

RECONSTRUCCIÓN DE COLORACIONES A PARTIR DE SUS CONJUNTOS  
HOMOGÉNEOS

DIEGO FERNANDO GAMBOA HIGUERA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2022

RECONSTRUCCIÓN DE COLORACIONES A PARTIR DE SUS CONJUNTOS  
HOMOGÉNEOS

DIEGO FERNANDO GAMBOA HIGUERA

Trabajo de Grado para optar al título de  
Magíster en Matemáticas

Director  
Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin  
Doctorado en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2022

## **DEDICATORIA**

Este trabajo está dedicado a mi familia, especialmente, mis padres, mis hermanos, a mi pareja Carolina, y a su familia.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a mi familia por todo su apoyo. A la universidad por brindarme la oportunidad de formarme en un ambiente académico estimulante.

Especialmente, agradezco al profesor Carlos, por garantizar que la experiencia de trabajar en investigación sea inmensamente formativa para mí. También agradezco a mis calificadores, los profesores Carlos Di Prisco y Rafael Isaacs, cuyas recomendaciones, consejos y correcciones han sido reveladoras.

## CONTENIDO

	<b>pág.</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>13</b>
<b>1. OBJETIVOS</b>	<b>16</b>
<b>2. RECONSTRUCCIÓN DE COLORACIONES SALVO COMPLEMENTOS</b>	<b>17</b>
2.1. CRITERIOS DE RECONSTRUCTIBILIDAD PARA UNA COLORACIÓN	21
2.1.1. Coloraciones Reconstruibles	22
2.1.2. Coloraciones que no son reconstruibles	26
2.2. COLORACIONES FUERTEMENTE RECONSTRUIBLES	30
2.3. RECONSTRUCCIÓN BORELIANA	34
<b>3. RECONSTRUCCIONES MÍNIMAS</b>	<b>40</b>
<b>4. CLASES DE RECONSTRUCCIÓN</b>	<b>52</b>
4.1. CARDINALIDAD DE LAS CLASES DE RECONSTRUCCIÓN DE UNA COLORACIÓN	53
<b>5. TRABAJO FUTURO</b>	<b>65</b>
<b>6. CONCLUSIONES</b>	<b>66</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>67</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>68</b>

## LISTA DE FIGURAS

	<b>pág.</b>
Figura 1. Una coloración constante sobre $\{0, 1, 2, 3\}$ .	18
Figura 2. Coloración inducida por una partición en dos conjuntos de $X$ .	19
Figura 3. Coloración no reconstruible.	20
Figura 4. Ejemplo en 6 vértices de una coloración que satisface la Proposición 2.9.	25
Figura 5. Pareja crítica en 6 vértices.	26
Figura 6. Cambiar el color de $\{a, b\}$ no altera los conjuntos homogéneos de $\varphi$ .	27
Figura 7. Al suponer que $\{a, x\}$ ni $\{a, y\}$ son parejas críticas de $\varphi$ se obtiene una contradicción.	28
Figura 8. Coloración que no es reconstruible pero no posee pares críticos.	29
Figura 9. Ciclo crítico.	30
Figura 10. Coloración tal que no posee segmentos iniciales reconstruibles.	32
Figura 11. Se muestran los tres casos posibles para $c \in X \setminus \{a, b\}$ .	41
Figura 12. $c \in G_{a,b} \cap G_{d,e}$ y $\varphi\{a, b\} = 1 - \varphi\{d, e\}$ .	46
Figura 13. Al suponer un triángulo, no necesariamente monocromático, está en $A$ , se obtiene la construcción mostrada.	47
Figura 14. $c, d \in G_{a,b}, c \neq d$	49
Figura 15. $\varphi\{c, d\}$ , sea roja o negra, forma homogéneos con aristas de $A$ , y esto implicaría que $A$ es infinito por Lema (3.9), contradiciendo la hipótesis.	50
Figura 16. Coloración con sólo 4 reconstrucciones.	54

Figura 17. Coloración con un número finito (par) arbitrario $\geq 4$ de reconstrucciones.	56
Figura 18. Coloración con exactamente 2 reconstrucciones.	58
Figura 19. Coloración con clase de reconstrucción numerable.	60
Figura 20. Coloración con clase de reconstrucción perfecta, y por lo tanto no numerable.	61

## LISTA DE ANEXOS

	<b>pág.</b>
Anexo A. El Teorema de Ramsey	68
Anexo B. El Problema Clásico de Reconstrucción de Grafos	71

## RESUMEN

**TÍTULO:** RECONSTRUCCIÓN DE COLORACIONES A PARTIR DE SUS CONJUNTOS HOMOGÉNEOS \*

**AUTOR:** DIEGO FERNANDO GAMBOA HIGUERA \*\*

**PALABRAS CLAVE:** COLORACIÓN, COLORACIÓN RECONSTRUIBLE, PAR CRÍTICO, CICLO CRÍTICO, RECONSTRUCCIÓN MÍNIMA DE UNA COLORACIÓN, COLORACIÓN FUERTEMENTE RECONSTRUIBLE, CONJUNTO QUE INDUCE UNA RECONSTRUCCIÓN.

### DESCRIPCIÓN:

Sea  $\varphi$  una coloración en dos colores de los pares de elementos de un conjunto  $X$  numerable. Esto es, una partición de  $X^{[2]}$  en dos conjuntos. En <sup>1</sup>, fue definido el problema de reconstrucción de coloraciones a partir de sus conjuntos homogéneos. Este trabajo contiene una continuación de la investigación en dicho artículo y hemos logrado responder algunas de las preguntas formuladas allí. En primer lugar, definimos el concepto de coloraciones fuertemente reconstruibles y mostramos que es una instancia más especializada del concepto de coloraciones reconstruibles. En segundo lugar, pero de mayor importancia es el trabajo que se presenta en el Capítulo 3 de esta tesis. Allí, estudiamos la función  $r$ , definida en <sup>1</sup> de la siguiente manera,

$$r(\varphi) = \{|A| : A \neq \emptyset, A \text{ induce una reconstrucción de } \varphi\},$$

la cual toma valores en los números naturales, o puede ser infinita. Demostramos que si  $X$  es infinito, los únicos valores posibles para  $r(\varphi)$  son  $1, 4$  o  $\aleph_0$ . La demostración de esta afirmación es el principal resultado que se obtuvo en esta investigación, ver Teorema (3.15). Primero fueron establecidos varios resultados auxiliares dentro de los cuales se destaca el Teorema (3.13) que dice que dada una

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctorado en Matemáticas.

<sup>1</sup> Claribet Piña y Carlos Uzcátegui. "Reconstruction of a Coloring from its Homogeneous Sets". En: *Graphs and Combinatorics* 39 (2022).

coloración  $\varphi : X^{[2]} \rightarrow 2$  sobre un conjunto infinito  $X$ , si  $A$  (que induce una reconstrucción de  $\varphi$ ) contiene tres aristas que forman un triángulo  $(a, b, c, a, c \in A)$  entonces  $|A| = \aleph_0$ .

Bajo las condiciones requeridas para el teorema principal, las coloraciones que satisfacen  $r(\varphi) = 1$  o  $r(\varphi) = 4$  corresponden exactamente con coloraciones que poseen ciertas subestructuras conocidas como pares críticos y ciclos críticos, respectivamente.

Por otra parte, en el Capítulo 4, examinamos la estructura interna de colecciones de coloraciones que comparten la lista de conjuntos homogéneos. Estos son unos primeros pasos para establecer un nuevo enfoque con el cual estudiar el problema de reconstrucción de coloraciones.

## ABSTRACT

**TITLE:** RECONSTRUCTION OF COLORINGS FROM THEIR HOMOGENOUS SETS \*

**AUTHOR:** DIEGO FERNANDO GAMBOA HIGUERA \*\*

**KEYWORDS:** COLORING, RECONSTRUCTIBLE COLORING, CRITICAL PAIR, CRITICAL CYCLE, MINIMUM RECONSTRUCTION OF A COLORING, STRONGLY RECONSTRUCTIBLE COLORING, SET THAT INDUCES A RECONSTRUCTION.

### DESCRIPTION:

Let  $\varphi$  be a coloring in two colors of the pairs of elements of the countable set  $X$ . That is, a partition of  $X^{[2]}$  in two sets. In <sup>1</sup>, the authors defined the problem of reconstruction of colorings from their homogenous subsets. This thesis contains a continuation of the content of said article and we have managed to answer some of the questiones that were formulated there.

First, we define the concept of strongly reconstructible colorings and show that it is more specialized that the concept of reconstructible colorings. Secondly, but more important is the work presented in Chapter 3 of this thesis. There, we study the function  $r$ , defined in <sup>1</sup> by,

$$r(\varphi) = \{|A| : A \neq \emptyset, A \text{ induces a reconstruction of } \varphi\},$$

which takes values in the natural numbers, or might be infinite. We show that if  $X$  is infinite, the only possible values for  $r(\varphi)$  are 1, 4 or  $\aleph_0$ . The proof of this statement is tha main result that this investigation yielded, see Theorem (3.15). We first establish varioues auxiliari results among which we single out Theorem (3.13) which states that given a coloring  $\varphi : X^{[2]} \rightarrow 2$  on an infinite set  $X$ , if  $A$  (induces a reconstruction of  $\varphi$ ) contains three edges forming a triangle  $(a, b, c, a, c \in A)$  then  $|A| = \aleph_0$ .

Under the conditions of the main theorem, the colorings that satisfy either  $r(\varphi) = 1$  or  $r(\varphi) = 4$  correspond with colorings that contain certains fixed substructures called critical pairs and critical cycles, respectively.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctorado en Matemáticas.

On the other hand, in Chapter 4, we examine the internal structure of collections of colorings which share the same homogenous sets. These are just some first steps in establishing a new approach from which to study the problem of reconstruction of colorings.

## INTRODUCCIÓN

Los problemas acerca de objetos (números, puntos en el espacio, vértices de un grafo, entre muchas otras) coloreados en un número finito de colores han estado en el folclor matemático por mucho tiempo. Muchos problemas combinatorios se plantean en términos de objetos matemáticos los cuales se les da un color. Los problemas que hablan de subconjuntos monocromáticos, es decir, tales que todos sus elementos tienen el mismo color, son de particular interés. Las preguntas del tipo: Sea  $X$  una colección de objetos a los que se les asigna un color de  $r$  posibles ¿Existen subconjuntos de  $X$  monocromáticos que cumplan una propiedad  $P$ ?, son aplicables a un gran diversidad de situaciones debido a la gran generalidad del contexto en el que se realiza la pregunta.

En la Teoría de Ramsey, que es el área de las matemáticas que trata problemas del tipo mencionado, es común considerar unos mapas llamados coloraciones que denotaremos  $\varphi, \psi, \dots$  que asignan a cada elemento en su dominio un único color de una cantidad finita  $r$  de colores posibles. Más precisamente, sea  $X$  un conjunto entonces  $\varphi : X \rightarrow \{0, 1, \dots, r - 1\}$  es una  $r$ -coloración de  $X$ . Los conjuntos monocromáticos son a veces conocidos, en la teoría de conjuntos, como *conjuntos homogéneos*. La colección de los subconjuntos de  $X$  que son homogéneos para  $\varphi$  es denotada por  $\text{hom}(\varphi)$ . Las colecciones de homogéneos han sido estudiadas desde el punto de vista de la teoría de conjuntos descriptiva, específicamente en el estudio de ideales  $F_\sigma$ .<sup>1</sup>

El problema que nos ocupa en el presente trabajo, es la *Reconstrucción de una coloración a partir de sus conjuntos homogéneo salvo complemento*. Este problema

---

<sup>1</sup> Jan Grebík y Carlos Uzcátegui. “Bases and Borel selectors for tall families”. En: *The Journal of Symbolic Logic* 84.1 (2019), 359–375. DOI: 10.1017/jsl.2018.66.

consiste en lo siguiente: a partir de una colección de conjuntos homogéneos (de alguna coloración)  $L \subseteq \mathcal{P}(X)$ , encontrar una coloración  $\varphi$  tal que  $L = \text{hom}(\varphi)$ . En particular, trabajaremos el caso en 2-coloraciones sobre conjuntos de parejas. Llamamos a  $\varphi$  una *coloración reconstruible* si las únicas coloraciones  $\psi$  tales que  $\text{hom}(\varphi) = \text{hom}(\psi)$  son  $\psi = \varphi$  o  $\psi = 1 - \varphi$ .

Usando métodos elementales de combinatoria, buscamos una caracterización del concepto de reconstructibilidad de una coloración. En el Capítulo 3, nos acercamos considerablemente a este objetivo.

Al considerar coloraciones  $\varphi : X^{[2]} \rightarrow 2$  surge una relación con un problema clásico de la teoría de grafos el cual no ha sido resuelto. Este es conocido como la *Conjetura de Reconstrucción de Grafos*, y fue propuesto por el estadounidense Paul Kelly en 1941, y de manera independiente por el polaco Stanislaw Ulam. En el Anexo 2 se da una corta explicación sobre este problema abierto. Para un recuento detallado de los resultados y avances parciales en la reconstrucción de grafos, ver <sup>2</sup>. Además, en el Anexo 1 se incluye una corta introducción al Teorema de Ramsey (ver Teorema (6.6) para una demostración del caso infinito). Para un recuento histórico del desarrollo de la Teoría de Ramsey a lo largo del Siglo XX, ver <sup>3</sup>.

En el Capítulo 2 enunciamos el problema de reconstrucción de coloraciones a partir de sus conjuntos homogéneos, y damos un resumen de los resultados, más relevantes para nosotros, de <sup>1</sup>. Allí también se incluyen algunas ideas y argumentos nuevos como el concepto de ciclo crítico y el concepto de coloración fuertemente reconstruible, así como el Lema (2.12) y el Teorema (2.18).

---

<sup>2</sup> J. A. Bondy. "A graph reconstructor's manual". En: *Surveys in combinatorics, 1991 (Guildford, 1991)*. Vol. 166. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, págs. 221-252.

<sup>3</sup> A. Soifer. *Ramsey Theory: Yesterday, Today, and Tomorrow*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, 2010.

La mayor parte del trabajo original en esta investigación ha sido incluido en el Capítulo 3. Allí se presentan resultados parciales muy importantes en la búsqueda de una caracterización de las coloraciones que no son reconstruibles. En particular, demostramos que bajo ciertas hipótesis, las coloraciones que no son reconstruibles deben, inevitablemente, contener ciertas configuraciones (de aristas y colores) finitas. El Teorema (3.15) es el resultado más importante, pero también son importantes para la demostración de este último los Teoremas (3.13) y (3.14).

Finalmente, en el Capítulo 4 damos los primeros pasos en una nueva línea de investigación del Problema de Reconstrucción, al enfocarnos en la clase de reconstrucciones de una coloración  $\varphi$ , es decir, la clase que contiene a las coloraciones  $\psi$  tales que  $\text{hom}(\varphi) = \text{hom}(\psi)$ . Damos unos resultados sobre la cardinalidad de estas clases (ver Proposición (4.10)), y planteamos a futuro el objetivo de caracterizar la topología de las mismas.

## 1. OBJETIVOS

### Objetivo general

- Estudiar el problema de reconstrucción de coloraciones a partir de sus conjuntos homogéneos en el caso especial de dimensión 2, usando dos colores.

### Objetivos específicos

- Encontrar un ejemplo de una coloración que sea reconstruible pero ninguno de sus segmentos iniciales sea reconstruible;
- Buscar una caracterización del concepto de coloración reconstruible;
- Determinar qué valores puede tomar el tamaño de un conjunto que induce una reconstrucción de alguna coloración.

## 2. RECONSTRUCCIÓN DE COLORACIONES SALVO COMPLEMENTOS

Este capítulo consiste de una introducción al problema de reconstrucción para 2-coloraciones sobre parejas de un conjunto numerable  $X$ . En este caso, una coloración  $\varphi : X^{[2]} \rightarrow 2$  corresponde con un grafo  $G = G(V, E)$  tal que  $V = X$  y  $E = \varphi^{-1}(1)$ . Usaremos este hecho para representar a las coloraciones como grafos completos cuyas aristas han sido pintadas en los colores rojo y negro. No hemos estudiado los casos de  $r$ -coloraciones de  $k$ -combinaciones de  $X$  con  $k, r \geq 3$ . Ya que no hay peligro de confusión diremos que  $\varphi : X^{[2]} \rightarrow 2$  con  $X$  numerable es *una coloración sobre  $X$* .

La Definición (2.2) establece toda la terminología necesaria para hablar sobre el problema de reconstrucción. Luego, en la Sección 2.1, damos varios criterios que nos permiten concluir si una coloración es reconstruible, y otros que nos permiten concluir si una coloración es no reconstruible. Cabe destacar el Teorema (2.7) y su Corolario (2.8), los cuales dan lugar al concepto de coloración fuertemente reconstruible, ver Definición (2.16). En cuanto a los criterios para concluir que una coloración es no reconstruible, son de gran importancia las Definiciones (2.10) y (2.14) que definen los conceptos de parejas y ciclos críticos, respectivamente. Las parejas críticas son definidas en <sup>1</sup>, donde ya se había establecido que juegan un papel importante en las coloraciones no reconstruibles. Los ciclos críticos se han definido por primera vez en este trabajo para aclarar una pregunta de <sup>1</sup> que llevó finalmente a desarrollar el argumento presentado en el Capítulo 3.

La Sección 2.2 está dedicada a demostrar la existencia de coloraciones reconstruibles que no satisfacen la hipótesis del Teorema (2.7). En las Ecuaciones (3),(4) y (5) se define una coloración sobre  $\mathbb{N}$  que es reconstruible pero no fuertemente reconstruible. Este es el contenido del Teorema (2.18), resultado que responde una pregunta planteada en <sup>1</sup>.

