ESPACIO DE OPERADORES EN EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

JESÚS DAVID HERNÁNDEZ SERRANO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA
2019

ESPACIO DE OPERADORES EN EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

JESÚS DAVID HERNÁNDEZ SERRANO

Trabajo de grado para optar al título de Matemático

Director

RONALD EDUARDO PATERNINA SALGUEDO
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA
2019

DEDICATORIA

Difícil si ha sido, pero también reconfortante ver como mi bebe con su sonrisa me ha motivado día a día ha esforzarme, a la mamá de mi hijo que si no fuera por su comprensión no creo que fuera posible este logró, también a esas mujeres que sin importar que tan imperfecto sea, siguen esperando lo mejor de mí, mi mamá y abuela, que de una u otra manera me han apoyado con su cariño y preocupación, y no podría olvidar al profesor Ronald, y mis compañeros de estudio, Jorge y Viviana, quienes con palabras de apoyo lograron que no desistiera.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres y mi familia por su apoyo y paciencia incondicional, porque a pesar de mis errores y de que por mis decisiones tuve mas responsabilidades ellos siguieron alentándome.
Al profesor Ronald por su apoyo porque a pesar de que en ocasiones por mi desinterés, no di la importancia que merecía el trabajo, el siguió trabajando y alentándome para graduarme.
A mi bebe y la mamá porque sirvieron de motor para esforzarme a sali adelante y no dejar a medias mi carrera.
Tambien agradezco a las personas que de manera ímplicita han ayudado a que logre esta gran meta.

CONTENIDO

Lista de Símbolos

$\{ X, Y \}$	{ Espacios lineales normados.}
X^*, Y^*, X^{**}, Y^{**}	Dual y bidual topológico de los espacios X y Y respectivamente.
x^*, y^*, x^{**}, y^{**}	Elementos de X^*, Y^*, X^{**}, Y^{**} respectivamente.
$L^f(X,Y)$	Conjunto de operadores de rango finito.
Jx, Jy	Imagen de los elementos $x \in X$ e $y \in Y$ con respecto a la inyección canónica
$\mathfrak{F}$	Colección de funciones de X en Y.
$L(X,Y)$	Conjunto de operadores lineales continuos de X en Y
T, R	Elementos de $L(X,Y)$
$L(X,\mathbb{R})$	Funcionales lineales y continuos de X en $\mathbb{R}$.
f^{-1}, g^{-1}, T^{-1}	Funciones inversas de f, g y T respectivamente
$S_X, S_{X^*}, S_{X^{**}}$	Esfera unitaria en X, X^* y X^{**} respectivamente.
$B_X, B_{X^*}, B_{X^{**}}$	Bola unitaria en X, X^* y X^{**} respectivamente.
l_∞	Espacio de sucesiones escalares acotadas.
c_0	Espacio de sucesiones escalares convergentes a cero.
$\sigma(X,X^*), \sigma(X^*,X)$	Topología débil y topología débil* respectivamente.
$\overline{A}^{\text{débil}}$, $\overline{J(A)}^{\text{débil}^*}$	Clausura de A y $J(A)$ con respecto a las topologías débil y débil*.
$[\{a_n\}] = [a_n]$	Espacio generado por las combinaciones lineales de los elementos de $\{a_n\}$
μ	Medida positiva.
$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$	Conjunto de los naturales, reales y racionales respectivamente.
$\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$	Producto cartesiano de los conjuntos X_α.
$x_n \overset{\omega}{\to} x$,	Convergencia débil de la sucesión x_n a X.
$\mathcal{X}_E$	Función característica del conjunto E.
N^o	Interior del conjunto N.
$B(x,\varepsilon)$	Bola abierta con centro en x y radio ε.

RESUMEN

TíTULO: ESPACIOS DE OPERADORES EN EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES CONTINUAS[1]

AUTOR: Jesús David Hernández Serrano[2]

PALABRAS CLAVE: Espacio, operadores, funciones, continuas.

DESCRIPCIÓN:

El contenido de este trabajo se basa principalmente en demostrar y aplicar algunas técnicas de la teoría de los espacios de Banach al estudio de la existencia de un isomorfismo entre los operadores nucleares $N(C(\alpha))$ y los espacios de operadores compactos $\mathcal{K}(C(\beta))$, donde $C(\alpha)$ es el espacio de funciones continuas definida en un intervalo de ordinales $[0, \alpha]$ y con valores reales, espacio el cual se dota con la norma del supremo.

El trabajo se ha organizado de la siguiente manera. En el primer capítulo, se presentan algunos conceptos y resultados relevantes del Análisis funcional que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Se inicia con una revisión sobre los espacios de Banach y algunos resultados relacionados con estos espacios, como los teoremas de Hanh-Banach, de Banach Steinhaus, y el teorema de la aplicación abierta.

En el segundo capítulo se dan los fundamentos de la teoría de los operadores nucleares, compactos y los productos tensorial inyectivo y proyectivo de espacios de Banach, incluyendo algunos teoremas de clasificación isomorfa de las funciones continuas con válores en un espacio de Banach X. Se describen también los producto tensoriales inyectivo $\ell_1 \widehat{\otimes}_\epsilon \ell_p$ y caracterizamos este espacio usando proyecciones sobre ℓ_p y sucesiones en ℓ_1.

En el último capítulo se presenta la demostración de la no existencia de un isomorfismo entre los espacios de operadores compactos sobre un subespacio de los espacios de operadores nucleares.

[1]Trabajo de grado

[2]Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas.

Director: Dr. Ronald Eduardo Paternina Salguedo.

ABSTRACT

TITLE: SPACE OF OPERATORS IN THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS[3]

AUTHOR: Jesús David Hernández Serrano[4]

KEYWORDS: Space, operators, function, keep going.

DESCRIPTION:

This paper is mainly done to prove and aplly some tecniques Banach space theory to search the existence of an isomorphism between the nuclear operators $N(C(\alpha))$ and the spaces of compact operators $\mathcal{K}(C(\beta))$ where $C(\alpha)$ is the space of defined continuous functions in an ordinal range $[0, \alpha]$ in real numbers, space which is endowed with the norm of supreme.
The work has been organized in the following way. In the first chapter, some concepts and results of the functional analysis that is used in the development of the work are presented. It begins with a review of the Banach spaces and some results related to these studies, such as the Hanh-Banach theories, by Banach Steinhaus, and the open application theorem.
The second chapter gives the fundamentals of the theory of nuclear operators, compacts and the injective and projective tensor products of Banach spaces, including some theorems of isomorphic classification of continuous functions with values in a Banach X space. They are also described in the injectable tensorial products $\ell_1 \widehat{\otimes}_\epsilon \ell_p$ and we characterize this space using projections on ℓ_p and successions in ℓ_1.
In the last chapter we present the demonstration of the non-existence of an isomorphism between the spaces of compact operators on a subspace of the nuclear operating spaces.

[3]Bachelor Thesis

[4]Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas.

Director: Dr. Ronald Eduardo Paternina Salguedo.

INTRODUCCIÓN

Actualmente la teoría de los espacios de Banach es una de las ramas del Análisis funcional que más rápidamente se ha desarrollado en los últimos 50 *años* y es un tema que todavía sigue muy vivo debido a sus conexiones en distintas áreas de las matemáticas, como la teoría de la probabilidad, el análisis armónico, la dinámica topológica, la geometría integral, ecuaciones diferenciales parciales, entre otras.

Esta teoría comenzó a consolidarse como parte del Análisis funcional con la aparición del libro de Stefan-Banach[5] en 1932, el cual se desarrolló con el objetivo de responder preguntas muy naturales con respecto a la estructura de los espacios de Banach. Uno de los objetos más importantes de la teoría de los espacios de Banach son los espacios de funciones continuas sobre un compacto K de $\mathbb{R}^n$ $C(K)$; de hecho, se puede argumentar que el espacio $C[0,1]$ fue el primer espacio de Banach estudiado[6] en 1903. Además, antes del desarrollo de la medida de Lebesgue, los espacios de funciones continuas eran los únicos espacios de Banach con los cuales se trabajaba.

En el caso que K es un compacto de ordinales, tenemos que en 1958 Bessaga y Pelczynski demostraron, en su artículo[7] que si X es un espacio de Banach y α, β son ordinales infinitos con $\omega \leq \alpha \leq \beta < \omega_1$, entonces $\mathbb{R}^\alpha \sim \mathbb{R}^\beta$ si y solo si $\beta \leq \alpha^\omega$. De ahí surge un problema interesante, el cual consiste en determinar qué sucede cuando α, β son ordinales no enumérables.

En ese mismo año Semadeni dio una respuesta parcial negativa para ese problema, Semadeni demostró que si X es el espacio $\mathbb{R}^{\omega_1 n}$ y X_S es el conjunto de los funcionales secuencialmente continuos en la topología débil* en X^{**}, entonces $\dim \dfrac{X_S}{X} = n$ probando que los espacios $\mathbb{R}^{\omega_1 n}$ son todos no isomorfos para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se dieron otras respuestas parciales para el problema hasta que en 1975, Kislyankov público la solución del problema que posteriormente se llamo la clasificación isomorfa de los espacios de funciones continuas de ordinales. Por otra parte, en 1955 Grothendieck[8] describe el conjunto de los operadores nucleares de dos espacios de Banach X y Y denotado por $N(X, Y)$ y

[5] Y.C. Wong, Scwartz Spaces, Nuclear Spaces and Tensor Product. Springer- Verlag, New York,(1979).

[6] H.H. Schaefer, Topological Vector Spaces. Springer-Verlag, New York, (1971).

[7] C. Bessaga and A. Pelczytiski, Spaces of continuous functions IV (on isomorphical classification of spaces of continuous functions), Studia Math. 19 (1960), 53-62.

[8] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. 16

demuestra que todo operador nuclear es compacto, es decir $N(X,Y) \subset \mathcal{K}(X,Y)$. Igualmente, Grothendieck pregunta, si existen: Espacios de Banach de dimensión infinita en que todo operador compacto $T : X \to Y$ es nuclear. Hubieron varias respuestas negativas para el problema como son el trabajo de Doversty y Rogers en el caso particular de $X = c_0$ y Y un espacio de Banach cualquiera, también destacamos a Pluglissi, Saluzzo y W. Johnson, todos ellos demostraron que

$$N(X,Y) \neq \mathcal{K}(X,Y),$$

para X e Y espacios de Banach, de funciones continuas y $\mathcal{K}$ es el conjunto de operadores compactos. Otro resultado importante es el trabajo de C. Samuel en el cual se demuestra que

$$N(C(K_1), C(K_2)) \hookrightarrow \mathcal{K}(C(K_1), C(K_2)),$$

donde K_1, K_2 son compactos métricos enumérables infinitos. En la otra dirección destacamos el trabajo de Eloi y Ronald que demuestra $\mathcal{K}(C(K_1), C(K_2))$ no es isomorfo a un subespacio de $N(C(K_1), C(K_2))$ donde K_1 y K_2 son compactos de ordinales. El objetivo de esta sección es estudiar estos resultados, en particular la demostración que no existe un isomorfismo entre los espacios de operadores compactos $\mathcal{K}(C(\beta))$ y los espacios de operadores nucleares $N(C(\alpha))$ donde α y β son ordinales.

(1955).

Capítulo 1

PRELIMINARES

Este primer capítulo será dedicado a presentar algunos resultados del Análisis funcional y ciertas nociones que serán usadas durante el desarrollo de este trabajo. Así mismo, las demostraciones no serán realizadas pero serán referenciadas adecuadamente.

Definición 1.1. *Un conjunto es llamado denso en un espacio vectorial normado X, si su clausura es X. Este conjunto es llamado nunca denso si su clausura no contiene un conjunto abierto. Un conjunto es separable, si éste contiene un conjunto denso enumerable.*

Definición 1.2. *Un número ordinal es un representante del tipo de orden de un conjunto bien ordenado. Al primer ordinal no enumerable se le denotó ω^1 por Georg Cantor*

Definición 1.3. *Se define a c_0, como el conjunto de todas las sucesiones (x_n) de números reales que convergen a cero, por:*
$c_0 = \{x = (x_n) : x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (x_n) \text{ converge a } 0\}$. *El espacio c_0 es un espacio de Banach dotado de la norma*

$$||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, \quad \text{para todo } x = (x_n) \in c_0.$$

Definición 1.4. *Se define a ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ como el espacio vectorial de las sucesiones (x_n) de números reales tales que $|x_1|^p + |x_2|^p + ...$ converge, esto es $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Los espacios ℓ_p son espacios de Banach dotados de la norma*

$$||x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}, \text{ para toda sucesión } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p.$$

Definición 1.5. *Se define a ℓ_∞ como el espacio de todas las sucesiones de números reales que son acotadas, es decir, $x = (x_n)$ esta en ℓ_∞ si existe una constante $C_x > 0$ tal que $|x_n| \leq C_x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El espacio ℓ_∞ es un espacio de Banach dotado de la norma*

$$||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, \quad \text{para toda sucesión} x = (x_n) \in \ell_\infty.$$

Definición 1.6. *Se define a $L^p(\Omega)$ como el espacio de todas las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $\displaystyle\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty$. Este espacio de Banach esta dotado de la norma*

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p} \quad \text{para toda } f \in L^p(\Omega).$$

Definición 1.7. *Sea X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$. Entonces X^* es el conjunto de todos los funcionales lineales y continuos sobre X. Para un $f \in X^*$ su norma se define como $||f||_{X^*} = \sup\limits_{||x||\leq 1} \{|f(x)| : x \in X\}$*

Definición 1.8. *Sean X y Y espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{R}$. Se dice que una aplicación $T : X \to Y$ es un isomorfismo, si T es biyectiva, lineal, continua y su inversa T^{-1} es continua; en tal caso también se dice que X y Y son isomorfos.*
Un isomorfismo isométrico entre dos espacios vectoriales normados X y Y es un isomorfismo T entre X y Y para el cual $||Tx|| = ||x||$ para cada $x \in X$ (es decir, T es también una isometría de X en Y).

Teorema 1.1. *Una aplicación lineal sobreyectiva T entre los espacios normados X y Y es un isomorfismo si y solo si existen constantes positivas m, M tal que $m||x|| \leq ||Tx|| \leq M||x||, \quad$ para cada $x \in X$.*

Definición 1.9. *Sea X un espacio vectorial normado. Para cada $x \in X$ se considera el funcional $J_x : X^* \to \mathbb{R}$ definido por $J_x(x^*) = x^*(x)$ para cada$x^* \in X^*$. Entonces, $J_x \in X^{**}$ para cada $x \in X$ y $||J_x||_{X^{**}} = ||x||$. Esto define una función $J : X \to X^{**}$ la cual es llamada la inyección canónica de X en su bidual.*

Teorema 1.2 (Teorema de Hanh-Banach). *Sea $p : X \to \mathbb{R}$ un funcional sublineal, esto es, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ y $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para todo $\alpha \geq 0, y$ todo $x, y \in X$. Si f es un funcional lineal sobre un subespacio Y de X con $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in Y$, entonces* *existe una extensión lineal (funcional lineal) F sobre X tal que $F(x) = f(x)$ para cada $x \in Y$ y $|F(x)| \leq p(x)$ para todo$x \in X$.*

Corolario 1.1. *Sea X un espacio vectorial normado y x un vector no nulo en el subespacio cerrado Y de X. Entonces, existe un funcional $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x) = 1$; y $x^*(y) = 0$ para cada $y \neq x \in Y$.*

Corolario 1.2. *Para cada $x \neq 0$ en un espacio lineal normado X, existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x) = ||x||$.*

Definición 1.10. *Sea (x_n) una sucesión en un espacio vectorial X. Se define el espacio generado por (x_n) como*

$$\text{gen}\{x_i : i \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R} \text{ } y \text{ } todo \text{ } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Se denota la clausura del $\text{gen}\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ *como* $[x_n]$.

Definición 1.11 (Operador Compacto)**.** *Sean X y Y espacios de Banach. Un operador lineal $T : X \to Y$ se dice que es compacto o completamente continuo si para todo subconjunto acotado M de X, la imagen $T(M)$ es relativamente compacto en Y, esto es, la clausura $\overline{T(M)}$ es compacta.*

El conjunto de todos los operadores compactos de X en Y se denotará por $\mathcal{K}(X, Y)$. Cuando $X = Y$ se escribirá simplemente $\mathcal{K}(X)$.

Teorema 1.3. *Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador compacto. Entonces T es continuo.*

Definición 1.12. *Un operador $T : X \to Y$ se llama de rango finito si la imagén $T(X)$ tiene dimensión finita.*

Teorema 1.4. *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador de rango finito, y T_k una aplicación definida de los naturales al conjunto de los operadores de rango finito, así $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de operadores de rango finito tal que $||T_k - T|| \to 0$ cuando $k \to \infty$. Entonces T es un operador compacto.*

Teorema 1.5. *Sean X y Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador continuo. Entonces T es compacto si y solo si $T^* \in \mathcal{K}(X^*, Y^*)$ donde T^* es el operador adjunto asociado a T.*

Ejemplo 1.1. *Si $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces el operador*

$$Tf(x) = \int_a^b k(x, y)f(y)dy \text{ es compacto.}$$

Teorema 1.6. *c_0 no es isomorfo a un subespacio de ℓ_p, con $1 \leq p \leq \infty$.*

Teorema 1.7 (Petzynski-Semadeni)**.** *Sea K un intervalo de números ordinales. Si $\varphi \in C(K)^*$, entonces existen sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en K tales que*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x(c_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty. \end{aligned}$$

En particular, $C[1, \alpha]^*$ es isomorfo a ℓ_1.

Teorema 1.8 (Pitt)**.** *Ningún subespacio de c_0 es isomorfo a un subespacio de ℓ_p, con $1 \leq p < \infty$.*

Teorema 1.9. *ℓ_1 no es isomorfo a un subespacio de $C(K)$ donde K es un compacto de números ordinales.*

Definición 1.13. *Si $\phi : X \to \mathbb{R}$ es una función, entonces el soporte de ϕ se define como*

$$\operatorname{sop} \phi = \overline{\{x \in X : \phi(x) \neq 0\}}.$$

Definición 1.14. *Sea $(V_\alpha)_{\alpha\in J}$ un cubrimiento abierto indexado de X. Una familia indexada de funciones continuas $\varphi_\alpha : X \to [0, 1]$ se dice que es una partición de la unidad sobre X subordinada a $\{V_\alpha\}$, si:*

(*a*) $\operatorname{sop} \varphi_\alpha \subset V_\alpha$ *para cada α.*

(*b*) *La familia indexada $\{\operatorname{sop}\ \varphi_\alpha\}$ es localmente finita.*

(*c*) $\sum \varphi_\alpha(x) = 1$ *para cada $x \in X$.*

Teorema 1.10. *Si $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ es un cubrimiento abierto finito del espacio normal X, entonces existe una partición de la unidad sobre X subordinada a $\{V_i\}$.*

Capítulo 2

PRODUCTOS TENSORIALES DE ESPACIOS VECTORIALES

2.1. PRODUCTO TENSORIAL INYECTIVO Y ESPACIOS DE OPERADORES COMPACTOS

En esta sección se realiza un breve estudio de el producto tensorial de dos espacios vectoriales y se dan algunos ejemplos que serán utilizados en secciones posteriores. Los espacios vectoriales que se consideran son todos reales. Sean E, F y M espacios vectoriales y $\phi : E \times F \to M$ una forma bilineal.

Definición 2.1. *Se dice que E y F son $\phi-$linealmente disyuntos si la siguiente condición es válida. Sean $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ y $\{y_1, y_2, ..., y_r\}$ subconjuntos finitos de E y F, respectivamente, tales que*

$$\sum_{j=1}^{r} \phi(x_j, y_j) = 0.$$

Entonces, si $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ es linealmente independiente entonces $y_1 = y_2 = ... = y_r = 0$ y si $\{y_1, y_2, ..., y_r\}$ es linealmente independiente entonces $x_1 = x_2 = ... = x_r = 0$.

