

**EVALUACIÓN DEL EFECTO DE LA ECUACIÓN DE  
MAGNETIZACIÓN DE MARTSENYUK, RAIKHER Y  
SHLIOMIS SOBRE LAS PREDICCIONES DE FLUJO DE  
LA TEORÍA DE DIFUSIÓN DE MOMENTO ANGULAR  
INTERNO**

**CRISTIAN CAMILO JIMÉNEZ LEIVA**



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE  
TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA, COLOMBIA  
2020**

**EVALUACIÓN DEL EFECTO DE LA ECUACIÓN DE  
MAGNETIZACIÓN DE MARTSENYUK, RAIKHER Y  
SHLIOMIS SOBRE LAS PREDICCIONES DE FLUJO DE  
LA TEORÍA DE DIFUSIÓN DE MOMENTO ANGULAR  
INTERNO**

**CRISTIAN CAMILO JIMÉNEZ LEIVA**

Tesis presentada para optar al título de:

**Doctor en Ingeniería, Área Ingeniería Eléctrica**

Director

Dr. Hermann Raúl Vargas Torres  
Ingeniero Electricista

Co-director

PhD. Rodrigo Correa  
Ingeniero Químico



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE  
TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA, COLOMBIA  
2020**

---

*Gracias a Dios, lo logré. No es que yo sea capaz,  
mucho menos inteligente, es que Dios me dio la fuerza  
y la voluntad para insistir y persistir, hasta lograrlo.  
Gracias a Dios. Gracias a Él.*

***Cristian***

---

## AGRADECIMIENTOS

*Primeramente, expreso mi gratitud al profesor Hermann Raúl Vargas Torres, por su apoyo y acompañamiento constante durante toda mi formación académica. Muchas gracias por estos 11 años, profesor Hermann. De igual manera, al profesor Carlos Rodrigo Correa Cely, quien me enseñó, con su ejemplo, la importancia del trabajo duro y enfocado en la investigación. Gracias infinitas le doy por el acompañamiento y por su empeño para que, de mi parte, siempre diera lo mejor, y no menos. También, al profesor Arlex Chaves Guerrero, quien fue la persona que me confió este tema de investigación y quien, con su amabilidad, gran humildad y paciencia, me enseñó los principios básicos de la Teoría de Difusión de Momento Angular Interno. Este agradecimiento siempre estará conmigo, profesor Arlex. Finalmente, También tengo que expresar mi infinita gratitud al profesor Carlos Rinaldi, quien en Estados Unidos me recibió como un integrante más de su familia en el J. Crayton Pruitt Family Department of Biomedical Engineering en University of Florida. Gracias por darme la oportunidad de entrar en sus laboratorios, en los que, junto con sus enseñanzas, pude aterrizar todos los conceptos necesarios para entender los detalles del modelo ferrohodinámico.*

*Al profesor Javier Enrique Solano Martínez, que, en su rol como coordinador académico de la E<sup>3</sup>T, me brindó una orientación adecuada y precisa en momentos cruciales de este proceso.*

*Al profesor Cesar Antonio Duarte Gualdrón, por esas numerosas charlas académicas, en donde pude aprender lo que es estar apasionado por la ciencia y el conocimiento.*

*Al Director de Escuela de la E<sup>3</sup>T, el profesor José Alejandro Amaya Palacio, quien, con gran sabiduría, me aconsejó en importantes momentos de este camino doctoral y personal. Profesor Amaya, infinitamente agradecido con usted.*

*Al profesor Gabriel Ordoñez, por su gran ejemplo y enseñanza durante mi recorrido académico, desde el pregrado hasta este momento. Qué gran ser humano es usted, profesor.*

*A mis amigos en esta gran experiencia de vida: Gabriel, Jairo, Iván S., José Jorge, Jeisson, María Alejandra, Erik, Iván A. y Jorge. En especial, a nuestro gran amigo Diego Monroy (Q.E.P.D).*

*También, me gustaría reconocer el soporte financiero recibido por el Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación, COLCIENCIAS, Colombia, que hizo posible este trabajo doctoral.*

*Finalmente, quiero expresar mi mayor agradecimiento a la Universidad Industrial de Santander, UIS, por darme la oportunidad de convertirme en un Doctor en Ingeniería. Creo que no existen palabras que puedan expresar lo agradecido que estoy con esta alma máter, por lo mucho que ha hecho e influenciado en mi vida. Siempre orgulloso de ser de la UIS.*

# Tabla de contenido

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>23</b>
<b>1 GENERALIDADES DEL PROYECTO</b>	<b>26</b>
1.1 ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO	26
1.2 MARCO TEÓRICO	27
1.3 ESTADO DEL ARTE	34
1.4 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	47
1.4.1 Hipótesis:	50
1.4.2 Pregunta de investigación:	50
1.5 OBJETIVOS DEL PROYECTO	50
1.5.1 Objetivo general:	50
1.5.2 Objetivos específicos:	50
1.6 METODOLOGÍA	50
<b>2 CANAL CUADRADO DE PLACAS PLANAS Y PARALELAS</b>	<b>54</b>
2.1 INTRODUCCIÓN	54
2.2 SISTEMA DE ECUACIONES HIDRODINÁMICAS	57
2.2.1 Aproximación basada en el número de Reynolds	59
2.3 SISTEMA DE ECUACIONES MAGNÉTICAS	60
2.4 CONDICIONES DE FRONTERA	62
2.4.1 Condiciones de frontera del problema hidrodinámico en paredes del contenedor	62
2.4.2 Condiciones de frontera del problema hidrodinámico en la interfase	62
2.4.3 Condiciones de frontera del problema magnético	64
2.5 DOMINIO UNIDIMENSIONAL	65
2.5.1 Sistema físico de estudio	65
2.5.2 Ecuaciones hidrodinámicas por componentes	65
2.5.3 Condiciones de frontera hidrodinámicas	66
2.5.4 Ecuaciones magnéticas por componentes	66
2.5.5 Solución para $\alpha \ll 1$ y $\tilde{\Omega} \ll 1$	69
2.5.6 Solución para $\alpha \gg 1$ y $\tilde{\Omega} \gg 1$	69
2.5.7 Metodología del algoritmo solución	70
2.5.8 Validación de la solución numérica	71
2.5.9 Evaluación del desempeño numérico de la ecuación Sh-72	72
2.5.10 Implementación de la ecuación MRSh-74	72
2.5.11 Análisis de resultados	77
2.6 DOMINIO BIDIMENSIONAL	81

2.6.1	Ecuaciones hidrodinámicas $\alpha \ll 1$ :	82
2.6.2	Ecuaciones hidrodinámicas $\alpha \gg 1$ :	83
2.6.3	Condiciones de frontera hidrodinámicas:	85
2.6.4	Ecuaciones magnéticas:	86
2.6.5	Validación del algoritmo I:	88
2.6.6	Validación del algoritmo II:	90
2.6.7	Perfiles de velocidad para $\alpha \gg 1$ :	92
2.6.8	Análisis del error:	94
2.6.9	Superficies de velocidad para $\alpha \gg 1$ :	97
2.7	OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES	98
<b>3</b>	<b>GEOMETRÍA CILÍNDRICA</b>	<b>105</b>
3.1	INTRODUCCIÓN	105
3.2	DESCRIPCIÓN FÍSICA DEL SISTEMA	106
3.3	ECUACIONES VECTORIALES GOBERNANTES	106
3.3.1	Ecuaciones del problema hidrodinámico	107
3.3.2	Ecuaciones del problema magnético	107
3.4	ECUACIONES POR COMPONENTES	107
3.4.1	Ecuaciones hidrodinámicas por componentes	108
3.4.2	Condiciones de frontera hidrodinámicas	108
3.4.3	Ecuaciones magnéticas por componentes	108
3.4.4	Condiciones iniciales magnéticas	109
3.4.5	Condiciones de frontera magnéticas	109
3.5	SOLUCIÓN DE ORDEN CERO ( $\alpha \ll 1$ )	110
3.5.1	Problema magnético	111
3.5.2	Problema hidrodinámico	112
3.6	SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA $\alpha \gg 1$	114
3.6.1	Divergencia de la velocidad de giro	114
3.6.2	Ecuaciones en diferencias finitas	115
3.6.3	Metodología del algoritmo solución	117
3.6.4	Validación	117
3.6.5	Resultados y análisis	118
3.6.6	Análisis del error	121
3.7	OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES	126
<b>4</b>	<b>GEOMETRÍA ANULAR</b>	<b>132</b>
4.1	INTRODUCCIÓN	132
4.2	DESCRIPCIÓN FÍSICA DEL SISTEMA	132
4.3	ECUACIONES VECTORIALES GOBERNANTES	133
4.3.1	Problema hidrodinámico	133
4.3.2	Condiciones de frontera del problema hidrodinámico	133
4.3.3	Problema magnético	134
4.3.4	Condiciones iniciales magnéticas	134
4.3.5	Condiciones de frontera magnéticas	135
4.4	SOLUCIÓN PARA $\alpha \ll 1$	135
4.4.1	Problema magnético	135

---

4.4.2	Problema hidrodinámico . . . . .	138
4.4.3	Metodología algoritmo solución . . . . .	139
4.5	SOLUCIÓN PARA $\alpha \gg 1$ . . . . .	139
4.5.1	Problema hidrodinámico . . . . .	139
4.5.2	Problema magnético . . . . .	140
4.5.3	Derivadas en la frontera $\tilde{r} = \gamma$ . . . . .	140
4.5.4	Fuerza y torque magnético . . . . .	143
4.5.5	Metodología algoritmo solución . . . . .	143
4.5.6	Validación del algoritmo I . . . . .	144
4.5.7	Validación del algoritmo II . . . . .	144
4.5.8	Resultados y análisis . . . . .	146
4.5.9	Análisis del error . . . . .	150
4.6	OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES . . . . .	154
<b>5</b>	<b>RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>157</b>
	<b>REFERENCIAS . . . . .</b>	<b>159</b>
	<b>BIBLIOGRAFÍA . . . . .</b>	<b>164</b>
	<b>ANEXOS . . . . .</b>	<b>166</b>

# Lista de figuras

<b>Figura 1</b>	Esquema de dispersión coloidal de partículas magnetizadas permanentemente (ferrofluido) sujetas a un movimiento de rotación Browniano, a) en ausencia de campo magnético aplicado y b) sometido a un campo magnético de magnitud $ \mathbf{H} $ . Fuente: [1] . . . . .	29
<b>Figura 2</b>	Tiempos de relajación Browniano $\tau_B$ (verde), tipo Néel $\tau_N$ (azul) y efectivo $\tau$ (rojo), en función del radio de la nanopartícula magnética. Fuente: [1]. . . . .	30
<b>Figura 3</b>	Comparación entre el perfil de velocidad teórico (negro) y experimental (azul) a partir de la solución de orden cero de la TDMAI, para una muestra de ferrofluido bajo el efecto de dos parámetros de Langevin, $\alpha = 0,70$ y $\alpha = 0,44$ , contenida en una geometría anular en la que $R_{interno} = 9,3$ mm y $R_{externo} = 24,7$ mm. Fuente: [2]. . . . .	47
<b>Figura 4</b>	Comparación de perfiles de velocidad teóricos y experimentales para diferentes frecuencias de rotación de campo magnético ( $f$ ), bajo el efecto de una densidad de campo magnético constante de 12,3 mT. En las mediciones de Chaves <i>et al.</i> [3], la muestra de ferrofluido implementada fue un ferrofluido de base aceite (EMG900_2) compuesto por magnetita. Fuente: [2]. . . . .	48
<b>Figura 5</b>	Comparación entre el perfil de velocidad teórico (negro) y experimental (azul) a partir de la solución de orden cero de la TDMAI, para la muestra de ferrofluido WBF-1 en un contenedor cilíndrico, bajo el efecto de un campo magnético externo, $\alpha = 0,77$ , $\tilde{\Omega} = 0,033$ y $\alpha = 0,62$ , $\tilde{\Omega} = 0,047$ . $R = 24,7$ mm y $\kappa = 0,44$ . Fuente: [2]. . . . .	48
<b>Figura 6</b>	Mediciones ultrasónicas de perfiles de velocidad de la muestra de ferrofluido EMG705, en un contenedor cilíndrico. a) Contenedor cubierto en la parte superior. b) Contenedor libre en la parte superior, es decir, con interfase ferrofluido-aire en $z = h$ . Fuente: [4] . . . . .	52
<b>Figura 7</b>	Esquema rectangular para el problema de flujo de un ferrofluido contenido en placas planas y paralelas de altura $\delta$ , de longitud y ancho infinito (dominio unidimensional) y con interfase ferrofluido-aire en $x = \delta$ . El campo, el cual gira alrededor del eje $y$ , es generado por una intensidad de campo axial $\tilde{H}_z$ y una densidad de campo transversal $\tilde{B}_x$ . En el problema unidimensional se pretende determinar los perfiles $\tilde{v}_z(\tilde{x})$ y $\tilde{\omega}_y(\tilde{x})$ . Fuente: [5] . . . . .	65

<b>Figura 8</b>	Esquema de término discreto en donde las variables $i$ y $k$ corresponden a los nodos en la coordenada vertical $\tilde{x}$ y la variable temporal $\tilde{t}$ , respectivamente. . . . .	70
<b>Figura 9</b>	Diagrama de flujo de metodología implementada en el desarrollo del algoritmo numérico, para la solución del problema ferrohodinámico de la TDMAI, para ferrofluidos bajo el efecto de campos magnéticos de magnitud y frecuencias no bajas. . . . .	71
<b>Figura 10</b>	Validación de metodología del algoritmo numérico, para la solución del problema ferrohodinámico de la TDMAI del canal rectangular, con dominio unidimensional (coordenada vertical $\tilde{x}$ ). Para la validación se implementó la solución analítica para bajos campos reportada en el trabajo de Chaves <i>et al.</i> [3] (WBF-1), bajo el efecto de una densidad de campo de 0,1 mT, frecuencia 150 Hz y $\kappa = 1$ . . . . .	73
<b>Figura 11</b>	Comparación de perfiles de velocidad, analítico y numérico, para la muestra de ferrofluido WBF-1. En la descripción del problema magnético de la TDMAI se implementó la ecuación Sh-72. Densidad de campo magnético de 1 mT, frecuencia de 150 Hz, $\alpha = 0,81$ , $\kappa = 1$ . . . .	74
<b>Figura 12</b>	Comparación de perfiles de velocidad, analítico y numérico, para la muestra de ferrofluido WBF-1. En la descripción del problema magnético de la TDMAI se implementó la ecuación Sh-72. Densidad de campo magnético de 2 mT, frecuencia de 150 Hz, $\alpha = 0,81$ , $\kappa = 1$ . . . .	74
<b>Figura 13</b>	Comparación de perfiles de velocidad, analítico y numérico, para la muestra de ferrofluido WBF-1. En la descripción del problema magnético de la TDMAI se implementó la ecuación Sh-72. Densidad de campo magnético de 3 mT, frecuencia de 150 Hz, $\alpha = 0,81$ , $\kappa = 1$ . . . .	75
<b>Figura 14</b>	Perfiles de velocidad obtenidos a partir de la TDMAI, implementando en el problema magnético la ecuación Sh-72 (azul), MRSh-74 (negro) y el torque de orden cero (rojo), para una densidad de campo magnético de 0,1 mT, $\alpha = 0,02$ , $\kappa = 1$ y $f = 150$ Hz. WBF-1. . . . .	78
<b>Figura 15</b>	Perfiles de velocidad obtenidos a partir de la TDMAI, implementando en el problema magnético la ecuación Sh-72 (azul), MRSh-74 (negro) y el torque de orden cero (rojo), para una densidad de campo magnético de 1 mT, $\alpha = 0,16$ , $\kappa = 1$ y $f = 150$ Hz. WBF-1. . . . .	78
<b>Figura 16</b>	Perfiles de velocidad obtenidos a partir de la TDMAI, implementando en el problema magnético la ecuación Sh-72 (azul), MRSh-74 (negro) y el torque de orden cero (rojo), para una densidad de campo magnético de 5 mT, $\alpha = 0,8$ , $\kappa = 1$ y $f = 150$ Hz. WBF-1. . . . .	79
<b>Figura 17</b>	Perfiles de velocidad (en función de los valores de la variable $\kappa$ ) obtenidos a través de la implementación del algoritmo de solución numérica, en el sistema de ecuaciones de la TDMAI, para la muestra WBF-1 contenida en un canal de geometría rectangular y dominio unidimensional. $B = 0,1$ mT, $\alpha = 0,08$ y $f = 150$ Hz. . . . .	79

<b>Figura 18</b>	Esquema de canal rectangular para la aplicación de la TDMAI en el problema ilustrativo de flujo, de un ferrofluido contenido en placas planas, paralelas e infinitamente largas, con interfase ferrofluido-aire y con dominio bidimensional $(x, y)$ . El campo es generado por una intensidad de campo axial $H_z$ y una densidad de campo transversal $B_x$ . El vector unitario en la dirección $\tilde{z}$ se dirige hacia adentro de la página.	82
<b>Figura 19</b>	Esquema de término discreto en donde las variables $i, j$ y $k$ corresponden a los nodos en la coordenada $\tilde{x}, \tilde{y}$ y la variable temporal $\tilde{t}$ , respectivamente.	86
<b>Figura 20</b>	Validación I del algoritmo numérico implementado en la solución del sistema ferrohodinámico para valores de $\alpha \gg 1$ , por medio de la comparación con la solución analítica de la TDMAI, para WBF-1, $\eta' = 0$ , $\alpha \ll 1$ , $H = W$ y $f = 150$ Hz. Perfiles de velocidad en $\tilde{x} = 0, 5$ . TFF representa la solución analítica a través del método de solución en series de Fourier, $T_{0^{th} order}$ la solución numérica del sistema implementando el torque de orden cero junto con el modelo de ecuaciones hidrodinámicas en las que $\alpha \ll 1$ , $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\omega} = 0$ y , por último, MRSh la solución numérica del sistema ferrohodinámico, válido para $\alpha \gg 1$ y $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\omega} \neq 0$ , en la que se implementa la ecuación MRSh-74 en la descripción del problema magnético.	91
<b>Figura 21</b>	Validación II del algoritmo numérico implementado en la solución del sistema ferrohodinámico para valores de $\alpha \gg 1$ , para WBF-1, $\eta' = 0$ , $\alpha \ll 1$ y $f = 150$ Hz. Perfiles de velocidad lineal axial en $\tilde{y} = 0, 5$ . $v_z$ numérico, representa la solución numérica del sistema 2D, implementando el algoritmo numérico para campos de alta intensidad. $v_z$ TFF representa la solución analítica del sistema 2D, a través del método de solución en series de Fourier y $v_z$ Ch-R, es la solución analítica del sistema 1D propuesta por A. Chaves y C. Rinaldi [5]. Se implementó la TDMAI para la descripción de los perfiles, en donde se demostró que $\tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y} = 12)  _{a \rightarrow \infty} = \tilde{v}_z(\tilde{x})$ .	93
<b>Figura 22</b>	Perfiles de velocidad lineal en función de la coordenada horizontal y vertical, para la muestra de ferrofluido WBF-1. El sistema físico consiste en el canal rectangular de dominio bidimensional de la figura 18. $B = 11,3$ mT, $\alpha = 1,81$ , $f = 150$ Hz y $\kappa = 0,47$ . Se implementó la ecuación MRSh-74 en la TDMAI para la descripción de los perfiles.	94
<b>Figura 23</b>	Perfiles de velocidad angular $\omega_x$ en función de la coordenada horizontal y vertical, para la muestra de ferrofluido WBF-1. El sistema físico consiste en el canal rectangular de dominio bidimensional de la figura 18. $B = 11,3$ mT, $f = 150$ Hz y $\kappa = 0,47$ . Se implementó la ecuación MRSh-74 en la TDMAI para la descripción de los perfiles.	95
<b>Figura 24</b>	Perfiles de velocidad angular $\omega_y$ en función de la coordenada horizontal y vertical, para la muestra de ferrofluido WBF-1. El sistema físico consiste en el canal rectangular de dominio bidimensional de la figura 18. $B = 11,3$ mT, $f = 150$ Hz y $\kappa = 0,47$ . Se implementó la ecuación MRSh-74 en la TDMAI para la descripción de los perfiles.	95

<b>Figura 25</b>	Efecto del parámetro $\alpha$ en las predicciones de velocidad, $v_z(\tilde{x}; \tilde{y} = 0, 5)$ . $f = 150$ Hz, $\kappa = \infty$ , WBF-1. Num representa la solución obtenida a través del algoritmo numérico y An la solución analítica a través del método de las series de Fourier. $\alpha = [0, 08 \ 0, 24 \ 0, 96 \ 1, 3]$ . . . . .	96
<b>Figura 26</b>	Efecto del parámetro $\alpha$ en las predicciones de velocidad máxima, $v_z(\tilde{x}; \tilde{y} = 0, 5)$ . $f = 150$ Hz, $\kappa = \infty$ , WBF-1. Num representa la solución obtenida a través del algoritmo numérico y An la solución analítica a través del método de las series de Fourier. . . . .	97
<b>Figura 27</b>	Efecto del parámetro $\alpha$ en el error de las predicciones de la velocidad máxima, $v_z(\tilde{x}; \tilde{y} = 0, 5)$ , por medio de la solución analítica y numérica del modelo de la TDMAI. $f = 150$ Hz, $\kappa = \infty$ , WBF-1. . . . .	98
<b>Figura 28</b>	Superficie de velocidad lineal $v_z$ en función de la coordenada horizontal y vertical, para la muestra de ferrofluido WBF-1. El sistema físico consiste en el canal rectangular de dominio bidimensional de la figura 18. $B = 11,3$ mT, $f = 150$ Hz y $\kappa = 0,47$ . Se implementó la ecuación MRSh-74 en la TDMAI para la descripción de las superficies. . . . .	99
<b>Figura 29</b>	Superficie de velocidad angular $\omega_x$ en función de la coordenada horizontal y vertical, para la muestra de ferrofluido WBF-1. El sistema físico consiste en el canal rectangular de dominio bidimensional de la figura 18. $B = 11,3$ mT, $f = 150$ Hz y $\kappa = 0,47$ . Se implementó la ecuación MRSh-74 en la TDMAI para la descripción de las superficies. . . . .	99
<b>Figura 30</b>	Superficie de velocidad angular $\omega_y$ en función de la coordenada horizontal y vertical, para la muestra de ferrofluido WBF-1. El sistema físico consiste en el canal rectangular de dominio bidimensional de la figura 18. $B = 11,3$ mT, $f = 150$ Hz y $\kappa = 0,47$ . Se implementó la ecuación MRSh-74 en la TDMAI para la descripción de las superficies. . . . .	100
<b>Figura 31</b>	Perfil de velocidad promedio $v_z$ , en el canal rectangular bidimensional (con interfase ferrofluido aire en $x = 20$ mm), para la muestra de ferrofluido WBF-1, bajo los efectos de diferentes densidades de campo magnético (con frecuencia constante de 150 Hz), y para diferentes frecuencias (con densidad de campo magnético constante de 5,62 mT). Los perfiles están en función de la coordenada vertical $x$ , para una coordenada horizontal constante de $y = 10$ mm = $\frac{1}{2}\delta$ , $\kappa = 0,47$ . Se implementó la ecuación MRSh en el sistema de ecuaciones de la TDMAI.	100
<b>Figura 32</b>	Efecto de $\alpha$ y $\Omega_\tau$ en los valores máximos de velocidad, $v_z(x, 10\text{mm})$ , para la muestra de ferrofluido WBF-1, de acuerdo con la solución numérica obtenida con la implementación la ecuación MRSh-74 en la TDMAI, con $\kappa = 3,3$ . La curva de la izquierda es a una frecuencia constante $f = 150$ Hz, y la curva de la derecha es a una densidad $B = 5,62$ mT. . . . .	101

<b>Figura 33</b>	Diagrama esquemático del flujo de un ferrofluido, contenido en el interior de un cilindro de longitud axial infinita, generado por el efecto de un campo magnético rotativo uniforme $\mathbf{H}$ . El campo rotativo gira alrededor del eje axial $\tilde{z}$ , y es generado por el devanado de un motor de inducción trifásico de dos polos, el cual se modela a través de una distribución de corriente superficial, $\mathbf{K}_s = K \cos(\tilde{t} - \theta) \mathbf{i}_z = \Re \left\{ K e^{j(\tilde{t} - n\theta)} \right\} \mathbf{i}_z$ , en las paredes del cilindro. <i>i)</i> representa la vista frontal y <i>ii)</i> la vista superior del cilindro. . . . .	107
<b>Figura 34</b>	Esquema de discretización en la dirección radial y azimutal del contenedor cilíndrico de longitud axial $\tilde{z}$ infinita. Los círculos de color negro representan los nodos en los que se ha discretizado el sistema físico. Por su parte, $nder$ y $nde\theta$ son el número de nodos espaciales en la coordenada $\tilde{r}$ y $\theta$ , respectivamente, los cuales son seleccionados por el usuario del algoritmo de solución numérica. Para este esquema ilustrativo $nder = 9$ y $nde\theta = 16$ . . . . .	110
<b>Figura 35</b>	Esquema de término discreto en donde las variables $i, j, k$ corresponden a los nodos en la coordenada radial $\tilde{r}$ , la coordenada azimutal $\theta$ y la variable temporal $\tilde{t}$ , respectivamente. Los perfiles $\tilde{v}_\theta(\tilde{r})$ y $\tilde{\omega}_z(\tilde{r})$ varían sólo respecto a la coordenada radial $\tilde{r}$ , por tal motivo, las variables no son discretizadas con relación a los nodos $j, k$ . . . . .	116
<b>Figura 36</b>	Validación de algoritmo numérico implementado para la solución de problema ferrodinámico en geometría cilíndrica, en donde se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 en el sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$ en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$ en la ecuación MRSh-74. Muestra de ferrofluido WBF-1. $\alpha = 0,02$ , $\kappa = 3,3$ , $f = 150$ Hz. $v_\theta$ MRSh y $\omega_z$ MRSh representan los perfiles de velocidad obtenidos a través del algoritmo numérico, tanto para el problema hidrodinámico como para el problema magnético. $v_\theta$ analitic y $\omega_z$ analitic representan las soluciones obtenidas analíticamente a través de las funciones de Bessel. $v_\theta$ lzo y $\omega_z$ lzo son las soluciones obtenidas, de forma numérica, teniendo en cuenta, para el problema magnético, el valor del torque de orden cero. . . . .	118
<b>Figura 37</b>	Perfiles de velocidad lineal y de giro en la geometría cilíndrica para WBF-1, bajo el efecto de diferentes amplitudes de campo magnético, a 150 Hz y $\kappa = 3,3$ . En el problema ferrodinámico se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 como parte del sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$ en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$ en la ecuación MRSh-74. . . . .	120
<b>Figura 38</b>	Mediciones experimentales de los perfiles de flujo reportados en [2], para la muestra WBF-1, contenida en geometría cilíndrica, bajo el efecto de diferentes amplitudes y frecuencias de rotación de campo magnético, $\kappa = 0,47$ . En (a) $f = 150$ Hz y en (b) $B = 5,62$ mT. . . . .	121

<b>Figura 39</b>	Perfiles de velocidad lineal y de giro en la geometría cilíndrica para WBF-1, bajo el efecto de diferentes frecuencias de campo magnético, a 5,62 mT y $\kappa = 3,3$ . En el problema ferrohodinámico se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 como parte del sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$ en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$ en la ecuación MRSh-74. . . . .	122
<b>Figura 40</b>	Perfiles de velocidad lineal y de giro en la geometría cilíndrica para WBF-1, bajo el efecto de diferentes valores de $\kappa$ , con $B = 5,62$ mT y $f = 150$ Hz. En el problema ferrohodinámico se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 como parte del sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$ en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$ en la ecuación MRSh-74. . . . .	123
<b>Figura 41</b>	Efecto del parámetro $\alpha$ en las predicciones de velocidad en un contenedor cilíndrico, $v_\theta(\tilde{r})$ . $f = 150$ Hz, $\kappa = 3,3$ , WBF-1. Num representa la solución obtenida a través del algoritmo numérico y An la solución analítica a través del método de las funciones de Bessel, [3]. $\alpha = [0,016 \ 0,24 \ 0,96 \ 1,3]$ . . . . .	124
<b>Figura 42</b>	Efecto del parámetro $\alpha$ en las predicciones de velocidad máxima, $v_\theta(\tilde{r})$ . $f = 150$ Hz, $\kappa = 3,3$ , WBF-1. Num representa la solución obtenida a través del algoritmo numérico y An la solución analítica a través del método de las funciones de Bessel, [3]. . . . .	124
<b>Figura 43</b>	Efecto del parámetro $\alpha$ en la diferencia porcentual de las predicciones de la velocidad máxima, $v_\theta(\tilde{r})$ , por medio de la solución analítica y numérica del modelo de la TDMAI. $f = 150$ Hz, $\kappa = 3,3$ , WBF-1. . . . .	125
<b>Figura 44</b>	Comparación de los resultados obtenidos con la TDMAI y las mediciones experimentales de la referencia [2], para la geometría de la figura 33. En las simulaciones numéricas se implementó la ecuación MRSh-74, $\kappa = 3,3$ y WBF-1. $\mathbf{v}_\theta$ TDMAI representa la solución teórica y $\mathbf{v}_\theta$ Experimental las mediciones reportadas en [2]. Arriba: $f = 150$ Hz. Abajo: $B = 5,62$ mT. . . . .	126
<b>Figura 45</b>	Velocidad máxima en función de la constante $\kappa$ , implementando la TDMAI para la muestra de ferrofluido WBF-1, contenida en una geometría cilíndrica de longitud axial infinita. $f = 150$ Hz y $B = 5,62$ mT. En el problema ferrohodinámico se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 como parte del sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$ en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$ en la ecuación MRSh-74. . . . .	127
<b>Figura 46</b>	Velocidad máxima en función del parámetro de Langevin $\alpha$ , implementando la TDMAI, para la muestra de ferrofluido WBF-1, contenida en una geometría cilíndrica de longitud axial infinita. $f = 150$ Hz; $\kappa = 3,3$ . En el problema ferrohodinámico se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 como parte del sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$ en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$ en la ecuación MRSh-74. . . . .	128

- Figura 47** Velocidad de traslación y de giro máxima en función de la frecuencia adimensional  $\Omega\tau$ , implementando la TDMAI, para la muestra de ferrofluido WBF-1, contenida en una geometría cilíndrica de longitud axial infinita.  $B = 5,62$  mT;  $\kappa = 3,3$ . En el problema ferrohodinámico se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 como parte del sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término  $\nabla \cdot (\chi\mathbf{M} + \mathbf{H})$  en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo  $\Omega\epsilon\mathbf{v}\nabla\mathbf{M}$  en la ecuación MRSh-74. 129
- Figura 48** Geometría anular (cilindros coaxiales no magnéticos) de longitud axial infinita en la dirección  $\mathbf{i}_z$  y permeabilidad magnética relativa  $\mu_r$ , en donde  $i)$  representa la vista frontal y  $ii)$  la vista superior de la geometría anular. Con el fin de simplificar la solución del sistema magnético se desprecia el grosor del cilindro externo, es decir, se asume que  $R_2 = R_3$ . El campo magnético rotativo  $\mathbf{H}$  gira alrededor del eje axial  $\tilde{z}$ , y es generado por el devanado de un motor de inducción trifásico de dos polos, el cual se modela a través una distribución de corriente superficial,  $\mathbf{K}_s = K \cos(\tilde{t} - \theta) \mathbf{i}_z = \Re\{K e^{j(\tilde{t} - n\theta)}\} \mathbf{i}_z$ , en las paredes del cilindro externo ( $r = R_2$ ). . . . . 134
- Figura 49** Diagrama de flujo de la metodología del algoritmo, para la solución numérica del sistema de ecuaciones hidrodinámicos de la TDMAI, para muestras de ferrofluido en un contenedor anular y campos magnéticos en los que  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ . El problema magnético ha sido resuelto de manera analítica por Chaves *et al* [4, 6]. Por tal motivo, la discretización es realizada sólo para el problema hidrodinámico. . . . . 140
- Figura 50** Esquema de término discreto en donde las variables  $i, j, k$  corresponden a los nodos en la coordenada radial  $\tilde{r}$ , la coordenada azimutal  $\theta$  y la variable temporal  $\tilde{t}$ , respectivamente. Asimismo, los símbolos  $I$  y  $II$  representan la región I y II, correspondientemente, del sistema anular en estudio. . . . . 141
- Figura 51** Esquema de discretización en la dirección radial y azimutal del contenedor anular de longitud axial  $\tilde{z}$  infinita. Los círculos de color negro, magenta y azules representan, respectivamente, a los nodos en los que se ha discretizado la región  $I$  ( $\tilde{r} \leq \gamma$ ), la frontera en  $\tilde{r} = \gamma$  y la región  $II$  ( $\gamma \leq \tilde{r} \leq 1$ ). Por su parte,  $nder$  y  $nde\theta$  son el número de nodos espaciales en la coordenada  $\tilde{r}$  y  $\theta$ , correspondientemente, los cuales son seleccionados por el usuario del algoritmo de solución numérica.  $\Delta\tilde{r}$  y  $\Delta\theta$  representan el paso en la coordenada  $\tilde{r}$  y  $\theta$ . Para este esquema ilustrativo  $nder = 9$  y  $nde\theta = 16$ . . . . . 142
- Figura 52** Representación gráfica de la expresión analítica de la fuerza magnética,  $\tilde{f}_\theta(\tilde{r})$ , obtenida por Chaves *et al* [4], aplicada a la muestra de ferrofluido WGBF-1,  $B = 0,01$  mT,  $\alpha = 0,003$ ,  $f = 1$  Hz,  $\tilde{\Omega} = 0,015$ ,  $\kappa = 3,3$  y contenida en la geometría anular de la figura 48, para  $\gamma = 0,2$ ,  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ . . . . . 145

- Figura 53** Validación I del algoritmo numérico implementado para la solución de problema ferrohodinámico en la geometría anular. En la validación se utilizaron los resultados de la solución analítica obtenida por Chaves *et al* [4]. Adicionalmente, se asumió  $\tilde{f}_\theta = 0$ ,  $f = 1$  Hz,  $B = 0,01$  mT,  $\alpha = 0,003$ ,  $\tilde{\Omega} = 0,015$  y  $\kappa = 3,3$  en WGBF-1.  $v_\theta$  lz0 y  $\omega_z$  lz0 representan la solución analítica, válida para  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ , mientras que  $v_\theta$  MRSh y  $\omega_z$  MRSh representan la solución obtenida a través del algoritmo de solución numérica, válida para  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ . . . . . 146
- Figura 54** Resultados analíticos y numéricos para la intensidad de campo magnético  $\mathbf{H}$  y la magnetización  $\mathbf{M}$ , de la muestra de ferrofluido WGBF-1 contenida en una geometría anular. Los resultados mostrados corresponden para el punto en donde  $\tilde{r} = 0,6$  y  $\theta = \pi$  rad .  $\tilde{f}_\theta = 0$ ,  $f = 1$  Hz,  $B = 0,01$  mT,  $\alpha = 0,003$ ,  $\tilde{\Omega} = 0,015$  y  $\kappa = 3,3$ . an representa la solución analítica obtenida por Chaves [4] y num representa la solución del sistema ferrohodinámico de la TDMAI, obtenida a través del algoritmo de solución numérica, implementando la ecuación MRSh-74 para la descripción del problema magnético. . . . . 147
- Figura 55** Validación II del algoritmo numérico implementado para la solución de problema ferrohodinámico en la geometría anular de la figura 48, en donde se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 en el sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término  $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$  en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo  $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$  en la ecuación MRSh-74. En la validación se utilizaron los resultados de la solución de orden cero para  $\alpha \ll 1$ , obtenidos por Chaves *et al* [4]. Asimismo, se asumió  $\tilde{f}_\theta \approx \tilde{M}_r \frac{d\tilde{H}_\theta}{d\tilde{r}}$ ,  $f = 1$  Hz,  $B = 0,01$  mT,  $\alpha = 0,003$ ,  $\kappa = 3,3$  y la muestra de ferrofluido WGBF-1.  $v_\theta$  lz0 y  $\omega_z$  lz0 representa la solución analítica obtenida por Chaves *et al* [4].  $v_\theta$  MRSh y  $\omega_z$  MRSh representa la solución obtenida a través del algoritmo de solución numérica, diseñado para obtener los perfiles de velocidad de ferrofluidos sometidos a campos magnéticos en donde  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ . . . . . 148
- Figura 56** Perfiles de velocidad lineal y de giro en la geometría anular para WBF-2, bajo el efecto de diferentes densidades de campo magnético,  $f = 200$  Hz,  $\kappa = 0,44$ . En el problema ferrohodinámico se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 como parte del sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término  $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$  en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo  $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$  en la ecuación MRSh-74. En las simulaciones se asumió  $\tilde{f}_\theta \approx \tilde{M}_r \frac{d\tilde{H}_\theta}{d\tilde{r}}$ . . . . . 149
- Figura 57** Medidas experimentales de los perfiles de flujo para la muestra WBF-2, contenida en geometría anular, bajo el efecto de diferentes densidades de campo magnético.  $f = 150$  Hz y  $\kappa = 0,44$ , [2]. . . . . 150

<b>Figura 58</b>	Perfiles de velocidad lineal y de giro en la geometría anular para WBF-2, bajo el efecto de diferentes frecuencias de campo magnético, a 5, 62 mT y $\kappa = 3, 3$ . En el problema ferrohrodinámico se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 como parte del sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$ en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$ en la ecuación MRSh-74. En las simulaciones se asumió $\tilde{f}_\theta \approx \tilde{M}_r \frac{d\tilde{H}_\theta}{d\tilde{r}}$ . . . . .	151
<b>Figura 59</b>	Efecto del parámetro $\alpha$ en las predicciones de velocidad máxima, $v_\theta(\tilde{r})$ . $f = 150$ Hz, $\kappa = 3, 3$ , WGBF-1. Num representa la solución obtenida a través del algoritmo numérico y An la solución analítica a través del método de las funciones de Bessel, [6]. $B = [0, 1 \ 1, 5 \ 6, 0 \ 8, 0]$ mT. . . . .	152
<b>Figura 60</b>	Efecto del parámetro $\alpha$ en las predicciones de velocidad máxima, $v_\theta(\tilde{r})$ . $f = 1$ Hz, $\kappa = 3, 3$ , WGBF-1. Num representa la solución obtenida a través del algoritmo numérico y An la solución analítica a través del método de las funciones de Bessel, [6]. . . . .	153
<b>Figura 61</b>	Efecto del parámetro $\alpha$ en la diferencia porcentual de las predicciones de la velocidad máxima, $v_\theta(\tilde{r})$ , por medio de la solución analítica y numérica del modelo de la TDMAI. $f = 1$ Hz, $\kappa = 3, 3$ , WGBF-1. . . . .	153
<b>Figura 62</b>	Comparación de los resultados obtenidos con la TDMAI y las mediciones experimentales de la referencia [2], para la geometría de la figura 48. En las simulaciones numéricas se implementó la ecuación MRSh-74, $f = 200$ Hz, $\kappa = 0, 44$ , WBF-2. $\mathbf{v}_\theta$ TDMAI representa la solución teórica y $\mathbf{v}_\theta$ Experimental las mediciones reportadas en [2]. . . . .	154

# Lista de Anexos

A ECUACIONES DE MAGNETIZACIÓN ADIMENSIONALES . . . . .	166
B APLICACIÓN DE SERIES DE FOURIER . . . . .	170
C VARIABLES MAGNÉTICAS EN $\tilde{r} = \gamma$ . . . . .	174
D ECUACIONES HIDRODINÁMICAS ADIMENSIONALES . . . . .	176
E CONDICIÓN DE FRONTERA MAGNÉTICA EN $\tilde{r} = 0$ . . . . .	179

## VARIABLES Y SÍMBOLOS

Nomenclatura	Definición
$\mathbf{i}$	Vector espacial unitario (adimensional)
$t$	Tiempo de análisis del fenómeno (s)
$\mathbf{H}$	Vector intensidad de campo magnético ( $\text{A m}^{-1}$ )
$\mathbf{M}$	Vector magnetización del ferrofluido ( $\text{A m}^{-1}$ )
$\mathbf{B}$	Vector densidad de campo magnético (mT)
$\tau_B$	Constante de relajación tipo Browniana (s)
$\tau_N$	Constante de relajación tipo Neel (s)
$\tau$	Constante de relajación efectiva (s)
$\eta_0$	Viscosidad líquido portador nanopartículas (mPa s)
$V_h$	Volumen hidrodinámico de nanopartícula $V_h = \pi(D_p + 2\delta)^2\delta$ ( $\text{nm}^3$ )
$k_B$	Constante de Boltzman ( $\text{J K}^{-1}$ )
$T$	Temperatura absoluta del sistema (K)
$f$	frecuencia de rotación del campo magnético (Hz)
$\Omega$	Velocidad de rotación del campo magnético ( $\text{rad s}^{-1}$ )
$f_0$	Frecuencia característica del material magnético (Hz)
$K$	Constante anisotrópica magneto-cristalina nanopartículas ( $\text{Jm}^{-3}$ )
$V_c$	Volumen del núcleo magnético ( $\text{nm}^3$ )
$D_p$	Diámetro de nanopartícula (nm)
$vM$	Momento magnético por unidad de masa $\text{J T}^{-1}\text{Kg}^{-1}$
$\tilde{m}$	Momento magnético promedio de las nanopartículas $\text{J T}^{-1}$
$\mathbf{v}$	Vector de velocidad promedio del fluido ( $\text{mm s}^{-1}$ )
$\rho$	Densidad del ferrofluido ( $\text{g cm}^{-3}$ )
$\mathbf{F}$	Vector de densidad de fuerza de cuerpo ( $\text{N m}^{-3}$ )
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de esfuerzos ( $\text{N m}^{-2}$ )
$\mathbf{I}$	Vector momento de inercia ( $\text{kg m}^2$ )
$\mathbf{G}$	Torque magnético de cuerpo ( $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$ )
$\mathbf{C}$	Tensor de par de esfuerzos ( $\text{N s}^{-1}$ )
$\mathbf{A}$	Vector transferencia de momento ( $\text{kg}^2 \text{m}^{-1} \text{s}^{-2}$ )
$\boldsymbol{\delta}$	Tensor unitario (adimensional)
$\eta$	Viscosidad de cizalla (mPa s)
$\zeta$	“ <i>Vortex viscosity</i> ” (mPa s)
$\boldsymbol{\omega}$	Velocidad de giro de nanopartículas ( $\text{rad s}^{-1}$ )
$\eta'$	<i>Spin viscosity</i> ( $\text{kg m s}^{-1}$ )
$\lambda$	Coefficiente fenomenológico “ <i>bulk viscosity</i> ” (mPa s)
$\lambda'$	Coefficiente fenomenológico “ <i>bulk viscosity of spin</i> ” ( $\text{kg m s}^{-1}$ )
$\phi_h$	Fracción volumétrica hidrodinámica (adimensional)
$\mu_0$	Permeabilidad magnética del aire o vacío ( $\text{N A}^{-2}$ )
$\mu_r$	Permeabilidad magnética relativa (adimensional)
$\mu$	Permeabilidad magnética del material ( $\text{N A}^{-2}$ )
$\chi$	Susceptibilidad magnética (adimensional)
$p$	Presión del sistema (Pa)

$\mathbf{M}_0$	Magnetización de saturación del ferrofluido ( $\text{A m}^{-1}$ )
$\tau_{\parallel}$	Tiempo de relajación paralelo (s)
$\tau_{\perp}$	Tiempo de relajación perpendicular (s)
$\alpha$	Coefficiente de Langevin (adimensional)
$L$	Ecuación de Langevin (adimensional)
$\mathbf{n}$	Vector normal a la interfase (adimensional)
$\mathbf{t}$	Vector tangente a la interfase (adimensional)
$\beta$	Coefficiente de fricción (adimensional)
$\mathbf{v}_s$	Velocidad en la pared del contenedor ( $\text{mm s}^{-1}$ )
$\mathbf{T}$	Tensor de esfuerzos de Cauchy ( $\text{N m}^{-2}$ )
$\boldsymbol{\omega}_s$	Velocidad de giro en la pared del contenedor ( $\text{rad s}^{-1}$ )
$\mathbf{M}_{\text{eq}}$	Magnetización de equilibrio ( $\text{A m}^{-1}$ )
$\varepsilon$	Parámetro de perturbación regular (adimensional)
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	Parámetros de convergencia (adimensional)
$K$	Amplitud de la intensidad de campo magnético (mT)
$R_0$	Radio del contenedor cilíndrico (mm)
$\mathbf{g}$	Vector aceleración gravitacional ( $\text{m s}^{-2}$ )
$\sim$	Variabes adimensionales (no aplica)
$\delta$	Altura de contenedor se sección transversal cuadrada (mm)
$U$	Velocidad característica ( $\text{mm s}^{-1}$ )
$U_{w,0}$	Velocidad extrapolada a paredes de cilindro ( $\text{mm s}^{-1}$ )
$L_v$	Longitud característica del sistema físico (mm)
$\frac{D}{Dt}$	Derivada material ( $\text{s}^{-1}$ )
$M_d$	Magnetización del dominio de las partículas ( $\text{kA m}^{-1}$ )
$\tilde{h}$	Coefficiente de curvatura de la interfase (adimensional)
$\gamma$	Tensión superficial ( $\text{N m}^{-1}$ )
$K_s$	Densidad de corriente superficial ( $\text{A m}^{-2}$ )
$\nabla_s$	Gradiente superficial en la interfase ( $\text{m}^{-1}$ )
$\tilde{l}$	Torque magnético (adimensional)
$\hat{\phantom{x}}$	Componentes complejas adimensionales (no aplica)
$i$	Nodo espacial radial (adimensional)
$j$	Nodo espacial azimutal (adimensional)
$k$	Nodo temporal (adimensional)
$W$	Ancho del canal rectangular (mm)
$H$	Altura del canal rectangular (mm)
$\Delta$	Paso diferencial discretizado (no aplica)
$a$	Relación de aspecto (adimensional)
$\tilde{\Omega}_v$	Vorticidad del ferrofluido ( $\text{rad s}^{-1}$ )
$\Omega_z$	Componente vertical de la vorticidad del ferrofluido ( $\text{rad s}^{-1}$ )
$I_0$	Función Bessel modificada primera clase, orden cero (adimensional)
$I_1$	Función Bessel modificada primera clase, orden uno (adimensional)
$\gamma$	Radio de la frontera de cilindro interno geometría anular (mm)
$f_{\theta}$	Densidad de fuerza magnética de cuerpo ( $\text{N m}^{-3}$ )

$\langle \rangle_t$	Valor promedio (no aplica)
$I$	Zona geometría anular $r \leq R_1$ (no aplica)
$II$	Zona geometría anular $R_1 \leq r \leq R_2$ (no aplica)
$C_n$	Coefficientes del método de las series de Fourier (adimensional)
$\Phi_n$	Función base (no aplica)
$n$	Valor sumatoria método series de Fourier (adimensional)
$C_1, C_2$	Constantes de integración (adimensional)

## RESUMEN

### EVALUACIÓN DEL EFECTO DE LA ECUACIÓN DE MAGNETIZACIÓN DE MARTSENYUK, RAIKHER Y SHLIOMIS SOBRE LAS PREDICCIONES DE FLUJO DE LA TEORÍA DE DIFUSIÓN DE MOMENTO ANGULAR INTERNO <sup>1</sup>

**AUTOR:** CRISTIAN CAMILO JIMÉNEZ LEIVA <sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVES:** Ferrofluidos, difusión de momento angular interno, spin viscosity, vortex viscosity, perfiles de velocidad, ecuación de magnetización, campo magnético rotativo.

#### DESCRIPCIÓN:

Esta tesis doctoral trata sobre el comportamiento de flujo de fluidos magnéticos o ferrofluidos. Como se puede evidenciar en la literatura relacionada con la ferrohdrodinámica, han pasado alrededor de cinco décadas después de que se evidenció la generación de flujo de ferrofluidos, por el efecto de un campo magnético rotativo, sin que hasta el momento se haya llegado a un acuerdo sobre el mecanismo generador, debido a las diferencias de tipo cuantitativo entre los perfiles de velocidad teóricos y experimentales. Ante esta situación, se planteó anteriormente la teoría de difusión de momento angular interno (TDMAI), la cual busca describir los perfiles de velocidad de ferrofluidos que están bajo el efecto de un campo magnético rotativo.

El objetivo principal de esta investigación es evaluar, a partir de la TDMAI, el uso de la ecuación de magnetización propuesta por Shliomis, junto con la ecuación propuesta por Martsenyuk Raikher y Shliomis, con base en las predicciones de perfiles de velocidad de ferrofluidos, en presencia de campos magnéticos rotativos de alta amplitud y frecuencia, es decir,  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ . Los resultados del modelo son comparados con datos experimentales de perfiles de velocidad disponibles en la literatura.

La metodología de investigación está encaminada a demostrar que se puede conseguir un mayor acuerdo, de tipo cuantitativo, entre el modelo ferrohdrodinámico y datos experimentales, específicamente para una geometría cilíndrica y una anular. El principal aporte de este trabajo es la validación o no de la TDMAI como mecanismo generador de flujo, en ferrofluidos bajo el efecto de campos magnéticos rotativos. Adicionalmente, se presentan las predicciones de la TDMAI para ferrofluidos contenidos en un canal de placas planas y paralelas, de dominio bidimensional y con una interfase ferrofluido-aire, en donde  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ .

---

<sup>1</sup> Trabajo de Investigación Doctoral.