La Sección 2.3 trata acerca del enfoque descriptivo para el problema de reconstrucción. Aquí se encuentran los resultados más importantes de <sup>1</sup>. En particular se demuestra que el mapa  $\varphi \mapsto \text{hom}(\varphi)$  es boreliano y que existe un selector boreliano para la relación de equivalencia  $E$  definida por:

$$(\varphi, \psi) \iff \text{hom}(\varphi) = \text{hom}(\psi).$$

Comenzamos el contenido de este capítulo con un ejemplo de dos coloraciones para tener en mente a lo largo de este trabajo. Casi todos los ejemplos posteriores corresponden a variaciones, extensiones o restricciones de estos dos ejemplos básicos.

**Ejemplo 2.1.** 1) Sea  $X$  un conjunto numerable. El ejemplo más sencillo posible de una coloración es la constante, por ejemplo  $\varphi\{x, y\} = 0$  para todo  $\{x, y\} \in X^{[2]}$ .

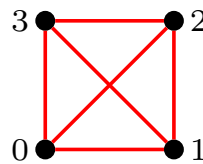


Figura 1. Una coloración constante sobre  $\{0, 1, 2, 3\}$ .

*La colección de homogéneos de esta coloración consta de todos los subconjuntos de  $X$ ,  $\text{hom}(\varphi) = \mathcal{P}(X)$ .*

11) Sea  $X$  un conjunto numerable y sea  $\{X_i\}$  una partición de  $X$ . Defina  $\varphi : X^{[2]} \rightarrow 2$  de la siguiente manera. Tome cualesquiera dos elementos de  $X$ ,  $x$  y  $y$ , y observe que existen  $i, j$  tales que  $x \in X_i, y \in X_j$  entonces

$$\varphi\{x, y\} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

A este tipo de particiones las llamamos inducidas por la partición  $\{X_i\}$ . Se tiene

$$\text{hom}(\varphi) = \bigcup_i \mathcal{P}(X_i) \cup \{H \in \mathcal{P}(X) : \forall i |H \cap X_i| \leq 1\}.$$

Es decir que los homogéneos de la coloración  $\varphi$  son todos los subconjuntos contenidos en alguna de las partes, junto con conjuntos que contienen a lo más un elemento de cada parte.

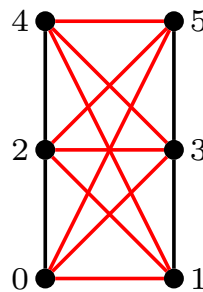


Figura 2. Coloración inducida por una partición en dos conjuntos de  $X$ .

Arriba se muestra la coloración sobre 6 inducida por la partición entre pares e impares. En la imagen se han omitido las aristas  $\{0, 4\}$  y  $\{1, 5\}$  por simplicidad. Los homogéneos de al menos tres elementos para esta coloración son  $\{0, 2, 4\}$ ,  $\{1, 3, 5\}$ . Es decir,  $\text{hom}(\varphi) = \mathbb{N}^{\leq 2} \cup \{\{0, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}\}$ .

Ahora vamos a precisar el problema de reconstrucción de coloraciones a partir de homogéneos. La Definición (2.2) establece toda la terminología importante para hablar de coloraciones reconstruibles y coloraciones no reconstruibles.

**Definición 2.2.** Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$ . Considere  $A \subseteq X^{[2]}$  no vacío, y  $\varphi_A : X^{[2]} \rightarrow 2$  definida por

$$\{x, y\} \mapsto \begin{cases} \varphi\{x, y\} & \text{si } \{x, y\} \in A \\ 1 - \varphi\{x, y\} & \text{si } \{x, y\} \notin A \end{cases}$$

Llamaremos a  $A$  el *conjunto de cambios entre  $\varphi$  y  $\varphi_A$* .

Nos interesa particularmente el caso en que  $\text{hom}(\varphi_A) = \text{hom}(\varphi)$ . Cuando esto suceda diremos que  $\varphi_A$  es una *reconstrucción de  $\varphi$* , o que  $A$  *induce una reconstrucción de  $\varphi$* , a saber  $\varphi_A$ .

Es evidente que  $A = \emptyset$  o  $A = X^{[2]}$  inducen reconstrucciones de  $\varphi$ . Si las únicas reconstrucciones de  $\varphi$  son sus reconstrucciones triviales decimos que  $\varphi$  es *reconstruible a partir de sus homogéneos salvo complemento*, o de manera más breve,  $\varphi$  *es reconstruible*. Denotamos por  $\mathcal{R}$  a la colección de las coloraciones reconstruibles. Si  $\varphi \notin \mathcal{R}$ , decimos que  $\varphi$  *no es reconstruible*. Cuando consideramos las reconstrucciones de una coloración  $\varphi$  que no es reconstruible, a menudo descartamos los casos  $A = \emptyset$  y  $A = X^{[2]}$ . Si  $\emptyset \neq A \subset X^{[2]}$  induce una reconstrucción de  $\varphi$ , decimos que  $\varphi_A$  *reconstrucción no trivial*.

**Ejemplo 2.3.** 1) *El Ejemplo (2.1) i) de una coloración constante es claramente reconstruible, sólo su complemento tiene la misma lista de homogéneos  $\mathcal{P}(X)$ .*

ii) *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$  inducida por una cierta partición  $\{X_0, X_1\}$  de  $X$  es no reconstruible.*

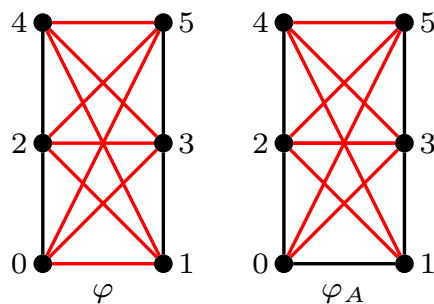


Figura 3. Coloración no reconstruible.

*La coloración inducida por la partición entre pares e impares de 6 es no reconstruible.  $A = \{\{0, 1\}\}$ ,  $\text{hom}(\varphi_A) = \text{hom}(\varphi)$ .  $\varphi_A$  es una reconstrucción no trivial de  $\varphi$ .  $\varphi$  es no reconstruible.*

## 2.1. CRITERIOS DE RECONSTRUCTIBILIDAD PARA UNA COLORACIÓN

En esta sección presentaremos algunos resultados de la forma: Si  $\varphi$  es una coloración sobre  $X$  con la propiedad  $P$  entonces  $\varphi \in \mathcal{R}$  ( $\varphi \notin \mathcal{R}$ , respectivamente).

No conocemos una caracterización de las coloraciones reconstruibles sobre un conjunto numerable.

Tenemos dos resultados básicos que formulan criterios para concluir que una coloración es reconstruible. El primero es el Corolario 2.8 dice que una coloración  $\varphi$  (sobre  $\mathbb{N}$ ) es reconstruible si tiene infinitos segmentos iniciales,  $\varphi \upharpoonright n^{[2]}$ , reconstruibles. El segundo resultado es la Proposición 2.9, la cual da un criterio para concluir que una coloración  $\varphi$  es reconstruible que, curiosamente, sólo depende de cómo se ve  $\varphi$  en las aristas que son incidentes con un cierto par de puntos  $a, b \in X$ .

En la sección 2.2 demostraremos que el recíproco del Corolario (2.8) es falso. En el Ejemplo (2.17) se define la coloración de la que se deduce el contraejemplo, ver Teorema (2.18).

Las Proposiciones (2.11) y (2.15) conciernen a criterios para concluir que una coloración  $\varphi$  no es reconstruible. En esta parte de la sección se definen los conceptos de pareja crítica y ciclo crítico, los cuales dependen únicamente de cómo se ve  $\varphi$  en las aristas que son incidente con dos puntos  $a, b \in X$  o cuatro puntos  $a, b, c, d \in X$ , respectivamente. Estos dos conceptos resultan ser esenciales para el argumento que se construye el Capítulo 3 que demuestra el Teorema (3.15).

Antes de entrar en materia, enunciemos la siguiente observación sencilla pero importante. Toda la información en la colección de homogéneos de una coloración se encuentra en el conjunto de los homogéneos de tamaño 3 de la misma.

**Proposición 2.4.** *Sean  $\varphi$  y  $\psi$  dos coloraciones sobre un conjunto  $X$ . Entonces  $\text{hom}(\varphi) = \text{hom}(\psi)$  si, y sólo si,  $\text{hom}(\varphi) \cap \mathbb{N}^{[3]} = \text{hom}(\psi) \cap \mathbb{N}^{[3]}$ .*

*Demostración.* Si  $\text{hom}(\varphi) \cap \mathbb{N}^{[3]} = \emptyset$  entonces claramente  $\text{hom}(\varphi) = \mathbb{N}^{[2]} = \text{hom}(\psi)$ , así que  $\text{hom}(\varphi) \neq \emptyset$ .

Debemos ver que dado  $H \in \mathbb{N}^{[\geq 3]}$  se tiene que

$$H \in \text{hom}(\varphi) \iff H \in \text{hom}(\psi).$$

Suponga que  $H \in \text{hom}(\varphi)$ . Sea  $\{x, y\}, \{z, w\} \in H^{[2]}$ , entonces

$$\{x, y, z\}, \{y, z, w\} \in \text{hom}(\varphi) \cap \mathbb{N}^{[3]} = \text{hom}(\psi) \cap \mathbb{N}^{[3]}.$$

De manera que  $\psi\{x, y\} = \psi\{y, z\} = \psi\{z, w\}$ . Por arbitrariedad de  $\{x, y\}, \{z, w\}$  concluimos que  $\psi$  es constante sobre  $H$ . De la misma forma, si  $H \in \text{hom}(\psi)$  entonces  $H \in \text{hom}(\varphi)$ , y hemos terminado.  $\square$

Lo anterior indica que si queremos comparar las colecciones de homogéneos de dos coloraciones, sólo debemos verificar que coincidan sobre tripletas de elementos de  $X$ . Si  $X$  es infinito esto significa que se debe verificar una condición sobre un conjunto numerable,  $X^{[3]}$ , en lugar de un conjunto no numerable,  $\mathcal{P}(X)$ .

**2.1.1. Coloraciones Reconstruibles** Primero daremos un par de resultados básicos que se usarán frecuentemente en el resto de este trabajo.

**Proposición 2.5.** *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$  y  $A \subseteq X^{[2]}$  un conjunto no vacío que induce una reconstrucción de  $\varphi$ . Si  $Y \subseteq X$  es tal que  $\varphi \upharpoonright Y^{[2]}$  es reconstruible entonces  $Y^{[2]} \subseteq A$  o  $A \cap Y^{[2]} = \emptyset$ .*

*Demostración.* Suponga que  $A$  es un conjunto no vacío tal que induce una reconstrucción de  $\varphi$  y además, suponga que  $\varphi \upharpoonright Y^{[2]} \in \mathcal{R}$  para algún  $Y \subseteq X$ .

Dado que  $\text{hom}(\varphi) = \text{hom}(\varphi_A)$ ,

$$\text{hom}(\varphi \upharpoonright Y^{[2]}) = \{H \in \text{hom}(\varphi) : H \subseteq Y\} = \text{hom}(\varphi_A \upharpoonright Y^{[2]}).$$

Es decir que  $\varphi_A \upharpoonright Y^{[2]}$  es una reconstrucción de  $\varphi \upharpoonright Y^{[2]}$ . De hecho, note que  $(\varphi \upharpoonright Y^{[2]})_{A \cap Y^{[2]}} = \varphi_A \upharpoonright Y^{[2]}$ .

Si  $A \cap Y^{[2]} \neq \emptyset$ , entonces la definición 2.2, de coloración reconstruible, implica que  $\varphi_A \upharpoonright Y^{[2]} = (\varphi \upharpoonright Y^{[2]})_{A \cap Y^{[2]}} = 1 - \varphi \upharpoonright Y^{[2]}$ . Es decir que  $A \cap Y^{[2]} = Y^{[2]}$ .  $\square$

Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$ , y sea  $A$  una conjunto que induce una reconstrucción de  $\varphi$ . El lema que se enuncia a continuación, considera las tres distintas situaciones que se pueden dar en un conjunto  $\{a, b, x\}$  donde  $\{a, b\} \in A$ . A saber estas son:  $\{a, b, x\}$  es homogéneo,  $\{a, x\}$  y  $\{b, x\}$  tienen diferente color,  $\{a, x\}$  y  $\{b, x\}$  tienen ambas diferente color de  $\{a, b\}$ .

**Lema 2.6.** *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$  y  $A \subseteq X^{[2]}$  un conjunto no vacío que induce una reconstrucción. Considere  $\{a, b\} \in A$  y sea  $c \in X \setminus \{a, b\}$ , entonces*

1.

$$\varphi\{a, c\} = \varphi\{b, c\} = 1 - \varphi\{a, b\} \implies \{a, c\} \in A \vee \{b, c\} \in A.$$

2.

$$\{a, b, c\} \in \text{hom}(\varphi) \implies \{a, c\} \in A \wedge \{b, c\} \in A.$$

3.

$$\{a, c\} \in A \wedge \varphi\{a, b\} = \varphi\{a, c\} = 1 - \varphi\{b, c\} \implies \{b, c\} \in A.$$

*Demostración.* 1. Suponga  $\{a, c\} \notin A$ . Tenemos que

$$\varphi_A\{a, c\} = \varphi\{a, c\}, \quad \varphi_A\{a, b\} = 1 - \varphi\{a, b\}.$$

Además,  $\{a, b, c\} \notin \text{hom}(\varphi_A)$  por lo que se concluye que  $\varphi_A\{b, c\} = 1 - \varphi = \{a, c\} = 1 - \varphi\{b, c\}$ , es decir, que  $\{b, c\} \in A$ .

2. La restricción  $\varphi \upharpoonright \{a, b, c\}^{[2]}$  es constante, y por tanto reconstruible. Por la Proposición (2.5) se tiene que  $\{a, b, c\}^{[2]} \subseteq A$ .

3. Suponga que  $\{b, c\} \notin A$ , entonces  $\{a, b, c\} \in \text{hom}(\varphi_A)$  contradiciendo que  $\varphi_A$  es una reconstrucción de  $\varphi$ .

□

El siguiente criterio permite concluir que una coloración es reconstruible, a partir de una condición sobre sus restricciones finitas. De hecho, afirma que si cualquier restricción sobre 4 puntos de una coloración  $\varphi$  se puede extender en otra coloración finita reconstruible y compatible con  $\varphi$ , entonces  $\varphi$  debe ser también reconstruible.

**Teorema 2.7** <sup>(1)</sup>. *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$ . Si para todo  $F \in X^{[\leq 4]}$  existe  $Y \supseteq F$  finito tal que  $\varphi \upharpoonright Y^{[2]} \in \mathcal{R}$ , entonces  $\varphi \in \mathcal{R}$ .*

*Demostración.* Suponga que  $\varphi$  satisface la condición del enunciado. Sea  $A \subseteq X^{[2]}$  un conjunto no vacío de aristas que induce una reconstrucción de  $\varphi$ . Veamos que  $A = X^{[2]}$ .

Sean  $\{a, b\} \in A$  y  $\{x, y\} \in X^{[2]}$  aristas distintas. Entonces  $\{a, b, x, y\} \in X^{[\leq 4]}$ , y por hipótesis existe  $Y \supseteq \{a, b, x, y\}$  tal que  $\varphi \upharpoonright Y^{[2]}$  es reconstruible. Por la Proposición (2.5) se debe tener que  $Y^{[2]} \subseteq A$ , y en particular, que  $\{x, y\} \in A$ . Por la arbitrariedad de la arista  $\{x, y\}$  hemos demostrado que  $A = X^{[2]}$  y así, que  $\varphi \in \mathcal{R}$ . □

El Teorema (2.7) tiene el siguiente corolario.

**Corolario 2.8** <sup>(1)</sup>. *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $\mathbb{N}$ . Si existen infinitos  $n$  tales que  $\varphi \upharpoonright n^{[2]}$  es reconstruible, entonces  $\varphi$  es reconstruible.*

*Demostración.* Sea  $F \in \mathbb{N}^{[\leq 4]}$ . Existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $m = \text{máx } F$  y por hipótesis existe  $n \geq m$  tal que  $\varphi \upharpoonright n^{[2]} \in \mathcal{R}$ . Puesto que  $F \subseteq n$  y  $\varphi \upharpoonright n^{[2]} \in \mathcal{R}$ , podemos usar el Teorema (2.7) para concluir que  $\varphi \in \mathcal{R}$ . □

Es natural preguntarse si existen coloraciones reconstruibles que no satisfagan la hipótesis del Corolario (2.8). La respuesta es que, de hecho, existen tales coloraciones y se construirá un ejemplo en la Sección 2.2.

Damos otro criterio de reconstructibilidad, el cual tan sólo depende de aristas que inciden con dos puntos dados.

**Proposición 2.9** <sup>(1)</sup>. *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$  numerable. Si existen  $a, b$  tales que*

$$\varphi\{a, b\} = \varphi\{a, x\} = \varphi\{b, x\} \text{ para todo } x \notin \{a, b\},$$

*entonces  $\varphi$  es reconstruible.*

*Demostración.* Sea  $A \subseteq X^{[2]}$  no vacío que induce una reconstrucción. Veamos que  $A = X^{[2]}$ .