Antes de dar la definición de producto tensorial, se establece una forma equivalente de ver cuando un par de espacios vectoriales son $\phi-$ linealmente disyuntos.

Teorema 2.1. *Sean E, F y M tres espacios vectoriales y ϕ una forma bilineal de $E \times F$ en M. Entonces, E y F son ϕ linealmente disyuntos si y solo si lo siguiente es verdadero. (*) Sean*

$\{x_j\}$ y $\{y_k\}$ con $(1 \leq j \leq r,\ 1 \leq k \leq s)$, conjuntos arbitrarios linealmente independientes de vectores en E y F, respectivamente. Entonces el conjunto de vectores de M, $\phi(x_j, y_k)$ es linealmente independiente.

Demostración. Veamos que si E y F son ϕ linealmente disyuntos y si $\{x_j\}$ y $\{y_k\}$ son L.I entonces $\phi(x_j, y_k)$ es L.I. Sean x_j y y_k como en (*) y sea $\lambda_{j,k}$ en M ahora supongamos que $\sum_{j,k=1}^{r,s} \lambda_{j,k}\phi(x_j, y_k) = 0$. Se define $z_j = \sum_{k=1}^{s} \lambda_{j,k} y_k$ para todo $j = 1, ..., r$. Como ϕ es bilineal tenemos:

$$\phi(x_j, z_j) = \phi\left(x_j, \sum_{k=1}^{s} \lambda_{j,k} y_k\right) = \sum_{k=1}^{s} \lambda_{j,k}\phi(x_j, y_k)$$

y por tanto $\sum_{j=1}^{r} \phi(x_j, z_j) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} \lambda_{j,k}\phi(x_j, y_k) = 0$, y como $\{x_j\}_{j=1}^{r}$ es linealmente independiente, por la definición (2.1) se tiene que $z_j = 0$ para todo $j = 1, 2, ..., r$, esto es, $z_j = \sum_{k=1}^{s} \lambda_{j,k} y_k = 0$, para todo $j = 1, 2, ...r$; y como los $\{y_k\}_{k=1}^{s}$ son linealmente independientes, concluimos por la definición (2.1) que $\lambda_{j,k} = 0$ para todo $j = 1, ..., r$ y $k = 1, ..., s$.

Recíprocamente demostremos que (*) ímplica la definición (2.1). Sean $\{x_j\}$ y $\{y_k\}$ con $(1 \leq j \leq r,\ 1 \leq k \leq s)$ subconjuntos finitos de E y F respectivamente. Se supone que el conjunto $\{x_j\}_{j=1}^{r}$ es linealmente independiente y sea $\{z_1, z_2, ...z_s\}$ una base del subespacio lineal generado por los y_j. Por tanto existen escalares $\lambda_{j,k}$ con $(1 \leq j \leq r,\ 1 \leq k \leq s)$ tales que $y_j = \sum_{k=1}^{s} \lambda_{j,k} z_k$ para todo $j = 1, ..., r$. Por hipotésis de la definición (2.1) $\sum_{j=1}^{r} \phi(x_j, y_j) = 0$ y como ϕ es bilineal y reemplazando los y_j en $\sum_{j=1}^{r} \phi(x_j, y_j) = 0$, se tiene que $\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} \lambda_{j,k}\phi(x_j, z_k) = 0$, entonces por hipotésis de la implicación concluimos que $\lambda_{j,k} = 0$, para todo $(1 \leq j \leq r,\ 1 \leq k \leq s)$. Así todos los y_j son iguales a cero. Análogamente se demuestra que si $\{y_1, y_2, ..., y_r\}$ es linealmente independiente entonces $x_1 = x_2 = ... = x_r = 0$.

□

Definición 2.2. *Un producto tensorial de E y F es un par (M, w) que consiste de un espacio vectorial M y de un funcional bilineal w de $E \times F$ en M que cumple las siguientes condiciones:*

(1) *$w(E \times F)$ genera todo el espacio M.*

(2) *E y F son w-linealmente disyuntos.*

Para mantener la costumbre el producto tensorial de E y F es denotado por $E \otimes F$ y escribimos $w(x, y) = x \otimes y$ para cada $x \in E$ y cada $y \in F$.

El próximo teorema garantiza la existencia de un producto tensorial de cualquier par de espacios vectoriales, su unicidad se garantiza salvo isomorfismo y la bien conocida propiedad universal, Para la demostración del teorema el lector puede consultar [11] (pag. 415).

Teorema 2.2. *Sean E y F dos espacios vectoriales. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(1) *Existe un producto tensorial de E y F.*

(2) *Sea (M, w) un producto tensorial de E y F. Sea G un espacio vectorial y b una función bilineal de $E \times F$ en G. Entonces, existe una única función bilineal $\widetilde{b}$ de M en G tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "b"] \arrow[d, "w"'] & G \\ M \arrow[ur, "\widetilde{b}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo; esto es para todo $x \in E$ e $y \in F$ se tiene que:

$$b(x, y) = \widetilde{b}(w(x, y)) = \widetilde{b}(x \otimes y).$$

(3) *Si (M_1, ϕ_1) y (M_2, ϕ_2) son dos productos tensoriales de E y F, existe una función lineal uno a uno μ de M_1 sobre M_2 tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, "\phi_1"'] & M_2 \\ M_1 \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo; esto es para todo $x \in E$ e $y \in F$ se tiene que:

$$\phi_2(x, y) = \mu(\phi_1(x, y)) = \phi_2(x \otimes y).$$

Nota 2.1. *Se consideran cuatro espacios vectoriales E, F, E_1 y F_1, y funciones lineales $S : E \to E_1$ y $T : F \to F_1$. Se define la función $b : E \times F \to E_1 \times F_1$ como $b(x, y) = S(x) \otimes T(y)$. Entonces por el teorema 2.2 existe una función bilineal $\widetilde{b}$ de $E \times F$ en $E_1 \times F_1$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "b"] \arrow[d, "w"'] & E_1 \times F_1 \\ E \times F \arrow[ur, "\widetilde{b}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, esto es, para todo $x \in E$ e $y \in F$ se tiene que:

$$b(x, y) = \widetilde{b}w(x, y) = \widetilde{b}(x \otimes y)$$

La función bilineal $\widetilde{b}$ es denotada por $S \otimes T$ y escribimos $(S \otimes T)(x \otimes y) = S(x) \otimes T(y)$.

Ejemplo 2.1. *Sean F y K un espacio vectorial normado, y un espacio topológico compacto y Hausdorff respectivamente, y $C_F(K, F)$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas de K en F tales que el espacio imagen esta contenido en un subespacio de F de dimensión finita. Se define $w(f, y) = f(\cdot)y$ para cada $y \in F$ y $f \in C(K)$, donde $C(K)$ es el espacio vectorial de todas las funciones continuas de K en $\mathbb{R}$. Veamos que, $(C_F(K, F), w)$ es el producto tensorial de $C(K)$ y F.*

Solución: Se demuestra que w es bilineal. Sean $f, g \in C(K)$, $y \in F$ y $a \in K$. Entonces se cumple lo siguiente.

$$\begin{aligned} w(f + g, y) &= (f + g)(\cdot)y \\ &= f(\cdot)y + g(\cdot)y \\ &= w(f, y) + w(g, y). \end{aligned}$$

Sea $k \in F$. Entonces

$$\begin{aligned} (f, y + k) &= f(\cdot)(y + k) \\ &= f(\cdot)y + f(\cdot)k \\ &= (f, y) + w(f, k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(af,y) &= (af)(\cdot)y \\ &= a(f(\cdot)y) \\ &= aw(f,y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(f,ay) &= f(\cdot)(ay) \\ &= f(\cdot)ya \\ &= (f(\cdot)y)a \\ &= w(f,y)a \\ &= aw(f,y) \end{aligned}$$

Por tanto, w es una forma bilineal de $C(K)$ en F.

Ahora se demuestra que $C(K)$ y F son w-linealmente disyuntos. Sea $\{f_j\}_{j=1}^r$ un conjunto de funciones linealmente independientes de $C(K)$ y $\{y_k\}_{k=1}^s$ conjunto linealmente independiente de elementos de Y. Sean $\lambda_{j,k}$ escalares con $j = 1, 2, ..., r$ y $k = 1, 2, ..., s$, tales que

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\lambda_{j,k}w(f_j, y_k) = 0.$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\lambda_{j,k}f_j(\cdot)y_k = 0.$$

Así,

$$\Big(\sum_{j=1}^{r} f_j(\cdot)\lambda_{j1}\Big)y_1 + \Big(\sum_{j=1}^{r} f_j(\cdot)\lambda_{j2}\Big)y_2 + ... + \Big(\sum_{j=1}^{r} f_j(\cdot)\lambda_{js}\Big)y_s = 0.$$

Como $\{y_1, ...y_s\}$ es linealmente independiente entonces:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{r} f_j(\cdot)\lambda_{j1} = 0, \\ \sum_{j=1}^{r} f_j(\cdot)\lambda_{j2} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{r} f_j(\cdot)\lambda_{js} = 0. \end{gathered}$$

Pero las $f_1, f_2, ..., f_r$ *son linealmente independientes, entonces tenemos que* $\lambda_{j1} = \lambda_{j2} = \cdots = \lambda_{js} = 0$ *para todo* $j = 1, 2, ..., r$. *Así,* $C(K)$ *y* F *son* w*-linealmente disyuntos. Finalmente, sea* $\psi \in C_F(K, F)$ *y sea* $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ *una base del subespacio de* F *generado por* $\psi(K)$. *Entonces, para cada* $t \in K$ *existen funciones* $g_1(t), ..., g_m(t)$ *en* $C_F(K, F)$ *tales que*

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^{m} g_i(t)e_i.$$

Sea $\{x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*\}$ *la base dual de* $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$, *es decir, funcionales lineales tales que* $x_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ *para* $i, j = 1, ..., m$. *Por tanto,* $x_i^*(\psi(t)) = g_i(t)$ *para todo* $i = 1, 2, ..., m$. *Por definición,* g_i *es continua para todo* $i = 1, ..., m$. *Así,* $\psi(t) = \sum_{i=1}^{m} g_i(t)e_i = \sum_{i=1}^{m} w(g_i, e_i)$.

Esto demuestra que ψ *esta en el espacio lineal generado por* $w(C(K) \times F)$ *y es claro que todo elemento en el espacio generado por* $w(C(K) \times F)$ *esta en* $C_F(K, F)$. *Luego,* $C_F(K, F)$ *y* $C(K) \otimes F$ *son algebraicamente isomorfos.*

Nota 2.2. *La forma bilineal* w *es denotada por* $f \otimes e$ *y cada función* $g \in C_F(K, F)$ *es escrita como* $g = f_1 \otimes e_1 + \cdots + f_j \otimes e_j$ *con* $f_j \in C(K)$.

Ejemplo 2.2. *Sea* F *un espacio vectorial normado, se considera*

$$c_0(F) = \{(x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = 0, x_n \in F \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

$c_0(F)$ *es un espacio vectorial. En el caso que* $F = \mathbb{R}$ *se escribe* c_0. *Se denota por* $c_{0f}(F)$ *el subespacio de* $c_0(F)$ *que consiste de las sucesiones que están contenidas en un subespacio de dimensión finita de* F. *Se define la función* $w : c_0 \times F \to c_{0f}(F)$ *como* $w((x_n), y) = (x_n y)$ *para cada* $x_n \in \mathbb{R}$ *y* $y \in F$ *Entonces* w *es una funcion bilineal de* $c_0 \times F$ *en* $c_0(F)$. *Además* $c_{0f}(F)$ *es el producto tensorial de* c_0 *y* F.

Solución : En efecto primero veamos que w es bilineal. Sean $(x_i)_{i\geq 1}$ e $(y_i)_{i\geq 1}$ sucesiones en c_0. Entonces,

$$\begin{aligned} w\left((x_i)_{i\geq 1}) + (y_i)_{i\geq 1}, y\right) &= ((x_i + y_i)y)_{i\geq 1} \\ &= (x_i y + y_i y)_{i\geq 1} \\ &= (x_i y)_{i\geq 1} + (y_i y)_{i\geq 1} \end{aligned}$$

$$= w((x_i)_{i\geq 1}, y) + w((y_i)_{i\geq 1}, y).$$

Además, si $z \in F$ entonces

$$\begin{aligned} w((x_i)_{i\geq 1}), y+z) &= ((x_i)(y+z))_{i\geq 1} \\ &= (x_i y + x_i z)_{i\geq 1} \\ &= (x_i y)_{i\geq 1} + (x_i z)_{i\geq 1} \\ &= w((x_i)_{i\geq 1}, y) + w((x_i)_{i\geq 1}, z). \end{aligned}$$

Veamos que c_0 y F son w- linealmente disyuntos. Sean $(\gamma_i^k)_{i\geq 1}$, con $k = 1, 2, ..., m$, y $\{y^{(1)}, ..., y^{(n)}\}$ conjuntos linealmente independientes de c_0 y F, respectivamente. Se considera, la ecuación

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_j^{(k)} w((\gamma_j^k), y^j) = 0, \quad k = 1, ..., m.$$

Entonces,

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_j^{(k)} \gamma_j^k y^j = 0, \quad k = 1, ..., m.$$

Como los $y^{(1)}, ..., y^{(n)}$ son linealmente independientes en F, se tiene que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(k)} \gamma_j^k = 0$ para todo $j = 1, 2, ..., n$. Además, como $(\gamma_j^k)_{j\geq 1}$ son linealmente independientes, obtenemos que $\lambda_j^k = 0$ para todo $k = 1, 2, ..., m$. Por lo tanto, c_0 y F son w-linealmente disyuntos. Finalmente, Sean $(y_i)_{i\geq 1} \in c_{0f}(F)$ y $\{e_1, ...e_m\}$ una base del subespacio vectorial de F generado por el conjunto y_i con $i \in \mathbb{N}$. Entonces, cada y_i tiene una representación única

$$y_i = \sum_{r=1}^{m} \lambda_i^{(r)} e_r, \quad i = 1, 2, ...$$

Sean $x_1^*, ..., x_m^*$ funcionales lineales continuos de F^* tal que $x_k^*(e_r) = \delta_{kr}$. Entonces, $x_k^*(y_i) = \lambda_i^{(k)}$ para cada $k = 1, 2, ...m$ y todo $i \in \mathbb{N}$. Para cada $\delta > 0$, el conjunto $V = \{y \in F : |x_k^*(y)| < \delta \ \textit{para toda} \ k = 1, 2, ..., m\}$ es un subconjunto abierto de F que contiene el origen. Si $y_i \in c_{of}(F)$, se tiene que $y_i \to 0$, por tanto existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_i \in V$ para todo $i \geq n_0$ y $k = 1, 2, ..., m$. Así, la sucesión $((\lambda_i^k))_{i\geq 1}^{\infty}$ pertenece a c_0 para todo $k = 1, 2, ..., m$ Además, $y_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(r)} e_r = \sum_{i=1}^{m} w((\lambda_i^{(r)})_{i\geq 1}, e_r)$. Por tanto, $c_{0f}(F)$ y $c_0 \otimes F$ son algebraicamente isomorfos.

Ejemplo 2.3. *Dado un espacio vectorial normado F y se considera a $\ell^1(F) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in F$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty\}$. Entonces, $\ell^1(F)$ es un espacio vectorial normado y cuando $F = \mathbb{R}$ escribimos ℓ^1. Se considera ahora $\ell_f^1(F)$ el subespacio vectorial de $\ell^1(F)$ que consiste en todas las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\ell^1(F)$ tal que el conjunto de índices de la sucesión $\{x_i\}_{i\geq 1}$ esta contenido en un subespacio de dimensión finita de F. Se define $w : \ell^1 \times F \to \ell_f^1(F)$ como $w((\lambda_n)_{n\geq 1}, y) = (\lambda_n y)_{n\geq 1}$ entonces, w es una función bilineal de $\ell^1 \times F$ en $\ell_f^1(F)$, además $\ell_f^1(F)$ es el producto tensorial de ℓ^1 y F.*

Solución: La prueba que w es una función bilineal es igual a la demostración del ejemplo anterior.

Se demostrara ahora que $\ell_f^1(F)$ es la clausura de $w(\ell^1 \times F)$. Para ello, sea $(y_n)_{n\geq 1}$ un elemento de $\ell_f^1(F)$ y $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ una base del subespacio de F generado por el conjunto $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, cada y_n tiene una única representación $y_n = \sum_{r=1}^{m} \lambda_n^{(r)} e_r$. Considere $x_1^*, x_2^*, ...x_m^*$ funcionales lineales del dual F^* asociados a e_i, esto es $x_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Luego $x_i^*(y_j) = \lambda_j^{(i)}$ para todo $i = 1, 2, ..., m$ y todo $j \in \mathbb{N}$.

Como $(y_n)_{n\geq 1}$ pertenece a $\ell_f^1(F)$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n^{(i)}| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_i^*(y_n)| < \sum_{n=1}^{\infty} ||x_i^*|| \, ||y_n|| = ||x_i^*|| \sum_{n=1}^{\infty} ||y_n|| < +\infty$$

para todo $i = 1, 2, ...m$. Así, para todo $i = 1, 2, ..., m$ la sucesión de números reales $(\lambda_n^*)_{n\geq 1}$ pertenece a ℓ^1 y por tanto $y_n = \sum_{r=1}^{m} \lambda_n^{(r)} e_r = \sum_{r=1}^{m} w((\lambda_n^{(r)})_{n\geq 1}, e_r)$, esto es, y_n pertenece al espacio vectorial de $w(\ell^1 \times F)$. Así, $\ell_f^1(F)$ es generado por $w(\ell^1 \times F)$. Luego, $\ell_f^1(F)$ y $\ell^1 \times F$ son algebraicamente isomorfos.

Ejemplo 2.4. *Sean X y Y espacios vectoriales normados y X^* el dual de X. Se considera la forma $w : X^* \times Y \to L^f(X, Y)$ definida como $w(f^*, y)(x) = f^*(x)y$ para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$. Entonces w es una forma bilineal y $L^f(X, Y)$ es el producto tensorial de $x^* \otimes y$ ($L^f(X, Y) = \{T : X \to Y : T\ es\ de\ rango\ finito\}$).*

Solución: Veamos que w es bilineal. Sean $f^* \in X^*$ fijo, y_1, y_2 en Y, y α, β números reales.

Entonces

$$\begin{aligned} w(f^*, \alpha y_1 + \beta y_2)(x) &= f^*(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ &= \alpha f^*(x) y_1 + \beta f^*(x) y_2 \\ &= \alpha\beta(f^*, y_1)(x) + \beta w(f^*, y_2)(x). \end{aligned}$$

Se considera ahora $y \in Y$ fijo. Entonces para f^*, g^* *en* X^* y α, β números reales,

$$\begin{aligned} w(\alpha f^* + \beta g^*, y)(x) &= (\alpha f^* + \beta g^*)(x) y \\ &= [\alpha f^*(x) + \beta g^*(x)] y \\ &= \alpha f^*(x) y + \beta g^*(x) y \\ &= \alpha w(f^*, y) x + \beta w(g^*, y)(x) \end{aligned}$$

Se demuestra ahorra que X^* y Y son w-linealmente disyuntos. Sean $\{f_i^* : 1 \leq i \leq m\}$ y $\{y_j : 1 \leq j \leq m\}$ subconjuntos de X^* y Y linealmente independientes respectivamente, y sea $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$. Se considera la ecuación

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_{i,j} w(f_i^*, y_j)(x) = 0.$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_{i,j} f_i^*(x) y_j = 0.$$

Como $\{y_j : 1 \leq j \leq n\}$ es linealmente independiente tenemos que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_{i,j} f_i^*(x) = 0$ y así $\lambda_{ij} = 0$, dado que $\{f_i^* : 1 \leq i \leq m\}$ es linealmente independiente. Por tanto, X^* y Y son w-linealmente disyuntos.