<sup>2</sup> Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones. Director: Dr. Hermann Raúl Vargas Torres. Codirector: PhD. Carlos Rodrigo Correa Cely.

## ABSTRACT

### EFFECT EVALUATION OF THE MAGNETIZATION EQUATION OF MARTSENYUK, RAIKHER AND SHLIOMIS ON THE FLOW PREDICTIONS BY THE INTERNAL ANGULAR MOMENTUM DIFFUSION THEORY <sup>3</sup>

**AUTHOR:** CRISTIAN CAMILO JIMÉNEZ LEIVA <sup>4</sup>

**KEYWORDS:** Ferrofluids, internal angular momentum diffusion, spin viscosity, vortex viscosity, velocity profiles, magnetization equation, rotating magnetic field.

#### **DESCRIPTION:**

This doctoral thesis deals with the flow behavior of magnetic fluids or ferrofluids. As can be seen in the literature related to ferrohydrodynamics, it has been around five decades since ferrofluid flow was first evident. The above, by the sole action of a rotating magnetic field. Nevertheless, currently no agreement has been reached on the flow mechanism, due to the quantitative differences between theoretical and experimental velocity profiles. Hence, the Internal Angular Momentum Diffusion Theory (IAMDT) was previously proposed, which seeks to describe the velocity profiles of ferrofluids under a rotating magnetic field.

The main objective of this research is to evaluate, from the IAMDT, the use of the magnetization equation proposed by Shliomis (Sh-72), together with the one proposed by Martsenyuk Raikher and Shliomis (MRSh-74), based on velocity profile predictions of ferrofluids in the presence of high amplitude and frequency magnetic fields, i.e.  $\alpha \gg 1$  and  $\tilde{\Omega} \gg 1$ . Model results are compared with experimental velocity profile data available in the state of the art.

The research methodology is aimed at demonstrating that greater quantitative agreement can be achieved between the ferrohydrodynamic model and experimental data, specifically for a cylindrical and an annular geometry. The main contribution of this work is the validation or not of IAMDT, as a flow-generating mechanism in ferrofluids, under the effect of rotating magnetic fields. Moreover, from the implementation of the Sh-72 and MRSh-74 equation in the IAMDT, the model predictions, for ferrofluids contained in a two-dimensional domain rectangular channel with a ferrofluid-air interface, are presented, where  $\alpha \gg 1$  and  $\tilde{\Omega} \gg 1$ .

---

<sup>3</sup> Doctoral Research.

<sup>4</sup> Faculty of Physical-Mechanic Engineering. School of Electrical, Electronical and Telecommunications Engineering. Advisor: Dr. Hermann Raúl Vargas Torres. Co-advisor: PhD. Carlos Rodrigo Correa Cely.

---

## INTRODUCCIÓN

---

Desde hace más de cinco décadas se definió a la ferrohdrodinámica como el estudio de la dinámica de los fluidos y la transferencia de calor, asociada al movimiento de fluidos incompresibles y magnéticamente polarizables, en presencia de campos magnéticos (estáticos y rotativos) y gradientes de temperatura [7]. Posteriormente, se realizaron las primeras observaciones de flujo de un ferrofluido generado por la única acción de un campo magnético rotativo [8], abriendo múltiples campos para el estudio de este fenómeno. Los ferrofluidos son fluidos con características súper-paramagnéticas, compuestos de nanopartículas magnéticas de 8 – 15 nm de diámetro [9], las cuales se encuentran suspendidas en un líquido de tipo orgánico o inorgánico. Estas sustancias han llamado la atención debido a su respuesta reológica particular, por ejemplo, el aumento de la viscosidad en presencia de un campo magnético estacionario [10, 11], el aumento y la disminución de la viscosidad en presencia de un campo magnético rotativo [12, 13, 14], y la generación de flujo en el ferrofluido como respuesta a un campo magnético rotativo externo [6, 15, 16, 8, 17, 18]. Igualmente, la formación de vistosas geometrías en la superficie de estos fluidos, tales como discos dentados, picos con base hexagonal, coronas, laberintos, entre otras. Fenómeno que se presenta al ubicar un campo magnético perpendicularmente a la superficie del ferrofluido. [19]. A partir de estas observaciones se han realizado análisis teóricos, con la finalidad de predecir las formas que se generan en las superficies, en la medida que la intensidad de campo magnético aumenta [20]. Entre las aplicaciones que se les ha dado a los ferrofluidos se pueden resaltar las siguientes: 1. El sellado de recipientes en procesos industriales, al igual que el sellado de dispositivos electrónicos que involucran ejes rotando, como en el caso de discos duros de un ordenador [21]; 2. Aplicaciones en sistemas micro-electro-mecánicos (MEMS) y microbombas [22]. 3. Aplicaciones de transferencia de calor, en donde son usados como fluido refrigerante en altavoces y en transformadores eléctricos, ya que mejora el flujo de calor por el efecto de magneto-convección [23]. 4. Aplicaciones biomédicas, específicamente en procesos de liberación controlada de fármacos, en tratamientos contra el cáncer basados en hipertermia [24]. 5. Aplicaciones en resonancia magnética nuclear (RMN) [25]. De igual manera, con el propósito de describir la respuesta del flujo de ferrofluidos ante la presencia de un campo magnético rotativo, se han planteado varias teorías, las cuales buscan explicar el mecanismo capaz de generar los perfiles de velocidad observados. Las principales teorías se enumeran y se explican muy brevemente a continuación: 1. Teoría de difusión de momento angular interno [26] (TDMAI): esta

teoría sustenta que, debido al efecto de la rotación de las nanopartículas magnéticas, al someterse bajo el efecto de un torque magnético externo, se genera la difusión de momento angular interno, lo que a su vez produce la rotación de la matriz del fluido contenedor de las partículas, 2. Generación de flujo por armónicos espaciales de alto orden [27, 28]: con esta idea se propone que el flujo en ferrofluidos es generado por armónicos espaciales de alto orden, resultantes de las imperfecciones del estator usado para la generación del campo magnético, 3. Efectos de curvatura en interfase ferrofluido-aire [15]: esta hipótesis establece que el flujo es generado solo por efectos de curvatura, en la interfase ferrofluido-aire, los cuales generan esfuerzos magnéticos tangenciales que actúan sobre el ferrofluido ubicado en esta zona, 4. Condiciones de frontera de esfuerzos y deslizamiento [5]: en esta teoría, el flujo puede ser explicado por el uso de una condición de frontera de esfuerzos, con deslizamiento en el momento lineal, acoplado con una condición de frontera de deslizamiento para la ecuación de balance del momento angular interno, 5. Flujo generado por gradientes de temperatura [29]: esta hipótesis propone que el proceso de disipación de energía de las nanopartículas, rotando en el fluido, genera gradientes de temperatura en el mismo, lo cual genera a su vez un correspondiente gradiente de propiedades magnéticas, creando fuerzas magnéticas de cuerpo en la dirección opuesta a la rotación del campo externo, 6. Flujo debido a la no uniformidad del campo externo [6]: se piensa que el flujo es generado por efecto del gradiente de campo magnético, asociado a la forma del recipiente que contiene el fluido, resultando de esta forma, en un campo magnético no uniforme dentro del volumen de ferrofluido (aun cuando el campo magnético aplicado externamente es uniforme), dando origen a la denominada fuerza magnética o de tipo Kelvin. De las anteriores hipótesis, la TDMAI se tendrá en cuenta de manera especial en el presente trabajo de investigación, a la hora de describir los perfiles de flujo de ferrofluidos bajo el efecto de un campo magnético rotativo. El primer mecanismo generador de flujo, propuesto en la TDMAI, es el debido a esfuerzos antisimétricos y la difusión de momento angular interno, al interior del ferrofluido. Asimismo, el segundo mecanismo propuesto es el que se presenta por medio de esfuerzos superficiales, dominantes cerca de la interfase ferrofluido-aire. El primer mecanismo generador ha sido el más estudiado, sin embargo, por muchos años se evaluó de forma equivocada, pues se usaron resultados experimentales de perfiles de velocidad superficiales (los únicos disponibles hasta ese entonces), para evaluar una teoría que aplica solo al interior del ferrofluido (lejos de la interfase). No obstante, debido a la implementación de una nueva técnica para medir perfiles de velocidad, aplicable a fluidos oscuros y basada en ultrasonido [3], se demostró que lejos de la superficie el flujo es generado por esfuerzos de tipo volumétrico, mientras que cerca de la interfase estos dos mecanismos propuestos (esfuerzos tangenciales y volumétricos), se encuentran actuando simultáneamente. Lo anterior, permitió observar diferencias, en magnitud y sentido, entre los perfiles de la interfase y los perfiles en el interior de la muestra ferrofluido. Dicho lo anterior, el análisis que se plantea en esta propuesta se realizará lejos de la interfase ferrofluido-aire, despreciando los efectos tangenciales en la interfase ferrofluido-aire y comparando estos resultados con las mediciones experimentales reportadas en el interior del ferrofluido, en el trabajo de Torres-Díaz *et al.* [2]. Previo a esta propuesta de investigación, en el estudio realizado por Chaves *et al.* [4],

se pudieron obtener a partir de la TDMAI perfiles de flujo de ferrofluidos contenidos en dos geometrías: una cilíndrica y una de cilindros concéntricos o anular, y bajo el efecto de un campo magnético rotativo, de baja intensidad y frecuencia de rotación. A partir de los resultados obtenidos en el modelo propuesto por [4], se pudo obtener concordancia cualitativa, mas no cuantitativa, en comparación con resultados de mediciones experimentales [2]. De forma consecutiva, en el trabajo realizado por Torres-Díaz *et al.* [2], los cuales usaron ferrofluidos con partículas magnéticas de cobalto, se logró mejorar la concordancia cuantitativa en los perfiles de velocidad, aunque persistieron las diferencias entre perfiles teóricos y experimentales, específicamente para altas intensidades y frecuencias de campo magnético. A partir del anterior estudio, los autores concluyeron que las diferencias cuantitativas que se presentaron, fueron debido a las restricciones del modelo propuesto y adicionalmente, debido a que la ecuación de magnetización implementada (ecuación de magnetización propuesta por Shliomis [10]), no sería la más adecuada para la descripción de este tipo de flujo. Dicho lo anterior, lo que busca la presente investigación es evaluar el efecto de implementar una ecuación de magnetización alternativa (ecuación propuesta por Martsenyuk, Raikher y Shliomis [30]), en el sistema de ecuaciones que conforman la TDMAI, al momento de predecir perfiles de velocidad de ferrofluidos que están bajo el efecto de un campo magnético rotativo. De modo que, al implementar esta ecuación en la descripción del problema magnético, el nuevo sistema de ecuaciones de la TDMAI, y su respectiva solución, pueda aplicarse para casos de altas intensidades y frecuencias de rotación del campo magnético, y de esta forma, se puedan comparar estos resultados con las mediciones experimentales disponibles en la literatura.

# CAPÍTULO 1

---

## GENERALIDADES DEL PROYECTO

---

### 1.1 ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO

Con el fin de establecer un orden en el documento de la tesis, el presente escrito se ha dividido en cuatro capítulos. A continuación, se realiza una breve descripción de cada uno de estos capítulos.

**Capítulo I:** inicialmente, se presentan algunos conceptos de la ferrohodinámica implementada en la investigación, es decir, se presentan las variables y ecuaciones que pretenden describir el fenómeno de generación de flujo en ferrofluidos, bajo el efecto de un campo magnético externo. Además, se presentan los aportes de los diferentes autores en el tema, es decir, el estado del arte. Asimismo, en este capítulo se hace el planteamiento del problema específico, la hipótesis y la pregunta de investigación de esta tesis. Con base en lo anterior, se expone tanto el objetivo general como los objetivos específicos y finalmente, la metodología llevada a cabo en la investigación.

**Capítulo II:** en este capítulo se resuelve el modelo ferrohodinámico en una geometría rectangular, debido a la simplicidad que se presenta al implementar las ecuaciones vectoriales, en un sistema conformado por un canal rectangular de placas planas y paralelas de longitud axial infinita, y dominio unidimensional. Los resultados aquí mostrados son obtenidos de los trabajos previos, realizados por Chaves *et al.*[5, 31, 32]. Primeramente, se muestran los resultados obtenidos por [5, 31], para un dominio de una sola dimensión (por ser el sistema más simple) y posteriormente, como aporte de la presente investigación, se resuelve para un dominio bidimensional, que tiene en cuenta tanto la altura como el ancho del canal. Para una mayor ilustración ver figura 7 y 18. En esta geometría, el campo rotativo se genera a través de la superposición de un campo alternante en dirección axial y otro en dirección transversal, con un desfase eléctrico entre ambos devanados. El aporte en este capítulo, está relacionado con los perfiles obtenidos para un ferrofluido contenido en un dominio bidimensional, bajo el efecto de densidades de campo magnético de intensidad y frecuencia de rotación no baja, así como también, la corrección de la condición de frontera dinámica de la velocidad

de giro, en la interfase ferrofluido-aire, la cual fue implementada erróneamente en el trabajo de maestría de Alviz [32].

**Capítulo III:** en esta parte del documento se aplican las ecuaciones vectoriales del modelo ferrohodinámico a un cilindro de longitud axial infinita. Además, se supone que el campo es generado por una corriente superficial que atraviesa las paredes del cilindro en dirección  $+\mathbf{i}_z$ , la cual produce un campo magnético rotativo alrededor de esta misma coordenada. Debido a la simetría del contenedor cilíndrico, el análisis se realiza de forma unidimensional, despreciando los efectos de borde que se presentan en la parte inferior y superior del contenedor. Para una mayor ilustración ver figura 33.

**Capítulo IV:** se presentan los perfiles de velocidad para una geometría anular (coaxial) de longitud axial infinita. Al igual que en la geometría cilíndrica, se supone que el campo es generado por una corriente que atraviesa las paredes del cilindro externo en dirección  $+\mathbf{i}_z$ . Por otro lado, a diferencia de las anteriores geometrías, se tiene en cuenta la no uniformidad del campo magnético, por lo que se agrega un término adicional en la ecuación dinámica de la conservación del momento lineal. Finalmente, en esta geometría se debe tener en cuenta que en las paredes del cilindro interno, se requiere implementar las condiciones de frontera magnéticas, con el fin de resolver las ecuaciones de Maxwell, tanto la ley de Gauss para el campo magnético, como la ley de Ampère generalizada.

Las principales observaciones y conclusiones de cada geometría en estudio se exponen al final de cada capítulo. Adicionalmente, después del capítulo IV, se plantean algunas recomendaciones y trabajos futuros, con el fin de dar continuidad a la investigación en curso, entendiendo que aun quedan no pocos temas por abordar, en relación con el análisis del fenómeno de la generación de flujo de ferrofluidos, por la acción de campos magnéticos rotativos. Finalmente, antes de incluir algunos anexos, se registran las referencias bibliográficas utilizadas en esta investigación.

## 1.2 MARCO TEÓRICO

La ferrohodinámica, según Rosensweig [9], es la rama de la mecánica de fluidos que estudia el comportamiento de los fluidos influenciados por fuerzas de polarización magnética, pero que no son conductores de electricidad. Básicamente esta ciencia está dividida a su vez en dos partes: la ferrohodinámica de cuasi-equilibrio, la cual involucra el uso de campo magnéticos estáticos; y la ferrohodinámica de campos magnéticos rotativos, la cual se caracteriza por la generación de esfuerzos asimétricos. Esta última, es la rama bajo la cual se desarrolla la presente propuesta doctoral. Se puede considerar que esta ciencia inició en 1964, cuando Neuringer y Rosensweig [7] definieron ferrohodinámica como el estudio de la dinámica de los fluidos y la transferencia de calor, asociada al movimiento de fluidos incompresibles y magnéticamente polarizables, en presencia de campos magnéticos (estáticos y rotativos) y gradientes de temperatura.

Posteriormente, en 1967 Moskowitz y Rosensweig [8] reportaron por primera vez la generación de flujo de estos fluidos por la única acción de un campo magnético. Dos años después, Zaitsev y Shliomis [26], propusieron una teoría para explicar el mecanismo que genera el flujo de un ferrofluido, cuando este se encuentra sometido bajo la influencia de un campo magnético rotativo. Esta explicación propone que el flujo es producido por la difusión de momento angular interno, desde las partículas hacia la matriz del fluido, con posterior conversión en movimiento macroscópico. Esta teoría se basa en el carácter ferromagnético de las nanopartículas que conforman el ferrofluido [9]. Esta particularidad genera la rotación de las partículas, en el intento de alinear su momento magnético  $\mathbf{M}$ , en la dirección del vector de campo magnético  $\mathbf{H}$ . El grado de alineación de  $\mathbf{M}$  con el vector  $\mathbf{H}$  depende de la relación entre fuerzas magnéticas y térmicas (o Brownianas). Por tal razón, a altas intensidades de campo magnético, donde las fuerzas magnéticas superan las térmicas, el momento magnético de las nanopartículas del ferrofluido llega a estar paralelo al vector de campo magnético, alcanzando el ferrofluido su magnetización de saturación  $\mathbf{M}_0$ . Este fenómeno de alineación de los vectores  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{H}$  es generado por un torque magnético,  $\mu_0 (\mathbf{M} \times \mathbf{H})$ , que aparece siempre que  $\mathbf{H}$  deja de ser paralelo a  $\mathbf{M}$ . En la figura 1 se muestra la ilustración de esta respuesta por parte de las partículas magnéticas (verde) ante un campo magnético externo (rojo). Sin embargo, hay dos mecanismos a través de los cuales el momento magnético de la partícula puede alcanzar su nueva posición de equilibrio. 1) el mecanismo de relajación de Néel, en el cual el vector de momento magnético rota libremente dentro de la partícula, sin rotación de la partícula; y 2) un mecanismo de relajación Browniano, que se caracteriza porque el vector de momento magnético rota al unísono con la partícula [33, 34]. Este último mecanismo de relajación es el responsable del comportamiento reológico particular de los ferrofluidos que se encuentran bajo el efecto de un campo magnético. Cada uno de los mecanismos de relajación está caracterizado por un tiempo de relajación. La expresión del tiempo de relajación Browniano es [35],

$$\tau_B = \frac{3\eta_0 V_h}{k_B T}, \quad (1)$$

en donde el tiempo de relajación  $\tau_B$  es directamente proporcional a la viscosidad del líquido en el que se encuentran suspendidas las nanopartículas  $\eta_0$ , al volumen de la partícula  $V_h$ , e inversamente proporcional a la constante de Boltzman  $k_B$ , y la temperatura absoluta del sistema  $T$ , la cual es constante debido a que se asume que el proceso es isotérmico.

De igual manera, la expresión del tiempo de relajación de Néel es [35],

$$\tau_N = \frac{1}{f_0} \exp\left(\frac{KV_c}{k_B T}\right), \quad (2)$$

en donde el tiempo de relajación de Néel  $\tau_N$  es inversamente proporcional a la frecuencia  $f_0$ , la cual tiene un valor aproximado de 109 Hz. Este valor fue encontrado para un ferrofluido compuesto de magnetita en kerosene. Adicionalmente, el tiempo de relajación de Néel depende de manera exponencial de la relación entre el volumen de la partícula  $V_c$ , la constante anisotrópica del material  $K$ , la constante de Boltzman

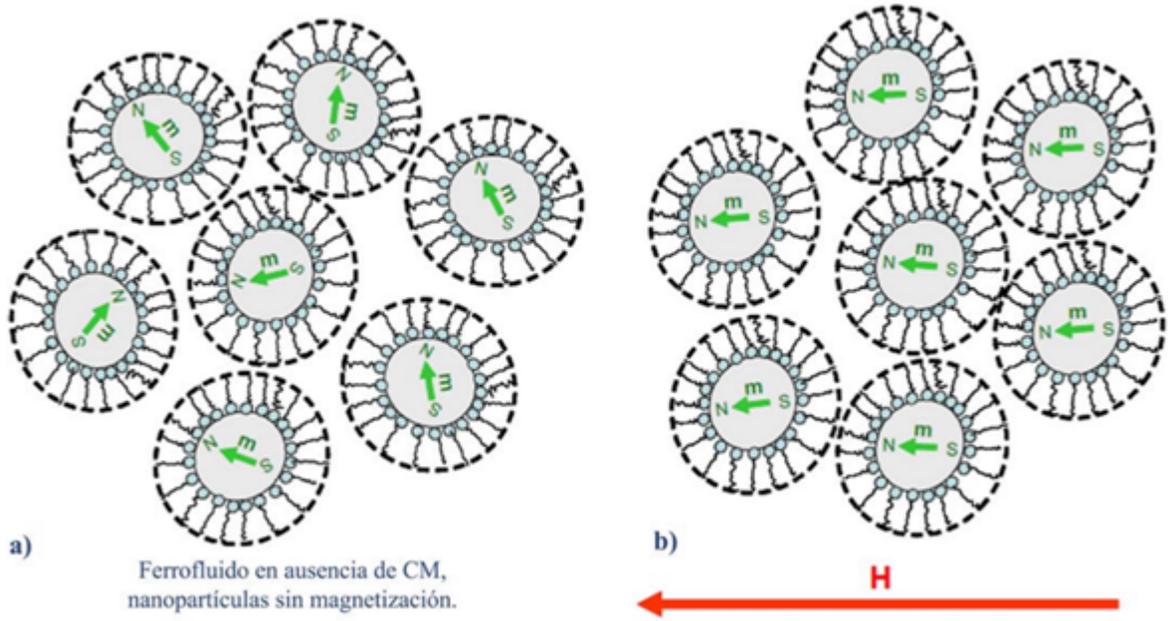


Figura 1: Esquema de dispersión coloidal de partículas magnetizadas permanentemente (ferrofluido) sujetas a un movimiento de rotación Browniano, a) en ausencia de campo magnético aplicado y b) sometido a un campo magnético de magnitud  $|\mathbf{H}|$ . Fuente: [1]

$k_B$ , y la temperatura absoluta  $T$ . Teniendo en cuenta los efectos de cada uno de los mecanismos de relajación presentes en las nanopartículas magnéticas, el cálculo del tiempo de relajación efectivo  $\tau$ , para la muestra de ferrofluido, se muestra a continuación [35],

$$\tau = \frac{\tau_B \tau_N}{\tau_B + \tau_N}. \quad (3)$$

En la figura 2 se muestra una curva típica para el tiempo de relajación Browniano (verde), Néel (azul) y efectivo (rojo) de un ferrofluido base agua. De esta figura se puede observar que el tiempo de relajación efectivo corresponde, aproximadamente, al tiempo de relajación más corto entre los dos mecanismos. Por lo tanto,  $\tau = \tau_B$  cuando el radio de la partícula supera los 6 nm. Es de notar que los tiempos de relajación están relacionados con el diámetro de las nanopartículas que componen al ferrofluido. De ahí que, se presentaría la rotación de las nanopartículas en la matriz del ferrofluido ante la presencia de un campo magnético rotativo.

Por otro lado, al aplicar el modelo continuo a fluidos incompresibles, de acuerdo con lo establecido por Dahler *et al.* [36, 37], se tiene que, en ausencia de un campo magnético externo, la velocidad de giro promedio de las partículas ( $\omega$ ) es igual a la mitad de la vorticidad local del fluido, es decir,  $\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$ , en donde  $\mathbf{v}$  es el vector de velocidad lineal promedio. En este caso, el fluido se comporta como un fluido newtoniano, el cual se caracteriza por un tensor de esfuerzos simétrico, esto es,  $\boldsymbol{\sigma} = \eta [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t] - \delta p$ , en donde  $\boldsymbol{\sigma}$  representa el tensor de esfuerzo,  $\eta$  la viscosidad de cizalla,  $p$  la presión

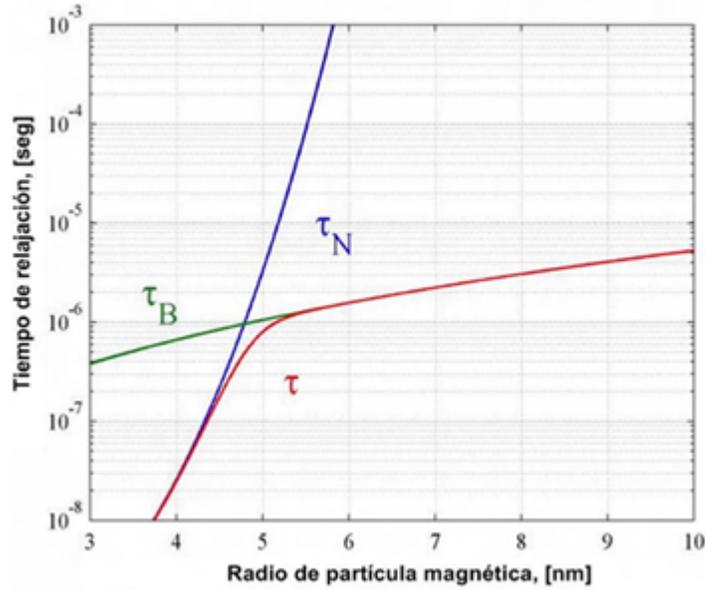


Figura 2: Tiempos de relajación Browniano  $\tau_B$  (verde), tipo Néel  $\tau_N$  (azul) y efectivo  $\tau$  (rojo), en función del radio de la nanopartícula magnética. Fuente: [1].

del sistema y  $\delta$  el tensor unitario de orden dos o diada unitaria. Sin embargo, ante la presencia de un campo magnético rotativo, las partículas tienen una velocidad de giro promedio local diferente a la vorticidad de las capas del fluido, en otras palabras,  $\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} \neq \boldsymbol{\omega}$  [36, 37]. Por tal motivo, se genera un proceso de disipación mecánica análogo al efecto de fricción entre las capas de fluido que se desplazan linealmente, el cual se caracteriza por la viscosidad dinámica del fluido, es decir, los esfuerzos antisimétricos son el mecanismo por medio del cual se da la transformación de momentum lineal a momentum angular interno, y responde al acoplamiento entre el giro interno de las partículas magnéticas y la vorticidad de las capas del fluido portador. Este efecto de fricción o esfuerzo es descrito por medio de los esfuerzos antisimétricos, los cuales están relacionados con el término  $\nabla \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}$ , y por tanto, se ha sugerido que dichos esfuerzos deben ser incluidos en un tensor de esfuerzos antisimétrico de la forma  $\boldsymbol{\sigma} = \eta[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t] + \zeta \boldsymbol{\epsilon} \cdot (\nabla \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) - \delta p$  [37]. En donde  $\zeta$  es la viscosidad de vortice y  $\boldsymbol{\epsilon}$  el tensor alternante.

Por consiguiente, la velocidad de giro de las partículas  $\boldsymbol{\omega}$  viene a constituirse como una nueva variable del sistema, así como la velocidad lineal  $\mathbf{v}$ , la densidad del fluido  $\rho$ , y la presión  $p$ . De ahí que,  $\boldsymbol{\omega}$  debe estar sujeta a una ecuación de balance o ecuación de cambio. Dicha ecuación es la de balance de momento angular interno (ver Ec. (25)), deducida por Dahler y Scriven [36] (a partir de la teoría de mecánica estadística y aplicada originalmente a procesos de transporte de fluidos formados por moléculas poliatómicas), la cual fue obtenida nuevamente por Dahler y Scriven [38] a partir de argumentos de la mecánica de medios continuos.

En este orden de ideas, de acuerdo a lo establecido en [36], el sistema de ecuaciones del problema dinámico está conformado por: la ecuación de continuidad para un fluido

incompresible, la ecuación de momento lineal de Cauchy y el balance del momento angular interno; las cuales se presentan en las Ec. (4)-(6).

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (5)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{l}}{Dt} = \rho \mathbf{G} + \nabla \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A}. \quad (6)$$

En la Ec. (5)  $\rho \mathbf{F}$  representa las fuerzas de cuerpo que actúan sobre la masa del ferrofluido (momento lineal generado por un campo externo) y  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de esfuerzos (simétricos y antisimétricos). En la dinámica de fluidos clásica se acostumbra considerar que  $\boldsymbol{\sigma}$  es simétrico, argumento que es válido sólo para fluidos en los que no hay torques a nivel microscópico ni difusión de momento angular interno. Por su parte, en la Ec. (6), en el lado izquierdo  $\rho \frac{D\mathbf{l}}{Dt}$  representa la razón de acumulación de momento angular interno dentro de un volumen de fluido de tamaño diferencial,  $\rho \mathbf{G}$  representa la densidad de torque magnético (“*body-couple*”) proveniente de un campo externo,  $\nabla \cdot \mathbf{C}$  el torque superficial neto y describe la transferencia de momento angular interno por difusión desde entornos contiguos y por último,  $\mathbf{A}$  representa el intercambio de momento lineal y momento angular interno debido al tensor de esfuerzos antisimétricos. No obstante, con el fin de igualar el número de variables a determinar con el número de ecuaciones disponibles, se hace necesario introducir las ecuaciones constitutivas para  $\rho \mathbf{F}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\rho \mathbf{G}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{A}$ . Estas ecuaciones se presentan a continuación, las cuales han sido propuestas principalmente por Condiff, Dahler y Rosensweig [9, 37].

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \eta[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t] + \zeta \boldsymbol{\epsilon} \cdot (\nabla \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) - \delta p, \\ \mathbf{C} &= \eta'[\nabla \boldsymbol{\omega} + (\nabla \boldsymbol{\omega})^t] + \lambda'(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\delta}, \\ \mathbf{l} &= I\boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{A} &= 2\zeta \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right), \\ \rho \mathbf{G} &= \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}, \\ \rho \mathbf{F} &= \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (7)$$

En las ecuaciones anteriores,  $\mathbf{v}$  representa el vector de velocidad lineal en el ferrofluido,  $\eta$  el coeficiente fenomenológico “*shear viscosity*”,  $\boldsymbol{\omega}$  la velocidad de giro de las partículas magnéticas,  $p$  la presión del sistema,  $\eta'$  el coeficiente fenomenológico “*spin viscosity*”,  $\lambda'$  la viscosidad dilatoria,  $\boldsymbol{\delta}$  el tensor unitario de segundo orden,  $\mathbf{l}$  el tensor que simula el momento de inercia promedio de las partículas,  $\mathbf{l}$  el vector de densidad de momentum angular interno, el cual tiene en consideración las contribuciones debidas a las rotaciones moleculares, esto es,  $\mathbf{l} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$ , lo que para moléculas que no son demasiado flexibles se puede considerar como un tensor constante y, si el fluido es isotrópico, se tiene que  $\mathbf{I} = I\boldsymbol{\delta}$ , entonces  $\mathbf{l} = I\boldsymbol{\omega}$ . Finalmente,  $\zeta$  representa el coeficiente fenomenológico denominado viscosidad de vórtice (“*vortex viscosity*”), para la cual Brenner [39] propuso la expresión:

$$\zeta = 1,5\phi_n\eta_0. \quad (8)$$

La anterior ecuación es válida en el límite de dilución infinita, es decir, cuando la concentración del soluto tiende a cero. En esta expresión,  $\phi_h$  es la fracción volumétrica hidrodinámica de partículas magnéticas en la suspensión y  $\eta_0$  es la viscosidad dinámica del fluido en donde se encuentran suspendidas las partículas magnéticas. Reemplazando estas ecuaciones constitutivas en las respectivas ecuaciones de momento lineal y momento angular interno, y aplicando las identidades vectoriales adecuadas, se obtiene el sistema dinámico del problema de flujo descrito en la Ec. (9) y (10).

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} - \nabla p - 2\zeta \nabla \times \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right) + \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (9)$$

$$\rho I \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} + \eta' \nabla^2 \boldsymbol{\omega} - 2\zeta \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right). \quad (10)$$

En la Ec. (9), el primer término del lado derecho representa la fuerza de cuerpo generada por gradientes de campo magnético, llamada fuerza magnética o fuerza tipo Kelvin. Esta es una fuerza de cuerpo similar a la fuerza ejercida por la gravedad sobre un ferrofluido [40], y es la forma como el campo magnético externo genera momentum lineal en el fluido. Adicionalmente, se debe tener en cuenta que  $\mathbf{M}$  es el vector de magnetización del ferrofluido y  $\mathbf{H}$  el vector de intensidad de campo magnético externo. Por último, el conjunto de ecuaciones ferrohídrodinámicas, requiere también de ecuaciones que describan el comportamiento magnético del problema, como lo son la ecuación de balance para la magnetización del ferrofluido, la ecuación que describe la saturación del ferrofluido y las ecuaciones de Maxwell. De forma inicial, se presenta en la Ec. (11) la ecuación de balance para la magnetización del ferrofluido, conocida como ecuación de Shliomis [10], la cual será nombrada en este documento como Sh-72.

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{M}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} - \frac{1}{\tau} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0). \quad (11)$$

Donde  $\mathbf{M}$  es el vector de magnetización y  $\boldsymbol{\omega}$  la velocidad de giro promedio de las partículas magnéticas. La ecuación para el término de la magnetización de equilibrio  $\mathbf{M}_0$  es dada por la ecuación de Langevin [41], la cual se describe a través de la expresión:

$$\frac{M_0}{\phi M_d} = L(\alpha) \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} = \left[ \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \right] \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}, \alpha = \frac{\mu_0 M_d |\mathbf{H}| V_c}{k_B T}. \quad (12)$$

Donde  $L(\alpha)$  representa la función de Langevin,  $\alpha$  el parámetro de Langevin,  $M_d$  la magnetización de dominio de las nanopartículas,  $k_B$  la constante de Boltzman,  $T$  la temperatura absoluta y  $V_c$  el volumen magnético de la partícula magnética.

Se debe tener en cuenta que la ecuación Sh-72 tiene restricciones en su aplicación, ya que sólo es válida para cuando el ferrofluido está bajo el efecto de campos magnéticos

rotativos de amplitudes y frecuencias de baja magnitud, como también, cuando la magnetización local de las nanopartículas no se desvía mucho del valor de equilibrio,  $\mathbf{M}_0$  [26]. Por tal motivo, se intuye que la falta de precisión en el sistema de ecuaciones ferrohídrodinámicas, es debida a la inclusión de la ecuación Sh-72 para la predicción de perfiles. Sin embargo, existen otras ecuaciones de magnetización que pueden ser libres de estas restricciones, no obstante, introducen un alto grado de no linealidad al sistema de ecuaciones diferenciales, haciendo difícil una solución analítica del problema. Una de estas ecuaciones es la Ec. (13), la cual fue propuesta por Martsenyuk, Raikher y Shliomis [30], y será nombrada en este documento como MRSh-74.

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} - \frac{\mathbf{H} [\mathbf{H} \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)]}{\tau_{\parallel} |\mathbf{H}|^2} - \frac{\mathbf{H} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})}{\tau_{\perp} |\mathbf{H}|^2}. \quad (13)$$

En el trabajo de Soto-Aquino y Rinaldi [42], se obtuvieron mejores resultados al implementar la Ec. (13) en comparación con los resultados al implementar la Ec. (11), al momento de determinar el parámetro de la magneto-viscosidad intrínseca, en diluciones de ferrofluidos para diferentes intensidades de campo magnético. Esto es, en el estudio reológico de suspensiones diluidas de nanopartículas esféricas en un fluido Newtoniano, y bajo el efecto de campos magnéticos constantes, se observó una excelente concordancia entre las predicciones de la magneto-viscosidad intrínseca, a partir de la ecuación de relajación MRSh-74, y simulaciones directas (simulaciones en dinámicas de fluido computacional, en las que las ecuaciones de Navier-Stokes son resueltas numéricamente, sin ningún modelo de turbulencia), mientras que las predicciones con base en la ecuación Sh-72 presentaron desviaciones entre las predicciones y estas mismas simulaciones. Teniendo en cuenta lo anterior, se podría suponer que al implementar la ecuación MRSh-74 en la TDMAI, se obtendrían mejores predicciones de los perfiles de velocidad, en comparación con los que se puedan obtener a partir de la ecuación Sh-72.

Así mismo, la ecuación MRSh-74 se caracteriza por tener dos tiempos de relajación: uno para la componente longitudinal y otro para la componente transversal de la magnetización. Donde las constantes de tiempo  $\tau_{\parallel}$  y  $\tau_{\perp}$  son los tiempos de relajación paralelo y perpendicular, respectivamente [30], los cuales se definen en la Ec. (25).

$$\tau_{\parallel} = \frac{d \ln L(\alpha)}{d \ln \alpha} \tau_B, \quad \tau_{\perp} = \frac{2L(\alpha)}{\alpha - L(\alpha)}. \quad (14)$$

La ecuación de relajación MRSh-74 es una ecuación microscópica para la magnetización del ferrofluido, la cual establece que la función de distribución de las partículas suspendidas en un fluido, con respecto a la orientación de su momento magnético, está sujeta a la ecuación de Fokker-Planck [30].

Finalmente, se implementan dos ecuaciones de Maxwell [43] para completar el sistema de ecuaciones magnéticas que describen el problema, las denominadas ley de Gauss y ley de Ampere-Maxwell, descritas en la Ec. (15).

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0. \quad (15)$$

Las condiciones de frontera, requeridas para la solución del problema magnético, son la continuidad de la componente normal de la densidad de campo magnético,  $\mathbf{B}$ , y la discontinuidad de la componente tangencial de la intensidad de campo magnético,  $\mathbf{H}$  [9], descritas en la Ec. (16) y (17).

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_a - \mathbf{B}_b) = 0, \quad (16)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b) = \mathbf{K}_s. \quad (17)$$

En donde  $\mathbf{K}_s$  representa la magnitud de una distribución de corriente en la superficie del ferrofluido,  $\mathbf{B}$  la densidad de campo magnético,  $\mathbf{H}$  la intensidad de campo magnético y finalmente,  $a$  y  $b$  representan las fases del sistema en estudio. Una de las condiciones de frontera, generalmente usada para la solución de las ecuaciones que describen el problema hidrodinámico, es la condición de no penetración para velocidad lineal [44] descrita en la Ec. (18).

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_s = \frac{1}{\beta} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \times \mathbf{n})]. \quad (18)$$

En la Ec. (18),  $\mathbf{n}$  representa el vector unitario en dirección normal de la interfase,  $\beta$  el coeficiente de fricción dependiente de la velocidad de deslizamiento,  $\mathbf{v}_s$  la velocidad en la pared del contenedor y  $\mathbf{T}$  el tensor de esfuerzos de Cauchy en el fluido. De manera similar, para la velocidad de giro promedio local de las partículas, se ha propuesto una condición de frontera en la que se plantea la posibilidad de que la partícula, cerca de una superficie sólida, gire a la misma velocidad de la superficie ( $\beta = 0$ ), condición de no deslizamiento, o que rote a una velocidad de giro similar a la rotación del fluido ( $\beta \neq 0$ ) [44].

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_s = \frac{\beta}{2} (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (19)$$

En la Ec. (19),  $\boldsymbol{\omega}$  es la velocidad de giro promedio de las partículas magnéticas,  $\boldsymbol{\omega}_s$  la velocidad de giro en la pared del contenedor y  $\beta$  el coeficiente de fricción, el cual depende de la velocidad de deslizamiento.

### 1.3 ESTADO DEL ARTE

A continuación, se muestra una breve reseña del estado del arte de los artículos relacionados con la ferrohodinámica a partir del año 1964.

---

**Estado del arte: ferrohidrodinámica**

---

1964	Neuringer-Rosensweig	Definen ferrohidrodinámica como el estudio de la dinámica de los fluidos y la transferencia de calor, asociada al movimiento de fluidos incompresibles y magnéticamente polarizables, en presencia de campos magnéticos (estáticos y rotativos) y gradientes de temperatura [7].
1967	Mozkowitz-Rosensweig	Primera observación de flujo de un ferrofluido generado por un campo magnético rotativo, el cual se presentó en un recipiente cilíndrico.
1969	Zaitsev-Shliomis	Plantearon que el flujo de estos fluidos es producido por la difusión de momento angular interno, desde las partículas magnéticas hacia la matriz del líquido portador. Lo anterior, generado por la rotación de un campo magnético externo aplicado. Por lo tanto, establecieron que solo se puede generar flujo en ferrofluidos si el coeficiente de "spin viscosity" es diferente de cero. Esta teoría es conocida como la teoría de difusión de momento angular interno. En el análisis se asumió que el campo magnético rotativo es espacialmente uniforme, lo que conlleva a la ausencia de fuerzas magnéticas sobre el ferrofluido. Su solución analítica predijo el flujo del ferrofluido yendo en la misma dirección de rotación del campo magnético, y un perfil de velocidad lineal similar al de un cuerpo rígido en la mayor parte del cilindro, con una delgada capa límite donde la velocidad llega rápidamente desde su valor máximo a cero [26].
		<p>Estos resultados analíticos fueron comparados, posteriormente, con perfiles de velocidad medidos en la superficie del fluido, lo cual fue una consecuencia de la imposibilidad de las técnicas experimentales del momento para medir perfiles de velocidad en el interior del volumen del fluido. Esta limitación se presentó debido al color oscuro característico de los ferrofluidos. Esta comparación mostró que la teoría efectivamente podía describir las características más importantes del perfil de velocidad, con excepción de la dirección del flujo, ya que varios investigadores observaron que el ferrofluido viajaba en dirección contraria a la rotación del campo magnético.</p> <p>Otra duda importante surgió al momento de determinar el valor de la magnitud del flujo, el cual, según la teoría propuesta por Zaitsev y Shliomis, depende directamente de la magnitud del coeficiente fenomenológico "<i>spin viscosity</i>", del cual no existe certeza sobre su valor hasta nuestros días, debido a los diferentes valores planteados por diferentes autores.</p>

---

---

**Estado del arte: ferrohidrodinámica**

---

1997    Rosensweig

Realizó un análisis de orden de magnitud para estimar el valor del coeficiente *spin viscosity*, hallando que este debe ser proporcional al producto de la viscosidad del ferrofluido y el cuadrado de la longitud promedio entre partículas; obteniendo un orden de magnitud de  $10^{-20} \text{ Kg m s}^{-1}$ . Sin embargo, cuando este bajo valor de "*spin viscosity*" es usado en la teoría de difusión de momento angular interno, se obtiene una magnitud de flujo del ferrofluido cuatro órdenes de magnitud más baja que la magnitud experimentalmente observada [9].

---

Como consecuencia de las falencias de la teoría de difusión de momento angular interno para explicar la contra-rotación entre ferrofluido y campo magnético, y la baja magnitud de flujo obtenida por medio de esta, se propusieron otras teorías tratando de explicar el fenómeno de la generación del movimiento. Un breve resumen de esas teorías se muestra a continuación.

---

1975    Glazov

Planteó una serie de artículos en la década del 70, en donde argumenta que el flujo de ferrofluidos es producido por armónicos espaciales de alto orden, generados por no idealidades inherentes a estatores eléctricos de dos polos, como los son los efectos de ranura y la longitud finita del estator eléctrico. Para probar su teoría, Glazov desarrolló un análisis de flujo en el cual eliminó el efecto de difusión de momento angular interno, pero tuvo en cuenta otros armónicos además del fundamental en el modelado del campo magnético rotativo. Este análisis arrojó como resultado que, no es posible generar el flujo del ferrofluido por el efecto del armónico fundamental por sí solo, y por lo tanto, las observaciones experimentales son el resultado de deficiencias en el motor trifásico de dos polos, en el cual se llevaron a cabo las observaciones de flujo del ferrofluido [27, 28].

---

---

**Estado del arte: ferrohidrodinámica**

---

2011	Torres-Díaz y Rinaldi	<p>Realizaron un nuevo análisis que incluía valores de los armónicos de orden 1, 2, 4 y 16. Estos resultados analíticos mostraron que cuando el coeficiente de <i>spin viscosity</i> es cero, no se producía flujo en el fluido independientemente del valor del armónico. No obstante, cuando se tenía en cuenta la difusión del momento angular interno (<i>spin viscosity</i> diferente de cero), se generaba flujo con características dependientes del valor del armónico. Estos resultados analíticos fueron validados experimentalmente a través de medidas de perfiles de velocidad, tomados al interior del ferrofluido usando un campo magnético rotativo generado por un estator eléctrico de dos polos. Estos resultados presentaron a la teoría de difusión de momento angular interno, como la que mejor explica el flujo aún bajo condiciones de campo magnético espacialmente heterogéneos [18].</p>
<hr/>		
1990	Rosensweig <i>et al.</i>	<p>Postularon otra teoría que plantea que el flujo en ferrofluidos es generado por esfuerzos magnéticos tangenciales que operan en la interfase aire/fluido. A diferencia de las otras teorías, esta permitió explicar la contra rotación entre el flujo y el campo magnético como un efecto de la curvatura de la interfase aire fluido, es decir, cuando la superficie es cóncava, la dirección de flujo es contraria a la del campo magnético. Sin embargo, cuando la superficie de la interfase es convexa el flujo y el campo magnético van en la misma dirección. Esta teoría fue demostrada experimentalmente usando un ferrofluido en un tubo capilar. Esta nueva propuesta sumada a la imposibilidad de medir perfiles de velocidad al interior del ferrofluido, hizo dudar a la comunidad científica de la existencia del flujo al interior del fluido [15].</p>
<hr/>		
2005 2006	Krauss <i>et al.</i>	<p>Dieron otra evidencia de un flujo superficial de ferrofluido generado por un campo magnético rotativo. Diseñaron un canal circular de sección transversal cuadrada, donde parte del ferrofluido está en contacto con el aire. Este canal fue adaptado con dos embobinados que permitieron generar un campo magnético rotativo. Los experimentos demostraron que la magnitud del flujo incrementa con la magnitud del campo magnético aplicado, y que la dependencia sobre la frecuencia del campo correlaciona con el espectro de la susceptibilidad compleja de los ferrofluidos. Un ferrofluido con partículas de magnetita y otro con partículas de cobalto fueron usados en el estudio [45, 46].</p>

---

---

**Estado del arte: ferrohidrodinámica**

---

2007 Rosensweig Los experimentos de Krauss motivaron a Rosensweig a proponer un balance interfacial, como condiciones de frontera, que fuera capaz de explicar el fenómeno observado [47].

---

Sin embargo aunque son novedosos e importantes los análisis de Krauss y Rosensweig, estos no consideran los potenciales efectos de la transferencia de momento angular interno por contacto directo, efecto relacionado con el transporte difusivo, representado en las ecuaciones ferrohidrodinámicas por el *Couple stress tensor* y el coeficiente fenomenológico de *spin viscosity*  $i$ .

---

2006 Chaves *et al.* Usando la misma geometría implementada por Mozkowitz y Rosensweig [8], Chaves *et al.*, [16], reportaron las primeras medidas de perfiles de velocidad al interior del ferrofluido. Estas medidas de perfiles de velocidad se obtuvieron, usando una técnica basada en la emisión periódica de señales de ultrasonido a través del fluido, al cual previamente se le ha agregado una pequeña cantidad de partículas de densidad similar a la del ferrofluido, que actúan como trazadoras del flujo. Esta nueva técnica permite medir perfiles de velocidad en fluidos oscuros y en tiempo real. Estos resultados de perfiles de velocidad medidos en la mitad de la altura del contenedor concuerdan cuantitativamente bien con las predicciones de la TDMAI. Por el contrario, los perfiles experimentales medidos a una altura cercana a la superficie libre (aire-fluido) mostraron el flujo del ferrofluido yendo en dirección contraria a la rotación del campo. Estos experimentos permitieron concluir que en la generación del flujo operan 2 mecanismos diferentes: esfuerzos magnéticos tangenciales que actúan cerca de la superficie libre y esfuerzos volumétricos actuando al interior del fluido. Adicionalmente, estos resultados mostraron que las medidas experimentales de flujo tomadas en la superficie del fluido son inapropiadas para evaluar teorías como la difusión de momento angular interno, ya que no representan las condiciones de flujo en el interior del fluido y por lo tanto, esta teoría había sido desechada erróneamente.

---

---

**Estado del arte: ferrohidrodinámica**

---

Motivados por la anterior evidencia experimental, Chaves *et al.*[3, 6] obtuvieron soluciones asintóticas del problema de flujo para un ferrofluido en un contenedor cilíndrico, y entre el espacio anular de dos cilindros coaxiales infinitamente largos. Para estos análisis fue utilizado el parámetro de perturbación mostrado en la Ec. (20). La principal diferencia entre estos dos problemas surge del hecho de que el campo magnético en el espacio anular es heterogéneo, lo que genera una componente acimutal de la fuerza magnética que influye en el flujo; contrario al caso del flujo en el cilindro donde no existen fuerzas magnéticas tipo Kelvin, debido a la uniformidad del campo magnético. Para obtener estas soluciones se usó el método de perturbación regular que involucra un parámetro de perturbación,  $\varepsilon$ , obtenido a partir del escalamiento de las ecuaciones ferrohidrodinámicas, tal como se describe en [3]. En este análisis no se usó la aproximación usual, en la que el vector de magnetización es proporcional al vector de campo magnético, en vez de lo anterior, se realizó una expansión en series de potencias de la ecuación de Langevin, que permitió introducir el efecto de la amplitud del campo magnético para cada orden de la expansión asintótica. Debido a la complejidad del problema, sólo se pudo obtener soluciones para el campo de velocidad hasta un orden máximo de uno en un contenedor cilíndrico, y orden cero en la solución de flujo anular (valores de  $\varepsilon$  que tienden a cero), lo que para efectos prácticos, son soluciones válidas en casos donde la amplitud del campo magnético tiende a cero. Los perfiles de velocidad analíticos para el flujo en ambas geometrías fueron presentados. Para dar una idea del rango de aplicación en cuanto a la amplitud del campo magnético de las soluciones obtenidas, se puede observar que para obtener un perfil de velocidad a una intensidad del campo magnético de 5 mT, es necesario tener en la solución términos de hasta orden tres, mientras que los perfiles de velocidad experimentales han sido obtenidos por arriba de los 10 mT. Esto implica que la solución para los perfiles de velocidad en el cilindro, aplica solo a amplitudes bajas del campo magnético, mientras que para el caso del flujo en el anular de la solución asintótica, aplica estrictamente al caso en que la amplitud del campo magnético tiende a cero.

