz, se obtiene un proceso de ruido blanco: la esperanza es 0, la varianza es constante y las covarianzas son nulas ¹¹

$$\hat{Y}_t = (1 - \theta B)\varepsilon_t \quad (9)$$

La varianza del proceso está dada por:

$$\sigma_t^2 = \sigma^2(1 + \theta^2) \quad (10)$$

Un proceso MA de orden q general se expresa de la siguiente manera:

$$\hat{Y}_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad (11)$$

$$\hat{Y}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)\varepsilon_t \quad (12)$$

El proceso de media móvil “es la suma de dos procesos estacionarios ε_t y B retardos, por tanto siempre será estacionario, para cualquier valor del parámetro, a diferencia de los procesos AR”¹². Este proceso es de memoria corta dado a que el

¹¹ Ibíd. p 90

¹² Ibíd. p 143

valor actual de la serie depende de su último valor, en otras palabras, el efecto de los valores pasados decrecen con el tiempo.

3.3 PRESENTACIÓN DEL MODELO ARMA

El modelo ARMA es un modelo formado por dos partes, una parte autorregresiva (AR) y otra de media móvil (MA), este proceso es estacionario de principio y no requiere diferencias. Se conoce con el nombre de modelo ARMA(p,q), donde p es el orden de la parte autorregresiva y q es el orden de la parte de media móvil. El proceso ARMA(1,1) se describe:

$$\widehat{Y}_t = \phi_1 \widehat{Y}_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (13)$$

El proceso ARMA(p,q) se expresa en forma general como:

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) \widehat{Y}_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t \quad (14)$$

3.4 PRESENTACIÓN DEL MODELO ARIMA

Cuando el proceso de la serie de tiempo no es estacionario, el modelo ARIMA(p,d,q) es útil dado que la (d) refleja la parte integrada, cuya función es volver la serie estacionaria mediante la aplicación de diferencias. El proceso del modelo ARIMA(1,1,1) se define como:

$$(1 - \phi_1 \widehat{Y}_{t-1})(1 - \widehat{Y}_{t-1})^1 \widehat{Y}_t = c + (1 - \theta_1 \varepsilon_{t-1}) \varepsilon_t \quad (15)$$

La forma general el proceso del modelo ARIMA(p,d,q) se expresa:

$$(1 - \phi_1 \widehat{Y}_{t-1} - \dots - \phi_p \widehat{Y}_{t-p})(1 - \widehat{Y}_{t-p})^d \widehat{Y}_t = c + (1 - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}) \varepsilon_t \quad (16)$$

$$\phi(B)(1 - B)^d Y_t = c + \theta(B) \varepsilon_t \quad (17)$$

Donde:

Y_t : Variable de estudio, para el caso en asunto es el recaudo del impuesto de industria, comercio, avisos y tableros.

c : Constante

ε_t : Residuo o término de error con distribución normal de media 0 y varianza constante σ^2

$(1 - B)^d$: Diferencia que se le aplica a la variable original para volverla estacionaria.

$\phi(B)$: Polinomio de orden p

$\theta(B)$: Polinomio de orden q

Los polinomios dependen del retardo B

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d \widehat{Y}_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t \quad (18)$$

3.5 PRESENTACIÓN DE MODELOS SARIMA O ARIMA(P,D,Q)(P, D, Q)_s

Si la serie de tiempo es estacional, no solo se debe modelar la parte regular (o no estacional) sino también la parte estacional. Este modelo surge del producto entre ARIMA(p,d,q)*SARIMA(P,D,Q). También se conoce con el término ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s donde:

En general el modelo ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s se expresa de la siguiente forma:

$$(1 - \phi_1 \widehat{Y}_{t-1} - \dots - \phi_p \widehat{Y}_{t-p})(1 - \phi_1 \widehat{Y}_{t-1} - \dots - \phi_p \widehat{Y}_{t-p})(1 - \widehat{Y}_{t-p})^d (1 - \widehat{Y}_{t-p})^D \widehat{Y}_t = c + (1 - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q})(1 - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}) \varepsilon_t \quad (19)$$

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(1 - B^p)^d (1 - B^p)^D \widehat{Y}_t = c + (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)(1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t \quad (20)$$

Donde:

Y_t : Variable de estudio, para el caso en asunto es el recaudo del impuesto de industria, comercio, avisos y tableros.

c : Constante

ε_t : Residuo o término de error con distribución normal de media 0 y varianza constante σ^2

$(1 - B)^d$: Diferencia que se le aplica a la parte regular para volverla estacionaria.

$\phi(B)$: Polinomio de orden p

$\theta(B)$: Polinomio de orden q

$(1 - B^P)^D$: Diferencia que se le aplica a la parte estacional para volverla estacionaria.

$\phi_P B^P$: Polinomio de orden P estacional

$\theta_Q B^Q$: Polinomio de orden Q estacional

4. RESULTADOS

4.1 ANÁLISIS DESCRIPTIVO

La serie de tiempo corresponde al recaudo (total a pagar) del impuesto de Industria, Comercio, Avisos y Tableros ICA, comprendido entre los años gravables 2000 a 2015, con periodicidad bimestral, expresado en miles de millones de pesos. Se proyecta el año 2015 con el objetivo de contrastar la calidad del modelo, comparando los resultados arrojados frente a las cifras reales para evidenciar que tan ajustada sería la proyección del año 2016.

Descripción del recaudo ICA histórico años 2000 -2014

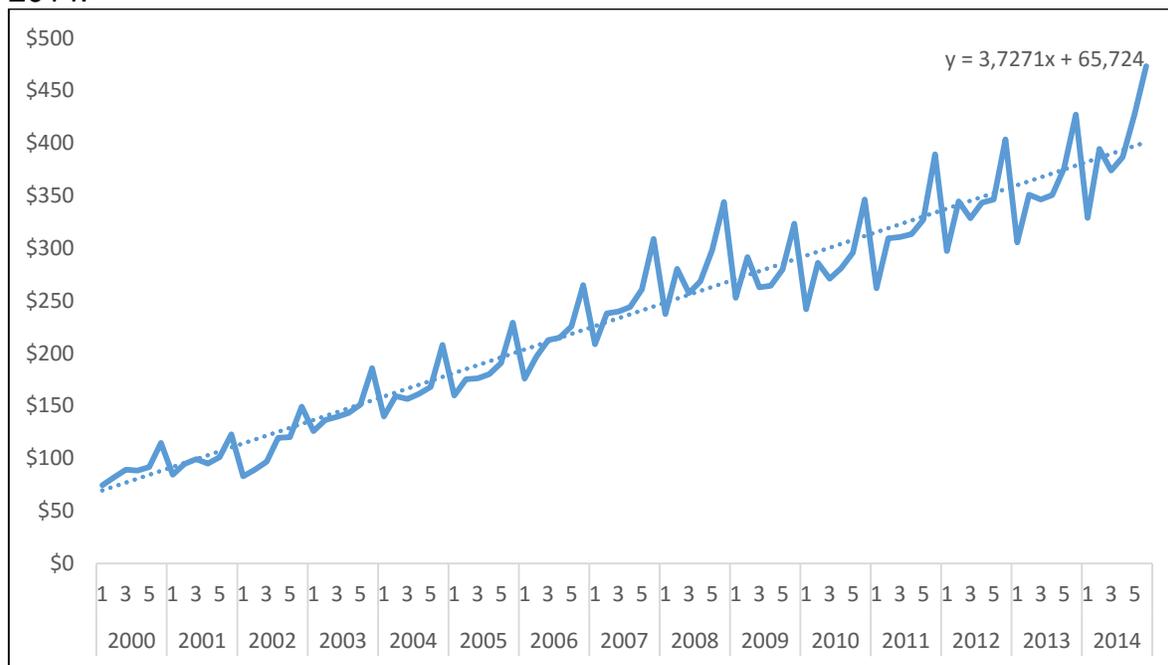
A través del gráfico 1, se observa el comportamiento de la serie del recaudo obtenido en los años 2000 a 2014, reflejando la presencia de tendencia (creciente) y estacionalidad con picos marcados en los sextos bimestres de cada año, explicados principalmente por alguna de las siguientes causas:

Aumento del total de ingresos obtenidos en el Distrito Capital, relacionado con el nivel de ventas registradas en establecimientos de comercio, empresas constituidas dedicadas actividades financieras, industriales, comerciales y/o servicios cuya facturación se produzca en la ciudad de Bogotá.

Disminución de devoluciones, rebajas y descuentos.

Frente al recaudo de los primeros bimestres de cada año, se observa una disminución comparada con la cifra del bimestre inmediatamente anterior, situación que obedece a la estabilización del recaudo frente al comportamiento atípico que se presenta en los sextos bimestres (Noviembre – Diciembre), lo cual se explica por el dinamismo económico registrado en este periodo de tiempo.

Gráfico 1. Evolución del recaudo del impuesto de industria y comercio año 2000-2014.



Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

A través de la tabla 2, es posible visualizar que el valor del recaudo ICA mínimo registrado fue \$75 mil millones de pesos, mientras que el máximo fue \$473 mil millones de pesos. La media y la mediana se asemejan con un valor promedio de \$235 mil millones de pesos. Adicionalmente, el 25% del total del recaudo está por encima de \$149 mil millones de pesos y el 75% se encuentra por debajo de \$310 mil millones de pesos.