Se demuestra que $gen\{w(X^* \times Y)\} = L^f(X, Y)$ el conjunto de operadores de rango finito. Como $w(X^* \times Y) \subset L^f(X, Y)$ entonces $gen\{w(X^* \times Y)\} \subset L^f(X, Y)$.

Sea $T : X \to Y$ un operador de rango finito. Entonces $T(X)$ tiene dimensión finita. Luego, existe $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ una base de $T(X)$. Sea la base dual $f_1, f_2, ..., f_n \in Y^*$ de Y tal que $f_i(y_j) = f_{ij}$, y para cada $y \in gen\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ se tiene que $y = \sum_{i=1}^{n} f_i(y) y_i$.

Ahora se define $g_i^* = f_i \circ T$. Como T es de rango finito entonces T es compacto y por tanto acotado. Luego $g_i^* \in X^*$ para cada $i = 1, 2, ..., n$. Además, si $x \in X$ entonces Tx pertenece a la imagen de T, la cual es generada por $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Así,

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{i=1}^{n} f_i(Tx)y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ T)(x)y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} g_i^*(x)y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} w(g_i^*, y_i)(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto T pertenece al espacio generado por $w(X^* \times Y)$. Así, $X^* \otimes Y$ es algebraicamente isomorfo a $L^f(X, Y)$.

Luego del ejemplo anterior se sigue que si T es un operador de rango finito entonces T puede ser identificado por $\sum_{i=1}^{n} f_i^* \otimes y_i$, lo cual se obtiene de la ecuación $Tx = \sum_{i=1}^{n} f_i^*(x)y_i$.

Ejemplo 2.5. *Sean E y F espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{R}$. Se considera la funcion bilineal canónica w de $E \times F$ en $\beta(E^* \times F^*)$*[1]*, la cual es definida como*

$$w : E \times F \to \beta(E^* \times F^*)$$

$$(x, y) \to (w(x, y) : E^* \times F^* \to \mathbb{R})$$

Existe un único$\phi \in \beta(E^* \times F^*)$ tal que $w(x, y) = \phi$ Como

$$\phi(x^*, y^*) = w(x, y)(x^*, y^*)$$

donde

$$x^* : E \to \mathbb{R}, \quad y^* : E \to \mathbb{R}$$

$$x \to x^*(x) \qquad y \to y^*(y)$$

Entonces

$$\phi(x^*, y^*) = w(x, y)(x^*, y^*) = x^*(x)y^*(y) \in \mathbb{R}$$

[1] Espacio de las funciones bilineales continuas de E $\times F en$ $\mathbb{R}$

para cada $x \in E$ y $y \in F$. Como x^* y y^* son funcionales lineales de E y F respectivamente, entonces w es bilineal. Veamos que E y F son w-linealmente disyuntos. En efecto, se consideran dos conjuntos finitos linealmente independientes de vectores $\{x_j\}_{j=1}^n$, $\{y_k\}_{k=1}^m$ de E y F, respectivamente, y las bases duales $(x_j^*)_{j=1}^n$, $(y_k^*)_{k=1}^m$ de $\{x_j\}_{j=1}^n$ y $\{y_k\}_{k=1}^m$, respectivamente. Esto es, $x_j^*(x_k) = \delta_{j,k}$ y $y_k^*(y_j) = \delta_{k,j}$ Por tanto, $w(x_j, y_k)$ toma el valor de 1 sobre (x_j^*, y_k^*) cuando $J = k$ y 0 sobre $< x_i^*, y_p^* >$ cuando $i \neq j$ y $p \neq k$. Sean $(\lambda_{j,k})$ números reales tales que

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,k}w(x_j, y_k) = 0.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,k}w(x_j, y_k)(x_j^*, y_k^*) = \lambda_{j,k} = 0,$$

para todo $j = 1, 2, ..., n$ y $k = 1, 2, ..., m$ Así, E y F son w-linealmente disyuntos. Entonces el subespacio vectorial de $\beta(E^*, F^*)$ generado por $w(E \times F)$ es algebraicamente isomorfo a $E \otimes F$.

Ejemplo 2.6. *Sean E y F espacios vectoriales normados y $\beta(E, F)^*$ el dual algebraico de las formas bilineales de $E \times F$ en $\mathbb{R}$. Definimos $w : E \times F \to \beta(E \times F)^*$ definido por $w(x, y)f = f(x, y)$ para todo $f \in \beta(E \times F)$. Entonces, w es una forma bilineal y E, F son w-linealmente disyuntos. Así, el subespacio vectorial de $\beta(E \times F)^*$ generado por $w(E \times F)$ es algebraicamente isomorfo a $E \times F$. En efecto, que w sea bilineal es claro ya que f es bilineal. Sean, $\{x_i\}_{i=1}^n$ y $\{y_j\}_{j=1}^m$ conjuntos linealmente independientes en E y F, respectivamente. Se considera $\{x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\}$ y $\{y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*\}$ las bases duales de $\{x_i\}_{i=1}^n$ y $\{y_j\}_{j=1}^m$, respectivamente. Entonces, $x_i^*(x_j) = \delta_{i,j}$ y $y_i^*(y_j) = \delta_{i,j}$ considere $\lambda_{i,j}$ escalares, tales que*

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i,j}w(x_i, y_j) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i,j}w(x_i, y_j)(x_k^*, y_p^*) = 0,$$

por lo cual $\lambda_{j,k} = 0$ para todo $k = 1, 2, ..., n$ y $j = 1, 2, ..., m$. Por lo tanto, el subespacio vectorial de $\beta(E \times F)^*$ generado por $w(E \times F)$ es algebraicamente isomorfo a $E \otimes F$.

Nota 2.3. *Se tienen otros isomorfismos algebraicos, como los siguientes.*

(a) $\beta(E^* \times F^*)$ *y* $L(E^* \times F)$ *son algebraicamente isomorfos, dada la aplicación*

$$w : L(E^* \times F) \to \beta(E^* \times F^*)$$

$$T \to w_T(x^*, y^*) = y^* T x^*$$

es un isomorfismo algebraico.

(b) $L(E, F^*)$ *es algebraicamente isomorfo a* $\beta(E \times F)$ *por*

$$w : L(E \times F^*) \to \beta(E \times F)$$

$$T \to w_T(x, y) = (Tx)y$$

Nota 2.4. *Recordemos que una forma bilineal* $w \in B(E \times F)$ *es continua (esto es* $w \in \beta(E \times F)$*) si y solo si existe una constante* $M > 0$ *tal que* $|w(x, y)| \leq M||x||\ ||y||$ *para todo* $x \in E$*, y todo* $y \in F$*. En este caso, se puede definir su norma en* $\beta(E \times F)$*como*

$$||w|| = \sup\{|w(x, y)| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\}$$

$||\ ||$ *es llamada la norma bilineal.*
Así, del isomorfismo algebraico entre $L(E \times F^*)$ *y* $\beta(E \times F)$ *(*$T \to w_T$*) definido en la nota anterior obtenemos un isomorfismo isométrico entre espacios de Banach* $(L(E \times F^*), ||\ ||)$ *y* $(\beta(E \times F), ||\ ||)$ *ya que, para todo* $T \in L(E \times F^*)$ *tenemos*

$$\begin{aligned} ||T|| &= \sup_{x \in E}\{||Tx|| : ||x|| \leq 1\} \\ &= \sup_{x \in E, ||x|| \leq 1} \left\{ \sup_{y \in F}\{||(T_x)y|| : ||y|| \leq 1 \right\}\} \\ &= \sup_{x \in E} \sup_{y \in F}\{|w_T(x, y)| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\} \\ &= ||w_T||, \end{aligned}$$

y por tanto el isomorfismo algebraico es un isomorfismo isométrico. Se concluye así lo siguiente.

Teorema 2.3. *Sean E, F espacios vectoriales normados. Existe un isomorfismo isométrico entre $L(E \times F^*)$ y $\beta(E \times F)$ definido por:*

$$w : L(E \times F^*) \to \beta(E \times F)$$

$$T \to w_T(x, y) = (Tx)y$$

Nota 2.5. *Como $\beta(E\times F)$ es un subespacio vectorial de $B(E\times F)$ entonces, del isomorfismo entre $E\otimes F$ y el dual $\beta(E\times F)^*$ obtenemos que cada elemento $x\otimes y \in E\otimes F$ se puede identificar como un funcional lineal en $\beta(E \times F)$. $\Big(x \otimes y \xrightarrow{w} (x \otimes y)f = f(x, y)\Big)$, y su norma*

$$\begin{aligned} ||x \otimes y|| &= Sup\{|(x \otimes y)f| : ||f|| \leq 1, f \in \beta(E, F)\} \\ &= Sup\{|f(x, y)| : ||f|| \leq 1, f \in \beta(E, F)\}. \end{aligned}$$

Además, para todo $x \in E$, $y \in F$ y cada forma bilineal continua f de $E \times F$ en $\mathbb{R}$ se tiene que $|f(x, y)| \leq ||x|| \, ||y|| \, ||f||$; en particular, si $||f|| \leq 1$ entonces $|f(x, y)| \leq ||x|| \, ||y||$. Así tenemos que $\sup\{|f(x, y)| : ||f|| \leq 1, f \in \beta(E \times F)\} \leq ||x|| \, ||y||$, y por tanto, $||x \otimes y|| \leq ||x||||y||$.
Para la desigualdad contraria, considere $\psi : E \times F \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(x, y) = x^*(x)y^*(y)$, con $x^* \in E^*, y^* \in F^*$ funcionales lineales continuos fijos. Entonces ψ es una forma bilineal continua, esto es, $\psi \in \beta(E \times F)$. Además

$$|\psi(x, y)| = |x^*(x)y^*(y)| = |x^*(x)||y^*(y)|$$

$$\leq ||x^*|| \, ||x||| \, ||y^*|| \, ||y||.$$

Si tomamos $x^* \in E^*$ y $y^* \in F^*$ tal que $||x^*|| \leq 1$ y $||y^*|| \leq 1$ obtenemos $|\psi(x, y)| \leq ||x|| \, ||y||$, esto es $||\psi|| \leq 1$, y por tanto

$$|\psi(x, y)| \leq \sup\{|(x \otimes y)f| = ||f|| \leq 1, f \in \beta(E \times F)\}$$

$$= \sup\{|f(x, y)| : ||f|| \leq 1, f \in \beta(E \times F)\}$$

$$= ||x \otimes y||,$$

para todo $x \in X$ y $y \in Y$.
Así, $|x^*(x)||y^*(y)| \leq ||x \otimes y||$ para todo$x^* \in E^*$con $||x^*|| \leq 1$ y para todo $y^* \in F^*$ con

$||y^*|| \leq 1$. *Esto es* $||x \otimes y||$ *es cota superior del conjunto anterior, y por definición de supremo tenemos que*

$$\sup\{|x^*(x)| : ||x^*|| \leq 1\} \sup\{|y^*(y)| : ||y^*|| \leq 1\} \leq ||x \otimes y||.$$

Por teorema sabemos que $||x|| = \sup\{|x^*(x)| : ||x^*|| \leq 1\}$ *y* $||y|| = \sup\{|y^*(y)| : ||y^*|| \leq 1\}$ *entonces* $||x||\ ||y|| \leq ||x \otimes y||$. *Luego* $||x \otimes y|| = ||x||\ ||y|| = \sup\{|x^*(x)| : ||x^*|| \leq 1\} \sup\{|y^*(y)| : ||y^*|| \leq 1\} = \sup\{|x^*(x)y^*(y)| : ||x^*|| \leq 1, ||y^*|| \leq 1\}$.

Se ha demostrado así el siguiente resultado.

Teorema 2.4. *Sean* E *y* F *espacios vectoriales normados y* $x \in E, y \in F$. *Se identifica* $x \otimes y$ *como un elemento de* $\beta(E \times F)^*$ *entonces*

$$||x \otimes y|| = \sup\{|x^*(x)y^*(y)| : x^* \in E^*, y^* \in F^*, ||x^*|| \leq 1, ||y^*|| \leq 1\}.$$

Podemos así definir una norma en el espacio del producto tensorial.

Definición 2.3. *Para cada* $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \ \in E \otimes F$ *se define*

$$||\mu||_\pi = \sup\{|f(\mu)| : ||f|| \leq 1 \text{ y } f \in \beta(E, F)\},$$

$$||\mu||_\epsilon = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} x^*(x)y^*(y)\right| : ||x^*|| \leq 1, ||y^*|| \leq 1\right\},$$

donde $||\mu||_\pi$ *es llamada la* π*- norma y* $||\mu||_\epsilon$ *como la* ϵ*-norma.*

Definición 2.4. *La completitud de* $E \otimes F$ *bajo la norma* $||\ ||_\epsilon$, *denotada por* $E \widehat{\otimes}_\epsilon F$, *es llamada el producto tensorial inyectivo de* E *y* F.
La completitud de $E \otimes F$ *bajo la norma* $||\ ||_\pi$, *denotada por* $E \widehat{\otimes}_\pi F$, *es llamada el producto tensorial proyectivo de* E *y* F.

Nota 2.6. *La función* $\sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i \rightarrow T$, *donde* $T : E \rightarrow F$ *es un operador lineal definido por* $T_x = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) y_i$, *es un isomorfismo isométrico entre* $E^* \otimes F$ *y* $L(E, F)$ *pues a cada* $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i$ *en* $E^* \otimes F$ *le asigna un operador* T *tal que:*

$$||T|| = \sup\{||T_x|| : ||x|| \leq 1\}$$

$$= \sup\left\{\left|\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)y_i\right|\right| : ||x|| \leq 1\right\}$$
$$= \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)y^*(y_i)\right| : ||x|| \leq 1, ||y^*|| \leq 1\right\}$$
$$= \left|\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i\right|\right|_\epsilon = ||\mu||_\epsilon$$

Este resultado establece una identificación entre $\sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i \in E^* \otimes F$ con un operador T de $L(E, F)$ de rango finito de $L^f(E, F)$. Se sabe que todo operador de rango finito es compacto y por lo tanto $L^f(E, F)$ es un subespacio de $\mathcal{K}(E, F)$ si tomamos las clausuras de este isomorfismo obtenemos que la completitud de $E^* \otimes_\epsilon F$ es isomorfa a la clausura de $L^f(E, F)$ en $\mathcal{K}(E, F)$, esto es, $E^* \otimes_\epsilon F \equiv \overline{L^f(E, F)}$.

Para terminar esta sección se da una condición sobre los espacios de Banach E o F para que $\overline{L^f(E, F)}$ de exactamente $\mathcal{K}(E, F)$ (y por tanto $E^* \widehat{\otimes}_\epsilon F \equiv \mathcal{K}(E, F)$), esto es, que el conjunto de los operadores de rango finito es denso en el espacio de operadores compactos.

Definición 2.5. *Un espacio de de Banach X tiene la propiedad de aproximación si para cada conjunto compacto $K \subset X$ y cada $\epsilon > 0$ existe un operador $T : X \to X$ de rango finito (es decir, para $x \in K$ se tiene que $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)x_i$, para algún $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$ y $\{x_i^*\}_{i=1}^n \subset X^*$) tal que $||Tx - x|| \leq \epsilon$ para cada $x \in K$.*

Ejemplo 2.7. *Todo espacio de Banach X que tenga una base de Schauder posee la propiedad de aproximación.*

Solución: En efecto, sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una base de Schauder de X. Entonces existen funcionales lineales continuos $(x_n^*)_{n\geq 1}$ tales que $x_j^*(x_i) = \delta_{ij}$, y para todo $x \in X$ existen escalares a_n con $n \geq 1$ tales que $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ por lo tanto, $x_n^*(x) = x_n^*(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = a_n$ para todo$n \geq 1$. Se definen los operadores lineales $P_n : X \to X$ como $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)x_i$. Vemos que los $(P_i)_{i\geq 1}$ son operadores de rango finito uniformemente acotados y $\lim_{n\to\infty} P_n x = x$, ya que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una base de X. Por lo tanto, X posee la propiedad de aproximación. En particular los espacios c_0

y ℓ_p con $1 \leq p \leq +\infty$, poseen la propiedad de aproximación.

El teorema que se desea demostrar es el siguiente:

Teorema 2.5. *Sean E y F espacios de Banach. Si E^* o F poseen la propiedad de aproximación entonces $E^*\widehat{\otimes}_\epsilon F$ es isometricamente isomorfo al espacio de los operadores compactos $\mathcal{K}(E,F)$ (Esto es, $\overline{L^f(E,F)} = \mathcal{K}(E,F)$).*

Para establecer este resultado se requiere el siguiente lema.

Lema 2.1. *Sea K un subconjunto de un espacio de Banach X. Entonces K es compacto si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ en X tal que si $||x_n|| \to 0$ entonces $K \subset \overline{Conv^2\{x_n\}_{n\geq 1}} = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i : \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ con $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}\}$*

Demostración. Sea K un subespacio compacto de X y $x = (x_n)_{n\geq 1} \subset X$ tal que $||x_n|| \to 0$. Veamos que $K \subset \overline{Conv\{x_n\}_{n\geq 1}}$. Se define el operador $Tx : \ell_1 \to X$ por $Tx((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq 1$. Se demuestra primero que Tx esta bien definida, es decir, debemos demostrar que la serie $Tx((a_n))$converge. Como $||x_n|| \to 0$ entonces $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||x_n|| = M < +\infty$, para cada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_1$, es decir $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} ||a_n x_n|| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. Así, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ es absolutamente convergente en X. Como X es completo se sigue que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge en X. Entonces, Tx es bien definido y es fácil ver que Tx es lineal y continuo pues $||Tx|| \leq M$. Para $n \in \mathbb{N}$, ahora se definen los operadores $T_n : \ell_1 \to X$ como

$$T_{x,n}((a_k)_{k\geq 1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k.$$

Tenemos que

$$Tx - T_{x,n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x_k,$$

y de la desigualdad anterior tenemos

$$||Tx - T_{x,n}|| \leq \sup_{k\geq n+1} ||x_k|| \sum_{k\geq n+1} |a_k| \leq sup_{k\geq n+1}||x_k|| \to 0$$

Es decir $||Tx - T_{x,n}|| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como $T_{x,n}$ es un operador de rango finito para todo $n \in \mathbb{N}$ se sigue de Tx es limite de operadores de rango finito. Por lo tanto T es compacto. De la definición se concluye que $Tx(B_{\ell_1}) \subset X$ es relativamente compacta, es decir $\overline{T(B_1)}$ es compacto.

Se demuestra ahora que $T(B_{\ell_1})$ es cerrado en la norma de X, para concluir que $Tx(B_{\ell_1}) = K$ es compacto.