2008  
2010 Chaves *et al.*

---

**Estado del arte: ferrodinámica**

---

<p>2008 Chaves <i>et al.</i> 2010 (Continuación)</p>	<p>Los autores concluyeron que los perfiles predichos por la TD-MAI, concuerdan con los medidos experimentalmente usando el método de perfiles de velocidad por ultrasonido, por lo que la mencionada teoría puede ser el mecanismo que describe el flujo. Sin embargo, aún la magnitud del flujo experimental sigue siendo mayor a la obtenida por los análisis teóricos. Adicionalmente, Chaves <i>et al.</i> [3, 6] obtuvieron un valor del parámetro de "spin viscosity", usando una expresión analítica para la velocidad extrapolada en la pared del canal y resultados experimentales de velocidad, el cual lo ubica en el rango de orden de magnitud entre <math>10^{-8}</math> y <math>10^{-12}</math> <math>\text{Kgms}^{-1}</math> y que contrasta con el valor de <math>10^{-20}</math> <math>\text{Kgms}^{-1}</math> predicho por Rosensweig, y posteriormente por Feng <i>et al.</i> [48]. De nuevo se debe resaltar que este valor es solo un estimado, ya que se obtuvo por comparación entre resultados experimentales obtenidos con un campo magnético de alta amplitud versus la solución analítica que aplica estrictamente a bajas intensidades de campo magnético [3, 6].</p>
<p>2011 Khushrushahi-Zahn</p>	<p>Afirmaron que más que la difusión del momento angular interno, la causa del flujo y de los altos valores de velocidad medidos por Chaves <i>et al.</i> [3, 6], son fuerzas magnéticas generadas por la desmagnetización del ferrofluido, causadas a su vez por la altura finita del cilindro usado para los experimentos. Para comprobar sus argumentos, los autores realizaron un montaje experimental con geometría esférica, lo que asegura un campo magnético uniforme, debido a que el factor de desmagnetización para esta geometría es constante. No obstante, en sus experimentos no detectaron flujo usando el "<i>Ultrasonic Doppler Velocimeter</i>" cuando la esfera estaba totalmente llena. Sin embargo, se observó flujo cuando la esfera se encontraba parcialmente llena. Adicionalmente en el estudio se mencionó que la única forma en la que se obtuvieron medidas de flujo con la esfera llena, fue al colocar un imán permanente al lado de esta, de forma que el campo magnético rotativo fuese no uniforme [49].</p>

---

---

**Estado del arte: ferrohidrodinámica**

---

2011	Felderhof	<p>Realizó un análisis teórico para el flujo de ferrofluido en una esfera usando la TDMAI, de donde concluye que el flujo generado por el campo magnético uniforme es despreciable, lo que concuerda con las conclusiones de Khushrushahi y Zahn [49]. Adicionalmente, Felderhof recomienda que se debe seguir con los estudios experimentales en geometrías esféricas o cilíndricas, pero con una relación de diámetro a longitud del cilindro mucho menor que uno. Felderhof menciona, que más que el valor de <i>spin viscosity</i> obtenido por Chaves <i>et al.</i> [3, 6], se debe tomar como valor provisional el obtenido por Rosensweig [8] desde el análisis dimensional [50]</p>
2012	Torres-Díaz <i>et al.</i>	<p>Siguiendo con la misma discusión, realizaron de nuevo las medidas de perfiles de velocidad de ferrofluidos en una esfera usando los mismos equipos que Khushrushahi y Zahn, pero obteniendo ahora perfiles de velocidad acimutal para el ferrofluido llenando completamente la esfera. La única diferencia entre ambos conjuntos de experimentos, es que para los primeros (Khushrushahi y Zahn), el campo magnético estaba rotando alrededor del eje horizontal donde el efecto del campo gravitacional no permitía la generación de flujo; mientras en el segundo caso (Torres-Díaz <i>et al.</i>), el eje de rotación del campo fue vertical de forma que el campo gravitacional no tiene efecto sobre el flujo. Dichos experimentos, volvieron a poner en juego la TDMAI [51].</p>

---

---

**Estado del arte: ferrohidrodinámica**

---

2014 Torres-Díaz *et al.*

Plantearon que la diferencia entre la magnitud del flujo medidas experimentalmente y las teóricas obtenidas por Chaves *et al.*[3] son consecuencia de que en los ferrofluidos a base de magnetita solo una fracción de las nanopartículas tiene un mecanismo de relajación de tipo Browniano, mientras que la TDMAI, asume que todas las partículas cuentan con este mecanismo de relajación. Para verificar este planteamiento, los autores sintetizaron ferrofluidos con nanopartículas de ferrita de cobalto a diferentes concentraciones de partículas y suspendidas en agua, en mezclas de agua-glicerina y solo en glicerina. En este trabajo se observó que los perfiles de velocidad medidos usando ferrofluidos diluidos de baja viscosidad concuerdan en alto grado, tanto cuantitativo como cualitativo, con los perfiles de velocidad analíticos obtenidos por Chaves *et al.*[3]. No obstante, para ferrofluidos de alta concentración de partículas y alta viscosidad (altos tiempos de relajación), se obtuvieron perfiles de velocidad experimentales con las mismas características cualitativas que los predichos teóricamente, pero lejanos de la magnitud del flujo, y de la dependencia de los perfiles de velocidad con la amplitud y frecuencia de rotación del campo. Los autores afirman que esta discrepancia es consecuencia del uso de la ecuación de magnetización de Shliomis [10], la cual no describe de forma adecuada la magnetización de ferrofluidos a altas intensidades del campo magnético, ni tampoco cuando la magnetización del ferrofluido se aleja de su valor de equilibrio; es decir, cuando el producto de la frecuencia de rotación del campo con el tiempo efectivo de relajación es mucho mayor que 1. Adicionalmente, ellos obtuvieron un nuevo estimado del parámetro de "*spin viscosity*", usando valores experimentales de mejor acuerdo; encontrando un valor de  $10^{-8} \text{ Kg m s}^{-1}$ , el cual es de dos órdenes de magnitud mayor que el reportado por Chaves *et al.* [3].

---

---

**Estado del arte: ferrohidrodinámica**

---

2014 Torres-Díaz *et al.*  
(Continuación)

Este nuevo estimado aleja aún más el valor de  $\eta'$  predicho en el análisis de orden de magnitud, versus los obtenidos por ajuste de datos experimentales. Un detalle importante de estos resultados es que, para el caso de flujo anular, los perfiles de velocidad no mostraron contraflujo, a diferencia de los reportados por Chaves *et al.* [6]; no obstante, la TDMAI si predice esta situación, pero para el caso particular donde el parámetro adimensional  $\kappa < 1$ . Adicionalmente se resalta que para el caso de flujo anular, los resultados experimentales no se ajustaron de manera precisa a los resultados analíticos, posiblemente por el hecho de que la fuerza magnética se calcula usando la ecuación de magnetización de Shliomis, en el límite de baja amplitud del campo magnético [2].

2014 Chaves- Rinaldi

Con la evidencia antes mencionada en el trabajo realizado por Krauss, y con el fin de profundizar en el conocimiento de efectos superficiales en ferrofluidos, Chaves y Rinaldi desarrollaron condiciones de frontera adecuadas, tanto para el momento lineal como para el momento angular interno, en interfases ferrofluido-aire [5]. Lo anterior, a partir de principios de mecánica de medios continuos. Para esto, plantearon balances de momento lineal que incluyen un tensor de esfuerzos antisimétricos y fuerzas superficiales, debidas a gradientes de tensión superficial y fuerzas magnéticas introducidas a través del tensor de esfuerzos magnéticos de Maxwell. De la misma forma, se obtuvo un balance interfacial para el momento angular interno, lo que completaría el conjunto de condiciones de frontera para una interfase fluido-fluido. Posteriormente, realizaron un análisis sencillo para el flujo de un ferrofluido en una placa infinitamente larga y con una interfase ferrofluido-aire, con la cual demuestran que el flujo puede ser generado por una discontinuidad del tensor de esfuerzos antisimétricos en la interface. No obstante, las predicciones de estas condiciones de frontera se deben verificar experimentalmente, usando una geometría cilíndrica ("*spin up flow*") o un canal circular como el empleado por Krauss *et al.*[45, 46].

---

---

### Estado del arte: ferrohidrodinámica

---

Por otro lado, todos los trabajos abordados sobre el flujo de ferrofluidos inducidos por campos magnéticos rotando han sido hechos usando la ecuación de magnetización de Shliomis. Sin embargo, esta ecuación que describe la dinámica de magnetización del ferrofluido, fue derivada de una manera macroscópica a través de la modificación de la ecuación de relajación de Debye; por lo cual es confiable sólo en situaciones donde la magnetización del ferrofluido se aleja poco de la magnetización de equilibrio del ferrofluido. Adicionalmente, y como ya se ha mencionado, las soluciones analíticas desarrolladas hasta el momento han hecho uso de la aproximación lineal, en la que la magnetización de equilibrio es proporcional a la intensidad de campo magnético, lo cual limita las soluciones obtenidas a amplitudes de campos bajas, es decir,  $\alpha \ll 1$ . Esta suposición es hecha con el fin de obtener una solución desacoplando el problema hidrodinámico del problema magnético. A pesar de esto, investigadores como Chaves y Rinaldi [3] y posteriormente Torres-Díaz y Rinaldi [2], han usado estos resultados analíticos para evaluar la TDMAI por comparación, con datos de perfiles de velocidad experimentales, obtenidos a amplitudes del campo magnético que van de moderadas a altas, es decir,  $\alpha \gg 1$ . Esto puede generar varias situaciones: 1) la magnitud del flujo del ferrofluido predicha por las soluciones teóricas podrían ser mucho más altas que las experimentales; 2) que no se conozca la dependencia exacta de la amplitud del campo magnético y su frecuencia con la magnitud de los perfiles de velocidad y 3), que valores estimados del "spin viscosity" puedan tener desviación de su valor real.

---

---

---

**Estado del arte: ferrohidrodinámica**

---

2015 Peña *et al.*

Teniendo en cuenta lo anterior, Peña *et al.*[1] realizaron un análisis numérico para determinar el efecto de la ecuación de magnetización Sh-72 y MRSh-74 sobre el campo de flujo, a condiciones de campo magnético y frecuencias altas, es decir,  $\alpha \gg 1$  y  $\Omega\tau \gg 1$ . Para esto, realizaron una comparación de los perfiles de velocidad de una película de ferrofluido entre dos placas paralelas infinitamente largas, obteniendo resultados para las siguientes situaciones: 1) ecuación de magnetización Sh-72 con aproximación lineal para bajos campos (ampliamente usada en análisis de flujo de ferrofluidos usando la TDMAI); 2) Ecuación de magnetización Sh-72 con la ecuación de Langevin, en el modelado de la saturación del ferrofluido y 3) Ecuación de magnetización MRSh-74 [30]. Esta última ecuación de magnetización se obtiene desde un punto de vista microscópico, a partir de la ecuación cinética de Fokker-Planck. Se ha encontrado que, esta última ecuación de magnetización predice considerablemente bien la viscosidad rotacional de fluidos a altas frecuencias y amplitudes de campo magnético. En este trabajo, los autores encontraron que para el caso de bajas amplitudes del campo magnético, y frecuencias que van desde bajas hasta altas, no existe diferencia en los perfiles de velocidad cuando se comparan los 3 casos. No obstante, para el caso de altas intensidades del campo magnético y bajas frecuencias, se encontró que la magnitud de los perfiles de velocidad obtenidos con la aproximación lineal, supera a los obtenidos con la ecuación de magnetización de Shliomis, y esta a su vez, supera el valor de los perfiles obtenidos con la ecuación deducida por Martsenyuk, Raikher y Shliomis. Esto es debido a que la ecuación de magnetización Sh-72, con la aproximación lineal, no captura el efecto de la saturación de la magnetización del ferrofluido a altas amplitudes del campo magnético. Por otro lado, estos análisis mostraron que efectivamente a campos magnéticos altos, la dependencia de la magnitud del flujo es menor a 2, siendo menor la dependencia predicha por la ecuación MRSh-74 que la predicha por la ecuación Sh-72.

---

---

---

**Estado del arte: ferrohidrodinámica**

---

Adicionalmente, los autores muestran, que la condición más crítica se presenta cuando tanto la magnitud como la frecuencia del campo son altas; situación que resulta en un flujo de velocidades menor para las predicciones de la ecuación Deducida por Martsenyuk, Raikher y Shliomis. Los resultados obtenidos en el trabajo de Peña *et al.* [1], muestran que hay una buena probabilidad de ajuste entre datos experimentales y teóricos, si se utiliza la ecuación de magnetización MRSh-74. Por lo tanto, el próximo paso se encaminará a obtener nuevos resultados de perfiles de velocidad en ferrofluidos, usando la ecuación de magnetización MRSh-74, pero en geometrías que permitan realizar medidas experimentales. En la referencia [1] se muestra el sistema de flujo de un ferrofluido en un canal rectangular. El flujo para este caso es inducido por un campo magnético rotativo, entre dos placas paralelas infinitamente largas. Para este caso en particular, en el trabajo de Peña *et al.*[1] se determinaron los perfiles de velocidad para campos magnéticos rotativos no cercanos a cero, a través de la implementación de la ecuación MRSh-74. El flujo es generado por una intensidad de campo magnético longitudinal  $H_z$ , y una densidad de flujo magnético transversal  $B_x$ . Estos a su vez son proporcionados por medio de las bobinas que se ubican alrededor de las placas. En este caso se tiene en cuenta para el flujo que:  $\mathbf{v} = v_z(x, y) \mathbf{i}_z$  y  $\boldsymbol{\omega} = \omega_y(x) \mathbf{i}_y$ . Esta metodología, para el planteamiento de las ecuaciones, es una base para proponer los modelos implementados para describir el campo de flujo de ferrofluidos contenidos en geometrías cilíndricas, bajo el efecto de campos magnéticos rotativos uniformes y no uniformes.

2015 Peña *et al.*  
(Continuación)

---

Los autores encontraron soluciones analíticas para dos capas de ferrofluidos inmiscibles de diferente espesor, las cuales se encontraban dentro de dos placas planas y paralelas. Se formularon relaciones de balance de momento lineal y momento angular interno en la interfase, con el fin de obtener los perfiles de velocidad lineal y de de giro en el contenedor. A partir de los resultados obtenidos, se pudo observar que, para campos de bajas amplitudes, la magnitud de la velocidad lineal es directamente proporcional a la frecuencia del campo magnético aplicado, y a su vez, al cuadrado de la amplitud del campo. Adicionalmente, la velocidad de giro para ambas fases de los ferrofluidos se presentó en la misma dirección de rotación del campo magnético, excepto para casos en donde se aplicaron gradientes extremos de presión [52].

2015 Sule *et al.*

## 1.4 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Como se ha mencionado a lo largo de la literatura científica, han pasado más de cinco décadas después que se evidenció la generación del flujo de ferrofluido por un campo magnético rotando [7], sin que hasta el momento se haya llegado a un conocimiento completo del mecanismo generador de los perfiles de velocidad. A pesar de las diferentes teorías y modelos planteados hasta el momento, todavía se requiere de la concordancia cuantitativa de los resultados teóricos y experimentales (ver figura 3 y figura 4), para las diferentes amplitudes y diferentes frecuencias de rotación del campo magnético.

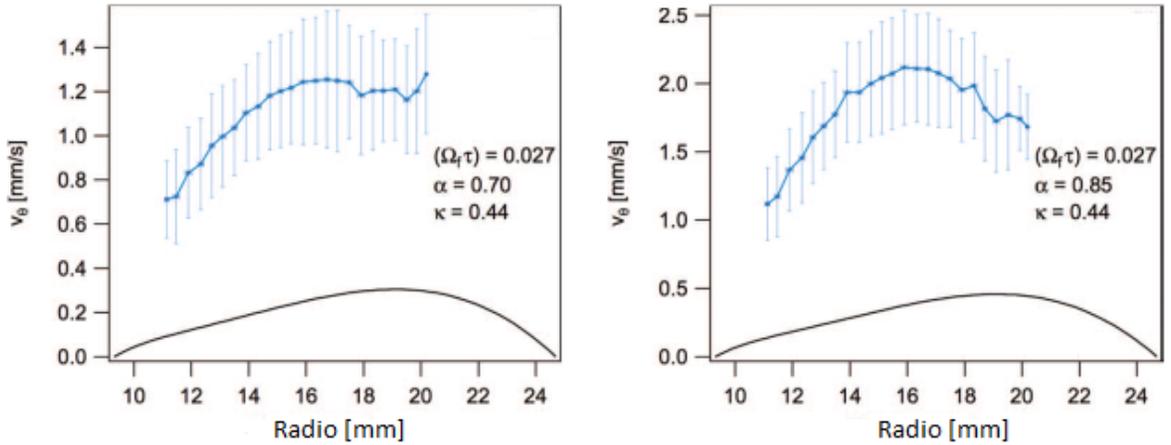


Figura 3: Comparación entre el perfil de velocidad teórico (negro) y experimental (azul) a partir de la solución de orden cero de la TDMAI, para una muestra de ferrofluido bajo el efecto de dos parámetros de Langevin,  $\alpha = 0,70$  y  $\alpha = 0,44$ , contenida en una geometría anular en la que  $R_{interno} = 9,3$  mm y  $R_{externo} = 24,7$  mm. Fuente: [2].

Como ya se mencionó anteriormente, entre todas las teorías planteadas, la TDMAI presenta un “notable acierto” cuantitativo respecto a los resultados experimentales, bajo ciertas condiciones específicas trabajadas por Chaves *et al.* [2, 3] (ver figura 5). Estas condiciones específicas son listadas a continuación:

- Magnitudes de campo magnético cercanas a cero, lo cual se puede representar a través del coeficiente de Langevin como  $\alpha \ll 1$ ,
- Bajas frecuencias de rotación del campo magnético externo, lo cual se puede representar a través de la velocidad angular del campo magnético  $\Omega_f$  y el tiempo de relajación de las nanopartículas  $\tau$ , de la siguiente manera:  $\Omega_f \tau \ll 1$ ,
- El ferrofluido implementado en los experimentos fue sintetizado con nanopartículas de ferrita cobalto, cuya nomenclatura es  $CoFe_2O_4$ ,
- El contenedor del ferrofluido en los experimentos fue de geometría cilíndrica.

En el trabajo realizado por Peña *et al.* [1], siguiendo la metodología de otros autores, se implementaron variables sin dimensiones, con el fin de caracterizar las condiciones

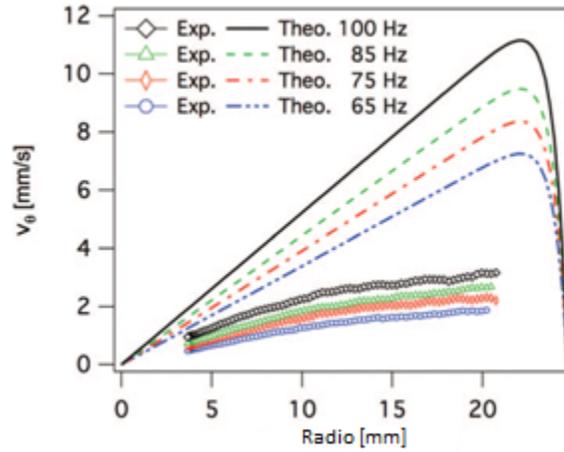


Figura 4: Comparación de perfiles de velocidad teóricos y experimentales para diferentes frecuencias de rotación de campo magnético ( $f$ ), bajo el efecto de una densidad de campo magnético constante de 12,3 mT. En las mediciones de Chaves *et al.* [3], la muestra de ferrofluido implementada fue un ferrofluido de base aceite (EMG900\_2) compuesto por magnetita. Fuente: [2].

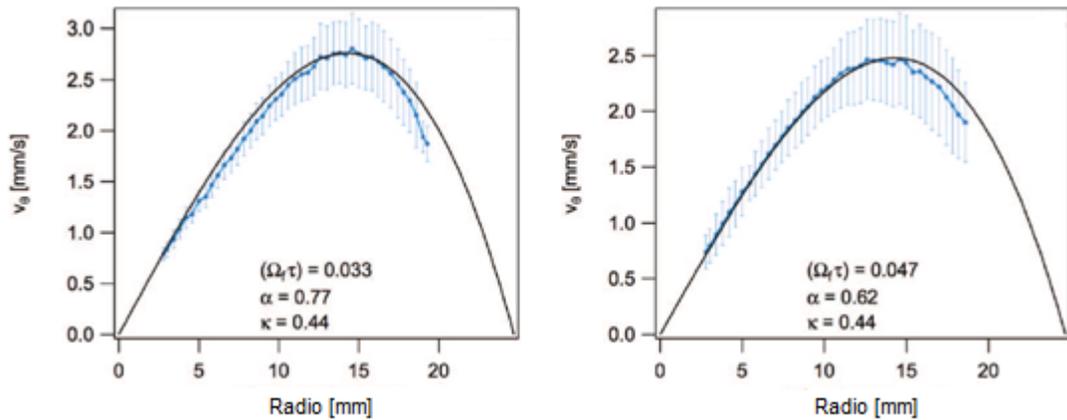


Figura 5: Comparación entre el perfil de velocidad teórico (negro) y experimental (azul) a partir de la solución de orden cero de la TDMAI, para la muestra de ferrofluido WBF-1 en un contenedor cilíndrico, bajo el efecto de un campo magnético externo,  $\alpha = 0,77$ ,  $\tilde{\Omega} = 0,033$  y  $\alpha = 0,62$ ,  $\tilde{\Omega} = 0,047$ .  $R = 24,7$  mm y  $\kappa = 0,44$ . Fuente: [2].

de estudio del sistema ferrohidrodinámico. Siendo así, para determinar si un ferrofluido está sometido a un campo magnético de alta o baja amplitud, se toma como referencia el valor del parámetro de Langevin  $\alpha$ , definido en la Ec. (21), de tal manera que, si  $\alpha \ll 1$  implica un campo magnético bajo. Por el contrario, un valor de  $\alpha \gg 1$  implica un campo magnético de alta magnitud. En el primer caso ( $\alpha \ll 1$ ), existe una relación lineal entre la magnetización de equilibrio  $\mathbf{M}_{\text{eq}}$  y la intensidad del campo magnético  $\mathbf{H}$ , por el contrario, en el segundo caso  $\mathbf{M}_{\text{eq}}$  es, aproximadamente, la magnetización de saturación del ferrofluido. Por su parte, se considera el producto de la velocidad angular del campo,  $\Omega_f$ , y el tiempo de relajación de partícula,  $\tau$ , para establecer las características de la frecuencia del campo externo, es decir,  $\tilde{\Omega} = \Omega_f \cdot \tau$ . De esta forma, cuando se cumple que  $\tilde{\Omega} \ll 1$ , la frecuencia de rotación del campo magnético se considera baja y viceversa. A partir de la definición de tiempo de relajación de la Ec. (1), se puede establecer que un ferrofluido está bajo el efecto de un campo magnético rotativo de baja o alta frecuencia, entre otras cosas, por la viscosidad del fluido y el diámetro de las nanopartículas que lo componen, es decir, no depende solo de las condiciones del campo externo sino también de las características intrínsecas de la muestra de ferrofluido.

Dicho lo anterior, en el trabajo realizado por Torres-Díaz *et al.*[2], el cual utilizó, a diferencia de la muestra utilizada en el trabajo de Chaves *et al.*[3], una muestra de ferrofluido de ferrita cobalto ( $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ ), se logró mejorar la concordancia entre los resultados obtenidos a través de la TDMAI y los datos experimentales, sólo para campos magnéticos rotativos de baja amplitud y frecuencia de rotación ( $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ ), tal como se puede observar en la figura 5. Sin embargo, a pesar de la mejora en los resultados, no se presentó concordancia para los casos en donde los campos aplicados fueron de amplitudes y frecuencias no bajas. La falta de correspondencia cuantitativa entre datos teóricos y experimentales pueden ser atribuidas a las siguientes causas:

- La ecuación de magnetización Sh-72, Ec. (11), usada en los trabajos de Chaves *et al.* [3] y Torres-Díaz *et al.* [2], pierde validez para altos valores de intensidad y frecuencias de rotación del campo magnético ( $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ ),
- Para magnitudes de campo magnético en las que  $\alpha \gg 1$ , la magnetización de equilibrio ( $\mathbf{M}_{\text{eq}}$ ) deja de ser directamente proporcional a la intensidad de campo magnético, debido a la saturación del ferrofluido, es decir,  $\mathbf{M}_{\text{eq}} \neq \chi \mathbf{H}$ . Por lo tanto, describir la magnetización de equilibrio como una función lineal de la intensidad de campo magnético, implicaría errores de tipo cuantitativo en la predicción de los perfiles de velocidad.

Teniendo en cuenta las razones que limitan a los modelos planteados en las referencias [2, 3, 4, 6], es necesario implementar un nuevo conjunto de ecuaciones ferrohidrodinámicas, a partir de la TDMAI, que no pierda validez para altas magnitudes y frecuencias de rotación del campo magnético, y de esta forma, evaluar el desempeño de la TDMAI en la predicción de los campos de flujo de ferrofluidos que están bajo el efecto de un campo magnético rotativo externo.

**1.4.1 Hipótesis:** En este orden de ideas, la hipótesis de esta investigación es la siguiente: la causa de las discrepancias de tipo cuantitativo, entre resultados experimentales de perfiles de velocidad y los predichos por la TDMAI, son debido a que en los actuales análisis teóricos se ha usado la ecuación Sh-72, la cual es poco precisa para  $\alpha \gg 1$  y  $\hat{\Omega} \gg 1$ , y situaciones donde la magnetización del ferrofluido  $\mathbf{M}$  se aleja de la magnetización de equilibrio  $\mathbf{M}_{\text{eq}}$ . Asimismo, por suponer que bajo estas condiciones la magnetización de equilibrio,  $\mathbf{M}_{\text{eq}}$ , es proporcional al vector de intensidad de campo magnético  $\mathbf{H}$ , es decir,  $\mathbf{M}_{\text{eq}} = \chi \mathbf{H}$ , despreciando de esta manera, el efecto de la saturación en las muestras de ferrofluido.

**1.4.2 Pregunta de investigación:** La pregunta que se pretende resolver con la presente propuesta, se formula de la siguiente manera: ¿Es posible obtener un mejor ajuste entre datos experimentales de perfiles de velocidad y las predicciones teóricas obtenidas a partir de la TDMAI, implementando, en el conjunto de ecuaciones ferrohodinámicas, la ecuación de magnetización propuesta por Martsenyuk, Raikher y Shliomis, Ec. (13), y sin despreciar la saturación del ferrofluido, al suponer que  $\mathbf{M}_{\text{eq}} = \chi \mathbf{H}$ , en el modelo matemático correspondiente?

## 1.5 OBJETIVOS DEL PROYECTO

**1.5.1 Objetivo general:** Evaluar el efecto de la ecuación de magnetización de Martsenyuk, Raikher y Shliomis sobre las predicciones de flujo de la teoría de difusión de momento angular interno.

**1.5.2 Objetivos específicos:**

- I. Desarrollar modelos matemáticos para el campo de flujo de un ferrofluido en geometría cilíndrica y de cilindros concéntricos, válidos a altas intensidades y frecuencias de rotación del campo magnético, usando las ecuaciones de magnetización de Shliomis y Martsenyuk, Raikher y Shliomis,
- II. Implementar y validar soluciones numéricas para los modelos matemáticos obtenidos en el objetivo específico I,
- III. Evaluar el efecto de las ecuaciones de magnetización estudiadas, sobre el campo de flujo de un ferrofluido, por medio de comparación con resultados experimentales tomados de la literatura.

## 1.6 METODOLOGÍA

Actualmente, existen datos experimentales de perfiles de velocidad de ferrofluidos bajo el efecto de un campo magnético rotativo, en geometrías cilíndricas y anulares. Por tal motivo, en la presente investigación se implementará un nuevo conjunto de ecuaciones ferrohodinámicas, con base en la TDMAI, para obtener perfiles de flujo teóricos, con el fin de evaluar el desempeño de dicha teoría en la descripción del fenómeno de flujo. A

diferencia de trabajos anteriores, esta solución será válida a altas amplitudes de campo magnético. Esto se logrará teniendo en cuenta la saturación del ferrofluido, es decir, incluyendo la ecuación de Langevin, tanto en la ecuación de magnetización Sh-72 como en la ecuación deducida por Martsenyuk, Raikher y Shliomis [30], MRSh-74, en vez de la aproximación usualmente implementada, en donde no se tiene en cuenta la saturación de las partículas magnéticas. Adicionalmente, se tomará en cuenta el término  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$  de la ecuación de magnetización, con el fin de incluir dentro de los resultados el efecto de la velocidad de giro en la magnetización del ferrofluido. Efecto que ha sido incluido y despreciado por distintos autores [1, 3, 4, 5, 6, 16, 17, 31, 32, 53].

Para implementar una solución numérica en el sistema de ecuaciones diferenciales del modelo ferrohodinámico, se aplicará el método de las diferencias finitas de bajo orden. Estas soluciones, antes de ser ejecutadas bajo las condiciones de intensidad de campo y frecuencias requeridas para el presente estudio, es decir,  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ , serán validadas a través de las soluciones analíticas encontradas por Chaves *et al.* [3, 5, 6], las cuales sólo aplican para campos magnéticos en los que  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ . Dichas soluciones fueron obtenidas usando el método denominado *perturbación regular*, implementándolo en muestras de ferrofluido contenidas en recipientes cilíndricos y anulares. El parámetro de perturbación encontrado está expresado en la Ec. (20), y fue obtenido a partir de un análisis de escalamiento de las ecuaciones ferrohodinámicas realizado por Chaves *et al.* [3].

$$\varepsilon \equiv \frac{\mu_0 \chi_i K^2 \tau}{\zeta} \quad (20)$$

$$\kappa^2 \equiv \frac{4\eta R_0^2 \zeta}{\eta_e \eta'} \quad (21)$$

En la Ec. (20) y (21),  $\mu_0 \equiv 4\pi 10^{-7} \frac{H}{m}$ , y representa la permeabilidad magnética del aire o vacío,  $\chi_i$  la susceptibilidad inicial del ferrofluido,  $K$  la amplitud de la intensidad de campo magnético,  $\varepsilon$  el parámetro de perturbación,  $\zeta$  el coeficiente fenomenológico denominado *vortex viscosity*, y  $\tau$  el tiempo de relajación de las partículas magnéticas, el cual fue asumido de tipo Browniano. Por su parte,  $\kappa$  es un parámetro sin dimensiones que es inversamente proporcional al coeficiente de *spin viscosity* ( $\eta'$ ),  $R_0$  el radio del contenedor cilíndrico,  $\eta$  el coeficiente fenomenológico denominado *shear viscosity* y  $\eta_e = \eta + \zeta$ .

Una vez los perfiles analíticos y numéricos concuerden para campos en los que  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ , entonces se procederá a realizar las simulaciones con base en los experimentos realizados por Torres-Diaz *et al.* [2], en los que  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ . De esta forma, se evaluará, a través de la comparación con datos experimentales, el desempeño de la TDMAI en la predicción de perfiles de velocidad de ferrofluidos, que están bajo el efecto de un campo magnético rotativo de intensidad y frecuencia no baja.

En cuanto a la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales del sistema ferrohodinámico, una vez seleccionados los datos de entrada, dados por el usuario del algoritmo numérico (tamaño de la malla, repartición de los nodos en el dominio, tamaño del paso entre nodos, entre otros), se plantea una estrategia de solución numérica que

permita determinar las variables de interés en cada uno de los nodos, lo equivalente a solucionar un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas. En este caso, se requiere el uso de una herramienta computacional para la implementación de un algoritmo iterativo, que converja en la solución numérica de las ecuaciones diferenciales del modelo.

De manera anexa, y con el propósito de mostrar las mediciones existentes en la literatura científica, la figura 6 muestra los perfiles de velocidad medidos para un ferrofluido comercial, contenido en un recipiente cilíndrico, usando un método de ultrasonido [3, 17]. En este caso, la variable  $h$  representa la altura del recipiente en donde fueron tomadas las medidas. En a) se instaló una tapa de tipo convexa para asegurar el ferrofluido, mientras que en b) fue una de tipo cóncava.

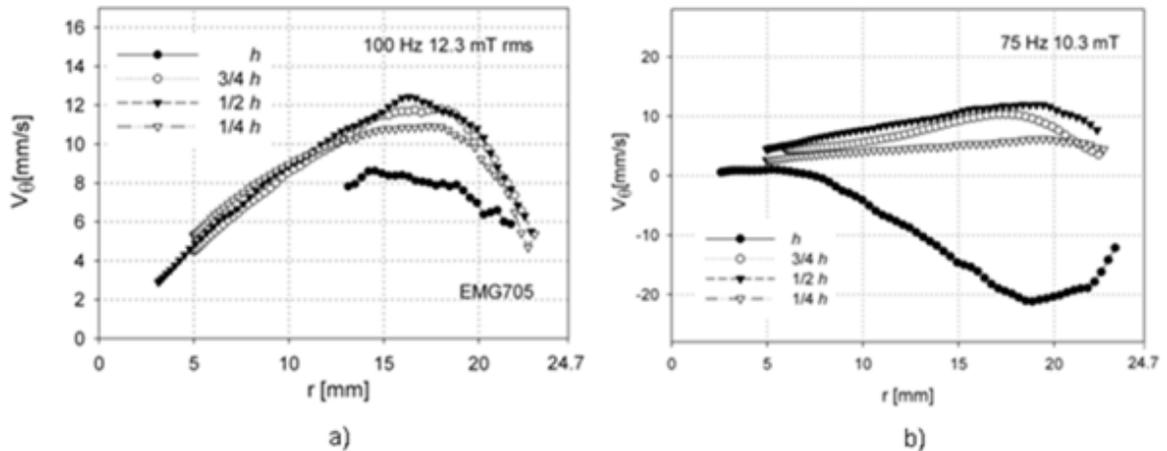


Figura 6: Mediciones ultrasónicas de perfiles de velocidad de la muestra de ferrofluido EMG705, en un contenedor cilíndrico. a) Contenedor cubierto en la parte superior. b) Contenedor libre en la parte superior, es decir, con interfase ferrofluido-aire en  $z = h$ . Fuente: [4]

Finalmente, los resultados obtenidos en la investigación fueron expuestos en los siguientes capítulos, en los cuales se muestra la implementación del modelo de la TDMAI para predecir los perfiles de velocidad lineal,  $\mathbf{v}$ , y de giro,  $\boldsymbol{\omega}$ , en las geometrías que brevemente se describen a continuación:

- Canal rectangular de placas planas y paralelas de longitud axial infinita: Las coordenadas  $(x, y, z)$  corresponden a la altura, el ancho y la profundidad del canal, respectivamente. Se supone que existe un campo magnético rotando alrededor del eje  $y$ , produciendo un desplazamiento de la muestra de ferrofluido en la dirección longitudinal  $z$ . Para mayor ilustración ver figuras 7 y 18.
- Contenedor cilíndrico de paredes fijas y longitud axial infinita: Las coordenadas  $(r, \theta, z)$  corresponden al radio, el punto azimutal y la altura del cilindro, respectivamente. El flujo se presenta debido a un campo magnético rotativo alrededor del eje  $z$ , el cual produce un desplazamiento del ferrofluido en la dirección azimutal  $\theta$ . La fuente del campo magnético es simulada como una densidad de corriente

superficial, de tipo sinusoidal, que atraviesa las paredes del cilindro en dirección  $+\mathbf{i}_z$ , de acuerdo con la regla de la mano derecha. Se supone igualmente, que el flujo magnético para  $r > R$  es nulo y que el campo magnético para  $r < R$  es uniforme. Para mayor ilustración ver figura 33.

- Contenedor con geometría anular de paredes internas y externas fijas y longitud axial infinita: Al igual que en la geometría cilíndrica, en la geometría anular las coordenadas  $(r, \theta, z)$  corresponden al radio, el punto azimutal y la altura del cilindro, respectivamente. El flujo se presenta debido a un campo magnético rotativo alrededor del eje  $z$ , el cual produce un desplazamiento del ferrofluido en la dirección azimutal  $\theta$ . El cilindro interno es de material no ferromagnético. La fuente del campo magnético es simulada como una densidad de corriente superficial, de tipo sinusoidal, que atraviesa las paredes del cilindro externo en dirección  $+\mathbf{i}_z$ , de acuerdo con la regla de la mano derecha. Se supone igualmente que el flujo magnético para  $r > R$  es nulo y que el campo magnético para  $r < R$  no es uniforme. Para mayor ilustración ver figura 48.

## CAPÍTULO 2

---

# EVALUACIÓN DEL EFECTO COMBINADO DE ESFUERZOS VOLUMÉTRICOS Y SUPERFICIALES EN EL FLUJO DE FERROFLUIDOS, INDUCIDOS POR UN CAMPO MAGNÉTICO ROTATIVO

---

### 2.1 INTRODUCCIÓN

En el año 2006 Chaves *et al.* [16], para una geometría cilíndrica, lograron obtener las primeras medidas experimentales de perfiles de velocidad en el interior del volumen de un ferrofluido, bajo el efecto de un campo magnético rotativo, a través de la técnica denominada “*Ultrasound Velocity Profile*” (UVP). Las anteriores medidas permitieron comprobar la existencia de flujo en el ferrofluido, no sólo en la superficie interfacial, sino también en puntos alejados de la interfase libre del fluido. Estos datos mostraron perfiles de velocidad azimutal con las características de movimiento de cuerpo rígido, co-rotando con el campo magnético en la parte interna del ferrofluido, en acuerdo cualitativo con las predicciones de la TDMAI [26]. Asimismo, se observó que la dirección de flujo, en la superficie del ferrofluido en contacto con el aire, es opuesta a la dirección de rotación del campo magnético (ver figura 6), tal como se establece en el trabajo de Rosensweig [54]. Los resultados anteriores permitieron intuir que en la generación de los perfiles de velocidad se presenta un trabajo conjunto entre los esfuerzos tangenciales, presentes en la interfase, y los esfuerzos volumétricos, al interior del ferrofluido. Dicho en otras palabras, las mediciones realizadas por Chaves *et al.* [16] permitieron afirmar que en la generación de flujo operan dos mecanismos diferentes: 1) esfuerzos tangenciales superficiales, para el fluido cerca de la interfase ferrofluido-aire, y 2) efectos volumétricos, para las zonas del fluido lejos de la interfase. Además, dichas medidas demostraron que los perfiles de velocidad medidos en la superficie son inadecuados para validar las teorías de flujo, en especial aquellas teorías que solo aplican en puntos alejados de la interfase, como lo es la TDMAI, inicialmente propuesta por Shliomis [10].

Con base en los resultados obtenidos en el trabajo de Chaves *et al.* [16, 17], Chaves y Rinaldi [5] propusieron las condiciones de frontera hidrodinámicas, teniendo en cuenta el efecto potencial del tensor de par de esfuerzo  $\mathbf{C}$ , para valores del coeficiente fenomenológico  $\eta'$  diferentes de cero. Y en este orden de ideas, a partir del balance in-

terfacial de momento angular interno, obtuvieron las condiciones de frontera expresadas en la Ec. (22), en donde  $C_{nn}$  y  $C_{nt}$  corresponden a las componentes del tensor  $\mathbf{C}$ , relacionadas con la dirección normal y tangencial a la interfase, para la región  $a$  y  $b$  del sistema en estudio,

$$\begin{aligned} C_{nn}|_b &= C_{nn}|_a, \\ C_{nt}|_b &= C_{nt}|_a. \end{aligned} \quad (22)$$

De igual forma, obtuvieron, para una geometría rectangular unidimensional y para campos magnéticos de baja amplitud y frecuencia ( $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ ), expresiones para el flujo de un ferrofluido con una interfase fluido-aire para casos en donde el coeficiente  $\eta'$  es cero y diferente de cero. En este trabajo, los autores pudieron determinar analíticamente los perfiles de flujo de ferrofluidos expuestos a campos magnéticos de baja intensidad. Sin embargo, aunque los anteriores resultados son los primeros reportados, en los que se supone un trabajo conjunto entre esfuerzos volumétricos y tangenciales, no permiten la validación de estos mismos, ya que no son obtenidos para una geometría físicamente realizable, ni se implementan valores de campo magnético que puedan ser generados en pruebas experimentales, al menos hasta el momento de la realización de este documento.

Teniendo en cuenta las definiciones del capítulo anterior, para determinar si un ferrofluido está sometido a un campo magnético de baja o alta amplitud, se toma como referencia el valor del parámetro de Langevin ( $\alpha$ ), definido en la Ec. (12), de modo que si  $\alpha \ll 1$  implica un campo magnético bajo. Por el contrario, un valor de  $\alpha \gg 1$  implica un campo magnético de magnitud alta. En el primer caso ( $\alpha \ll 1$ ), existe una relación lineal entre la magnetización de equilibrio  $\mathbf{M}_{\text{eq}}$  y la intensidad del campo magnético  $\mathbf{H}$ , por el contrario, en el segundo caso  $\mathbf{M}_{\text{eq}}$  es, aproximadamente, la magnetización de saturación del ferrofluido. Por su parte, se considera el producto de la velocidad angular del campo,  $\Omega_f$ , y el tiempo de relajación de la partícula,  $\tau$ , para establecer las características de la frecuencia del campo externo, esto es,  $\tilde{\Omega} = \Omega_f \cdot \tau$ . De esta forma, cuando se cumple que  $\tilde{\Omega} \ll 1$ , la frecuencia de rotación del campo magnético se considera baja y viceversa. A partir de la definición de tiempo de relajación de la Ec. (1), se puede establecer que un ferrofluido está bajo el efecto de un campo magnético rotativo de baja o alta frecuencia, entre otras cosas, por la viscosidad del fluido y el diámetro de las nanopartículas que lo componen, es decir, no depende solo de las condiciones del campo externo sino también de las características intrínsecas de la muestra de ferrofluido.

Dicho lo anterior, Alviz *et al.* [32] realizaron un estudio en la misma geometría para un dominio bidimensional, esto es, se tuvo en cuenta tanto la coordenada horizontal como la vertical en el canal de placas planas y paralelas. El estudio fue realizado para campos de baja intensidad ( $\alpha \ll 1$ ), utilizando el valor analítico del torque de orden cero para determinar los perfiles de velocidad.

Por su parte, Chaves *et al.* [31], sin considerar una interfase ferrofluido-aire, determinaron, para una geometría de ducto rectangular, los perfiles de velocidad de una lámina de ferrofluido infinitamente larga en la dirección axial, lo que significa en otras

palabras, un análisis unidimensional del sistema rectangular. En esta ocasión, se implementó tanto la ecuación de magnetización propuesta por Shliomis [10] (Sh-72), como la deducida por Martsenyuk, Raikher y Shliomis [30] (MRSh-74), y de esta forma, compararon el desempeño de ambas ecuaciones en la predicción de flujo para campos magnéticos de magnitudes bajas y no bajas. El estudio, al igual que el realizado por [5], fue desarrollado para un dominio unidimensional en la coordenada vertical  $x$ . En este caso, los autores encontraron que para  $\alpha \ll 1$  ambas ecuaciones predicen los mismos campos de flujo, mientras que para valores altos de campos magnéticos, es decir,  $\alpha \gg 1$ , los perfiles pierden concordancia cuantitativa. Sin embargo, no se ha podido evaluar el desempeño de ambas ecuaciones, debido a la falta de experimentos que permitan validar los resultados obtenidos con cada una de estas. En el trabajo realizado por Chaves *et al.* [31], se asumió que la velocidad lineal se presenta en la dirección axial  $z$ , y el giro de las partículas magnéticas alrededor del eje  $y$ . El dominio de estudio fue unidimensional, es decir,  $\mathbf{v} = v_z(x) \mathbf{i}_z$  y  $\omega = \omega_y(x) \mathbf{i}_y$ . Para una mayor ilustración ver figura 7.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos por Chaves *et al.* [31] y Alviz *et al.* [32], de forma inicial, se plantea realizar la solución del modelo ferrohodinámico para campos magnéticos de alta intensidad y un contenedor rectangular de dominio bidimensional, con una interface ferrofluido-aire, es decir,  $\mathbf{v} = v_z(x, y) \mathbf{i}_z$  y  $\omega = \omega_x(x, y) \mathbf{i}_x + \omega_y(x, y) \mathbf{i}_y$ . Para una mejor ilustración, ver figura 18.

Aunque este sistema geométrico no hace parte de los objetivos planteados en la propuesta de investigación, previamente, se selecciona una geometría rectangular de placas planas y paralelas, con el fin de facilitar el análisis de la TDMAI, al tener en cuenta las siguientes motivaciones:

- Resolver el problema en coordenadas cartesianas es menos complejo, debido a que el análisis matemático requerido, en comparación con otras geometrías experimentales existentes, no presenta indeterminaciones, como las que se deben considerar en  $r = 0$ , para la solución numérica en la geometría cilíndrica, anular y esférica,
- En la geometría rectangular de la figura 7 y 18 es posible desprestigiar el término convectivo, en la ecuación de relajación de la magnetización Sh-72, Ec. (11), debido a las componentes nulas en cada una de las coordenadas cartesianas del término  $\nabla \cdot (\mathbf{vM})$ ,
- Establecer una metodología de solución numérica que pueda ser aplicada en el proceso de desarrollo del algoritmo, para la solución del sistema ferrohodinámico de las otras geometrías, objetos de esta investigación, es decir, para el contenedor de geometría cilíndrica y anular de la figura 33 y 48.

En este capítulo se muestran, inicialmente, los resultados obtenidos por otros autores [1, 5, 31] en el análisis unidimensional (para  $\alpha \ll 1$  y  $\alpha \gg 1$ ). Asimismo, los resultados obtenidos por Alviz *et al.* [32], para el análisis bidimensional a campos magnéticos de baja intensidad ( $\alpha \ll 1$ ). Finalmente, se muestran los resultados obtenidos en este trabajo, para la geometría de la figura 18, los cuales corresponden a la solución del modelo ferrohodinámico, con dominio bidimensional, de un canal rectangular de

placas planas y paralelas, con interfase ferrofluido-aire, y bajo la acción de un campo magnético de alta intensidad, es decir,  $\alpha \gg 1$ .

En cuanto a la implementación del algoritmo numérico, en esta investigación, el sistema de ecuaciones ferrodinámicas fue resuelto a través del uso de la herramienta computacional MATLAB<sup>®</sup> R2018a - academic use. Así también, se ha tomando como criterio de convergencia ( $\Gamma$ ), la variación de la magnitud del torque promedio, en cada punto de cada iteración,  $n$ , con la respectiva iteración anterior,  $n-1$ , el cual se estableció en  $\Gamma \leq 10^{-12}$ , debido a la invariabilidad de los perfiles de velocidad que se obtiene para valores menores de esta tolerancia límite.

## 2.2 SISTEMA DE ECUACIONES HIDRODINÁMICAS

El conjunto de ecuaciones hidrodinámicas que describe el sistema está conformado por la ecuación de continuidad (para un fluido incompresible), la ecuación de momento lineal de Cauchy y el balance de momento angular interno [55].

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = & -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + 2\zeta (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \\ & + (\lambda + \eta - \zeta) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\eta + \zeta) \nabla^2 \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\rho I \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} + 2\zeta (\nabla \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) + (\lambda' + \eta') \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + \eta' \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (25)$$

En donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad lineal promedio másica,  $\boldsymbol{\omega}$  es el vector de velocidad de giro de las partículas magnéticas,  $p$  es la presión del sistema,  $\rho$  es la densidad del ferrofluido,  $\mathbf{g}$  es el vector de la aceleración gravitacional,  $I$  es la densidad de momento de inercia de la suspensión y  $\mathbf{M}$  es el vector de magnetización de la suspensión. Por su parte,  $\mathbf{H}$  representa el vector de intensidad de campo magnético que se aplica sobre el fluido,  $\eta$  el coeficiente fenomenológico “*shear viscosity*”,  $\eta'$  el coeficiente fenomenológico “*spin viscosity*”,  $\lambda$  el coeficiente fenomenológico “*bulk viscosity*”,  $\lambda'$  el coeficiente fenomenológico “*bulk viscosity of spin*” y  $\zeta$  el coeficiente fenomenológico de viscosidad de vórtice, para la cual Brenner [56] propuso la expresión

$$\zeta = 1, 5\phi_h \eta_0. \quad (26)$$

La anterior ecuación es válida en el límite de dilución infinita. En esta expresión  $\phi_h$  es la fracción volumétrica hidrodinámica de partículas magnéticas en la suspensión, y  $\eta_0$  es la viscosidad dinámica del fluido en donde se encuentran suspendidas las partículas magnéticas.