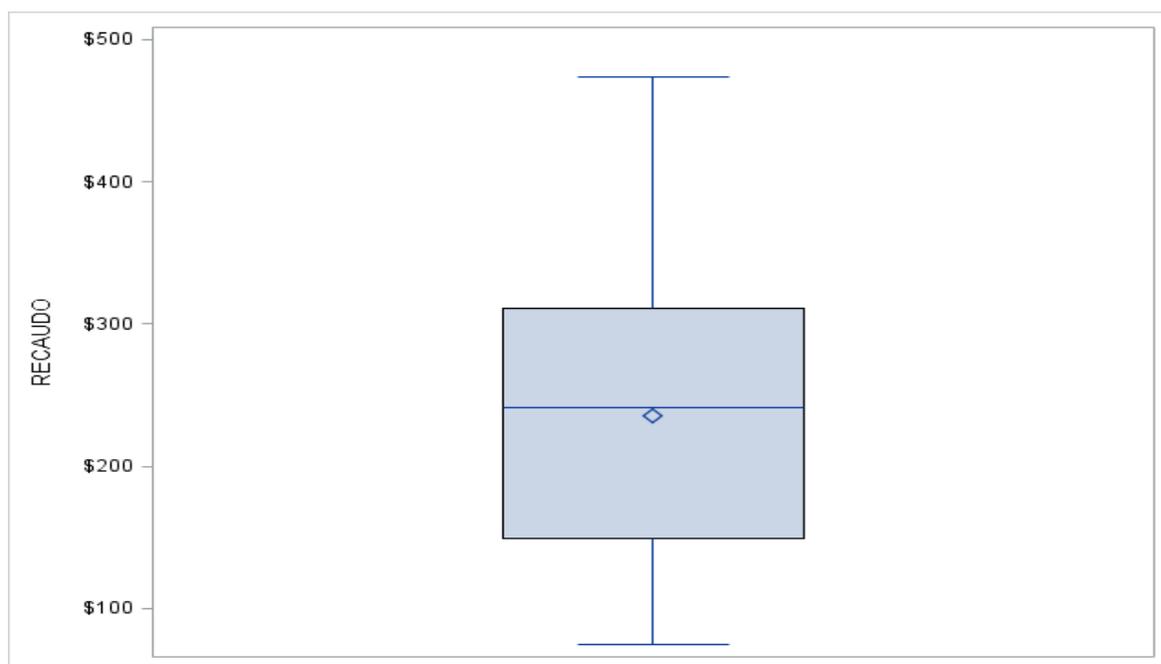
Tabla 2. Medidas de resumen del recaudo ICA histórico años 2000-2014

RECAUDO ICA					
Mínimo	Cuartil inferior	Media	Mediana	Cuartil superior	Máximo
\$75	\$149	\$235	\$241	\$310	\$473

Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016. Cifras expresadas en miles de millones de pesos.

Con el propósito de visualizar los valores del recaudo histórico ICA descritos en la tabla 2, se realiza un diagrama de caja (gráfico 2).

Gráfico 2. Diagrama de caja recaudo ICA años 2000-2014



Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

El valor promedio del recaudo para el sector comercial (tabla 3) es \$75 mil millones de pesos, registrando un valor histórico mínimo de \$18 millones de pesos y un máximo de \$168 mil millones de pesos. Seguido por el sector servicios, con un valor promedio de recaudo de \$72 mil millones de pesos, con máximo de \$162 mil millones de pesos y un mínimo igual al del sector comercial. Es sorprendente que el sector financiero haya aportado el mínimo valor del recaudo registrado históricamente (\$11 mil millones), lo cual obedece a que este sector se le otorga un tratamiento especial a la hora de declarar y pagar el impuesto.

Tabla 3. Medidas de resumen del recaudo del impuesto ICA por sectores económicos 2000-2014

RECAUDO ICA			
SECTOR	Media	Mínimo	Máximo
COMERCIAL	\$75	\$18	\$168
FINANCIERO	\$35	\$11	\$81
INDUSTRIAL	\$39	\$13	\$75
SERVICIOS	\$72	\$18	\$162

Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016. Cifras expresadas en miles de millones de pesos.

Descripción del recaudo ICA año 2014

La tabla 4 describe la participación, variación y contribución del recaudo por sector económico. La proporción o participación corresponde al cociente entre el recaudo desagregado por sectores económicos y el total del recaudo. La variación se define como el cociente entre el recaudo ICA por sector, percibido en el año 2014 frente al recaudo del año 2013 menos 1 por 100, el cual refleja el crecimiento del recaudo al pasar de un año a otro. Mientras que la contribución, es el producto entre la participación y la variación, útil para detectar el sector económico que contribuyó en mayor medida en términos de recaudo.

El sector comercial fue el que presentó mayor participación y contribución con 34.5% y 3,6% respectivamente, su crecimiento fue 10,5% frente al año 2013. El segundo sector de mayor contribución fue el industrial con 2.8%, participando con 14,8% y creciendo 19,1% frente al año anterior. A pesar de que el sector servicios presentó una participación de 32,2%, fue el que menos contribuyó con 1.5%.

Tabla 4. Participación, variación y contribución anual del recaudo ICA por sectores económicos año 2014

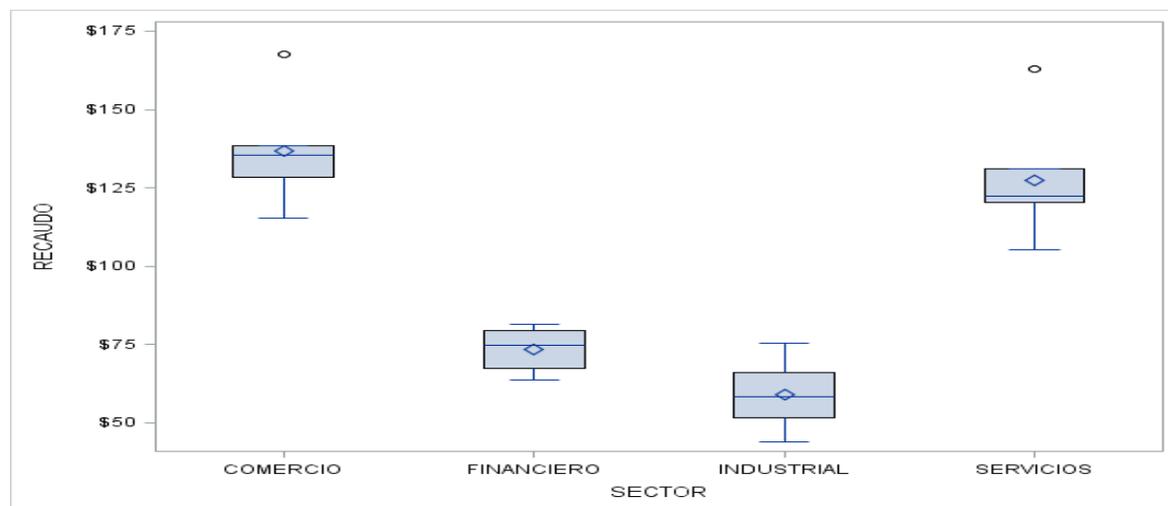
SECTOR	Participación	Variación	Contribución
COMERCIO	34.5%	10.5%	3.6%
FINANCIERO	18.5%	14.5%	2.7%
INDUSTRIAL	14.8%	19.1%	2.8%
SERVICIOS	32.2%	4.8%	1.5%

Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

En el gráfico 3, es posible identificar que la media y la mediana del recaudo ICA para el año 2014, se asemeja en todos los sectores excepto en servicios, dado que existe un valor de recaudo atípico de \$163 mil millones de pesos (tabla 5), haciendo que la media este influenciada por tal valor. Tanto el sector financiero como el industrial son simétricos, debido a que poseen mayor homogeneidad en el recaudo

del impuesto ICA. Por otro lado, existe asimetría es inversa entre el sector comercial (asimétrica a la izquierda) y servicios (asimétrica a la derecha). Aparentemente, el recaudo ICA es relativamente más disperso en el sector industrial que en los otros sectores, el 25% está por encima de \$52 mil millones de pesos, mientras que el 75% se encuentra por debajo de \$66 mil millones de pesos, según la tabla 5.

Gráfico 3. Diagrama de caja del recaudo ICA por sectores económicos año 2014



Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016.

Tabla 5 Medidas de resumen recaudo ICA por sectores económicos año 2014

RECAUDO ICA						
SECTOR	Media	Mínimo	Máximo	Cuartil inferior	Mediana	Cuartil superior
COMERCIAL	\$136	\$115	\$167	\$128	\$135	\$138
FINANCIERO	\$73	\$63	\$81	\$67	\$74	\$79
INDUSTRIAL	\$58	\$44	\$75	\$52	\$58	\$66
SERVICIOS	\$127	\$105	\$163	\$120	\$122	\$131

Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016. Cifras expresadas en miles de millones de pesos.

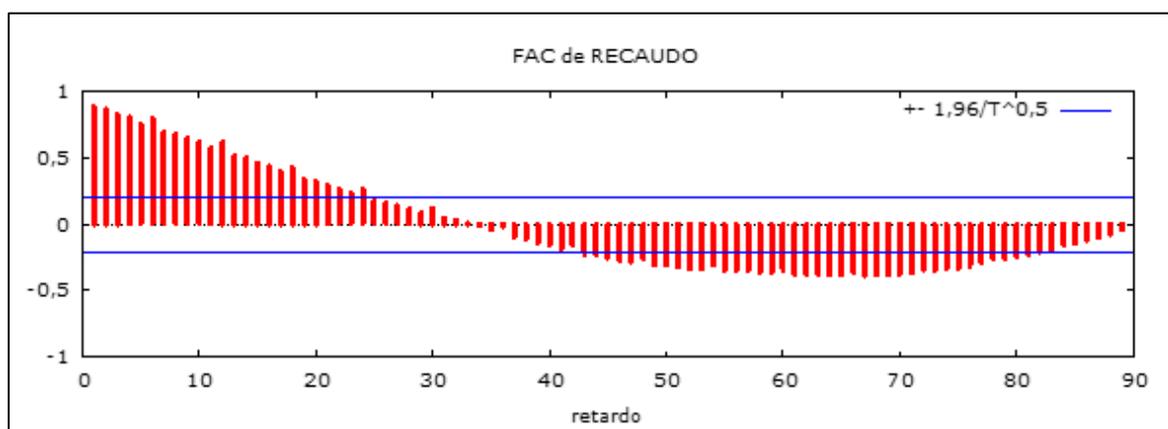
4.2 IDENTIFICACIÓN DEL MODELO

Para identificar el proceso del modelo ARIMA, se debe garantizar la estacionariedad de la serie tanto en la media como en la varianza. En otras palabras “los fenómenos dinámicos observables mediante las series temporales pueden clasificarse en dos clases: los primeros son los que toman valores estables en el tiempo alrededor de

un nivel constante, sin mostrar una tendencia a crecer o decrecer a largo plazo, estos procesos se denominan estacionarios y una segunda clase de procesos son los no estacionarios, que son aquellos que pueden mostrar tendencia, estacionalidad y otros efectos evolutivos del tiempo”¹³

Como instrumento de identificación, se utiliza la función de autocorrelación (FAC), ilustrada visualmente a través del correlograma del gráfico 4, cuyo comportamiento es típico al de una serie no estacionaria, dado que los valores de la función no se estabilizan dentro de las líneas azules.