Sea $(a^k)_{k\geq 1}$una sucesión en B_{ℓ_1} (la bola unitaria cerrada de ℓ_1), esto es para todo $k \in \mathbb{N}$, $a^k = (a_n^k)_{n\geq 1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k x_n = y \in X$ en norma. Como $|a_1^k| \leq 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, existe una subsucesión $(a_1^{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(a_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$ y un escalar a_1 tal que $lim_{n\to\infty} a_1^{k_n} = a_1$. De nuevo $|a_2^{k_n}| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y así hay una subsucesión $(a_2^{k_{np}})_{p\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(a_2^{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ y un escalar a_2 tal que $\lim_{p\to\infty} a_2^{k_{np}} = a_2$ Entonces también $\lim_{p\to\infty} a_1^{k_{np}} = a_1$ De este modo, podemos construir por inducción una sucesión de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ hay una subsucesión $(m_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{p\to\infty} a_j^{m_p} = a_j$ para cada $1 \leq j \leq N$. Vamos a demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq 1$. Para esto, es suficiente demostrar que para cada $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq 1$. Sea $N \in \mathbb{N}$ y consideremos la sucesión $(m_p)_{p\in\mathbb{N}}$ anterior. Entonces

$$(a_1^{m_p}, a_2^{m_p}, ..., a_N^{m_p}) \to (a_1, a_2, ..., a_N),$$

para $p \to \infty$ y ya que para cada $p \in \mathbb{N}$ es válido:

$$\sum_{i=1}^{N} |a_i^{m_p}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i^{m_p}| \leq 1,$$

se sigue que

$$\sum_{i=1}^{N} |a_i| \leq 1.$$

Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq 1$, así podemos concluir que el elemento $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$. Demostremos que existe un $y \in X$ tal que $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, concluyendo así la demostración. Sea $\epsilon > 0$

dado. Como $||x_n|| \to 0$ existe un $N_\epsilon^* \in \mathbb{N}$ tal que $||x_n|| \leq \epsilon$ para todo $n \geq N_\epsilon^*$. Como $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k x_n = y$ existe un $N_\epsilon^{**} \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k x_n - y\right|\right| \leq \epsilon$ **para todo**$k \geq N_\epsilon^{**}$. Se define $N_\epsilon = \text{máx}(N_\epsilon^*, N_\epsilon^{**})$. Entonces para $N, k \geq N_\epsilon$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{n=1}^{N} a_n^k x_n - y\right|\right| &\leq \left|\left|\sum_{n=1}^{N} a_n^k x_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k x_n\right|\right| + \left|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k x_n - y\right|\right| \\
&\leq \left|\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^k x_n\right|\right| + \epsilon \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n^k| \; ||x_n|| + \epsilon \\
&\leq \epsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n^k| + \epsilon \leq 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Sea $N \geq N_\epsilon$. Por construcción, existe una subsucesión $(m_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ tal que $\lim_{j\to\infty} a_i^{m_j} = a_i$ para $i = 1, 2, ..., N$. Entonces existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $m_j \geq N_\epsilon$ y $|a_i^{m_j} - a_i| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$ para $i = 1, 2, ..., N$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n - y\right|\right| &\leq \left|\left|\sum_{n=1}^{N} (a_n - a_n^{m_j}) x_n\right|\right| + \left|\left|\sum_{n=1}^{N} a_n^{m_j} x_n - y\right|\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} |a_n - a_n^{m_j}| \; ||x_n|| + 2\epsilon \\
&\leq M \sum_{n=1}^{N} \frac{\epsilon}{2^n} + 2\epsilon = (2+M)\epsilon
\end{aligned}$$

Lo que demuestra que $T(B_{\ell_1})$ es cerrado. $\square$

Se demuestra ahora el recíproco. Como K es un compacto entonces $2K$ es compacto. Luego se elije una $\dfrac{1}{4} - red$ para $2K$, es decir, se elijen $x_1, x_2, ..., x_{n(1)}$ en $2K$ tal que cada punto de $2K$ esta entre $\dfrac{1}{4}$ de un x_i, $1 \leq i \leq n(1)$. Se obtienen los trazos compactos de $2K$, $[2K \cap B(x_1, \frac{1}{4})]$,...,$[2K \cap B(x_{n(1)}, \frac{1}{4})]$. Se trasladan los trazos al origen $[2K \cap B(x_1, \frac{1}{4})] - x_1$,...,$[2K \cap B(x_{n(1)}, \frac{1}{4})] - x_{n(1)}$. Como la traslación es continua, los pedazos obtenidos son también conjuntos compactos. Sea K_2 la unión de los compactos resultantes es decir, $K_2 = \{[2K \cap B(x_1, \frac{1}{4})] - x_1\} \cup ... \cup \{[2K \cap B(x_{n(1)}, \frac{1}{4})] - x_{n(1)}\}$. K_2 es compacto, así que $2K_2$ es compacto.

Se elije una $\frac{1}{16}$-red finita para $2K_2$; es decir, se elijen $x_{n(1)}, ..., x_{n(2)}$ en $2K_2$ tal que para cada punto de $2K$ esta entre $\frac{1}{16}$ de un x_i para $n(1)+1 \leq i \leq n(2)$. Se obtienen en los pedazos compactos de $2K_2$:$[2K_2 \cap B(x_{n(1)+1}, \frac{1}{16})], ..., [2K_2 \cap B(x_{n(2)}, \frac{1}{16})]$. Se trasladan al origen: $[2K_2 \cap B(x_{n(1)+1}, \frac{1}{16})] - x_{n(1)+1}, ..., [2K_2 \cap B(x_{n(2)}, \frac{1}{16})] - x_{n(2)}$.
La traslación es continua, así que los pedazos, una vez trasladados, son aún compactos. Sea K_3 la unión de los pedazos trasladados:
$K_3 = [2K_2 \cap B(x_{n(1)+1}, \frac{1}{16})] - x_{n(1)+1} \cup ... \cup [2K_2 \cap B(x_{n(1)+1}, \frac{1}{16})] - x_{n(2)}$.
K_3 es compacto, y continuamos de una forma similar. Observe que si $x \in K$,

$$2x \in 2K,$$

$$2x - x_{i(1)} \in K_2 \textit{ para algun } 1 \leq i(1) \leq n(1). \textit{ Así que}$$

$$4x - 2x_{i(1)} \in 2K_2.$$

$$4x - 2x_{i(1)} - x_{i(2)} \in K_3 \textit{ para algun } n(1) \leq i(2) \leq n(2). \textit{ Así que}$$

$$8x - 4x_{i(1)} - 2x_{i(2)} \in 2K_3,$$

$$8x - 4x_{i(1)} - 2x_{i(2)} - x_{i(3)} \in K_4 \textit{ para algún } n(2)+1 \leq i(3) \leq n(3),$$

y así sucesivamente, se sigue de esto que,

$$x - \frac{x_{i(1)}}{2} \in \frac{1}{2}K_2,$$

$$x - \frac{x_{i(1)}}{2} - \frac{x_{i(2)}}{4} \in \frac{1}{4}K_3,$$

$$x - \frac{x_{i(1)}}{2} - \frac{x_{i(2)}}{4} - \frac{x_{i(3)}}{8} \in \frac{1}{8}K_4, ...$$

y por tanto $x = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{i(k)}}{2^k}$ y $x \in \overline{c_0}(0, x_{i(1)}, x_{i(2)}, ...) \subset \overline{c_0}(0, x_1, x_2, ...)$, lo cual completa la demostración.

Lema 2.2. *Sean X y Y espacios de Banach y se considera a $L(X,Y)$ con la topología τ de la convergencia uniforme sobre conjuntos compactos K en X, esto es, la topología localmente convexa inducida por las normas $||T||_K = \sup\{||Tx|| : x \in K\}$, para cada T en*

$L(X,Y)$. Entonces, los funcionales lineales continuos sobre $(L(X,Y),\tau)$ consisten de los funcionales φ de la forma: $\varphi(T) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^*(Tx_i)$, donde $(x_i)_{i=1}^{\infty} \subset X, (y_i^*)_{i=1}^{\infty} \subset Y^*$ son tales que, $\sum_{i=1}^{\infty} ||x_i||\ ||y_i^*|| < \infty$.

Demostración. Se supone que φ tiene tal representación, se puede asumir que $x_i \neq 0$ para cada $i \geq 1$. Sea $(\eta_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares positivos tal que $\eta_i \to \infty$. Como T es un operador lineal es acotado por eso se tiene que $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i ||x_i||\ ||y_i^*|| = C < \infty$.Sea $K = \left(\frac{x_i}{||x_i||}\eta_i\right)_{i=1}^{\infty} \cup \{0\}$. Entonces K es compacto y: $|\varphi(T)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} ||y_i^*||\ ||x_i||\eta_i||T\left(\frac{x_i}{||x_i||}\eta_i\right)|| \leq C||T||_K$.

Recíprocamente, se supone que φ es un funcional lineal continuo sobre $L(X,Y)$. Así que $|\varphi(T)| \leq C||T||_K$, para alguna constante $C > 0$ y algún conjunto compacto $K \subset X$. Por el lema 1 se puede asumir, sin perdida de generalidad, que $K = \overline{conv(x_n)_{n\geq 1}}$ donde $||x_n|| \to 0$. Por lo tanto

$$|\varphi(T)| \leq C \sup_{n\geq 1} ||Tx_n||.$$

Sea $c_0(Y)$ el espacio de Banach de todas las sucesiones en Y que convergen a cero en la norma del supremo. Se definen $Z = \{Tx_n : T \in L(X,Y)\ y\ (x_n)\text{es una sucesión en X}\}$ y el funcional φ^* en Z por $\varphi^*(Tx_n) = \varphi(T)$. Por el teorema de Hanh-Banach φ^* tiene una extensión lineal continua, aún llamada φ^*, definida en todo $c_0(Y)^*$. Pero $c_0(Y)^*$ es exactamente $\ell_1(Y^*)$, el espacio de todas las series absolutamente convergentes con elementos de Y^*. Por tanto, existe una sucesión

$$(y_n^*)_{n\geq 1}$$

de miembros de Y^* para la cual $\sum_{n\geq 1} ||y_n^*|| = ||\varphi^*||$ y además $\varphi^*(y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(y_n)$ para todo $(y_n)_{n\geq 1}$ en $c_0(Y)$. Así,

$$\varphi(T) = \varphi^*(Tx_n) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(Tx_n),$$

como se buscaba demostrar. □

Teorema 2.6. *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
i) X tiene la propiedad de aproximación.

ii) Para todo espacio de Banach Y los operadores de rango finito son denso en $L(X,Y)$ en la topologia τ de la convergencia uniforme de subconjuntos compactos.
iii) Para todo espacio de Banach Y los operadores de rango finito son densos en $L(X,Y)$ en la topología τ de la convergencia uniforme sobre conjuntos compactos.
iv) Para toda elección de $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$, y $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n^*||\ ||x_n|| < +\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n = 0$ para todo $x \in X$, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) = 0$.
v) Para todo espacio de Banach Y, todo operador compacto $T \in L(Y,X)$ y todo $\epsilon > 0$ existe un operador de rango finito $T_1 \in L(Y,X)$ tal que $||T - T_1|| < \epsilon$.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Sean $T : Y \to X$ un operador lineal continuo y K un subconjunto compacto de Y, y dado $\epsilon > 0$. Como T es continuo entonces $T(K)$ es compacto en X, y como X tiene la propiedad de aproximación existe un operador de rango finito T_1 sobre X tal que $||T_1T(y) - T(y)|| \leq \epsilon$ para todo $y \in K$. Ahora, como $Imagen\ (T_1T) \subset Imagen\ (T_1)$ y T_1 es de rango finito entonces $T_1 \circ T$ es de rango finito, lo que demuestra ii).
$ii) \Rightarrow i)$ Tomando $Y = X$ tenemos que para todo compacto $K \subset X$ existe un operador de rango finito T tal que $||x - Tx|| < \epsilon$. Por tanto $||x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x)x_i|| < \epsilon$ para todo $x \in K$ lo cual demuestra que X tiene la propiedad de aproximación.
$i) \Rightarrow iii)$ Sea $T : X \to Y$ un operador continuo, $K \subset X$ un compacto, y $\epsilon > 0$. Entonces, por $i)$ existe un operador de rango finito T_1 sobre X tal que $||T_1x - x|| \leq \frac{\epsilon}{||T||}$ para todo $x \in K$. Entonces, $||TT_1x - Tx|| \leq \epsilon$ para todo $x \in K$ y el operador TT_1 tiene rango finito ya que T_1 tiene rango finito.
$iii) \Rightarrow i)$ igual que $iii) \to ii)$ con $Y = X$.
$i) \Rightarrow iv)$ Esta equivalencia es dada por el Lema 2. En realidad, por la definición, $i)$ significa que el operador identidad esta en la τ-clausura del espacio de operadores de rango finito en $L(X,X)$. Esto sucede si y solo si cada funcional lineal τ-continuo φ en $L(X,X)$ que se anula sobre los operadores de rango finito se anula tambien sobre el operador identidad. Del Lemma 3 esto es exactamente lo que $iv)$ significa.
$i) \Rightarrow v)$ Suponga que $i)$ es valido y sea $T \in L(Y,X)$. Un operador compacto. El conjunto $K = \overline{TB_Y(0,1)}$ es compacto, y por tanto para cada $\epsilon > 0$, existe un operador de rango finito T_1 sobre X. Así que $||T_1x - x|| \leq \epsilon$ para todo $x \in K$; en particular, $||T_1Tz - Tz|| \leq \epsilon$

para todo$z \in B(0,1)$ y por tanto $||T_1T - T|| \leq \epsilon$. Así que $v)$ es válido.

$v) \Rightarrow i)$ Suponga que $v)$ es válido y sea K un subconjunto compacto de X y dado $\epsilon > 0$. Por el Lema 1 podemos asumir, sin perdida de generalidad, que $K = \overline{conv(x_i)_{i\geq 1}}$ donde $||x_n|| \to 0$ y $||x_1|| \leq 1$. Se define $V = \overline{conv\left\{\frac{x_n}{||x_n||^{1/2}}\right\}_{n\geq 1}}$. Claramente V es un compacto convexo en X. Se define $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ y se define sobre Y una norma que haga de V una bola unitaria es decir, se define $|||y||| = \inf\{\lambda > 0 : \frac{y}{\lambda} \in V\}$. Entonces Y es un espacio de Banach y la funcion identidad $I : Y \to X$ es compacta. Luego por $v)$ existe $(y_i^*)_{i=1}^m \subset Y^*$ y $(\mu_i)_{i=1}^m \subset X$ tales que

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{m} y_i^*(x)\mu_i - x\right|\right| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

para cada $x \in V.$, y por tanto para cada $x \in K$. Ahora los (y_i^*) son continuos con respecto a la norma $|||\ |||$ pero no necesariamente continuos respecto a la norma $||\ ||$. Con el fin de complementar la demostración es suficiente verificar la siguiente afirmación. Dado cualquier $y^* \in Y^*$ y $\delta > 0$ (en nuestro caso se toma $\delta = \frac{\epsilon}{2m} \max ||\mu_i||$) existe un $x^* \in X^*$ tal que $|y^*(x) - x^*(x)| < \delta$ para todo $x \in K$, es decir, $|y^*(x_n) - x^*(x_n)| < \delta$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto, como $\frac{x_n}{||x_n||^{\frac{1}{2}}} \in V$ entonces $|||x_n||| \leq ||x_n||^{\frac{1}{2}}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, y así $|||x_n||| \to 0$. Además, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq n_0$ se tiene que $|y^*(x_n)| < \frac{\delta}{2}$. Definimos $K_0 = 2\delta^{-1}\overline{conv\{\pm x_n\}_{n=n_0+1}^{\infty}}$. Note que las clausuras en la norma $||\cdot||$ y $|||\cdot|||$ son la misma.

Se define $F = \{x : x \in gen\{x_n\}_{n=1}^{n=n_0}; y^*(x) = 1\}$ entonces F es cerrado y K_0 es compacto tal que $K_0 \cap F = \varnothing$. Por la versión geométrica del teorema de Hanh-Banach existe un hiperplano cerrado $\widehat{F}$ en X tal que $F \subset \widehat{F}$ y $\widehat{F} \cap K_0 = \varnothing$. Se considera $x^* \in X^*$ el funcional del hiperplano $\widehat{F}$, esto es, $\widehat{F} = \{x : x^*(x) = 1\}$. Entonces $x^*(x_n) = y^*(x_n)$ para cada $n \geq n_0$ y así $|x^*(x_n)| < \frac{\delta}{2}$ para $n \geq n_0$. Por lo tanto, $|x^*(x_n) - y^*(x_n)| < \delta$ para cada $n \in \mathbb{N}$ como se deseaba.

$\square$

Nota 2.7. *Para demostrar el teorema que se necesita debemos invertir los roles entre X y Y, esto es, se debe demostrar en el siguiente teorema de Grothendieck.*

Teorema 2.7. *Sea X un espacio de Banach. Entonces X tiene la propiedad de aproxima-*

ción si y solo si para todo espacio de Banach Y, y todo $\epsilon > 0$, y todo operador compacto $T : X \to Y$ existe un operador de rango finito $T_1 : X \to Y$ tal que $||T - T_1|| \leq \epsilon$. Así, $\mathcal{K}(X,Y) = \overline{L^f(X,Y)}$.

Demostración. Se supone que todo espacio de Banach Y y todo operador compacto $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ puede ser aproximado. Sea Z cualquier espacio de Banach, y sea $T \in L(Z, X^*)$ un operador compacto, y dado $\epsilon > 0$. Entonces el operador $T^* |_X : X^* \to Y$ es compacto. Aplicando la hipótesis con $Y = Z^*$ se tiene que existen sucesiones $(x_i^*)_{i=1}^n \subset X^*$ y $(z_i^*)_{i=1}^n \subset Z^*$ tales que, para cada $x \in X$, con $||x|| \leq 1$,

$$\left|\left| T^* x - \sum_{i=1}^n x_i^*(x) z_i^* \right|\right| < \epsilon.$$

Entonces, para todo $z \in Z$ con $||z|| \leq 1$ tenemos que $\left|\left| (Tz)x - \sum_{i=1}^n z_i^*(z) x_i^*(x) \right|\right| < \epsilon$ siempre que $||x|| < 1$. Por lo tanto, tomando el supremo sobre X obtenemos $||Tz - \sum_{i=1}^n z_i^*(z) x_i^*|| < \epsilon$. Es decir X^* tiene la propiedad de aproximación.

Recíprocamente, se supone que el espacio de Banach X tiene la propiedad de aproximación. Se considera un operador compacto $T : X \to Y$ y $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Por teorema el operador $T^* : Y^* \to X^*$ es también compacto y por el teorema 2.6 existen sucesiones $(y_i^{**})_{i=1}^n$ en Y^{**} y $(x_i^{**})_{i=1}^n$ en X^{**} tales que $||T^* y^* - \sum_{i=1}^n y_i^{**}(y) x_i^*|| < \epsilon$ siempre que $||y^*|| \leq 1$. Por tanto, T es aproximado por un operador de rango finito, como se deseaba. □

Se finaliza esta sección con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.8. *Sean E un espacio de Banach y K un espacio topólogico compacto. Entonces, el espacio $C(K)\widehat{\otimes}_\epsilon E$ es isomorfo isométricamente al espacio $C(K,E)$ de todas las funciones continuas de K sobre E.*

Solución: En el ejemplo 2.1 se establecio que $C(K) \otimes E$ es algebraicamente isomorfo a un subespacio vectorial de $C(K,E)$ mediante el operador $z \to F_z$, donde $z = \sum_{i=1}^n f_i \otimes y_i$ es un *elemento de* $C(K)\otimes E$ *al cual le corresponde la función continua* $F_z : K \to E$ *definida como* $F_z(s) = \sum_{i=1}^{n} f_i(s)y_i$. *Veamos que* $z \to F_z$ *preserva normas en efecto,*

$$\begin{aligned}
||z||_\epsilon &= \sup_{||\psi||=1} \left|\left| \sum_{i=1}^{n} \psi(y_i) f_i \right|\right| \\
&= \sup_{||\psi||=1} \sup_{s\in K} \left| \sum_{i=1}^{n} \psi(y_i) f_i(s) \right| \\
&= \sup_{s\in K} \sup_{||\psi||=1} \left| \psi\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(s) y_i \right) \right| \\
&= \sup_{s\in K} ||F_z(s)|| = ||F_z||.
\end{aligned}$$

Por tanto, el operador $z \to F_z$ *se puede extender continuamente al espacio* $C(K)\widehat{\otimes}_\epsilon E$ *y la extensión también satisface* $||F_z|| = ||z||_\epsilon$. *Falta demostrar que la imagen de* $C(K)\otimes E$ *es densa en* $C(K,E)$, *y por tanto, al tomar clausuras obtenemos*

$$C(K)\widehat{\otimes}_\epsilon E \cong C(K,E).$$

De hecho, para cualquier $f \in C(K,E)$ *y* $\epsilon > 0$ *dado, la continuidad uniforme de* f *asegura que existe una cobertura abierta* $\{G_i : i = 1, 2, ..., n\}$ *de* K *tal que*

$$||f(s) - f(t)|| < \epsilon \textit{para todo} (s,t) \in G_i \otimes G_i \ (i = 1, 2, .., n).$$

Ahora se consideran f_i $(i = 1, 2, ..., n)$ *elementos positivos en* $C(K)$ *tal que* $\sum_{i=1}^{n} f_i(k) = 1$, *con* $k \in K$ *y* $f_i(k) = 0$ *para todo* $k \notin G_i$ *(partición de la unidad de la cobertura)*
Sea $y_i \in f(G_i)$ *para* $i = 1, 2, ..., n$ *y se define el elemento* $z = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes y_i$ *que pertenece a* $C(K)\otimes E$. *Entonces para todo* $k \in K$ *se tiene que*

$$\begin{aligned}
||f(k) - F_z(k)|| &= \left|\left| f(k) - \sum_{i=1}^{n} f_i(k) y_i \right|\right| \\
&= \left|\left| \sum_{i=1}^{n} f_i(k)(f(k) - y_i) \right|\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |f_i(k)| \ ||f(k) - y_i|| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Entonces $||f - F_z|| < \epsilon$, *y por lo tanto* $C(K)\otimes E$ *es denso en* $C(K,E)$. *En consecuencia,* $C(K)\widehat{\otimes}_\epsilon E$ *es isométricamente isomorfo a* $C(K,E)$.