Para la densidad de fuerza magnética,  $\mathbf{F}$ , Cowley y Rosensweig [19] propusieron la Ec. (27), en la que el producto  $vM$  representa el momento magnético por unidad de masa del ferrofluido. Adicionalmente, el momento magnético puede ser escrito como  $vM = nv\tilde{m}$ , ya que  $M = n\tilde{m}$ , siendo  $n$  la densidad numérica de las nanopartículas, y  $\tilde{m}$  el momento magnético promedio de las partículas solidas, [19]. Por lo que  $v$  sería una medida por unidad de masa. Ahora, para una muestra de ferrofluido diluida, la magnetización promedio de las nanopartículas solo depende del campo magnético externo,  $\mathbf{H}$ , a menos que se consideren efectos relacionados con la magnetostricción, [41]. Sin embargo, al aplicar campos magnéticos rotativos de baja intensidad y frecuencia, es común despreciar estos efectos, [2, 3]. Por lo tanto, en este estudio se asume que  $vM$  no depende de  $v$ , de modo que, el término integral de la Ec. (27) desaparece. En consecuencia, la densidad de fuerza magnética se reduce de acuerdo a lo establecido en la Ec. (28), la cual fue implementada para obtener la Ec. (24), [55].

$$\mathbf{F} = \mu_0 (\mathbf{M}, \nabla) \mathbf{H} - \nabla \left\{ \mu_0 \int_0^H \frac{\partial (vM)}{\partial v} \Big|_{H,T} dH \right\}. \quad (27)$$

$$\mathbf{F} = \mu_0 (\mathbf{M}, \nabla) \mathbf{H}. \quad (28)$$

Note que la Ec. (28) es una expresión que puede afectar la precisión de los resultados obtenidos por medio de la TDMAI. Particularmente, en muestras con moderadas y altas concentraciones de nanopartículas magnéticas, es decir, ferrofluidos no diluidos. Como también, cuando no es posible despreciar los efectos relacionados con la magnetostricción, los cuales están presentes en campos magnéticos de altas amplitudes.

A continuación, se aplica un procedimiento, reportado anteriormente en el trabajo de Chaves *et al.* [3], para presentar las ecuaciones hidrodinámicas sin dimensiones, para cualquier amplitud de campo magnético, y un valor del coeficiente fenomenológico “*spin viscosity*”  $\eta' \neq 0$ . A partir de las suposiciones anteriores, las ecuaciones hidrodinámicas se reformulan, como lo muestran las expresiones de la Ec. (29)-(31).

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (29)$$

$$Re_v \frac{D\tilde{\mathbf{v}}}{Dt} = \frac{\zeta}{\Omega\eta} \tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}} - \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{2\zeta}{\eta} \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{\eta_e}{\eta} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}, \quad (30)$$

$$Re_\omega \frac{D\tilde{\boldsymbol{\omega}}}{Dt} = \frac{1}{\Omega} (\tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}}) + 2\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} - 4\tilde{\boldsymbol{\omega}} \frac{4\eta}{\eta_e} \left( \frac{1}{ve^2} + \frac{1}{\kappa^2} \right) \tilde{\nabla} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}) + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\boldsymbol{\omega}}. \quad (31)$$

En donde  $\kappa = \left( \frac{4\eta\zeta R_0^2}{\eta'\eta_e} \right)^{\frac{1}{2}}$  y es una variable que, aún cuando no tiene significado físico, está relacionada con el coeficiente de cizalla de la velocidad de giro o “*spin viscosity*”,  $\eta'$ . Por su parte,  $ve = \left( \frac{4\eta\zeta R_0^2}{\lambda'\eta_e} \right)^{\frac{1}{2}}$  y está relacionada con el coeficiente volumétrico del “*spin viscosity*”,  $\lambda'$ . Finalmente,  $Re_v = \frac{\rho R_0^2}{\eta} \left( \frac{\mu_0 \chi_i K^2 \Omega_f}{\zeta} \right)$  y  $Re_\omega = \frac{\rho I}{\zeta} \left( \frac{\mu_0 \chi_i K^2 \Omega_f}{\zeta} \right)$  representan el número de Reynolds traslacional y de giro, respectivamente.

Las nuevas variables adimensionales del sistema de ecuaciones hidrodinámicas se definen de acuerdo con la Ec. (32) y (33). En donde, para diferenciar las variables sin dimensiones, se implementa el símbolo  $\sim$  en la parte superior de estas mismas. Las escalas de longitud y tiempo, fueron implementadas en el problema magnético, obteniendo ecuaciones adimensionales y de orden uno, las cuales fueron reportadas anteriormente por Chaves *et al.* [3].

Las variables escaladas del sistema se muestran a continuación:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{M}}{\chi_i K}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{H}}{K}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 K}, \quad \tilde{\nabla} = \delta \nabla, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\delta}, \quad \tilde{t} = \Omega \cdot t_f, \quad (32)$$

$$\tilde{p} = \frac{\zeta p}{\mu_0 \eta \chi_i K^2 \tilde{\Omega}}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\zeta \omega}{\mu_0 \chi_i K^2 \tilde{\Omega}}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\zeta \mathbf{v}}{\mu_0 \chi_i K^2 \tilde{\Omega} \delta}. \quad (33)$$

En la Ec. (33),  $\tilde{\Omega} = \Omega \cdot \tau$  y se define como la frecuencia adimensional, por su parte  $\eta_e \equiv \eta + \zeta$  y  $\kappa^2 \equiv \frac{4\eta\delta^2\zeta}{\eta_e\eta'}$ , las cuales carecen de significado físico. Asimismo,  $\chi_i$  representa la susceptibilidad magnética inicial del ferrofluido,  $\mu_0$  la permeabilidad magnética del aire o vacío,  $\delta$  la altura del canal,  $t_f$  el tiempo de análisis del fenómeno de flujo,  $\Omega$  la velocidad de la rotación del campo magnético,  $K$  el valor pico de la intensidad de campo magnético y  $p$  la presión absoluta del sistema.

Para campos de baja intensidad, se cumple que  $\nabla \cdot \tilde{\omega} = 0$ , tal como ha sido supuesto en trabajos anteriores [3, 5, 6, 55], por lo que no se requiere de un valor específico del coeficiente volumétrico del “*spin viscosity*” ( $\lambda'$ ), para la solución del sistema ferrohídrodinámico, Ec. (30) y (31). No obstante, para intensidades de campo en donde  $\alpha \gg 1$ , se presenta que  $\nabla \cdot \tilde{\omega} \neq 0$ . Por tal motivo, se requiere establecer un valor para el coeficiente fenomenológico  $\lambda'$ , con el fin de determinar los perfiles de velocidad del sistema en estudio. Los valores de  $\lambda$ , a pesar de su papel fundamental para la dinámica de fluidos, son en su mayoría desconocidos, de igual forma, los coeficientes de viscosidad volumétrica del “*spin viscosity*” ( $\lambda'$ ), son valores que no han sido medidos por la comunidad científica, siendo estas mediciones requeridas, con el fin mejorar los resultados en la implementación de la TDMAI. En este orden de ideas, y con el fin de encontrar una solución para las ecuaciones ferrohídrodinámicas, en el presente trabajo de investigación, se asume un valor para el coeficiente de la viscosidad  $\lambda'$ , de tal forma que el término  $ve = \left(\frac{4\eta\zeta R_o^2}{\lambda'\eta_e}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ . Debido a la anterior suposición, los perfiles obtenidos en este trabajo son válidos para ferrofluidos en donde el segundo coeficiente de la viscosidad del “*spin viscosity*”,  $\lambda'$ , es mucho mayor que  $\frac{4\eta\zeta R_o^2}{\eta_e}$ , esto es,  $\lambda' \gg \frac{4\eta\zeta R_o^2}{\eta_e}$ .

**2.2.1 Aproximación basada en el número de Reynolds:** Para una análisis de estado estacionario, se tiene que

$$Re_v \frac{D\tilde{\mathbf{v}}}{Dt} = Re_v (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}), \quad (34)$$

en donde el término no lineal  $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}$ , denominado término inercial, describe la aceleración del fluido en el marco de referencia material, es decir, un marco de referencia que se mueve con el fluido, con velocidad constante. De igual forma, este término puede ser interpretado como una representación del transporte convectivo de momentum. Por otro lado, la definición del número de Reynolds para la velocidad lineal  $Re_v$  está expresada en función de la velocidad característica  $U$ , la longitud característica del sistema físico  $L_v$ , la densidad del fluido  $\rho$  y la viscosidad de cizalla  $\eta$ , tal como se describe en la Ec. (35), y representa una magnitud relativa entre el transporte de momentum difusivo  $\eta U L_v^2$  y convectivo  $\rho U^2 L_v$ .

$$Re_v = \frac{\rho U L_v}{\eta}. \quad (35)$$

Para los casos que se presentan en este documento, se ha supuesto bajos números de Reynolds ( $Re_v \ll 1$ ), lo que implica desprestigiar los efectos convectivos dentro del estudio, debido que  $\eta \gg \rho U L_v$ . Por tal motivo, los efectos difusivos predominan por encima de los efectos inerciales en el fenómeno de la generación de flujo. De forma similar, se deduce, para la Ec. (31), que el término relacionado con el número de Reynolds de giro,  $Re_\omega$ , es igual a cero. de acuerdo con lo anterior, se establece para la Ec. (30) y (31) que

$$\begin{aligned} Re_v \frac{D\tilde{\mathbf{v}}}{Dt} &= \mathbf{0}, \\ Re_\omega \frac{D\tilde{\boldsymbol{\omega}}}{Dt} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (36)$$

### 2.3 SISTEMA DE ECUACIONES MAGNÉTICAS

El sistema de ecuaciones magnéticas está compuesto por las ecuaciones de relajación de la magnetización, Sh-72 y MRSh-74, las cuales describen el vector de magnetización de la partícula magnética, en su intento por alinearse con el campo magnético rotativo externo. De igual forma, la ecuación de equilibrio de la magnetización hace parte de este conjunto de expresiones. Esta ecuación describe el fenómeno de la saturación de la magnetización, en presencia del campo magnético externo, fenómeno que no se tiene en cuenta en algunos modelos que definen a la magnetización como una variable proporcional del campo externo aplicado, es decir,  $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ , lo cual solo es válido para bajas intensidades de campo magnético ( $\alpha \ll 1$ ), en donde la magnetización tiene un comportamiento lineal con respecto al campo externo aplicado  $\mathbf{H}$ . Finalmente, el sistema de ecuaciones magnéticas se completa con la ley de Gauss para campos magnéticos, y la ley de Ampère generalizada, las cuales hacen parte de las leyes de Maxwell [15]. El conjunto de ecuaciones magnéticas con dimensiones se expone a continuación:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{vM}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} - \frac{1}{\tau} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0), \quad (37)$$

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} - \frac{\mathbf{H} [\mathbf{H} \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)]}{\tau_{\parallel} |\mathbf{H}|^2} - \frac{\mathbf{H} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})}{\tau_{\perp} |\mathbf{H}|^2}, \quad (38)$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{d \ln L(\alpha)}{d \ln(\alpha)} \tau_B, \quad \tau_{\perp} = \frac{2L(\alpha)}{\alpha - L(\alpha)} \tau_B, \quad (39)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (40)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0, \quad (41)$$

$$\frac{M_0}{\phi M_d} = L(\alpha) \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} = \left[ \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \right] \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}, \quad \alpha = \frac{\mu_0 M_d |\mathbf{H}| V_c}{k_B T}. \quad (42)$$

En las anteriores ecuaciones se debe tener en cuenta que  $\mathbf{M}_0$  es la magnetización de equilibrio,  $\tau$  el tiempo de relajación de la magnetización (el mecanismo de relajación se asume de tipo Browniano, es decir,  $\tau = \tau_B$ ),  $\frac{D}{Dt}$  el símbolo de la derivada material,  $\tau_{\parallel}$  el tiempo de relajación paralelo, mientras que  $\tau_{\perp}$  es el tiempo de relajación perpendicular, ambos reportados en el trabajo de Martsenyuk *et al.* [30]. Así mismo,  $M_d$  representa la magnetización del dominio,  $\phi$  la fracción volumétrica de partículas nanomagnéticas,  $L(\alpha)$  y  $\alpha$  la ecuación y el coeficiente de Langevin, respectivamente,  $V_c$  el volumen de la partícula magnética,  $k_B$  la constante de Boltzman y  $T$  la temperatura absoluta del sistema. A continuación, las ecuaciones magnéticas sin dimensiones.

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial t} + \tilde{\Omega} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{M}} - \tilde{\mathbf{M}} + \frac{\mathbf{M}_{\text{eq}}}{\chi K}, \quad (43)$$

$$\tilde{\Omega} \frac{D\tilde{\mathbf{M}}}{Dt} = \tilde{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{M}} + \frac{\tilde{\mathbf{H}} (\tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{M}})}{|\tilde{\mathbf{H}}|^2} \left( \frac{1}{B_{\perp}} - \frac{1}{B_{\parallel}} \right) + \frac{3\tilde{\mathbf{H}} \varphi(\tilde{H}_x, \tilde{H}_z)}{B_{\parallel}} - \frac{\tilde{\mathbf{M}}}{B_{\perp}}, \quad (44)$$

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \quad (45)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot (\chi \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{H}}) = 0. \quad (46)$$

En donde  $\varepsilon = \frac{\mu_0 \chi K^2 \tau}{\zeta} = \frac{2}{3} \alpha^2$  y es denominado el parámetro de perturbación, cuya deducción obtenida en la referencia [3] se expone en el anexo A. De forma similar, las constantes adimensionales de los tiempos de relajación paralelo y perpendicular,  $B_{\parallel}$  y  $B_{\perp}$  respectivamente, son presentadas en la Ec. (47).

$$B_{\parallel} = \frac{\tau_{\parallel}}{\tau_B} = \frac{d \ln L(\alpha)}{d \ln(\alpha)}, \quad B_{\perp} = \frac{\tau_{\perp}}{\tau_B} = \frac{2L(\alpha)}{\alpha - L(\alpha)}. \quad (47)$$

Adicionalmente, la función  $\varphi$  es definida como:

$$\varphi(\tilde{H}_x, \tilde{H}_z) = \frac{\coth(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\coth\left(\sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon(\tilde{H}_x^2 + \tilde{H}_z^2)}\right)}{\sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon(\tilde{H}_x^2 + \tilde{H}_z^2)}} - \frac{2}{3\varepsilon(\tilde{H}_x^2 + \tilde{H}_z^2)}.$$

Finalmente, en la Ec. (48) se define el parámetro de Langevin,  $\alpha$ .

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon|\tilde{\mathbf{H}}|^2} = \sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon(\tilde{H}_x^2 + \tilde{H}_z^2)}. \quad (48)$$

## 2.4 CONDICIONES DE FRONTERA

Las condiciones de frontera del problema hidrodinámico y el problema magnético, que serán implementadas para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, son mostradas a continuación.

**2.4.1 Condiciones de frontera del problema hidrodinámico en paredes del contenedor:** Las condiciones de frontera, usadas por otros autores [3, 4, 5, 6, 31] para la solución de las ecuaciones que describen el problema hidrodinámico, son las condiciones de no deslizamiento y no penetración, para la velocidad lineal y la velocidad de giro, tal como se muestra en la Ec. (49) y (50).

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_s = \frac{1}{\beta} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \times \mathbf{n})], \quad (49)$$

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_s = \frac{\beta}{2} (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (50)$$

Donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal unitario, desde el volumen del ferrofluido hacia la fase de aire de la interfase,  $\beta$  el coeficiente de fricción dependiente de la velocidad de deslizamiento,  $\mathbf{v}_s$  la velocidad en la pared del contenedor y  $\mathbf{T}$  el tensor de esfuerzos de Cauchy en el fluido. De manera similar, para la velocidad angular promedio local de las partículas, se ha propuesto una condición de frontera en la que se plantea la posibilidad de que una partícula, cerca de una superficie sólida, gire a la misma velocidad de la superficie,  $\beta = 0$ , o que rote a una velocidad angular similar a la rotación del fluido, es decir,  $\beta \neq 0$ . Donde  $\boldsymbol{\omega}$  es la velocidad angular promedio de las partículas magnéticas y  $\boldsymbol{\omega}_s$  la velocidad angular en la pared del contenedor [3].

**2.4.2 Condiciones de frontera del problema hidrodinámico en la interfase:** La ecuación integral del balance de momento lineal para un volumen de control, implementada en la definición de las condición de frontera, propuesta por A. Chaves y C. Rinaldi [5], para la velocidad lineal, es:

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = \int_V \mathbf{f}_v dV + \int_S \mathbf{s}(\mathbf{n}) dS + \int_c (\gamma \mathbf{m}) dc + \int_s \mathbf{f}_s dS \quad (51)$$

En donde  $V$  es el volumen de control,  $\mathbf{f}_v$  representa la densidad de fuerzas de cuerpo,  $\mathbf{s}(\mathbf{n})$  es el vector de esfuerzos,  $\gamma$  es la tensión superficial,  $\mathbf{m}$  es el vector unitario dirigido a hacia afuera de la interfase,  $\mathbf{f}_s$  es la fuerza de exceso superficial y  $S$  es la superficie del volumen de control.

Ahora bien, en la interfase ferrofluido-aire, a partir de la Ec. (51), se tendrán en cuenta las condiciones de fronteras que fueron planteadas en el trabajo de A. Chaves y C. Rinaldi [5], en donde se establecen las siguientes relaciones para la solución del sistema de ecuaciones diferenciales hidrodinámicas.

$$(T_{nn}|_b - T_{nn}|_a) + 2\hbar\gamma + B_n(H_n|_b - H_n|_a) + \frac{1}{2}\mu_0(H^2|_b - H^2|_a) = 0, \quad (52)$$

$$T_{nt}|_b - T_{nt}|_a + \mathbf{t} \cdot \nabla_s \gamma + B_n K_{s,t} = 0. \quad (53)$$

En donde  $T_{nn}$  y  $T_{nt}$  son la componente normal y tangencial del tensor de esfuerzos, respectivamente, las cuales se muestran a continuación:

$$T_{nn} = -p + 2\eta \frac{\partial v_n}{\partial x_n} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (54)$$

$$T_{nt} = \eta \left( \frac{\partial v_n}{\partial x_t} + \frac{\partial v_t}{\partial x_n} \right) + \zeta \mathbf{tn} : \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\nabla \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}). \quad (55)$$

En las Ec. (52-55),  $\hbar$  representa el coeficiente de curvatura de la interfase,  $B$  y  $H$  la densidad y la intensidad de campo magnético, respectivamente. Asimismo,  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{n}$  representan el vector unitario tangente y normal a la interfase en dirección al movimiento. Adicionalmente,  $\nabla_s$  corresponde al gradiente superficial en la interfase y  $K_s$  es la densidad de corriente superficial. En la Ec. (52) se tiene en cuenta que

$$H^2|_a = H_n^2|_a + H_t^2|_a \quad \text{y} \quad H|_b = H_n|_b + H_t|_b. \quad (56)$$

Ahora bien, para obtener un balance interfacial del momento angular interno, Chaves y Rinaldi [5] comenzaron con el balance integral de momento angular total, trabajado por Dahler y Scriven [36], añadiendo dos términos adicionales a la ecuación, quedando expresada de la siguiente manera:

$$\int_V \rho \frac{D(\mathbf{r} \times \mathbf{v} \times \mathbf{a})}{Dt} dV = \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{f}_v + \mathbf{l}) dV + \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{T} \times \mathbf{r}) dS + \oint_c \mathbf{r} \times \mathbf{m} \gamma dc + \int_{S_I} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_s dS. \quad (57)$$

En la Ec. (57),  $\mathbf{a}$  representa la densidad de momento angular interno, compuesta de rotaciones moleculares y formas submoleculares, tal como fue trabajado por Condiff y Dahler [37]. Como lo establecido en el trabajo de Chaves y Rinaldi [5], para el caso específico de ferrofluidos,  $\mathbf{a}$  tiene en cuenta sólo el momento angular de las partículas magnéticas y, por lo tanto, la ecuación constitutiva para  $\mathbf{a}$  es:

$$\mathbf{a} = I \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (58)$$

En la Ec. (58),  $I$  representa el momento de inercia promedio de las partículas. Adicionalmente, para el caso de ferrofluidos,  $\mathbf{l}$  representa el torque generado por el campo magnético externo, el cual es expresado de la siguiente manera:

$$\mathbf{l} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}. \quad (59)$$

En la Ec. (57),  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}$  representa la densidad superficial del par de contacto y  $\mathbf{C}$  el tensor del par de esfuerzos, el cual es una medida del transporte de momento angular interno por contacto directo. Una ecuación constitutiva para el tensor de par de esfuerzos,  $\mathbf{C}$ , fue propuesta por Condiff y Dahler [37], quienes lo asumieron como un tensor simétrico y dependiente solo del gradiente de la velocidad de giro,  $\boldsymbol{\omega}$ .

$$\mathbf{C} = \eta' [\nabla \boldsymbol{\omega} + (\nabla \boldsymbol{\omega})^t] + \lambda' (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{I}. \quad (60)$$

En la Ec. (60) se define el tensor de par de esfuerzos, en donde  $\eta'$  es el coeficiente fenomenológico “*spin viscosity*”,  $\lambda'$  el coeficiente fenomenológico “*bulk viscosity of spin*” e  $\mathbf{I}$  la diada unitaria de orden dos. Ahora, un balance de momento interfacial se puede obtener al aplicar la Ec. (57) a un volumen de control, tomando el límite cuando la altura del volumen de control tienda a cero. De esta forma, se obtiene que

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{C}|_b - \mathbf{C}|_a) = 0. \quad (61)$$

De modo que, la Ec. (61) muestra que el par de esfuerzos es continuo a lo largo de la interfase. Por lo tanto, las respectivas condiciones de frontera normal y tangencial, para el momento angular interno, se obtienen a través del producto interno de la Ec. (61) con los vectores  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{t}$ , obteniendo las siguientes relaciones, válidas en cualquier punto de la interfase ferrofluido-aire.

$$C_{nn}|_b = C_{nn}|_a, \quad (62)$$

$$C_{nt}|_b = C_{nt}|_a. \quad (63)$$

**2.4.3 Condiciones de frontera del problema magnético:** Las condiciones de frontera del problema magnético son la continuidad de la componente normal de la densidad de campo magnético,  $\mathbf{B}$ , y el salto de la componente tangencial de la intensidad de campo magnético,  $\mathbf{H}$  [43], las cuales se expresan de la siguiente manera:

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{B}_a - \mathbf{B}_b] = \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{H} + \mathbf{M})_a - (\mathbf{H} + \mathbf{M})_b] = 0, \quad (64)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b] = \mathbf{K}_s. \quad (65)$$

Donde  $\mathbf{K}_s$  es la distribución de corriente en la superficie de las paredes del contenedor del ferrofluido. Por lo tanto, las componentes de las ecuaciones de frontera magnéticas quedan expresadas de la siguiente manera:

$$B_n|_a - B_n|_b = 0, \quad (66)$$

$$H_t|_a - H_t|_b = K_s. \quad (67)$$

A continuación, de manera inicial, se presenta el estudio de un canal con dominio unidimensional, con el fin de desarrollar algoritmos de solución numérica con los cuales se pueda reproducir los resultados obtenidos por otros autores [1, 5, 31, 32], para  $\alpha \ll 1$ . De igual manera, para establecer las bases de un algoritmo de solución aplicable a un contenedor rectangular de dominio bidimensional, con el que sea posible obtener perfiles de velocidad válidos para cualquier valor de amplitud y frecuencia de campo magnético.

## 2.5 FLUJO DE UN FERROFLUIDO EN UNA GEOMETRÍA RECTANGULAR DE PLACAS PLANAS Y PARALELAS: DOMINIO UNIDIMENSIONAL

**2.5.1 Sistema físico de estudio:** En la figura 7 se muestra el sistema físico en el que se implementarán las ecuaciones del modelo ferrohodinámico. Para esta geometría, Chaves y Rinaldi [5] plantearon un problema unidimensional, con el propósito de reducir la complejidad matemática de las componentes vectoriales resultantes. En la figura 7 se puede observar una película de ferrofluido contenida en una geometría de placas planas y paralelas, separadas por una altura  $\delta$  y de longitud axial infinita.

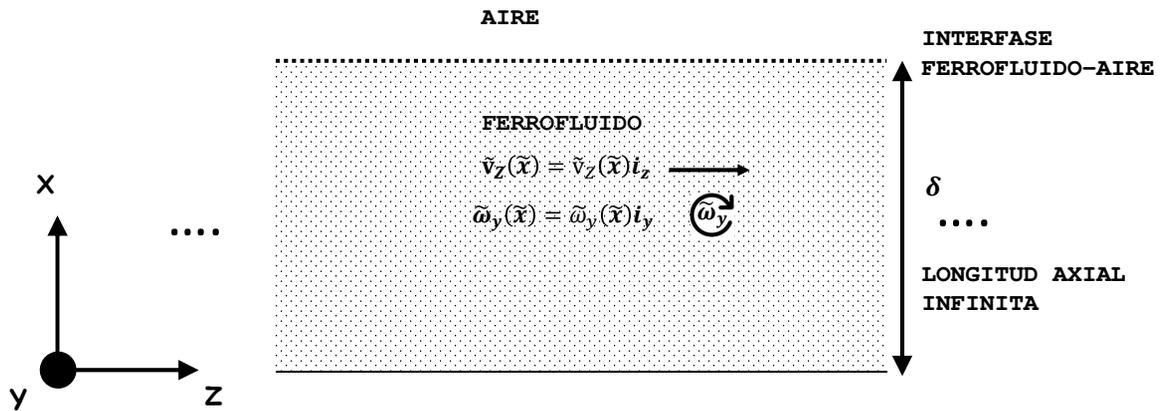


Figura 7: Esquema rectangular para el problema de flujo de un ferrofluido contenido en placas planas y paralelas de altura  $\delta$ , de longitud y ancho infinito (dominio unidimensional) y con interfase ferrofluido-aire en  $x = \delta$ . El campo, el cual gira alrededor del eje  $y$ , es generado por una intensidad de campo axial  $\tilde{H}_z$  y una densidad de campo transversal  $\tilde{B}_x$ . En el problema unidimensional se pretende determinar los perfiles  $\tilde{v}_z(\tilde{x})$  y  $\tilde{\omega}_y(\tilde{x})$ . Fuente: [5]

**2.5.2 Ecuaciones hidrodinámicas por componentes:** A partir de las ecuaciones hidrodinámicas, Ec. (30), (31) y (36), se obtienen las componentes rectangulares, cuya

existencia depende de las coordenadas en donde se presente el movimiento, tanto de tipo lineal como rotacional. Para este caso en particular de la geometría rectangular de la figura 7, el movimiento lineal del ferrofluido,  $\bar{\mathbf{v}} = \tilde{v}_z(\tilde{x}) \mathbf{i}_z$ , se supone únicamente en la coordenada  $\tilde{z}$ , mientras que el giro de las nanopartículas,  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\omega}_y(\tilde{x}) \mathbf{i}_y$ , sólo en la coordenada  $\tilde{y}$ . Por tal motivo, en este análisis se estudiarán la componente  $\tilde{z}$  del balance de momentum lineal y la componente  $\tilde{y}$  del balance de momentum angular interno. Por otra parte, en la Ec. (30), el término  $\frac{\zeta}{\Omega\eta} \tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}}$  es nulo, debido que se supone un campo magnético uniforme, es decir,  $\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$  (no aplica para la geometría anular de la figura 48, en donde se supone que  $\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}} \neq \mathbf{0}$ ). Asimismo, la componente  $\tilde{z}$  del término  $\tilde{\nabla} \tilde{p}$  se desprecia, ya que no existen elementos externos que generen diferenciales de presión en la coordenada del movimiento lineal del ferrofluido (ni en las geometrías rectangulares de este capítulo ni en las geometrías cilíndricas de los capítulos siguientes), ya que el movimiento se genera de forma espontánea bajo la única acción del campo magnético externo. Finalmente, el aporte del término  $\rho \mathbf{g}$  no se tiene en cuenta en el análisis, ya que la gravedad no realiza trabajo en las direcciones en la que se presenta el movimiento ( $\rho \mathbf{g} = -\rho g_x \mathbf{i}_x$ ), para ninguno de los sistemas de estudio tratados en esta investigación. En este orden de ideas, la componente  $\tilde{z}$  de la ecuación de balance de momentum lineal y la componente  $\tilde{y}$  del momento angular interno quedan expresadas en la Ec. (68) y (69).

$$2 \frac{\zeta}{\eta} \frac{d\tilde{\omega}_y}{d\tilde{x}} + \frac{\eta_e}{\eta} \frac{d^2\tilde{v}_z}{d\tilde{x}^2} = 0, \quad (68)$$

$$\frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \frac{d^2\tilde{\omega}_y}{d\tilde{x}^2} - 2 \frac{d\tilde{v}_z}{d\tilde{x}} - 4\tilde{\omega}_y + \frac{\langle \tilde{l}_y \rangle}{\tilde{\Omega}} = 0. \quad (69)$$

**2.5.3 Condiciones de frontera hidrodinámicas:** Las condiciones de frontera hidrodinámicas, aplicadas en el trabajo de Chaves y Rinaldi [5], vienen dadas por la suposición de no deslizamiento en la pared inferior del canal en  $\tilde{x} = 0$ , Ec. (49). Asimismo, por las componentes tangenciales del balance de momentum lineal y momentum angular interno de la interfase en  $\tilde{x} = 1$ , para una tensión superficial ( $\gamma$ ) constante y una corriente superficial en la interfase ( $K_{s,t}$ ) nula. Teniendo en cuenta estas consideraciones en la Ec. (55) y (63), y asumiendo que los vectores unitarios normal y tangencial son  $\mathbf{i}_x$  e  $\mathbf{i}_z$ , respectivamente, se tiene que:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_z|_{\tilde{x}=0} = 0, \quad \tilde{\omega}_y|_{\tilde{x}=0} = 0, \\ \frac{\eta_e}{\zeta} \frac{d\tilde{v}_z}{d\tilde{x}}|_{\tilde{x}=1} + 2\tilde{\omega}_y|_{\tilde{x}=1} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\tilde{\omega}_y}{d\tilde{x}}|_{\tilde{x}=1} = 0. \end{aligned} \quad (70)$$

**2.5.4 Ecuaciones magnéticas por componentes:** Asimismo, se obtienen las ecuaciones escalares magnéticas, es decir, las componentes de las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de magnetización Sh-72, para los valores de campo magnético que satisfacen

la relación  $\mathbf{M}_{\text{eq}} = \chi \mathbf{H}$ . Descomponiendo la Ec. (43), vertical y horizontalmente, se obtiene:

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y \tilde{M}_z + \tilde{M}_x - \tilde{H}_x = 0, \quad (71)$$

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y \tilde{M}_x + \tilde{M}_z - \tilde{H}_z = 0. \quad (72)$$

En la Ec. (71) y (72), el término  $\tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}}$  se cancela, debido que  $(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}})_x = \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial \tilde{z}} = 0$  y  $(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}})_z = \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial \tilde{z}} = 0$ , ya que  $\tilde{M}_x$  y  $\tilde{M}_z$  no dependen de la coordenada  $\tilde{z}$ , por lo que la longitud axial del canal se supuso infinita. Para mayor ilustración ver figura 7. Adicionalmente, cuando se supone que  $\mathbf{M}_{\text{eq}} = \chi \mathbf{H}$  es porque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , por lo tanto,  $\tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}} \rightarrow \mathbf{0}$ .

Para resolver la Ec. (71) y (72) se requieren de las condiciones iniciales de la magnetización, las cuales se asumen nulas para  $\tilde{t} = 0$ , debido a que no existen saltos escalonados en el fenómeno magnético, es decir,

$$\tilde{M}_x(\tilde{x}, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{M}_z(\tilde{x}, 0) = 0. \quad (73)$$

Seguidamente, al aplicar las leyes de Maxwell a un canal rectangular de longitud axial infinita, se tiene que las formas funcionales asumidas para  $H_z$  y  $B_x$  deben satisfacer la Ec. (74) y (75).

$$\langle \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{H}} \rangle_y = -\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial \tilde{x}} = 0, \quad (74)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = \frac{\partial \tilde{B}_x}{\partial \tilde{x}} = 0. \quad (75)$$

De las Ec. (74) y (75) se puede inferir que  $H_z$  y  $B_x$  son independientes de la variable  $\tilde{x}$ . Adicionalmente, se requiere de ondas sinusoidales desfasadas eléctricamente para generar un campo magnético de tipo rotativo. Por tal motivo, y con el propósito de encontrar una solución matemática al sistema de ecuaciones diferenciales magnéticas, se establece la relación de las componentes  $\tilde{H}_z$  y  $\tilde{B}_x$  de la intensidad y la densidad de campo magnético.

$$\tilde{H}_z = \cos(\tilde{t}), \quad (76)$$

$$\tilde{B}_x = \sin(\tilde{t}). \quad (77)$$

Ahora, teniendo en cuenta la definición de la Ec. (46), se tiene que:

$$\tilde{H}_x = \tilde{B}_x - \chi \tilde{M}_x = \sin(\tilde{t}) - \chi \tilde{M}_x. \quad (78)$$

En consecuencia, para resolver el problema magnético en el contenedor de la figura 7, solo se requiere solucionar el sistema producto de las componentes de la ecuación de magnetización, Ec. (71) y (72), y utilizar el valor de  $\tilde{M}_x$  en la Ec. (78) para determinar, finalmente, el valor del torque de orden cero  $\langle \tilde{l}_y \rangle_{t,0}$ .

Para esta geometría de estudio en particular, el campo magnético rotativo y uniforme es generado por la combinación de los campos magnéticos alternantes de la Ec. (76) y (77), uno aplicado de forma transversal y el otro de forma axial, los cuales pueden ser representados como una cantidad vectorial compleja de la siguiente manera:

$$\tilde{H}_z(\tilde{t}) = \Re \{ \hat{h}_z e^{j\Omega \cdot t_f} \} = \Re \{ \hat{h}_z e^{j\tilde{t}} \}, \quad (79)$$

$$\tilde{B}_x(\tilde{t}) = \Re \{ \hat{b}_x e^{j\Omega \cdot t_f} \} = \Re \{ \hat{b}_x e^{j\tilde{t}} \}. \quad (80)$$

En la Ec. (79) y (80),  $\Omega$  representa la velocidad angular del campo magnético ( $\Omega = 2\pi f$ ),  $f$  la frecuencia de rotación del campo magnético,  $t_f$  el tiempo en el que se analiza el fenómeno del flujo y  $j$  es el número imaginario  $\sqrt{-1}$ . Adicionalmente, se tiene que  $\hat{h}_z$  y  $\hat{b}_x$  son las componentes complejas adimensionales, para la intensidad y la densidad de campo magnético, respectivamente. Sin embargo, las componentes  $\tilde{H}_x$  y  $\tilde{B}_z$  dependen de la coordenada vertical  $\tilde{x}$ . Debido a lo anterior, y a la forma geométrica del canal rectangular, se espera que los vectores de la intensidad de campo magnético, la densidad de campo y la magnetización,  $\tilde{\mathbf{H}}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$  respectivamente, tengan la siguiente forma funcional:

$$\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \Re \{ [\hat{h}_x(\tilde{x}) \mathbf{i}_x + \hat{h}_z \mathbf{i}_z] e^{j\tilde{t}} \}, \quad (81)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \Re \{ [\hat{b}_x \mathbf{i}_x + \hat{b}_z(\tilde{x}) \mathbf{i}_z] e^{j\tilde{t}} \}, \quad (82)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \Re \{ [\hat{m}_x(\tilde{x}) \mathbf{i}_x + \hat{m}_z(\tilde{x}) \mathbf{i}_z] e^{j\tilde{t}} \}. \quad (83)$$

Donde  $\hat{m}_x$  y  $\hat{m}_z$  representan las componentes complejas adimensionales de la magnetización  $\tilde{\mathbf{M}}$ . Bajo estas condiciones, según el análisis realizado por A. Chaves y C. Rinaldi [5], se tiene que el torque, para campos magnéticos de baja amplitud (denominado también torque de orden cero), se expresa a través de la Ec. (84).

$$\langle \tilde{l}_y \rangle_{t,0} = \frac{\tilde{\Omega} (\tilde{\Omega}^2 + \chi + 1)}{(\tilde{\Omega}^2 + 1) [(\chi + 1)^2 + \tilde{\Omega}^2]}. \quad (84)$$

La Ec. (84) describe el valor del torque de orden cero, es decir, el torque que se presenta para campos magnéticos rotativos de baja intensidad ( $\alpha \ll 1$ ). Se puede observar de acuerdo con la definición de la Ec. (84), que el torque para este caso en particular es de carácter constante tanto en el tiempo como en el espacio, lo cual no es válido en casos donde se presentan intensidades altas de campo magnético ( $\alpha \gg 1$ ). De modo que, se debe suponer la variación espacial y temporal del torque. En estas condiciones, el valor del torque se determina a través de la definición de la Ec. (85).

$$\tilde{l}_y = (\tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}})_y = (\tilde{M}_z \tilde{H}_x - \tilde{M}_x \tilde{H}_z) = \tilde{M}_z (\sin(\tilde{t}) - \chi \tilde{M}_x) - \tilde{M}_x \cos(\tilde{t}). \quad (85)$$

La Ec. (85) define el valor del torque magnético en cada punto del canal, el cual depende de los valores de la magnetización presentada en cada punto, es decir, de los valores  $\tilde{M}_x$ , y  $\tilde{M}_z$ , como también, de las componentes de la intensidad de campo magnético  $\tilde{H}_x$  y  $\tilde{H}_z$ . Adicionalmente, se debe tener en cuenta que los cálculos dentro del modelo hidrodinámico son realizados para estado permanente, es decir, para un tiempo posterior al transiente. Por tal motivo, es necesario implementar, en la Ec. (69) del modelo hidrodinámico, el valor del torque promedio de la Ec. (86).

$$\langle \tilde{l}_y \rangle_t = \frac{1}{\tilde{t}_f} \int_0^{\tilde{t}_f} \tilde{l}_y(\tilde{t}) d\tilde{t} \approx \frac{1}{\tilde{t}_f} \left\{ \frac{\Delta t}{2} \left[ \tilde{l}_y(0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{l}_y(\tilde{t}_i) + \tilde{l}_y(\tilde{t}_f) \right] \right\}. \quad (86)$$

En el presente trabajo se implementarán las ecuaciones (84) y (86), con el propósito de determinar el valor del torque en cada uno de los modelos: la Ec. (84) para el modelo válido solo a campos bajos ( $\alpha \ll 1$ ), y la Ec. (86) para campos de alta intensidad ( $\alpha \gg 1$ ).

**2.5.5 Solución para  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ :** Las ecuaciones diferenciales del modelo ferrohídrodinámico de dominio unidimensional  $\tilde{x}$ , para  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ , fueron resueltas a través del *método de perturbación regular* en el trabajo realizado por Chaves y Rinaldi [5], los cuales determinaron los perfiles de velocidad lineal ( $\tilde{v}_z$ ) y de giro ( $\tilde{\omega}_y$ ), expresados en la Ec. (87) y (88).

$$\tilde{v}_z(\tilde{x}) = -\frac{\mu_0 \chi_i H^2 \delta}{2\eta} \tilde{l}_y \left[ \tilde{x} + \frac{\sinh(\kappa - \kappa \tilde{x}) \operatorname{sech}(\kappa) - \tanh(\kappa)}{\kappa} \right], \quad (87)$$

$$\tilde{\omega}_y(\tilde{x}) = -\frac{\mu_0 \chi_i H^2 \eta_e}{4\zeta \eta} \tilde{l}_y [\cosh(\kappa \tilde{x}) - \sinh(\kappa \tilde{x}) \tanh(\kappa) - 1]. \quad (88)$$

**2.5.6 Solución para  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ :** Según lo realizado en el trabajo de Chaves *et al.* [31], se requiere de métodos numéricos que permitan encontrar una solución al sistema de ecuaciones diferenciales compuesto por la Ec. (30), (31), (43), (45) y (46). En el trabajo de Chaves *et al.* [31] se implementó el método de las diferencias finitas, realizando la discretización de las ecuaciones diferenciales, y la aplicación de cada una de estas, en cada uno de los nodos temporales y espaciales del dominio del sistema geométrico (ver figura 7), tal como se muestra en la Ec. (89)-(95).

$$2\frac{\zeta}{\eta} \frac{(\tilde{\omega}_{y,i+1} - \tilde{\omega}_{y,i-1})}{2\Delta\tilde{x}} + \frac{\eta_e}{\eta} \frac{(\tilde{v}_{z,i-1} - 2\tilde{v}_{z,i} + \tilde{v}_{z,i+1})}{\Delta\tilde{x}^2} = 0, \quad (89)$$

$$\frac{4\eta}{\eta_e\kappa^2} \frac{(\tilde{\omega}_{y,i-1} - 2\tilde{\omega}_{y,i} + \tilde{\omega}_{y,i+1})}{\Delta\tilde{x}^2} - \frac{(\tilde{v}_{z,i+1} - \tilde{v}_{z,i-1})}{2\Delta\tilde{x}} - 4\tilde{\omega}_{y,i} + \frac{\langle \tilde{l}_y \rangle_i}{\tilde{\Omega}} = 0, \quad (90)$$

$$\tilde{\Omega} \frac{(\tilde{M}_{x,i}^{k+1} - \tilde{M}_{x,i}^{k-1})}{2\Delta\tilde{t}} - \tilde{\Omega}\varepsilon\tilde{\omega}_{y,i}^k \tilde{M}_{z,i}^k + \tilde{M}_{x,i}^k - \tilde{H}_{x,i}^k = 0, \quad (91)$$

$$\tilde{\Omega} \frac{(\tilde{M}_{z,i}^{k+1} - \tilde{M}_{z,i}^{k-1})}{2\Delta\tilde{t}} + \tilde{\Omega}\varepsilon\tilde{\omega}_{y,i}^k \tilde{M}_{x,i}^k + \tilde{M}_{z,i}^k - \tilde{H}_{z,i}^k = 0, \quad (92)$$

$$\tilde{H}_{z,i}^k = \cos(\tilde{t}_k^k), \quad (93)$$

$$\tilde{H}_{x,i}^k = \sin(\tilde{t}_k^k) - \chi\tilde{M}_{x,i}^k, \quad (94)$$

$$\tilde{l}_{y,i}^k = \tilde{M}_{z,i}^k \tilde{H}_{x,i}^k - \tilde{M}_{x,i}^k \tilde{H}_{z,i}^k = \tilde{M}_{z,i}^k [\sin(\tilde{t}_k^k) - \chi\tilde{M}_{x,i}^k] - \tilde{M}_{x,i}^k \cos(\tilde{t}_k^k). \quad (95)$$

En la Ec (89)-(95), los subíndices  $i$  y  $k$  representan los puntos discretos de la coordenada vertical y temporal, respectivamente. Para mayor ilustración ver figura 8.

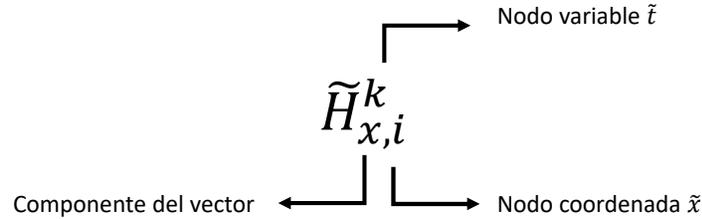


Figura 8: Esquema de término discreto en donde las variables  $i$  y  $k$  corresponden a los nodos en la coordenada vertical  $\tilde{x}$  y la variable temporal  $\tilde{t}$ , respectivamente.

**2.5.7 Metodología del algoritmo solución:** El diagrama de flujo de la figura 9 corresponde a la metodología que se implementa en los algoritmos para la solución numérica del modelo ferrohodinámico. La metodología de solución se describe a través de los siguientes pasos:

1. Ingresar las características del ferrofluido, la geometría del contenedor y las particularidades de la simulación a realizar, tales como: viscosidad de cizalla  $\eta$ , viscosidad del líquido portador  $\eta_0$ , susceptibilidad magnética inicial  $\chi$ , fracción volumétrica  $\phi$ , tiempo de relajación  $\tau$  (para este caso se supone que las partículas nanomagnéticas presentan solo de tipo Browniano  $\tau_B$ ), la permeabilidad del espacio  $\mu_0$ , la intensidad de campo magnético  $H$ , la viscosidad de vortice  $\zeta$ , la altura del sistema de estudio  $\delta$ , el número de nodos del sistema (tanto espaciales como temporales). Asimismo, los valores de torque promedio inicial en cada punto de la geometría y el número máximo de iteraciones del algoritmo.

2. A partir del torque promedio calculado en la iteración anterior (en el caso de la primera iteración se asume el valor de torque promedio inicial suministrado por el usuario), se hace el cálculo de los perfiles de velocidad lineal y de giro, teniendo en cuenta que  $\tilde{v}_z = f(\tilde{x}, \tilde{\omega}_y)$  y  $\tilde{\omega}_y = f(\tilde{x}, \tilde{v}_z)$ , Ec. (89) y (90).
3. Si las velocidades no alcanzan convergencia, se vuelve al paso 2. De lo contrario, se establece a  $\tilde{v}_z(\tilde{x})$  y  $\tilde{\omega}_y(\tilde{x})$  como los perfiles de velocidad correspondientes al valor de torque promedio de la iteración. De esta manera, se prosigue a la solución del problema magnético, con el fin de obtener los valores de  $\tilde{M}_x(\tilde{x})$ ,  $\tilde{M}_z(\tilde{x})$ ,  $\tilde{H}_x(\tilde{x})$  y  $\tilde{H}_z(\tilde{x})$ , Ec. (91), (92), (93) y (94).
4. Se procede al cálculo del torque instantáneo para cada nodo espacial y temporal del sistema en estudio, Ec. (95). Adicionalmente, se hace el cálculo del torque promedio para cada punto de la geometría, Ec. (86).
5. Si el torque promedio no alcanza convergencia ( $\varepsilon_2 \geq 1\%$ ), se regresa al paso 2. De lo contrario, se establece a  $\tilde{v}_z(\tilde{x})$  y  $\tilde{\omega}_y(\tilde{x})$  como los perfiles de velocidad resultantes.
6. Fin de la metodología.

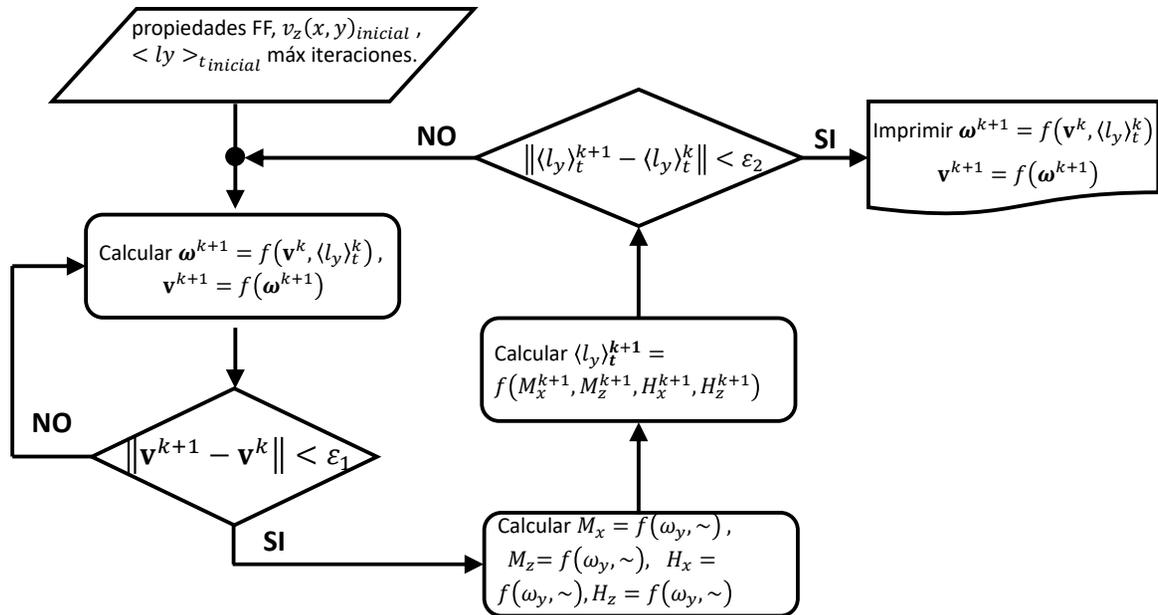


Figura 9: Diagrama de flujo de metodología implementada en el desarrollo del algoritmo numérico, para la solución del problema ferrodinámico de la TDMAI, para ferrofluidos bajo el efecto de campos magnéticos de magnitud y frecuencias no bajas.

**2.5.8 Validación de la solución numérica:** Una vez establecido el algoritmo numérico, lo primero que se debe realizar es la validación de este mismo con los resultados que se obtienen a través de la solución analítica (*método de perturbación regular*), la

Tabla 2: Caracterización de ferrofluidos. Fuente: [2].

Ferrofluido	WBF-1	WGBF-1	WBF-2
$\rho$ (kgm <sup>3</sup> )	1,03	1,26	1,04
$\eta$ (mPas)	1,03	76,1	1,06
$\eta_0$ (mPas)	1,02	81,2	1,02
$\mu_0 M_s$ (mT)	1,14	2,01	1,93
$\phi$ (%)	0,213	0,376	0,361
$\chi$	0,106	0,200	0,267
$\tau$ (s)	$1,67 \times 10^{-5}$	$2,45 \times 10^{-3}$	$4,25 \times 10^{-5}$

cual es válida solo para campos magnéticos de baja intensidad ( $\alpha \ll 1$ ). En este orden de ideas, se seleccionaron tres muestras de ferrofluido (WBF-1, WGBF-1 y GBF-2), implementadas en los trabajos de las referencias [2, 5, 31], con las características que se especifican en la tabla 2. En donde  $\rho$  representa la densidad del ferrofluido,  $\eta$  la viscosidad de cizalla,  $\eta_0$  la viscosidad del líquido portador,  $\phi$  la fracción volumétrica de la mezcla,  $\chi$  la susceptibilidad magnética inicial y  $\tau$  la constante de tiempo de la relajación de la magnetización. En la figura 10 se muestran los resultados de la validación del algoritmo unidimensional, en donde las curvas denominadas  $v_z$  y  $\omega_y$  numérico corresponden a los perfiles obtenidos por medio de la metodología numérica, mientras que la metodología analítica es la representada por las curvas denominadas  $v_z$  y  $\omega_y$  analítico.