Gráfico 4 Función de autocorrelación (FAC) serie original de recaudo



Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

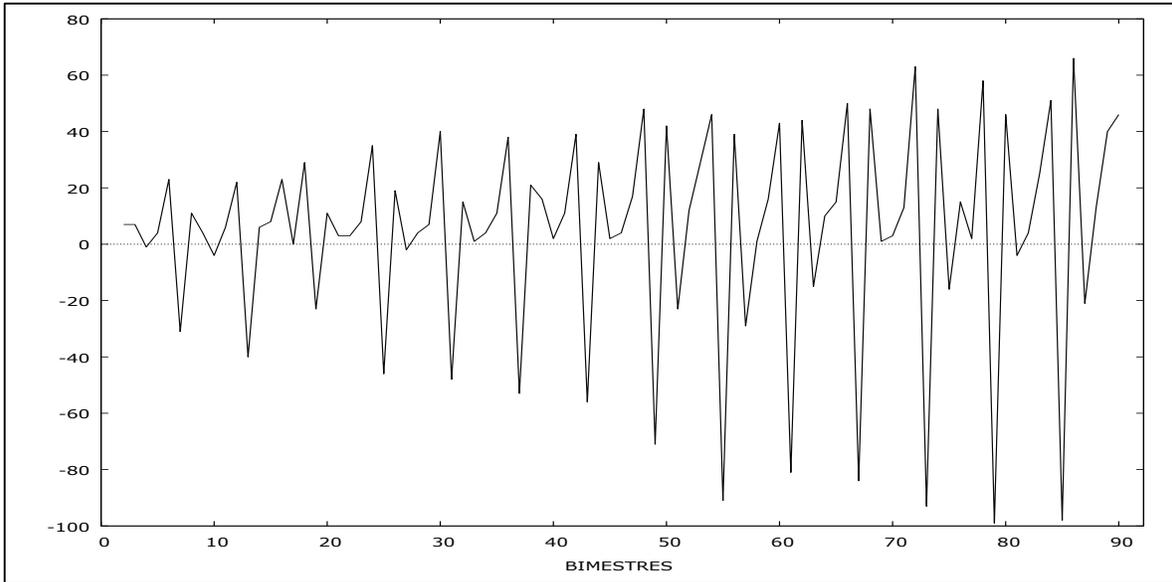
Con el objetivo de eliminar la tendencia reflejada en la serie original (recaudo ICA), se aplica primera diferencia, gráfico 5, observando que la serie oscila alrededor de un valor constante, por lo que se concluye que la serie parece tener una media constante a lo largo del tiempo. Sin embargo, la varianza no es constante dado que su amplitud cada vez es mayor a medida que aumenta la cantidad de bimestres. Lo anterior se denomina paseo aleatorio “tiene media constante pero la varianza no es constante en el tiempo”¹⁴.

¹³ Ibíd. p 78

¹⁴ Ibíd. p 84

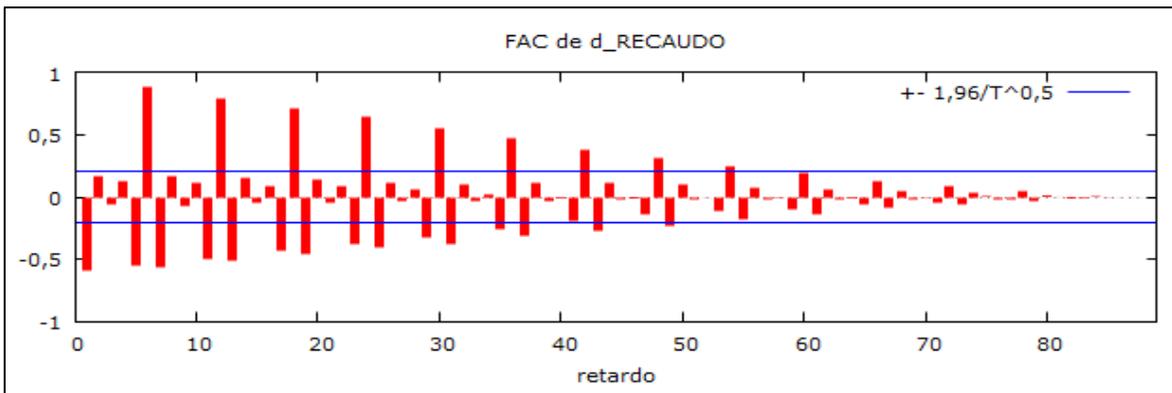
Mediante la función de autocorrelación (FAC), gráfico 6, es posible identificar que la serie diferenciada continua siendo no estacionaria.

Gráfico 5. Primera diferencia serie original recaudo ICA



Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

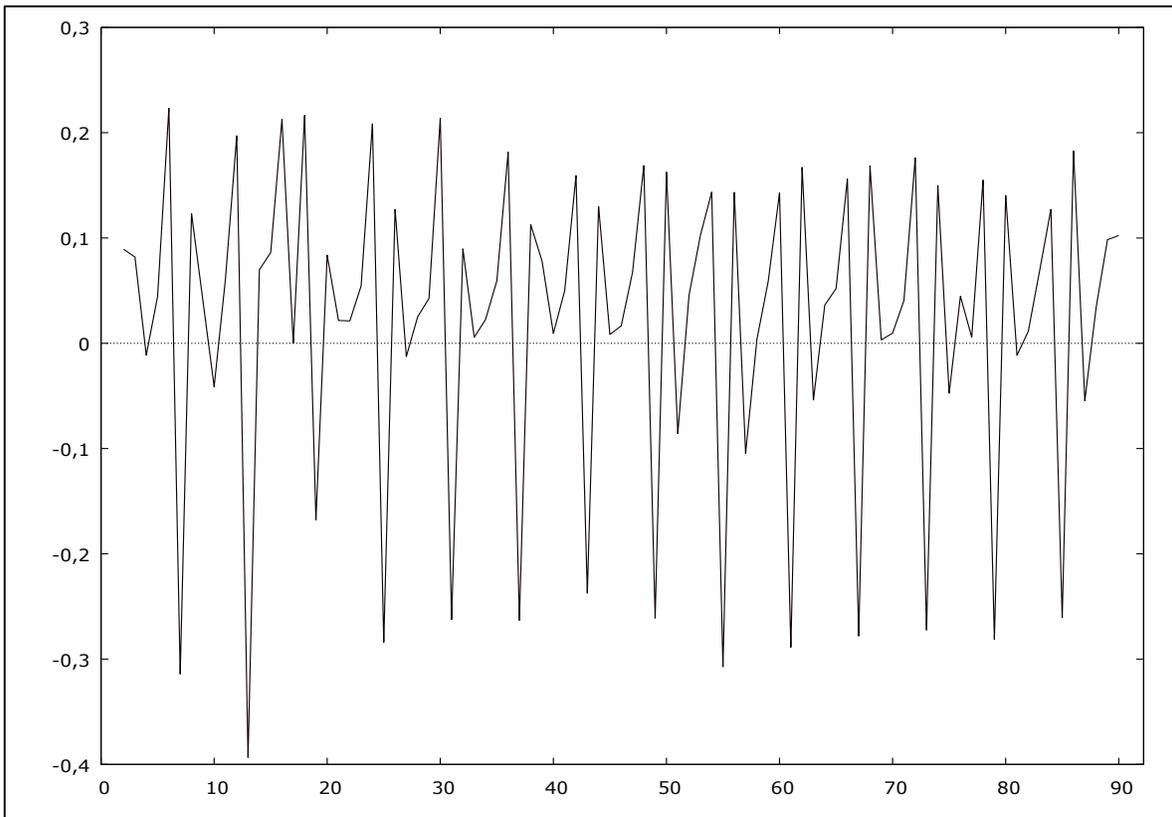
Gráfico 6. Función de autocorrelación (FAC) serie original diferenciada



Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

Dado que la varianza de la serie diferenciada ICA no es constante, se transforma aplicando diferencia al logaritmo del recaudo, gráfico 7, con el fin de estabilizar la varianza y establecer si de esta forma es posible lograr estacionariedad. Sin embargo, se sigue reflejando amplitud.

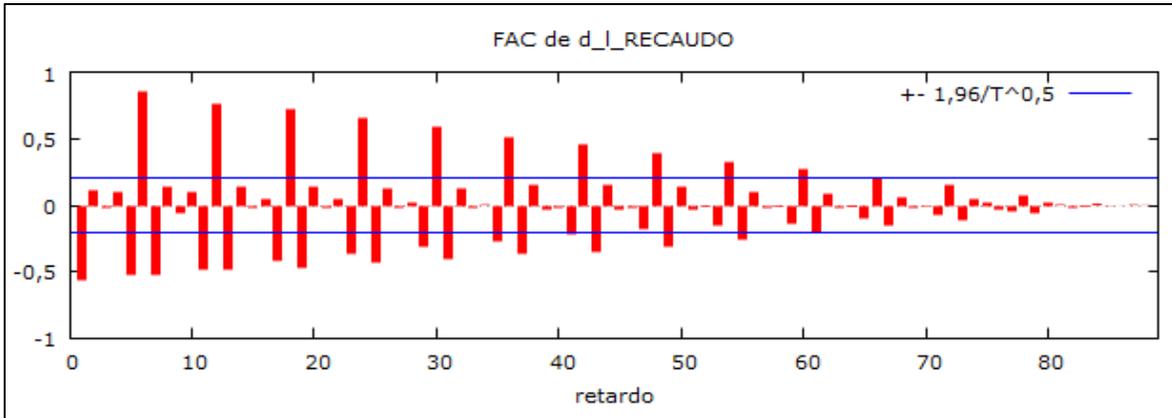
Gráfico 7. Primera diferencia sobre el logaritmo del recaudo ICA



Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

El gráfico 8, refleja que la diferencia sobre el logaritmo del recaudo no genero cambio alguno, dado que el proceso se mantiene no estacionario. Lo cual parece indicar presencia de un componente estacional.