Nota 2.8. *En el caso que $C(K)$ es isomorfo a c_0 es un espacio de Banach, el ejemplo anterior muestra que:*

$$c_0 \widehat{\otimes}_\epsilon E \equiv c_0(E)$$

En particular, si $E = \ell_1$ entonces

$$c_0 \widehat{\otimes}_\epsilon \ell_1 \equiv c_0(\ell_1).$$

2.2. PRODUCTO TENSORIAL PROYECTIVO Y ESPACIOS DE OPERADORES NUCLEARES

En esta sección se estudian algunas propiedades del producto tensioral y su relación con los espacios de operadores nucleares.
Se inicia con algunas propiedades básicas de estos productos.

Teorema 2.8. *Sean E, F espacios vectoriales normados. Entonces,*
1. $||x^* \otimes y^*|| = ||x^*||\ ||y^*||$ para todo $x^* \in E^*$ y todo $y^* \in F^*$.
2. $||x \otimes y|| = ||x||\ ||y||$ para todo $x \in E$ y todo $y \in F$.
3. $||x \otimes y||_\pi \leq ||x \otimes y||_\epsilon$, para todo $x \in E$ y todo $y \in F$.

Demostración. 1. Se tiene que $E^* \otimes F^*$ se puede identificar como un subespacio de las formas bilineales continuas de $E \times F$ en $\mathbb{R}$ $\beta(E, F)$, con la identificación
Sean E y F espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Sea $\beta(E, F; \mathbb{R})$ el conjunto de todas las formas bilineales continuas $f : E \times F \to \mathbb{R}$. Este conjunto es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ bajo las operaciones de suma de formas bilineales y de multiplicación de un escalar por una forma bilineal.

- Se puede cambiar a $\mathbb{R}$ por un campo F.
- S E, F, M son espacios de Banach sobre el mismo campo $\mathcal{K}$, se pueden considerar el conjunto $\beta(E, F; M)$ de todas las formas bilineales $f : E \times F \to M$. Algunos autores denotan este conjunto de la forma $L(E, F; M)$. Un caso particular de estos espacios es

$$\beta(E, F; \mathcal{K}).$$

Ahora,

$$w : E^* \otimes F^* \to \beta(E, F; \mathbb{R})$$

$$(x^*, y^*) \to w(x^*, y^*) : E \times F \to \mathbb{R}$$

donde

$$w(x^*, y^*) : E \times F \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to w(x^*, y^*)(x, y) = x^*(x)y^*(y)$$

Entonces bajo esta identificación se puede calcular la norma de $(x^* \otimes y^*)$ como una forma bilineal, esto es,

$$\begin{aligned}
||x^* \otimes y^*|| &= \sup\{|(x^* \otimes y^*)(x, y)| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\} \\
&= \sup\{|x^*(x)y^*(y)| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\} \\
&= \sup\{|x^*(x)| : ||x|| \leq 1\} \sup\{|y^*(y)| : ||y|| \leq 1\} \\
&= ||x^*|| \, ||y^*||
\end{aligned}$$

2. Es el mismo argumento, el espacio $E \otimes F$ puede identificarse como un subespacio de las formas bilineales continuas de $E^* \times F^*$ en $\beta(E^*, F^*, \mathbb{R})$ con la identificación:

$$\begin{aligned}
w : E \otimes F &\longrightarrow \beta(E^*, F^*; \mathbb{R}) \\
(x, y) &\longrightarrow w_{(x,y)} : E^* \times F^* \longrightarrow \beta(\mathbb{R}, F) \\
(x, y) &\to w(x^*, y^*)(x, y) = x^*(x)y^*(y)
\end{aligned}$$

Bajo esta identificación se puede calcular la norma de $x \otimes y$ como una forma bilineal continua en $E^* \times F^*$ en $\mathbb{R}$, esto es,

$$\begin{aligned}
||x \otimes y|| &= \sup\{|(x \otimes y)(x^*, y^*)| : ||x^*|| \leq 1, ||y^*|| \leq 1\} \\
&= \sup\{|x^*(x), y^*(y)| : ||x^*|| \leq 1, ||y^*|| \leq 1\} \\
&= \sup\{|x^*(x)| : ||x^*|| \leq 1\} \ \sup\{|y^*(y)| : ||y^*|| \leq 1\} \\
&= ||x|| \, ||y||.
\end{aligned}$$

3. Dado que $x^* \otimes y^*$ es una forma bilineal continua de $E \times F$ en $\mathbb{R}$ entonces por definición de supremo tenemos que para cada $x \in E,\ y \in F$ se tiene que

$$|(x^* \otimes y^*)(x, y)| \geq sup\{|f(x, y)| : ||f|| \leq 1, f \in \beta(E, F)\}.$$

Luego, $|x^*(x)y^*(y)| \geq ||x \otimes y||_\pi$ para todo $x^* \in E^*, y^* \in F^*$ con $||x^*|| \geq 1$ y $||y^*|| \geq 1$. Así que usando la definición de la ϵ-norma se tiene que $||x \otimes y||_\epsilon \geq ||x \otimes y||_\pi$ para todo $x \in E, y \in F$. $\square$

Se puede ahora demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.9. *Sean E y F espacios vectoriales normados, entonces,*

(a) $(E\widehat{\otimes}_\pi F)^* \cong (\beta(E, F; \mathbb{R}), ||\ ||) \cong (L(E, F^*), ||\ ||)$*. Por tanto,* $||f||_\pi = ||f \circ w|| = ||T_f||$ *donde* $w : E \times F \to E \otimes F$ *es la función canónica y* T_f *esta definida por* $T_f(x) \cdot y = f(x \otimes y)$ *para todo* $x \in E$ *y todo* $y \in F$*.*

(b) $E^* \otimes F^* \subset (E\widehat{\otimes}_\pi F)^*$*.*

(c) Para cada $f \in (E\widehat{\otimes}_\pi F)^*$ *tenemos que:* $||f||_\pi = sup\{|f(x, y)| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1, x \in E, y \in F\}$ *en particular,*

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i^*\right|\right|_\pi = sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)y_i^*(y)\right| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\right\}$$

$$= \left|\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i^*\right|\right| \text{ para todo } \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i^* \text{ que pertenece a } E^* \otimes F^*.$$

Demostración. Para cada elemento f del espacio dual $(E\widehat{\otimes}_\pi F)^*$ se tiene que: para todo $x \in E, y \in F$

$$|(f \circ w)(x, y)| = |f(x \otimes y)| \leq ||f||_\pi ||x \otimes y||_\pi \leq ||f||_\pi ||x||\ ||y||,$$

Esto último por la segunda parte.

Así, $f \circ w$ es una forma bilineal continua de $E \times F$ en $\mathbb{R}$ y si $||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1$ entonces el supremo de $\{|f \circ w(x,y)| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\}$ satisface que

$$||f \circ w|| = \sup\{|(f \circ w)(x,y)| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\} \leq ||f||_\pi.$$

Por otro lado, $E \otimes F$ puede ser identificado como un subespacio vectorial del espacio dual de las formas bilineales continuas de $E \times F$ en $\mathbb{R}$ $(\beta(E, F; \mathbb{R}), ||\ ||)^*$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
||f \circ w|| &= \sup\{|\psi(f \circ w)| : \psi \in \beta(E,F)^*, ||\psi|| \leq 1\} \\
&\leq sup\{|f(\mu)| : \mu \in E \otimes F \ y \ ||\mu||_\pi \leq 1\} \\
&= ||f||_\pi
\end{aligned}$$

siendo esta última la norma de f como elemento de un dual. Por tanto $||f \circ w|| = ||f||_\pi$.

Recíprocamente, si ψ es una forma bilineal continua de $E \times F$ en $\mathbb{R}$ entonces existe un $g \in (E \otimes F)^*$ tal que $\psi = g \circ w$, y por tanto $g \in (E \otimes_\pi F)^*$. Luego la función $f \to f \circ w$ es un isomorfismo isométrico de $(E \otimes_\pi F)^*$ en $(\beta(E, F; \mathbb{R}), ||\ ||)$

b) Usando la parte a) se nota que a cada $x^* \otimes y^*$ en $E^* \otimes F^*$ le corresponde un funcional lineal continuo de $E \widehat{\otimes}_\pi F$ el cual es dado por una forma bilineal continua f de $E \times F$ en $\mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = x^*(x)y^*(y)$.

c) Nuevamente, por lo tanto a) todo funcional lineal continuo f de $E \widehat{\otimes}_\pi F$ se identifica con una forma bilineal continua de $E \times F$ en $\mathbb{R}$, así,

$$\begin{aligned}
||f||_\pi &= \sup\left\{|f(x,y)| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\right\} \\
\left|\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i^*\right|\right|_\pi &= \sup\left\{\left|\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i^*\right)(x,y)\right| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) y_i^*(y)\right| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\right\} \\
&= \left|\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i^*\right|\right|,
\end{aligned}$$

donde la última norma es considerada como un funcional lineal continuo y la π-norma es tomada como una forma bilineal. $\square$

Definición 2.6. *Sean E y F espacios vectoriales normados, se definen:*

1 $B_E \otimes B_F = \{x \otimes y : x \in B_E, y \in B_F\}$ *donde* $B_E = \{x \in E : ||x|| \leq 1\}$ *y* $B_F = \{y \in F : ||y|| \leq 1\}$;

2 $Convex^3(B_E \otimes B_F) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i : x_i \in B_E, y_i \in B_F, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}$, *se llama el generado convexo por* $B_E \otimes B_F$, *y se denota como* $gencon(B_E \otimes B_F)$.

Definición 2.7. *Se define* $\gamma(\mu) = inf\{\sum_{i=1}^{n} ||x_i|| ||y_i|| : \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\}$, *donde el infimo se considera sobre el conjunto de todos los pares finitos* (x_i, y_i) *tales que* $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$.

Teorema 2.10. *Sean* E *y* F *espacios vectoriales normados. Entonces,*

(a) $\gamma(x \otimes y) = ||x|| ||y||$ *para todo* $x \in E$ *y todo* $y \in F$.

(b) $||\mu||_\pi \leq \gamma(\mu)$ *y por tanto* γ *es una norma en* $E \otimes F$.

(c) Existe una isometria entre $E \widehat{\otimes}_\pi F$ *y el espacio* $(E \otimes F, \gamma)^*$ *y por tanto* $||\mu||_\pi = \gamma(\mu)$.

(d) Si $V_0 = \{\mu \in E \otimes F : \gamma(\mu) < 1\}$ *y* $V_1 = \{\mu \in E \otimes F : \gamma(\mu) \leq 1\}$ *entonces* $V_0 \subset convex(B_E \otimes B_F) \subset V_1$.

Demostración. Es fácil verificar que γ es una seminorma en $E \otimes F$. Sean $x \in E$ y $y \in F$. Tomando la representación trivial $\mu = x \otimes y$ se tiene que $\gamma(\mu) \leq ||x|| ||y||$ esto es $\gamma(x \otimes y) \leq ||x|| ||y||$. Reciprocamente, por el Teorema de Hanh-Banach existen $x^* \in E^*$, $y^* \in F^*$, funcionales lineales continuos, tales que $x^*(x) = ||x||$ con $||x^*|| = 1$ y $y^*(y) = ||y||$ con $||y^*|| = 1$. Por tanto, si $\mu = x \otimes y$ tiene la representación $\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k$ entonces

$$
\begin{aligned}
|(x^* \otimes y^*)(\mu)| &= \left| x^* \otimes y^* \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k \right) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k) y^*(y_k)|
\end{aligned}
$$

se tiene además que

$$|x^*(x_k)| \leq ||x^*|| \, ||x_k|| = ||x_k||$$

[3] El conjunto de todas las combinaciones lineales convexas de $x_i \otimes y_i$, $x_i \in B_E$ y $y_i \in B_E$

y

$$|y^*(y_k)| \leq ||y^*||\ ||y_k|| = ||y_k|| \leq \sum_{k=1}^{n} ||x_k||||y_k||.$$

Entonces, tomando el ínfimo se obtiene que

$$|(x^* \otimes y^*)(\mu)| \leq inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} ||x_k||||y_k|| : \mu = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k \right\} = \gamma(\mu).$$

Así que $|x^*(x)y^*(y)| \leq \gamma(\mu)$.

Como $x^*(x) = ||x||$, y $y^*(y) = ||y||$ entonces se tiene que $||x||||y|| \leq \gamma(\mu)$. Luego $\gamma(\mu) = \gamma(x \otimes y) = ||x||\ ||y||$.

b) Para cada función bilineal continua $\varphi : E \times F \to \mathbb{R}$ y cada $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ se tiene que:

$$|\varphi(\mu)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i, y_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} ||\varphi||\ ||x_i||\ ||y_i||.$$

En particular, si $||\varphi|| \leq 1$ entonces

$$|\varphi(\mu)| \leq \sum_{i=1}^{n} ||x_i||\ ||y_i||.$$

Tomando el ínfimo se tiene que $|\varphi(\mu)| \leq \gamma(\mu)$ para toda φ con $||\varphi|| \leq 1$. Así que $||\mu||_\pi \leq \gamma(\mu)$ para todo $\mu \in E \otimes F$. De aquí se sigue que γ es una norma, ya que $\gamma(\mu) = 0$ si y solo si $||\mu||_\pi = 0$ y esto si y solo si $\mu = 0$.

c) Primero, se tiene del item b) que cada forma bilineal continua de $E \times F$ en $\mathbb{R}$ es támbien una forma bilineal continua con la norma γ de $E \times F$ en $\mathbb{R}$. Del teorema anterior se sigue que $(E\widehat{\otimes}_\pi F)^* \subset (E \otimes F, \gamma)^*$, es decir, todo funcional lineal en $E\widehat{\otimes}_\pi F$ es una forma bilineal de $E \times F$ en $\mathbb{R}$.

Se demuestra ahora que existe un isomorfismo isométrico entre $(E\otimes F, \gamma)^*$ y $(\beta(E, F; \mathbb{R}), ||\cdot||)$. En efecto, se define:

$$T : (E \otimes F, \gamma)^* \to (\beta(E, F; \mathbb{R}), ||\ ||)$$

$$f \to T_f = f \circ w$$

donde $w : E \times F \to E \otimes F$ es la función canónica $w(x, y) = x \otimes y$. Así, dado f en $(E \otimes F, \gamma)^*$ se tiene que

$$||f||_\gamma = \sup\{|f(\mu)| : \mu \in E \otimes F,\ \gamma(\mu) \leq 1\}$$

$$\leq \sup\{|f(x\otimes y)| : \gamma(x\otimes y)\leq 1\} = ||f\circ w||.$$

Así que $f\circ w$ es una forma bilineal continua de $E\times F$ en $\mathbb{R}$ y $||T_f||\leq ||f||_\gamma$. Por otro lado, usando el Teorema anterior se tiene que si f es un funcional lineal en $E\widehat{\otimes}_\pi F$ entonces su norma como funcional es igual a la norma como forma bilineal, y así $||f||_\pi = ||f\circ w|| \leq ||f||_\gamma$. Finalmente, ya que $||\mu||_\pi \leq \gamma(\mu)$ para cada μ de $E\otimes F$ entonces:

$$\begin{aligned} ||f\circ w|| = ||f||_\pi &= \sup\{|f(\mu)| : \mu\in E\otimes F, ||\mu||_\pi \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|f(\mu)| : \mu\in E\otimes F, \gamma(\mu)\leq 1\} = ||f||_\gamma. \end{aligned}$$

Así, $||f||_\pi = ||f\circ w|| = ||f||_\gamma$. Por lo tanto, se ha demostrado el isomorfismo isométrico $(E\widehat{\otimes}_\pi F)^* \cong (E\otimes F,\gamma)^*$ y $||f||_\gamma = ||f||_\pi$, esto es $\gamma(\mu) = ||\mu||_\pi$.

d) En efecto, si $z\in convex(B_E\otimes B_F)$ entonces $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\otimes y_i$ con $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, $\lambda_i\geq 0$, $x_i\in B_E$ y $y_i\in B_F$. Además, $\gamma(z)\leq \sum_{i=1}^{n} ||x_i||\ ||y_i||\lambda_i \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1, si ||x_i||\leq 1\ y\ ||y_i||\leq 1\ para\ i=1,...,n$. Por lo tanto $z\in V_1$.

Veamos que $V_0\subset convex(B_E\otimes B_F)$. Sea $\mu\in V_0$, entonces existen $x_i\in E$, $y_i\in F$, con $i = 1,2,...,n$ tales que $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i$, y $\sum_{i=1}^{n} ||x_i|| ||y_i|| < 1$, Por continuidad de la norma, se puede elegir $\delta_i > 0$ que satisface $\sum_{i=1}^{n}(||x_i||+\delta_i)(||y_i||+\delta_i) < 1$ y definir así $\lambda_i = (||x_i||+\delta_i)(||y_i||+\delta_i)$, con $i=1,2,...,n$. Entonces, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i < 1$ y si $\overline{x_i} = \dfrac{x_i}{||x_i||+\delta_i}$ se tiene que $\overline{x_i}$ pertenece a B_E (pues $||\overline{x_i}|| = \dfrac{x_i}{||x_i||+\delta_i} < 1$) y $\overline{y_i} = \dfrac{y_i}{||y_i||+\delta_i}$ pertenece a B_F (ya que $||\overline{y_i}|| = \dfrac{y_i}{||y_i||+\delta_i} < 1$). Así, $\mu = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overline{x_i}\otimes\overline{y_i}$ pertenece a $convex(B_E\otimes B_F)$ como se deseaba mostrar.

□

Se finaliza esta sección con un ejemplo de un producto tensorial proyectivo.

Ejemplo 2.9. *Sean $(\Omega,\mu,\sum)$ un espacio de medida y F un espacio vectorial normado. Entonces existe una isometría del espacio $L_1(\mu)\widehat{\otimes}_\pi E$ en el espacio $L_1(\mu,E)$ de las funciones Ω a E que son Bochner (norma) integrables.*

Solución: Dado $z = \sum_{i=1}^{n} f_i\otimes y_i$ en $L_1(\mu)\widehat{\otimes}_\pi E$, se le asigna la funciíon $F_z:\Omega\to E$ definida como $F_z(s) = \sum_{i=1}^{n} f_i(s)y_i$. Entonces $z \to F_z$ es un isomorfismo algebraico entre $L_1(\mu) \otimes E$ y el subespacio $L_1(\mu, E)$ de funciones con imagén de dimensión finita.