**2.5.9 Evaluación del desempeño numérico de la ecuación Sh-72:** Una vez realizada la validación, se procede a presentar los perfiles de velocidad para diferentes valores de intensidad de campo magnético. Por consiguiente, en las figuras 11, 12 y 13, se presentan los perfiles de velocidad obtenidos por medio del modelo ferrohodinámico que implementa la ecuación Sh-72. Lo anterior, para densidades de campo magnético de 1, 2 y 3 mT.

En las figuras 11, 12 y 13 se puede observar que al aumentar el campo magnético, los perfiles analíticos y numéricos tienden a diferenciarse en mayor medida.

Al ejecutar las simulaciones, se encontró que en la muestra de ferrofluido WBF-1, para densidades de campo magnético en donde  $\alpha \approx 1$  y para  $\alpha \geq 1$ , la solución del sistema ferrohodinámico no pudo ser determinada, debido a la no convergencia del algoritmo numérico. Del mismo modo, se pudo detectar que al menos para las muestras de ferrofluidos tratadas en esta investigación (WBF-1, WGBF-1 y GBF-2. Ver tabla 2), las soluciones obtenidas, implementando la ecuación de magnetización Sh-72 [10], son determinadas solo para bajas intensidades de campo magnético, similares a las intensidades aplicadas en el trabajo reportado por Peña *et al.* [1] y Chaves *et al.* [3, 5].

**2.5.10 Implementación de la ecuación MRSh-74:** Una vez detectada la no convergencia de la solución numérica, debido a la implementación de la ecuación de magnetización Sh-72 [10], se procede a observar el comportamiento del algoritmo para la solución del sistema ferrohodinámico, pero esta vez con la implementación de la ecuación de magnetización MRSh-74 [30], Ec. (44). En seguida, en la Ec. (96) y (97),

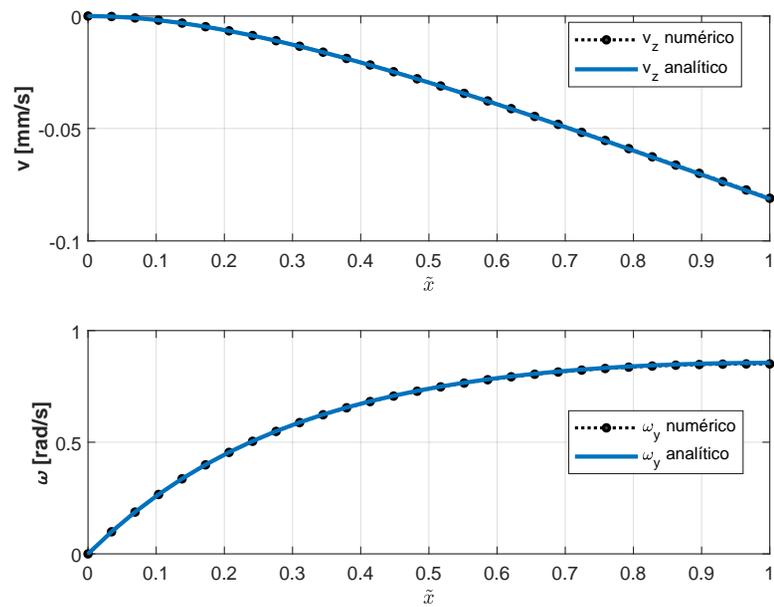


Figura 10: Validación de metodología del algoritmo numérico, para la solución del problema ferrohrodinámico de la TDMAI del canal rectangular, con dominio unidimensional (coordenada vertical  $\tilde{x}$ ). Para la validación se implementó la solución analítica para bajos campos reportada en el trabajo de Chaves *et al.* [3] (WBF-1), bajo el efecto de una densidad de campo de 0,1 mT, frecuencia 150 Hz y  $\kappa = 1$ .

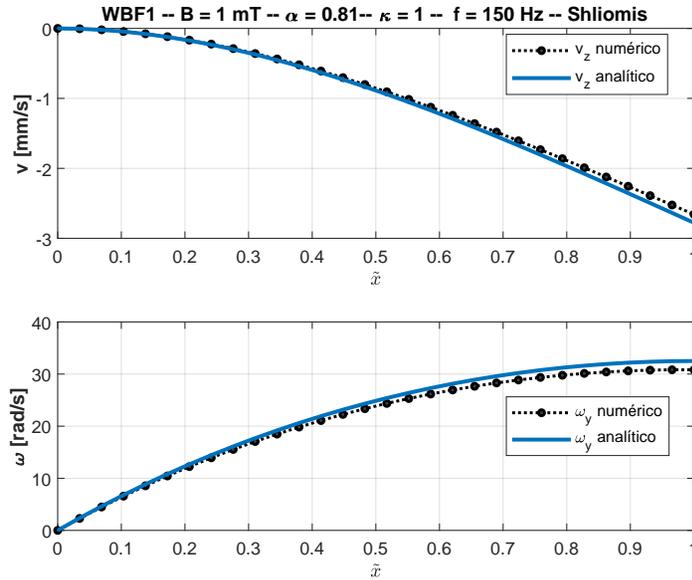


Figura 11: Comparación de perfiles de velocidad, analítico y numérico, para la muestra de ferrofluido WBF-1. En la descripción del problema magnético de la TDMAI se implementó la ecuación Sh-72. Densidad de campo magnético de 1 mT, frecuencia de 150 Hz,  $\alpha = 0,81$ ,  $\kappa = 1$ .

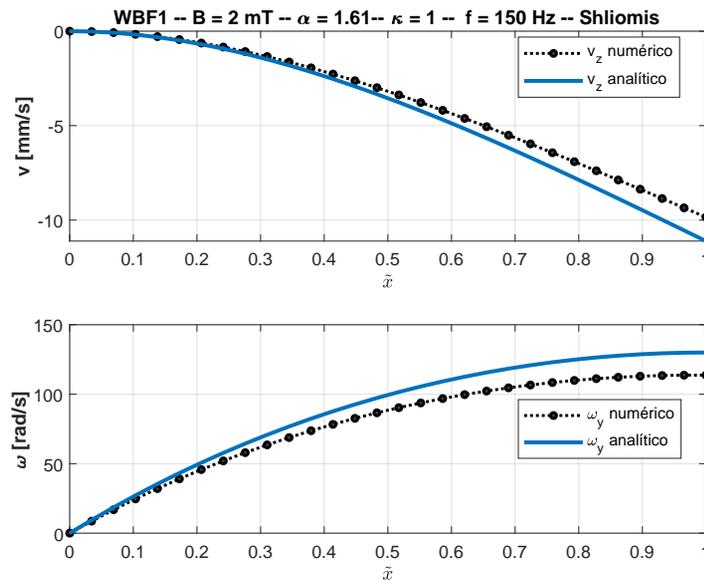


Figura 12: Comparación de perfiles de velocidad, analítico y numérico, para la muestra de ferrofluido WBF-1. En la descripción del problema magnético de la TDMAI se implementó la ecuación Sh-72. Densidad de campo magnético de 2 mT, frecuencia de 150 Hz,  $\alpha = 0,81$ ,  $\kappa = 1$ .

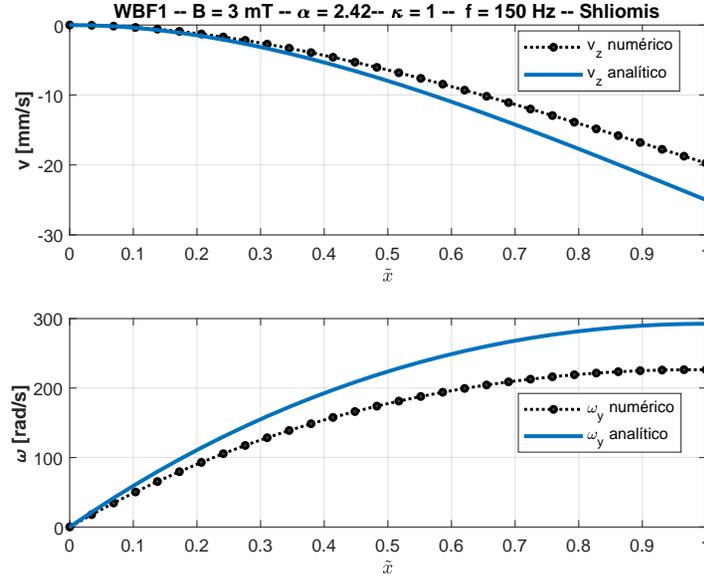


Figura 13: Comparación de perfiles de velocidad, analítico y numérico, para la muestra de ferrofluido WBF-1. En la descripción del problema magnético de la TDMAI se implementó la ecuación Sh-72. Densidad de campo magnético de 3 mT, frecuencia de 150 Hz,  $\alpha = 0,81$ ,  $\kappa = 1$ .

se expone la componente vertical y horizontal de la ecuación MRSh-74. Es necesario aclarar que este trabajo fue realizado anteriormente en la tesis de maestría de V. Peña [1]

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y \tilde{M}_z + \frac{\tilde{H}_x (\tilde{H}_x \tilde{M}_x + \tilde{H}_z \tilde{M}_z)}{(\tilde{H}_x^2 + \tilde{H}_z^2)} \left( \frac{1}{B_\perp} - \frac{1}{B_\parallel} \right) + \frac{3\tilde{H}_x \varphi(\tilde{H}_x, \tilde{H}_z)}{B_\parallel} - \frac{\tilde{M}_x}{B_\perp}, \quad (96)$$

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_y \tilde{M}_z + \frac{\tilde{H}_z (\tilde{H}_x \tilde{M}_x + \tilde{H}_z \tilde{M}_z)}{(\tilde{H}_x^2 + \tilde{H}_z^2)} \left( \frac{1}{B_\perp} - \frac{1}{B_\parallel} \right) + \frac{3\tilde{H}_z \varphi(\tilde{H}_x, \tilde{H}_z)}{B_\parallel} - \frac{\tilde{M}_z}{B_\perp}. \quad (97)$$

Al discretizar la Ec. (96) y (97) se obtiene la Ec. (98) y (99).

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} \frac{(\tilde{M}_{x,i}^k - \tilde{M}_{x,i}^{k-1})}{\Delta \tilde{t}} &= \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_{y,i}^k \tilde{M}_{z,i}^k \\ &+ \frac{\tilde{H}_{x,i}^k (\tilde{H}_{x,i}^k \tilde{M}_{x,i}^k + \tilde{H}_{z,i}^k \tilde{M}_{z,i}^k)}{[(\tilde{H}_{x,i}^k)^2 + (\tilde{H}_{z,i}^k)^2]} \left( \frac{1}{B_{\perp}} - \frac{1}{B_{\parallel}} \right) + \frac{3 \tilde{H}_{x,i}^k \varphi_i^k (\tilde{H}_{x,i}^k, \tilde{H}_{z,i}^k)}{B_{\parallel}} - \frac{\tilde{M}_{x,i}^k}{B_{\perp}}, \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} \frac{(\tilde{M}_{z,i}^k - \tilde{M}_{z,i}^{k-1})}{\Delta \tilde{t}} &= -\tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_{y,i}^k \tilde{M}_{x,i}^k \\ &+ \frac{\tilde{H}_{z,i}^k (\tilde{H}_{x,i}^k \tilde{M}_{x,i}^k + \tilde{H}_{z,i}^k \tilde{M}_{z,i}^k)}{[(\tilde{H}_{x,i}^k)^2 + (\tilde{H}_{z,i}^k)^2]} \left( \frac{1}{B_{\perp}} - \frac{1}{B_{\parallel}} \right) + \frac{3 \tilde{H}_{z,i}^k \varphi_i^k (\tilde{H}_{x,i}^k, \tilde{H}_{z,i}^k)}{B_{\parallel}} - \frac{\tilde{M}_{z,i}^k}{B_{\perp}}, \end{aligned} \quad (99)$$

en donde

$$\begin{aligned} \varphi_i^k (\tilde{H}_{x,i}^k, \tilde{H}_{z,i}^k) &= \frac{\coth(\alpha_i^k)}{\alpha_i^k} - \frac{1}{(\alpha_i^k)^2}, \\ \varphi_i^k (\tilde{H}_{x,i}^k, \tilde{H}_{z,i}^k) &= \frac{\coth\left(\sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon [(\tilde{H}_{x,i}^k)^2 + (\tilde{H}_{z,i}^k)^2]}\right)}{\sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon [(\tilde{H}_{x,i}^k)^2 + (\tilde{H}_{z,i}^k)^2]}} - \frac{2}{3\varepsilon [(\tilde{H}_{x,i}^k)^2 + (\tilde{H}_{z,i}^k)^2]}. \end{aligned} \quad (100)$$

Al utilizar la ecuación de magnetización MRSh-74 y el método de las diferencias finitas, Ec. (98)-(100), se presenta la necesidad de solucionar un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales. Por tal motivo, se requiere un algoritmo de solución diferente al que se usó con la ecuación Sh-72, en la que no se presentaron no linealidades. En consecuencia, para resolver el nuevo conjunto de ecuaciones, se emplea el método numérico de Newton-Raphson, para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales, el cual se resume metodológicamente en los siguientes pasos [57]:

Paso 1: Seleccionar un punto inicial,  $\mathbf{P}_k$ .

Paso 2: Se evalúa las funciones en donde se encuentran las variables desconocidas,  $\mathbf{F}(\mathbf{P}_k)$ .

Paso 3: Se calcula la matriz jacobiana,  $\mathbf{J}(\mathbf{P}_k)$ , la cual está compuesta por cada una de las derivadas de las funciones, con relación a cada variable desconocida.

Paso 4: Se calcula el paso  $\Delta \mathbf{P}$ , a partir de la solución de la Ec. (101), el cual se debe sumar al punto actual,  $\mathbf{P}_k$ .

$$\mathbf{J}(\mathbf{P}_k) \Delta \mathbf{P} = -\mathbf{F}(\mathbf{P}_k). \quad (101)$$

Paso 5: Se calcula el siguiente punto a través de la Ec. (102).

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k + \Delta\mathbf{P}. \quad (102)$$

De esta manera, se repite el mismo procedimiento hasta encontrar convergencia en la solución, es decir, hasta que el valor de  $\Delta\mathbf{P} \rightarrow 0$ .

Teniendo en cuenta la limitación encontrada en el modelo que contiene la ecuación Sh-72, a continuación, se muestra en la figura 14, 15 y 16, una comparación de los perfiles encontrados a través de los diferentes métodos implementados, para valores de intensidad de campo magnético en los que se cumple que  $\alpha < 1$ . En las figuras 14, 15 y 16,  $v_z$  analitic corresponde a la solución obtenida a través del método analítico de *perturbación regular* [5] (se toma en cuenta el valor del torque de orden cero con la aplicación de la ecuación de magnetización Sh-72), mientras que  $v_z$  Sh representa la solución numérica del modelo ferrohodinámico que, igualmente, utiliza la ecuación Sh-72. Por último,  $v_z$  MRSh corresponde a los resultados obtenidos a través del algoritmo numérico que implementa la ecuación de magnetización MRSh-74. Observando los resultados de la figura 14, 15 y 16, es posible afirmar que, al menos para la muestra de ferrofluido WBF-1 contenida en el canal, el perfil de velocidad de mayor magnitud es el obtenido con la solución analítica, al que le sigue las predicciones del método numérico que implementa la ecuación Sh-72, y finalmente, para todos los casos reportados en esta investigación, los perfiles de menor magnitud son los obtenidos a partir del modelo que implementa la ecuación MRSh-74. Estas tendencias encontradas en las curvas de velocidad están relacionadas con los resultados obtenidos recientemente por Chaves *et al.* [31], para un ducto rectangular, en donde no se consideró el efecto de una interfase ferrofluido-aire en los perfiles.

Teniendo en cuenta la falta de convergencia en el algoritmo solución que implementa la ecuación Sh-72, se determina implementar únicamente el algoritmo solución basado en la ecuación de magnetización MRSh-74. Lo anterior, tanto para la predicción de perfiles en la geometría rectangular, como en la geometría cilíndrica y anular.

Con el modelo que implementa la ecuación MRSh-74, bajo el efecto de campos magnéticos de baja amplitud, se obtuvieron los mismos resultados reportados en el trabajo de Chaves y Rinaldi [5], para los diferentes valores de la constante  $\kappa$ , tal como se observa en la figura 17 del presente documento.

**2.5.11 Análisis de resultados relacionados con el flujo de un ferrofluido contenido en una geometría rectangular con dominio unidimensional:** Teniendo presente que estos resultados ya fueron obtenidos previamente (de forma analítica en el trabajo de Chaves y Rinaldi [5] y numéricamente en el trabajo de Chaves *et al.* [31]), la razón por la cual se realizó un algoritmo-solución para la geometría rectangular unidimensional, fue debido a la necesidad de comparar el desempeño de las ecuaciones de magnetización, Sh-72 y MRSh-74, en la predicción de los perfiles, para intensidades de campo magnético en las cuales  $\alpha \gg 1$ . Estos estudios fueron abordados, ya que en simulaciones realizadas para la geometría cilíndrica (capítulo III), se presentó una falta de convergencia en el algoritmo generador de los perfiles, lo que nos obligó a observar

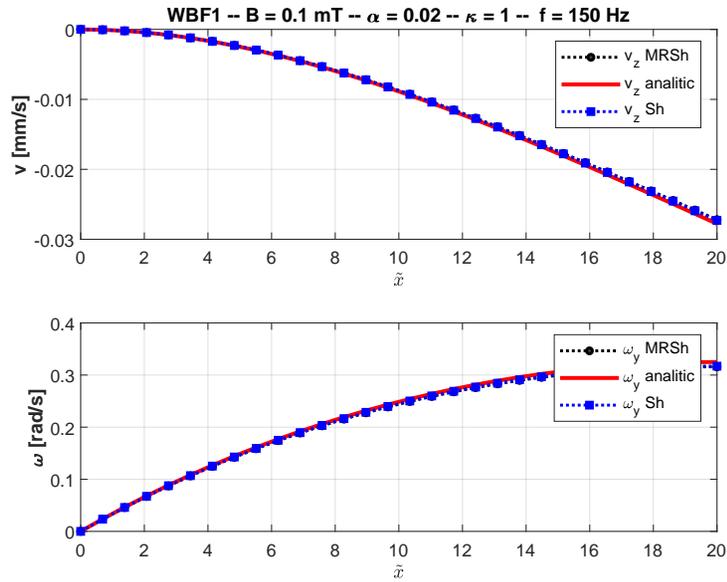


Figura 14: Perfiles de velocidad obtenidos a partir de la TDMAI, implementando en el problema magnético la ecuación Sh-72 (azul), MRSh-74 (negro) y el torque de orden cero (rojo), para una densidad de campo magnético de 0,1 mT,  $\alpha = 0,02$ ,  $\kappa = 1$  y  $f = 150$  Hz. WBF-1.

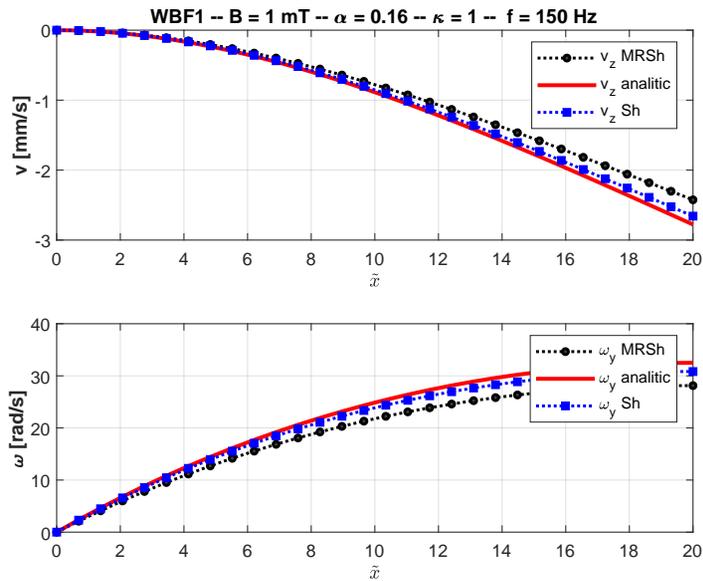


Figura 15: Perfiles de velocidad obtenidos a partir de la TDMAI, implementando en el problema magnético la ecuación Sh-72 (azul), MRSh-74 (negro) y el torque de orden cero (rojo), para una densidad de campo magnético de 1 mT,  $\alpha = 0,16$ ,  $\kappa = 1$  y  $f = 150$  Hz. WBF-1.

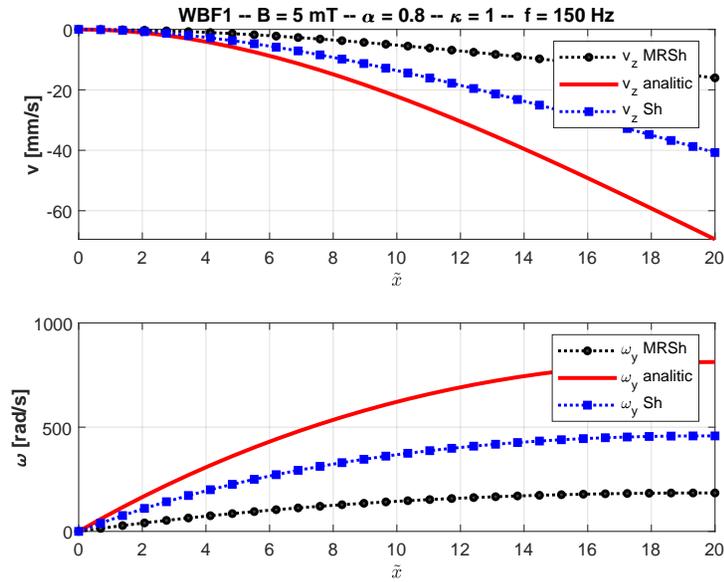


Figura 16: Perfiles de velocidad obtenidos a partir de la TDMAI, implementando en el problema magnético la ecuación Sh-72 (azul), MRSh-74 (negro) y el torque de orden cero (rojo), para una densidad de campo magnético de 5 mT,  $\alpha = 0,8$ ,  $\kappa = 1$  y  $f = 150$  Hz. WBF-1.

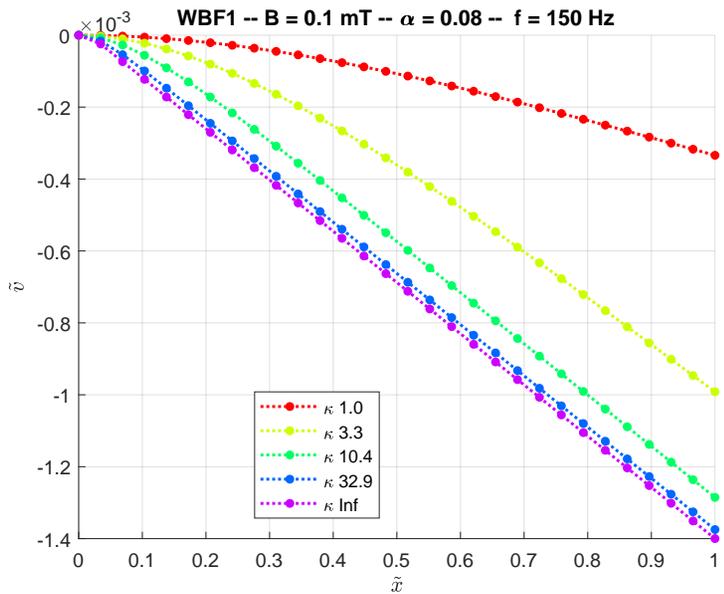


Figura 17: Perfiles de velocidad (en función de los valores de la variable  $\kappa$ ) obtenidos a través de la implementación del algoritmo de solución numérica, en el sistema de ecuaciones de la TDMAI, para la muestra WBF-1 contenida en un canal de geometría rectangular y dominio unidimensional.  $B = 0,1$  mT,  $\alpha = 0,08$  y  $f = 150$  Hz.

de forma más detallada el desempeño de las ecuaciones de magnetización en una geometría menos compleja, como lo es un canal rectangular unidimensional. Lo anterior, considerando que la comparación del desempeño de dichas ecuaciones, hace parte de uno de los objetivos específicos planteados en esta propuesta de investigación.

Dicho lo anterior, y a partir de los resultados obtenidos en el estudio de flujo de un ferrofluido inmerso en un contenedor de geometría rectangular, para un dominio unidimensional, se plantean las siguientes afirmaciones:

- Hasta este momento, en el documento se determinaron los perfiles de velocidad para el sistema de la figura 7, siguiendo la metodología planteada en la figura 9. Para esto, de forma inicial, se realizó la validación de los resultados del algoritmo numérico, comparando esta solución con la obtenida de forma analítica, considerando que esta última solo aplica para campos de baja intensidad, tal como se puede observar en la figura 10.
- El modelo que implementa la ecuación Sh-72 presenta limitaciones en cuanto al algoritmo de solución. Estas limitaciones se presentan debido a la no convergencia del algoritmo numérico. Para el caso particular de la muestra de ferrofluido denominada WBF-1, esta situación se genera para un valor de  $\kappa = 0,47$  y para valores mayores a 5 mT, observando adicionalmente que la falta de convergencia se presenta para valores menores de campo magnético, a medida que el valor de  $\kappa$  incrementa. De igual manera, en los resultados reportados por Peña *et al.* [1], para la muestra de ferrofluido WBF-1, no se reportaron perfiles de velocidad para densidades de campo magnético mayores a 6 mT, lo cual permite deducir que se presentaron las mismas limitaciones, en cuanto a la convergencia del algoritmo de solución numérica identificadas en este proyecto. En las figuras 11-13, 15-16 se presentaron algunos de los perfiles en los que se obtuvo convergencia.
- Por su parte, el modelo que tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 [30] presenta convergencia para todos los valores de campo magnético simulados en esta investigación.
- Para campos bajos, es decir,  $\alpha \ll 1$ , la solución de orden cero y las soluciones obtenidas a través de los métodos numéricos predicen perfiles de velocidad del mismo orden de magnitud (ver figura 14, 15, 16).
- Para todos los casos trabajados en la geometría rectangular de esta investigación, los perfiles de mayor magnitud son los obtenidos a través de la solución analítica de orden cero, seguidos por los obtenidos a través del modelo que tiene en cuenta la ecuación de magnetización Sh-72, y por último, los perfiles que se obtienen a partir de la implementación de la ecuación MRSh-74.
- Por los motivos expuestos anteriormente, se implementará, para las otras geometrías de estudio (cilíndrica y anular), la ecuación de magnetización MRSh-74 [30], puesto que no presenta las limitaciones de convergencia halladas en el modelo ferrodinámico que implementa la ecuación Sh-72 [58].

- En la figura 17 se muestra que al ejecutar el algoritmo numérico para campos magnéticos de baja intensidad, teniendo en cuenta la ecuación MRSh-74, se obtuvieron los mismos resultados reportados anteriormente por Chaves y Rinaldi [5], quienes implementaron la ecuación Sh-72 (de forma analítica) para diferentes valores de la constante  $\kappa$ .
- Se recomienda, con el propósito de validar la TDMAI con perfiles de velocidad experimentales, evaluar el desempeño del modelo ferrohodinámico en la misma geometría rectangular, pero teniendo en cuenta la coordenada vertical y horizontal, como parte del dominio de estudio (ver figura 18), lo cual, a diferencia de la tesis trabajada por A. Alvíz [32], sería realizado para ferrofluidos bajo el efecto de campos magnéticos de alta intensidad. Estos resultados podrían ser comparados con medidas experimentales, como las obtenidas por Krauß *et al.* [45, 46], y de esta forma, evaluar el desempeño del modelo ferrohodinámico. Con base en esta recomendación, se realiza el estudio expuesto en la sección 2.6 del presente capítulo.

## 2.6 FLUJO DE UN FERROFLUIDO EN UNA GEOMETRÍA RECTANGULAR DE PLACAS PLANAS Y PARALELAS: DOMINIO BIDIMENSIONAL

Con el fin de obtener perfiles de velocidad de muestras de ferrofluido que tengan una mayor relación con los perfiles experimentales obtenidos en una geometría rectangular, tales como los reportados en el trabajo de Krauß *et al.* [45, 46], y de igual forma, evaluar el efecto combinado de esfuerzos volumétricos y tangenciales sobre los campos de flujo traslacional y de giro, en un dominio bidimensional (altura y ancho del sistema físico), en esta sección se desarrolla un ejemplo para un canal de sección transversal rectangular, con interfase ferrofluido-aire, el cual es esquemáticamente parecido al construido en el trabajo de Krauß *et al.* [46] (ver figura 18). El sistema físico consta de un canal cuadrado de ancho y altura  $\delta$ , con paredes en la superficie inferior y las dos laterales ( $\tilde{x} = 0$ ,  $\tilde{y} = 0$  y  $\tilde{y} = 1$ ), como se puede ver en la figura 18. Igualmente, el sistema de estudio está conformado por una interfase ferrofluido-aire en la parte superior del contenedor ( $\tilde{x} = 1$ ). El campo magnético rotativo es generado por dos bobinas transportadoras de corriente alterna (C.A), desfasadas  $90^\circ$  eléctricos. Los campos generados se presentan tanto en la dirección axial del canal (campo magnético generado por la corriente en el plano  $xy$  en sentido anti-horario. Ver figura 18), como en la dirección transversal al plano  $xy$  (campo magnético generado por la corriente representada a través de circunferencias, en donde la  $x$  dentro de las circunferencias representa a las corrientes que entran en el plano  $xy$ , mientras que las circunferencias con relleno representan a las corrientes que salen del plano  $xy$ . Ver figura 18). El origen del eje de coordenadas se ubica en la esquina inferior izquierda del canal. Se asume que el campo magnético gira sobre el plano  $xz$ , debido a las bobinas externas transportadoras de corriente eléctrica. El propósito es, al igual que en el caso estudiado anteriormente, predecir los perfiles de velocidad lineal y de giro, en los puntos del plano  $xy$  de la sección

transversal del canal, teniendo en cuenta que, para propósitos de estudio, el canal de sección transversal rectangular se asume infinitamente largo en dirección  $z$ . De acuerdo con lo anterior, se busca determinar una velocidad lineal promedio del fluido en la dirección axial,  $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y}) \mathbf{i}_z$ , y una velocidad de giro de las nanopartículas en los puntos del plano  $xy$  del canal, es decir,  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\omega}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) \mathbf{i}_x + \tilde{\omega}_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \mathbf{i}_y$ , teniendo en cuenta que  $\tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$ , debido a la suposición de uniformidad del campo rotativo. Por último, al igual que en la geometría rectangular unidimensional trabajada anteriormente, se asume que el arreglo físico de las fuentes externas de corriente permite definir la intensidad y la densidad de campo magnético, de modo que,  $\tilde{H}_z(\tilde{t}) = \sin(\tilde{t})$  y  $\tilde{B}_x(\tilde{t}) = \cos(\tilde{t})$ . De esta manera, ha quedado definido el sistema físico que será estudiado en esta sección.

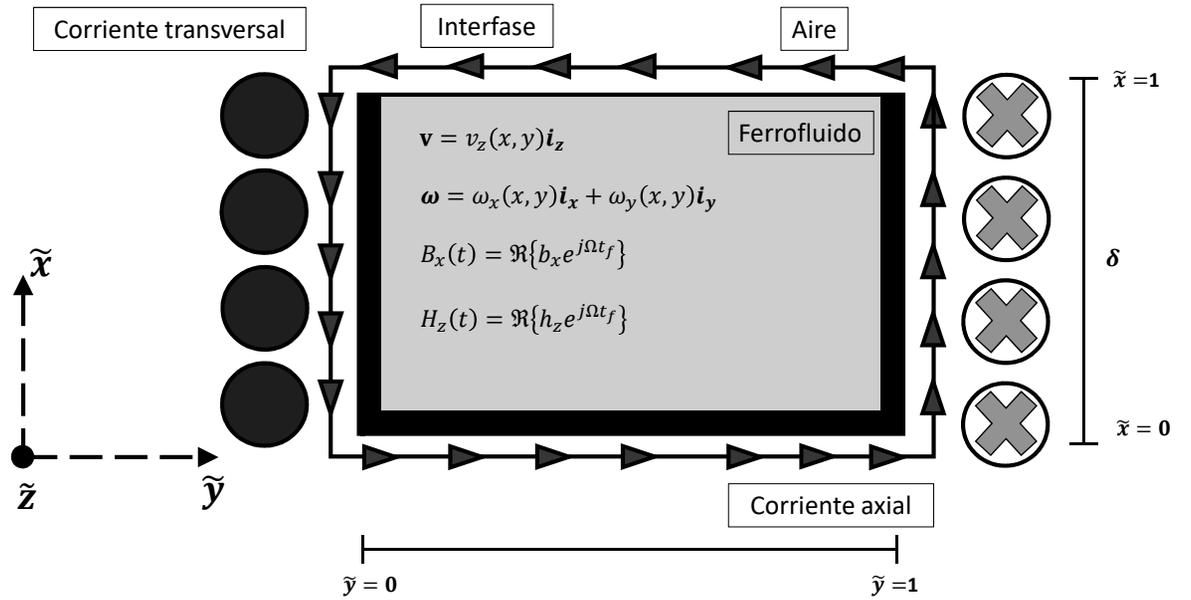


Figura 18: Esquema de canal rectangular para la aplicación de la TDMAI en el problema ilustrativo de flujo, de un ferrofluido contenido en placas planas, paralelas e infinitamente largas, con interfase ferrofluido-aire y con dominio bidimensional  $(x, y)$ . El campo es generado por una intensidad de campo axial  $H_z$  y una densidad de campo transversal  $B_x$ . El vector unitario en la dirección  $\tilde{z}$  se dirige hacia adentro de la página.

**2.6.1 Ecuaciones hidrodinámicas  $\alpha \ll 1$ :** Para la solución que implementa el torque de orden cero, el cual es constante en el tiempo y en el espacio, se debe tener en cuenta que bajo estas condiciones,  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ , tomando como base lo planteado en el trabajo de C. Rinaldi [55]. Por lo tanto, usando el resultado expresado en la Ec. (36), la Ec. (30) y (31) quedan reducidas a:

$$\frac{2\zeta}{\eta} \tilde{\nabla} \times \tilde{\omega} + \frac{\eta_e}{\eta} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}, \quad (103)$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}}}{\tilde{\Omega}} + 2\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} - 4\tilde{\omega} + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\omega} = \mathbf{0}. \quad (104)$$

Teniendo en cuenta las coordenadas en las que se genera movimiento y la geometría del caso de estudio, las ecuaciones que representan el balance de momento lineal y de momento angular interno (en las coordenadas  $x$  e  $y$ ) son las siguientes:

$$\frac{2\zeta}{\eta} \left( \frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{\omega}_x}{\partial \tilde{y}} \right) + \frac{\eta_e}{\eta} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{y}^2} \right) = 0, \quad (105)$$

$$2 \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{y}} - 4\tilde{\omega}_x + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_x}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_x}{\partial \tilde{y}^2} \right) = 0, \quad (106)$$

$$\frac{\langle \tilde{l}_y \rangle_t}{\tilde{\Omega}} - 2 \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}} - 4\tilde{\omega}_y + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_y}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_y}{\partial \tilde{y}^2} \right) = 0. \quad (107)$$

De igual manera, se implementa el método de diferencias finitas, de orden de precisión dos, para la solución numérica del sistema de ecuaciones ferrohodinámicas, para campos de baja intensidad ( $\alpha \rightarrow 0$ ). De este modo, a partir de la Ec. (105)-(107) se obtienen las siguientes expresiones discretas:

$$A \left[ \tilde{\omega}_y^{i+1,j} - \tilde{\omega}_y^{i-1,j} - \tilde{\omega}_x^{i,j+1} + \tilde{\omega}_x^{i,j-1} \right] + B \left[ \tilde{v}_z^{i+1,j} - 4\tilde{v}_z^{i,j} + \tilde{v}_z^{i-1,j} + \tilde{v}_z^{i,j+1} + \tilde{v}_z^{i,j-1} \right] = 0, \quad (108)$$

$$C \left[ \tilde{v}_z^{i,j+1} - \tilde{v}_z^{i,j-1} \right] + E \tilde{\omega}_x^{i,j} + D \left[ \tilde{\omega}_x^{i+1,j} - \tilde{\omega}_x^{i-1,j} - \tilde{\omega}_x^{i,j+1} + \tilde{\omega}_x^{i,j-1} \right] = 0, \quad (109)$$

$$\frac{\langle \tilde{l}_y \rangle_{\tilde{t},0}}{\tilde{\Omega}} - C \left[ \tilde{v}_z^{i+1,j} - \tilde{v}_z^{i-1,j} \right] + E \tilde{\omega}_y^{i,j} + D \left[ \tilde{\omega}_y^{i+1,j} - \tilde{\omega}_y^{i-1,j} - \tilde{\omega}_y^{i,j+1} + \tilde{\omega}_y^{i,j-1} \right] = 0. \quad (110)$$

En donde  $A = \frac{\zeta}{\Delta \tilde{x}}$ ,  $B = \frac{\eta_e}{\Delta \tilde{x}^2}$ ,  $C = \frac{1}{\Delta \tilde{x}}$ ,  $D = \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2 \Delta \tilde{x}^2}$ ,  $E = -4(D+1)$  y  $\Delta \tilde{x} = \Delta \tilde{y}$ .

**2.6.2 Ecuaciones hidrodinámicas  $\alpha \gg 1$ :** Para campos magnéticos de intensidad no baja, la ecuación de balance de momentum lineal permanece igual. Por el contrario, la cantidad de momentum angular interno, teniendo presente la Ec. (36), es:

$$\frac{1}{\tilde{\Omega}} \left( \tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}} \right) + 2\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} - 4\tilde{\omega} + \frac{4\eta}{\eta_e} \left( \frac{1}{ve^2} + \frac{1}{\kappa^2} \right) \tilde{\nabla} \left( \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\omega} \right) + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\omega} = \mathbf{0}. \quad (111)$$

Considerando las coordenadas en las que se presenta momento angular interno (coordenadas  $x$  e  $y$ ), se deducen las ecuaciones por componentes como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{\langle \tilde{l}_x \rangle_{\tilde{t}}}{\tilde{\Omega}} + 2 \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{y}} \\ - 4\tilde{\omega}_x + \frac{4\eta}{\eta_e} \left( \frac{1}{ve^2} + \frac{1}{\kappa^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_x}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_y}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{x}} \right) + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_x}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_x}{\partial \tilde{y}^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (112)$$

$$\begin{aligned} \frac{\langle \tilde{l}_y \rangle_{\tilde{t}}}{\tilde{\Omega}} - 2 \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}} \\ - 4\tilde{\omega}_y + \frac{4\eta}{\eta_e} \left( \frac{1}{ve^2} + \frac{1}{\kappa^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_x}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_y}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_y}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_y}{\partial \tilde{y}^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (113)$$

En las ecuaciones (112) y (113) se puede observar que a diferencia de los casos estudiados anteriormente, se presentan derivadas cruzadas relacionadas con la coordenada horizontal y vertical del sistema físico. Del mismo modo que en la geometría rectangular de dominio unidimensional, se debe tener en cuenta que para la solución de estado estacionario, se requiere la implementación del torque promedio de la Ec. (86).

Posteriormente, se realiza la discretización de las ecuaciones hidrodinámicas, teniendo en cuenta la presencia de campos magnéticos de alta intensidad ( $\alpha \gg 1$ ) y la transmisión de momento angular interno ( $\eta' \neq 0$ ), Ec. (105), (112) y (113); obteniendo las siguientes ecuaciones en el dominio discreto:

$$\begin{aligned} A \left[ \tilde{\omega}_y^{i+1,j} - \tilde{\omega}_y^{i-1,j} - \tilde{\omega}_x^{i,j+1} + \tilde{\omega}_x^{i,j-1} \right] \\ + B \left[ \tilde{v}^{i-1,j} - 4\tilde{v}^{i,j} + \tilde{v}^{i+1,j} + \tilde{v}^{i,j-1} + \tilde{v}^{i,j+1} \right] = 0, \end{aligned} \quad (114)$$

$$\begin{aligned} - \left( 16\Delta\tilde{x}^2 + 8C + 16D \right) \tilde{\omega}_x^{i,j} + (4C + 4D) \tilde{\omega}_x^{i-1,j} + \\ (4C + 4D) \tilde{\omega}_x^{i+1,j} + 4D\tilde{\omega}_x^{i,j-1} + 4D\tilde{\omega}_x^{i,j+1} + C \left[ \tilde{\omega}_y^{i+1,j+1} - \right. \\ \left. \tilde{\omega}_y^{i+1,j-1} - \tilde{\omega}_y^{i-1,j+1} + \tilde{\omega}_y^{i-1,j-1} \right] = 4\Delta\tilde{x} \left( \tilde{v}^{i,j-1} - \tilde{v}^{i,j+1} \right), \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} - \left( 16\Delta\tilde{x}^2 + 8C + 16D \right) \tilde{\omega}_y^{i,j} + (4C + 4D) \tilde{\omega}_y^{i,j-1} + (4C + 4D) \tilde{\omega}_y^{i,j+1} \\ + 4D\tilde{\omega}_y^{i-1,j} + 4D\tilde{\omega}_y^{i+1,j} + C \left[ \tilde{\omega}_x^{i+1,j+1} - \tilde{\omega}_x^{i+1,j-1} - \tilde{\omega}_x^{i-1,j+1} + \tilde{\omega}_x^{i-1,j-1} \right] \\ = 4\Delta\tilde{x} \left( \tilde{v}^{i+1,j} - \tilde{v}^{i-1,j} \right) - \frac{4\Delta\tilde{x}^2}{\tilde{\Omega}} \langle \tilde{l}_y \rangle_{\tilde{t},i}, \end{aligned} \quad (116)$$

en donde  $A = \frac{\zeta}{\eta \Delta \tilde{x}}$ ,  $B = \frac{\eta_e}{\eta \Delta \tilde{x}^2}$ ,  $C = \frac{4\eta}{\eta_e} \left( \frac{1}{ve^2} + \frac{1}{\kappa^2} \right)$ ,  $D = \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2}$  y  $\Delta \tilde{x} = \Delta \tilde{y}$ . Adicionalmente, en las Ec. (108)-(116), los índices  $i$  y  $j$  están referidos a la discretización en la coordenada vertical y horizontal, respectivamente.

**2.6.3 Condiciones de frontera hidrodinámicas:** Partiendo de las condiciones de frontera generales, establecidas en la Ec. (54), (55), (62) y (63), con el fin de determinar los perfiles  $\tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y})$ ,  $\tilde{\omega}_x(\tilde{x}, \tilde{y})$  y  $\tilde{\omega}_y(\tilde{x}, \tilde{y})$ , se implementan las condiciones de frontera de la Ec. (117)-(121), las cuales aplican, específicamente, para el problema del ferrofluido contenido en un canal rectangular de longitud axial infinita, con interfase ferrofluido-aire (ver figura 18).

$$\tilde{v}_z(\tilde{x}, 0) = \tilde{v}_z(0, \tilde{y}) = \tilde{v}_z(\tilde{x}, 1) = 0, \quad (117)$$

$$\frac{\eta_e}{\zeta} \frac{d\tilde{v}_z}{d\tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=1} + 2\tilde{\omega}_y \Big|_{\tilde{x}=1} = 0, \quad (118)$$

$$\frac{d\tilde{v}_z}{d\tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=1} = -\frac{\zeta \tilde{l}_y}{2\eta \tilde{\Omega}}, \quad (119)$$

$$\tilde{\omega}(\tilde{x}, 0) = \tilde{\omega}(0, \tilde{y}) = \tilde{\omega}(\tilde{x}, 1) = 0, \quad (120)$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_x}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=1} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tilde{\omega}_x}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{x}=1} + \frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=1} = 0. \quad (121)$$

Con el propósito de realizar la solución a través del algoritmo numérico, se discretizan las ecuaciones de frontera hidrodinámicas. Obteniendo las siguientes expresiones en diferencias:

$$\tilde{v}_{z,i}^{0,k} = \tilde{v}_{z,0}^{j,k} = \tilde{v}_{z,i}^{nde,k} = 0, \quad (122)$$

$$\frac{\eta_e}{\zeta} \frac{(\tilde{v}_{z,nde}^{j,k} - \tilde{v}_{z,nde-1}^{j,k})}{\Delta \tilde{x}} + 2\tilde{\omega}_{y,nde}^{j,k} = 0, \quad (123)$$

$$\tilde{\omega}_{x,i}^{0,k} = \tilde{\omega}_{x,0}^{j,k} = \tilde{\omega}_{x,i}^{nde,k} = 0, \quad (124)$$

$$\tilde{\omega}_{y,i}^{0,k} = \tilde{\omega}_{y,0}^{j,k} = \tilde{\omega}_{y,i}^{nde,k} = 0, \quad (125)$$

$$\frac{(\tilde{\omega}_{x,nde}^{j,k} - \tilde{\omega}_{x,nde-1}^{j,k})}{\Delta \tilde{x}} = 0, \quad (126)$$

$$\frac{(\tilde{\omega}_{x,nde}^{j,k} - \tilde{\omega}_{x,nde}^{j-1,k})}{\Delta \tilde{y}} + \frac{(\tilde{\omega}_{y,nde}^{j,k} - \tilde{\omega}_{y,nde-1}^{j,k})}{\Delta \tilde{x}} = 0. \quad (127)$$

En las Ec. (122)-(127),  $i$ ,  $j$ , y  $k$  representan los nodos de las coordenadas  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{t}$ , respectivamente (Para mayor ilustración ver figura 19). Por su parte,  $nde$  es el número de nodos en las variables  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  (definido por el usuario del algoritmo numérico). Cabe resaltar que en estas simulaciones se tiene el mismo número de nodos en la coordenada vertical y la coordenada horizontal, es decir,  $nde\tilde{x} = nde\tilde{y} = nde$ . Por tal motivo,  $\Delta \tilde{x} = \Delta \tilde{y} = \Delta$ .

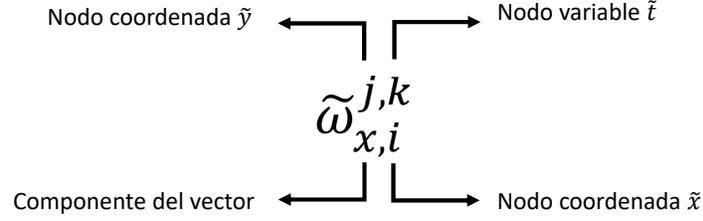


Figura 19: Esquema de término discreto en donde las variables  $i$ ,  $j$  y  $k$  corresponden a los nodos en la coordenada  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  y la variable temporal  $\tilde{t}$ , respectivamente.

**2.6.4 Ecuaciones magnéticas:** Aplicando las ecuaciones (44)-(46) a la geometría del contenedor de la figura 18, y asumiendo, para simplificar la solución del sistema, un campo magnético y una magnetización rotando alrededor del eje  $y$ , es decir, girando en el plano  $xz$ , se obtiene que el conjunto de ecuaciones que conforman el problema magnético son la Ec. (96), (97), (128)-(130).

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_y}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_x \tilde{M}_z + \frac{\tilde{M}_y}{B_{\perp}} = 0, \quad (128)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial \tilde{x}} = 0, \quad (129)$$

$$\chi \left[ \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial \tilde{z}} \right] + \left[ \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial \tilde{z}} \right] = 0. \quad (130)$$

La Ec. (128) es la componente  $y$  de la ecuación MRS<sub>h</sub>-74. Por su parte, la Ec. (129) y (130) representan las componentes de la ley de Ampère-Maxwell y la ley de Gauss para el campo magnético, respectivamente.