Entonces, aplicando el Lema (2.6), de manera sucesiva:

$$\begin{aligned} \exists \{x, y\} \in A &\xrightarrow{(2,6),1} \{a, x\} \in A \vee \{a, y\} \in A \\ &\xrightarrow{(2,6),2} \{a, b\} \in A \\ &\xrightarrow{(2,6),2} \forall x, y \in X \setminus \{a, b\}, \{a, x\}\{a, y\}, \{b, x\}, \{b, y\} \in A \\ &\xrightarrow{(2,6),2 \text{ y } 3} \forall \{x, y\} \in X^{[2]}, \{x, y\} \in A. \end{aligned}$$

Note que este argumento funciona para aristas  $\{x, y\}$  disjuntas de  $\{a, b\}$ , para aristas  $\{x, y\}$  que inciden con  $\{a, b\}$  o para  $\{x, y\} = \{a, b\}$ . □

Podemos visualizar una coloración  $\psi$  sobre  $\{a, b, x, y, z, w\}$  que satisface la hipótesis de la Proposición (2.9) así:

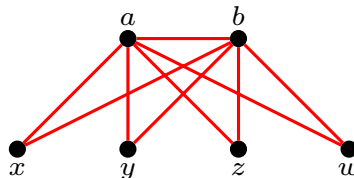


Figura 4. Ejemplo en 6 vértices de una coloración que satisface la Proposición 2.9.

Los colores de las aristas sobre  $\{x, y, z, w\}$  no afectan la reconstructibilidad de esta coloración. Para obtener un ejemplo concreto se puede usar cualquier coloración sobre  $\{x, y, z, w\}$ , digamos, tome  $\varphi : \{x, y, z, w\}^{[2]} \rightarrow 2$  constante de color  $1 - \psi\{a, b\}$ .

**2.1.2. Coloraciones que no son reconstruibles** A continuación definimos el concepto de pareja crítica el cual nos da una manera de crear coloraciones que no son reconstruibles como demostraremos.

**Definición 2.10.** Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$ . Decimos que  $\{x, y\} \in X^{[2]}$  es una *pareja crítica de  $\varphi$*  si para todo  $z \in X \setminus \{x, y\}$  se cumple que

$$\varphi\{x, z\} = 1 - \varphi\{y, z\}.$$

La siguiente figura ilustra un ejemplo genérico de una coloración sobre  $\{a, b, x, y, z, w\}$  que tiene pareja crítica  $\{a, b\}$ .

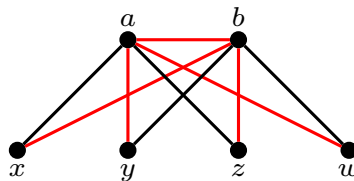


Figura 5. Pareja crítica en 6 vértices.

La coloración sobre  $\{a, b, x, y, z, w\}$  tiene pareja crítica  $\{a, b\}$ . Las aristas no dibujadas se pueden elegir arbitrariamente.

Así como en el enunciado de la Proposición (2.9), la definición de pareja crítica depende exclusivamente de cómo se ve la coloración  $\varphi$  sobre las aristas incidentes con  $\{a, b\}$ . De hecho, a continuación se demostrará la Proposición (2.11) que afirma que la coloración que se ilustra abajo es una reconstrucción no trivial de  $\varphi$ .

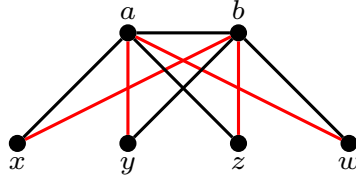


Figura 6. Cambiar el color de  $\{a, b\}$  no altera los conjuntos homogéneos de  $\varphi$ .

La pareja crítica  $\{a, b\}$  puede cambiar de color sin cambiar la colección de conjuntos homogéneos. En otras palabras,  $\{\{a, b\}\}$  induce una reconstrucción no trivial de  $\varphi$ .

**Proposición 2.11** <sup>(1)</sup>. *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$ . Sea  $\{a, b\} \in X^{[2]}$  entonces  $\{a, b\}$  es un par crítico de  $\varphi$  si y sólo si,  $\{\{a, b\}\}$  induce una reconstrucción no trivial de  $\varphi$ .*

*Demostración.* Sea  $\{a, b\}$  una pareja crítica de  $\varphi$ . Sea  $H \in \text{hom}(\varphi)$ , entonces  $\{a, b\} \subsetneq H$  y por lo tanto,  $\varphi \upharpoonright H^{[2]} = \varphi_{\{a, b\}} \upharpoonright H^{[2]}$ . Esto quiere decir que  $\text{hom}(\varphi) = \text{hom}(\varphi_A)$ .

Recíprocamente, suponga que  $\{\{a, b\}\}$  induce una reconstrucción no trivial. Por contrarrecíproco del Lema (2.6),1, se debe tener que no existe  $c \in X \setminus \{a, b\}$  tal que  $\varphi\{a, c\} = \varphi\{b, c\}$ . □

El siguiente lema se utilizará para demostrar que el recíproco del Corolario (2.8) es falso. Sin embargo, por sí mismo este resultado es interesante, ya que asegura lo siguiente: para extender una coloración reconstruible en una que no es reconstruible hay que pasar por una extensión intermedia que posee una pareja crítica.

**Lema 2.12.** *Sea  $\varphi$  una coloración reconstruible sobre  $X$ . Suponga que  $\psi \supset \varphi$  tal que  $\psi$  con dominio  $X \cup \{a\}$  tal que no es reconstruible. Entonces  $\psi$  tiene una pareja crítica incidente con  $a$ .*

*Demostración.* Por hipótesis  $\psi$  no es reconstruible. Considere  $A \subseteq X \cup \{a\}^{[2]}$  tal que induce una reconstrucción no trivial de  $\psi$ .

Por hipótesis  $\psi \upharpoonright X^{[2]} = \varphi$  es una coloración reconstruible, de manera que por la Proposición (2.5),  $X^{[2]} \subseteq A$  o  $X^{[2]} \cap A = \emptyset$ . Ambos casos son análogos, así que suponga que  $A \cap X^{[2]} = \emptyset$ .

Por contradicción suponga que  $\psi$  no tiene parejas críticas. Dado que  $A \neq \emptyset$ , existe  $x \in X$  tal que  $\{a, x\} \in A$ .  $\{a, x\}$  no es pareja crítica de  $\psi$ , entonces existe  $y \in X \setminus \{x\}$  tal que  $\psi\{a, y\} = \psi\{x, y\}$ . Por el Lema (2.6 1 y 2, se tiene que  $\{a, y\} \in A$ . Pero  $\{a, y\}$  tampoco es crítica de  $\psi$ , es decir, existe  $z \in X \setminus \{x, y, z\}$  y de nuevo, el Lema (2.6), 1 y 2 garantiza que  $\{a, z\} \in A$ .

Resumimos visualmente en la siguiente figura lo que hemos establecido acerca de  $\psi$  hasta este punto del argumento.

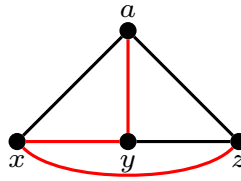


Figura 7. Al suponer que  $\{a, x\}$  ni  $\{a, y\}$  son parejas críticas de  $\varphi$  se obtiene una contradicción.

Finalmente aplicando el Lema (3.6), 2 y 3, se obtiene que  $\{x, z\} \in A$ , lo cual es absurdo ya que  $\{x, z\} \in X^{[2]}$ .

Concluimos que  $\psi$  tiene una pareja crítica que incide con el punto  $a$ . □

El siguiente ejemplo da testimonio de la existencia de coloraciones que no son reconstruibles pero tampoco poseen una pareja crítica.

**Ejemplo 2.13.** *Considere la siguiente coloración  $\varphi$  sobre  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .*

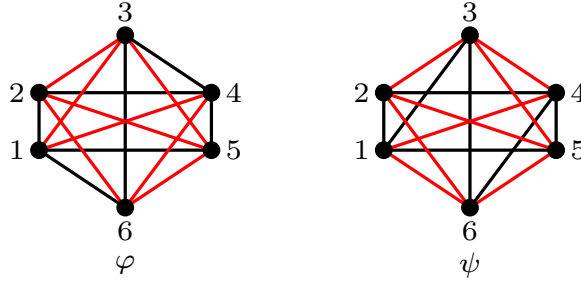


Figura 8. Coloración que no es reconstruible pero no posee pares críticos.

$\varphi$  no tiene parejas críticas, pero evidentemente

$$\text{hom}(\varphi_A) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{[\leq 2]} \cup \{\{2, 3, 5\}, \{2, 5, 6\}\} = \text{hom}(\varphi)$$

y el conjunto es  $A = \{\{1, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 6\}, \{6, 1\}\}$  induce una reconstrucción no trivial de  $\varphi$ .

La siguiente definición formaliza la situación del Ejemplo (2.13).

**Definición 2.14.** Sean  $\varphi$  una coloración sobre  $X$  y un conjunto de parejas de  $X$ ,  $A = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\}$  tal que:

$$\varphi\{a, b\} = \varphi\{c, d\} = \varphi\{b, d\} = 1 - \varphi\{b, c\} = 1 - \varphi\{a, c\} = 1 - \varphi\{a, d\}. \quad (1)$$

y

$$\varphi\{a, x\} = \varphi\{c, x\} = 1 - \varphi\{b, x\} = 1 - \varphi\{d, x\} \quad \text{para todo } x \in X \setminus \{a, b, c, d\}. \quad (2)$$

Llamamos a  $A$  un *ciclo crítico para  $\varphi$* .

Dado un  $x \in X \setminus \{a, b, c, d\}$ , la Ecuación (2) da lugar a dos posibilidades al escoger el color de las ramas  $\{a, x\}, \{b, x\}, \{c, x\}, \{d, x\}$ . Las dos posibilidades son ilustradas en la figura.

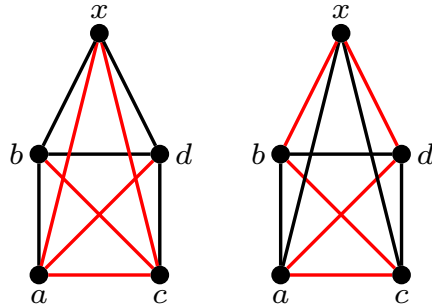


Figura 9. Ciclo crítico.

Note que a la izquierda  $\{a, c, x\}, \{b, d, x\} \notin \text{hom}(\varphi)$  pero a la derecha es cierto precisamente lo contrario.

Ahora mostramos que si una coloración posee un ciclo crítico entonces no es reconstruible. El lector habrá notado el intencionado paralelo entre los conceptos de pareja crítica y ciclo crítico.

**Proposición 2.15.** *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$  tal que  $\varphi$  tiene un ciclo crítico  $A \subseteq X^{[2]}$ . Entonces  $A$  induce una reconstrucción no trivial de  $\varphi$ .*

*Demostración.* Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$  y suponga que  $\varphi$  tiene un ciclo crítico  $A = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\}$ .

De la definición de ciclo crítico en las Ecuaciones (1) y (2) se tiene que  $A \cap H^{[2]} = \emptyset$  para todo  $H \in \text{hom}(\varphi)$ . Luego,  $\varphi \upharpoonright H^{[2]} = \varphi_A \upharpoonright H^{[2]}$  y esto quiere decir que  $\text{hom}(\varphi) = \text{hom}(\varphi_A)$ . □

## 2.2. COLORACIONES FUERTEMENTE RECONSTRUIBLES

Vamos a examinar la pregunta de la veracidad del recíproco del Corolario 2.8, es decir ¿si  $\varphi \in \mathcal{R}$  entonces tiene infinitos segmentos iniciales reconstruibles? El Ejemplo 2.17 demuestra que no es así, de hecho, existen coloraciones reconstruibles tales

que no poseen infinitos segmentos iniciales reconstruibles. Esto sugiere definir el concepto de fuertemente reconstruible.

**Definición 2.16.** Una coloración sobre  $\mathbb{N}$  es *fuertemente reconstruible* si existen infinitos  $n$  tal que  $\varphi \upharpoonright n^{[2]}$  es reconstruible. Denotamos la colección de las coloraciones fuertemente reconstruibles por  $\mathcal{FR}$ .

Aunque la definición sea para coloraciones sobre  $\mathbb{N}$ , en realidad aplica para cualquier conjunto numerable  $X$ , lo cual es evidente una vez se ha fijado una enumeración de  $X$ .

**Ejemplo 2.17.** Considere la siguiente coloración  $\alpha$  sobre  $\mathbb{N}$  que definimos de manera recursiva,

$$\alpha\{0, 1\} = \alpha\{0, 2\}; \quad (3)$$

$$\alpha\{0, n\} = 1 - \alpha\{0, n - 1\} \text{ para } n > 2; \quad (4)$$

$$\alpha\{k, n\} = 1 - \alpha\{0, k\} \text{ para } 0 < k < n. \quad (5)$$

La siguiente figura muestra una representación de la coloración  $\alpha$ . Se ha omitido la arista  $\{1, 4\}$  por simplicidad. Recuerde que si  $k, m, n$  son tales que  $k < m < n$ , entonces  $\varphi\{k, m\} = \varphi\{k, n\}$ .

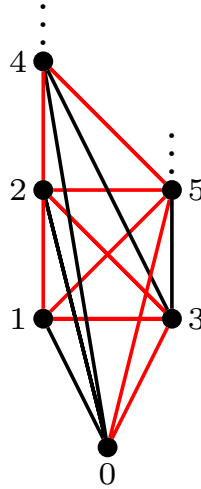


Figura 10. Coloración tal que no posee segmentos iniciales reconstruibles.

Observe que para todo  $n \geq 2$ ,  $\{0, n\}$  es pareja crítica de  $\alpha \upharpoonright n+1^{[2]}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Note que por (5) y (4)

$$\alpha\{n, n+1\} = 1 - \alpha\{0, n\} = \alpha\{0, n+1\}.$$

Luego,  $\{0, n\}$  no es pareja crítica de  $\alpha \upharpoonright n+2^{[2]}$  y por el mismo motivo, tampoco es una pareja crítica de  $\alpha$ . Esto quiere decir que  $\alpha$  no tiene pares críticos.

Vamos a demostrar que  $\alpha$  es reconstruible pero, como ya se mostró, no es fuertemente reconstruible. La demostración hace uso de la Proposición 2.9 y el Lema 2.12.

**Teorema 2.18.**

$$\mathcal{FR} \subsetneq \mathcal{R}$$

*Demostración.* En el Ejemplo 2.17 se ha establecido que  $\alpha \notin \mathcal{FR}$ , ya que  $\alpha \upharpoonright n+1^{[2]}$  posee como par crítico a  $\{0, n\}$ , y así  $\alpha \upharpoonright n+1^{[2]}$  no es reconstruible para ningún  $n \in \mathbb{N}$ .

Demostraremos que  $\alpha \in \mathcal{R}$ . Para todo  $n > 1$  se cumple, por (5), que

$$\alpha\{1, n\} = 1 - \alpha\{0, 1\}$$

Así mismo, para todo  $n > 2$  se cumple que

$$\alpha\{2, n\} = 1 - \alpha\{0, 2\} = 1 - \alpha\{0, 1\},$$

donde además de (5) también se ha usado (3). Por lo anterior, para todo  $n > 2$  se tiene que

$$\alpha\{1, n\} = \alpha\{2, n\} = \alpha\{1, 2\}.$$

Si se considera la restricción  $\alpha^* = \alpha \upharpoonright \mathbb{N} \setminus 1^{[2]}$ , entonces por la Proposición 2.9 se tiene que  $\alpha^*$  es reconstruible.

Finalmente, el Lema 2.12 afirma que si  $\alpha \notin \mathcal{R}$  entonces  $\alpha$  debe tener una pareja crítica, pero, como ya se mencionó,  $\alpha$  no tiene pares críticos. Entonces  $\alpha \in \mathcal{R}$ .  $\square$

El teorema anterior dice que existen coloraciones que son reconstruibles pero no fuertemente reconstruibles. Sólo hemos dado un ejemplo, pero sabemos que es posible construir algunas coloraciones del mismo tipo basándose en la misma idea en que se basó la construcción de  $\alpha$ . Se puede hacer que “la parte no reconstruible vaya moviéndose hasta desaparecer en el infinito”.

Para terminar, incluimos algunas ideas a desarrollar en futuras investigaciones. Estas son motivadas por algunos resultados que percibimos como ciertos, pero de los que su demostración nos eludió, aparentemente por poco.

Una primera idea es de buscar más ejemplos de coloraciones que sean reconstruibles pero no fuertemente reconstruibles. Específicamente, estudiar coloraciones cuyos segmentos iniciales tengan ciclos críticos.

Un resultado que se cree que debe poder demostrarse, quizás con algunas de las

ideas presentadas en capítulos posteriores, es el siguiente: En analogía con el Lema 2.12,

**Proposición 2.19.** *Sea  $\varphi$  una coloración reconstruible sobre  $X$ , y sea  $\psi : X \cup \{a, b\}^{[2]} \rightarrow 2$  una extensión de  $\varphi$ , tal que  $\psi \notin \mathcal{R}$  y  $\psi$  no tiene parejas críticas. Entonces  $\psi$  tiene un ciclo crítico.*

## 2.3. RECONSTRUCCIÓN BORELIANA

Los resultados de esta sección son todos demostrados en <sup>1</sup>. El contenido de esta parte está enfocado en lo que podemos decir acerca de las propiedades topológicas y descriptivas de los conjuntos que aparecen en el contexto de la reconstrucción de coloraciones.