Veamos que es una isometría. En efecto,

$$\begin{aligned}
||F_z||_1 &= \int_\Omega ||F_z(s)||d\mu \\
&= \int_\Omega \left|\left|\sum_{i=1}^{n} f_i(s)y_i\right|\right| d\mu \\
&\leq \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |f_i(s)| \; ||y_i||d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{n} ||y_i|| \int_\Omega |f_i(s)|d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{n} ||f_i(s)|| \; ||y_i|| < +\infty
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $F_z \in L_1(\mu, E)$ y tomando el infimo si obtiene que $||F_z||_1 \leq ||z||_\pi$. Por lo tanto, el operador lineal $z \to F_z$ se extiende continuamente al espacio $L_1(\mu)\widehat{\otimes}_\pi E$ y tal extensión también satísface que $||F_z|| \leq ||z||_\pi$.

Resta demostrar que $||F_z|| \geq ||z||_\pi$. Se supone que F_z es una función simple y se consideran $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ subconjuntos disyuntos de Ω tales que $\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}$. Entonces

$$\begin{aligned}
||z||_\pi &= \left|\left|\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i} \widehat{\otimes}_\pi y_i\right|\right|_\pi \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} ||\chi_{E_i} \widehat{\otimes}_\pi y_i||_\pi \\
&= \sum_{i=1}^{n} ||\chi_{E_i}|| \; ||y_i|| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)||y_i|| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\chi_{E_i}| \; ||y_i||d\mu \\
&= \int_\Omega \left|\left|\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(s)y_i\right|\right| d\mu = ||F_z||_1.
\end{aligned}$$

El resultado general se sigue de la densidad de las funciones simples en $L_1(\mu)$.

Nota 2.9. *Se puede sustituir $L_1(\mu)$ por $\ell_1(\Gamma)$, donde Γ es un conjunto infinito enumerable. De hecho, si μ es un conjunto infinito enumerable, se considera la $\delta-$ álgebra*[4] *formada por los subconjuntos de μ. Para todo A en la $\delta-$álgebra se define:*

$$\mu(A) = cardA,$$

El número de elementos de A.
Entonces $L_1(\mu, E)$ es isomorfo al espacio $\ell_1(\mu, E)$ y por lo tanto, del ejemplo anterior, se concluye que

$$\ell_1(\mu)\widehat{\otimes}_\pi E \cong \ell_1(\mu, E).$$

2.3. PROPIEDADES DE LOS OPERADORES NUCLEARES

El concepto de operadores nucleares fue introducido a principios de los años cincuenta por dos razones.Una fue dada por Grothendieck, quien estudiando la teoria de distribuciones junto con los productos tensoriales de espacios vectoriales localmente convexos, da una versión abstracta del teorema del nucleo de Schwarz que inspira el nombre de nuclear. La otra razón fue dada por Ruston y Grothendieck mediante un estudio de la teoría de determinantes de Fredholm a operadores en espacios de Banach. Para este fin se estudio el concepto de trazo de un operador.

Definición 2.8 (Operador nuclear)**.** *Un operador lineal y acotado $T : X \to Y$, o sea $T \in L(X, Y)$, se llama un operador nuclear si existen sucesiones $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ en X^* y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Y tales que*

1. $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^*(x) y_n$ *para todo* $x \in X$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||f_n^*|| ||y_n|| < +\infty$.

[4]Es un anillo con una unidad

El conjunto de los operadores nucleares entre dos espacios de Banach X y Y se denotará como $N(X,Y)$.

Teorema 2.11. *El conjunto de los operadores nucleares $N(X,Y)$ es un espacio vectorial normado con la norma $|| \ ||_N$, llamada la norma nuclear, definida como*

$$||T||_N = \text{ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}||f_n^*||||y_n|| : Tx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x)y_n, x\in X\right\}.$$

Demostración. Se demuestra que si $||T||_N = 0$ entonces $T = 0$. Sea $\epsilon > 0$ dado. Por definición de $||T||_N$ existen sucesiones $(f_n^*)_{n\geq 1}$ en X^* y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tales que $Tx = \sum_{n=1}^{n} f_n^*(x)y_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}||f_n^*||||y_n|| < \infty$. Además, $\sum_{n=1}^{\infty}||f_n^*||||y_n|| < ||T||_N + \epsilon = 0 + \epsilon = \epsilon$. Luego,

$$||Tx|| = ||\sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x)y_n|| < \sum_{n=1}^{\infty}||f_n^*|| \ ||x|| \ ||y_n|| < \epsilon||x|| \text{para todo} x \in X.$$

Así, $||T|| \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto $||T|| = 0$ y así $T = 0$.
2. Sean $\lambda \neq 0$ y $\epsilon > 0$ dado. Por definición de $||T||_N$ existen sucesiones $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ en X^* y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tales que $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x)y_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}||f_n^*||||y_n|| < ||T||_N + \frac{\epsilon}{|\lambda|}$. Ahora,

$$\lambda Tx = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda f_n^*(x)y_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x)z_n,$$

donde $z_n = \lambda y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x)z_n$ es una representación del operador λT, así de la definición de $||\lambda T||_N$ se tiene que:

$$\begin{aligned}||\lambda T||_N &\leq \sum_{n=1}^{\infty}||f_n^*||||z_n|| = \sum_{n=1}^{\infty}||f_n^*||||y_n|||\lambda| \\ &< \left(||T||_N + \frac{\epsilon}{|\lambda|}\right)|\lambda| \\ &< |\lambda|||T||_N + \epsilon \quad \forall\epsilon > 0.\end{aligned}$$

Entonces $||\lambda T||_N \leq |\lambda|||T||_N$, lo cual demuestra que es un operador nuclear para todo $\lambda \neq 0$ y $||\lambda T||_N \leq |\lambda|||T||_N$. Recíprocamente, sea $\epsilon > 0$ dado. Entonces existen sucesiones $(f_n^*)_{n\geq 1}$

en X^* y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Y tales que $\lambda Tx = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x)z_n$, siendo $y_n = \dfrac{z_n}{\lambda}$. Por lo tanto,

$$Tx = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x)z_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x)y_n$$

y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n^*||\ ||z_n|| < |||\lambda T||_N + \epsilon$. Así,

$$\begin{aligned}||T||_N &\leq \sum_{n=1}^{\infty} ||f_n^*||\ ||y_n|| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n^*||\ ||z_n|| \\ &< \frac{1}{|\lambda|}||\lambda T||_N + \frac{\epsilon}{|\lambda|}.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\Rightarrow |\lambda|\ ||T||_N \leq ||\lambda T||_N + \epsilon \text{ para todo} \epsilon > 0$$

Así $|\lambda|\ ||T||_N \leq ||\lambda T||_N$. Luego $||\lambda T||_N = |\lambda|\ ||T||_N$.

3. Sean S y T dos operadores nucleares y sea $\epsilon > 0$ dado. Por definición de $||S||_N$ y $||T||_N$, existen sucesiones de funcionales $(g_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ en X^* y sucesiones de puntos $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tales que $Tx = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x)y_n$ y $Sx = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n^*(x)z_n$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||g_n^*||\ ||z_n|| < ||S||_N + \frac{\epsilon}{2},$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n^*||||y_n|| < ||T||_N + \frac{\epsilon}{2}.$$

Como

$$\begin{aligned}(S+T)(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x)y_n + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^*(x)z_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(f_n^*(x)y_n + g_n^*(x)z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^*(x)w_n,\end{aligned}$$

donde $\theta_n^*(x) = 1$ y $w_n = f_n^*(x)y_n + g_n^*(x)z_n$. Entonces,

$$||S+T||_N \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||\theta_n^*(x)||\ ||w_n||$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} ||y_n^*||\ ||z_n|| + \sum_{n=1}^{\infty} ||f_n^*||\ ||y_n|| \\
&< ||S||_N + ||T||_N + \epsilon
\end{aligned}
$$

Así, $||S+T||_N \leq ||S||_N + ||T||_N$. □

El siguiente teorema establece una relación entre los operadores nucleares y los operadores compactos.

Teorema 2.12. *Sean X y Y espacios de Banach. Entonces, el conjunto de los operadores nucleares $N(X,Y)$ es un subconjunto del conjunto de los operadores compactos $\mathcal{K}(X,Y)$.*

Demostración. Se supone que $T : X \to Y$ es un operador nuclear. Entonces existen sucesiones $(f_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ en X^* y $(y_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ en Y tales que $Tx = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i^*(x)y_i$ y $\sum_{i=1}^{+\infty} ||f_i^*||\ ||y_i|| < +\infty$. Luego, para cada $\epsilon > 0$ dado, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$
\sum_{i=1}^{+\infty} ||f_i^*||||y_i|| < \epsilon
$$

Para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, se define el operador $T_n : X \to Y$ como

$$
T_n x = \sum_{i=1}^{n} f_i^*(x)y_i \text{para cada} n \in \mathbb{N}
$$

Note que para cada $n \in \mathbb{N}$ la imagen de T_n es un subconjunto de $gen\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ y por tanto tiene dimensión finita. Así T_n es un operador de rango finito para cada $n \in \mathbb{N}$ y además

$$
\begin{aligned}
||T_n x - Tx|| &= ||\sum_{i=n+1}^{+\infty} f_i^*(x)y_i|| \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} ||f_i^*||\ ||y_i|| < \epsilon \text{para todo} n \geq N.
\end{aligned}
$$

Luego, $||T_n - T|| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Así que T es límite de operadores de rango finito y por tanto es compacto. □

Recordemos que $L^f(X,Y)$ denota el conjunto de operadores de rango finito.

Teorema 2.13. *Sean X y Y espacios de Banach. Entonces el conjunto de los operadores de rango finito es denso en el conjunto de los operadores nucleares.*

Demostración. Sea $T: X \to Y$ un operador de rango finito dado entonces la imagen de T tiene dimensión finita y por tanto existe una base $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ de ImT. Por el teorema del sistema biortogonal[5] existen $f_1, f_2, .., f_n$ en Y^* tal que $y = \sum_{i=1}^{n} f_i(y)y_i$. Ahora se define $g_i = f_i \circ T$. Como T es de rango finito entonces T es compacto y por lo tanto acotado. Luego $g_i \in X^*$ para cada $i = 1, 2, ..., n$. Además, si $x \in X$ entonces $Tx \in ImgT = gen\{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Entonces

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{i=1}^{n} f_i(T_x)y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ T)(x)y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} g_i(x)y_i. \end{aligned}$$

Al hacer $g_i = 0$ para todo $i > n$ se tiene que T es un operador nuclear.

Se demuestra la densidad. Sea $T: X \to Y$ un operador nuclear y $\epsilon > 0$ dado. Entonces existen $f_n^* \in X^*$ y $y_n \in Y$ tales que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ||f_n^*|| \, ||y_n|| < +\infty$$

y

$$T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^*(x)y_n$$

para todo $x \in X$. Como la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ||f_n^*|| ||y_n||$$

converge, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n$ entonces:

$$\sum_{k=m}^{+\infty} ||f_k^*|| ||y_k|| < \epsilon.$$

Se define, para cada $m \in \mathbb{N}$, $T_m x = \sum_{k=1}^{m} f_k^*(x)y_k$. Entonces T_m es un operador de rango finito para cada $m \in \mathbb{N}$, y además

$$Tx - T_m x = \sum_{i=m+1}^{+\infty} f_i^*(x)y_i \text{para todo} x \in X.$$

[5]Existencia del dual topológico

De la definición de norma nuclear se sigue que

$$||T - T_m||_N \leq \sum_{k=1}^{+\infty} ||f_k^*||||y_k|| < \epsilon \text{para todo} m \geq N.$$

Por lo tanto $||T - T_m||_N \to 0$ cuando $m \to \infty$. Así, $L^f(X,Y)$ es denso en $N(X,Y)$.

□

Nota 2.10. *El conjunto de operadores de rango finito también es denso en el espacio de operadores nucleares con la norma uniforme, esto es* $||T|| = \sup\{||Tx|| : ||x|| = 1\}$. *Para ello se demuestra que* $||T|| \leq ||T||_N$. *En efecto, dado* $\epsilon > 0$, *existen sucesiones* $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* X^* *y* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* Y *tales que* $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n^*||||y_n|| < ||T||_N + \epsilon$ *y* $Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^*(x)y_n$*para todo*$x \in X$.

Así, si $||x|| \leq 1$ entonces

$$||Tx|| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} ||f_n^*||||y_n|| < \sum_{n=1}^{+\infty} ||f_n^*||||x||||y_n|| \leq ||T||_N + \epsilon.$$

Por lo tanto $||T|| \leq ||T||_N + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Esto es $||T|| \leq ||T||_N$.

Nota 2.11. *Se tiene que* $X \otimes Y$ *se puede identificar con el conjunto de los operadores de rango finito* $L^f(X,Y)$, *identificando* $\sum_{i=1}^{m} x^* \otimes y_i$ *con el operador* $T : X \to Y$ *de rango finito. Como los operadores de rango finito son nucleares, cada* $\sum_{i=1}^{m} x^* \otimes y_i$ *es de la forma* $\sum_{i=1}^{m} x_i^*(x)y_i = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)v_k$, *para cada* $x \in X$ *y algunas sucesiones* $(f_k)_{k\geq 1}$ *en* X^* *y* (v_k) *en* Y *tales que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||^*||v_k|| < \infty.$$

Luego, por definición de norma nuclear se tiene que

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{m} x_i^* \otimes y_i\right|\right|_N \leq \left|\left|\sum_{i=1}^{m} x_i^* \otimes y_i\right|\right|_\pi,$$

ya que la norma nuclear es el infimo de las normas de representaciones del operador T. *En la próxima sección se demuestra que si* X^* *o* Y *tiene la propiedad de aproximación, entonces las normas nuclear y proyectiva* π *son iguales.*

Nota 2.12. *Se considera el dual de $E\widehat{\otimes}_\epsilon F$. Observe que $E^*\otimes F^* \subset (E\widehat{\otimes}_\epsilon F)^* \subset (E\widehat{\otimes}_\pi F^*)^* = (\beta(E,F;\mathbb{R}), ||\ ||) = (L(E,F^*), ||\ ||)$ y que $||f\circ\omega|| = ||f||_\pi \leq ||f||_\epsilon$ para todo $f \in (E\widehat{\otimes}_\epsilon F)^*$, donde $\omega : E\times F \to E\otimes F$ es la función canónica.*

Por lo tanto, se define naturalmente $I(E,F) = \{f\circ\omega \in \beta(E,F;\mathbb{R}) : f \in (E\widehat{\otimes}_\epsilon F)^*\}$ $||f\circ\omega||_{(i)} = ||f||_\epsilon$ para toda $f\in(E\widehat{\otimes}_\epsilon F)^*$.

Los elementos en $I(E,F)$ son llamadas formas bilineales integrales sobre $E\times F$ y $||\ ||_{(i)}$ es considerada como la norma integral.

La fórmula (1,25) demuestra que elementos en $E^*\otimes F^*$ son formas bilineales integrables sobre $E\times F$. Claramente una forma bilineal $\psi : E\times F\to\mathbb{R}$ es integral si y solo si:

$$\begin{aligned} ||\psi||_{(i)} &= \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^n \psi(x_i,y_i)\right| : \left|\left|\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i\right|\right|_\epsilon \leq 1\right\} < \infty \\ &= \sup\left\{\left|\psi\left(\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i\right)\right| : \left|\left|\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i\right|\right|_\epsilon \leq 1\right\} < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $f\to f\circ\omega$ es un isomorfismo isométrico de $(E\widehat{\otimes}_\epsilon F)^*$ sobre $(I(E,F), ||\ ||_{(i)})$. Así, se idéntifica el dual de $E\widehat{\otimes}_\epsilon F$ como $(E\widehat{\otimes}_\epsilon F)^*$, como el conjunto de formas bilineales integrables $(I(E,F), ||\ ||_{(i)})$.

Por lo tanto, las formas bilineales integrables pueden ser considerados como funcionales lineales en $E\widehat{\otimes}_\epsilon F$. Como $(L(E,F), ||\cdot||)$ es canónicamente isomorfo a un subespacio de las formas bilineales continuas de $E\times F^*$ en $\mathbb{R}$, $(\beta(E,F;\mathbb{R}), ||\ ||)$, la definición correspondiente de formas bilineales integrables se puede posiblemente transferir a los elementos de $L(E,F)$, a saber.

Definición 2.9. *Se define un operador $T : E\to F$ como un operador integral si la forma bilineal μ_T, definida por $\mu_T(x,y^*) = y^*(Tx)$ para todo $(x,y^*)\in E\times F^*$, es una forma bilineal integral sobre $E\times F^*$ y la norma integral $||T||_{(i)}$ esta definida como la norma integral de μ_T. Por lo tanto, un operador $T : E\to F$ es integrable si y sólo si*

$$||T||_{(i)} = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^n y_i^*(Tx_i)\right| : \left|\left|\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i^*\right|\right|_\epsilon \leq 1\right\} < +\infty$$

Nota 2.13. *Se denota por $L^{(i)}(E,F)$ el conjunto de todos los operadores integrables de E en F. Entonces la función $T\to\mu_T$ es claramente un isomorfismo isométrico del espacio normado $(L^i(E,F), ||\ ||_{(i)})$ sobre un subespacio de $(T(E,F^*), ||\ ||_{(i)})$.*

2.4. ISOMORFISMO DE $N(X,Y)$ Y EL PRODUCTO TENSORIAL PROYECTIVO

En esta sección, la función $J : X \to X^{**}$ denota la función de evaluación $J(x)x^* = x^*(x)$ para todo $x \in X$, ya se demostró que $X^* \otimes Y$ se identifica con el conjunto de operadores de rango finito $L^f(X,Y)$. Esta identificación será considerada en esta sección, a menos que se diga lo contrario, bajo esta identificación, cada $z = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i$ en $X^* \otimes Y$ es una función lineal de X en Y con rango finito, obtenida como

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)y_i \text{para todo} x \in X.$$

En esta sección se busca dar condiciones sobre X^* o Y para que las normas nuclear y de rango finito sean iguales en $L(X,Y)$. Antes de responder esta pregunta se requiere de alguna terminología y de algunos resultados preliminares.

Lema 2.3. *Sea X un espacio vectorial, X^* el dual y X^* el bidual topológico de X. Existe un funcional lineal continuo f en $X^*\widehat{\otimes}_\pi X^{**}$ de norma uno tal que $f(\mu) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{**}(x_i^*)$ para todo μ en $X^*\widehat{\otimes}_\pi X^{**}$.*

Demostración. Se demostró en el teorema 2.3 que el espacio dual del producto tensorial proyectivo $X^*\widehat{\otimes}_\pi X^{**}$ es isométrico al conjunto de las formas bilineales continuas de $X^* \times X^{**}$ en $\mathbb{R}$, esto es $(X^*\widehat{\otimes}_\pi X^{**})^* \cong B(X^*, X^{**})$. En particular, cse considera la forma bilineal φ dada por $\varphi(x^*, x^{**}) = x^{**}(x^*) \in X^* \times X^{**}$. Entonces φ satisface que:

$$|\varphi(x^*, x^{**})| = |x^{**}(x^*)| \leq ||x^{**}||||x^*||,$$

y por lo tanto

$$||\varphi|| = \sup\{|\varphi(x^*, x^{**})| : ||x^*|| \leq 1, ||x^{**}|| \leq 1\} \leq 1$$

Por el teorema de Hananh- Banach existe un funcional lineal continuo x^{**} tal que

$$x^{**}(x^*) = 1 \ y \ ||x^{**}|| = 1.$$

Así que

$$1 = |x^{**}(x^*)| = |\varphi(x^*, x^{**})| \leq sup\{|\varphi(x^*, x^{**})| : ||x^*|| \leq 1, ||x^{**}|| \leq 1\} = ||\varphi||$$

Luego $||\varphi|| \geq 1$. Entonces, por la isometría existe un funcional lineal continuo denotado por f de norma uno tal que $f(\mu) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{**}(x_i^*)$ para todo $\mu \in X^* \otimes_\pi X^{**}$, donde $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x_i^{**}$ es cualquier representación de μ, lo cual completa la demostración.