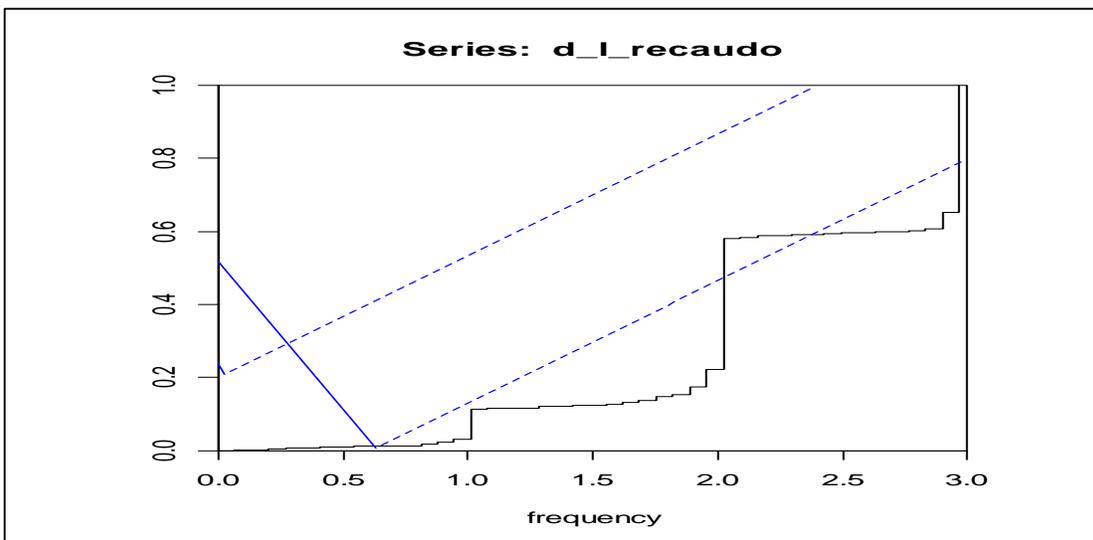
Gráfico 8. Función de autocorrelación (FAC) diferencia sobre el logaritmo del recaudo ICA



Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

El periodograma integrado (gráfico 9), indica que los errores no se distribuyen aleatoriamente, es decir que aún existe información que se debe modelar, dado a que en la mayoría de los tramos se sale de las bandas azules. Lo cual corrobora la información suministrada con anterioridad a través de los correlogramas (FAC).

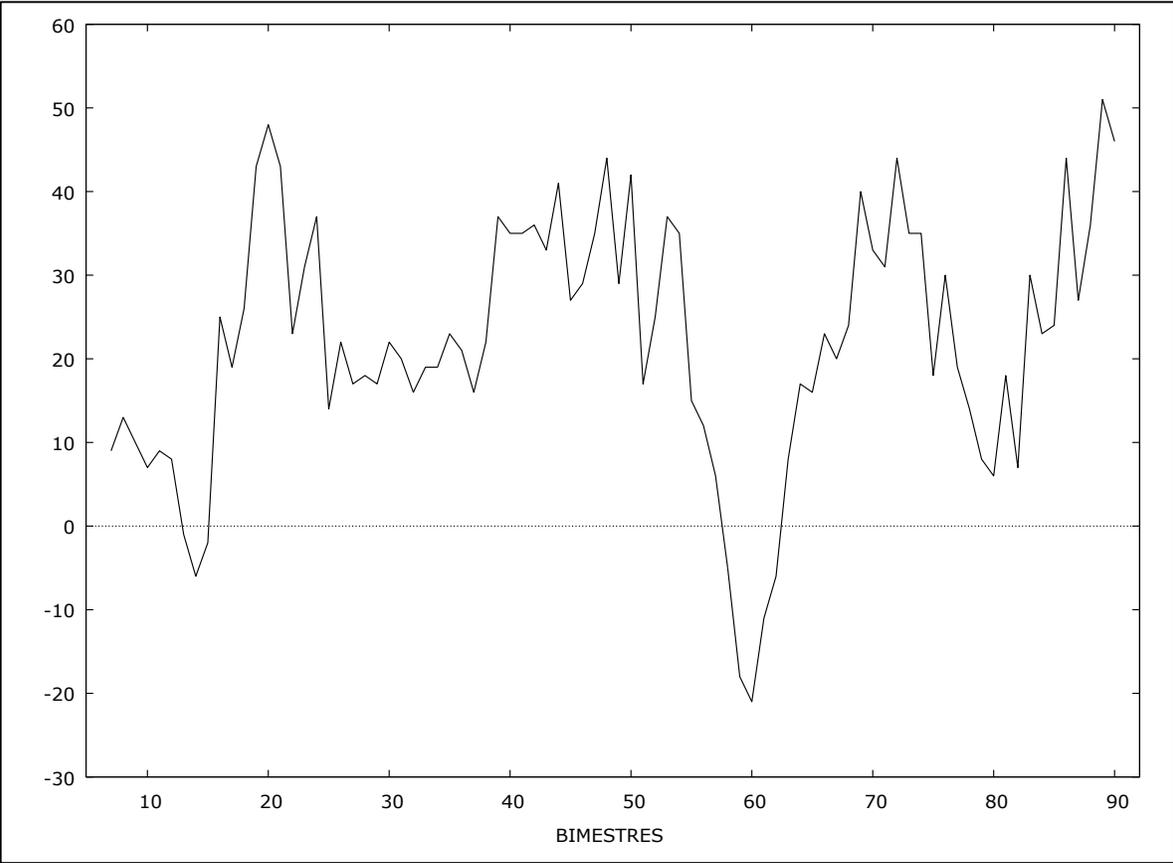
Gráfico 9 Periodograma integrado de la primera diferencia sobre el logaritmo del recaudo



Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

Dado que existe un componente estacional que no permite que el proceso de la serie original y transformadas (primera diferencia recaudo ICA y diferencia sobre el logaritmo del recaudo ICA) sean estacionarias; se trata por aparte el componente estacional aplicando una primera diferencia, gráfico 10, observando que la media no es constante.

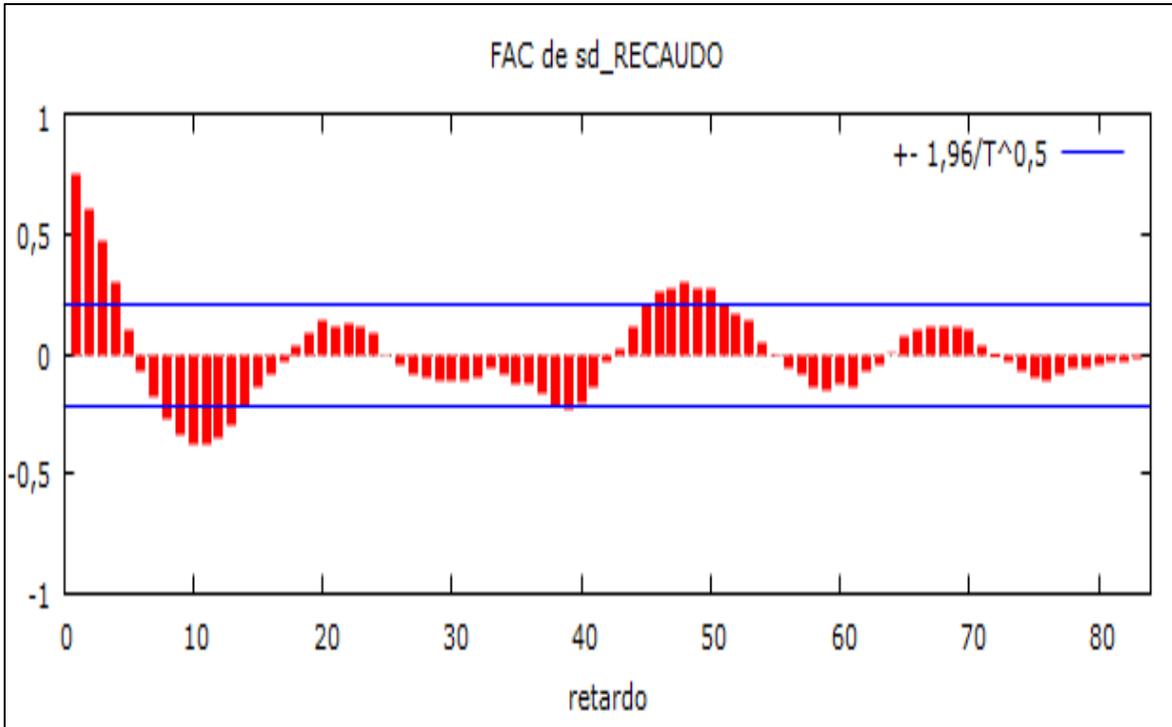
Gráfico 10. Primera diferencia de la parte estacional serie ICA



Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

A través del gráfico 11, se observa que la serie diferenciada estacional no es estacionaria, debido a que algunos coeficientes aún se salen de las bandas azules.