Considere el espacio de coloraciones sobre los naturales  $2^{\mathbb{N}^{[2]}}$  con la topología producto. Es sabido que este espacio topológico es homeomorfo a  $2^{\mathbb{N}}$ , una base para esta topología está dada por los conjuntos

$$[\varphi] = \{\psi \in 2^{\mathbb{N}^{[2]}} : \psi \upharpoonright n = \varphi\}, \text{ donde } n \in \mathbb{N}, \varphi \in 2^{n^{[2]}}.$$

Un hecho interesante que se puede ver inmediatamente, al considerar los resultados sobre la reconstructibilidad de coloraciones es el siguiente: tanto  $\mathcal{R}$  como su complemento son subconjuntos densos  $2^{\mathbb{N}^{[2]}}$ .

Si  $\varphi \in 2^{\mathbb{N}^{[2]}}$  entonces  $\text{hom}(\varphi)$  es un subconjunto cerrado de  $2^{\mathbb{N}^{[2]}}$ . Entonces  $K(2^{\mathbb{N}})$ , el hiperespacio de subconjuntos compactos de  $2^{\mathbb{N}}$  con la topología de Vietoris, es también de nuestro interés. Esta topología se puede definir como la generada por la

subbase

$$U^+ = \{L \in K(2^{\mathbb{N}}) : L \subseteq U\},$$

$$U^- = \{L \in K(2^{\mathbb{N}}) : L \cap U \neq \emptyset\},$$

donde  $U$  es un subconjunto abierto de  $2^{\mathbb{N}}$ . Podemos tomar  $U$  clopen, si es conveniente.

El resultado principal es el Teorema 2.23, que afirma que el dada una coloración  $\varphi$  es posible construir una función boreliana tal que la imagen de  $\varphi$  sea una reconstrucción de  $\varphi$  (en general, diferente de  $\varphi$ ).

El primer resultado que daremos, establece una medida de la “complejidad topológica” del problema de reconstrucción.

**Proposición 2.20** <sup>(1)</sup>. *El conjunto  $\mathcal{R}$  de todas las coloraciones reconstruibles sobre  $\mathbb{N}$  es  $G_\delta$  en  $2^{\mathbb{N}^{[2]}}$ .*

*Demostración.* Considere la relación de equivalencia entre coloraciones  $E$ , definida por

$$(\varphi, \psi) \in E \iff \text{hom}(\varphi) = \text{hom}(\psi) \iff \text{hom}(\varphi) \cap [\mathbb{N}]^3 = \text{hom}(\psi) \cap [\mathbb{N}]^3.$$

Para todo  $H \in \text{hom}(\varphi)$  finito se tiene que  $V_H = \{\psi \in 2^{\mathbb{N}^{[2]}} : H \in \text{hom}(\psi)\}$  es un abierto básico de  $2^{\mathbb{N}^{[2]}}$ , entonces

$$(\varphi, \psi) \in E \iff \psi \in \bigcap_{\substack{H \in \\ \text{hom}_3(\varphi)}} V_H \quad \wedge \quad \varphi \in \bigcap_{\substack{H \in \\ \text{hom}_3(\psi)}} V_H,$$

y es claro que  $E$  es cerrado como subconjunto de  $2^{\mathbb{N}^{[2]}} \times 2^{\mathbb{N}^{[2]}}$ .

Por otra parte, las relaciones  $\{(\varphi, \varphi) : \varphi \in 2^{\mathbb{N}^{[2]}}\}$  y  $\{(\varphi, 1 - \varphi) : \varphi \in 2^{\mathbb{N}^{[2]}}\}$  son también cerradas.

Finalmente, observe que

$$\begin{aligned} \varphi \in \mathcal{R} &\iff \psi \neq \varphi, 1 - \varphi \implies (\varphi, \psi) \notin E \\ &\iff (\psi = \varphi) \vee (\psi = 1 - \varphi) \vee ((\varphi, \psi) \notin E). \end{aligned}$$

Por un teorema clásico de la topología elemental, la imagen continua de un compacto es compacta. Todo cerrado de  $2^{\mathbb{N}^{[2]}} \times 2^{\mathbb{N}^{[2]}}$  es compacto. Por otra parte, las proyecciones de un espacio producto son funciones abiertas.  $\mathcal{R}$  es la proyección de un abierto-cerrado de  $2^{\mathbb{N}^{[2]}} \times 2^{\mathbb{N}^{[2]}}$ , y así podemos concluir que  $\mathcal{R}$  es  $G_\delta$  y  $F_\sigma$ , o lo que es lo mismo  $\mathcal{R} \in \Delta_2^0$ .  $\square$

**Proposición 2.21** <sup>(1)</sup>. *La función  $\text{hom} : 2^{\mathbb{N}^{[2]}} \rightarrow K(2^{\mathbb{N}})$  dada por  $\varphi \mapsto \text{hom}(\varphi)$  es boreliana.*

*Demostración.* Sea  $U$  un subconjunto clopen de  $2^{\mathbb{N}}$ . Es suficiente demostrar que los conjuntos

$$C(U^+) = \{\varphi \in 2^{\mathbb{N}^{[2]}} : \text{hom}(\varphi) \in U^+\}, \quad C(U^-) = \{\varphi \in 2^{\mathbb{N}^{[2]}} : \text{hom}(\varphi) \in U^-\},$$

son borelianos.

Ahora, defina  $HOM = \{L \in K(2^{\mathbb{N}}) : \exists \varphi \in 2^{\mathbb{N}^{[2]}} , L = \text{hom}(\varphi)\}$ . En seguida veremos que  $HOM$  es un subconjunto  $G_\delta$  de  $K(2^{\mathbb{N}})$ , y por lo tanto es un espacio Polaco.

$$\text{hom}(\varphi) \subseteq U \iff \forall H \in \mathbb{N}^{[3]} (H \in \text{hom}(\varphi) \implies H \in U).$$

Luego, podemos escribir a  $C(U^+)$  como la intersección numerable de abiertos básic-

COS

$$\begin{aligned} C(U^+) &= \{\varphi \in 2^{\mathbb{N}^{[2]}} : \forall H \in \mathbb{N}^{[3]} (H \in \text{hom}(\varphi) \implies H \in U)\}, \\ &= \bigcap_{H \in \mathbb{N}^{[3]} \setminus U} \{\varphi \in 2^{\mathbb{N}^{[2]}} : H \notin \text{hom}(\varphi)\}. \end{aligned}$$

Así,  $C(U^+)$  es cerrado en  $2^{\mathbb{N}^{[2]}}$ .

Para ver que  $C(U^-)$  es Boreliano, basta notar que  $V = 2^{\mathbb{N}} \setminus U$  es clopen también y que

$$\begin{aligned} C(U^-) &= \{\varphi \in 2^{\mathbb{N}^{[2]}} : \text{hom}(\varphi) \cap U \neq \emptyset\} \\ &= 2^{\mathbb{N}^{[2]}} \setminus \{\varphi \in 2^{\mathbb{N}^{[2]}} : \text{hom}(\varphi) \cap U = \emptyset\} \\ &= 2^{\mathbb{N}^{[2]}} \setminus \{\varphi \in 2^{\mathbb{N}^{[2]}} : \text{hom}(\varphi) \subseteq V\} \\ &= 2^{\mathbb{N}^{[2]}} \setminus C(V^+). \end{aligned}$$

A raíz, de esto la preimagen de un cualquiera  $U \subseteq 2^{\mathbb{N}}$  bajo  $\text{hom}$  es, en cualquier caso, la unión numerable de cerrados o  $F_\sigma$ . Es decir,  $\text{hom}$  es una función de clase  $\Sigma_2^0$ . □

La siguiente proposición trata de

**Proposición 2.22** <sup>(1)</sup>. *HOM es  $G_\delta$  en  $K(2^{\mathbb{N}})$  y luego es Polaco.*

*Demostración.* Consideramos el conjunto partes de  $n$ ,  $\mathcal{P}(n)$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Dado  $L \in K(2^{\mathbb{N}})$ ,

$$L \in \text{HOM} \iff \forall n > 1, \exists \varphi \in 2^{n^{[2]}} , L \upharpoonright \mathcal{P}(n) = \text{hom}(\varphi). \quad (6)$$

Para ver que la equivalencia se cumple, note que si  $L \in \text{HOM}$ , existe  $\varphi \in 2^{\mathbb{N}^{[2]}}$  con  $L = \text{hom}(\varphi)$ , y entonces para todo  $n > 1$ ,  $L \upharpoonright \mathcal{P}(n) = \text{hom}(\varphi \upharpoonright n^{[2]})$ .

Recíprocamente, si se cumple la condición a la derecha, entonces  $T_L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_{L,n}$

es infinito, donde

$$T_{L,n} = \{\varphi \in 2^{n^{[2]}} : L \upharpoonright \mathcal{P}(n) = \text{hom}(\varphi)\}.$$

Es evidente que para cualquier  $n$ , si  $\varphi \in T_{L,n}$  y  $\psi \subset \varphi$  entonces existe  $m < n$  tal que  $\psi = \varphi \upharpoonright m^{[2]}$ , y luego  $\psi \in T_{L,m} \subseteq T_L$ . Además,  $T_{L,n}$  es finito para todo  $n$ , y por lo tanto  $T_L$  es un árbol de ramificación finita. Por el Lema de König  $T_L$  posee una rama infinita, esto es, existe  $\varphi \in 2^{\mathbb{N}^{[2]}}$  tal que para todo  $n$ ,  $\varphi \upharpoonright n^{[2]} \in T_L$ . Se cumple que  $\text{hom}(\varphi) = L$ .

Para ver que  $HOM$  es  $G_\delta$  en  $K(2^\mathbb{N})$ , primero observe que si  $\varphi$  es una coloración sobre  $n$ ,

$$T_\varphi = \{L \in K(2^\mathbb{N}) : L \upharpoonright \mathcal{P}(n) = \text{hom}(\varphi)\}$$

es un conjunto  $G_\delta$ . De hecho,

$$\begin{aligned} T_\varphi &= \{L \in K(2^\mathbb{N}) : L \upharpoonright \mathcal{P}(n) = \text{hom}(\varphi)\} \\ &= \{L \in K(2^\mathbb{N}) : \forall H \in \mathcal{P}(n) (H \in L \cap \text{hom}(\varphi) \vee H \notin L \cup \text{hom}(\varphi))\} \\ &= \bigcap_{H \in \mathcal{P}(n)} \{L \in K(2^\mathbb{N}) : H \in L \cap \text{hom}(\varphi)\} \cup \{L \in K(2^\mathbb{N}) : H \notin L \cup \text{hom}(\varphi)\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Note que  $L \cap \text{hom}(\varphi)$  y  $L \cup \text{hom}(\varphi)$  son conjuntos cerrados de  $2^\mathbb{N}$ .

Por la definición de básicos en la Topología de Vietoris sobre  $2^\mathbb{N}$ , tenemos que  $\{L \in K(2^\mathbb{N}) : H \in L \cap \text{hom}(\varphi)\}$  es cerrado y  $\{L \in K(2^\mathbb{N}) : H \notin L \cup \text{hom}(\varphi)\}$  es abierto.

Su unión es un conjunto  $G_\delta$  y  $F_\sigma$  simultáneamente. Así,  $T_\varphi \in G_\delta \cap F_\sigma$ , y finalmente

$$HOM = \bigcap_{n > 2} \bigcup_{\varphi \in 2^{n^{[2]}}} T_\varphi \in G_\delta. \quad (7)$$

Por el Teorema de Alexandrov,  $HOM$  es un espacio polaco.  $\square$

**Teorema 2.23** <sup>(1)</sup>. Existe  $g : HOM \rightarrow 2^{\mathbb{N}^{[2]}}$  boreliana tal que para todo  $L \in HOM$

$$\text{hom}(g(L)) = L.$$

*Demostración.* Considere la relación

$$A = \{(L, \varphi) \in HOM \times 2^{\mathbb{N}^{[2]}} : L = \text{hom}(\varphi)\}.$$

$A$  es el gráfico de la función  $\text{hom} : 2^{\mathbb{N}^{[2]}} \rightarrow K(2^{\mathbb{N}})$ , la cual es boreliana por la Proposición (2.21). Entonces  $A$  es boreliano. Además, como se vio en la Proposición (2.20), la relación de equivalencia

$$(\varphi, \psi) \in E \iff \text{hom}(\varphi) = \text{hom}(\psi)$$

es cerrada, y por lo tanto sus secciones  $E_\varphi$  (la clase de  $\varphi$ ) son también conjuntos cerrados. Note que

$$\psi \in E_\varphi \iff \psi \in A_{\text{hom}(\varphi)}.$$

Concluimos que  $A$  tiene secciones cerradas (compactas) en  $2^{\mathbb{N}^{[2]}}$ . Entonces por un resultado clásico de uniformización, debido a Kunugui y Novikov, <sup>4</sup>, Teorema (28.8), podemos concluir que existe una función boreliana  $g : HOM \rightarrow 2^{\mathbb{N}^{[2]}}$  tal que  $g(L) = \varphi$  con  $L = \text{hom}(\varphi)$ .

□

---

<sup>4</sup> Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory*. Vol. 156. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1995, págs. xviii+402. DOI: 10.1007/978-1-4612-4190-4.

### 3. RECONSTRUCCIONES MÍNIMAS

En este capítulo se tratará la pregunta: Si  $\varphi$  es una coloración no reconstruible ¿cuál es el mínimo tamaño de un conjunto  $A$  que induce una reconstrucción no trivial de  $\varphi$ ?

Este es el tema central del capítulo y su culminación es el Teorema 3.15, el cual es el resultado más importante de este trabajo. Para poder enunciar este resultado se necesita primero la definición de la siguiente función, que denotamos por  $r$ .

**Definición 3.1.** Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$ . Definimos la función  $r : 2^{X^{[2]}} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  como

$$r(\varphi) = \min\{|A| : A \text{ induce una reconstrucción no trivial de } \varphi\}$$

si  $\varphi$  no es reconstruible y en otro caso  $r(\varphi) = 0$ .

Note que si  $\varphi$  no es reconstruible, entonces  $r(\varphi) \geq 1$ . Si  $A \subseteq X^{[2]}$  es tal que  $|A| = r(\varphi)$  decimos que  $\varphi_A$  es una *reconstrucción (no trivial) mínima*.

Lo que demostraremos ahora es que para el caso en que  $X$  sea un conjunto numerable infinito, si  $\varphi$  es una coloración sobre  $X$  no reconstruible, entonces  $r(\varphi) = 1, 4$  o  $r(\varphi) = \infty$ . No conocemos ejemplos de coloraciones para las que  $r$  tome el valor  $\infty$ , pero no pudimos descartarlo en el argumento que usamos. Sospechamos que  $r(\varphi) \neq \infty$ , pero no hemos podido demostrar esto.

Primero introducimos unas nociones que resultarán útiles para los argumentos que se dan en lo que resta del capítulo.

**Definición 3.2.** Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$  y  $\{a, b\} \in X^{[2]}$ . Definimos los siguien-

tes subconjuntos de  $X$ :

$$C_{a,b}^\varphi = \{c \in X \setminus \{a, b\} : \varphi\{a, c\} = 1 - \varphi\{b, c\}\},$$

$$H_{a,b}^\varphi = \{c \in X \setminus \{a, b\} : \{a, b, c\} \in \text{hom}(\varphi)\},$$

$$G_{a,b}^\varphi = \{c \in X \setminus \{a, b\} : \varphi\{a, c\} = \varphi\{b, c\} = 1 - \varphi\{a, b\}\}.$$

Note que  $X \setminus \{a, b\} = C_{a,b} \cup H_{a,b} \cup G_{a,b}$ , es decir, los conjuntos definidos forman una partición de  $X \setminus \{a, b\}$ . En general, hablaremos de los conjuntos  $C_{a,b}^\varphi, H_{a,b}^\varphi, G_{a,b}^\varphi$  para una coloración  $\varphi$  fija. Omitiremos el superíndice  $\varphi$  cuando no haya peligro de confusión y escribiremos  $C_{a,b}, H_{a,b}$  y  $G_{a,b}$ .

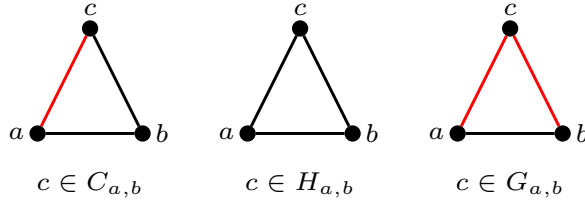


Figura 11. Se muestran los tres casos posibles para  $c \in X \setminus \{a, b\}$ .

Es interesante notar que algunos resultados ya presentados toman una forma sencilla cuando se escriben en términos de los conjuntos definidos recién. Por ejemplo, la Proposición 2.9 se ve así:

**Proposición 3.3.** *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$ . Si  $H_{a,b} = X \setminus \{a, b\}$  para algún  $\{a, b\} \in X^{[2]}$ , entonces  $\varphi$  es reconstruible.*

Así mismo, las Proposiciones (2.11) y (2.15) se pueden reenunciar usando esta nueva notación:

**Proposición 3.4.** *Una coloración  $\varphi$  sobre  $X$  tiene una pareja crítica si y solo si existe  $\{a, b\} \in X^{[2]}$  tal que  $C_{a,b} = X \setminus \{a, b\}$ .*

**Proposición 3.5.** *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$ , y sea  $A = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\}$  tal que:*

$$\begin{aligned} C_{a,b} &= X \setminus \{a, b, c\}, & G_{a,b} &= \{c\}, & H_{a,b} &= \emptyset \\ C_{b,c} &= X \setminus \{b, c, d\}, & G_{b,c} &= \{d\}, & H_{b,c} &= \emptyset \\ C_{c,d} &= X \setminus \{c, d, a\}, & G_{c,d} &= \{a\}, & H_{c,d} &= \emptyset \\ C_{d,a} &= X \setminus \{a, b, d\}, & G_{d,a} &= \{b\}, & H_{d,a} &= \emptyset. \end{aligned}$$

*Entonces  $A$  induce una reconstrucción no trivial de  $\varphi$ .*

Vamos a demostrar que para coloraciones  $\varphi$  sobre  $X$  infinito, los únicos valores finitos que puede tomar  $r(\varphi)$  son 1 y 4. De hecho, demostraremos algo más fuerte. Si  $\varphi$  es una coloración sobre  $X$  infinito y  $A \subseteq X^{[2]}$  finito induce una reconstrucción de  $\varphi$ , entonces  $A$  es una pareja crítica para  $\varphi$  (es decir,  $|A| = 1$ ) o  $A$  es un ciclo crítico (en este caso,  $|A| = 4$ ) como en la Proposición (3.5).