$\square$

Nota 2.14. *El funcional f obtenido en el lema anterior es llamado el trazo y es denotado por* $trazo(\mu) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{**}(x_i^*)$ *para todo* $\mu \in X^* \otimes_\pi X^{**}$.

Teorema 2.14. *Sean X y Y espacios vectoriales. La función $T \to \phi_T$ definida como $\phi_T(z) = tr(T \circ z)$, para todo $z \in X^* \otimes Y$, es un isomorfismo isométrico de $(L(Y, X^{**}), ||\ ||)$ sobre $(X^{**}\widehat{\otimes}_\pi Y)^*$. Por lo tanto, $(X\widehat{\otimes}_\pi Y)^* \cong (\beta(X^*, Y; \mathbb{R}); ||\ ||) = (L(X^*, Y), ||\ ||)$ y $||z||_\pi = \sup\{|tr(T \circ z)| : ||T|| \leq 1, T \in L(Y, X^{**})\}$.*

Demostración. Supongamos que $T : Y \to X^{**}$ es un operador lineal continuo y que $z = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i$ un elemento de $X^* \otimes Y$. Entonces, z se puede considerar como un operador de rango finito de X en Y y por tanto la composición $T \circ z : X \to X^{**}$ es un operador de rango finito. Así que $T \circ z = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes Ty_i$ (Recuerde que $z(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)y_i$). Entonces, por la definición del trazo se tiene que $trazo(T \circ z) = \sum_{i=1}^{n} Ty_i(x_i^*)$ y por tanto,

$$||trazo(T \circ z)|| \leq ||T|| \sum_{i=1}^{n} ||y_i||\ ||x_i^*|| \qquad (*)$$

Así, todo operador acotado $T : X \to X^{**}$ se le asocia un funcional lineal continuo ϕ_T en $X^*\widehat{\otimes}_\pi Y$ dada como $\phi_T(z) = trazo(T \circ z)$ para todo $z \in X^* \otimes Y$. Tomando el infimo sobre $||z|| \leq 1$ obtenemos de $(*)$ que $||\phi_T||_\pi \leq ||T||$. $\square$

Se ha encontrado así una función

$$\Psi : L(Y, X^{**}) \to (X^* \otimes_\pi Y)^*$$

$$T \to \phi_T$$

con $\phi_T(z) = trazo(T \circ z)$ demostremos que es sobreyectiva e inyectiva. Se supone que

$$\phi_{T1}(z) = \phi_{T2}(z)$$

$$
\begin{aligned}
trazo(T_1 \circ z) &= trazo(T_2 \circ z) \\
\sum_{i=1}^{n} T_1 y_i(x_i^*) &= \sum_{i=1}^{n} T_2 y_i(x_i^*) \\
T_1 \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i^*) &= T_2 \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i^*) \\
T_1 &= T_2
\end{aligned}
$$

POr lo tanto ϕ es inyectiva. Y es facil ver que es sobreyectiva por la definición de la función. Recíprocamente, para una y dada, y un funcional $f \in (X^* \otimes_\pi Y)^*$ se define $\psi : X^* \to \mathbb{R}$ por $\psi(x^*) = f(x^* \otimes y)$ para todo $x^* \in X^*$. Luego ψ es un funcional lineal continuo sobre X^* que satisface

$$|\psi(x^*)| \leq ||f||_\pi ||y|| \; ||x^*|| \text{para todo} x^* \in X^*.$$

Entonces, como f es un funcional lineal continuo en $X^* \widehat{\otimes}_\pi Y$, por el isomorfismo isométrico se sigue que f es una forma bilineal en $X^{**} \times Y$ en $\mathbb{R}$. Por lo tanto existe un único $h_y \in X^{**}$ tal que $f(x^* \otimes y) = h_y(x^*)$ para todo $x^* \in X^*$. Definimos el operador $T : Y \to X^{**}$ como $T(y) = h_y$ siendo $h_y(x^*) = f(x^* \otimes y)$. Entonces, T es obviamente un operador lineal de Y en X^{**} tal que

$$|T(y)(x^*)| = |h_y(x^*)| = |f(x^* \otimes y)| \leq ||f||_\pi ||x^*|| \; ||y|| \text{para todo} x^* \in Y^*.$$

Así, $||T_y|| \leq ||f||_\pi ||y|| \text{para todo} y \in Y$. Por lo tanto, $||T|| \leq ||f||_\pi$.

Finalmente, para cada $z = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i \in X \otimes Y$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i^* \otimes y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} h_{y_i}(x_i^*) = \sum_{i=1}^{n} T y_i(x_i^*) \\
&= trazo(T \circ z) = \phi_T(z),
\end{aligned}
$$

y así

$$f = \phi_T.$$

Además,

$$||z||_\pi = \sup\{|f(z)| : ||f|| \leq 1\}$$

$$= \sup\{|trazo(T \circ z)| : ||T|| \leq 1, T \in L(Y, X^{**})\}.$$

Nota 2.15. *1. Note que el teorema anterior muestra que la función $T \to T^* J_{X^*}$ es un isomorfismo isométrico de $L(Y, X^{**})$ sobre $L(X^*, Y^*)$ y repitiendo el mismo argumento de teorema anterior es también un isomorfismo isométrico entre los operadores integrables $L^i(Y, X^{**})$ sobre el dual de $(X^* \otimes_\epsilon Y)^*$.*
2. En el próximo Lemma, el conjunto $L_\sigma(Y, X)$ denota el conjunto de los operadores acotados de Y en X con la topología dada por la convergencia puntual de operadores.

Lema 2.4. *La función $z \to \phi_z$ definida como $\phi_z(S) = trazo(J_X \circ S \circ Z)$, para todo $S \in L(Y, X)$, es un isomorfismo algebraico de $X^* \otimes Y$ sobre $(L_\sigma(Y, X))^*$.*

Demostración. Se supone que $z = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i \in X^* \otimes Y$ y que S es un operador lineal continuo de Y en X. La composición $(J_X \circ S) \circ z$ es una función de rango finito de $x \in X^{**}$ dada como:

$$J_x \circ S \circ z = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes J_x(Sy_i) \ \in X^* \otimes X^{**}.$$

Entonces, por la definición de trazo,

$$trazo(J_x \circ S \circ z) = \sum_{i=1}^{n} J_x(Sy_i)(x_i^*)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} < J_x(Sy_i), (x_i^*) > .$$

Luego, la función $\phi_z(S) = trazo(J_x \circ S \circ z)$, para todo $S \in L(Y, X)$, es un funcional lineal continuo sobre $L_\sigma(Y, X)$. Además $L_\sigma(Y, X)$ es un subespacio del espacio producto X^Y, y es bien conocido (ver Schaafer [1, pág 137]) que dada una $g \in (L_\sigma(Y, X))^*$ existen subconjuntos finitos $\{x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\}$ de X^* y $\{y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*\}$ de Y tales que $g(S) = \sum_{i=1}^{n} J_x S y_i(x_i^*)$ para toda $S : Y \to X$. Por lo tanto $g(s) = tr(J_x \circ S \circ z) = \phi_z(S)$ lo cual completa la demostración.

□

Lema 2.5. *Si $T : X \to Y$ es un operador integrable y $\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i^* \otimes x_i^{**} \in Y^* \otimes X^{**}$, entonces*

$$|trazo(\mu \circ T)| \leq ||T||_{(i)} ||\mu||$$

Demostración. Se supone que $T : X \to Y$ es un operador integrable y $\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i^* \otimes x_i^{**}$ un elemento de $Y^* \otimes X^{**}$, entonces μ se identifica con un operador de rango finito de Y en X^{**}. Así, $\mu \circ T : X \to X^{**}$ es un operador de rango finito y $\mu \circ T = \sum_{i=1}^{n} T^* y_i^* \otimes x_i^{**}$.
Luego, de la definición de trazo obtenemos

$$
\begin{aligned}
trazo(\mu \circ T) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^{**}(T^* y_i^*) \\
&= \sum_{i=1}^{n} T^{**} x_i^*(y_i^*) \\
&= tr(T^{**} \circ \mu),
\end{aligned}
$$

donde se utiliza la definición de adjunto que $< T^{**} x_i^*, y_i^* >=< x_i^*, T^* y_i >$. Así, tomando la forma bilineal asociada a T^* como $\mu_{T^*}(y_i^*, x_i^{**}) = T^* y_i^*(x_i^{**})$ y la definición de norma integral se obtiene que

$$
\begin{aligned}
|tr(\mu \circ T)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} < T^* y_i^*, x_i^{**} > \right| \\
&\leq \left| \sum_{i=1}^{n} \mu_{T^*}(x_i^{**}, y_i^*) \right| \\
&\leq ||\mu_{T^*}|| \left|\left| \sum_{i=1}^{n} y_i^* \otimes x_i^{**} \right|\right| \\
&\leq ||T||_{(i)} \left|\left| \sum_{i=1}^{n} y_i^* \otimes x_i^{**} \right|\right| \\
&\leq ||T||_{(i)} ||\mu||.
\end{aligned}
$$

□

Nota 2.16. *Se tiene que un espacio de Banach X tiene la propiedad de aproximación si y solo si para todo espacio de Banach Y el conjunto de operadores de rango finito de X en Y es denso en el conjunto de operadores compactos de X en Y, esto es $\overline{L^f(X,Y)} = \mathcal{K}(X,Y)$.*

Se puede ahora demostrar el teorema principal.

Teorema 2.15. *Sean X, Y espacios de Banach. Si X^* o Y tienen la propiedad de aproximación entonces*

$|| \ ||_{(i)} = || \ ||_N = || \ ||_\pi$ *sobre* $L^f(X,Y)$.

Demostración. Como la desigualdad $|| \ ||_{(i)} \leq || \ ||_N \leq || \ ||_\pi$ es siempre válido y como $|| \ ||_N \leq || \ ||_\pi$ es suficiente demostrar que $|| \ ||_\pi \leq || \ ||_{(i)}$, consideremos el elemento $R = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i$ de $X_i^* \otimes Y$. Como todo operador de rango finito es integrable entonces

$$\begin{aligned} ||R||_\pi &= \sup\{|trazo(T \circ R)| : ||T|| \leq 1, T \in L(Y, X^{**})\} \\ &\leq \sup\{|trazo(\mu \circ R)| : ||\mu|| \leq 1, \mu \in L^f(Y, X^{**})\}. \end{aligned}$$

Se supone que Y tiene la propiedad de aproximación. Entonces el conjunto de operadores de rango finito de Y en X^{**} es denso en $L(Y, X^{**})$. Como se sabe $X^{**} \otimes Y$ es isomorfo al dual de $L_\sigma(Y, X^{**})$, el conjunto de operadores acotados con la topología de convergencia puntual. Además, el isomorfismo $z \to \phi_z$ (con $z \in X^{**} \otimes Y$) es definido como

$$\phi_z(S) = trazo(J_{X^{**}} \circ S \circ Z),$$

para todo $S \in L(Y, X^{**})$.
Como $z = \sum_{i=1}^{n} J_{X^*}(x_i^*) \otimes y_i$ pertenece a $X^{**} \otimes Y$, entonces z se puede considerar como un operador de rango finito de Y en X^{**}, y así,

$$\begin{aligned} &\sup\{|trazo(J_{X^{**}} \circ S \circ z)| : ||S|| \leq 1, S \in L(Y, X^{**})\} \\ &\leq \sup\{|trazo(J_{X^{**}} \circ \mu \circ z)| : ||\mu|| \leq 1, S \in L^f(Y, X^{**})\}. \end{aligned}$$

Utilizando la definición de el funcional trazo y las propiedades de J, $(< J_x, f >=< f, x >)$ se obtiene que para todo $S : Y \to X^{**}$ acotado se tiene

$$\begin{aligned} trazo(J_{X^{**}} \circ S \circ z) &= \sum_{i=1}^{n} < J_{X^{**}}(Sy_i), J_{X^*}(x_i^*) > \\ &= \sum_{i=1}^{n} < J_{X^*}(x_i^*), Sy_i > \\ &= \sum_{i=1}^{n} < x_i^*, Sy_i >= tr(S \circ R). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$||R||_\pi = sup\{|tr(S \circ R)| : ||S|| \leq 1\}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq sup\{|trJ_{X^{**}} \circ S \circ z| : ||S|| \leq 1\} \\
&\leq sup\{|trJ_{X^{**}} \circ \mu \circ z| : ||\mu|| \leq 1, \mu \in L^f(Y, X^*)\} \\
&\leq ||R||_{(i)} \; ||\mu|| \\
&\leq ||R||_{(i)}.
\end{aligned}
$$

Como se deseaba mostrar.

□

Ahora se supone que X^* tiene la propiedad de aproximación. Entonces el conjunto de operadores de rango finito de X^* en Y^* es denso en $L(X^{**}, Y^*)$ con la topología de convergencia puntual. Además, existe el isomorfismo $Y^{**} \otimes X^* \cong (L_\sigma(X^{**}, Y^*))^*$ por la función $z \to \phi_z$, $z \in Y^{**} \otimes X^*$ definida como $\phi_z(S) = tr(J_{y^*} \circ S \circ z)$ para todo $S \in L(X^*, Y^*)$. Entonces, para cualquier $z \in Y^{**} \otimes X^*$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\sup\{|trazo(J_{y^*} \circ S \circ z)| : ||S|| \leq 1, S \in L(X^*, Y^*)\} \\
&\qquad \leq \sup\{|trazo(J_{y^*} \circ v \circ z)| : ||v|| \leq 1, v \in L^f(X^*, Y^*)\}.
\end{aligned}
$$

Como la función adjunta R^* de R tiene rango finito, entonces

$$
\begin{aligned}
&\sup\{|trazo(J_{y^*} \circ S \circ R^*)| : ||S|| \leq 1, S \in L(X^*, Y^*)\} \\
&\leq \sup\{|trazo(J_{y^*} \circ v \circ R^*)| : ||v|| \leq 1, v \in L^f(X^*, Y^*)\}
\end{aligned}
$$

De la observación se sigue que existe un isomorfismo entre $L(Y, X^{**})$ y $L(X^*, Y^*)$ bajo la función $T \to T^* \circ J_{X^*}$ con T elementos de $L(Y, X^{**})$. Entonces, reemplazando en la desigualdad anterior se obtiene que

$$
\begin{aligned}
&\sup\{|trazo(J_{y^*} \circ T^* \circ J_{X^*} \circ R^*)| : ||T|| \leq 1, T \in L(Y, X^{**})\} \\
&\leq \sup\{|trazo(J_{y^*} \circ v^* \circ J_{X^*} \circ R^*)| : ||v|| \leq 1, v \in L^f(Y, X^{**})\}
\end{aligned}
$$

Ahora, para cada $x \in X$ y $y^* \in Y^*$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
< x, R^* y^* > &=< R(x), y^* > \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) y^*(y_i)
\end{aligned}
$$

$$=< x, \sum_{i=1}^{n} x_i^* y^*(y_i) >$$
$$=< x, \sum_{i=1}^{n} < y^*, J_y(y_i) > x_i^* >$$

Por lo tanto, $R^* = \sum_{i=1}^{n} J_y(y_i) \otimes x_i^*$. Así de la definición de T^* y la función inclusión J se tiene

$$\begin{aligned} tr(J_{y^*} \circ T^* \circ J_{x^*} \circ R^*) &= \sum_{i=1}^{n} < J_y(y_i), (J_{y^*} \circ T^* \circ J_{x^*})(x_i^*) > \\ &= \sum_{i=1}^{n} < y_i, (T^* \circ J_{x^*}) x_i^* > \\ &= \sum_{i=1}^{n} < x_i^*, T y_i >= tr(T \circ R) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} ||R||_\pi &= \sup\{|trazo(T \circ R)| : ||T||_\pi \leq 1, T \in L(Y, X^{**})\} \\ &\leq \sup\{|trazo(J_{y^*} \circ T^* \circ J_{x^*} \circ R^*)| : ||T||_\pi \leq 1, T \in L(Y, X^{**})\} \\ &\leq \sup\{|trazo(J_{y^*} \circ v^* \circ J_{x^*} \circ R^*)| : ||v||_\pi \leq 1, v \in L(Y, X^{**})\} \\ &\leq ||R^*||_{(i)} ||v|| \\ &\leq ||R||_{(i)} ||v|| \end{aligned}$$

como se deseaba demostrar.

Teorema 2.16. *Sean X y Y espacios de Banach. Si $X^* \circ Y$ tienen la propiedad de aproximación entonces $X^* \widehat{\otimes}_\pi Y$ es isomorfo al espacio de los operadores nucleares de X en Y, o sea, $X^* \widehat{\otimes}_\pi Y \cong N(X, Y)$.*

Demostración. El teorema anterior establece que $X^* \widehat{\otimes}_\pi Y$ es isometricamente isomorfo a el subespacio de los operadores nucleares formada por los operadores de rango finito $(L^f(X, Y), || \,||_N)$. Como el subespacio de los operadores de rango finito es denso en el espacio de los operadores nucleares, entonces

$$X^* \widehat{\otimes}_\pi Y \cong (N(X, Y), || \,||_N).$$

□

Capítulo 3

SOBRE EL ISOMORFISMO DE $\mathcal{K}(\mathbb{R}^{\lambda}, \mathbb{R}^{\epsilon})$ EN UN SUBESPACIO DE $N(\mathbb{R}^{\mu}, \mathbb{R}^{\eta})$

En este capítulo se demostrara que si $\lambda, \epsilon, \mu, \eta$ son ordinales enumerables entonces no existe un isomorfismo entre el espacio de operadores compactos $\mathcal{K}(\mathbb{R}^{\lambda}, \mathbb{R}^{\epsilon})$ y cualquier subespacio de el espacio de operadores nucleares $N(\mathbb{R}^{\mu}, \mathbb{R}^{\eta})$.

Se consideran algunas definiciones y lemas que se necesitan para la demostración de lo anterior.

Definición 3.1 (Sucesión básica)**.** *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es llamada una sucesión básica en X si para todos los puntos $x \in \overline{gen}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe una única sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de escalares tal que la serie $\sum_{n=1}^{k} a_n x_n$ converge a x, esto es, $\lim_{k\to\infty} ||\sum_{n=1}^{k} a_n x_n - x|| = 0$.*

Definición 3.2. *Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en un espacio de Banach X es seminormalizada si existe una constante $k > 0$ tal que*

$$\frac{1}{k} \leq ||x_n|| \leq k, para\ todo n \in \mathbb{N}$$

$(x_n)_{n\geq 1}$ se llama normalizada si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $||x_n|| \leq 1$.

Definición 3.3 (Sucesión básica bloque)**.** *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base para un espacio de Banach X. Se supone que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números enteros con $p_0 = 0$ y que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son escalares. Entonces, una sucesión de vectores no nulos $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X de la forma*

$$\mu_n = \sum_{J=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j x_j$$

se llama una sucesión básica bloque de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si se tiene una sucesión básica $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se puede especificar cada $x \in \overline{gen\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$, pero en general no es cierto que cada sucesión de escalares define un elemento de $\overline{gen\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Asi, X esta coordinado por un cierto espacio de sucesiones y se debe tener la capacidad de reconocer la presencia de estas sucesiones básicas en diferentes circunstancias y así saber si esta sucesión básica es única salvo isomorfismos. Esto último motiva la siguiente definición.