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones magnéticas, se obtendrá un vector de magnetización con componentes en las tres direcciones del espacio, es decir,

$$\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{M}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) \mathbf{i}_x + \tilde{M}_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \mathbf{i}_y + \tilde{M}_z(\tilde{x}, \tilde{y}) \mathbf{i}_z \quad (131)$$

En consecuencia, el torque magnético se calcula a través de la siguiente expresión:

$$\tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}} = \left[ \tilde{M}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) \mathbf{i}_x + \tilde{M}_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \mathbf{i}_y + \tilde{M}_z(\tilde{x}, \tilde{y}) \mathbf{i}_z \right] \times \left[ \tilde{H}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) \mathbf{i}_x + \tilde{H}_z(\tilde{x}, \tilde{y}) \mathbf{i}_z \right]$$

$$\tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}} = \left( \tilde{M}_y \tilde{H}_z \right) \mathbf{i}_x + \left( \tilde{M}_z \tilde{H}_x - \tilde{M}_x \tilde{H}_z \right) \mathbf{i}_y - \left( \tilde{M}_y \tilde{H}_x \right) \mathbf{i}_z. \quad (132)$$

Por tal motivo, las componentes del torque promedio,  $\langle \tilde{l} \rangle_{\tilde{t}}$ , se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{l}_x \rangle_{\tilde{t}} &= \langle \tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}} \rangle_{\tilde{x}, \tilde{t}} = \langle \tilde{M}_y \tilde{H}_z \rangle_{\tilde{t}} \\
 \langle \tilde{l}_y \rangle_{\tilde{t}} &= \langle \tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}} \rangle_{\tilde{y}, \tilde{t}} = \langle \tilde{M}_z \tilde{H}_x - \tilde{M}_x \tilde{H}_z \rangle_{\tilde{t}} \\
 \langle \tilde{l}_z \rangle_{\tilde{t}} &= \langle \tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}} \rangle_{\tilde{z}, \tilde{t}} = \langle \tilde{M}_y \tilde{H}_x \rangle_{\tilde{t}}
 \end{aligned} \tag{133}$$

Una vez que se obtienen los valores del torque promedio en cada una de las direcciones cartesianas, se procede a reemplazar dichos valores en las componentes de la ecuación de balance de momentum angular interno, Ec. (112) y (113). Previo a esto, se procede a analizar la componente  $z$  de la ecuación de balance de momentum angular interno, la cual se expresa en la Ec. (134).

$$\frac{\langle \tilde{l}_z \rangle_{\tilde{t}}}{\tilde{\Omega}} - 4\tilde{\omega}_z + \frac{4\eta}{\eta_e} \left( \frac{1}{ve^2 + \kappa^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{x}} \right) + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial \tilde{y}^2} \right) = 0. \tag{134}$$

Teniendo en cuenta que el giro de las partículas nanomagnéticas sólo se presenta en la coordena  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  ( $\tilde{\omega}_z = 0$ ), por lo tanto, la Ec. (134) se reduce a:

$$\langle \tilde{l}_z \rangle_{\tilde{t}} = \langle \tilde{M}_y \tilde{H}_x \rangle_{\tilde{t}} = 0. \tag{135}$$

Ahora, sabiendo que la componente del campo externo,  $\tilde{H}_x$ , es diferente de cero, ya que es un campo impuesto, se asume que la componente de la magnetización  $\tilde{M}_y = 0$ , con el fin de simplificar la solución del sistema de ecuaciones magnéticas. De modo que, el sistema de ecuaciones magnéticas a resolver estará conformado por la Ec. (96), (97), (129) y (130), teniendo presente en la Ec. (112) que  $\langle \tilde{l}_x \rangle_{\tilde{t}} = 0$ .

En ese orden de ideas, el sistema de ecuaciones discretas del problema magnético estará conformado por la Ec. (98), (99), (136) y (137).

$$\frac{\tilde{H}_{x,i}^{j,k} - \tilde{H}_{x,i}^{j-1,k}}{\Delta \tilde{z}} - \frac{\tilde{H}_{z,i}^{j,k} - \tilde{H}_{z,i-1}^{j,k}}{\Delta \tilde{x}} = 0, \tag{136}$$

$$\chi \left[ \frac{\tilde{M}_{x,i}^{j,k} - \tilde{M}_{x,i-1}^{j,k}}{\Delta \tilde{x}} + \frac{\tilde{M}_{z,i}^{j,k} - \tilde{M}_{z,i}^{j-1,k}}{\Delta \tilde{z}} \right] + \left[ \frac{\tilde{H}_{x,i}^{j,k} - \tilde{H}_{x,i-1}^{j,k}}{\Delta \tilde{x}} + \frac{\tilde{H}_{z,i}^{j,k} - \tilde{H}_{z,i}^{j-1,k}}{\Delta \tilde{z}} \right] = 0. \tag{137}$$

En la Ec. (136) y (137), las variables  $i$ ,  $j$  y  $k$  representan los nodos en la coordenada  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  y  $\tilde{z}$ , respectivamente. Para mayor ilustración ver figura 19.

Ahora, aplicando la Ec. (45) y (46) en el sistema físico bidimensional de la figura 18, se tiene que las ecuaciones por componentes quedan expresadas como:

$$\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial \tilde{x}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial \tilde{B}_x}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (138)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}_x}{\partial \tilde{x}} = 0. \quad (139)$$

De modo que, se puede representar la componente de la intensidad de campo magnético,  $\tilde{H}_z$ , y la densidad de campo magnético,  $\tilde{B}_x$ , a través de las Ec. (140) y (141).

$$\tilde{H}_z(\tilde{x}, \tilde{y}) = \cos(\tilde{t}), \quad (140)$$

$$\tilde{B}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sin(\tilde{t}). \quad (141)$$

Por lo tanto, la componente  $x$  de la intensidad de campo magnético se puede determinar por medio de la Ec. (142).

$$\begin{aligned} \tilde{H}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \tilde{B}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) - \chi \tilde{M}_x(\tilde{x}, \tilde{y}), \\ \tilde{H}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \sin(\tilde{t}) - \chi \tilde{M}_x(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{aligned} \quad (142)$$

De ahí que, el sistema de ecuaciones magnéticas a resolver corresponde a las componentes de la ecuación MRSh-74, Ec. (98) y (99), ya que una vez obtenido los valores de  $\tilde{M}_x(\tilde{x}, \tilde{y})$  y  $\tilde{M}_z(\tilde{x}, \tilde{y})$ , se determina la intensidad de campo magnético a través de la Ec. (140) y (142). De manera que, las componentes discretas de la intensidad de campo magnético quedan expresadas según la Ec. (143) y (144).

$$\tilde{H}_{x,i}^{j,k} = \sin(\tilde{t}^k) - \chi \tilde{M}_{x,i}^{j,k}, \quad (143)$$

$$\tilde{H}_{z,i}^{j,k} = \cos(\tilde{t}^k). \quad (144)$$

Por su parte, las condiciones iniciales que gobiernan el problema magnético se fundamentan en la no existencia de magnetización en ninguna de sus componentes, es decir,  $\tilde{M}_x(\tilde{x}, \tilde{y}, 0) = 0$  y  $\tilde{M}_z(\tilde{x}, \tilde{y}, 0) = 0$ , debido que al iniciar la energización de la fuente de campo magnético, en  $\tilde{t} = 0$ , se supone que la magnetización del ferrofluido no experimenta saltos escalonados, ya que esta no es instantánea. Por lo tanto, las condiciones iniciales discretas para la magnetización de la Ec. (98) y (99) son:

$$\tilde{M}_{x,i}^{j,1} = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{M}_{z,i}^{j,1} = 0. \quad (145)$$

**2.6.5 Validación del algoritmo I:** Una forma de evaluar los algoritmos de solución numérica, al igual que en el problema resuelto anteriormente, es comparando las soluciones numéricas con las soluciones analíticas, para campos de baja intensidad, en donde las soluciones analíticas tienen validez física.

Partiendo de los datos de la tabla 2, se procede al cálculo de los perfiles de velocidad a través de la solución del sistema de ecuaciones, Ec. (105)-(107), suponiendo que  $\alpha \ll 1$ , y un valor de “spin viscosity”  $\eta' = 0$ , ya que para valores de  $\eta' \neq 0$  no se cuenta, para el sistema con dominio bidimensional, con una solución analítica disponible hasta el momento.

De forma inicial, para la validación de la solución numérica (con resultados que aplican sólo para campos de baja intensidad), se realiza la solución analítica, a través del método de solución en series de Fourier. Aunque este trabajo fue realizado previamente en la tesis de maestría de A. Alvíz [32], en esta metodología se presentó un error en la implementación de las condiciones de frontera para la obtención de la velocidad de giro  $\omega$ , las cuales son corregidas en la Ec. (121). Realizando nuevamente la solución analítica de las ecuaciones del sistema ferrohodinámico, y partiendo de la Ec. (103) y (104), se obtienen, con base en las consideraciones de campos de baja intensidad y  $\eta' = 0$ , la Ec. (146) y (147).

$$0 = 2\frac{\zeta}{\eta}\tilde{\nabla} \times \tilde{\omega} + \frac{\eta_e}{\eta}\tilde{\nabla}^2\tilde{\mathbf{v}}, \quad (146)$$

$$\tilde{\omega} = \frac{\tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{H}}}{4\tilde{\Omega}} + \frac{1}{2}\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}}. \quad (147)$$

Reemplazando la Ec. (147) en la Ec. (146), y teniendo en cuenta que el torque magnético de orden cero es constante en el tiempo y en el espacio, se obtiene la expresión de la Ec. (148).

$$0 = \frac{\zeta}{\eta}\tilde{\nabla} \times (\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}}) + \frac{\eta_e}{\eta}\tilde{\nabla}^2\tilde{\mathbf{v}}. \quad (148)$$

Ahora, si se implementa la identidad vectorial  $\tilde{\nabla} \times (\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}}) = \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) - \tilde{\nabla}^2\tilde{\mathbf{v}}$ , considerando un fluido incompresible ( $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0$ ), se obtiene que la Ec. (146) es reducida a

$$\tilde{\nabla}^2\tilde{\mathbf{v}} = 0. \quad (149)$$

De la Ec. (147) y (149), se deducen, para una geometría de canal rectangular de dominio bidimensional y longitud axial infinita, las siguientes ecuaciones por componentes:

$$\frac{\partial^2\tilde{v}_z}{\partial\tilde{x}^2} + \frac{\partial^2\tilde{v}_z}{\partial\tilde{y}^2} = 0, \quad (150)$$

$$\tilde{\omega}_x = \frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{v}_z}{\partial\tilde{y}}, \quad (151)$$

$$\tilde{\omega}_y = \frac{\tilde{l}_y}{4\tilde{\Omega}} - \frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{v}_z}{\partial\tilde{x}}. \quad (152)$$

A partir de las ecuaciones diferenciales planteadas anteriormente, Ec. (150)-(152), se obtiene la solución para los campos de flujo, implementando el método de solución en series de Fourier, para un valor de  $\eta' = 0$  (esta solución tiene en cuenta sólo esfuerzos tangenciales en la interfase y desprecia los esfuerzos volumétricos en la parte interna del ferrofluido), para campos de baja intensidad, es decir,  $\alpha \rightarrow 0$ , y para un canal de ancho  $W$  y altura  $H$  (para mayor detalle, ver anexo B), dando como resultado la Ec. (153).

$$\tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sqrt{2}AWe^{\frac{n\pi H}{W}} [(-1)^n - 1]}{H(n\pi)^2 \left(e^{\frac{2n\pi H}{W}} + 1\right)} \left(e^{\frac{n\pi H\tilde{x}}{W}} - e^{-\frac{n\pi H\tilde{x}}{W}}\right) \sin(n\pi\tilde{y}). \quad (153)$$

A continuación, se procede a comparar las soluciones obtenidas. Por lo tanto, se grafica la solución analítica encontrada con la Ec. (153), con las soluciones de los modelos planteados en la Ec. (108)-(116). A partir de lo anterior, se obtienen las curvas mostradas en la figura 20, en la que se observa una gran concordancia de los resultados alcanzados a través de cada una de las metodologías de solución. Es necesario aclarar que en la figura 20, las curvas mostradas corresponden al perfil de  $\tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y})$  a la mitad de la altura del canal, es decir,  $\tilde{x} = 0,5$ ; esto es,  $\tilde{v}_z(0,5, \tilde{y})$ .

**2.6.6 Validación del algoritmo II:** A continuación, se propone una segunda forma de validar el algoritmo de solución numérica. Con este fin, se realizan simulaciones numéricas para diferentes valores de la relación de aspecto “ $a$ ”. Se denomina relación de aspecto al cociente de dos dimensiones lineales de un objeto, por ejemplo,  $\frac{\text{longitud}}{\text{altura}}$ ,  $\frac{\text{ancho}}{\text{longitud}}$ , entre otros. Para este caso de estudio en particular, la relación de aspecto será definida como el cociente entre el ancho y la altura del canal, es decir,  $a = \frac{\text{ancho}}{\text{altura}} = \frac{W}{H}$ . Teniendo en cuenta lo anterior, se definen las variables adimensionales en la Ec. (154).

$$\tilde{x} = \frac{x}{H} \quad y \quad \tilde{y} = \frac{y}{W}, \quad (154)$$

en donde  $\tilde{x}$  y  $\tilde{y}$ , representan las coordenadas vertical y horizontal sin dimensiones respectivamente, de acuerdo con los valores de ancho y altura del canal en estudio. Por lo tanto, las ecuaciones dinámicas del modelo, asumiendo  $\alpha \rightarrow 0$  y  $\eta' = 0$ , son modificadas. Partiendo de la Ec (30), se tiene que el balance de momento lineal es como se expresa en la Ec. (155).

$$2\zeta \left( \frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{\omega}_x}{\partial \tilde{y}} \right) + \eta_e \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{y}^2} \right) = 0. \quad (155)$$

Ahora, teniendo en cuenta lo establecido en la Ec. (154), para una relación de aspecto  $a \neq 1$  (canal de sección transversal rectangular), se reemplaza, en la Ec. (155), el valor de las variables dimensionales  $x$  e  $y$  en función de las variables  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $H$ , y  $W$ . De forma que, la Ec. (155) queda redefinida en la Ec. (156).

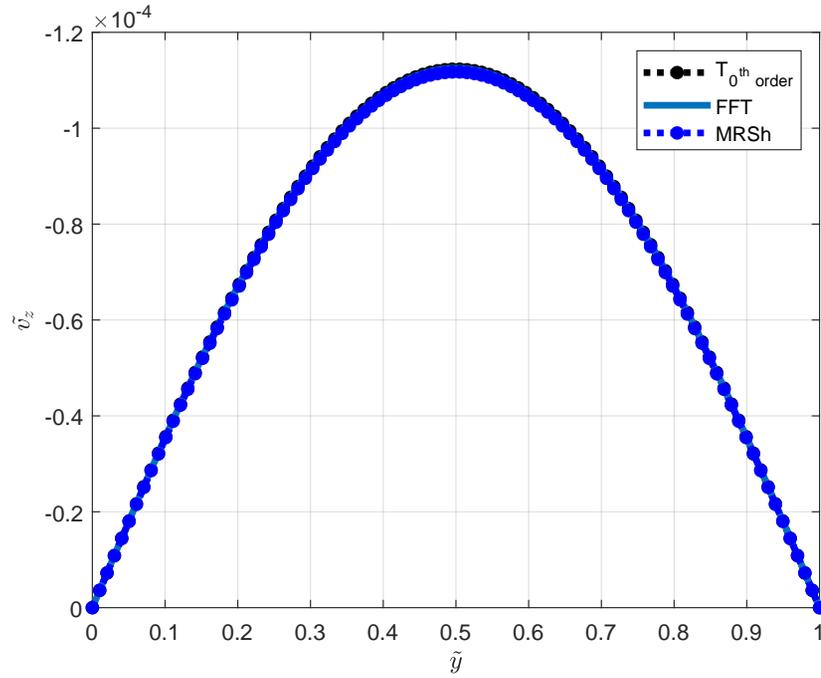


Figura 20: Validación I del algoritmo numérico implementado en la solución del sistema ferrohodinámico para valores de  $\alpha \gg 1$ , por medio de la comparación con la solución analítica de la TDMAI, para WBF-1,  $\eta' = 0$ ,  $\alpha \ll 1$ ,  $H = W$  y  $f = 150$  Hz. Perfiles de velocidad en  $\tilde{x} = 0,5$ . TFF representa la solución analítica a través del método de solución en series de Fourier,  $T_{0^{th} order}$  la solución numérica del sistema implementando el torque de orden cero junto con el modelo de ecuaciones hidrodinámicas en las que  $\alpha \ll 1$ ,  $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\omega} = 0$  y , por último, MRSh la solución numérica del sistema ferrohodinámico, válido para  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\omega} \neq 0$ , en la que se implementa la ecuación MRSh-74 en la descripción del problema magnético.

$$\frac{2\zeta}{\eta} \left( \frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial \tilde{x}} - \frac{H}{W} \frac{\partial \tilde{\omega}_x}{\partial \tilde{y}} \right) + \frac{\eta_e}{\eta} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{H^2}{W^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{y}^2} \right) = 0. \quad (156)$$

Aplicando un procedimiento análogo en las ecuaciones por componentes del balance de momentum angular interno, se obtiene como resultado la Ec. (157) y (158).

$$\frac{2H}{W} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{y}} - 4\tilde{\omega}_x + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_x}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{H^2}{W^2} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_x}{\partial \tilde{y}^2} \right) = 0, \quad (157)$$

$$-2 \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}} - 4\tilde{\omega}_y + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_y}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{H^2}{W^2} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_y}{\partial \tilde{y}^2} \right) = -\frac{\langle \tilde{l}_y \rangle_{\tilde{t}}}{\tilde{\Omega}}. \quad (158)$$

Se esperaría que, en la medida que la relación de aspecto tienda a infinito ( $a \rightarrow \infty$ ), los perfiles obtenidos a través de las soluciones del modelo bidimensional (tanto en la metodología analítica como en la numérica), coincidan con los perfiles alcanzados con el modelo unidimensional, Ec. (87) y (88). En otras palabras, lo que se plantea para validar las metodologías de solución se expresa en la Ec. (159). De forma general, la metodología analítica soluciona la Ec. (150)-(152) a través de series de Fourier (para  $\eta' = 0$ ). Por su parte, la metodología numérica soluciona, para cualquier valor de  $\eta'$ , la Ec.(156)-(158), por medio de un algoritmo basado en diferencias finitas.

$$\tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y} = 12) \Big|_{a \rightarrow \infty} = \tilde{v}_z(\tilde{x}). \quad (159)$$

Después de realizar el respectivo proceso de discretización y solución del sistema compuesto por la Ec. (156)-(158), en la figura 21 se exponen los perfiles obtenidos. En donde “ $v_z$  numérico” (línea discontinua negra) corresponde a la solución numérica del modelo bidimensional para  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ , la cual tiene en cuenta la relación de aspecto  $a = 100$  (*ancho*  $\gg$  *altura*). Por su parte, “ $v_z$  TFF” (curva roja) representa la solución analítica bidimensional, considerando la misma relación de aspecto ( $a = 100$ ). Esta solución fue obtenida a través del método de solución en series de Fourier, asumiendo un valor de  $\eta' = 0$ , ver Ec. (153). Finalmente, “ $v_z$  Ch-R” (curva azul) corresponde a la solución analítica unidimensional propuesta por A. Chaves y C. Rinaldi [5], Ec. (87), la cual es válida para valores de  $\alpha \ll 1$  y  $\eta' \neq 0$ .

De acuerdo con lo observado en la figura 20 y 21, se ha realizado la validación del algoritmo numérico que soluciona el modelo de la TDMAI, para campos magnéticos de baja y alta intensidad y frecuencia. Debido a lo anterior, este algoritmo será implementado para la predicción de perfiles de velocidad de ferrofluidos contenidos en un canal rectangular, de dominio bidimensional, bajo el efecto de campos magnéticos en los cuales  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ .

**2.6.7 Perfiles de velocidad para  $\alpha \gg 1$ :** A continuación, se procede a presentar los resultados para una densidad de campo magnético de 11,3 mT, la cual es la mayor

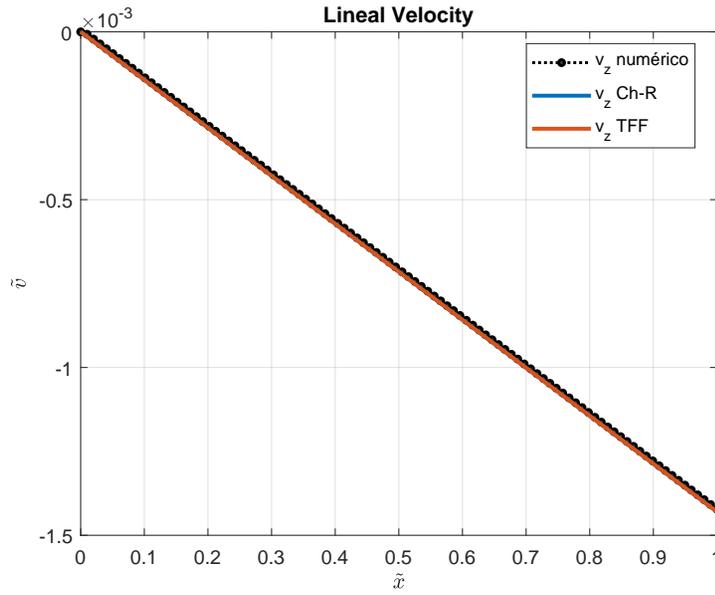


Figura 21: Validación II del algoritmo numérico implementado en la solución del sistema ferrohídrodinámico para valores de  $\alpha \gg 1$ , para WBF-1,  $\eta' = 0$ ,  $\alpha \ll 1$  y  $f = 150$  Hz. Perfiles de velocidad lineal axial en  $\tilde{y} = 0,5$ .  $v_z$  numérico, representa la solución numérica del sistema 2D, implementando el algoritmo numérico para campos de alta intensidad.  $v_z$  TFF representa la solución analítica del sistema 2D, a través del método de solución en series de Fourier y  $v_z$  Ch-R, es la solución analítica del sistema 1D propuesta por A. Chaves y C. Rinaldi [5]. Se implementó la TDMAI para la descripción de los perfiles, en donde se demostró que  $\tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y} = 12) |_{a \rightarrow \infty} = \tilde{v}_z(\tilde{x})$ .

densidad de campo reportada en los experimentos de Torres-Díaz *et al.* [2], para la muestra de ferrofluido WBF-1, en una geometría cilíndrica. Lo anterior, debido a la falta de datos experimentales con los que se pueda realizar una comparación con los resultados de las simulaciones, para una geometría rectangular de placas planas y paralelas. Aunque ya se encuentran reportados los resultados de Krauß *et al.* [45, 46] para un canal rectangular, estos datos no pudieron ser utilizados para la comparación de los perfiles, debido a la falta de información relacionada con la caracterización de los ferrofluidos y las dimensiones del contenedor implementado. En consecuencia, en las simulaciones realizadas en este documento se asumió el sistema físico de estudio de la figura 18 de altura y ancho 20 mm, con el fin de utilizar dimensiones similares al sistema físico implementado en el trabajo de Torres-Díaz *et al.* [2], aunque fueran para geometrías diferentes (contenedores cilíndricos y anulares). Los resultados de las simulaciones se pueden observar en la figura 22, 23 y 24.

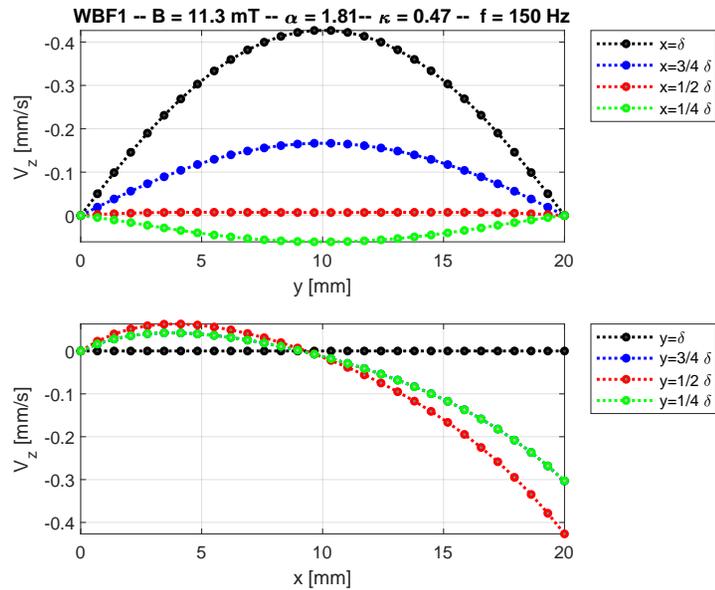


Figura 22: Perfiles de velocidad lineal en función de la coordenada horizontal y vertical, para la muestra de ferrofluido WBF-1. El sistema físico consiste en el canal rectangular de dominio bidimensional de la figura 18.  $B = 11,3 \text{ mT}$ ,  $\alpha = 1,81$ ,  $f = 150 \text{ Hz}$  y  $\kappa = 0,47$ . Se implementó la ecuación MRSh-74 en la TDMAI para la descripción de los perfiles.

**2.6.8 Análisis del error:** Una de las razones por las que se consideró el sistema físico de la figura 18, se debe al parecido de este contenedor con el descrito en las mediciones experimentales reportadas por Krauß *et al.* [45, 46]. Sin embargo, debido a la falta de datos relacionados con la reología del ferrofluido usado en los experimentos de Krauß, no fue posible implementar estas mediciones para realizar un análisis del error con los resultados aquí obtenidos. Por tal motivo, a continuación, se realiza un análisis del error entre la solución analítica y los perfiles obtenidos por medio de la

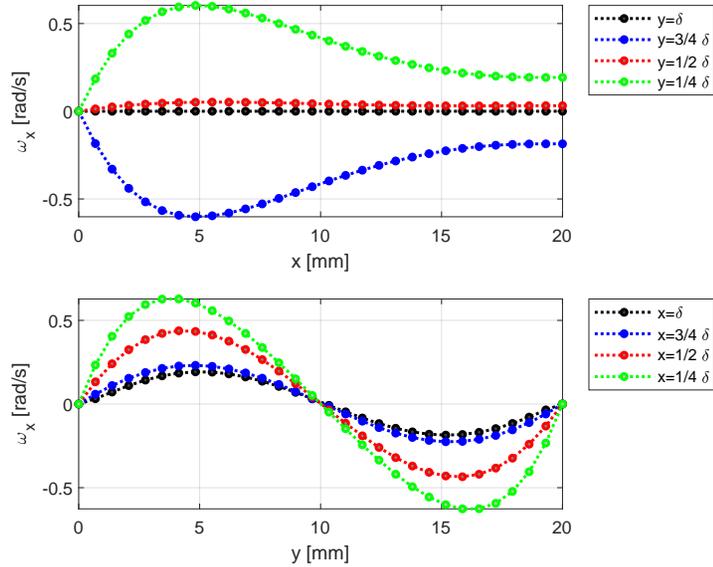


Figura 23: Perfiles de velocidad angular  $\omega_x$  en función de la coordenada horizontal y vertical, para la muestra de ferrofluido WBF-1. El sistema físico consiste en el canal rectangular de dominio bidimensional de la figura 18.  $B = 11,3$  mT,  $f = 150$  Hz y  $\kappa = 0,47$ . Se implementó la ecuación MRSh-74 en la TDMAI para la descripción de los perfiles.

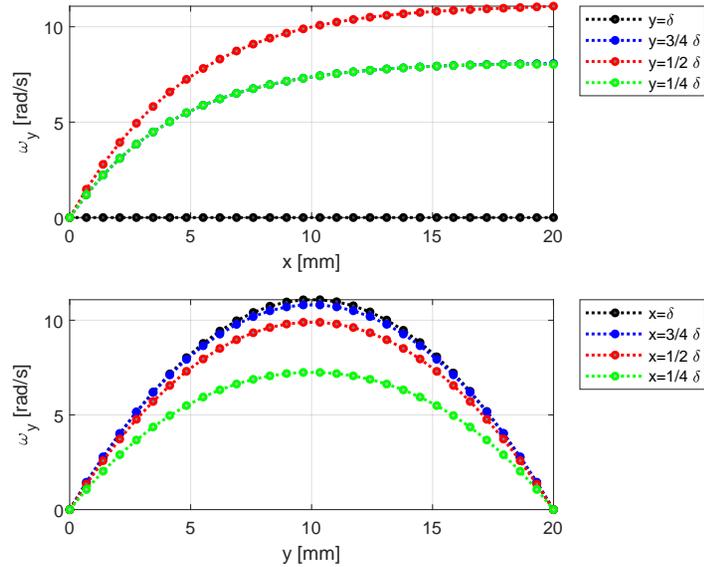


Figura 24: Perfiles de velocidad angular  $\omega_y$  en función de la coordenada horizontal y vertical, para la muestra de ferrofluido WBF-1. El sistema físico consiste en el canal rectangular de dominio bidimensional de la figura 18.  $B = 11,3$  mT,  $f = 150$  Hz y  $\kappa = 0,47$ . Se implementó la ecuación MRSh-74 en la TDMAI para la descripción de los perfiles.

metodología numérica, para un canal cuadrado de ancho y altura  $\delta$  y longitud axial infinita, considerando las suposiciones implementadas en cada metodología de solución (ver tabla 3).

Tabla 3: Consideraciones metodológicas solución analítica y numérica

Metodología analítica	Metodología numérica
$\mathbf{M}_{\text{eq}} = \chi \mathbf{H}$	$\frac{M_0}{\phi M_d} = L(\alpha) \frac{\mathbf{H}}{ \mathbf{H} } = \left[ \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \right] \frac{\mathbf{H}}{ \mathbf{H} }, \alpha = \frac{\mu_0 M_d  \mathbf{H}  V_c}{k_B T}$
$\nabla \cdot \tilde{\omega} = 0$	$\nabla \cdot \tilde{\omega} \neq 0$
$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial t} = -\tilde{\mathbf{M}} + \frac{\mathbf{M}_{\text{eq}}}{\chi K}$	$\tilde{\Omega} \frac{D\tilde{\mathbf{M}}}{Dt} = \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega} \times \tilde{\mathbf{M}} + \frac{\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{M}})}{ \tilde{\mathbf{H}} ^2} \left( \frac{1}{B_{\perp}} - \frac{1}{B_{\parallel}} \right) + \frac{3\tilde{\mathbf{H}}\varphi(\tilde{H}_x, \tilde{H}_z)}{B_{\parallel}} - \frac{\tilde{\mathbf{M}}}{B_{\perp}}$

En consecuencia, en la figura 25 se muestra el perfil de velocidad  $v_z(\tilde{x}; \tilde{y} = 0, 5)$ , para diferentes densidades de flujo magnético, con el fin de determinar el efecto de las aproximaciones realizadas en la metodología analítica, en la que no se considera la saturación del ferrofluido. El fenómeno de saturación se refiere a la invariabilidad de la velocidad al aumentar la intensidad del campo magnético rotativo, ya que, bajo estas circunstancias, el vector de magnetización de la nanopartícula,  $\mathbf{M}$ , es paralelo a la dirección del campo externo,  $\mathbf{H}$ .

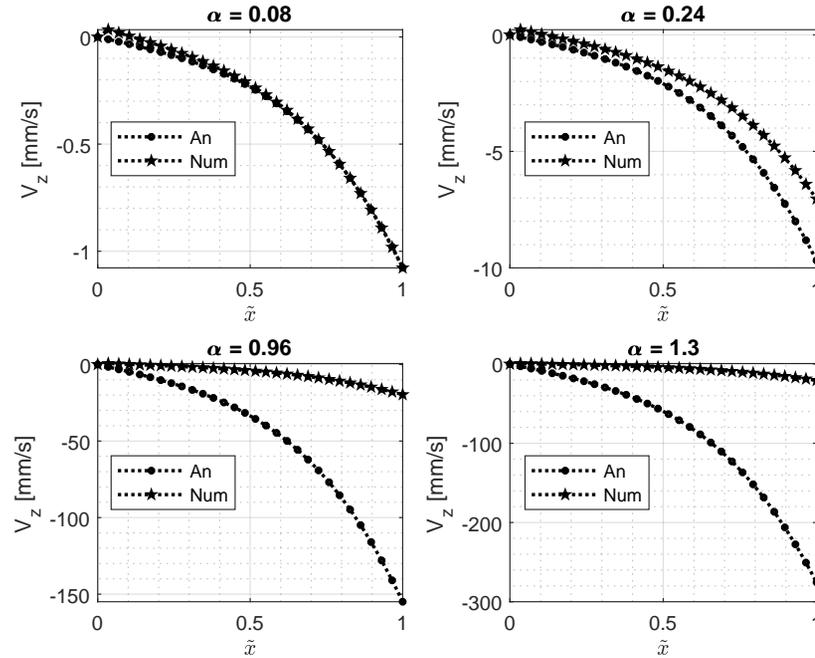


Figura 25: Efecto del parámetro  $\alpha$  en las predicciones de velocidad,  $v_z(\tilde{x}; \tilde{y} = 0, 5)$ .  $f = 150$  Hz,  $\kappa = \infty$ , WBF-1. Num representa la solución obtenida a través del algoritmo numérico y An la solución analítica a través del método de las series de Fourier.  $\alpha = [0, 08 \ 0, 24 \ 0, 96 \ 1, 3]$ .

Asimismo, para apreciar las diferencias en las predicciones de flujo con cada metodología de solución, en la figura 26, se presentan los valores de velocidad máxima obtenidos por medio del modelo, con y sin aproximaciones (metodología analítica y numérica, respectivamente).

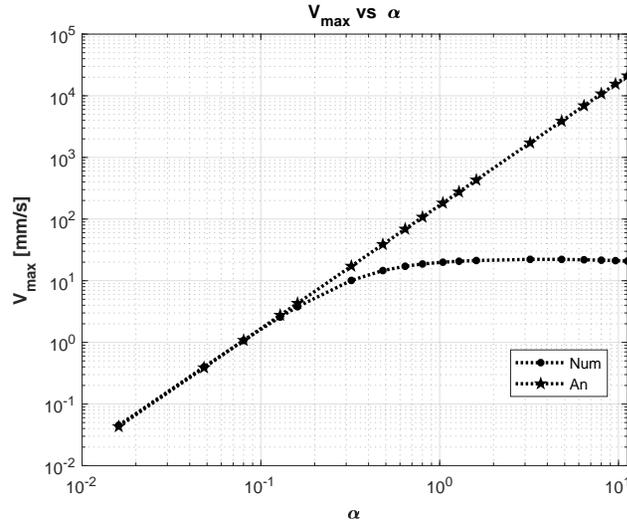


Figura 26: Efecto del parámetro  $\alpha$  en las predicciones de velocidad máxima,  $v_z(\tilde{x}; \tilde{y} = 0, 5)$ .  $f = 150 \text{ Hz}$ ,  $\kappa = \infty$ , WBF-1. Num representa la solución obtenida a través del algoritmo numérico y An la solución analítica a través del método de las series de Fourier.

Finalmente, con el objetivo de cuantificar la diferencia en los pronósticos, con el aumento de la intensidad del campo magnético externo, en la figura 27, se presenta la progresión del error entre las predicciones obtenidas con cada uno de los métodos de solución.

**2.6.9 Superficies de velocidad para  $\alpha \gg 1$ :** Ahora, con el fin de seguir reportando los resultados encontrados a través del algoritmo numérico de solución del sistema de ecuaciones ferrodinámicas, válidas para  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ , en las figuras 28, 29 y 30 se presentan las superficies de velocidad lineal y angular, a lo largo del dominio bidimensional del contenedor de la figura 18.

Además, con el propósito de comparar los resultados de los perfiles de velocidad con datos experimentales, se realiza la simulación de los perfiles, para la muestra WBF-1, según los valores de campo magnético reportados en el trabajo de Torres-Díaz *et al.* [2]. Los perfiles reportados en la figura 31 corresponden a  $v_z(x, 10 \text{ mm})$ , para un canal de placas planas y paralelas, cuya relación de aspecto es uno ( $a = 1$ ). Al igual que en los resultados experimentales de Torres-Díaz *et al.* [2], a pesar de trabajar con geometrías diferentes, se puede notar una saturación en la magnitud de la velocidad, a partir de un valor aproximado de 7,9 mT.

Finalmente, con el fin de analizar los efectos del aumento de la densidad de campo magnético en los valores de la velocidad lineal, se operó el algoritmo solución, con el objetivo de obtener el valor máximo de velocidad lineal para un rango de densidad

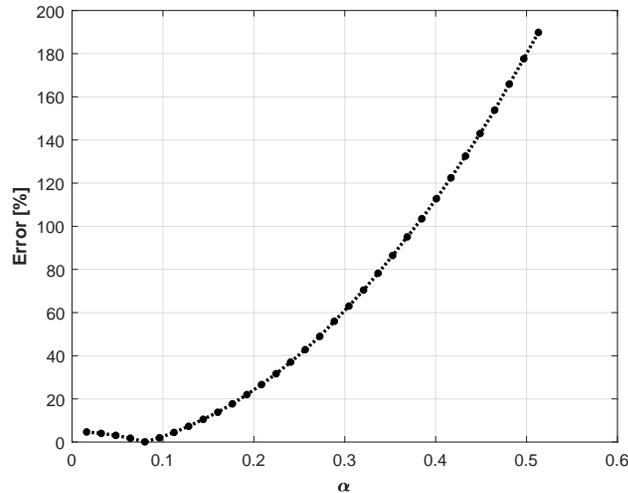


Figura 27: Efecto del parámetro  $\alpha$  en el error de las predicciones de la velocidad máxima,  $v_z(\tilde{x}; \tilde{y} = 0, 5)$ , por medio de la solución analítica y numérica del modelo de la TDMAI.  $f = 150$  Hz,  $\kappa = \infty$ , WBF-1.

de campo magnético entre 1 – 100 mT, lo que equivale a un rango del parámetro de Langevin  $\alpha = [10^{-1} - 10^1]$ , aproximadamente. Los resultados son presentados en la figura 32, en donde se puede observar que para campos bajos ( $\alpha < 1$ ) se presenta una relación de orden 1, 2 aproximadamente.

En síntesis, en este capítulo se implementó la ecuación MRSh-74, dentro del conjunto de ecuaciones ferrodinámicas de la TDMAI, con el fin de predecir los perfiles de velocidad para ferrofluidos contenidos en un canal rectangular de longitud axial infinita, bajo el efecto de campos magnéticos rotativos en los que  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ . Se debe aclarar que los resultados obtenidos para la geometría rectangular de dominio bidimensional, bajo el efecto de campos magnéticos de intensidades y frecuencias no bajas, fueron realizados con base en los resultados obtenidos por A. Chaves, C. Rinaldi, V. Peña y A. Alviz [1, 5, 32], los cuales sirvieron de punto de inicio en este trabajo de investigación.

## 2.7 OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

En este capítulo se evaluó el efecto combinado de esfuerzos volumétricos y superficiales en el flujo de ferrofluidos, inducidos por un campo magnético rotativo en una geometría rectangular-bidimensional de placas planas y paralelas, de longitud axial  $\tilde{z}$  infinita. Las simulaciones fueron realizadas con valores de campo magnético en los que  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ , partiendo de los resultados obtenidos de manera previa en las referencias [1, 5, 31, 32], en las que se analizó una geometría rectangular de dominio unidimensional y valores de campo magnético en los que  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ , como también,  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ . Por lo tanto, se implementó la TDMAI para predecir los perfiles y superficies de velocidad lineal y de giro,  $\tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y})$ ,  $\tilde{\omega}_x(\tilde{x}, \tilde{y})$  y  $\tilde{\omega}_y(\tilde{x}, \tilde{y})$ , para muestras de ferrofluidos

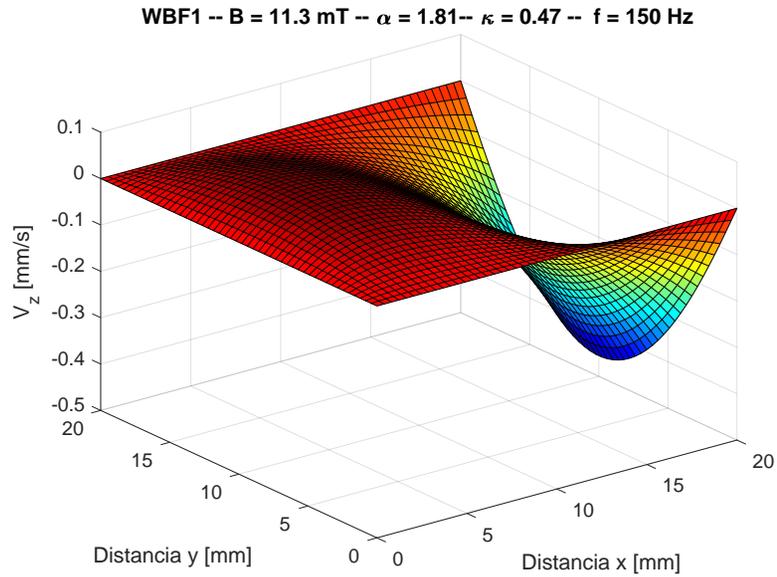


Figura 28: Superficie de velocidad lineal  $v_z$  en función de la coordenada horizontal y vertical, para la muestra de ferrofluido WBF-1. El sistema físico consiste en el canal rectangular de dominio bidimensional de la figura 18.  $B = 11,3 \text{ mT}$ ,  $f = 150 \text{ Hz}$  y  $\kappa = 0,47$ . Se implementó la ecuación MRSh-74 en la TDMAI para la descripción de las superficies.

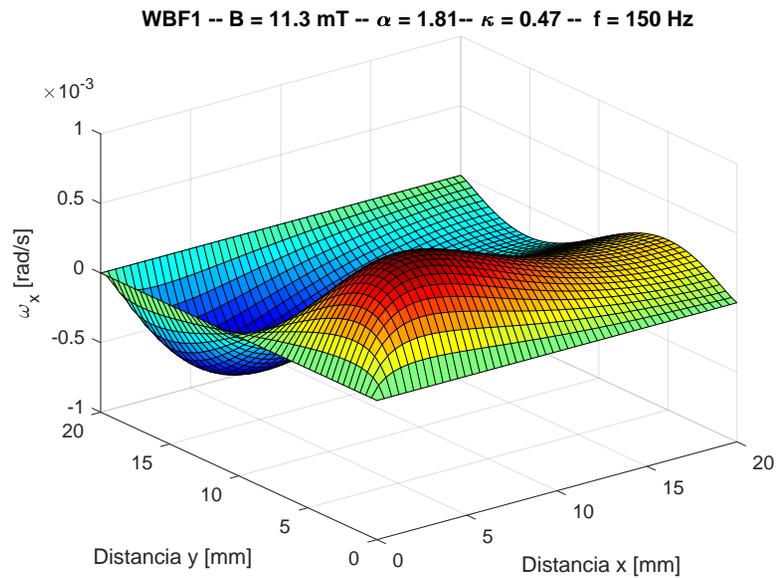


Figura 29: Superficie de velocidad angular  $\omega_x$  en función de la coordenada horizontal y vertical, para la muestra de ferrofluido WBF-1. El sistema físico consiste en el canal rectangular de dominio bidimensional de la figura 18.  $B = 11,3 \text{ mT}$ ,  $f = 150 \text{ Hz}$  y  $\kappa = 0,47$ . Se implementó la ecuación MRSh-74 en la TDMAI para la descripción de las superficies.

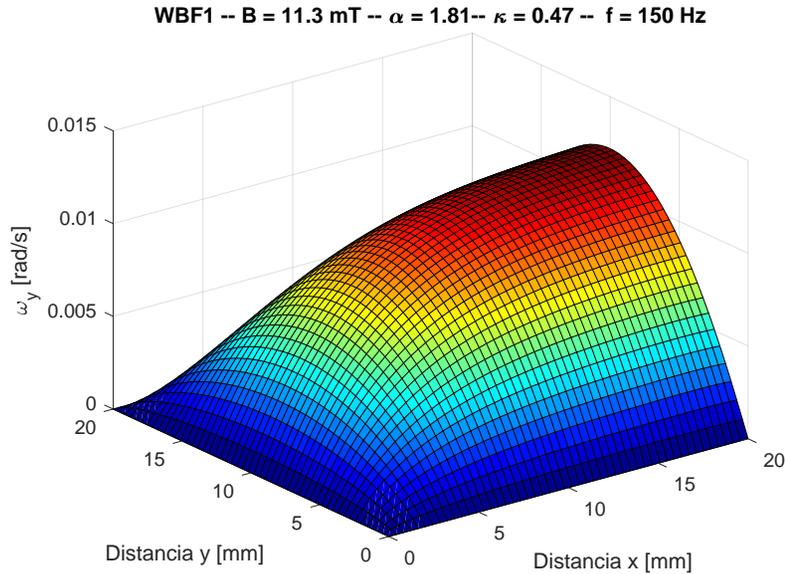


Figura 30: Superficie de velocidad angular  $\omega_y$  en función de la coordenada horizontal y vertical, para la muestra de ferrofluido WBF-1. El sistema físico consiste en el canal rectangular de dominio bidimensional de la figura 18.  $B = 11,3 \text{ mT}$ ,  $f = 150 \text{ Hz}$  y  $\kappa = 0,47$ . Se implementó la ecuación MRSh-74 en la TDMAI para la descripción de las superficies.

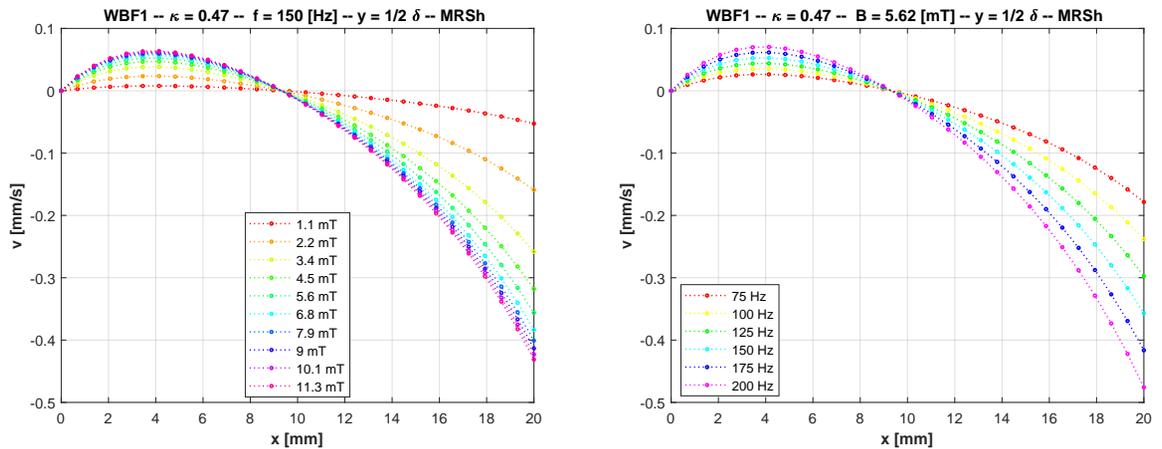


Figura 31: Perfil de velocidad promedio  $v_z$ , en el canal rectangular bidimensional (con interfase ferrofluido aire en  $x = 20 \text{ mm}$ ), para la muestra de ferrofluido WBF-1, bajo los efectos de diferentes densidades de campo magnético (con frecuencia constante de  $150 \text{ Hz}$ ), y para diferentes frecuencias (con densidad de campo magnético constante de  $5,62 \text{ mT}$ ). Los perfiles están en función de la coordenada vertical  $x$ , para una coordenada horizontal constante de  $y = 10 \text{ mm} = \frac{1}{2}\delta$ ,  $\kappa = 0,47$ . Se implementó la ecuación MRSh en el sistema de ecuaciones de la TDMAI.

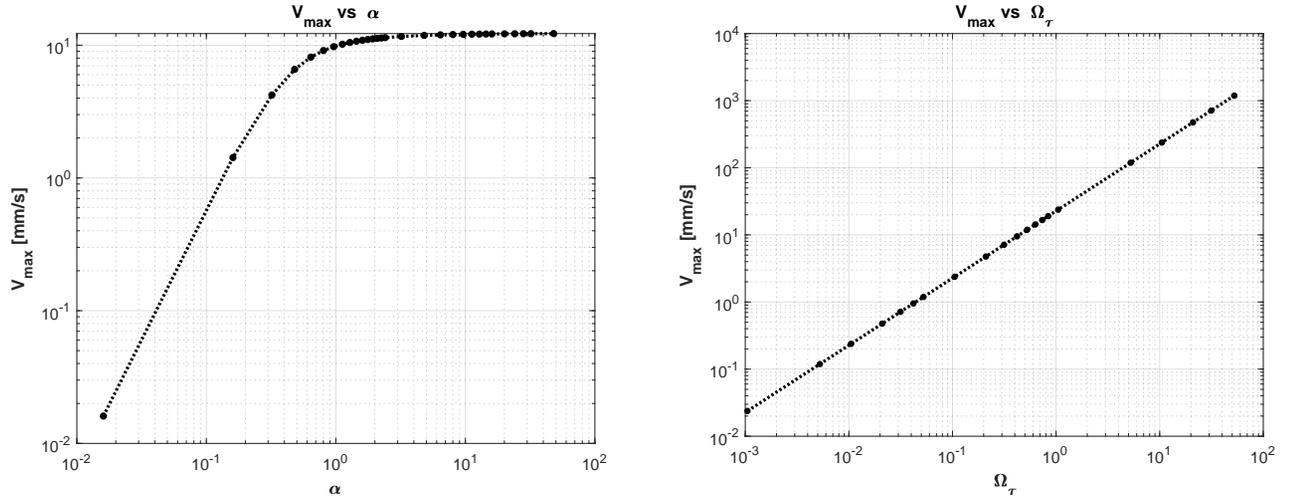


Figura 32: Efecto de  $\alpha$  y  $\Omega_\tau$  en los valores máximos de velocidad,  $v_z(x, 10\text{mm})$ , para la muestra de ferrofluido WBF-1, de acuerdo con la solución numérica obtenida con la implementación la ecuación MRSh-74 en la TDMAI, con  $\kappa = 3, 3$ . La curva de la izquierda es a una frecuencia constante  $f = 150\text{ Hz}$ , y la curva de la derecha es a una densidad  $B = 5,62\text{ mT}$ .

contenidas en esta geometría. De modo que, el aporte de esta investigación en el presente capítulo fue la implementación de la TDMAI para ferrofluidos contenidos en una geometría rectangular-bidimensional, bajo el efecto de campos magnéticos en los cuales  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ .

Después de realizar un análisis a los resultados obtenidos se puede observar y concluir que:

- En este capítulo se determinaron los perfiles de velocidad de una muestra de ferrofluido contenida en una geometría rectangular (ver figura 18). Al igual que en el problema unidimensional, se realizó la validación del algoritmo numérico, tal como se muestra en la figura 20 y 21, teniendo en cuenta los perfiles obtenidos para la mitad de la altura del contenedor, es decir,  $\tilde{v}_z(0, 5; \tilde{y})$ . De igual manera, con el fin de usar la solución analítica, se hizo la suposición de  $\eta' = 0$ . Una vez realizada la validación del algoritmo numérico, en la figura 22-24 se presentan los perfiles de velocidad para diferentes zonas geométricas del contenedor.
- Los resultados obtenidos en este capítulo fueron posibles gracias a los aportes realizados por Peña *et al.* [1] y Alviz *et al.* [32], quienes realizaron la implementación de la TDMAI en una geometría rectangular con interfase ferrofluido-aire. En el trabajo de Peña *et al.* [1] se realizó un estudio para campos en donde  $\alpha \approx 1$ , en un dominio unidimensional y para un ducto rectangular (sin interfase ferrofluido-aire). Por su parte, Alviz *et al.* [32] realizaron un estudio de ferrofluidos contenidos en un canal, teniendo en cuenta la coordenada vertical y horizontal para bajas intensidades de campo magnético, es decir,  $\alpha \ll 1$ . Sin embargo, se detectó un error en la metodología implementada en la referencia [32], por lo que fue necesaria la corrección de la condición de frontera en la interfase ferrofluido-aire ( $\tilde{x} = 1$ ),

para la velocidad de giro  $\tilde{\omega}$ . En esta nueva condición de frontera, a diferencia de la establecida en el trabajo de Alviz *et al.* [32], se tiene en cuenta la derivada de la velocidad angular en la coordenada vertical, con respecto a la coordenada horizontal,  $\frac{\partial \tilde{\omega}_x}{\partial \tilde{y}}$ . Para mayor referencia ver Ec. (121).

- Para la solución del sistema de ecuaciones magnéticas se despreció la componente  $\tilde{y}$  de la ecuación MRSh-74, es decir,  $\tilde{M}_y = 0$ . Lo anterior se hizo, con el fin de facilitar la solución matemática del problema. Sin embargo, se recomienda tener en cuenta el efecto de la componente  $\tilde{M}_y$ , incorporando la Ec. (128) dentro del problema magnético a resolver, de manera que  $\langle \tilde{l}_x \rangle_{\tilde{t}} = \langle \tilde{M}_y \tilde{H}_z \rangle_{\tilde{t}} \neq 0$ .
- A diferencia del problema con dominio unidimensional, en donde se busca obtener  $\tilde{v}_z(\tilde{x})$ , al tener en cuenta la coordenada vertical y horizontal del canal rectangular, es decir,  $\tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y})$ , es necesario determinar las longitudes característica del sistema  $\delta_x$  y  $\delta_y$ . En la obtención de los perfiles mostrados en este trabajo, para facilitar el tratamiento matemático de las ecuaciones, se asumió que la altura y el ancho del canal tienen las mismas dimensiones, por lo que la longitud característica  $\delta$  fue la misma en ambas coordenadas, es decir,  $\delta_x = \delta_y = \delta$ .
- Los perfiles encontrados en la figura 14, 15 y 16, muestran que al menos para la muestra de ferrofluido WBF-1, contenida en una geometría rectangular con interfase ferrofluido-aire, las predicciones obtenidas con la ecuación de magnetización Sh-72, son de mayor magnitud que las obtenidas con la ecuación MRSh-74 (estos resultados también fueron mostrados en la figura 9 del trabajo de Chaves-Guerrero *et al.* [31]). Lo anterior, sugiere que al implementar la ecuación de magnetización MRSh-74 dentro del sistema de ecuaciones ferrohodinámicas, se mejoraría el desempeño de la TDMAI en la predicción de los perfiles, ya que según la figura 23 de la referencia [2], se puede observar que las predicciones con la implementación de la ecuación de magnetización de Shliomis, en cuanto a la magnitud, están por encima de los valores experimentales medidos. En este orden de ideas, y debido a la falta de convergencia en el algoritmo numérico que implementa la ecuación Sh-72, en este trabajo se concluye que para campos magnéticos de intensidades no bajas ( $\alpha \geq 1$ ), la ecuación de magnetización MRSh-74 tiene mejor desempeño que la ecuación Sh-72 en la predicción de perfiles de velocidad.
- Aunque en la literatura no se cuentan con mediciones de perfiles de velocidad en un contenedor cuadrado, con el fin de validar los datos aquí obtenidos, los resultados de las figuras 25-27 mostraron que las simplificaciones realizadas, en la metodología analítica, generan perfiles que son válidos solo para intensidades de campo magnético inferiores a los respectivos valores de saturación del ferrofluido. Adicionalmente, se observó que la solución numérica es la más adecuada para evaluar el modelo ferrohodinámico, ya que no posee restricciones relacionadas con la intensidad del campo magnético. De igual manera, el modelo sin aproximaciones, en el que se implementó la estrategia numérica, permitió evidenciar por primera vez el fenómeno de saturación en los perfiles de velocidad, para un canal

cuadrado de dominio bidimensional, al incrementar la intensidad del campo magnético. Situación que ha sido observada experimentalmente en otras geometrías [2].

- En la figura 28 se puede apreciar un contraflujo en la región cercana a la pared inferior del canal (valores de  $x \leq 5$  mm aproximadamente), así como también, se puede observar, al igual que en los perfiles de velocidad anteriormente encontrados por Chaves *et al.* [5, 31], que las velocidades de mayor magnitud se presentan en los puntos que hacen parte de la interfase ferrofluido-aire, dando a entender *a priori*, que la influencia de los esfuerzos tangenciales en la interfase son de mayor incidencia que los esfuerzos volumétricos al interior del ferrofluido, en lo que respecta a generación de flujo.
- Por su parte, en la figura 29 y 30 se puede observar que la velocidad angular  $\omega_y$  es dos órdenes de magnitud mayor que  $\omega_x$ , por lo que se podría decir que al tener en cuenta la coordenada horizontal en el análisis, la mayor incidencia de la rotación de las partículas, al igual que en los resultados donde sólo se tuvo en cuenta la coordenada vertical, está representada en la componente horizontal del vector velocidad angular, es decir,  $\omega_y$ . Lo dicho anteriormente está relacionado con la suposición hecha inicialmente, en donde se establece a  $v_z(x, y)$  como la única componente de la velocidad lineal del ferrofluido. De igual modo, se puede observar en la superficie de velocidad angular para  $\omega_x$  una característica antisimétrica con el eje en  $y = 10$  mm, lo cual representa una contrarotación en el giro de las nanopartículas magnéticas, comportamiento ausente en las superficies de  $\omega_y$ .
- De acuerdo con los resultados de la figura 31 y los datos experimentales de Torres-Díaz *et al.* [2] (realizados en una geometría cilíndrica), se podría sugerir que el fenómeno de saturación de los perfiles de velocidad puede estar más relacionado con las características del ferrofluido, que con la geometría del contenedor en el que este se encuentre. Asimismo, se puede observar que para los valores de simulación implementados, el fenómeno de saturación se presenta al aumentar el valor de la amplitud, más no de la frecuencia de campo magnético. Por tal motivo, es necesario tener en cuenta el punto de operación del ferrofluido en cada una de las simulaciones realizadas (figura 32), ya que en la simulación de los perfiles en función del campo magnético, es decir, a frecuencia constante, el máximo valor de intensidad y frecuencia de campo magnético corresponde a 11,3 mT y 150 Hz, es decir,  $\alpha = 1,81$  y  $\tilde{\Omega} = 0,016$ , lo cual ubica el punto de operación en una zona de saturación, mientras que la simulación de los perfiles en función de la frecuencia, es decir, a campo magnético constante, el máximo valor de intensidad y frecuencia de campo magnético corresponde a 5,62 mT y 200 Hz, es decir,  $\alpha = 0,90$  y  $\tilde{\Omega} = 0,021$ , lo cual no corresponde a la zona de saturación de la muestra de ferrofluido.
- A partir de los resultados registrados en la figura 32, se observa un aumento en la velocidad máxima traslacional en la medida que el campo magnético aumenta, para un valor del parámetro de Langevin desde  $10^{-1}$  a  $10^0$ , aproximadamente. Para valores de  $\alpha \geq 10^0$  se presenta el fenómeno de saturación, a partir del cual,

al aumentar la intensidad de campo magnético aplicado la velocidad no presenta incrementos considerables. Estos resultados no pueden ser comparados con los reportados de Krauß *et al.* [45, 46], debido al desconocimiento de las características de los ferrofluidos y los contenedores utilizados en estos experimentos, ya que no fueron reportadas por los autores. Por otra parte, los resultados obtenidos con las simulaciones en el sistema de dominio bidimensional, con la presencia de una interfase ferrofluido-aire, están en concordancia cualitativa y cuantitativa con los datos reportados en el trabajo de Chaves-Guerrero *et al.* [31] (geometría de ducto rectangular con dominio unidimensional, sin interfase ferrofluido-aire), lo cual sugiere que el fenómeno de saturación está más relacionado con las características intrínsecas del ferrofluido, que con las características del contenedor de este mismo. Para una mayor ilustración, se recomienda comparar la figura 32 del presente documento con la figura 9 de la referencia [31].

- Finalmente, se debe tener en cuenta que los perfiles de velocidad lineal y de giro, resultado de las simulaciones realizadas en este trabajo, son válidos sólo para  $\lambda' \gg \frac{4\eta\zeta R_o^2}{\eta_e}$ . La anterior suposición fue requerida para obtener la solución al sistema de ecuaciones ferrohodinámicas, Ec. (30) y (31), debido a la falta de mediciones experimentales del coeficiente de viscosidad volumétrica del “*spin viscosity*”,  $\lambda'$ , tanto para la muestra WBF-1 como para otras muestras de ferrofluidos, según la literatura científica consultada en esta investigación.
- En resumen, para la geometría de placas, planas y paralelas, con interfase ferrofluido-aire, se obtuvieron por primera vez perfiles en donde se pudo evaluar, para campos en los que  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$  y para un dominio bidimensional, el efecto conjunto de esfuerzos volumétricos y tangenciales en la generación de perfiles. Anteriormente, se había realizado un estudio similar, A. Alviz [32], pero para campos magnéticos en los que  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ . Sin embargo, después de una revisión al procedimiento implementado por Alviz, se identificó un error en los resultados, debido a una aplicación errónea de las condiciones de frontera en la interfase ferrofluido-aire.

## CAPÍTULO 3

---

### PERFILES DE VELOCIDAD DE FERROFLUIDOS BAJO EL EFECTO DE CAMPOS MAGNÉTICOS ROTATIVOS DE BAJA Y ALTA INTENSIDAD, CONTENIDOS EN UNA GEOMETRÍA CILÍNDRICA

---

#### 3.1 INTRODUCCIÓN

Con base en los procedimientos realizados en el capítulo 2, para una geometría de menor complejidad (en lo que se refiere al tratamiento matemático de las ecuaciones), se estableció una metodología para la solución del sistema ferrohodinámico de las Ec. (29)-(31), (44)-(46). De forma análoga, esta metodología puede ser implementada en ferrofluidos contenidos en una geometría cilíndrica y anular. Una vez aplicado el modelo de la TDMAI a estas geometrías, se procederá a la comparación de los resultados de las simulaciones realizadas, con las mediciones experimentales de perfiles de velocidad, obtenidas en el trabajo de Torres-Díaz *et al.* [2], con el fin de evaluar el desempeño de la ecuación MRSh-74 en el modelo ferrohodinámico. Para obtener los resultados que se reportan en este y el próximo capítulo, fue necesario el aporte inicial dado por Chaves *et al.*[3, 4, 6, 17], quienes lograron, por medio de una metodología analítica, y para estas mismas geometrías, perfiles de velocidad para densidades de campo magnético de baja amplitud y frecuencia, es decir,  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ . Uno de los aspectos a tener en cuenta en esta geometría es el término convectivo  $\tilde{\Omega}\tilde{\varepsilon}\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{M}}$ , el cual, a diferencia de la geometría rectangular, es diferente de cero. Por tal motivo, se requiere la implementación de una condición de frontera adicional para la solución de la ecuación de magnetización del ferrofluido.

El objetivo principal de este capítulo es describir el comportamiento de los perfiles de velocidad de ferrofluidos contenidos en una geometría cilíndrica, para un amplio rango de valores de amplitud y frecuencia de campo magnético, con el propósito de comparar el desempeño del modelo ferrohodinámico (implementando la ecuación MRSh-74) con los resultados obtenidos experimentalmente, y de esta forma, evaluar el desempeño de la TDMAI para predecir perfiles de flujo en muestras de ferrofluido que están bajo el efecto de un campo magnético rotativo, en el que  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ .

### 3.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE FLUJO DE UN FERROFLUIDO EN UNA GEOMETRÍA CILÍNDRICA

El sistema físico de estudio está compuesto por un ferrofluido inmerso en un contenedor cilíndrico de radio interno  $R$ . Asimismo, se supone que la longitud axial del cilindro es infinita para despreciar los efectos de borde en  $z = 0$  y  $z = L$ , así como también, los posibles esfuerzos tangenciales en la interfase ferrofluido-aire en  $z = L$ . Con el fin de simplificar el análisis en el estudio del comportamiento magnético del sistema, se despreciará el espesor en las paredes del cilindro, en donde, para un análisis más detallado, se deben aplicar, como en el resto de la geometría, las ecuaciones de Maxwell. La fuente de campo magnético rotativo está formada por una densidad de corriente superficial que atraviesa las paredes del cilindro en dirección  $+\mathbf{i}_z$ , la cual produce un campo magnético rotativo uniforme alrededor del eje axial del cilindro en  $\tilde{r} = 0$  (ver figura 33). Adicionalmente, la densidad de corriente superficial es descrita de la siguiente manera:

$$\mathbf{K}_s = K \cos(\tilde{t} - \theta) \mathbf{i}_z = \Re \left\{ K e^{j(\tilde{t} - n\theta)} \right\} \mathbf{i}_z. \quad (160)$$

En la Ec. (160),  $K$  representa la amplitud de corriente de la señal senoidal,  $n$  el rango (magnitud de orden uno) del armónico de corriente (se supone igual a la unidad, ya que se asume solo la componente fundamental). Por su parte, la variable  $\tilde{t}$  corresponde al tiempo adimensional, el cual está definiendo como  $\tilde{t} = 2\pi f \cdot t$ , en donde  $f$  es la frecuencia de rotación del campo magnético y  $t$  el tiempo en el que se analiza el fenómeno. Asimismo, en la Ec. (160),  $\theta$  representa la coordenada azimutal en el cilindro  $[0 - 2\pi]$ , la cual es adimensional. Debido a esto, la variable azimutal no tiene el símbolo  $\sim$  en la parte superior.

En la geometría de estudio de la figura 33 se requiere determinar los perfiles de velocidad lineal y de giro  $v_\theta(r)$  y  $\omega_z(r)$ , respectivamente, para campos magnéticos en los cuales  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ . Para lograr este resultado, se requiere determinar los valores de intensidad de campo magnético y magnetización del ferrofluido para todos los nodos espaciales y temporales del dominio, es decir,  $\tilde{H}_r(\tilde{r}, \theta, \tilde{t})$ ,  $\tilde{H}_\theta(\tilde{r}, \theta, \tilde{t})$ ,  $\tilde{M}_r(\tilde{r}, \theta, \tilde{t})$  y  $\tilde{M}_\theta(\tilde{r}, \theta, \tilde{t})$ ; los cuales a su vez determinan el valor del torque promedio, el cual está conectado con las ecuaciones hidrodinámicas del fenómeno, específicamente con la ecuación de balance de momento angular interno, Ec. (31).

### 3.3 ECUACIONES VECTORIALES GOBERNANTES

Al igual que en la geometría rectangular trabajada en el capítulo 2, en la geometría cilíndrica se deben aplicar las ecuaciones dinámicas y magnéticas del modelo que describe la TDMAI. Aunque son las mismas ecuaciones vectoriales trabajadas anteriormente, las componentes de las ecuaciones son diferentes, ya que se refieren a una geometría y un sistema de coordenadas diferente.

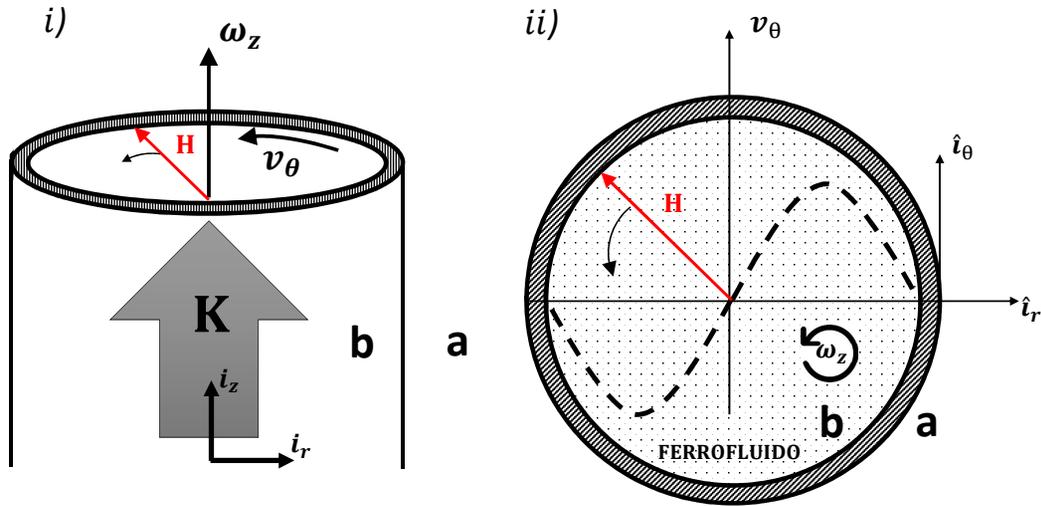


Figura 33: Diagrama esquemático del flujo de un ferrofluido, contenido en el interior de un cilindro de longitud axial infinita, generado por el efecto de un campo magnético rotativo uniforme  $\mathbf{H}$ . El campo rotativo gira alrededor del eje axial  $\tilde{z}$ , y es generado por el devanado de un motor de inducción trifásico de dos polos, el cual se modela a través de una distribución de corriente superficial,  $\mathbf{K}_s = K \cos(\tilde{t} - \theta) \mathbf{i}_z = \Re \left\{ K e^{j(\tilde{t} - n\theta)} \right\} \mathbf{i}_z$ , en las paredes del cilindro. *i)* representa la vista frontal y *ii)* la vista superior del cilindro.

**3.3.1 Ecuaciones del problema hidrodinámico:** Las ecuaciones vectoriales que rigen la dinámica de flujo, son las mismas Ec. (30) y (31) implementadas en la geometría rectangular.

**3.3.2 Ecuaciones del problema magnético:** Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la geometría rectangular, se implementará la ecuación de magnetización MRS<sub>h</sub>-74. Por tal motivo, el sistema magnético está compuesto por la Ec. (44)-(46).

### 3.4 ECUACIONES POR COMPONENTES

Con el propósito de implementar el modelo en la geometría de estudio, se prosigue a determinar las componentes de la Ec. (30), (31), (44)-(46), que aplican en el sistema cilíndrico descrito en la figura 33, junto con sus condiciones de frontera y condiciones iniciales correspondientes para la solución del sistema de ecuaciones diferenciales. Aunque la velocidad lineal del ferrofluido y la velocidad de giro de las nanopartículas,  $\tilde{v}_\theta(\tilde{r})$  y  $\tilde{\omega}_z(\tilde{r})$ , presentan simetría axial, las ecuaciones magnéticas serán resueltas para los puntos del dominio radial,  $\tilde{r} = [0 - 1]$ , y azimutal,  $\theta = [0 - 2\pi]$ . Con lo anterior, se obtendrán las componentes de la intensidad de campo magnético y la magnetización:  $\tilde{H}_r(\tilde{r}, \theta, \tilde{t})$ ,  $\tilde{H}_\theta(\tilde{r}, \theta, \tilde{t})$ ,  $\tilde{M}_r(\tilde{r}, \theta, \tilde{t})$  y  $\tilde{M}_\theta(\tilde{r}, \theta, \tilde{t})$ .

**3.4.1 Ecuaciones hidrodinámicas por componentes:** El sistema de ecuaciones hidrodinámicas está compuesto por la componente azimutal de la ecuación de balance de momento lineal, Ec. (30), la componente vertical de la ecuación de balance de momento angular interno, Ec. (31), y el valor de torque promedio, Ec. (86). Estas relaciones son expresadas en la Ec. (161)-(163), en las que adicionalmente, se implementó lo establecido en la Ec. (36).

$$\frac{\eta_e}{\eta} \frac{d}{d\tilde{r}} \left[ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{v}_\theta) \right] - 2 \frac{\zeta}{\eta} \frac{d\tilde{\omega}_z}{d\tilde{r}} = 0 \quad (161)$$

$$\frac{2}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{v}_\theta) - 4\tilde{\omega}_z + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{d\tilde{\omega}_z}{d\tilde{r}} \right) = - \frac{\langle \tilde{l}_z \rangle_t}{\tilde{\Omega}}, \quad (162)$$

$$\langle \tilde{l}_z \rangle_t = \langle \tilde{M}_r \tilde{H}_\theta - \tilde{M}_\theta \tilde{H}_r \rangle_t. \quad (163)$$

Se emplea el símbolo de la derivada total  $\frac{d}{dr}$ , ya que la única variación de los perfiles se presentan en la dirección radial  $\tilde{r}$ . Lo anterior, debido a la simetría de la geometría del contenedor en la coordenada azimutal  $\theta$ , y la suposición de longitud axial  $\tilde{z}$  infinita.

**3.4.2 Condiciones de frontera hidrodinámicas:** En cuanto a las condiciones de frontera, en el centro del cilindro,  $\tilde{r} = 0$ , se aplica la simetría radial de los perfiles respecto a este punto (para mayor ilustración ver figura 33). Por su parte, en  $\tilde{r} = 1$  se tiene en cuenta la condición de no deslizamiento y no penetración en las paredes del cilindro, es decir, las velocidades para los puntos de la pared son nulas [44]. Esto último, se resume en la Ec. (164).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=0} &= 0, & \tilde{v}_\theta \Big|_{\tilde{r}=1} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=0} &= 0, & \tilde{\omega}_z \Big|_{\tilde{r}=1} &= 0. \end{aligned} \quad (164)$$

**3.4.3 Ecuaciones magnéticas por componentes:** El sistema de ecuaciones magnéticas está compuesto por las ecuaciones de Maxwell (ley de Gauss y ley de Ampère-Maxwell), la ecuación de magnetización MRSh-74, y la ecuación de Langevin, Ec. (7)-(13). A continuación, se determinan las componentes para cada una de las ecuaciones vectoriales.

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_r}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{v}_\theta \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{M}_r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{M}_\theta}{\tilde{r}} \right) &= -\tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_z \tilde{M}_\theta \\ &+ \frac{\tilde{H}_r (\tilde{H}_r \tilde{M}_r + \tilde{H}_\theta \tilde{M}_\theta)}{\tilde{H}_r^2 + \tilde{H}_\theta^2} \left( \frac{1}{B_\perp} - \frac{1}{B_\parallel} \right) + \frac{3\tilde{H}_r \varphi (\tilde{H}_r, \tilde{H}_\theta)}{B_\parallel} - \frac{\tilde{M}_r}{B_\perp}, \end{aligned} \quad (165)$$

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{M}_\theta}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{v}_\theta \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{M}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{M}_r}{\tilde{r}} \right) = +\tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\omega}_z \tilde{M}_r + \frac{\tilde{H}_\theta (\tilde{H}_r \tilde{M}_r + \tilde{H}_\theta \tilde{M}_\theta)}{\tilde{H}_r^2 + \tilde{H}_\theta^2} \left( \frac{1}{B_\perp} - \frac{1}{B_\parallel} \right) + \frac{3\tilde{H}_\theta \varphi(\tilde{H}_r, \tilde{H}_\theta)}{B_\parallel} - \frac{\tilde{M}_\theta}{B_\perp}, \quad (166)$$

$$\varphi(\tilde{H}_r, \tilde{H}_\theta) = \frac{\coth(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\coth\left(\sqrt{32\varepsilon(\tilde{H}_r^2 + \tilde{H}_\theta^2)}\right)}{\sqrt{32\varepsilon(\tilde{H}_r^2 + \tilde{H}_\theta^2)}} - \frac{2}{3\varepsilon(\tilde{H}_r^2 + \tilde{H}_\theta^2)}, \quad (167)$$

$$\tilde{H}_\theta + \tilde{r} \frac{\partial \tilde{H}_\theta}{\partial \tilde{r}} - \frac{\partial \tilde{H}_r}{\partial \theta} = 0, \quad (168)$$

$$\tilde{H}_r + \tilde{r} \frac{\partial \tilde{H}_r}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{H}_\theta}{\partial \theta} = -\chi \left[ \tilde{M}_r + \tilde{r} \frac{\partial \tilde{M}_r}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{M}_\theta}{\partial \theta} \right]. \quad (169)$$

**3.4.4 Condiciones iniciales magnéticas:** Las condiciones iniciales que gobiernan el problema magnético se fundamentan en la no existencia de magnetización en ninguna de sus componentes, es decir,  $\tilde{M}_r(\tilde{r}, \theta, 0) = 0$  y  $\tilde{M}_\theta(\tilde{r}, \theta, 0) = 0$ , debido que al iniciar la energización de la fuente de campo magnético, en  $\tilde{t} = 0$ , se supone que la magnetización del ferrofluido no experimenta saltos escalonados, ya que este fenómeno no es instantáneo.

**3.4.5 Condiciones de frontera magnéticas:** Para la solución de las ecuaciones de Maxwell, se requiere la implementación de las condiciones de frontera magnéticas en  $\tilde{r} = 0$  y  $\tilde{r} = 1$ . En el centro del cilindro, se tiene en cuenta lo expuesto en la referencia [59], en donde se establece la continuidad del flux magnético en el eje del cilindro. Por consiguiente, se requiere que  $B_r|_{\tilde{r}=0} = 0$ , de tal forma que la condición de frontera queda expresada como:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_r|_{\tilde{r}=0} &= \tilde{H}_r|_{\tilde{r}=0} + \chi \tilde{M}_r|_{\tilde{r}=0} = 0, \\ \tilde{H}_r|_{\tilde{r}=0} &= -\chi \tilde{M}_r|_{\tilde{r}=0}. \end{aligned} \quad (170)$$

Por su parte, en las paredes del cilindro ( $\tilde{r} = 1$ ), según lo establecido en la Ec. (67), se implementa la condición de frontera de la Ec. (171).

$$\begin{aligned} H_t|_a - H_t|_b &= K_s, \\ \tilde{H}_t|_{\tilde{r}=1} &= -\cos(\tilde{t} - \theta). \end{aligned} \quad (171)$$

Adicionalmente, se debe implementar la condición de frontera en la dirección  $\theta$ , la cual se plantea con base en la periodicidad de los valores de intensidad de campo

magnético y magnetización, debido a la simetría de la geometría en estudio. Por tal motivo, queda establecida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_r(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}) &= \tilde{H}_r(\tilde{r}, \theta + 2\pi, \tilde{t}), & \tilde{H}_\theta(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}) &= \tilde{H}_r(\tilde{r}, \theta + 2\pi, \tilde{t}), \\ \tilde{M}_r(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}) &= \tilde{M}_r(\tilde{r}, \theta + 2\pi, \tilde{t}), & \tilde{M}_\theta(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}) &= \tilde{M}_r(\tilde{r}, \theta + 2\pi, \tilde{t}).\end{aligned}\quad (172)$$

Lo anterior es fundamental en el proceso de discretización del sistema ferrohídrodinámico, ya que en las ecuaciones diferenciales, en el formato de las diferencias finitas, las derivadas son expresadas como una resta del nodo actual con el anterior. Por tal motivo,  $\theta^0 = \theta^{nde\theta}$ , en donde  $nde\theta$  corresponde al número de nodos en los que se discretizó el sistema físico en la coordenada azimutal (este valor es establecido por el usuario del algoritmo numérico). En consecuencia, al aplicar diferencias finitas a las derivadas  $(\frac{\partial}{\partial\theta})$  en los nodos en los cuales  $\theta^j = \theta^1$ , entonces  $\theta^1 - \theta^0 = \theta^1 - \theta^{nde\theta}$ , ya que  $\theta^0$  no existe en el dominio discreto implementado. Para una mejor ilustración ver figura 34.

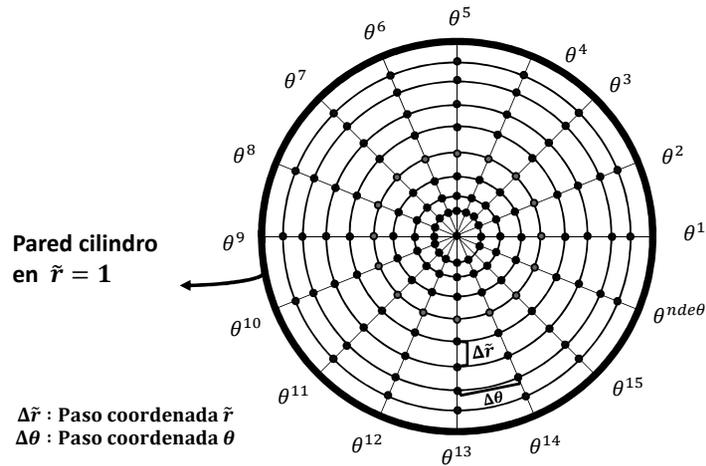


Figura 34: Esquema de discretización en la dirección radial y azimutal del contenedor cilíndrico de longitud axial  $\tilde{z}$  infinita. Los círculos de color negro representan los nodos en los que se ha discretizado el sistema físico. Por su parte,  $nder$  y  $nde\theta$  son el número de nodos espaciales en la coordenada  $\tilde{r}$  y  $\theta$ , respectivamente, los cuales son seleccionados por el usuario del algoritmo de solución numérica. Para este esquema ilustrativo  $nder = 9$  y  $nde\theta = 16$ .

### 3.5 SOLUCIÓN DE ORDEN CERO ( $\alpha \ll 1$ )

Con el fin de tener resultados para validar el algoritmo de solución numérica, de forma inicial, se tienen en cuenta los resultados obtenidos por Chaves *et al.* [3], quienes de forma analítica (implementando la ecuación Sh-72) lograron generar perfiles de velocidad de ferrofluidos bajo el efecto de un campo de baja intensidad y frecuencia, es decir,  $\alpha \ll 1$  y  $\Omega \ll 1$ . Teniendo en cuenta lo anterior, para la solución analítica del sistema

de ecuaciones ferrohídrodinámicas, Chaves *et al.* [3] despreciaron todos aquellos términos dependientes de la magnitud del campo magnético y, adicionalmente, asumieron que para campos de baja magnitud  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ . Con el propósito de contextualizar la metodología para obtener los perfiles de velocidad de ferrofluidos bajo el efecto de campos magnéticos de baja intensidad y frecuencia, a continuación, se presenta el desarrollo de la solución planteada en la referencia [3].

**3.5.1 Problema magnético:** Para campos magnéticos en donde  $\alpha \ll 1$  se tiene que  $\varepsilon \approx 0$ . Por tal motivo, para la geometría cilíndrica de la figura 33, la ecuación de magnetización Sh-72, Ec (43), queda expresada como:

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\mathbf{H}} - \tilde{\mathbf{M}}. \quad (173)$$

Teniendo en cuenta que la intensidad de campo magnético y la magnetización tiene una forma similar a la densidad de corriente que los produce, se puede establecer, de acuerdo con la Ec. (160) y suponiendo  $n = 1$ , las expresiones de la Ec. (174).

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}(\tilde{r}, \theta \tilde{t}) &= \Re \left\{ \left[ \hat{H}_r(\tilde{r}) \mathbf{i}_r + \hat{H}_\theta(\tilde{r}) \mathbf{i}_\theta \right] e^{j(\tilde{t} - \theta)} \right\}, \\ \tilde{\mathbf{M}}(\tilde{r}, \theta \tilde{t}) &= \Re \left\{ \left[ \hat{M}_r(\tilde{r}) \mathbf{i}_r + \hat{M}_\theta(\tilde{r}) \mathbf{i}_\theta \right] e^{j(\tilde{t} - \theta)} \right\}. \end{aligned} \quad (174)$$

Resolviendo la Ec. (173) y teniendo en cuenta que  $\hat{H}_r$ ,  $\hat{H}_\theta$ ,  $\hat{M}_r$  y  $\hat{M}_\theta$  son las componentes complejas de la intensidad de campo y la magnetización, se obtiene que

$$\hat{M}_r = \frac{\hat{H}_r}{1 + j\tilde{\Omega}} \quad y \quad \hat{M}_\theta = \frac{\hat{H}_\theta}{1 + j\tilde{\Omega}}. \quad (175)$$

Con respecto a las ecuaciones de Maxwell, Ec. (45) y (46), en la geometría cilíndrica se tiene el sistema compuesto por la Ec. (176).

$$\begin{aligned} \frac{d(\tilde{r} \hat{H}_\theta)}{d\tilde{r}} + jH_r &= 0, \\ \frac{d(\tilde{r} \hat{H}_r)}{d\tilde{r}} - jH_\theta &= 0. \end{aligned} \quad (176)$$

La solución del sistema de la Ec. (176), teniendo en cuenta las condiciones de frontera de la Ec. (170) y la Ec. (171), son las expresiones de la Ec. (177).

$$\hat{H}_r = -j \quad y \quad \hat{H}_\theta = -1. \quad (177)$$

Lo que en el dominio del tiempo representa

$$\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}) = \Re \left\{ [-j\mathbf{i}_r - \mathbf{i}_\theta] e^{j(\tilde{t}-\theta)} \right\}, \quad (178)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}) = \sin(\tilde{t} - \theta) \mathbf{i}_r - \cos(\tilde{t} - \theta) \mathbf{i}_\theta. \quad (179)$$

Por su parte, las componentes de la magnetización quedan expresadas como

$$\hat{M}_r = -\frac{j}{1 + j\tilde{\Omega}} \quad y \quad \hat{M}_\theta = -\frac{1}{1 + j\tilde{\Omega}}, \quad (180)$$

lo que en el dominio del tiempo representa

$$\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}) = \Re \left\{ \left[ -\frac{j}{1 + j\tilde{\Omega}} \mathbf{i}_r - \frac{1}{1 + j\tilde{\Omega}} \mathbf{i}_\theta \right] e^{j(\tilde{t}-\theta)} \right\}. \quad (181)$$

A partir de los valores encontrados, se procede al cálculo del torque magnético instantáneo. Teniendo en cuenta la Ec. (85), aplicada a la geometría cilíndrica, se tiene que

$$\tilde{l}_z(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}) = (\tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}})_z = \tilde{M}_r \tilde{H}_\theta - \tilde{M}_\theta \tilde{H}_r. \quad (182)$$

Ya que las ecuaciones hidrodinámicas del modelo están formuladas para estados no transientes (independientes del tiempo), se requiere el valor del torque promedio,  $\langle \tilde{l}_z \rangle_t$ , expuesto en la Ec. (86). Este valor fue determinado por Chaves *et al.* [3, 4], de la manera en que se muestra en la Ec. (183).

$$\langle \tilde{l}_z \rangle_t = \frac{\tilde{\Omega}}{1 + \tilde{\Omega}^2}. \quad (183)$$

Por su parte, el término de la fuerza magnética, definido como  $\tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}}$ , se considera nulo, debido a la suposición de campo uniforme en el espacio, es decir,  $\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}} = 0$ .

El valor del torque promedio obtenido a partir de la Ec. (183), es implementado en la Ec. (162), con el fin de obtener los perfiles de velocidad lineal y de giro. Es de notar que en las geometrías de estudio, el torque promedio es el termino, dentro de las ecuaciones hidrodinámicas, que relaciona la intensidad de campo magnético  $\tilde{\mathbf{H}}$  con los perfiles de velocidad que se generan a partir de dicho campo.

**3.5.2 Problema hidrodinámico:** Continuando con la recapitulación del trabajo realizado por Chaves *et al.* [3, 4], se procede a definir la componente de la vorticidad en la dirección del eje de giro de la rotación del campo magnético externo (se define vorticidad como una medida de la rotación de un punto intermedio entre dos capas

de fluido que tienen movimiento traslacional). En consecuencia, en la Ec. (184) se determina la vorticidad para el sistema físico de la figura 33.

$$\tilde{\Omega}_v = \left( \bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{v}} \right)_z = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{v}_\theta). \quad (184)$$

Con base en la Ec. (184), la Ec. (161) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\frac{d}{d\tilde{r}} \left( \frac{\eta_e}{\eta} \tilde{\Omega}_v - \frac{2\zeta}{\eta} \tilde{\omega}_z \right) = 0. \quad (185)$$

De la Ec. (185) se puede deducir que:

$$\tilde{\Omega}_v = \frac{2\zeta}{\eta_e} \tilde{\omega}_z + \frac{\eta}{\eta_e} C_1 = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{v}_\theta) \quad (186)$$

Ahora bien, reemplazando la Ec. (183) y (186) en la Ec. (162) se obtiene la expresión de la Ec. (187).

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{d\tilde{\omega}_z}{d\tilde{r}} \right) - \kappa^2 \tilde{\omega}_z = -\frac{\kappa^2}{2} C_1 - \frac{\eta_e \kappa^2}{4\eta (1 + \tilde{\Omega}^2)}, \quad (187)$$

cuya solución analítica, desarrollada en el trabajo de Chaves *et al.* [3, 4], es:

$$\tilde{\omega}_z(\tilde{r}) = \frac{C_1}{2} + C_2 I_0(\kappa \tilde{r}) + \frac{\eta_e}{4\eta (1 + \tilde{\Omega}^2)}. \quad (188)$$

En la Ec. (188),  $I_0$  es el término que corresponde a la función de Bessel modificada de primera clase de orden cero. La constante que acompaña a la función de Bessel modificada de segunda clase se supone igual a 0, ya que la solución permanece finita en  $\tilde{r} = 0$ . Ahora, reemplazando la Ec. (188) en la Ec. (186) e integrando la expresión resultante, se determina la ecuación de los perfiles de  $\tilde{v}_\theta(\tilde{r})$  para ferrofluidos en un contenedor cilíndrico, bajo el efecto de campos magnéticos en los que  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$  [3, 4].

$$\tilde{v}_\theta(\tilde{r}) = \frac{\tilde{r}}{2} C_1 + \frac{2\zeta}{\eta_e \kappa} C_2 I_1(\kappa \tilde{r}) + \frac{\zeta \tilde{r}}{4\eta (1 + \tilde{\Omega}^2)}. \quad (189)$$

En donde  $C_1$  y  $C_2$ , a partir de las condiciones de frontera  $\tilde{v}_\theta(\tilde{r} = 1) = 0$  y  $\tilde{\omega}_z(\tilde{r} = 1) = 0$ , están definidas en la Ec. (190) y (191).

$$C_1 = \frac{-2 * \eta_e \kappa I_0(\kappa)}{4(1 + \tilde{\Omega}^2)(2\zeta I_1(\kappa) - \eta_e \kappa I_0(\kappa))} - \frac{\eta_e}{2\eta(1 + \tilde{\Omega}^2)}, \quad (190)$$

$$C_2 = \frac{\eta_e \kappa}{4(1 + \tilde{\Omega}^2)(2\zeta I_1(\kappa) - \eta_e \kappa I_0(\kappa))}. \quad (191)$$

En la Ec. (190) y (191),  $I_1$  corresponde a la ecuación de Bessel modificada de orden uno.

### 3.6 SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA $\alpha \gg 1$

Aunque el método analítico permite predecir los perfiles de velocidad, estos resultados solo tienen validez para valores de campo magnético de baja intensidad y frecuencia, es decir, para  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ . Por tal motivo, se requiere de un método de solución que permita obtener los perfiles de flujo sin limitaciones, es decir, que los perfiles resultantes también sean válidos para campos magnéticos en los que  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ .

En esta sección se mostrará la metodología implementada para obtener estas soluciones, como también, la validación correspondiente del algoritmo numérico implementado. Finalmente, se realizará la comparación de las soluciones numéricas obtenidas con las mediciones experimentales realizadas por Torres-Diaz *et al.* [2]. Lo anterior, con el fin de evaluar el desempeño de la ecuación MRSh-74 en la TDMAI, y a su vez, evaluar la capacidad de la TDMAI para predecir los perfiles de velocidad.

**3.6.1 Divergencia de la velocidad de giro:** En lo referente al sistema de ecuaciones hidrodinámicas, en la ecuación de balance de momento angular interno, Ec. (31), el término  $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\omega}$  no se puede considerar nulo, como se asumió en los resultados de Torres-Diaz y Rinaldi [60], para  $\alpha \ll 1$ . Por tal motivo, se debe desarrollar este término para determinar su aporte en la ecuación de balance, tal como se muestra en la Ec. (192).

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\omega} = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial(\tilde{r} \tilde{\omega}_r)}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\omega}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial \tilde{z}}. \quad (192)$$

Partiendo de la suposición de la presencia de un campo magnético rotando alrededor del eje axial del cilindro, y generado por una densidad de corriente superficial, atravesando las paredes del cilindro en dirección  $+\hat{i}_z$  (tal como se muestra en la figura 33), se espera que el campo rotativo gire alrededor del eje  $\tilde{z}$ . En consecuencia, las nanopartículas magnéticas presentarán rotación alrededor de ese mismo eje. Por tal motivo, de la Ec. (192) solo se considera el término  $\frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial \tilde{z}}$ . Adicionalmente, si se tiene en cuenta la longitud axial infinita del contenedor, la componente vertical  $\tilde{\omega}_z$  será independiente de las variaciones en la coordenada  $\tilde{z}$ . De modo que,

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\omega} = \frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial \tilde{z}} = 0. \quad (193)$$

De acuerdo con la Ec. (193), se puede afirmar, para intensidades no bajas de campo magnético ( $\alpha \gg 1$ ), que la divergencia de la velocidad de giro de las nanopartículas permanece siendo nula, al igual que en los estudios realizados en los que  $\alpha \ll 1$ . Debido a lo anterior, el sistema de ecuaciones hidrodinámicas en la geometría cilíndrica sigue siendo el mismo, independientemente de la magnitud de la intensidad de campo magnético aplicado.

**3.6.2 Ecuaciones en diferencias finitas:** Una vez planteado el sistema a resolver, el cual consta de la Ec. (161), (162), (165)-(169), se sigue con el proceso de discretización, dando como resultado las expresiones de la Ec. (194)-(200).

$$\frac{\eta_e}{\eta} \left( \frac{-\tilde{v}_{\theta,i}}{\tilde{r}_i^2} + \frac{\tilde{v}_{\theta,i-1} - 2\tilde{v}_{\theta,i} - \tilde{v}_{\theta,i+1}}{\Delta\tilde{r}^2} \right) - \frac{\zeta}{\eta} \left( \frac{\tilde{\omega}_{z,i+1} - \tilde{\omega}_{z,i-1}}{2\Delta\tilde{r}} \right) = 0, \quad (194)$$

$$2\frac{\tilde{v}_{\theta,i}}{\tilde{r}_i} + \frac{\tilde{v}_{\theta,i+1} - \tilde{v}_{\theta,i-1}}{2\Delta\tilde{r}} - 4\tilde{\omega}_{z,i} + \frac{4\eta}{\eta_e\kappa^2} \left( \frac{1}{\tilde{r}_i} \frac{\tilde{\omega}_{z,i+1} - \tilde{\omega}_{z,i-1}}{2\Delta\tilde{r}} + \frac{\tilde{\omega}_{z,i-1} - 2\tilde{\omega}_{z,i} + \tilde{\omega}_{z,i+1}}{\Delta\tilde{r}^2} \right) = \frac{-\langle \tilde{l}_z \rangle_{t,i}}{\tilde{\Omega}}, \quad (195)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\Omega} \frac{(\tilde{M}_{r,i}^{j,k} - \tilde{M}_{r,i}^{j,k-1})}{\Delta\tilde{t}} + \frac{\tilde{\Omega}\varepsilon\tilde{v}_{\theta,i}}{\tilde{r}_i} \left( \frac{\tilde{M}_{r,i}^{j,k} - \tilde{M}_{r,i}^{j-1,k}}{\Delta\theta} - \tilde{M}_{\theta,i}^{j,k} \right) \\ & = -\tilde{\Omega}\varepsilon\tilde{\omega}_{z,i}\tilde{M}_{\theta,i}^{j,k} + \frac{\tilde{H}_{r,i}^{j,k} (\tilde{H}_{r,i}^{j,k} \tilde{M}_{r,i}^{j,k} + \tilde{H}_{\theta,i}^{j,k} \tilde{M}_{\theta,i}^{j,k})}{(\tilde{H}_{r,i}^{j,k})^2} \\ & \quad + (\tilde{H}_{\theta,i}^{j,k})^2 \left( \frac{1}{B_{\perp}} - \frac{1}{B_{\parallel}} \right) + \frac{3\tilde{H}_{r,i}^{j,k} \varphi(\tilde{H}_{r,i}^{j,k}, \tilde{H}_{\theta,i}^{j,k})}{B_{\parallel}} - \frac{\tilde{M}_{r,i}^{j,k}}{B_{\perp}}, \quad (196) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\Omega} \frac{(\tilde{M}_{\theta,i}^{j,k} - \tilde{M}_{\theta,i}^{j,k-1})}{\Delta\tilde{t}} + \frac{\tilde{\Omega}\varepsilon\tilde{v}_{\theta,i}}{\tilde{r}_i} \left( \frac{\tilde{M}_{\theta,i}^{j,k} - \tilde{M}_{\theta,i}^{j-1,k}}{\Delta\theta} + \tilde{M}_{r,i}^{j,k} \right) \\ & = +\tilde{\Omega}\varepsilon\tilde{\omega}_{z,i}\tilde{M}_{r,i}^{j,k} + \frac{\tilde{H}_{\theta,i}^{j,k} (\tilde{H}_{r,i}^{j,k} \tilde{M}_{r,i}^{j,k} + \tilde{H}_{\theta,i}^{j,k} \tilde{M}_{\theta,i}^{j,k})}{(\tilde{H}_{r,i}^{j,k})^2} \\ & \quad + (\tilde{H}_{\theta,i}^{j,k})^2 \left( \frac{1}{B_{\perp}} - \frac{1}{B_{\parallel}} \right) + \frac{3\tilde{H}_{\theta,i}^{j,k} \varphi(\tilde{H}_{r,i}^{j,k}, \tilde{H}_{\theta,i}^{j,k})}{B_{\parallel}} - \frac{\tilde{M}_{\theta,i}^{j,k}}{B_{\perp}}, \quad (197) \end{aligned}$$

$$\varphi\left(\tilde{H}_{r,i}^{j,k}, \tilde{H}_{\theta,i}^{j,k}\right) = \frac{\coth\left(\sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon\left(\left(\tilde{H}_{r,i}^{j,k}\right)^2 + \left(\tilde{H}_{\theta,i}^{j,k}\right)^2\right)}\right)}{\sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon\left(\left(\tilde{H}_{r,i}^{j,k}\right)^2 + \left(\tilde{H}_{\theta,i}^{j,k}\right)^2\right)}} - \frac{2}{3\varepsilon\left(\left(\tilde{H}_{r,i}^{j,k}\right)^2 + \left(\tilde{H}_{\theta,i}^{j,k}\right)^2\right)}, \quad (198)$$

$$\tilde{H}_{\theta,i}^{j,k} + \tilde{r}_i \frac{\tilde{H}_{\theta,i}^{j,k} - \tilde{H}_{\theta,i-1}^{j,k}}{\Delta\tilde{r}} - \frac{\tilde{H}_{r,i}^{j,k} - \tilde{H}_{r,i}^{j-1,k}}{\Delta\theta} = 0, \quad (199)$$

$$\tilde{H}_{r,i}^{j,k} + \tilde{r}_i \frac{\tilde{H}_{r,i}^{j,k} - \tilde{H}_{r,i-1}^{j,k}}{\Delta\tilde{r}} + \frac{\tilde{H}_{\theta,i}^{j,k} - \tilde{H}_{\theta,i}^{j-1,k}}{\Delta\theta} = -\chi\left(\tilde{M}_{r,i}^{j,k} + \tilde{r}_i \frac{\tilde{M}_{r,i}^{j,k} - \tilde{M}_{r,i-1}^{j,k}}{\Delta\tilde{r}} + \frac{\tilde{M}_{\theta,i}^{j,k} - \tilde{M}_{\theta,i}^{j-1,k}}{\Delta\theta}\right). \quad (200)$$

La Ec. (194) corresponde a la componente  $\theta$  del balance de momento lineal y la Ec. (195) a la componente  $\tilde{z}$  del balance de momento angular interno. Por su parte, la Ec. (196) y (197) son la componente radial y azimutal de la ecuación MRSh-74, respectivamente. Asimismo, la Ec. (199) y (200) corresponden a las leyes de Maxwell implementadas. Finalmente, en las ecuaciones discretas, los subíndices  $i, j, k$  están relacionados con los nodos radiales, angulares y temporales, en este mismo orden. Para mayor referencia ver el esquema de la figura 35.

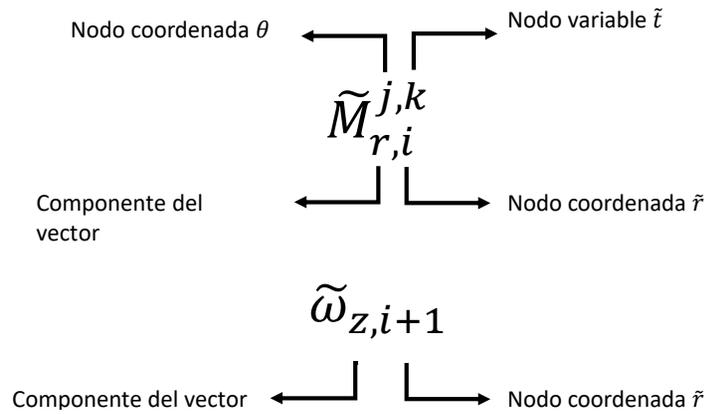


Figura 35: Esquema de término discreto en donde las variables  $i, j, k$  corresponden a los nodos en la coordenada radial  $\tilde{r}$ , la coordenada azimutal  $\theta$  y la variable temporal  $\tilde{t}$ , respectivamente. Los perfiles  $\tilde{v}_\theta(\tilde{r})$  y  $\tilde{\omega}_z(\tilde{r})$  varían sólo respecto a la coordenada radial  $\tilde{r}$ , por tal motivo, las variables no son discretizadas con relación a los nodos  $j, k$ .