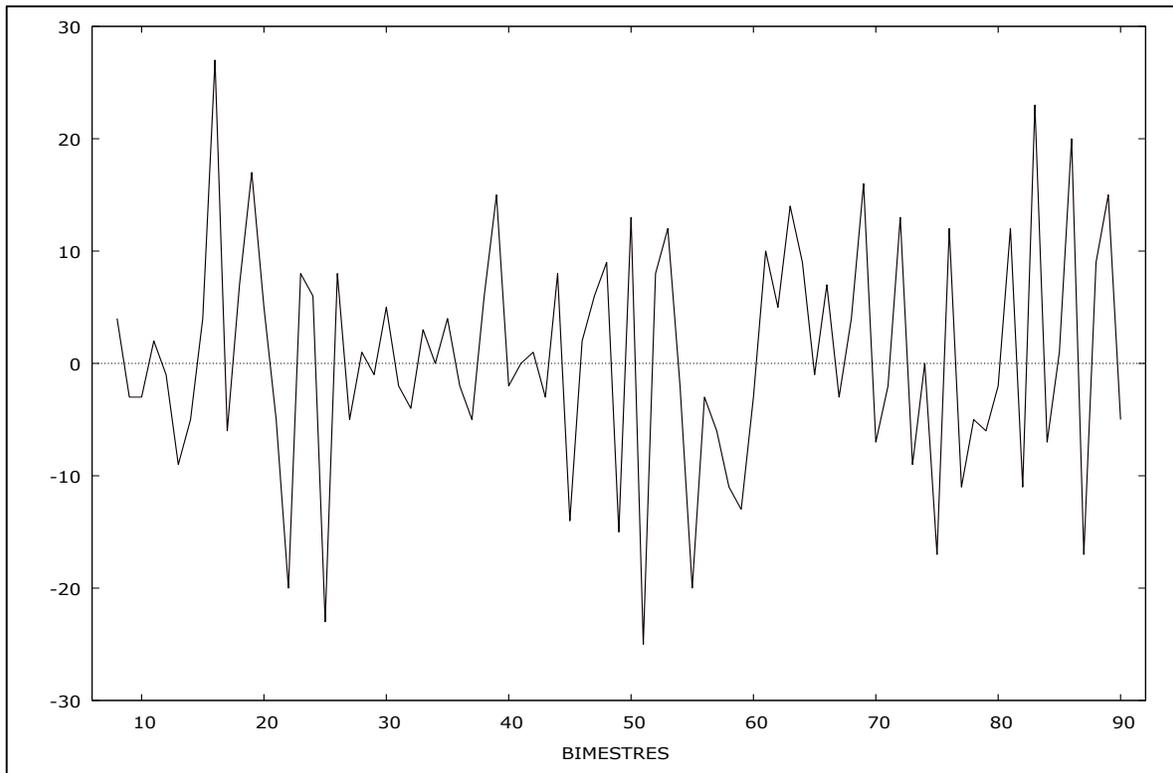
Gráfico 11. Función de autocorrelación (FAC) primera diferencia parte estacional serie ICA



Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

Teniendo en cuenta que no es posible alcanzar un proceso estacionario si se aborda individualmente la parte regular (no estacional) y estacional. Se prueba conjuntamente ambas partes, calculando una diferencia estacional a partir de la primera diferencia del recaudo ICA, cuyo resultado es visible en el gráfico 12, cuya media y varianza oscilan alrededor de un valor constante.

Gráfico 12. Diferencia estacional aplicada a la primera diferencia del recaudo ICA



Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

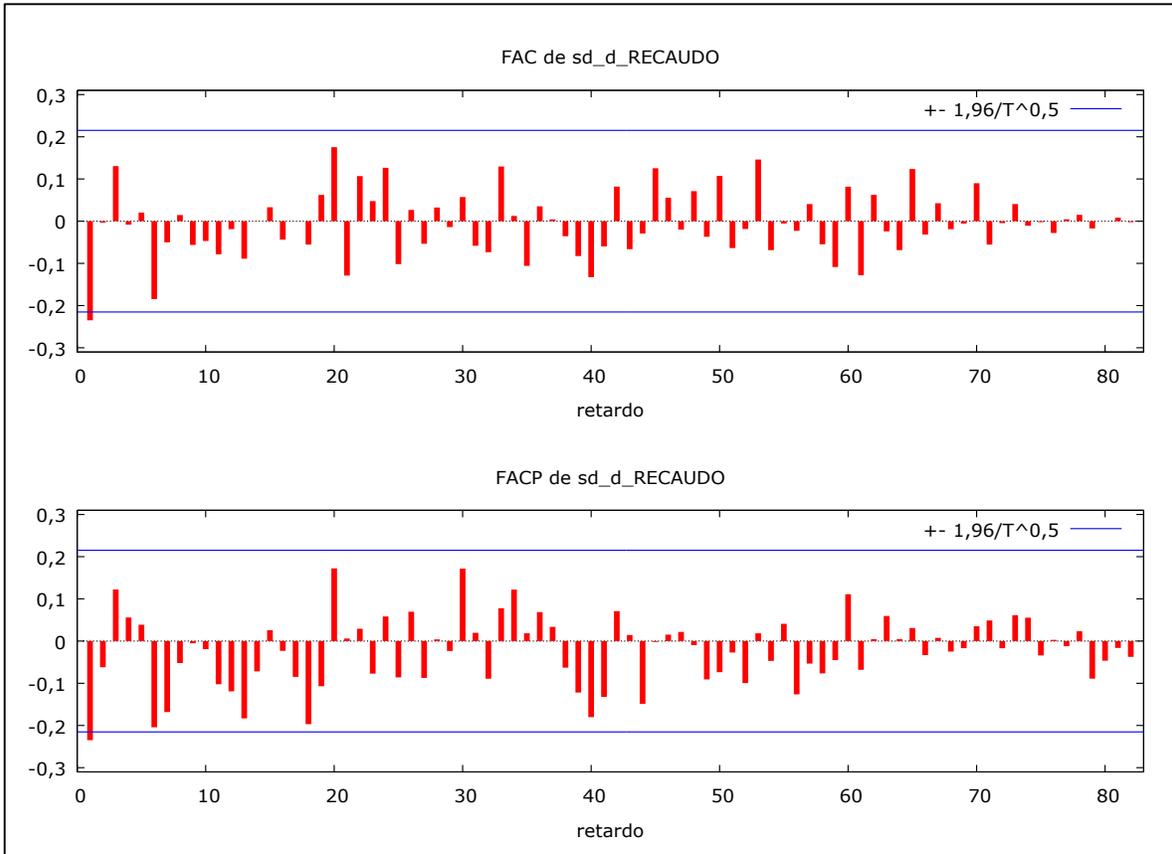
Para determinar si el proceso es estacionario se visualiza el gráfico 13, compuesto por dos figuras:

La primera es la función de autocorrelación (FAC), donde se observa que el proceso resulta ser estacionario cuando se aplica diferencia estacional a la primera diferencia del recaudo ICA. Debido a que todos los coeficientes excepto el primero están contenidos entre las bandas azules.

La segunda figura, corresponde a la función de autocorrelación parcial (FACF), que representa el orden que debe seguir el modelo.

Observando ambas figuras, parece que el proceso se asemeja a un MA, debido a que los coeficientes del FAC y FACF alterna valores positivos y negativos. Adicionalmente, el FACF refleja un proceso de orden uno, debido a que el primer retardo es significativo al 5% (saliendo de las bandas azules).

Gráfico 13. Función de autocorrelación (FAC) y función de autocorrelación parcial (FACP) de la diferencia estacional aplicada sobre la primera diferencia del recaudo ICA.



Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

Función de autocorrelación para sd_d_RECAUDO

***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

Utilizando desviación típica $1/T^{0,5}$

RETARDO	FAC	FACP	Estad-Q.	[valor p]
1	-0,2348 **	-0,2348 **	4,7444	[0,029]
2	-0,0035	-0,0620	4,7455	[0,093]
3	0,1304	0,1222	6,2460	[0,100]
4	-0,0084	0,0558	6,2522	[0,181]
5	0,0203	0,0386	6,2895	[0,279]
6	-0,1847 *	-0,2042 *	9,4159	[0,152]
7	-0,0501	-0,1682	9,6491	[0,209]
8	0,0146	-0,0521	9,6692	[0,289]
9	-0,0563	-0,0052	9,9710	[0,353]
10	-0,0469	-0,0193	10,1833	[0,425]
11	-0,0785	-0,1022	10,7869	[0,461]
12	-0,0189	-0,1191	10,8222	[0,544]
13	-0,0889	-0,1832 *	11,6192	[0,559]
14	-0,0005	-0,0718	11,6192	[0,637]
15	0,0329	0,0258	11,7316	[0,699]

16	-0,0437	-0,0232	11,9329	[0,749]
17	-0,0003	-0,0848	11,9329	[0,804]
18	-0,0554	-0,1968 *	12,2658	[0,833]
19	0,0622	-0,1070	12,6925	[0,854]
20	0,1753	0,1723	16,1322	[0,708]
21	-0,1289	0,0060	18,0224	[0,648]
22	0,1068	0,0292	19,3414	[0,624]
23	0,0476	-0,0771	19,6076	[0,665]
24	0,1266	0,0583	21,5231	[0,608]
25	-0,1017	-0,0861	22,7800	[0,590]
26	0,0266	0,0696	22,8677	[0,640]
27	-0,0536	-0,0872	23,2296	[0,673]
28	0,0324	0,0041	23,3638	[0,715]
29	-0,0140	-0,0235	23,3895	[0,758]
30	0,0572	0,1715	23,8247	[0,780]
31	-0,0583	0,0196	24,2859	[0,799]
32	-0,0735	-0,0891	25,0324	[0,805]
33	0,1296	0,0779	27,4032	[0,742]
34	0,0124	0,1220	27,4253	[0,780]
35	-0,1059	0,0184	29,0730	[0,749]
36	0,0352	0,0687	29,2588	[0,779]
37	0,0042	0,0336	29,2616	[0,814]
38	-0,0356	-0,0630	29,4604	[0,838]
39	-0,0827	-0,1219	30,5561	[0,831]
40	-0,1326	-0,1802	33,4403	[0,759]
41	-0,0597	-0,1323	34,0392	[0,771]
42	0,0818	0,0709	35,1907	[0,762]
43	-0,0663	0,0143	35,9655	[0,768]
44	-0,0292	-0,1486	36,1198	[0,795]
45	0,1253	-0,0021	39,0360	[0,722]
46	0,0556	0,0153	39,6260	[0,735]
47	-0,0199	0,0217	39,7036	[0,766]
48	0,0711	-0,0097	40,7223	[0,763]
49	-0,0369	-0,0908	41,0052	[0,785]
50	0,1074	-0,0737	43,4730	[0,731]
51	-0,0638	-0,0271	44,3702	[0,733]
52	-0,0186	-0,0996	44,4489	[0,762]
53	0,1460	0,0184	49,4591	[0,613]
54	-0,0685	-0,0470	50,6019	[0,606]
55	-0,0055	0,0410	50,6096	[0,643]
56	-0,0229	-0,1262	50,7460	[0,673]
57	0,0406	-0,0534	51,1931	[0,692]
58	-0,0548	-0,0766	52,0391	[0,695]
59	-0,1086	-0,0451	55,5076	[0,605]
60	0,0817	0,1110	57,5558	[0,566]
61	-0,1280	-0,0680	62,8069	[0,412]
62	0,0622	0,0044	64,1087	[0,402]
63	-0,0240	0,0596	64,3126	[0,430]
64	-0,0686	0,0047	66,0611	[0,406]
65	0,1236	0,0309	72,0519	[0,256]
66	-0,0318	-0,0332	72,4729	[0,273]
67	0,0424	0,0076	73,2656	[0,280]
68	-0,0190	-0,0250	73,4355	[0,305]
69	-0,0057	-0,0169	73,4520	[0,334]
70	0,0899	0,0351	77,8385	[0,243]
71	-0,0555	0,0488	79,6498	[0,225]
72	-0,0045	-0,0169	79,6630	[0,251]
73	0,0407	0,0613	80,8315	[0,248]
74	-0,0109	0,0554	80,9253	[0,272]
75	-0,0023	-0,0340	80,9300	[0,299]
76	-0,0280	0,0029	81,7227	[0,306]