El siguiente lema es una consecuencia directa del Lema (2.6), y omitimos su demostración. Note que sólo se ha reenunciado el resultado mencionado en términos de la Definición (3.2).

**Lema 3.6.** *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$ ,  $A$  induce una reconstrucción de  $\varphi$ . Entonces:*

1. *Suponga que  $\{a, b\} \in A$ . Para todo  $c \in G_{a,b}$  se tiene que  $\{a, c\} \in A$  o  $\{b, c\} \in A$ . Esto implica*

$$|G_{a,b}| \leq |A|.$$

*Si  $A$  es finito, la desigualdad es estricta.*

2. *Suponga que  $\{a, b\} \in A$ . Para todo  $c \in H_{a,b}$ ,  $\{a, c\}, \{b, c\} \in A$ . De la misma*

manera que para 1., tenemos que

$$2|H_{a,b}| \leq |A|.$$

Si  $A$  es finito, la desigualdad es estricta.

3. Para todo  $c \in G_{a,b}$  si  $\{a, c\}, \{b, c\} \in A$  entonces  $\{a, b\} \in A$ .

Una consecuencia fácil de lo anterior es la siguiente:

**Corolario 3.7.** Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$  y  $A$  un conjunto que induce una reconstrucción de  $\varphi$ . Si cualesquiera dos aristas  $\{a, b\}, \{c, d\} \in A$  son disjuntas, entonces  $\varphi_A$  no es una reconstrucción mínima.

*Demostración.* Sea  $\{a, b\} \in A$ . Se deduce del Lema 3.6 que  $H_{a,b}, G_{a,b} = \emptyset$  y luego  $C_{a,b} = X \setminus \{a, b\}$  y esto quiere decir que  $\{a, b\}$  es un pareja crítica de  $\varphi$ .  $\square$

El caso  $r(\varphi) = 1$  coincide con la propiedad de tener una pareja crítica.

**Proposición 3.8.** Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$ .  $\varphi$  tiene una pareja crítica si y sólo si  $r(\varphi) = 1$ .

*Demostración.* La Proposición (2.11) dice que toda coloración que tiene una pareja crítica  $\{a, b\}$  posee una reconstrucción no trivial que se obtiene de cambiar sólo el color de la arista  $\{a, b\}$ . Es decir,  $A = \{\{a, b\}\}$  induce la reconstrucción  $\varphi_A$  de  $\varphi$  y luego  $1 \leq r(\varphi) \leq 1$ .

En el otro sentido, sea  $A = \{\{a, b\}\}$  tal que induce una reconstrucción no trivial de  $\varphi$ . Por el Lema (3.6),<sup>1</sup> se tiene que  $|G_{a,b}|, 2|H_{a,b}| < |A| = 1$ . Así  $G_{a,b} = H_{a,b} = \emptyset$ , y luego  $C_{a,b} = X \setminus \{a, b\}$ , es decir,  $\{a, b\}$  es un par crítico de  $\varphi$ .  $\square$

Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$  y sea  $A$  que induce una reconstrucción no trivial. El argumento pasa por probar que dados tres elementos de  $A$ , estos no pueden “formar un triángulo”, es decir,  $\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$ , ni tampoco pueden “formar un trío”  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}$  (ver Teorema 3.13).

Para demostrar que  $A$  no contiene triángulos, lo haremos en dos partes: primero demostramos que  $A$  no contiene triángulos monocromáticos (esto es,  $H^{[2]} \not\subseteq A$  para  $H \in \text{hom}(\varphi)$ ) (ver Lema 3.9); luego, demostramos que si  $c \in G_{a,b}$  entonces  $[\{a, b, c\}]^2 \not\subseteq A$  (ver Lema 3.12). Cabe notar que dado un triángulo no monocromático  $\{a, b, c\}$  siempre se puede reetiquetar de manera que  $c \in G_{a,b}$ .

**Lema 3.9.** *Sean  $\varphi$  una coloración sobre un conjunto infinito  $X$  y  $A \subseteq X^{[2]}$  un conjunto que induce una reconstrucción de  $\varphi$ . Si existe  $\{a, b, c\} \in \text{hom}(\varphi)$  tal que  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \in A$ , entonces  $A$  es infinito. En particular, si  $A$  es finito entonces para toda  $\{a, b\} \in A$  se tiene que  $H_{a,b} = \emptyset$ .*

*Demostración.* Suponga que  $A$  es finito. Entonces por el Lema (3.6),1 se tiene que  $|G_{a,b}|, |G_{a,c}|, |G_{b,c}| < \infty$ . De nuevo, por el Lema (3.6),2  $|H_{a,b}|, |H_{a,c}|, |H_{b,c}| < \infty$ . Así que debe existir  $d \notin G_{a,b} \cup H_{a,b}, G_{a,c} \cup H_{a,c}, G_{b,c} \cup H_{b,c}$ . En otras palabras,  $d \in C_{a,b} \cap C_{a,c} \cap C_{b,c}$ , es decir,

$$\begin{aligned}\varphi\{a, d\} &= 1 - \varphi\{b, d\} & (d \in C_{a,b}), \\ \varphi\{a, d\} &= 1 - \varphi\{c, d\} & (d \in C_{a,c}), \\ \varphi\{b, d\} &= 1 - \varphi\{c, d\} & (d \in C_{b,c}).\end{aligned}$$

De estas ecuaciones se deduce una contradicción. Por lo tanto  $A$  es infinito.  $\square$

**Proposición 3.10.** *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$  infinito, y  $A \subseteq X^{[2]}$  finito que induce una reconstrucción de  $\varphi$ . Entonces  $G_{a,b} \cap G_{a,c} = \emptyset$  para cualesquiera  $\{a, b\}, \{a, c\} \in A$ .*

*Demostración.* Sean  $\{a, b\}, \{a, c\} \in A$ . Por contradicción, suponga que existe  $d \in$

$G_{a,b} \cap G_{a,c}$ , es decir,

$$\varphi\{a, d\} = \varphi\{b, d\} = 1 - \varphi\{a, b\},$$

$$\varphi\{a, d\} = \varphi\{c, d\} = 1 - \varphi\{a, c\}.$$

Entonces  $\varphi\{a, b\} = \varphi\{a, c\} = 1 - \varphi\{b, c\}$  pues por el Lema (3.9)  $\{a, b, c\} \notin \text{hom}(\varphi)$ . De lo anterior se tiene que  $\varphi\{b, d\} = \varphi\{c, d\} = \varphi\{b, c\}$ , pero el Lema (3.6),3 dice que  $\{b, c\} \in A$ , de manera que por el Lema (3.9)  $\{b, c, d\} \notin \text{hom}(\varphi)$  se contradice que  $A$  es finito.  $\square$

Ahora queremos extender el Lema (3.9) a un resultado más fuerte. Este resultado será usado en las demostraciones más importantes de este trabajo de investigación, como son los Teoremas (3.14) y (3.15).

Primero damos un lema técnico que nos permitirá simplificar el argumento de la demostración del Lema (3.12).

**Lema 3.11.** *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$  infinito y  $A \subseteq X^{[2]}$  que induce una reconstrucción de  $\varphi$ . Si  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\} \in A$  con  $d \in G_{a,c}$ ,  $e \in G_{b,c}$  y  $c \in G_{a,b} \cap G_{d,e}$  entonces  $A$  es infinito.*

*Demostración.* Sean los elementos de  $A$  como en la hipótesis, entonces por el Lema (3.9) se tiene que  $\{a, b, d\}, \{a, b, e\}$  no son homogéneos de  $\varphi$  y así

$$\varphi\{a, e\} = \varphi\{b, d\} = 1 - \varphi\{a, b\}.$$

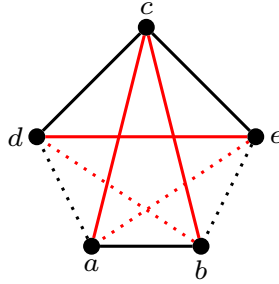


Figura 12.  $c \in G_{a,b} \cap G_{d,e}$  y  $\varphi\{a, b\} = 1 - \varphi\{d, e\}$ .

Las líneas sólidas son elementos de  $A$ , mientras que las líneas punteadas pueden ser o no elementos de  $A$ .

Dado que  $X$  es infinito, podemos tomar  $x \in X \setminus \{a, b, c, d, e\}$ . Si alguno de  $\{a, c, x\}$ ,  $\{b, c, x\}$ ,  $\{a, b, x\}$  es homogéneo de  $\varphi$  entonces, por el Lema (3.9),  $A$  es infinito. Así que suponemos que ninguna de dichas tripletas forman un homogéneo de la coloración  $\varphi$ .

Observe que  $\varphi\{a, c\} = \varphi\{b, c\} = 1 - \varphi\{c, d\} = 1 - \varphi\{c, e\}$ .

Si  $\varphi\{c, x\} = \varphi\{a, c\} = \varphi\{b, c\}$  entonces  $\varphi\{a, x\} = \varphi\{b, x\} = 1 - \varphi\{c, x\}$  puesto que  $\{a, c, x\}$ ,  $\{b, c, x\} \notin \text{hom}(\varphi)$ . Pero esto contradice que  $\{a, b, x\} \notin \text{hom}(\varphi)$ .

Si  $\varphi\{c, x\} = \varphi\{c, d\} = \varphi\{c, e\}$ , se tiene que  $\varphi\{d, x\} = \varphi\{e, x\} = 1 - \varphi\{c, x\}$ , dado que  $\{c, d, x\}$ ,  $\{c, e, x\} \notin \text{hom}(\varphi)$ . De nuevo derivamos en una contradicción, esta vez se contradice que  $\{d, e, x\} \notin \text{hom}(\varphi)$ .

Concluimos que  $A$  es infinito. □

Ahora

**Lema 3.12.** *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$  infinito tal que  $r(\varphi) > 1$  y  $A \subseteq X^{[2]}$  que induce una reconstrucción de  $\varphi$ . Suponga  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \in A$  con  $c \in G_{a,b}$  entonces  $A$  es infinito.*

*Demostración.* Sean  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \in A$  como en el enunciado. Por el Lema (3.9) si  $H_{a,b} \neq \emptyset$  entonces  $A$  es infinito, de manera que vamos a suponer que se cumple que  $H_{a,b} = H_{a,c} = H_{b,c} = \emptyset$ .

Dado que  $\{a, c\}, \{b, c\}$  no son parejas críticas, existen  $d, e \in X \setminus \{a, b, c\}$  tales que  $d \in G_{a,c}$  y  $e \in G_{b,c}$ . Por la Proposición (3.10),  $e \neq d$ . De nuevo, el Lema (3.9) implica que  $A$  es infinito a menos que la restricción  $\varphi \upharpoonright \{a, b, c, d, e\}^{[2]}$  se vea así:

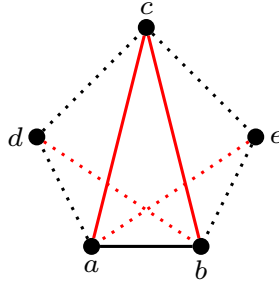


Figura 13. Al suponer un triángulo, no necesariamente monocromático, está en  $A$ , se obtiene la construcción mostrada.

Las líneas sólidas son los elementos de  $A$ , las punteadas son las que no sabemos si están en  $A$  o no.  $H_{a,b} = H_{b,c} = H_{a,c} = \emptyset$  por el Lema (3.9). Demostraremos que necesariamente aparece la coloración que se ilustra en la Figura (12).

Queremos ver que las aristas  $\{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}$  también están en  $A$ , y así usar el Lema (3.11) para concluir que  $A$  es infinito. Por el Lema (3.6),1  $\{a, d\}$  o  $\{c, d\}$  está en  $A$  y  $\{b, e\}$  o  $\{c, e\}$  está en  $A$ . Consideramos dos casos:

1. Suponga que  $\{c, d\}, \{c, e\} \in A$ , entonces  $\{c, d, e\} \notin \text{hom}(\varphi)$ . De lo contrario,  $A$  es infinito por Lema (3.9) y terminamos la demostración. Luego, se debe tener que  $\varphi\{d, e\} = \varphi\{c, e\} = 1 - \varphi\{c, d\}$  y, por el Lema (3.6),3, deducimos que  $\{d, e\}$  también está en  $A$ . Tenemos  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, c\} \in A$ . Al comparar con la Figura (12) se observa que  $\varphi \upharpoonright \{a, b, c, d, e\}^{[2]}$  coincide con lo allí ilustrado.
2. Suponga que  $\{a, d\}$  o  $\{b, e\}$  está en  $A$ . Por simetría de la situación, podemos escoger  $\{a, d\} \in A$ . En este caso, entonces  $\{b, d\} \in A$  por Lema (3.6),3 pues  $a \in G_{b,d}$ . Como  $b \in G_{c,d}$ , análogamente tenemos que  $\{c, d\} \in A$  y esto garantiza al igual que en el caso anterior que  $\varphi\{d, e\} = 1 - \varphi\{c, d\}$ .

Si  $\{b, e\} \in A$ . Entonces, el mismo argumento presentado para  $\{a, d\}$  muestra que  $\{c, e\} \in A$ . Concluimos que  $\{c, d\}, \{c, e\} \in A$  y tenemos el Caso 1.

Finalmente, observe que en ambos casos  $d \in G_{a,c}, e \in G_{b,c}, c \in G_{a,b} \cap G_{d,e}$ . Así que podemos aplicar el Lema (3.11) y concluir que  $A$  es infinito.  $\square$

Resumimos el contenido de los Lemas (3.9) y (3.12) en el siguiente teorema, agregando la sencilla consecuencia que  $A$  no contiene triodos.

**Teorema 3.13.** *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$  y  $A$  un conjunto que induce una reconstrucción de  $\varphi$ . Si  $A$  contiene tres aristas que forman un triángulo o un triodo entonces  $A$  es infinito. Es decir,  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \in A$  o  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\} \in A$  implica que  $A$  es infinito.*

*Demostración.* Para ver que  $A$  no contiene triodos. Observe que dos de las aristas  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}$  deben tener el mismo color. Sin pérdida de generalidad suponga que  $\varphi\{a, b\} = \varphi\{a, c\}$ . Note que por el Lema (3.6), 2 y 3  $\{b, c\} \in A$  y del Teorema (3.13) se obtiene que  $A$  es infinito.  $\square$

El siguiente resultado enuncia una propiedad estructural importante de los conjuntos que inducen reconstrucciones no triviales de una coloración dada.

**Teorema 3.14.** *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$  infinito, y  $A \subseteq X^{[2]}$  un conjunto finito que induce a una reconstrucción de  $\varphi$ . Entonces para toda  $\{a, b\} \in A$  se satisface exactamente una de las dos:*

1.  $\{a, b\}$  es una pareja crítica de  $\varphi$ .
2.  $|G_{a,b}| = 1$ .

*Demostración.* Si  $\{a, b\} \in A$  tal que  $G_{a,b} = \emptyset$  entonces  $\{a, b\}$  es una pareja crítica ya que  $H_{a,b} = \emptyset$  por Lema (3.9). Recíprocamente si  $\{a, b\} \in A$  es una pareja crítica entonces  $G_{a,b} = \emptyset$  por el Lema (3.6), 1.

Suponga que  $A$  no tiene parejas críticas. Veamos que  $|G_{a,b}| \leq 1$ . Suponga por contradicción que  $c, d \in G_{a,b}$  con  $c \neq d$ . Entonces se tiene una configuración como en la figura. De nuevo se usan líneas sólidas para indicar elementos de  $A$ , mientras que las punteadas pueden ser o no elementos de  $A$ .

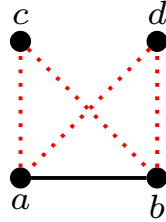


Figura 14.  $c, d \in G_{a,b}, c \neq d$

El Lema (3.6), 1 asegura que uno de  $\{a, c\}, \{b, c\}$  y uno de  $\{a, d\}, \{b, d\}$  está en  $A$ . Tenemos los siguientes casos:

- (I) Si dos aristas adyacentes son elementos de  $A$ , esto es, si  $\{a, c\}, \{a, d\} \in A$  o si  $\{b, c\}, \{c, d\} \in A$ , entonces  $\{c, d\} \in A$  por el Lema (3.6), 2 y 3 pero esto contradice el Teorema (3.13).
- (II) Suponga que  $\{a, c\}, \{b, d\} \in A$ . Sea  $e \in G_{a,c}$  (tal  $e$  existe puesto que  $\{a, c\}$  no es crítica y  $H_{a,b} = \emptyset$ ). Por el Lema (3.6), 1, uno de  $\{e, a\}$  o  $\{e, c\}$  es elemento de  $A$ , pero  $\{e, a\} \in A$  implicaría que  $\{b, e\} \in A$  por el Lema (3.6), 3, y esto contradice que  $A$  es finito (ver Teorema (3.13)). Entonces  $\{e, c\} \in A$  y por el Lema (3.9)  $\{c, d, e\}, \{a, c, d\} \notin \text{hom}(\varphi)$  ya que  $A$  es finito. Esto quiere decir que

$$\varphi\{a, c\} = 1 - \varphi\{c, d\} = \varphi\{e, c\},$$

una clara contradicción.