Definición 3.4 (Sucesión equivalente)**.** *Sean X y Y dos espacios de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones básicas de X y Y respectivamente, se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y solamente si cada vez que se considera una sucesión de escalares $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ converge si y solo si $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$ converge.*

El próximo teorema da una condición necesaria y suficiente para decidir si dos sucesiones básicas son equivalentes.

Teorema 3.1. *Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones básicas en un espacio de Banach. Entonces, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son equivalentes si y solo si existe un isomorfismo $T : [x_n]_{n\in\mathbb{N}} \to [y_n]_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $Tx_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sean $X = [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ y $Y = [y_n]_{n\in\mathbb{N}}$. Se define $T : X \to Y$ como $T(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$. Entonces T es una transformación lineal inyectiva y sobreyectiva. Veamos que T es continua. Para ello se utiliza el teorema del gráfico cerrado. Se supone que $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que $\mu_j \to \mu$ en X y $T\mu_j \to v$ en Y. Se considera que $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ son los funcionales biortogonales asociados a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente. Entonces $\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\mu_j) x_n$ y $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\mu) x_n$. Como $\mu_j \to \mu$ entonces por la continuidad de x_n^* se tiene que $x_n^*(\mu_j) \to x_n^*(\mu)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de T se sigue que

$$T(\mu_j) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\mu_j) x_n,$$

y por lo tanto

$$y_p(T\mu_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{x_n^*(\mu_j)}_{\delta_{nj}} \underbrace{y_p^*(y_n)}_{\delta_{pn}}.$$

Además, $x_p^*(\mu_j) \to x_p^*(\mu)$ cuando $j \to \infty$ y $p \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, de la unicidad del limite se tiene que

$$y_p^*(v) = x_p^*(\mu) \ \textit{para todo} \ p \in \mathbb{N}.$$

Así, $T(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\mu) y_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(\mu) y_n = v$.

Por el teorema del gráfico cerrado se sigue que T es continua y como X e Y son espacios de Banach y T es sobreyectiva, entonces T^{-1} es un isomorfismo.

□

Corolario 3.1. *Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones básicas para los espacios de Banach X y Y, respectivamente. Entonces, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y solo si existe una constante $C > 0$ tales que para toda sucesión de escalares $(a_n)_{n\geq 1}$ se tiene que:*

$$\frac{1}{C} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_i y_i \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \leq C \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_i y_i \right\|.$$

Corolario 3.2. *Sean $(x_n)_{n\geq 1}$ y $(y_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones básicas para los espacios de Banach X y Y respectivamente. Entonces, $(x_n)_{n\geq 1}$ es equivalente a $(y_n)_{n\geq 1}$ si y solo si existen constantes $C, M > 0$ tales que para toda sucesión de escalares $(a_n)_{n\geq 1}$ se tiene que*

$$M \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_i y_i \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \leq C \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_i y_i \right\|.$$

Nota 3.1. *Como un ejemplo particular, una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canonica de ℓ_1 si y solo si*

$$M \sum_{n=1}^{\infty} |a_i| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} |a_i| \ \textit{con} \ M \ \textit{y} \ C \ > 0.$$

También, una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canóonica de c_0 si y solo si existen constantes K y $C > 0$ tales que

$$K \sup_{i\geq 1} |a_i| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \leq C \sup_{i\geq 1} |a_i|$$

En el caso particular de c_0 o ℓ_p, con $1 \leq p < \infty$, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Si E es c_0 o ℓ_p, con $1 \leq p < \infty$, y $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la base canónica de E, entonces cualquier sucesión básica bloque normalizada $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ($||\mu_j|| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$) sobre las bases $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\overline{gen\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}}$ es isométrico a E.*

Demostración. Se desarrolla la prueba para $E = \ell_p$ y el caso c_0 es similar. Si $\mu_j = \sum_{n=q_j+1}^{q_{j+1}} \lambda_n e_n$, entonces para todo $j \in \mathbb{N}$ se tiene que,

$$1 = ||\mu_j||_p = \left(\sum_{n=q_j+1}^{q_{j+1}} |\lambda_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por lo tanto, para cada sucesión finita $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de escalares se tiene que

$$\begin{aligned} \left|\left| \sum_J a_j \mu_j \right|\right|_p &= \left(\sum_{j\leq 1} |a_j|^p \left(\sum_{n=q_j}^{q_{j+1}} |\lambda_n|^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{j\geq 1} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que la sucesión $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canonica de ℓ_p (con constante C=1) y que la aplicación

$$\begin{gathered} T : \overline{gen\{\mu_j : j \in \mathbb{N}\}} \to E \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu_j \to \sum_{j=1}^{\infty} a_j \end{gathered}$$

es lineal, y biyectiva con $||Tx|| = ||x||$, para todo $x \in \overline{gen\{\mu_j : j \in \mathbb{N}\}}$, esto es, T es una isometría.

$\square$

Corolario 3.3. *Si E es c_0 o ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ y $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la base canonica de E, entonces cualquier sucesión básica bloque seminormalizada $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sobre las bases $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\overline{gen\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}}$ es isomorfo a E.*

Demostración. Se sigue del teorema anterior que si $C \leq ||\mu_j|| \leq M$ para todo $j \in \mathbb{N}$, entonces

$$C \sum_{n=1}^{\infty} |a_j|^p \leq \left|\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu_j \right|\right|^p \leq M \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p.$$

Así, $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canonica de ℓ_p y la aplicación

$$T : \overline{gen\{\mu_j : j \in \mathbb{N}\}} \to E$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu_j \to \sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

es un isomorfismo ya que satisface $C||Tx||_p \leq ||x||_p \leq M||Tx||_p$. $\square$

Definición 3.5. *Sea X un espacio de Banach y $1 \leq p \leq \infty$. Se define el espacio $\ell_p(X) = (X \oplus X \oplus ...)_p$ llamado la suma directa infinita de X en el sentido ℓ_p. Esto es, $\ell_p(X)$ consiste de todas las sucesiones $x = (x(n))_{n\geq 1}$ con válores en X tales que $(||x(n)||)_{n=1}^{\infty}$ pertenece a ℓ_p con la norma*

$$||x|| = ||\ (||x(n)||)_{n\in\mathbb{N}}\ ||_p.$$

2. Se define el espacio $c_0(X)$ como la suma directa infinita de X en el sentido C_0, esto es,

$$c_0(X) = (X \oplus X \oplus ...)_{c_0}.$$

Es decir, $c_0(X)$ consiste de todas las sucesiones $x = (x(n))_{n\geq 1}$ con válores en X tales que $\lim\limits_{n\to\infty} ||x(n)|| = 0$ bajo la norma

$$||x|| = \sup_{1\leq n\leq\infty} ||x(n)||.$$

Nota 3.2. *En particular $c_0(\ell_1) = (\ell_1 \oplus \ell_1 \oplus ...)_{c_0}$, que es $c_0(\ell_1) = \{x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1; \lim\limits_{n\to\infty} ||x(n)|| = 0; x(n) \in \ell_1$ para todo$n \in \mathbb{N}$ y $||x|| = \sup\limits_{1\leq n\leq\infty} ||x(n)||\}$.*
También, $\ell_1(X) = (X \oplus X \oplus ...)_{\ell_1}$ es la suma directa en el sentido ℓ_1 y consiste de las sucesiones $x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en X tales que la sucesión $(||x(n)||)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ con la norma $||x|| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ||x(n)||$.

Nota 3.3. *Observe que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $c_0(\ell_1)$ entonces cualquier subsucesión tambien pertenece a $c_0(\ell_1)$, ya que el límite de una subsucesión es igual al límite de la sucesión original.*

Teorema 3.3. *Si $c_0(\ell_1)$ es isomorfo a un subespacio de $\ell_1(\mathcal{N}, X)$ entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $c_0(\ell_1)$ es isomorfo a un subespacio de X^m.*

Demostración. Se supone que existe $T : c_0(\ell_1) \to \ell_1(X)$ un isomorfismo sobre su imagén. Entonces, existe un $M > 0$ tal que $\frac{1}{M}||x|| \leq ||Tx|| \leq M||x||$ para todo $x \in c_0(\ell_1)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, se considera $Q_m : \ell_1(X) \to \ell_1(X)$ definida como $Q_m((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $y_n = x_n$ para todo $n \leq m$ y $y_n = 0$ y para $n > m$.

Se supone por absurdo que para todo natural $n \in \mathbb{N}$, $c_0(\ell_1)$ no es isomorfo a un subespacio de X^n. Se define para cada $m \in \mathbb{N}$ las proyecciones $P_m : c_0(\ell_1) \to c_0(\ell_1)$ por $P_m((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ donde $y_n = x_n$ para cada $n \leq m$ y $y_n = 0$ y para cada $n > m$. Ahora, de la definición de Q_m se sigue que $Q_m(\ell_1(X))$ es isomorfo a X^m para cada $m \in \mathbb{N}$. Además, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $c_0(\ell_1)$ entonces la subsucesión $(I - P_m)(x) = (x_j)_{j\geq m+1}$ tambien pertenece a $c_0(\ell_1)$, la cual no es isomorfo a un subespacio de X^m para cada $m \in \mathbb{N}$. Se sigue que

$$Q_m \circ T \Big|_{(I-P_k)(c_0(\ell_1))}$$

no es un isomorfismo sobre su imagen para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, para $k = \{1\}$ y $\epsilon = min\{\frac{1}{4m}, \frac{1}{2}\}$ existe un $y_1 \in (I - p_{k_1})(c_0(\ell_1))$ con $||y_1||$ tal que $||Q_m(T(y_1))|| < \epsilon$. Además, P_{k_1} es una proyección, entonces $P_{k_1}(y_1) = P_{k_1}(I - P_{K_1})(y_1) = 0$. Luego, $\lim_{j\to\infty} P_j(y_1) = \lim_{j\to\infty}(P_j - P_{k_1})(y_1) = y_1$ y por lo tanto, existe un $k_2 > k_1$ tal que

$$||(P_{k_2} - P_{k_1})(y_1) - y_1|| < \frac{1}{4}.$$

Se define $z_1 = (P_{k_2} - P_{k_1})(y_1)$. Entonces $||z_1 - y_1|| < \frac{1}{4}$, además z_1 satisface las desigualdades:

(I) $||z_1|| \geq ||y_1|| - ||z_1 - y_1|| = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

(II) $||z_1|| \leq 1$.

(III) $||Q_m(Tz_1)|| \leq \epsilon$.

Luego, $||Tz_1|| \geq \frac{1}{M}||z_1|| \geq \frac{3}{4M}$. Por lo tanto,

$$||Tz_1 - Q_{m_1}(Tz_1)|| \geq ||Tz_1|| - ||Q_{m_1}(Tz_1)|| \geq \frac{3}{4M} - \frac{1}{4M} = \frac{2}{4M} = \frac{1}{2M}.$$

Como Q_m es una proyección, entonces $\lim_{m\to\infty} Q_m(Tz_1) = Tz_1$. Por lo tanto, existe un $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $m_2 > m_1$ y

$$||Tz_1 - Q_{m_2}(Tz_1)|| < \text{mín}\left\{r, \frac{1}{4M}, \frac{1}{2^2}\right\},$$

donde $r = ||Tz_1 - Q_{m_1}(Tz_1)|| - \dfrac{1}{2M}$.
De la desigualdad triangular inversa se concluye que

$$||Q_{m_2}(Tz_1) - Q_{m_1}(Tz_1)|| > ||Q_{m_1}(Tz_1) - Tz_1|| - ||Q_{m_2}(Tz_1) - Tz_1||,$$
$$||Q_{m_1}(Tz_1) - Tz_1|| - r = \frac{1}{2M},$$

por lo tanto, se escoge un $m_2 > m_1$ tal que

$$||Tz_1 - Q_{m_2}(Tz_1)|| < \text{mín}\left\{\frac{1}{4M}, \frac{1}{2^2}\right\}.$$

De la misma forma, tomando $\epsilon = \text{mín}\{\dfrac{1}{8M}, \dfrac{1}{2^3}\}$ k_2, m_2 se concluye que existe un $k_3 > k_2$ y un z_2 tal que $z_2 = (P_{k_3} - P_{k_2})(y_2)$ y $\dfrac{3}{4} < ||z_2|| \leq 1$ y un $m_3 > m_2$ tales que

$$||Tz_2 - Qm_3(Tz_2)|| < \text{mín}\left\{\frac{1}{8M}, \frac{1}{2^3}\right\}.$$

Mediante induccíon matemática se concluye que existen sucesiones crecientes de enteros $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y una sucesión $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en $C_0(\ell_1)$ tales que:

(1) $z_j = (P_{k_{j+1}} - P_{k_j})(y_j)$; $\dfrac{3}{4} < ||z_j|| < 1$.

(2) $||Q_{m_{j+1}}(Tz_j)|| < \dfrac{1}{2^j}$.

(3) $||(Q_{m_{j+1}} - Q_{m_j})(Tz_j)|| > \dfrac{1}{2M}$.

(4) $||Tz_j - Q_{m_{j+1}}(Tz_j)|| < \dfrac{1}{2^{j+1}}$.

Se considera para cada $j \in \mathbb{N}$ las sucesiones $w_j = (Q_{m_{j+1}} - Q_{m_j})(Tz_j)$ y $\mu_j = Tz_j - w_j$. Entonces $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica bloque de ℓ_1 y de 2 y 3 se concluye que $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es seminormalizada. Entonces por el corolario 3.3 se tiene que $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base de vectores unitarios de ℓ_1. Esto es, existe un $\lambda > 0$ tal que

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}|a_i| \leq \left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i w_i\right|\right| \leq \lambda \sum_{i=1}^{\infty}|a_i|.$$

Además, $z_j = (P_{k_{j+1}} - P_{k_j})(y_j)$ es una sucesión básica bloque y seminormalizada de vectores de c_0. Por el corolario 3.3, la sucesión $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base de los vectores unitarios de c_0. Ahora de los items 2 y 4 anteriores implican que

$$\begin{aligned}||\mu_j|| &= ||Tz_j - w_j|| \\ &\leq ||Tz_j - Q_{m_{j+1}}(Tz_j)|| + ||Q_{m_j})(Tz_j)|| \\ &\leq \frac{1}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^j} = \frac{3}{2^{j+1}} < \frac{4}{2^{j+1}} = \frac{1}{2^{j-1}}.\end{aligned}$$

Así, μ_j converge a cero cuando $j \to \infty$. Por lo tanto, se puede escoger un $\lambda_1 < \dfrac{1}{\lambda}$ tal que $||\mu_j|| < \lambda$ para cada $j \in \mathbb{N}$. De ello se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{n}|a_i| &\geq \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i T z_i\right|\right| \\ &\geq \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i w_i\right|\right| - \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i(Tz_i - w_i)\right|\right| \\ &\geq \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|a_i| - \lambda_1\sum_{i=1}^{n}|a_i| \\ &\geq \delta\sum_{i=1}^{n}|a_i|,\end{aligned}$$

donde $\delta = \dfrac{1}{\lambda} - \lambda_1 > 0$. Luego, existen $\delta > 0$ *y* $M > 0$ tales que

$$\delta\sum_{i=1}^{n}|a_i| \leq \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i T z_i\right|\right| \leq \frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{n}|a_i| \text{ para todo} n \in \mathbb{N}.$$

Es decir, $(Tz_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión equivalente a la base de los vectores de ℓ_1 y como T es un isomofismo entonces $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base de vectores unitarios de ℓ_1. Como $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base de vectores de c_0, esto es c_0 es isomorfo a un subespacio de ℓ_1 lo cual contradice el teorema 1.8. Se concluye que existe algún un $m \in \mathbb{N}$ tal que $c_0(\ell_1)$ es isomorfo a un subespacio de X^m. □

Se finaliza con el teorema principal de este trabajo:

Teorema 3.4. *Sean $\lambda, \epsilon, \mu, \eta$ ordinales enumerables. Entonces, no existe un isomorfismo entre el espacio de operadores compactos $\mathcal{K}(\mathbb{R}^\lambda, \mathbb{R}^\epsilon)$ y el espacio de operadores nucleares $N(\mathbb{R}^\mu, \mathbb{R}^\eta)$.*

Demostración. Se supone que existe un isomorfismo entre $\mathcal{K}(\mathbb{R}^\lambda, \mathbb{R}^\epsilon)$ y $N(\mathbb{R}^\mu, \mathbb{R}^\eta)$. Por teorema 1.7 se tiene que $(\mathbb{R}^\lambda)^*$ es isomorfo a ℓ_1, y ℓ_1 tiene la propiedad de aproximación. Por lo tanto, $\mathbb{R}^\lambda$ tiene la propiedad de aproximación. Así por el teorema 2.5 se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\mathbb{R}^\lambda, \mathbb{R}^\epsilon) &\cong (\mathbb{R}^\lambda)^* \otimes_\epsilon \mathbb{R}^\epsilon \\ &\cong \ell_1 \widehat{\otimes}_\epsilon \mathbb{R}^\epsilon \\ &\cong \ell_1(\mathbb{R}^\epsilon)\end{aligned}$$

y por el teorema 2.16,

$$\begin{aligned}N(\mathbb{R}^\mu, \mathbb{R}^\eta) &\cong (\mathbb{R}^\lambda)^* \widehat{\otimes}_\pi \mathbb{R}^\eta \\ &\cong \ell_1 \widehat{\otimes}_\pi \mathbb{R}^\eta \\ &\cong \ell_1(\mathbb{R}^\eta).\end{aligned}$$

Como c_0 es isomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}^\epsilon$ entonces $\ell_1 \widehat{\otimes}_\epsilon c_0$ es isomorfo a un subespacio de $\ell_1 \widehat{\otimes}_\epsilon \mathbb{R}^\epsilon$, el cual es a su vez isomorfo a $\ell_1(\mathbb{R}^\epsilon)$. No obstante,

$$\ell_1 \widehat{\otimes}_\epsilon c_0 \cong c_0 \widehat{\otimes}_\epsilon \ell_1 \cong c_0(\ell_1).$$

Por lo tanto, $c_0(\ell_1)$ es isomorfo a un subespacio de $\ell_1(\mathbb{N}, \mathbb{R}^\epsilon)$. Por el teorema 3.3 se concluye que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $c_0(\ell_1)$ es isomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}^{\epsilon * n}$. Ahora, ℓ_1 es isomorfo a un subespacio de $\ell_1 \widehat{\otimes}_\epsilon c_0$ y por tanto ℓ_1 es isomorfo a un subespacio de $c_0(\ell_1)$. Como $c_0(\ell_1)$ es isomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}^{\epsilon * n}$ entonces ℓ_1 es isomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}^{\epsilon * n}$, lo cual contradice el teorema 1.9.

Por lo tanto no existe un isomorfismo entre $\mathcal{K}(\mathbb{R}^\lambda, \mathbb{R}^\epsilon)$ y $N(\mathbb{R}^\mu, \mathbb{R}^\eta)$, tal como se deseaba demostrar. $\square$

BIBLIOGRAFÍA

A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

A. Pelczynski, Z. Semadeni, Spaces of continuos functions (III). Studia Mathematica, (1959).

C. Bessaga and A. Pelczytiski, Spaces of continuous functions IV (on isomorphical classification of spaces of continuous functions), Studia Math. 19 (1960), 53-62.

C. Samuel, On spaces of operators on C(Q) spaces (Q countable metric space). Pro. Amer. Math. Soc. 137 (2009).

E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley Sons,(1978).

F. Treves, Topological Vector Spaces, distributions and kernel, Acad. Press, New York and London (1967).

H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, New York (2010).

J. Diestel, Sequences and series in Banach spaces. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (1984).

Y.C. Wong, Scwartz Spaces, Nuclear Spaces and Tensor Product. Springer- Verlag, New York,(1979).