77	0,0044	-0,0121	81,7458	[0,334]
78	0,0151	0,0232	82,0663	[0,354]
79	-0,0173	-0,0890	82,5954	[0,369]
80	-0,0001	-0,0465	82,5954	[0,399]
81	0,0081	-0,0162	82,8288	[0,423]
82	-0,0022	-0,0374	82,8640	[0,453]

4.3 ESTIMACIÓN DEL MODELO ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, se sabe que el proceso es estacionario cuando se establece diferencia estacional sobre la primera diferencia del recaudo ICA, sinónimo a decir que es integrado $[I(1,1)]$, el cual corresponde a un modelo MA(1) tanto en la parte regular (no estacional) como estacional, identificado a través de ambos correlogramas, lo cual equivale a decir que el modelo es un SARIMA(0,1,1)(0,1,1) o ARIMA(0,1,1)(0,1,1)₆, cuyo resultado es:

Modelo 64: ARMA, usando las observaciones 2001:2-2014:6 (T = 83)				
Estimado usando el filtro de Kalman (MV exacta)				
Variable dependiente: sd_d_RECAUDO				
Desviaciones típicas basadas en el Hessiano				
	Coefficiente	Desv. Típica	z	Valor p
theta_1	-0,268935	0,0985147	-2,730	0,0063 ***
Theta_1	-0,291564	0,119767	-2,434	0,0149 **

Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

Donde, los parámetros de los procesos MA que resultan significativos son:

-2.730 parte regular o no estacional al 1%.

-2.434 parte estacional al 5%.

El modelo ARIMA(0,1,1)(0,1,1)₆ presenta AIC, AICc y BIC, cuyos resultados se encuentran descritos en la tabla 6.

Tabla 6. Criterios de selección del modelo ARIMA(0,1,1)(0,1,1)₆

AIC	AICc	BIC
617.8	618.1	625.05

Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

Una de las medidas de error más utilizadas son:

MAE: Desviación media absoluta, mide la exactitud de los valores estimados de la serie de tiempo. Expresa la exactitud en las mismas unidades de los datos.

$$MAE = \frac{\sum_{t=1}^n |y_t - \hat{y}_t|}{n} \quad (21)$$

RMSE: Desviación cuadrática media, es más sensible a errores anormales de pronóstico que el MAE.

$$RMSE = \frac{\sum_{t=1}^n |y_t - \hat{y}_t|^2}{n} \quad (22)$$

Las medidas de error MAE y RMSE del modelo $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$ se reflejan en la tabla 7.

Tabla 7. Errores del modelo $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$

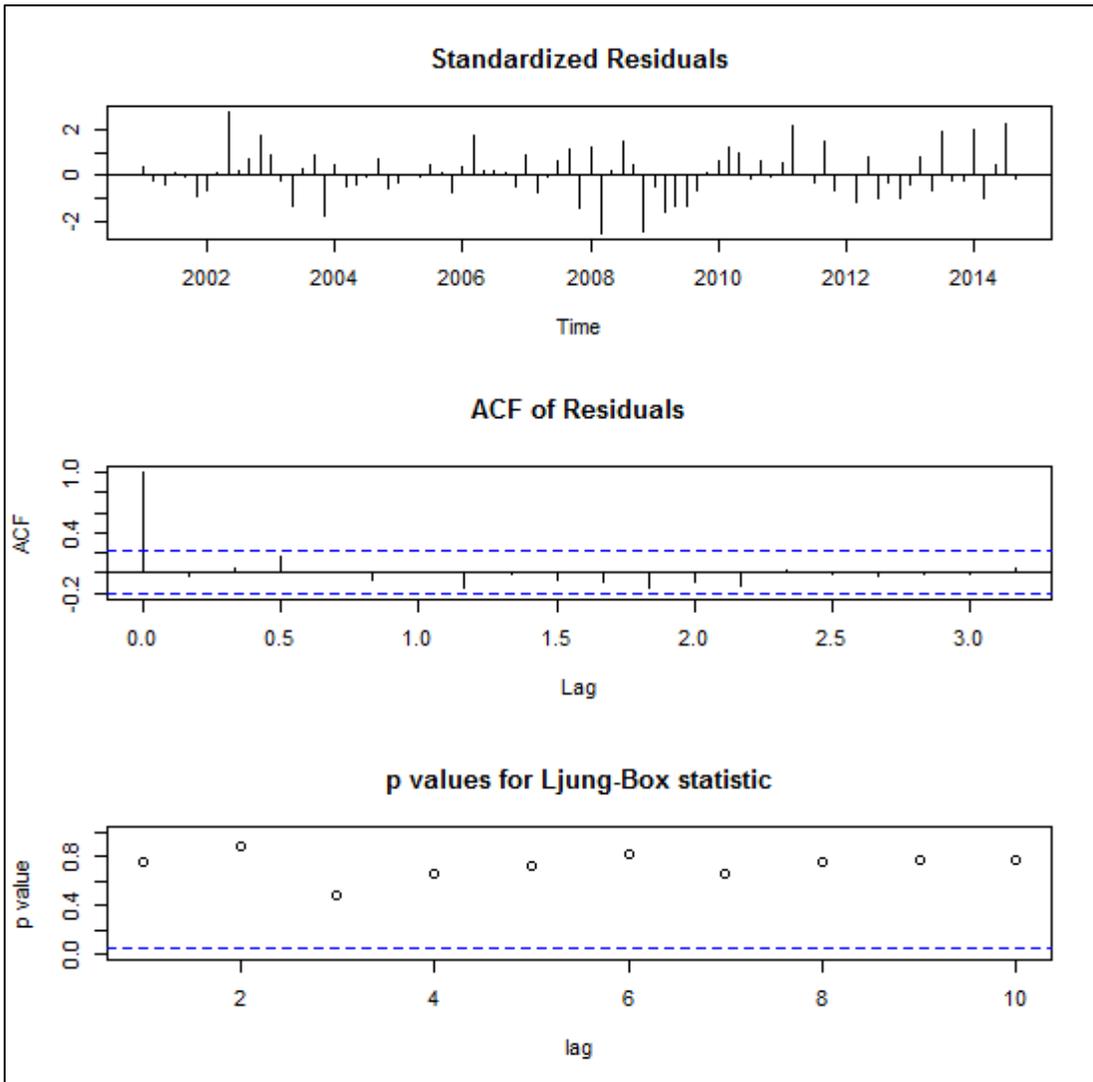
RMSE	MAE
9.611113	7.284367

Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

4.4 DIAGNÓSTICO DEL MODELO

Con el propósito de validar el modelo seleccionado $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$ a partir de los correlogramas, se usa el test Box-Ljung cuya hipótesis nula consiste en que los residuos del modelo ARIMA no tienen autocorrelación. Con un p valor de 0.7018, se acepta la hipótesis. Es decir que el modelo es válido para pronosticar el recaudo a corto plazo. Adicionalmente, en el gráfico 14, se observa que los p valores se distribuyen por encima de la banda azul, lo cual corrobora gráficamente el resultado del test Box Ljung.

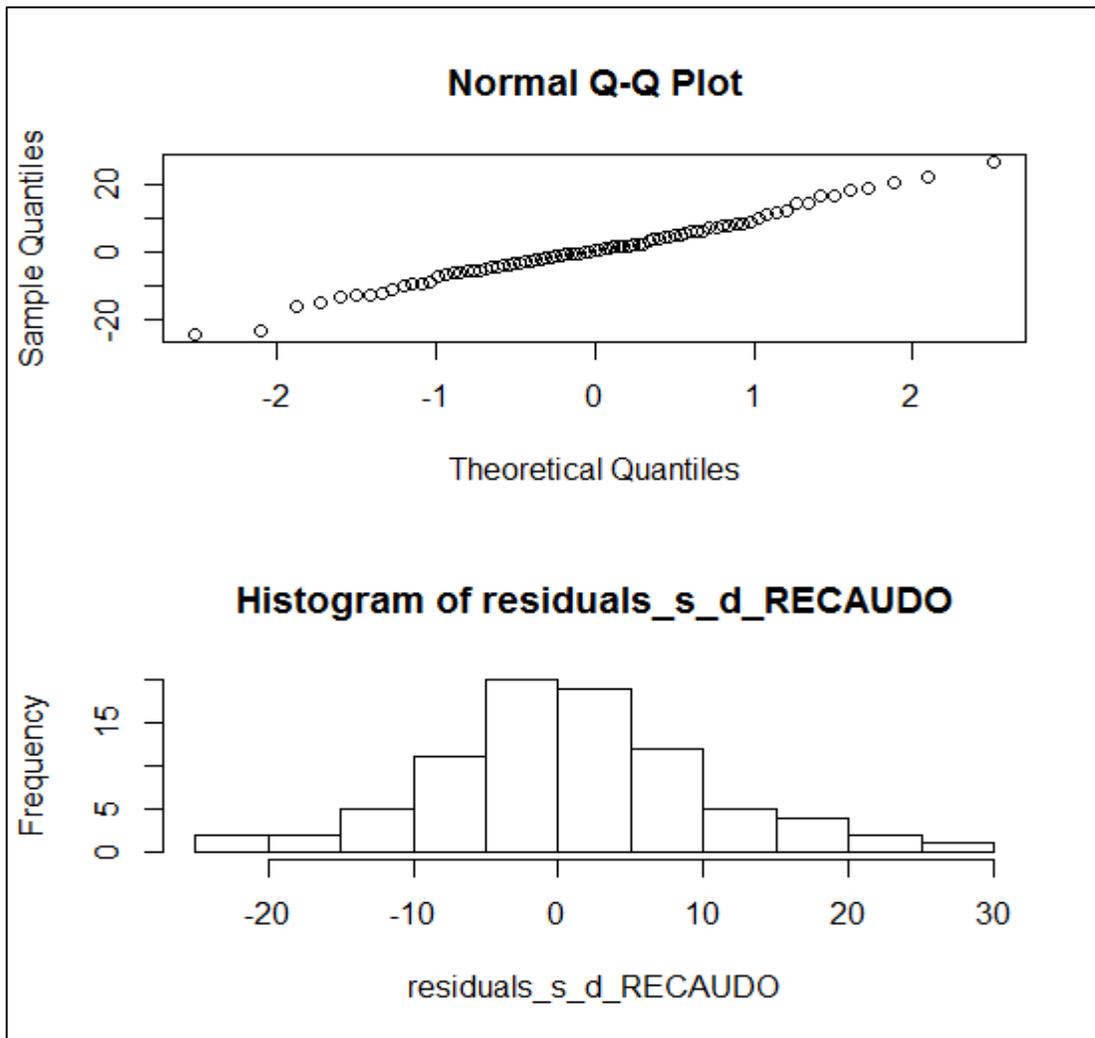
Gráfico 14. Residuos modelo $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$



Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

Aplicando la prueba de Shapiro – Wilk, con un p valor de 0,7147 se acepta la hipótesis nula de distribución normal de los residuos, lo cual es visible a través del gráfico 15.

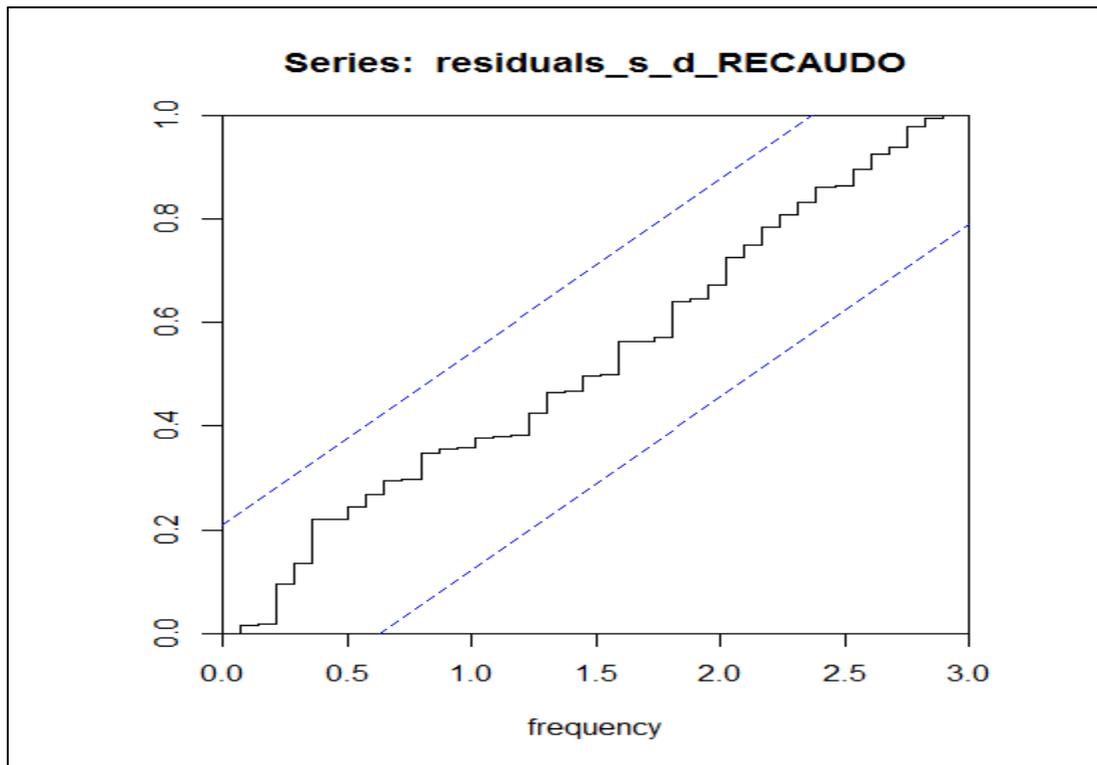
Gráfico 15. Distribución normal de los residuos $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$



Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016

El periodograma integrado reflejado en el gráfico 16, representa los residuos del modelo $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$, si estos se salen de las bandas azules, los residuos no se distribuyen aleatoriamente, por lo cual sería necesario probar con otro modelo. De acuerdo a lo anterior, el gráfico indica que el modelo cumple con la condición de aleatoriedad de los residuos.

Gráfico 16. Periodograma integrado de los residuos modelo $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$



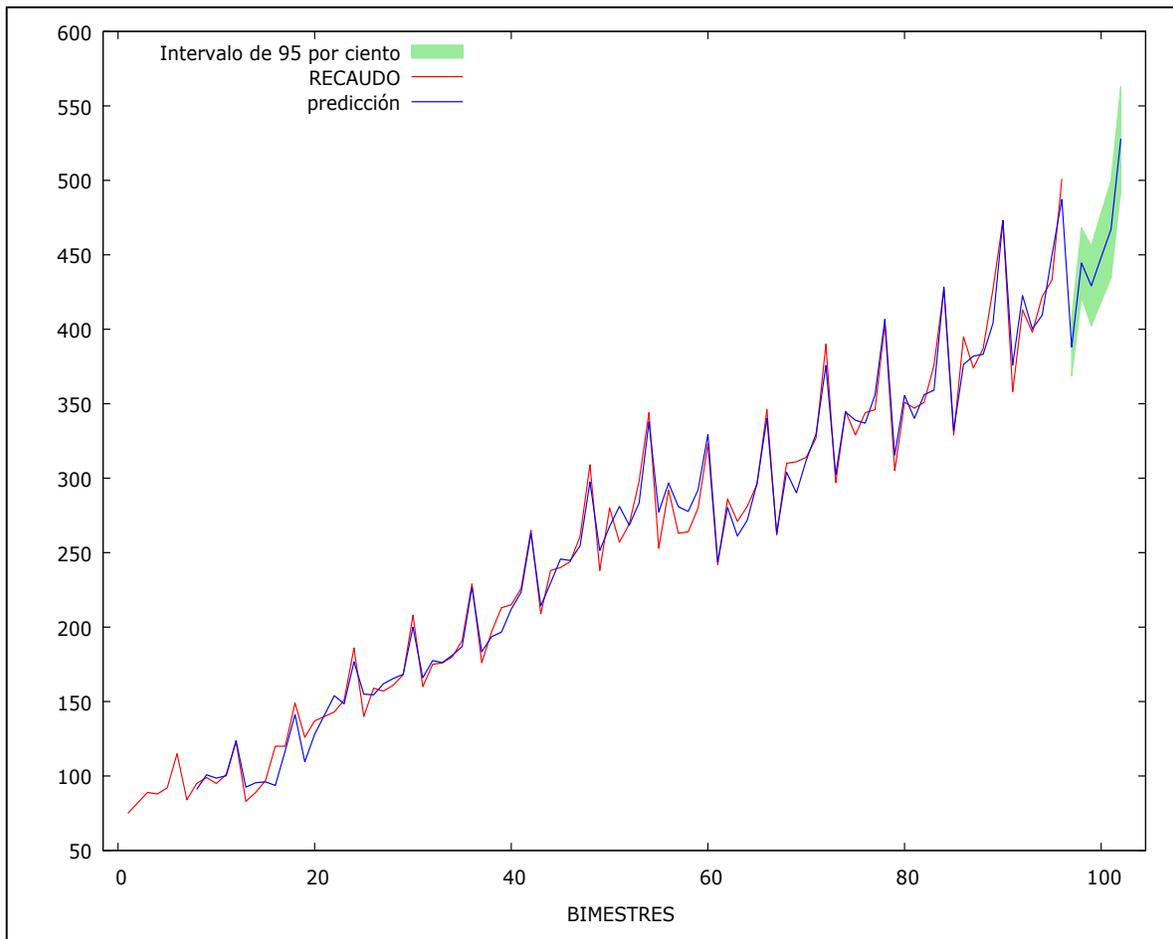
Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016.

4.5 PRONOSTICO DEL MODELO ESTIMADO $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$

Para el año 2015 se valida la calidad del modelo estimado, comparando los resultados del pronóstico frente a las cifras reales causadas. Si el modelo arroja resultados cercanos a las cifras reales, se predice el año 2016.

Contrastando la serie original frente a la serie transformada (primera diferencia estacional aplicada a la primera diferencia del recaudo ICA), visible en el gráfico 17, se evidencia que la serie estimada se ajusta al comportamiento histórico de la serie observada (original).

Gráfico 17. Serie observada y estimada modelo $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$



Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016.

A través de la tabla 8, es posible identificar que con un intervalo de confianza del 95%, el recaudo ICA en el primer bimestre del año 2015 osciló entre \$357 y \$394 mil millones de pesos. Para el segundo bimestre, el valor real causado fue \$413 fluctuando entre \$412 y \$459 mil millones de pesos. Y en el último bimestre, tanto el recaudo real percibido fue \$501 mil millones de pesos, oscilando entre \$476 y \$548 mil millones de pesos. La proyección de recaudo ICA para el primer bimestre del año 2016, ascenderá aproximadamente a \$388 mil millones de pesos creciendo 0,08% frente al mismo bimestre del año anterior y terminara con un recaudo aproximado de \$528 mil millones de pesos a sexto bimestre (tabla 9).

Tabla 8. Recaudo ICA real vs predicción para el año 2015

AÑO: BIMESTRES	RECAUDO	PREDICCIÓN	INTERVALO DE 95%
2015:1	358	375	(357, 394)
2015:2	413	436	(412, 459)
2015:3	398	419	(392, 446)
2015:4	422	430	(399, 460)
2015:5	433	464	(430, 497)
2015:6	501	512	(476, 548)

Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016. Cifras expresadas en miles de millones de pesos.