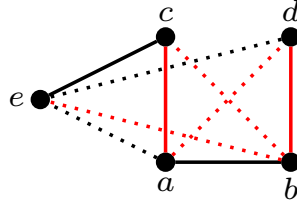


Figura 15.  $\varphi\{c, d\}$ , sea roja o negra, forma homogéneos con aristas de  $A$ , y esto implicaría que  $A$  es infinito por Lema (3.9), contradiciendo la hipótesis.

Hemos demostrado que  $|G_{a,b}| = 1$  para todo  $\{a, b\} \in A$ .

□

Finalmente tenemos las herramientas para probar el siguiente teorema cuyo argumento se apoya en los Teoremas (3.13) y (3.14), por lo se requiere que  $X$  sea infinito.

**Teorema 3.15.** *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$  infinito tal que  $r(\varphi) > 1$  y  $A$  un conjunto finito que induce una reconstrucción de  $\varphi$ . Entonces  $A$  es un ciclo crítico y  $r(\varphi) = 4$ .*

*Demostración.* Veamos que existen  $c, d \in X \setminus \{a, b\}$  tal que

$$G_{a,b} = \{c\}, \quad G_{b,c} = \{d\}, \quad G_{c,d} = \{a\} \quad \text{y} \quad G_{d,a} = \{b\},$$

donde  $\{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\} \in A$ .

Dado que  $r(\varphi) > 1$  se tiene que  $C_{a,b} \neq X \setminus \{a, b\}$ , luego existe  $c \neq a, b$  tal que  $c \in G_{a,b}$ . Además,  $G_{a,b} = \{c\}$  por Teorema (3.14) y por el Lema (3.6), 1, una de las aristas  $\{a, c\}$  o  $\{b, c\}$  está en  $A$ .

Sin pérdida de generalidad tomamos  $\{b, c\} \in A$  y de nuevo  $C_{b,c} \neq X \setminus \{b, c\}$ . Luego,  $G_{b,c} = \{d\}$ ,  $d \neq c$  por la Proposición (3.10). El Lema (3.6), 1 asegura que uno de  $\{b, d\}, \{c, d\}$  está en  $A$ , pero por el Teorema (3.13),  $\{b, d\} \notin A$  y así  $\{c, d\} \in A$ .

Dado que  $G_{a,b} = \{c\}$ ,  $G_{b,c} = \{d\}$ ,  $\varphi\{a, b\} = 1 - \varphi\{b, c\} = \varphi\{b, d\}$ , por el Lema (3.9) se deduce que  $\{a, b, d\} \notin \text{hom}(\varphi)$ , es decir que  $\varphi\{a, d\} = 1 - \varphi\{a, b\} = \varphi\{a, c\}$ . Tenemos así que  $G_{c,d} = \{a\}$ , y entonces una de  $\{a, c\}, \{a, d\} \in A$ , por el Lema (3.6), 1, pero por el Teorema (3.13) tenemos que  $\{a, c\} \notin A$ , de lo contrario  $\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$  sería un triángulo monocromático contenido en  $A$ .

Entonces  $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, d\} \in A$  con

$$\begin{aligned} G_{a,b} &= \{c\}, & G_{b,c} &= \{d\}, \\ G_{c,d} &= \{a\}, & G_{a,d} &= \{b\}, \end{aligned}$$

y esto es un ciclo crítico.

Note que  $r(\varphi) = 4$  pues  $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\}$  induce una reconstrucción no trivial de  $\varphi$ , y vimos que  $r(\varphi) \neq 2, 3$ .

Pero además de esto los únicos conjuntos que inducen una reconstrucción no trivial de  $\varphi$  son aquellos que consisten de la unión de ciclos críticos disjuntos.  $\square$

Terminamos este capítulo con algunos comentarios acerca del trabajo que queda por hacer en este aspecto del trabajo. Dado lo encontrado en este trabajo, tenemos la siguiente pregunta:

**Pregunta 3.16.** *Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$  (finito o infinito numerable) que no es reconstruible, y sea  $A \subseteq X^{[2]}$  que induce una reconstrucción no trivial mínima de  $\varphi$ . ¿Puede  $|A|$  tener un valor diferente a 1 o 4?*

Creemos que esta pregunta tiene respuesta negativa para  $|X| > 5$ . En el caso que  $X$  es infinito, esto quiere decir que debemos mostrar que no existe tal  $A$  que sea infinito. Si se logra responder la pregunta para el caso infinito, el autor cree que podría usarse junto con el Teorema (2.7), o una ligera variación de este resultado, para demostrar el caso finito.

## 4. CLASES DE RECONSTRUCCIÓN

Vamos a estudiar el conjunto de reconstrucciones de una coloración dada  $\varphi$ . Aquí presentamos un breve investigación preliminar que consiste principalmente de resultados acerca de tamaño del conjunto de reconstrucciones de una coloración  $\varphi$  sobre  $X$  infinito numerable. También se plantean algunas preguntas que surgen sobre la topología de estos conjuntos de reconstrucciones, cuando estas últimas son infinitas en número.

La siguiente definición da la notación que usaremos para hablar de las clase de reconstrucciones de una coloración dada  $\varphi$  sobre  $\mathbb{N}$ .

**Definición 4.1.** Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$ . La clase de reconstrucciones de  $\varphi$  es la colección

$$c(\varphi) = \{\varphi_A \in 2^{X^{[2]}} : \text{hom}(\varphi_A) = \text{hom}(\varphi)\}.$$

El siguiente lema sencillo será útil para determinar las posibles reconstrucciones de algunas de las coloraciones que mencionaremos.

**Lema 4.2** <sup>(1)</sup>. Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $X$ . Sea  $H \in \text{hom}(\varphi)$  un conjunto homogéneo de tamaño  $\geq 2$  de  $\varphi$  de color  $i \in \{0, 1\}$ :

1. Si  $x \in X \setminus H$  es tal que  $\{x, y_1, y_2\} \notin \text{hom}(\varphi)$  para todo  $y_1, y_2 \in H$  con  $y_1 \neq y_2$ , entonces  $|\{y \in H : \varphi\{x, y\} = i\}| \leq 1$ .
2. Si  $x, y \in X \setminus H$  que satisfacen la hipótesis de 1., si, además para todo  $z \in H$  se cumple que  $\{x, y, z\} \notin \text{hom}(\varphi)$  entonces  $\varphi\{x, y\} = i$ .

**Demostración.** 1. Sea  $x \in X \setminus H$ . Suponga  $\varphi\{x, y_1\} = \varphi\{x, y_2\} = i$  para  $y_1, y_2 \in H$ , entonces  $\{x, y_1, y_2\} \in \text{hom}(\varphi)$ . Contradicción.

2. Sean  $x, y \in X \setminus H$  y suponga buscando una contradicción que  $\varphi\{x, y\} = 1 - i$ . Por el ítem 1., existe  $z \in H$  tales que  $\varphi\{x, z\} = \varphi\{y, z\} = 1 - i$ , y obtenemos que  $\{x, y, z\} \in \text{hom}(\varphi)$ . Contradicción.

□

Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $\mathbb{N}$ . Veremos que  $c(\varphi)$  puede tener diferentes tamaños  $\kappa = |c(\varphi)|$ . Conocemos ejemplos con  $2 \leq \kappa \leq \aleph_0$ ,  $\kappa$  par, y  $\kappa = \mathfrak{c}$ . Note que  $\kappa$  finito siempre debe ser par pues

$$\varphi_A \in c(\varphi) \iff 1 - \varphi_A \in c(\varphi).$$

## 4.1. CARDINALIDAD DE LAS CLASES DE RECONSTRUCCIÓN DE UNA COLORACIÓN

Para comenzar, observamos que la definición de coloración reconstruible implica el siguiente hecho básico:

Sea  $\varphi$  una coloración sobre  $\mathbb{N}$ . Entonces

$$\varphi \in \mathcal{R} \iff c(\varphi) = \{\varphi, 1 - \varphi\} \iff |c(\varphi)| = 2.$$

Daremos ejemplos de  $\varphi$  sobre  $\mathbb{N}$  tales que  $c(\varphi)$  tiene cardinalidad  $2n$  para cualquier  $n$ . Esto lo demostraremos en la Proposición 4.4. Primero, damos el siguiente ejemplo que presenta la idea básica de la demostración de dicho resultado.

**Ejemplo 4.3.** Defina la siguiente coloración  $\varphi$  sobre  $\mathbb{N}$  por

$$\varphi\{0, 1\} = \varphi\{0, 2\},$$

$$\varphi\{1, 2\} = 1 - \varphi\{0, 1\},$$

$$\varphi\{0, m\} = 1 - \varphi\{0, 1\} \text{ para todo } m > 2,$$

$$\varphi\{m, n\} = \varphi\{0, 1\} \text{ en cualquier otro caso.}$$

La siguiente figura ilustra la coloración definida

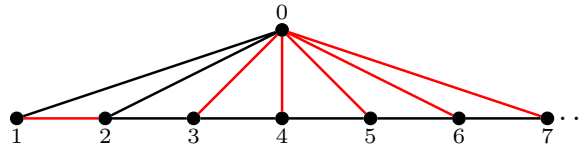


Figura 16. Coloración con sólo 4 reconstrucciones.

Muchas de las aristas, en  $\{1, 2, \dots, \dots\}^{[2]}$ , no se han dibujado para mantener la imagen sencilla. Observe que

$$\text{hom}(\varphi) = \mathbb{N}^{[\leq 2]} \cup \mathcal{P}(\{1, 3, 4, 5, \dots\}) \cup \mathcal{P}(\{2, 3, 4, 5, \dots\}).$$

Además,  $\{0, 1\}$ ,  $\{0, 2\}$  son parejas críticas de  $\varphi$ . Por Proposición (2.11) se sabe  $\varphi_{\{0,1\}}$ ,  $\varphi_{\{0,2\}}$  son reconstrucciones no triviales de  $\varphi$ .

Ahora demostraremos que  $\varphi_{\{0,1\}}$ ,  $\varphi_{\{0,2\}}$  (y sus complementos) son las únicas reconstrucciones no triviales de  $\varphi$ . Es decir, demostremos que

$$c(\varphi) = \{\varphi, 1 - \varphi, \varphi_{\{0,1\}}, 1 - \varphi_{\{0,1\}}, \varphi_{\{0,2\}}, 1 - \varphi_{\{0,2\}}\}.$$

Sea  $\varphi_A$  una reconstrucción no trivial de  $\varphi$ . Queremos demostrar que  $A = \{\{0, 1\}\}$ ,  $A = \mathbb{N}^{[2]} \setminus \{\{0, 1\}\}$ ,  $A = \{\{0, 2\}\}$  o  $A = \mathbb{N}^{[2]} \setminus \{\{0, 2\}\}$ .

Observe que  $\varphi \upharpoonright \mathbb{N} \setminus \{0\}^{[2]}$  es reconstruible (por la Proposición 2.9). Entonces la

*Proposición 2.5 afirma que  $\mathbb{N} \setminus 1^{[2]} \subseteq A$  o  $\mathbb{N} \setminus 1^{[2]} \cap A = \emptyset$ . Suponemos que se da la última posibilidad.*

*Notamos que ni  $\{0, 1, m\}$  ni  $\{0, 2, m\}$  son conjuntos homogéneos de  $\varphi$  para  $m > 2$ . Suponga  $\{0, m\} \in A$ , entonces se tendría*

$$\varphi_A\{0, m\} = \varphi\{1, m\} = \varphi_A\{1, m\} = \varphi_A\{2, m\}.$$

*Ahora, el Lema (4.2), 1 dice que*

$$|\{y \in \{1, 2\} : \varphi_A\{0, y\} = \varphi_A\{1, 2\}\}| \leq 1,$$

*lo que quiere decir que una de  $\{0, 1\} \notin A$  o  $\{0, 2\} \notin A$ , suponga  $\{0, 1\} \notin A$ . Esto implicaría*

$$\varphi_A\{0, 1\} = \varphi_A\{0, m\} = \varphi\{1, m\},$$

*es decir,  $\{0, 1, m\} \in \text{hom}(\varphi)$ , contradiciendo la suposición inicial. Concluimos que  $\{0, m\} \notin A$  para todo  $m > 2$ .*

*Hemos demostrado que  $A \subseteq \{\{0, 1\}, \{0, 2\}\}$ . Por el Lema (4.2), 1, sólo uno de  $\{0, 1\}$  o  $\{0, 2\}$  puede ser elemento de  $A$ , de manera que  $A = \{\{0, 1\}\}$  o  $A = \{\{0, 2\}\}$ .*

*En conclusión,  $c(\varphi) = \{\varphi, 1 - \varphi, \varphi_{\{0,1\}}, 1 - \varphi_{\{0,1\}}, \varphi_{\{0,2\}}, 1 - \varphi_{\{0,2\}}\}$  tiene 6 elementos.*

Extendemos el argumento usado en el Ejemplo (4.3) a uno algo más general para demostrar el siguiente hecho:

**Proposición 4.4.** *Para todo  $m > 1$ , existe una coloración  $\varphi$  sobre  $\mathbb{N}$  tal que  $c(\varphi)$  tiene exactamente  $2(m + 1)$  elementos.*

*Demostración.* Sea  $m > 1$ . Defina la siguiente coloración  $\varphi$  sobre  $\mathbb{N}$  por

$$\begin{aligned} \varphi\{0, 1\} &= \varphi\{0, k\} \text{ para todo } k \geq m \\ \varphi\{k_1, k_2\} &= 1 - \varphi\{0, 1\} \text{ para todos } k_1, k_2 \in \{1, \dots, m\} \\ \varphi\{0, k\} &= 1 - \varphi\{0, 1\} \text{ para todo } k > m, \\ \varphi\{k_1, k_2\} &= \varphi\{0, 1\} \text{ en cualquier otro caso.} \end{aligned}$$

Observe que el Ejemplo 4.3 se puede obtener colocando  $m = 2$ . La siguiente figura ilustra la coloración definida con  $m = 4$ . Todas las aristas omitidas en el dibujo, en  $\{1, 2, \dots\}^{[2]}$ , son de color negro.

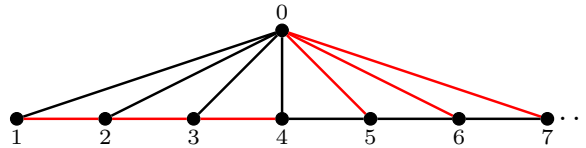


Figura 17. Coloración con un número finito (par) arbitrario  $\geq 4$  de reconstrucciones.

La lista de homogéneos de la coloración definida es:

$$\text{hom}(\varphi) = \mathbb{N}^{[2]} \cup \mathcal{P}(\{1, \dots, m\}) \cup \left( \bigcup_{i=1}^m \mathcal{P}(\{i, m+1, m+2, \dots\}) \right).$$

Las aristas  $\{0, 1\}, \{0, 2\}, \dots, \{0, m\}$  son todas parejas críticas de  $\varphi$ . Luego,

$$\varphi\{0,1\}, \varphi\{0,2\}, \dots, \varphi\{0,m\}$$

son todas reconstrucciones de  $\varphi$ , por el Teorema (2.11). De hecho, demostraremos que

$$c(\varphi) = \{\varphi, 1 - \varphi, \varphi\{0,1\}, 1 - \varphi\{0,1\}, \dots, \varphi\{0,m\}, 1 - \varphi\{0,m\}\}. \quad (8)$$

Sea  $A$  que induce una reconstrucción de  $\varphi$ . De nuevo,  $\varphi \upharpoonright \mathbb{N} \setminus 1^{[2]}$  es reconstruible

por la Proposición 2.9. Una vez más, por la Proposición 2.5, vamos a suponer que  $\mathbb{N} \setminus 1^{[2]} \cap A = \emptyset$ .

Suponga que existe un  $k > m$  tal que  $\{0, k\} \in A$ . Esto implica que para todo  $j \geq m$ , se satisface  $\varphi_A\{0, k\} = \varphi_A\{j, k\}$ , y el Lema (4.2), 1 garantiza que para todo  $j \geq m$  salvo (a lo más) uno, se cumple que  $\{0, j\} \notin A$ . En ese caso, se tiene que  $\{0, j, k\} \in \text{hom}(\varphi)$  y encontramos una contradicción. Concluimos que  $\{0, k\} \notin A$  para todo  $k > m$ .

Hemos demostrado que  $A \subseteq \{\{0, 1\}, \dots, \{0, m\}\}$ , y además, el Lema (4.2), 1, garantiza que  $|A| = 1$ . Entonces las reconstrucciones de  $\varphi$  para  $\varphi_A$  son exactamente aquellas coloraciones tal que  $A = \{\{0, j\}\}$  para  $j \in H_1$ . Así, que hemos demostrado la identidad de la Ecuación (8), y se concluye de esto que  $|c(L)| = 2(m + 1)$ .  $\square$

En vista de la Proposición (4.4) y el hecho que  $|c(\varphi)| = 2 \iff \varphi \in \mathcal{R}$  para toda coloración sobre  $\mathbb{N}$ , cabe preguntar si hay coloraciones que satisfagan  $|c(\varphi)| = 4$ . Hemos requerido otro tipo de construcción para demostrar que esto es cierto. Afortunadamente, el estudio de los ciclos críticos permite dar un ejemplo relativamente sencillo.

**Ejemplo 4.5.** Defina la siguiente coloración  $\varphi$  sobre  $\mathbb{N}$  por

$$\begin{aligned} \varphi\{0, 2\} &= \varphi\{0, 1\} = \varphi\{1, 3\} = 1 - \varphi\{1, 2\} = 1 - \varphi\{0, 3\} = 1 - \varphi\{2, 3\}, \\ \varphi\{0, n\} &= \varphi\{1, n\} = 1 - \varphi\{2, n\} = 1 - \varphi\{3, n\} = 1 - \varphi\{0, 1\} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \setminus 4, \\ \varphi\{m, n\} &= \varphi\{0, 1\} \text{ en cualquier otro caso.} \end{aligned} \tag{9}$$

La coloración  $\varphi$  definida en la Ecuación 9 tiene a  $A = \{\{0, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 3\}, \{3, 0\}\}$  como ciclo crítico y a  $\mathbb{N} \setminus 4 \in$  como conjunto homogéneo.

La figura abajo ilustra la coloración definida,

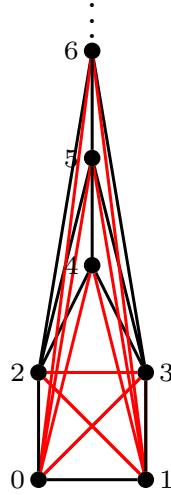


Figura 18. Coloración con exactamente 2 reconstrucciones.

La figura anterior muestra una coloración  $\varphi$  que satisface las Ecuación (9). Se tiene que

$$\text{hom}(\varphi) = \mathbb{N}^{[\leq 2]} \cup \mathcal{P}(\{2, 4, 5, \dots\}) \cup \mathcal{P}(\{3, 4, 5, \dots\}).$$

La clase de reconstrucciones  $c(\varphi)$  tiene 4 elementos, como demostraremos.

Defina  $A = \{\{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}\}$ . Demostraremos que

$$c(\varphi) = \{\varphi, 1 - \varphi, \varphi_A, 1 - \varphi_A\}.$$

Primero, observe que por la definición de la coloración  $\varphi$ ,  $A$  es un ciclo crítico de  $\varphi$ . La Proposición (2.15) garantiza que  $\varphi_A$  es, en efecto, una reconstrucción no trivial de  $\varphi$ . Entonces

$$c(\varphi) \supseteq \{\varphi, 1 - \varphi, \varphi_A, 1 - \varphi_A\}$$

Ahora mostraremos que  $c(\varphi)$  tiene exactamente los 4 elementos ya conocidos.

Note que por la Proposición (2.9) se tiene  $\varphi \upharpoonright \mathbb{N} \setminus 2^{[2]}$  es reconstruible. Sea  $A'$  un conjunto de aristas que induce una reconstrucción no trivial de  $\varphi$ , queremos demostrar que  $A' = A$  o  $A' = \mathbb{N}^{[2]} \setminus A$ . Entonces vamos a suponer, por la Proposición

(2.5) que  $A' \cap \mathbb{N} \setminus 2^{[2]} = \emptyset$ . El Lema (4.2), 2 nos asegura que  $\{0, 1\}$  debe tener el mismo color que el homogéneo  $\{2, 3, \dots\}$ , luego  $\{0, 1\} \notin A'$ .

Ahora veamos que  $\{0, m\}, \{1, m\} \notin A'$  para todo  $m > 3$ . Suponga, sin pérdida de generalidad, que  $\{0, m\} \in A'$ , entonces por Lema (2.6), 2,  $\{0, 2\} \in A'$ , y aplicando de nuevo el mismo lema, se concluye que  $\{0, 3\} \in A'$ . Entonces  $\{0, 3, m\} \in \text{hom}(\varphi'_A)$ , y esto contradice que  $A'$  induce una reconstrucción de  $\varphi$ .

Hemos demostrado que  $A' \subseteq \{\{0, 2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{0, 3\}\}$ . Tratamos los siguientes dos casos:

**Caso 1.**  $\{0, 2\} \notin A'$ . Entonces  $\{1, 2\} \notin A'$ , por Lema (2.6), 1. Esto a su vez implica (por el mismo lema) que  $\{1, 3\} \notin A'$ , y una vez más, esto quiere decir que  $\{0, 3\} \notin A'$ . En este caso, obtenemos que  $A' = \emptyset$ , contradiciendo que  $A'$  induce una reconstrucción no trivial.

**Caso 2.** Aplicando reiteradamente el Lema (2.6), 1,

$$\{0, 2\} \in A' \implies \{0, 3\} \in A' \implies \{1, 3\} \in A' \implies \{1, 2\} \in A'.$$

$$\text{Luego, } A' = \{\{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}\} = A.$$

Hemos demostrado que

$$c(\varphi) = \{\varphi, 1 - \varphi, \varphi_A, 1 - \varphi_A\}.$$

Así,  $|c(\varphi)| = 4$ .

Si resumimos los resultados de la Proposición 4.4 y el Ejemplo 4.5 en un sólo enunciado tenemos que

**Proposición 4.6.** Dado  $m \in \mathbb{N}$ . Existe una coloración  $\varphi$  sobre  $\mathbb{N}$  tal que  $c(\varphi)$  tiene exactamente  $2(m + 1)$  elementos.

Note que el resultado anterior incluye también el caso  $m = 0$ , es decir,  $|c(\varphi)| = 2$  y  $\varphi \in \mathcal{R}$ .

El Ejemplo 4.5 da una coloración tal que el número de sus reconstrucciones es exactamente 4. Dicha coloración tiene un ciclo crítico. Las coloraciones usadas en la demostración de la Proposición 4.4, por su parte, tienen únicamente parejas críticas. Surge entonces la pregunta de si existe una coloración  $\varphi$  sobre  $\mathbb{N}$  tal que  $|c(\varphi)| = 4$  y tenga una única pareja crítica.

**Pregunta 4.7.** *¿Existe una coloración  $\varphi$  sobre  $\mathbb{N}$  que tiene una pareja crítica y  $|c(\varphi)| = 4$ ?*

Continuamos extendiendo el resultado (4.6) para que ahora incluya la existencia de coloraciones que tiene clases de reconstrucción infinitas. En particular, veremos que existen coloraciones  $\varphi$  tales que  $c(\varphi)$  es numerable infinito o  $c(\varphi)$  es perfecto, y por lo tanto  $|c(\varphi)| = 2^{\aleph_0}$ . Comenzamos demostrando que

**Proposición 4.8.** *Existe una coloración  $\varphi$  sobre  $\mathbb{N}$  tal que  $c(\varphi)$  es infinito numerable.*

*Demostración.* Sea  $\varphi$  la coloración sobre  $\mathbb{N}$  definida por

$$\begin{aligned} \varphi\{0, k\} &= \varphi\{0, 1\} \text{ para todo } k > 1, \\ \varphi\{k_1, k_2\} &= 1 - \varphi\{0, 1\} \text{ para todos } k_1, k_2 > 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Ilustramos la coloración definida en la Ecuación (10).

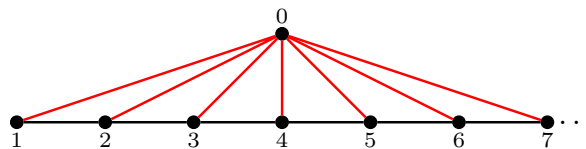


Figura 19. Coloración con clase de reconstrucción numerable.

La lista de homogéneos explícita de esta coloración es  $\text{hom}(\varphi) = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, \dots\})$ .

Observamos que para todo  $n > 0$ ,  $\{0, n\}$  es par crítico de  $\varphi$ .

Considere las coloraciones  $\varphi_{\{0,1\}}, \varphi_{\{0,2\}}, \dots, \varphi_{\{0,k\}}, \dots$ . Estas coloraciones son reconstrucciones no triviales de  $\varphi$  pues, como ya se mencionó, las aristas incidentes que son incidentes con  $0, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \dots, \{0, k\}, \dots$  son todas parejas críticas de  $\varphi$ . Esto es,  $\varphi_{\{0,k\}} \in c(\varphi)$  para todo  $k > 0$ .

Sea  $A$  un conjunto de aristas que induce una reconstrucción no trivial de  $\varphi$ . Supongamos que  $\mathbb{N} \setminus 1^{[2]} \cap A = \emptyset$ . Por el Lema (4.2), 1, dado que  $\{0, k_1, k_2\} \notin \text{hom}(\psi)$  para todo  $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \setminus 1$ , tenemos que  $|\{y \in \mathbb{N} \setminus 1 : \psi\{0, y\} = \psi(\mathbb{N}^{[2]})\}| \leq 1$ . Esto quiere decir que sólo una de las aristas que incide con  $0$  puede tener el mismo color que el conjunto homogéneo  $\mathbb{N} \setminus 1$ . En otras palabras, solo una de las aristas  $\{0, k\}$  con  $k > 0$  puede ser elemento de  $A$ , esto es,  $|A| = 1$ .

Entonces

$$c(\varphi) = \{\varphi, 1 - \varphi\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\varphi_{\{0,k\}}, 1 - \varphi_{\{0,k\}}\},$$

así que  $|c(\varphi)| = \aleph_0$ . □

Finalmente, para terminar de responder la pregunta sobre el tamaño de  $c(\varphi)$ . Mostramos que

**Proposición 4.9.** *Existe  $\varphi$  sobre  $\mathbb{N}$  tal que  $c(\varphi)$  es un conjunto perfecto.*

*Demostración.* Sea  $\varphi$  sobre  $\mathbb{N}$  definida por

$$\varphi\{m_1, n_1\} = \varphi\{m_2, n_2\} \iff m_1 + n_1 \equiv m_2 + n_2 \pmod{2} \quad (11)$$

Entonces la coloración  $\varphi$  la podemos ilustrar en la siguiente manera

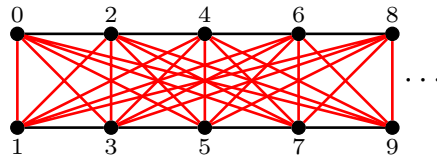


Figura 20. Coloración con clase de reconstrucción perfecta, y por lo tanto no numerable.

Notamos que

$$\text{hom}(\varphi) = \mathbb{N}^{[2]} \cup \mathcal{P}(\{0, 2, 4, \dots\}) \cup \mathcal{P}(\{1, 3, 5, \dots\}).$$

En este caso es posible obtener reconstrucciones cambiando arbitrariamente una colección numerable de parejas disjuntas de la forma  $\{m, n\}$  donde  $m + n \equiv 1 \pmod{2}$ .

Considere  $A \subseteq \{\{m, n\} : m + n \equiv 1 \pmod{2}\}$  tal que sus elementos son dos a dos disjuntos (un conjunto de aristas no adyacentes dos a dos). Note que todo  $A$  con estas características induce una coloración no trivial de  $\varphi$  denotada por  $\varphi_A$ . Además, estos conjuntos son los únicos que inducen reconstrucciones de  $\varphi$  (se puede argumentar como en los resultados anteriores, usando la Proposición (2.5) y el Lema (2.6)).

Suponga que  $A$  es un conjunto infinito de aristas que cumple lo especificado arriba. Entonces  $A \upharpoonright n^{[2]}$  también induce una reconstrucción de  $\varphi$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces tenemos que  $(\varphi_{A \upharpoonright n^{[2]}})_n$  es una sucesión de elementos diferentes (tomando una subsucesión si es necesario) de  $c(\varphi)$  tal que  $\varphi_{A \upharpoonright n^{[2]}} \rightarrow \varphi_A$ .

Si en cambio  $A$  es finito, entonces fije  $m = \max \cup A$ , esto es,  $m$  es el número natural más grande tal que una arista incidente con  $m$  es elemento de  $A$ . Entonces considere la sucesión de conjuntos  $(A_n) = (A \cup \mathbb{N}^2 \setminus n^{[2]})_{n=m}^{\infty}$  y note que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A \cup \mathbb{N}^2 \setminus n^{[2]}) = A \cup \emptyset = A.$$

Luego, podemos definir  $(\varphi_{A_n})_{n=m}^{\infty}$  y se verifica que  $\varphi_{A_n} \rightarrow \varphi_A$ .

Hemos demostrado que cualquier elemento  $\varphi_A$  de  $c(\varphi)$  es el límite de una sucesión infinita de elementos de  $c(\varphi)$ . Entonces  $c(\varphi)$  es cerrado (lo que se sabe de la demostración de la Proposición 2.20) y no tiene puntos aislados.

Note que  $c(\varphi)$  hereda las propiedades de ser métrico, compacto y cero dimensional

de  $2^{\mathbb{N}^{[2]}}$  y por lo demostrado, no posee puntos aislados. El Teorema de Brouwer permite concluir que  $c(\varphi)$  es homeomorfo al espacio de Cantor. En particular,  $c(\varphi)$  tiene tamaño del continuo.  $\square$

Sea  $\varphi$  sobre  $\mathbb{N}$ . Puesto que  $c(\varphi)$  es un subconjunto cerrado de  $2^{\mathbb{N}^{[2]}}$ , un espacio Polaco, es conocido que

$$|c(\varphi)| \leq \aleph_0 \vee |c(\varphi)| = \mathfrak{c}.$$

Los resultados de esta sección han demostrado además que

**Proposición 4.10.** *Si  $\kappa$  es un cardinal tal que*

$$\kappa \leq \aleph_0 \quad \vee \quad \kappa = \mathfrak{c},$$

*entonces existe una coloración sobre  $\mathbb{N}$  tal que  $|c(\varphi)| = \kappa$ .*

Cuando  $c(\varphi)$  es infinito entonces tiene al menos un punto límite. El caso extremo, en el que  $c(\varphi)$  tiene un único punto límite sucede en la demostración de la Proposición (4.8). Por otra parte, para la coloración usada en la demostración la Proposición (11), todo punto es límite de la clase de reconstrucción.

Una herramienta útil para el estudio de los conjuntos de puntos límites es el rango de Cantor-Bendixson que definimos a continuación. La derivada de Cantor-Bendixson es la operación que envía a un conjunto cerrado en su conjunto derivado (conjunto de puntos límite)  $X \mapsto X'$ . La  $\alpha$ -ésima derivada de Cantor-Bendixson se define por recursión transfinita:

$$\begin{aligned} X^0 &= X, \\ X^{\alpha+1} &= (X^\alpha)', \\ X^\lambda &= \bigcap_{\alpha < \lambda} X^\alpha, \text{ para ordinales límite } \lambda. \end{aligned}$$

El rango de Cantor-Bendixson, denotado por  $r_{CB}(X)$  es el primer ordinal  $\alpha$  tal que  $(X^\alpha)' = X^\alpha$ .

Si  $\varphi$  es la coloración en la Figura (19), entonces  $r_{CB}(c(\varphi)) = 2$ . Si  $\varphi$  es la coloración en la Figura (20). Investigaciones preliminares muestran que existen coloraciones  $\varphi$  tal que  $r_{CB}(c(\varphi)) = \alpha$  para  $1 < \alpha < \omega$ . Esto da lugar a preguntarse por los ordinales infinitos, y en particular nos preguntamos

**Pregunta 4.11.** *¿Existe una coloración  $\varphi$  sobre  $\mathbb{N}$  tal que  $r_{CB}(c(\varphi)) = \omega$ ?*

## 5. TRABAJO FUTURO

En Capítulo 4 se da una dirección en la cual se puede extender el estudio del problema tratado en este trabajo.

Por otro lado, queda trabajo por realizar en relación al resultado principal de este trabajo, el Teorema (3.15). En particular, queda por definir el caso en que el conjunto que induce una reconstrucción mínima es infinito. El autor sospecha que la solución es factible a partir de técnicas similares a las acá desarrolladas. Sin embargo, las limitaciones de tiempo no permitieron desarrollar más el trabajo, así que se espera pronto aclarar estos puntos para escribir un artículo para publicación, basado en este trabajo.

## 6. CONCLUSIONES

A partir de los desarrollos presentados y los resultados obtenidos en el presente trabajo de grado, es posible enunciar la siguiente conclusión general:

- Se logró encontrar el ejemplo buscado de una coloración reconstruibles tal que no posee segmentos iniciales reconstruibles (Ver Ejemplo (2.17)). Esto dio lugar a definir el concepto de coloración fuertemente reconstruible, lo cual se hizo en la Definición (2.16). Este nuevo concepto aún no ha sido estudiado en detalle.
- Aunque no se ha establecido una caracterización del concepto de coloración reconstruible, sí se ha establecido un caso importante, aquél donde el conjunto que induce una reconstrucción mínima es finito. La caracterización completa parece ser alcanzable por los mismos métodos, y esperamos desarrollar la solución completa al problema.
- Estudiar las clases de reconstrucción de una coloración (Ver el Capítulo 4), puede brindarnos mayor información sobre las coloraciones mismas por medio del estudio de la estructura interna de estas clases usando técnicas de la Topología y la Teoría Descriptiva de Conjuntos.

## BIBLIOGRAFÍA

- Bondy, J. A. “A graph reconstructor’s manual”. En: *Surveys in combinatorics, 1991 (Guildford, 1991)*. Vol. 166. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, págs. 221-252 (vid. págs. 14, 72).
- Bondy, J. A. y U. S. R. Murty. *Graph theory*. Vol. 244. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2008, págs. xii+651. DOI: 10.1007/978-1-84628-970-5 (vid. pág. 72).
- Grebík, Jan y Carlos Uzcátegui. “Bases and Borel selectors for tall families”. En: *The Journal of Symbolic Logic* 84.1 (2019), 359–375. DOI: 10.1017/jsl.2018.66 (vid. pág. 13).
- Kechris, Alexander S. *Classical descriptive set theory*. Vol. 156. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1995, págs. xviii+402. DOI: 10.1007/978-1-4612-4190-4 (vid. pág. 39).
- Piña, Claribet y Carlos Uzcátegui. “Reconstruction of a Coloring from its Homogeneous Sets”. En: *Graphs and Combinatorics* 39 (2022) (vid. págs. 9, 11, 14, 17, 18, 24, 25, 27, 34-37, 39, 52).
- Soifer, A. *Ramsey Theory: Yesterday, Today, and Tomorrow*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, 2010 (vid. págs. 14, 69).