Tabla 9. Predicciones para el año 2016

AÑO: BIMESTRES	PREDICCIÓN	INTERVALO 95%
2016:1	388	(368, 407)
2016:2	444	(421, 467)
2016:3	429	(402, 456)
2016:4	448	(418, 478)
2016:5	467	(434, 499)
2016:6	528	(493, 563)

Fuente: Soportes tributarios a 13 de Abril de 2016. Cifras expresadas en miles de millones de pesos.

5. CONCLUSIONES

- Una vez garantizada la estacionariedad del proceso, se establece mediante el uso de la función de autocorrelación (FAC) y función de autocorrelación parcial (FACP) el modelo $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$.
- El pronóstico obtenido para el año 2015 se ajusta al recaudo real causado, por lo que se concluye que el diagnóstico del modelo $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$ es apropiado para proyectar el recaudo ICA del año 2016.
- Según la proyección del año 2016 se espera que el recaudo ICA anual aumente pasando de 2.5 a 2.7 billones, creciendo frente al año 2015 en un 0.08% aproximadamente.
- Para el año 2016 se espera percibir 2.7 billones de pesos, con valores aproximados a \$388 mil millones de pesos en el primer bimestre, \$444 mil millones de pesos segundo bimestre, \$429 mil millones de pesos tercer bimestre, \$448 mil millones de pesos cuarto bimestre, \$467 mil millones de pesos quinto bimestre y \$528 mil millones de pesos en el último bimestre.

BIBLIOGRAFÍA

COLOMBIA. CONGRESO DE LA REPÚBLICA. Ley 97. Por la cual se otorga autorizaciones especiales a ciertos concejos Municipales. Disponible: <http://www.alcaldiabogota.gov.co/sisjur/normas/Norma1.jsp?i=298>

ESTATUTO TRIBUTARIO DE BOGOTÁ D.C., 2009. Capítulo II, Artículo 33.

MCCANDLESS, George. GABRIELLI, Ma Florencia y MURPHY, Tomás E. Modelos econométricos de predicción macroeconómica en Argentina (online). Documento de trabajo No 19. Junio 2001. Disponible <<http://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&ved=0ahUKEwj5vN2k0LbMAhVFlx4KHfSVDhoQFggiMAE&url=http%3A%2F%2Fwww.bcra.gov.ar%2FPdfs%2FInvestigaciones%2Ftrabajo19.pdf&usg=AFQjCNHPgs6VdXxgS4JNG6HJlcGAy8qg5w&bvm=bv.121070826,d.dmo>

PEÑA, Daniel. Análisis de series temporales. Madrid. Alianza Editorial S.A, 2005.

PHILLIP, Franses Hans, DIJK, Van Dick, OPSCHOOR, Anne. Time series Models for Business and Economic Forecasting. Cambridge, 2014.

URIEL JIMÉNEZ, Ezequiel. Análisis de series temporales modelos ARIMA. Valencia, España. Editorial Paraninfo, tercera edición 1995.

ANEXOS

Los anexos se dividen en dos partes:

La primera parte hace alusión al estudio de modelos de predicción macroeconómica en Argentina, realizado por George McCandless, Ma. Florencia Gabrielli y Tomás E. Murphy, cuyos resultados se visualizan en el anexo A. La segunda parte, se relaciona con el procedimiento del código en R descrito en el anexo B.

La figura A1, muestra la aplicación del test Dickey Fuller Aumentado (ADF) sobre las series de tiempo: Producto Interno Bruto (PIB), inversión e importaciones. Donde se establece como hipótesis nula: la serie no es estacionaria. Se rechaza la hipótesis nula cuando se diferencia el logaritmo de las series, garantizando de esta forma estacionariedad. En la figura A2, se evalúa diferentes modelos, seleccionando aquel cuyos coeficientes resultan significativos y con un R cuadrado mayor al de los demás modelos. Eligiendo como mejor modelo:

- PIB modelo ARMA(1,2) con parámetros significativos AR(1) y MA(2),
- Importaciones modelo ARMA(4,7) con parámetros significativos AR(4), MA(1), MA(3), MA(5) y MA(7)
- Inversión modelo ARMA(4,1) con parámetros significativos AR(4) y MA(1).

En la figura A3 los autores concluyen “se utilizaron diferentes criterios en cada caso para determinar la superioridad de una estimación con respecto a otra. En el caso de DLPIB, por ejemplo, el modelo AR(4) MA(1) resultó ser parsimonioso, poseía coeficientes significativos a niveles convencionales, el R2 era relativamente alto (0.83) y, según el estadístico Q, los residuos parecían comportarse como ruido blanco”¹⁵.

¹⁵ MCCANDLESS, George. GABRIELLI, Ma Florencia y MURPHY, Tomás E. Modelos econométricos de predicción macroeconómica en Argentina (online). Documento de trabajo No 19. Junio 2001.

ANEXO A. Resultados ADF test al 1%, selección y elección del modelo ARIMA

Test ADF al 1%

Serie	ADF	Valor Crítico	H ₀ : Serie no estacionaria	
			Rechazo H ₀	No rechazo H ₀
PIB	Nivel	-1.64		X
	Log	-1.73		X
	Dif. Log	-5.36	X	
Inversión	Nivel	-2.45		X
	Log	-2.62		X
	Dif. Log	-5.08	X	
Importaciones	Nivel	-1.74		X
	Log	-2.25		X
	Dif. Log	-4.22	X	

Fuente: Base de datos del ministerio de economía de Argentina. Empleada por George McCandless, Ma Florencia Gabrielli y Tomás E Murphy.

Figura A1 Resultados de la aplicación del test Dickey Fuller Aumentado (ADF) al 1%

Resultados proceso de selección teniendo en cuenta varios modelos

	Modelo	Observaciones
PIB	1. <i>AR(1) MA(4)</i>	R^2 más bajo que en los otros modelos.
	2. <i>AR(1) AR(4)</i>	El coeficiente del <i>AR(1)</i> no es significativo (al 94%).
	3. <i>AR(1) AR(3) AR(4)</i>	Un sólo coeficiente resulta ser estadísticamente distinto de cero (<i>AR(4)</i>).
	4. <i>MA(1) AR(4)</i>	ELEGIDO
	5. <i>AR(1) AR(4) MA(2)</i>	El coeficiente del <i>AR(1)</i> no es significativo.
Importaciones	1. <i>AR(1) AR(4)</i>	El coeficiente del <i>AR(1)</i> no es significativo y el R^2 es bajo.
	2. <i>AR(1) MA(3) MA(5) MA(7)</i>	Un sólo coeficiente resulta ser estadísticamente distinto de cero (<i>AR(1)</i>) y el R^2 es bajo.
	3. <i>AR(1) AR(5) MA(4)</i>	Un sólo coeficiente resulta ser estadísticamente significativo (<i>MA(4)</i>).
	4. <i>AR(4) MA(4)</i>	Ninguno de los coeficientes resultó estadísticamente distinto de cero.
	5. <i>AR(4) MA(1) MA(3) MA(5) MA(7)</i>	ELEGIDO
Inversión	1. <i>AR(1) AR(4)</i>	El coeficiente del <i>AR(1)</i> es no significativo.
	2. <i>AR(4) MA(1)</i>	ELEGIDO
	3. <i>AR(1) MA (4)</i>	R^2 bajo y el coeficiente del <i>AR(1)</i> es no significativo.
	4. <i>MA(1) MA(4)</i>	R^2 bajo y el coeficiente del <i>AR(1)</i> es no significativo.
	5. <i>AR(3) MA(4)</i>	R^2 bajo.

Fuente: Base de datos del ministerio de economía de Argentina. Empleada por George McCandless, Ma Florencia Gabrielli y Tomás E Murphy.

Figura A2 Selección del modelo ARIMA

Estimación de parámetros del modelo seleccionado

Variable	DLPIB	DLIMPO	DLIN_BRUTA
<i>AR(4)</i>	0.9279752196 (16.49830)	0.290470308 (2.73281)	0.8800241012 (9.02881)
<i>MA(1)</i>	0.3631660607 (2.12641)	0.544968808 (3.86781)	0.4895362844 (2.90039)
<i>MA(3)</i>		-0.399786481 (-2.56840)	
<i>MA(5)</i>		-0.403332573 (-2.93430)	
<i>MA(7)</i>		-0.315433076 (-1.92471)	
R ²	0.827569	0.432135	0.614825
R ² Ajustado	0.822006	0.351011	0.602400
Suma de residuos al cuadrado	0.016676	0.101199	0.119396
Q (8-2)*	7.007960	1.940043	5.984110
Nivel de signif. de Q	0.320112	0.584944	0.424972
Media de la var. dep.	0.006041	0.015827	0.005468
Error estándar de la var. dep.	0.054975	0.074626	0.098422
Estadístico de Durbin-Watson	1.761379	1.944807	1.798531
Iteraciones nec. para converg.	12	38	10

Fuente: Base de datos del ministerio de economía de Argentina. Empleada por George McCandless, Ma Florencia Gabrielli y Tomás E Murphy.

Figura A3 Resultados del modelo ARIMA seleccionado

ANEXO B. Código en R modelo $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_6$.

```
library(tseries)
```

```
library(forecast)
```

```
library(urca)
```

```
###IDENTIFICACIÓN DEL MODELO
```

```
s_d_RECAUDO=read.csv("F:/TRABAJO DE GRADO/UNIVERSIDAD/SERIE  
ESTACIONARIA_CSV.csv")
```

```
acf(s_d_RECAUDO)
```

```
s_d_RECAUDO=ts(s_d_RECAUDO,frequency=6, start=2001)
```

```
s_d_RECAUDO
```

```
#VALIDACIÓN DEL MODELO
```

```
accuracy(s_d_RECAUDO)
```

```
tsdiag(s_d_RECAUDO)
```

```
residuals_s_d_RECAUDO=residuals(s_d_RECAUDO)
```

```
cpgram(residuals_s_d_RECAUDO)
```

```
Box.test(residuals_s_d_RECAUDO,20,type="L")
```

```
par(mfrow=c(2,1))
```

```
qqnorm(residuals_s_d_RECAUDO)
```

```
shapiro.test(residuals_s_d_RECAUDO)
```

```
hist(residuals_s_d_RECAUDO)
```