## ANEXOS

### Anexo A. El Teorema de Ramsey

El Teorema de Ramsey es el resultado fundador de toda un área de las matemáticas que es así mismo conocida como Teoría de Ramsey. Esta teoría se puede considerar dividida en la Teoría de Ramsey Infinita y la Teoría de Ramsey Finita, según los objetos que se estudien. En esta sección se quiere dar una breve introducción al Teorema de Ramsey Infinito. Así podremos ubicar al problema de reconstrucción de una coloración a partir de sus conjuntos homogéneos en un contexto matemático e histórico.

**Definición 6.1.** Dado un conjunto  $X$  y un número positivo  $r$ , una  $r$ -coloración de  $X$  es una función  $\varphi : X \rightarrow r$ .

Este concepto coincide con el concepto de partición finita ( $r$  partes) del conjunto  $X$ . Si  $\{A_i\}_{i=0}^r$  es una partición de  $X$ , entonces se puede obtener una coloración  $\varphi$  tal que

$$\varphi(x) = i \iff x \in A_i.$$

**Definición 6.2.** Dado un conjunto  $X$  y números positivos  $r, k$ , una  $r$ -coloración de las  $k$ -combinaciones (estos son los subconjuntos de  $k$  elementos) de  $X$  es una función  $\varphi : X^{[k]} \rightarrow r$ . Si el  $k$  es claro del contexto diremos que  $\varphi$  es una  $r$ -coloración sobre  $X$ .

**Definición 6.3.** Dado un conjunto  $X$  y  $\varphi : X^{[k]} \rightarrow r$  se define

$$\text{hom}(\varphi) = \{Y \subseteq X : Y \subseteq \varphi^{-1}(i) \text{ para algún } i \in r.\}$$

Los elementos de  $\text{hom}(\varphi)$  son llamados conjuntos homogéneos (o monocromáticos) de  $\varphi$ .

Según Soifer, *Ramsey Theory: Yesterday, Today, and Tomorrow*, en 1953 el matemático estadounidense Frank Harary sugirió el siguiente problema, del folclor matemático, para la competición matemática W. L. Putnam.

**Ejemplo 6.4.** *Demuestre que si se usan dos colores para colorear las aristas de un grafo completo  $K_6$  entonces existe un triángulo  $K_3$  monocromático, sin importar cómo se hayan coloreado las aristas.*

*Demostración.* Sea  $v_0$  un vértice de  $K_6$ , cuyas aristas son de color rojo o negro. Entonces  $v_0$  es incidente con al menos tres vértices de un mismo color, digamos que  $v_1, v_2, v_3$  se conectan a  $v_0$  por aristas rojas. Si  $v_1$  y  $v_2$  (o cualquier otra combinación de  $v_1, v_2, v_3$ ) se conectan por una arista roja entonces hay un triángulo monocromático. De lo contrario,  $v_1, v_2, v_3$  están todos conectados por aristas negras.  $\square$

*Otra forma de decir lo que se ha mostrado allí es que*

*Dado  $X$  un conjunto de tamaño 6 y una 2-coloración  $\varphi : X^{[2]} \rightarrow 2$  de las parejas de  $X$  entonces existen tres aristas que forman un triángulo monocromático, o tres vértices que forman un homogéneo de  $\varphi$ ,*

$$\{a, b, c\} \text{ tal que } \varphi\{a, b\} = \varphi\{a, c\} = \varphi\{b, c\}$$

$$\text{o } \{a, b, c\} \in \text{hom}(\varphi).$$

El ejemplo anterior ilustra el prototipo de problema con el que lidia el Teorema de Ramsey. El Teorema de Ramsey Finito afirma que

**Teorema 6.5.** *Dados números positivos  $k, m, r$ , existe  $n$  tal que para todo  $X$  con  $|X| = n(k, m, r)$  y toda  $r$ -coloración  $\varphi : X^{[k]} \rightarrow r$  existe un  $Y \in \text{hom}(\varphi)$  tal que  $|Y| = m$ .*

A raíz de este resultado surgió el problema de encontrar el número más pequeño  $n$  que satisface el Teorema de Ramsey. Para  $k = 2, r = 2$  se denota  $R(m, m')$  al nú-

mero más pequeño tal que toda 2-coloración de parejas de  $X$  con  $|X| = n$  posee un homogéneo de color rojo de tamaño  $m$ , o un homogéneo de color negro de tamaño  $m'$ . Cuando  $m' = m$  se escribe  $R(m, m') = R(m)$ . El caso particular del Ejemplo 6.4 corresponde con una demostración de que  $R(3, 3) = 6$ . Encontrar números de Ramsey es un problema muy difícil por lo que se ha avanzado lentamente en su descubrimiento. El comportamiento asintótico del problema ha probado ser una dificultad en la búsqueda de estos números. Los números de Ramsey crecen tan rápido que los algoritmos de fuerza bruta son demasiado ineficientes, esto impide verificar computacionalmente los valores  $R(m, m')$ , excepto para los casos más pequeños. En lo que respecta a este trabajo estamos más interesados en el caso en  $X$  es un conjunto infinito.

**Teorema 6.6.** *Sean  $k, r$  enteros positivos. Para todo  $X$  infinito y toda  $r$ -coloración  $\varphi : X^{[k]} \rightarrow r$  existe un subconjunto infinito de  $X$ ,  $Y$  tal que  $Y \in \text{hom}(\varphi)$ .*

*Demostración.* Supondremos que  $X = \mathbb{N}$ .

Por inducción sobre  $k$ . Para  $k = 1$  tome  $Y = \varphi^{-1}(i)$  donde  $i \in r$  es tal que  $Y$  es infinito. Tal  $i$  existe por el Principio del Casillero.]

Escribimos explícitamente la demostración del caso  $k = 2$  para referencia posterior.  
**k = 2.**

Definimos recursivamente sucesiones  $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $\{i_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ .

Sea  $a_0 = \min(X)$ , por el Principio del Casillero existe  $i_0 \in r$  tal que hay infinitos  $x \in X \setminus \{a_0\}$  tales que  $\varphi\{a_0, x\} = i_0$ . Defina  $B_0 = \{x \in X \setminus \{a_0\} : \varphi\{a_0, x\} = i_0\}$ .  $B_0$  es un subconjunto infinito de  $X$ .

Suponga que  $a_j, i_j, B_j$  han sido definidos para un  $j \geq 0$ . Tomamos el más pequeño de los los elementos en  $B_j$ ,  $a_{j+1} = \min(B_j)$ . Por el Principio del Casillero existe  $i_{j+1}$  tal que  $\varphi\{a_{j+1}, x\} = i_{j+1}$  para infinitos  $x \in B_j$ . El conjunto

$$B_{j+1} = \{x \in B_j \setminus \{a_{j+1}\} : \varphi\{a_{j+1}, x\} = i_{j+1}\},$$

es infinito. Esto termina la construcción de las sucesiones  $\{a_j\}, \{i_j\}, \{B_j\}$ .

Dado que  $\{i_j\}$  es infinito, uno de los  $r$  colores se debe repetir infinitas veces, digamos que existe  $J \subseteq \mathbb{N}$  infinito tal que para todo  $j \in J$  se cumple que  $i_j = i \in r$ . Para todos  $j_1, j_2 \in J$  se tiene  $\varphi\{a_{j_1}, a_{j_2}\} = i$ , y de esta manera  $\{a_j\}_{j \in J} (= Y)$  es un homogéneo de  $\varphi$ .

$k \geq 3$ .

Sea  $a_0 = \text{mín } x$ . Considere la coloración  $\psi : X \setminus \{a_0\}^{[k-1]} \rightarrow 2$  definida por  $\psi\{x_1, \dots, x_{k-1}\} = \varphi\{a_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$  y por hipótesis de inducción  $\psi$  tiene un homogéneo infinito. Es decir, existen infinitos  $\{x_1, \dots, x_{k-1}\} \in X \setminus \{a_0\}^{[k-1]}$  tales que  $\varphi\{a_0, x_1, \dots, x_{k-1}\} = i_0$  para algún  $i_0 \in r$ . Defina

$$B_0 = \{\{x_1, \dots, x_{k-1}\} \in X \setminus \{a_0\}^{[k-1]} : \varphi\{a_0, x_1, \dots, x_{k-1}\} = i_0\}.$$

Suponga que se han construido  $a_j, i_j$  y  $B_j$  para  $j \geq 0$ . Sea  $a_{j+1} = \text{mín } B_j$  y defina  $\psi : B_j \setminus \{a_{j+1}\}^{[k-1]} \rightarrow 2$  definida por  $\psi\{x_1, \dots, x_{k-1}\} = \varphi\{a_{j+1}, x_1, \dots, x_{k-1}\}$ . Por hipótesis de inducción, existe  $i_{j+1} \in r$  tal que  $\psi$  tiene un conjunto homogéneo infinito de color  $i_{j+1}$ . Luego, el siguiente conjunto es infinito

$$B_{j+1} = \{\{x_1, \dots, x_k\} \in B_j \setminus B_j \cup \{a_{j+1}\}^{[k-1]} : \varphi\{a_{j+1}, x_1, \dots, x_{k-1}\} = i_{j+1}\}.$$

De esta forma se termina la construcción de las sucesiones  $\{a_j\}, \{i_j\}, \{B_j\}$ . Se tiene que existe un  $i \in r$  y un conjunto  $J \subseteq \mathbb{N}$  infinito tal que si  $j \in J$  entonces  $i_j = i$ . Sean  $j_1 < j_2 < \dots < j_k \in J$  entonces  $\varphi\{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_k}\} = i$  puesto que  $a_{j_2}, \dots, a_{j_k} \in B_{j_1}$ . Hemos demostrado que  $\varphi$  es constante de valor  $i$  sobre las aristas del conjunto  $Y = \{a_j\}_{j \in J}$ . En otras palabras,  $Y$  es un homogéneo infinito de  $\varphi$ .  $\square$

## Anexo B. El Problema Clásico de Reconstrucción de Grafos

El objetivo de esta sección es de dar un contexto matemático e histórico al problema de reconstrucción de coloraciones que se trabaja en esta tesis. Más allá de las

conexiones que tienen algunos conceptos de la Teoría de Ramsey o de la Teoría Descriptiva de Conjuntos, el trabajo de esta tesis tiene un “sabor similar” a algunos problemas de la teoría de grafos.

El autor no ha podido esclarecer esta relación con la teoría de grafos en el año que lleva trabajando en el tema que concierne a este proyecto de investigación. En retrospectiva, parece ser que sería bastante productivo relacionar algunos de los resultados encontrados con resultados de la teoría de grafos. Esta es una importante línea de trabajo a futuro, y por eso se cree importante incluir aquí estas observaciones así como lo mínimo para entender de qué se tratan las Conjeturas de Reconstrucción de Grafos, que son problemas abiertos de hace medio siglo.

Lo que se expone a continuación fue tomado de la sección 2.7 del libro *Graph Theory* J. A. Bondy y U. S. R. Murty. *Graph theory*. Vol. 244. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2008, págs. xii+651. DOI: 10.1007/978-1-84628-970-5, J.A. Bondy quien ha escrito extensivamente sobre el Problema de Reconstrucción de Grafos en Bondy, “A graph reconstructor’s manual”.

Dos grafos  $G$  y  $H$  son *isomorfos*, escrito como  $G \cong H$ , si existen biyecciones  $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$  y  $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$  tales que  $\phi(e) = \theta(u)\theta(v)$ ; este par de funciones se llama un *isomorfismo* entre  $G$  y  $H$ .

Dado un grafo  $G$ , una manera muy natural de encontrar subgrafos de  $G$  es eliminar uno de los vértices, digamos  $v$ , y llamar al subgrafo resultante  $G - v$ . Estos subgrafos de  $G$  son llamados *subgrafo de vértice eliminado*.

Dos grafos  $G$  y  $H$  sobre el mismo conjunto de vértices son llamados hipomorfos si para todo  $v \in V$ , sus subgrafos de vértice eliminado  $G - v$  y  $H - v$  son isomorfos. Esto no implica, necesariamente, que  $G$  y  $H$  son isomorfos. Por ejemplo, los grafos  $2K_1$  y  $K_2$ , donde  $K_n$  es el grafo completo en  $n$  vértices, no son isomorfos pero son claramente hipomorfos. Pues todos sus subgrafos de vértice eliminado consisten solamente de un vértice. Sin embargo, estos dos grafos son la única pareja conocida

de grafos finitos hipomorfos que no son isomorfos.

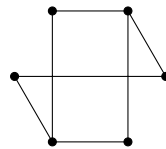
Esta conjetura fue reformulada por Harary, en 1964 de la siguiente manera.

**Definición 6.7.** Una *reconstrucción* de un grafo  $G$  es cualquier grafo hipomorfo a  $G$ . Decimos que un grafo  $G$  es *reconstruible* si toda reconstrucción de  $G$  es isomorfa a  $G$ , en otras palabras, si  $G$  puede ‘reconstruirse’ salvo isomorfismo a partir de sus subgrafos de vértice eliminado.

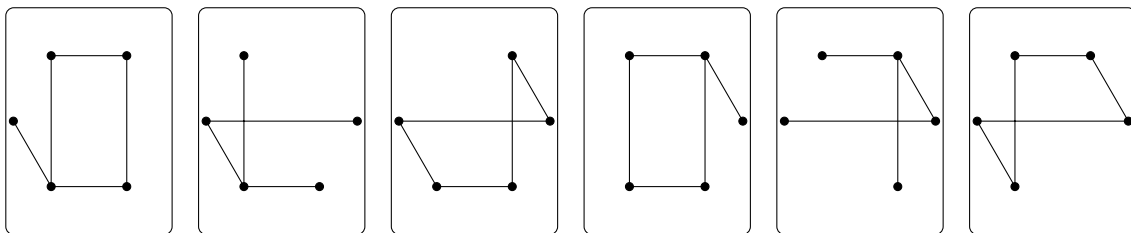
**Conjetura de la Reconstrucción de Grafos I:** Todo grafo finito sobre al menos tres vértices es reconstruible.

Informalmente, uno puede pensar en los subgrafos de vértice eliminado, sin etiquetas, como si fueran ilustrados en cartas (tarjetas), uno por cada carta. El problema de reconstruir un grafo es entonces aquel de determinar el grafo a partir de su *mazo* de cartas.

Considere el siguiente ejemplo de reconstrucción de un grafo en 6 vértices. Sea  $G$  el siguiente grafo:



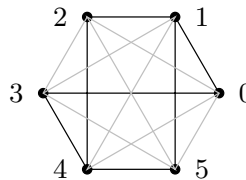
Entonces el mazo de los subgrafos de vértice eliminado de  $G$  es



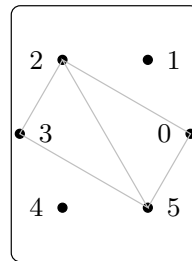
Este trabajo se trata del Problema de Reconstrucción de una Coloración a partir de sus Conjuntos Homogéneos. Una comparación de este con el problema de recons-

trucción de grafos clásico, puede darnos idea de lo que tienen en común y de lo que los diferencia.

Sea  $G$  el grafo del ejemplo anterior y considere la coloración “correspondiente” a  $G$



Nuestra tarea entonces es reconstruir dicha coloración a partir de



Como ya se mencionó, la relación exacta entre estos dos problemas no se ha esclarecido. Hacemos énfasis en las diferencias:

En el Problema de Reconstrucción de Grafos el etiquetamiento de los vértices es irrelevante, grafos isomorfos se consideran el mismo objeto. Entonces el Problema de Reconstrucción de grafos se asemeja al armado de un rompecabezas, donde los subgrafos de vértice eliminado son piezas que deben encajar unas con otra para formar el grafo original.

Contratando con el Problema de Reconstrucción de una Coloración a partir de sus conjuntos homogéneos. Para este último sí se tiene en cuenta el etiquetamiento de los vértices, ya que estos determinan la colección de conjuntos homogéneos. En este caso el problema se puede entender así: Dada  $\varphi$  una 2-coloración sobre  $X$  numerable (o un grafo con  $X$  como conjunto de vértices) y considere las “transformaciones” (agregar o quitar aristas del grafo) que dejan invariante a  $\text{hom}(\varphi)$  (que en

términos de grafos sería la unión del conjunto de cliques del grafo y el conjunto de conjuntos independientes del grafo).

En retrospectiva, el autor cree que puede ser fructífero para esta investigación consultar alguna literatura sobre teoría de grafos, particularmente relacionada con los conceptos de cliques, conjuntos independientes y grafos libres de triángulos. También, dado el amplio uso de familias de conjuntos en esta tesis, creemos que la literatura de hipergrafos también puede ser útil. Es posible que hayan problemas similares o relacionados en esa área de la matemática, teniendo en cuenta también que las coloraciones (con dimensión arbitraria) coinciden con hipergrafos uniformes. Por último, mencionamos que existe un análogo para aristas de la Conjetura de la Reconstrucción que fue propuesto por Harary, en 1964. Un grafo es *arista-reconstruible* si puede reconstruirse, salvo isomorfismo, de sus subgrafos de arista eliminada.

**Conjetura de la Reconstrucción de Grafos II:** Todo grafo simple sobre al menos cuatro aristas es arista-reconstruible.