**3.6.3 Metodología del algoritmo solución:** La metodología de solución propuesta para resolver el sistema de ecuaciones discretizadas es el planteado en la figura 9, el cual fue implementado inicialmente en el capítulo II. A diferencia de la geometría rectangular, en el sistema cilíndrico se requiere de una condición de frontera adicional debido al término convectivo  $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}}$ . En ese sentido, a partir de la condición de frontera de la Ec. (172), se puede establecer que los puntos discretos de la coordenada  $\theta$  anteriores a los nodos en  $j = 1$  ( $\tilde{M}_{r,i}^{1,k}$  y  $\tilde{M}_{\theta,i}^{1,k}$ ) son los puntos con la coordenada  $j$  correspondiente al número de nodos angulares, es decir, los puntos para los cuales  $j = nde\theta$ , lo que se expresa como  $\tilde{M}_{r,i}^{nde\theta,k}$  y  $\tilde{M}_{\theta,i}^{nde\theta,k}$  (para mayor ilustración ver figura 34). De modo que, al discretizar la derivada con respecto a  $\theta$  en los puntos donde  $j = 1$ , se implementa lo expresado en la Ec. (201).

$$\frac{\partial \tilde{M}_r}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0^\circ} \approx \frac{\tilde{M}_{r,i}^{1,k} - \tilde{M}_{r,i}^{nde\theta,k}}{\Delta \theta}. \quad (201)$$

Dicho lo anterior, una vez obtenido los valores de las componentes del campo magnético y la magnetización,  $\tilde{H}_{r,i}^{j,k}$ ,  $\tilde{H}_{\theta,i}^{j,k}$ ,  $\tilde{M}_{r,i}^{j,k}$  y  $\tilde{M}_{\theta,i}^{j,k}$ ; se calcula el valor del torque promedio, de acuerdo con la Ec. (202).

$$\langle \tilde{l}_z \rangle_{t,i}^j = \langle \tilde{M}_{r,i}^j \tilde{H}_{\theta,i}^j - \tilde{M}_{\theta,i}^j \tilde{H}_{r,i}^j \rangle_t. \quad (202)$$

Teniendo en cuenta la característica simétrica de la geometría, se puede verificar que para un valor de  $\tilde{r}$  constante, el torque promedio permanece constante independientemente de la coordenada azimutal  $\theta$ . Por tal motivo, en la ejecución del algoritmo numérico, una vez calculado el valor del torque promedio para todos los puntos del contenedor, se selecciona un valor fijo del nodo  $j$ , el cual representa el valor de la coordenada  $\theta$  escogida por el usuario, sobre la cual se mostrará la predicción de los perfiles. De modo que la Ec (202) puede escribirse como se muestra en la Ec. (203).

$$\langle \tilde{l}_z \rangle_{t,i} = \langle \tilde{M}_{r,i} \tilde{H}_{\theta,i} - \tilde{M}_{\theta,i} \tilde{H}_{r,i} \rangle_t. \quad (203)$$

La Ec. (203) es implementada en la Ec. (195), y de esta forma, se relacionan las condiciones magnéticas del sistema físico con la generación de los perfiles de velocidad  $v_\theta(\tilde{r})$  y  $\tilde{\omega}_z(\tilde{r})$ .

**3.6.4 Validación:** La validación del algoritmo numérico se realiza a través de la solución analítica de orden cero. Debido a lo anterior, se realizó la simulación para una densidad de campo de 0, 1 mT, lo cual, para las características particulares de la muestra de ferrofluido WBF-1, corresponde a un valor de  $\alpha = 0,02$ . En la figura 36 se pueden observar los tres resultados obtenidos con cada uno de los métodos de solución, en donde  $v_\theta$  analitic y  $\omega_z$  analitic corresponden a las soluciones analíticas de orden cero obtenidas a través de las funciones de Bessel, Ec. (188)-(191). Por su parte,  $v_\theta$  lz0 y  $\omega_z$  lz0 representan las soluciones numéricas del problema hidrodinámico, implementando para el

problema magnético el valor de torque de orden cero, Ec. (183). Finalmente,  $v_\theta$  MRSh y  $\omega_z$  MRSh representan las soluciones numéricas del problema ferrohrodinámico. Para obtener esta solución, fue necesario implementar la discretización en diferencias finitas junto con el método numérico de Newton-Raphson, con el fin de resolver las ecuaciones no lineales producto de la discretización de la Ec. (196) y (197).

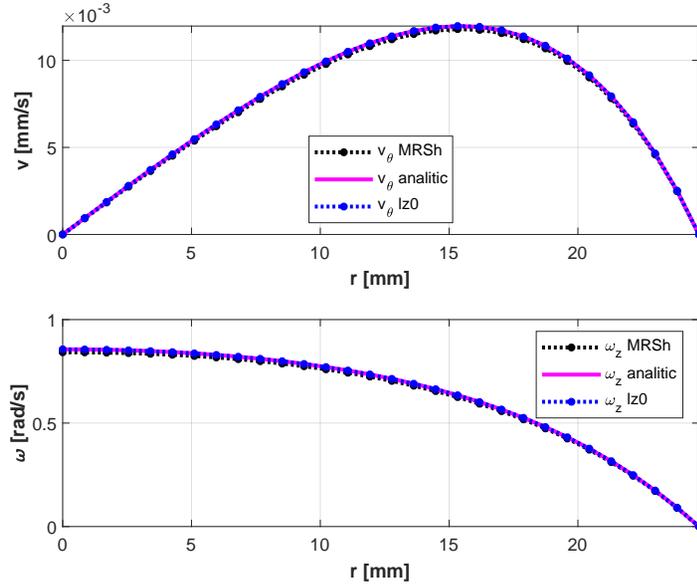


Figura 36: Validación de algoritmo numérico implementado para la solución de problema ferrohrodinámico en geometría cilíndrica, en donde se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 en el sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término  $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$  en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo  $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$  en la ecuación MRSh-74. Muestra de ferrofluido WBF-1.  $\alpha = 0,02$ ,  $\kappa = 3,3$ ,  $f = 150$  Hz.  $v_\theta$  MRSh y  $\omega_z$  MRSh representan los perfiles de velocidad obtenidos a través del algoritmo numérico, tanto para el problema hidrodinámico como para el problema magnético.  $v_\theta$  analytic y  $\omega_z$  analytic representan las soluciones obtenidas analíticamente a través de las funciones de Bessel.  $v_\theta$  lzo y  $\omega_z$  lzo son las soluciones obtenidas, de forma numérica, teniendo en cuenta, para el problema magnético, el valor del torque de orden cero.

**3.6.5 Resultados y análisis:** Una vez validado el algoritmo numérico para la solución del sistema de ecuaciones ferrohrodinámicas, se procede a realizar las simulaciones para diferentes valores de intensidad y frecuencia de campo magnético. El propósito de esta sección es mostrar el comportamiento de los perfiles de velocidad simulados, implementando la TDMAI, y de igual forma, compararlos con los datos experimentales reportados por Torres-Diaz *et al.* [2].

Para estimar el valor de  $\eta'$  a partir de los perfiles de velocidad medidos, en la referencia [2] implementaron el concepto de la velocidad extrapolada en las paredes de un contenedor cilíndrico (figura 33), la cual se obtiene al determinar la vorticidad de orden cero adimensional evaluada en el eje axial,  $\tilde{r} = 0$ , [2].

$$\tilde{U}_{w,0} = \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_{z,0} = \frac{\zeta}{4\eta^* (1 + \tilde{\Omega}^2)} \left\{ 1 - \frac{1 + I_2(\kappa)}{I_0(\kappa)} \right\}. \quad (204)$$

En la Ec. (204),  $\tilde{U}_{w,0}$  es la velocidad adimensional extrapolada a las paredes del contenedor,  $\tilde{\Omega}_{z,0}$  es la componente vertical de la vorticidad,  $I_0$  e  $I_2$  son las funciones de Bessel modificadas de orden cero y dos, respectivamente. Adicionalmente, si en la Ec. (204) se implementa la definición de la susceptibilidad ( $\chi$ ), junto con la escala de velocidad de la Ec. (33) y la definición del parámetro de Langevin ( $\alpha$ ), se obtiene la Ec. (205).

$$\frac{(1 + \tilde{\Omega}^2)}{\tilde{\Omega} R_0} U_{w,0} = \frac{\phi k_B T}{12 V_c \eta^*} \left\{ 1 - \frac{1 + I_2(\kappa)}{I_0(\kappa)} \right\} \alpha^2. \quad (205)$$

En la Ec. (205),  $R_0$  es el radio del contenedor y  $U_{w,0}$  es la velocidad extrapolada a la paredes, con dimensiones. Ahora, implementando la condición de frontera de no deslizamiento en la Ec. (204) y (205), se obtiene la Ec. (206).

$$\eta^* = \eta + \zeta \frac{I_2(\kappa)}{I_0(\kappa)}. \quad (206)$$

De modo que, partiendo de la Ec. (205), al graficar de forma logarítmica el término  $\frac{(1 + \tilde{\Omega}^2)}{\tilde{\Omega} R_0} U_{w,0}$  en función de  $\alpha$ , se obtiene un estimado de la pendiente, relacionada con el término  $\frac{\phi k_B T}{12 V_c \eta^*} \left\{ 1 - \frac{1 + I_2(\kappa)}{I_0(\kappa)} \right\}$ . Valor a partir del cual se determina el parámetro  $\kappa$  y a su vez el valor de  $\eta'$ . De esta manera, Torres-Díaz *et al.* [2], para la muestra de ferrofluido WBF-1 y WBF-2 (ver tabla 2), obtuvo un valor para el parámetro  $\kappa$  de 0,47 y 0,44, respectivamente. Aunque estos son los únicos datos experimentales disponibles en la literatura científica, se debe aclarar que la Ec. (205) está basada en la solución analítica del modelo de la TDMAI, obtenida previamente en la referencia [3]. Por tal motivo, es de suponerse que estas estimaciones pierden validez para valores de  $\alpha \gg 1$ , como los que son usados en las simulaciones de esta investigación. Lo anterior, es una limitación que presentan estos resultados experimentales, al momento de evaluar el desempeño de la ecuación MRSh-74 dentro de la TDMAI, y por lo tanto, no sería apropiado hacer comparaciones directas de estas mediciones con la solución numérica del modelo.

A continuación, en la figura 37 se muestran los perfiles de velocidad simulados para diferentes amplitudes y frecuencias de campo magnético. Ahora, con el fin de obtener perfiles con magnitudes cercanas a las reportadas en [2], en las simulaciones con WBF-1 se implementó un valor de  $\kappa = 3,3$ , aunque en las mediciones experimentales se reportó un valor de  $\kappa = 0,47$ . De forma inicial, en la figura 37, la TDMAI predice un aumento en la magnitud de los perfiles, en la medida que aumenta la intensidad y la frecuencia de campo magnético. Asimismo, se observa, a partir de aproximadamente 6,8 mT, el fenómeno de saturación tanto para la velocidad lineal como la de giro (figura 37). Por lo tanto, las predicciones de los perfiles a través de la TDMAI muestran una tendencia similar a la reportada en los experimentos de Torres-Díaz *et al.* [2], tal como se observa

en la figura 38 (a). Aunque se debe considerar que el valor de  $\kappa$  en las simulaciones fue diferente al reportado en las mediciones experimentales.

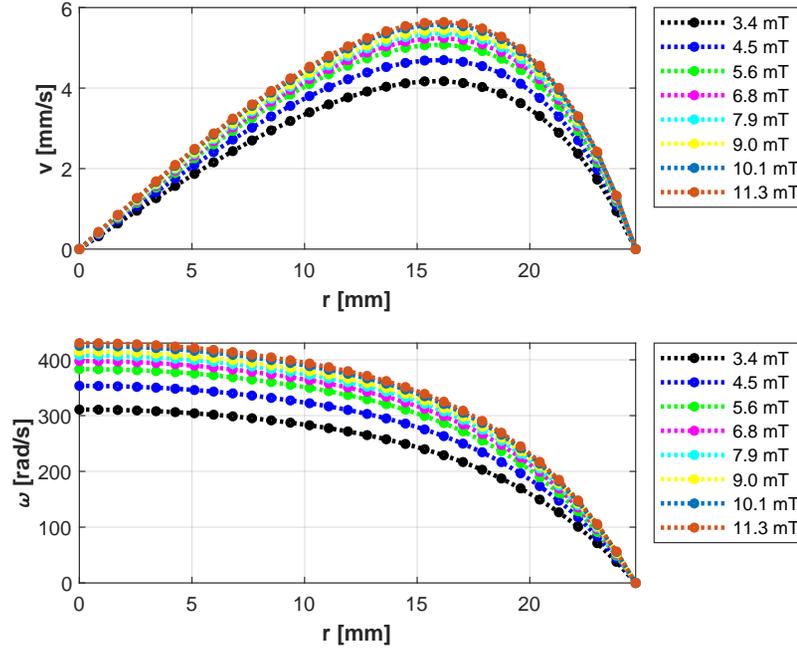


Figura 37: Perfiles de velocidad lineal y de giro en la geometría cilíndrica para WBF-1, bajo el efecto de diferentes amplitudes de campo magnético, a 150 Hz y  $\kappa = 3,3$ . En el problema ferrohrodinámico se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 como parte del sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término  $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$  en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo  $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$  en la ecuación MRSh-74.

De igual manera, se procede a implementar el algoritmo numérico para predecir perfiles de velocidad de la muestra WBF-1, bajo el efecto de campos magnéticos de diferentes frecuencias, pero con amplitud constante. En la figura 39 se puede observar que, al contrario de la saturación presentada en los perfiles por el aumento de la magnitud de  $B$ , al incrementar la frecuencia de rotación del campo, se presenta un aumento sostenido de la magnitud de los perfiles de velocidad predichos por el modelo. Estas predicciones, a excepción de la simulación del perfil a 200 Hz, siguen la misma tendencia de los experimentos reportados por Torres-Diaz *et al.* [2].

En las predicción de los perfiles para esta geometría, se observa que la velocidad lineal máxima,  $\tilde{v}_{\theta, max}$ , se presenta para un valor aproximado de  $\frac{3}{4}$  del radio total del cilindro, a partir de este punto la velocidad empieza a decaer hasta que su valor se hace nulo en la pared del contenedor, tal cual como se estableció en las condiciones de frontera de no penetración y no deslizamiento, Ec. (164). Por tal motivo, se puede deducir que los cambios en la amplitud o en la frecuencia de rotación del campo magnético, no modifican el punto geométrico donde se presenta la velocidad máxima en el sistema. Por otra parte, para los perfiles de velocidad de giro (figura 37 abajo), el punto de

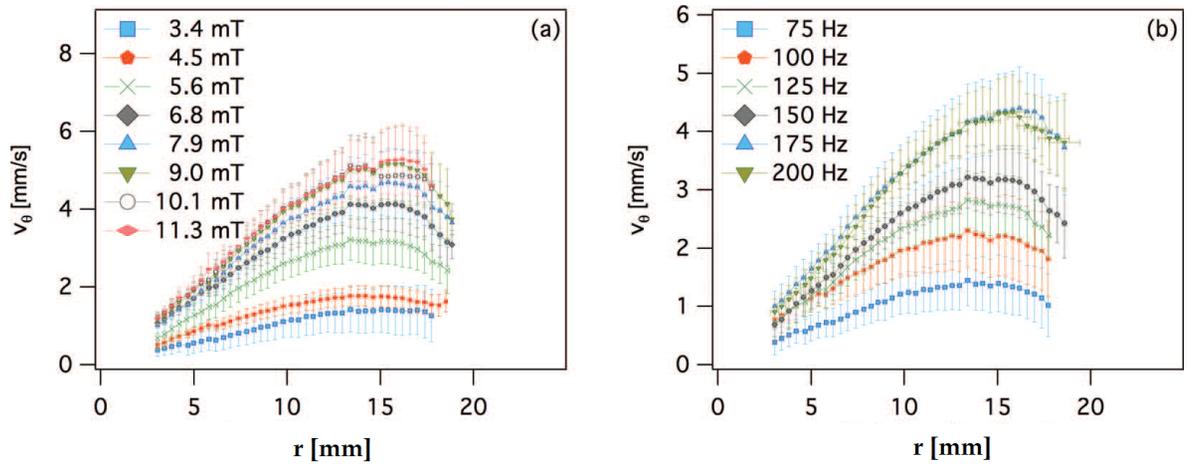


Figura 38: Mediciones experimentales de los perfiles de flujo reportados en [2], para la muestra WBF-1, contenida en geometría cilíndrica, bajo el efecto de diferentes amplitudes y frecuencias de rotación de campo magnético,  $\kappa = 0,47$ . En (a)  $f = 150$  Hz y en (b)  $B = 5,62$  mT.

velocidad máxima,  $\tilde{\omega}_{z,max}$ , se presenta en el centro del cilindro, punto a partir del cual la magnitud de la velocidad de giro disminuye, hasta llegar a cero en las paredes de este mismo.

Con el fin de evaluar el efecto de  $\kappa$  en la predicción de los perfiles, se implementa el algoritmo para la solución numérica del sistema ferrohodinámico, para cinco valores diferentes de esta variable. Los resultados mostrados en la figura 40 permiten observar un desplazamiento del punto de velocidad máxima en los perfiles. De modo que, a medida que aumenta el valor de  $\kappa$ , esto es  $\eta' \rightarrow 0$ , el punto de velocidad máxima se acerca más a las paredes del cilindro, así como también, el valor de la velocidad de giro de las nanopartículas tiende a ser más uniforme a lo largo de la coordenada radial  $\tilde{r}$ .

**3.6.6 Análisis del error:** Inicialmente, se realiza un análisis del error de la metodología de solución analítica y numérica, con el fin de evaluar el efecto de las aproximaciones aplicadas en la referencia [3]. En la tabla 3 se encuentran las suposiciones implementadas en ambas metodologías de solución.

En consecuencia, en la figura 41 se presentan los perfiles de velocidad obtenidos a través de la metodología analítica y numérica, para diferentes valores de campo magnético, esto es,  $\alpha = [0, 016 0, 24 0, 96 1, 3]$ . En la figura 41, al igual que en la figura 25, se observa una mayor discrepancia con el aumento de la intensidad de campo magnético, lo cual se debe al fenómeno de saturación del ferrofluido, situación no considerada en la referencia [3].

Adicionalmente, con el fin de observar las diferencias entre las predicciones de cada método de solución, para un rango mayor de valores de campo magnético, en la figura 42 se presenta la velocidad máxima de los perfiles en función del parámetro de Langevin, en donde también se observa la tendencia descrita en la figura 41.

Por su parte, en la figura 43 se hace una estimación de la diferencia porcentual entre las predicciones analíticas y numéricas de los modelos de TDMAI resueltos. En donde

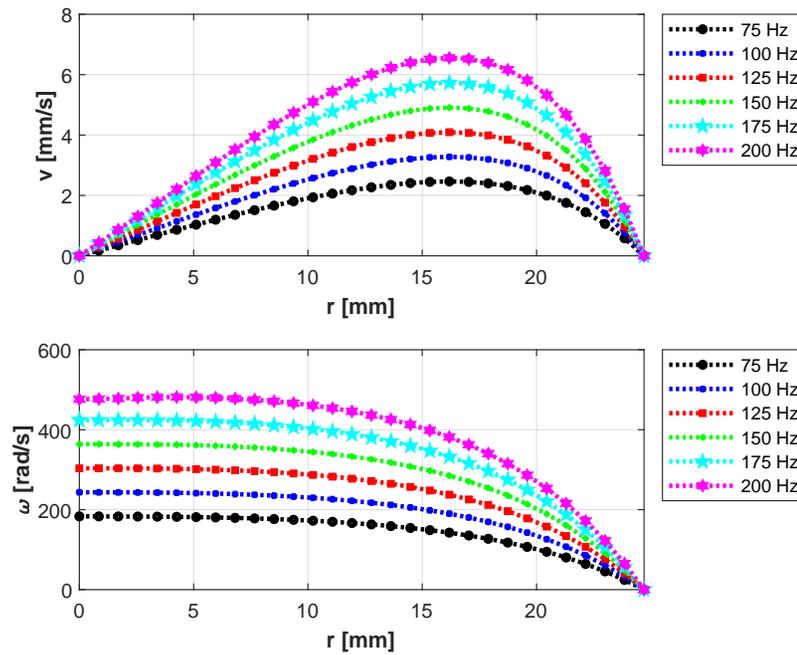


Figura 39: Perfiles de velocidad lineal y de giro en la geometría cilíndrica para WBF-1, bajo el efecto de diferentes frecuencias de campo magnético, a 5,62 mT y  $\kappa = 3,3$ . En el problema ferrohrodinámico se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 como parte del sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término  $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$  en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo  $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$  en la ecuación MRSh-74.

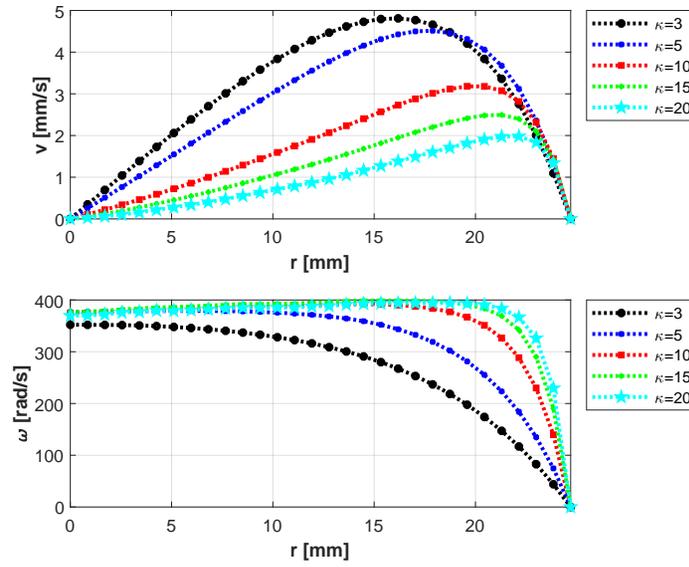


Figura 40: Perfiles de velocidad lineal y de giro en la geometría cilíndrica para WB-F-1, bajo el efecto de diferentes valores de  $\kappa$ , con  $B = 5,62$  mT y  $f = 150$  Hz. En el problema ferrohídrodinámico se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 como parte del sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término  $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$  en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo  $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$  en la ecuación MRSh-74.

se puede observar, al igual que en la figura 27, una tendencia exponencial, inclusive para bajos valores de campo magnético, es decir,  $\alpha < 1$ .

Finalmente, con el propósito de evaluar cuantitativamente el modelo de la TDMAI, en la figura 44 se comparan los valores de velocidad máxima obtenidos en la metodología numérica, con las mediciones experimentales reportadas en [2]. Lo anterior, para valores de  $B = [3,4 \ 4,5 \ 5,6 \ 6,8 \ 7,9 \ 9,0 \ 10,1 \ 11,3]$  mT.

En el perfil de velocidad máxima de la figura 44 se observa que la no concordancia teoría-experimentos, reportada en la referencia [2], persiste. Sin embargo, la solución numérica del modelo de la TDMAI permite observar por primera vez el fenómeno de saturación de los perfiles, para un ferrofluido inmerso en una geometría cilíndrica. Sin embargo, se debe tener en cuenta que los efectos de magnetostricción pueden ser significativos en la presencia de campos magnéticos de intensidades moderadas y altas, como los trabajados en esta investigación. Además, en el modelo de la TDMAI que se resolvió numéricamente, se implementó la expresión  $\mathbf{F} = \mu_0 (\mathbf{M}, \nabla) \mathbf{H}$ , en vez de la Ec. (27). En consecuencia, esta aproximación puede afectar la precisión de los resultados aquí obtenidos, particularmente cuando se aplican intensidades de campo en las que  $\alpha \gg 1$ . Adicionalmente, las estimaciones de  $\kappa$  obtenidas en la referencia [2] fueron realizadas con base en un método que solo es válido para valores de  $\alpha \ll 1$  y  $\Omega \ll 1$ , lo cual difiere de las condiciones en las que se obtuvieron los perfiles experimentales de la figura 44, agregando incertidumbres relacionadas con el valor y la metodología adecuada para la estimación de este parámetro, ya que el valor obtenido en [2] es dos órdenes de magnitud mayor que el reportado por Chaves *et al.* [3] y, a su vez, 13 órdenes mayor que

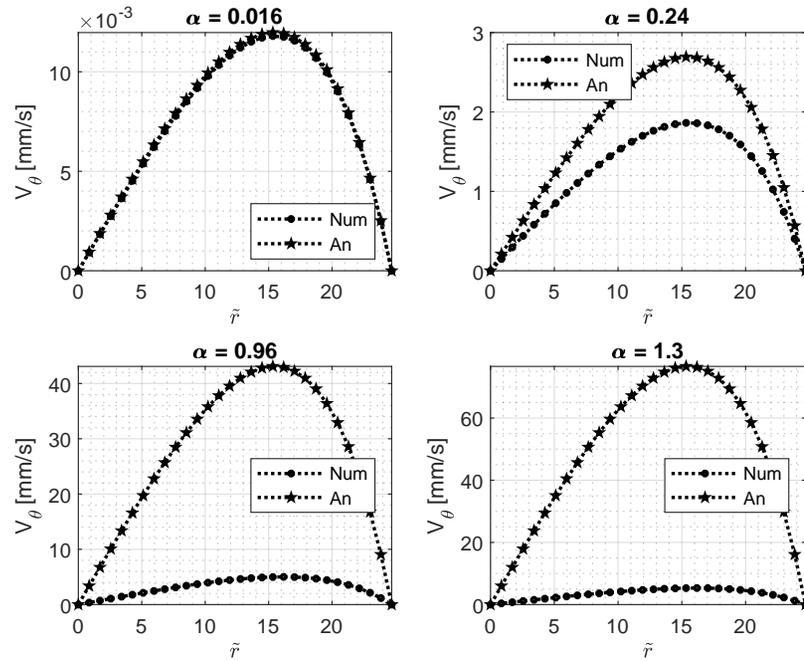


Figura 41: Efecto del parámetro  $\alpha$  en las predicciones de velocidad en un contenedor cilíndrico,  $v_\theta(\tilde{r})$ .  $f = 150$  Hz,  $\kappa = 3.3$ , WBF-1. Num representa la solución obtenida a través del algoritmo numérico y An la solución analítica a través del método de las funciones de Bessel, [3].  $\alpha = [0, 016 \ 0, 24 \ 0, 96 \ 1, 3]$ .

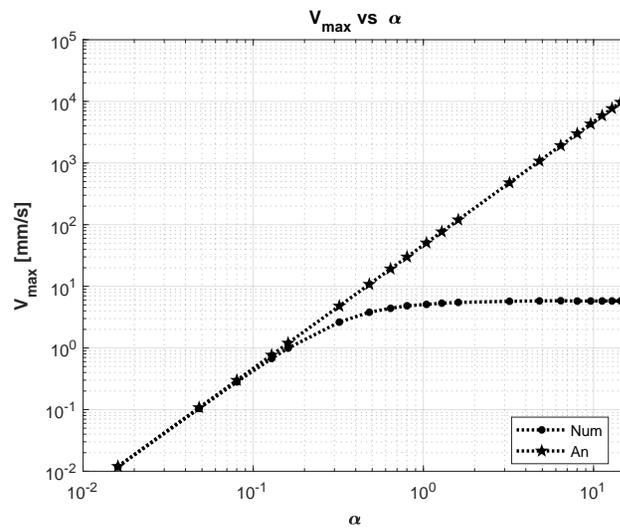


Figura 42: Efecto del parámetro  $\alpha$  en las predicciones de velocidad máxima,  $v_\theta(\tilde{r})$ .  $f = 150$  Hz,  $\kappa = 3, 3$ , WBF-1. Num representa la solución obtenida a través del algoritmo numérico y An la solución analítica a través del método de las funciones de Bessel, [3].

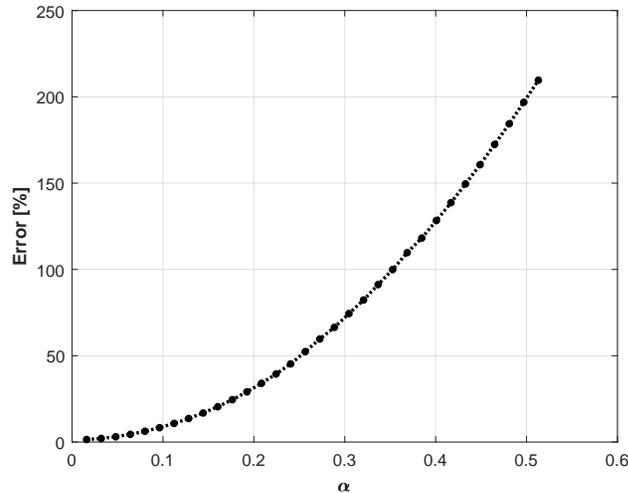


Figura 43: Efecto del parámetro  $\alpha$  en la diferencia porcentual de las predicciones de la velocidad máxima,  $v_\theta(\tilde{r})$ , por medio de la solución analítica y numérica del modelo de la TDMAI.  $f = 150$  Hz,  $\kappa = 3, 3$ , WBF-1.

el obtenido en [48]. Finalmente, aunque en los experimentos de Torres-Díaz *et al.* [2] se demostró que el flujo principal no es debido a la no-homogeneidad del campo magnético, se debe considerar que en sus mediciones se reportaron porcentajes de variación del campo magnético de 5% y 21%, en la dirección radial y axial, respectivamente. Con lo anterior, al suponer  $\tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}} = 0$ , no se están considerando estas contribuciones en la generación de flujo, posible causa de una parte de las discrepancias de los resultados teóricos-experimentales, teniendo en cuenta la naturaleza ferromagnética de las nanopartículas que componen el fluido.

A continuación, se procede a simular los perfiles de velocidad para un rango mayor de valores de  $\kappa$ , esto es,  $\kappa = [10^{-1} - 10^3]$ . Lo anterior, con el fin de determinar los efectos que tiene el parámetro fenomenológico  $\eta'$ , en los valores de velocidad máxima predichos por el modelo. Así pues, en la figura 45 se puede notar un aumento en los valores de velocidad máxima hasta un valor  $\kappa = 3$ . Valor a partir del cual la magnitud disminuye, y finalmente, para  $\kappa \geq 150$ , los valores de velocidad máxima permanecen invariantes. Estos resultados están en concordancia con los presentados en la figura 40, en donde se observa una disminución en la magnitud de los perfiles, ya que los valores de  $\kappa$  se encuentran en el rango en el que disminuye la velocidad máxima, esto es,  $\kappa = [3, 5, 10, 15$  y  $20]$ .

Finalmente, se plantea realizar un estudio de la tendencia en las predicciones de los perfiles de velocidad, para un mayor rango de intensidad y frecuencia de campo magnético, en comparación con los valores implementados por Torres-Díaz *et al.* [2]. Esto, con el fin de explorar, a través de simulaciones, el comportamiento de los perfiles de flujo. Por esta razón, se seleccionó un rango de  $[10^0 - 10^3]$  mT a una frecuencia campo magnético de 150 Hz, y, adicionalmente, un rango de  $[10^1 - 10^3]$  Hz a una densidad de campo magnético de 5,62 mT, con el propósito de observar el comportamiento de la

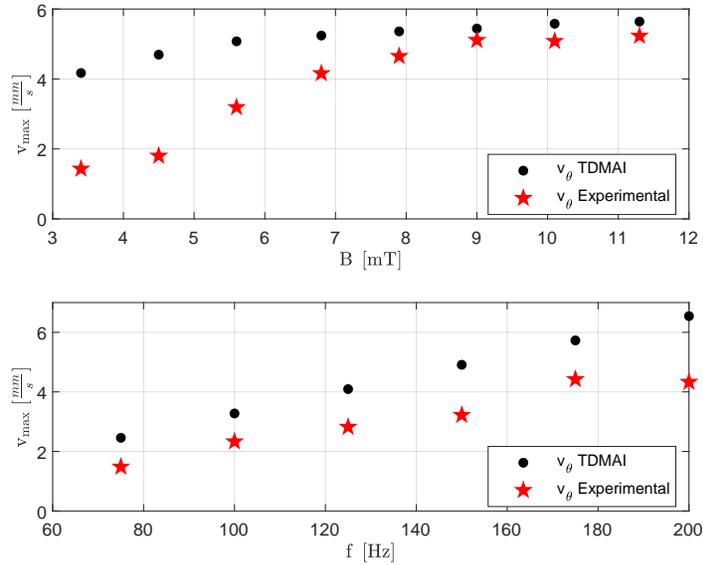


Figura 44: Comparación de los resultados obtenidos con la TDMAI y las mediciones experimentales de la referencia [2], para la geometría de la figura 33. En las simulaciones numéricas se implementó la ecuación MRSh-74,  $\kappa = 3,3$  y WBF-1.  $v_{\theta}$  TDMAI representa la solución teórica y  $v_{\theta}$  Experimental las mediciones reportadas en [2]. Arriba:  $f = 150$  Hz. Abajo:  $B = 5,62$  mT.

velocidad máxima en los perfiles de flujo de la muestra WBF-1, obteniendo así los resultados de las figuras 46 y 47. En la figura 46 se puede observar que, al igual que en el contenedor de geometría rectangular, en el contenedor cilíndrico se presenta el fenómeno de saturación, para valores en los que  $\alpha \geq 10^0$ . El anterior resultado indica que el fenómeno de saturación se presenta de forma muy similar, independientemente de la geometría del contenedor en estudio. Para mayor referencia, comparar las figuras 32 y 46.

### 3.7 OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

El aporte realizado en este capítulo fue la implementación de la TDMAI para predecir perfiles de velocidad lineal y de giro,  $\tilde{v}_{\theta}(\tilde{r})$  y  $\tilde{\omega}_z(\tilde{r})$ , para muestras de ferrofluidos contenidas en una geometría cilíndrica de longitud axial  $\tilde{z}$  infinita, bajo el efecto de campos magnéticos rotativos en los que  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ . La base para estos resultados fueron los trabajos realizados de manera previa por Chaves *et. al* [3, 4] para esta misma geometría, donde fueron aplicados campos en los que  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ , debido a las limitaciones que presentó el método implementado para la solución al sistema de ecuaciones diferenciales del problema ferrodinámico. No obstante, dichos trabajos permitieron establecer una metodología para la solución del sistema de ecuaciones ferrodinámicas en esta investigación. Dicho lo anterior, después de realizar un análisis

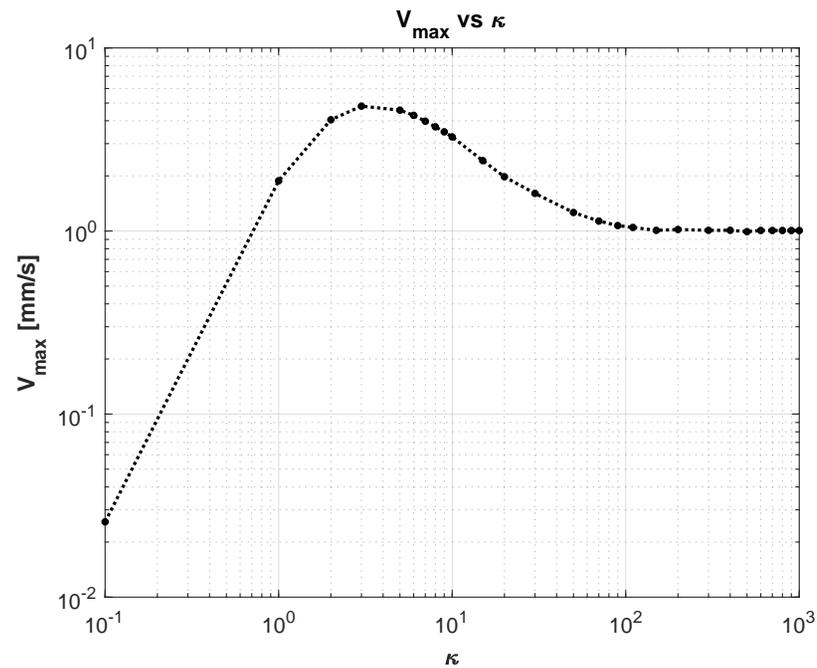


Figura 45: Velocidad máxima en función de la constante  $\kappa$ , implementando la TDMAI para la muestra de ferrofluido WBF-1, contenida en una geometría cilíndrica de longitud axial infinita.  $f = 150$  Hz y  $B = 5,62$  mT. En el problema ferrohídrodinámico se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 como parte del sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término  $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$  en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo  $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$  en la ecuación MRSh-74.

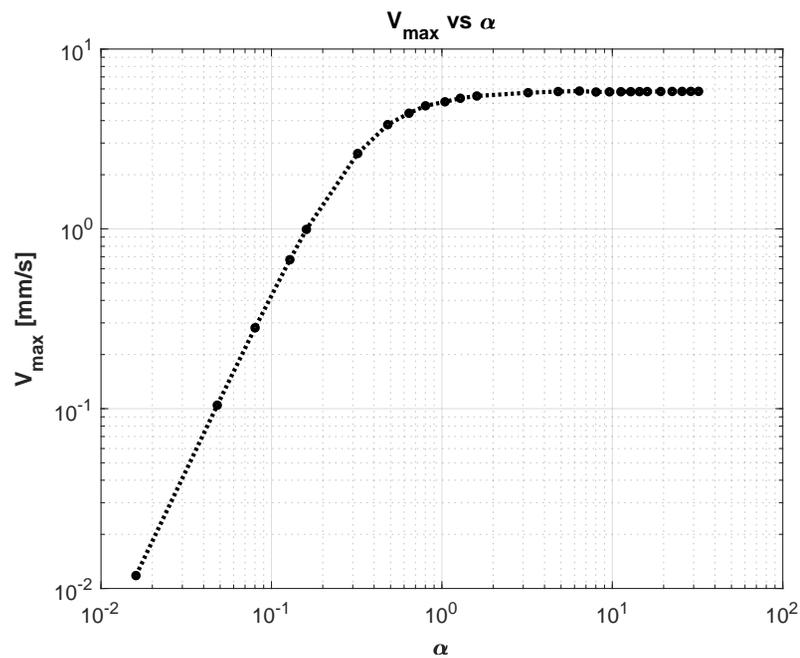


Figura 46: Velocidad máxima en función del parámetro de Langevin  $\alpha$ , implementando la TDMAI, para la muestra de ferrofluido WBF-1, contenida en una geometría cilíndrica de longitud axial infinita.  $f = 150$  Hz;  $\kappa = 3,3$ . En el problema ferrohídrico se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 como parte del sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término  $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$  en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo  $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$  en la ecuación MRSh-74.

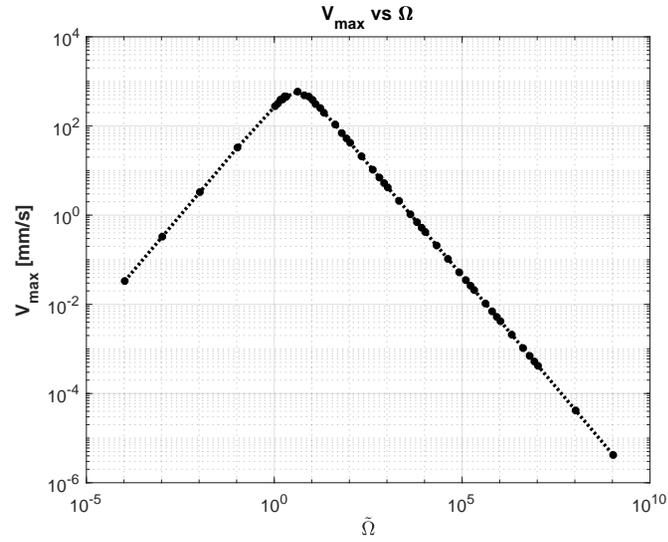


Figura 47: Velocidad de traslación y de giro máxima en función de la frecuencia adimensional  $\Omega\tau$ , implementando la TDMAI, para la muestra de ferrofluido WBF-1, contenida en una geometría cilíndrica de longitud axial infinita.  $B = 5,62$  mT;  $\kappa = 3,3$ . En el problema ferrodinámico se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 como parte del sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término  $\nabla \cdot (\chi\mathbf{M} + \mathbf{H})$  en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo  $\Omega\varepsilon\mathbf{v}\nabla\mathbf{M}$  en la ecuación MRSh-74.

a los resultados obtenidos en este capítulo se puede observar y concluir que:

- Para campos magnéticos en los que  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ , la TDMAI predice perfiles de flujo al reemplazar la ecuación Sh-72, Ec. (43), por la ecuación de magnetización MRSh-74, Ec. (44); ya que para  $\alpha > 3$  ( $\varepsilon \neq 0$ ) en la muestra WBF-1, al implementar la ecuación Sh-72, el algoritmo numérico no presentó convergencia. Por tal motivo, no fue posible determinar los perfiles para estas condiciones. En consecuencia, se descartó el uso de la ecuación Sh-72 en el modelo, para campos magnéticos en los que  $\alpha \gg 1$  y  $\Omega \gg 1$ .
- A diferencia de la geometría rectangular, en la geometría cilíndrica se presenta un torque instantáneo uniforme, tanto en la dirección radial como en la azimutal, lo cual está relacionado con la suposición de uniformidad del campo magnético para este tipo de geometría ( $\tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$ ).
- La intensidad y la frecuencia de rotación del campo magnético no influyen en el punto geométrico en el que se presenta la velocidad máxima de las predicciones.
- Para la muestra WBF-1, en los resultados de la figura 45, se puede observar que la magnitud del flujo del ferrofluido aumenta cuando el valor de  $\kappa$  se encuentra en el rango de 0 a 3. A partir de dicho valor, la magnitud de la velocidad máxima disminuye, de forma menos pronunciada que en el aumento inicial, hasta un valor aproximado de  $\kappa = 150$ . Finalmente, se presenta lo que se podría denominar una

invarianza en la velocidad pico de los perfiles, ya que esta magnitud permanece constante para valores de  $\kappa$  mayores a 150. Estos resultados están en concordancia con lo reportado por Chaves-Guerrero *et al.* [31] para un ducto rectangular, lo cual indica que el comportamiento de los perfiles en función de la variable  $\kappa$  (y en consecuencia de  $\eta'$ ) es independiente de la geometría del contenedor de la muestra de ferrofluido.

- Al aumentar el valor de la constante  $\kappa$ , se genera un desplazamiento del punto geométrico donde se presenta la velocidad máxima, ubicándolo en zonas más cercanas a la pared del cilindro. En consecuencia, se presenta una caída de velocidad más pronunciada, desde el valor de velocidad máxima hasta la velocidad en la pared del cilindro. Por lo tanto, es notorio que el punto geométrico de velocidad máxima en los perfiles de velocidad lineal es dependiente del valor de  $\kappa$ , lo cual establece uno de los efectos del “*spin viscosity*” ( $\eta'$ ) en los perfiles obtenidos.
- Al aumentar la intensidad de campo magnético, se presenta, al igual que lo observado en la geometría rectangular, el fenómeno de saturación en los perfiles de velocidad, es decir, existe un valor de intensidad de campo magnético para el cual, los aumentos en la intensidad del campo externo no producen un aumento en la magnitud de la velocidad del ferrofluido. En ese sentido, se puede observar que en la muestra de ferrofluido WBF-1, el fenómeno de saturación se presenta para valores de  $\alpha \geq 1$  (ver figura 46). Estos resultados permiten intuir que el fenómeno de saturación está más relacionado con las características del ferrofluido, que con la geometría del contenedor de este mismo.
- Por el contrario, al aumentar el valor de la frecuencia de rotación del campo magnético, se presenta un aumento sostenido de los valores de velocidad máxima en los perfiles, hasta un valor crítico en el que  $\tilde{\Omega} \approx 3$ , como puede ser observado en la figura 47. A partir de dicho valor de frecuencia, se presenta una disminución en los valores de velocidad máxima. Lo anterior sugiere que, a partir de cierto valor crítico de frecuencia de rotación del campo, los dominios magnéticos de las nanopartículas pierden la capacidad de seguir la dirección del campo magnético externo, debido a la velocidad de este último.
- Los resultados obtenidos a partir de la implementación del algoritmo, para la solución numérica de las ecuaciones de la TDMAI, describen, de forma cualitativa para  $\alpha \gg 1$ , una tendencia similar a la presentada en las mediciones de velocidad reportadas por Torres-Diaz *et al.* [2], para un contenedor cilíndrico, tanto para las variaciones de densidad como para las variaciones de frecuencia de rotación del campo magnético, tal y como se puede observar en los perfiles de velocidad obtenidos y presentados en las figuras 37 y 39.
- Los resultados obtenidos al simular la muestra WBF-1 con un valor de  $\kappa = 3,3$ , presentan un comportamiento bastante similar (tanto cualitativa como cuantitativamente), a las mediciones reportadas por Torres-Diaz *et al.* [2]. En donde, para la misma muestra de ferrofluido, se reportó un valor de  $\kappa = 0,47$ . Esta réplica

parcial de resultados sugiere la necesidad de recalcular experimentalmente el valor de la variable  $\kappa$ , con el fin de obtener un mejor análisis de los datos obtenidos, teniendo en cuenta que el cálculo realizado, en el trabajo de Torres-Díaz *et al.* [2], está basado en la suposición de campos magnéticos de baja intensidad ( $\alpha \ll 1$ ), lo cual difiere de las condiciones del experimento realizado por dichos autores.

- Las discrepancias que persisten entre la TDMAI y las mediciones experimentales pueden ser reducidas al considerar los efectos de magnetostricción, Ec. (27), en el balance de momento lineal, Ec. (24). Teniendo en cuenta que estos fenómenos son más relevantes para valores de  $\alpha \gg 1$ . Adicionalmente, se recomienda integrar al modelo de la TDMAI los aportes de los gradientes de campo magnético, esto es,  $\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}} \neq \mathbf{0}$ , con el fin de evaluar los efectos de la no-homogeneidad de la distribución del campo en la generación de los perfiles de velocidad.
- La solución numérica del modelo, para  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ , pudo ser obtenida, debido a la implementación de una condición de frontera en el centro del cilindro. Dicha condición de frontera se estableció con base en la referencia [59], en la que se determina el valor nulo de la componente radial del flux de campo magnético, a lo largo del eje longitudinal del cilindro en  $\tilde{r} = 0$ . En otras palabras, en el centro del contenedor del ferrofluido se debe cumplir que

$$\tilde{H}_r |_{\tilde{r}=0} = -\chi \tilde{M}_r |_{\tilde{r}=0} .$$

- En resumen, el aporte realizado en este capítulo fue la implementación de una condición de frontera en el eje axial del cilindro, la cual no había sido considerada anteriormente, y con la cual fue posible determinar los perfiles de velocidad para campos magnéticos en los que  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ . De esta forma, se logró demostrar que la TDMAI predice la saturación de los perfiles para esta geometría, lo cual no había sido demostrado anteriormente, puesto que el modelo implementado por otros autores no considera este efecto, al suponer y aproximar que  $\mathbf{M}_{\mathbf{eq}} = \chi \mathbf{H}$  y  $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\nabla} \cdot (\chi \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{H}}) = \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{H}}$ . Estas suposiciones han sido realizadas por otros autores, con el fin de evitar la no linealidad en el sistema de ecuaciones resultante. Por tal motivo, los datos obtenidos en este capítulo permiten realizar por primera vez, una comparación entre la medición experimental de los perfiles y los resultados de del modelo de la TDMAI, para una muestra de ferrofluido contenida en una geometría cilíndrica, bajo el efecto de campos magnéticos rotativos en los que  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ . Ya que en los modelos que han sido resueltos por otros autores, solo aplican para  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ , lo cual no coincide con las condiciones experimentales de los datos reportados en la literatura científica.

## CAPÍTULO 4

---

### PERFILES DE VELOCIDAD DE FERROFLUIDOS BAJO EL EFECTO DE CAMPOS MAGNÉTICOS ROTATIVOS DE BAJA Y ALTA INTENSIDAD, CONTENIDOS EN UNA GEOMETRÍA ANULAR

---

#### 4.1 INTRODUCCIÓN

En una geometría anular, a diferencia de una geometría cilíndrica, la intensidad de campo magnético no es uniforme, es decir,  $\nabla\tilde{\mathbf{H}} \neq \mathbf{0}$ . Por tal motivo, el término relacionado con la fuerza magnética,  $\mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla\mathbf{H}$ , es diferente de cero. Por lo tanto, se requiere integrar el término  $\mu_0 M_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial H_\theta}{\partial \theta} + \frac{H_r}{r} \right)$  dentro de la ecuación de balance de momento lineal, Ec. (161), el cual fue despreciado en el contenedor cilíndrico del capítulo 3. Al ingresar dicho término en las ecuaciones del problema hidrodinámico, se debe implementar la condición de frontera del campo magnético  $H_\theta$ , con relación a la coordenada azimutal  $\theta$ , tal como se estableció anteriormente en la Ec. (172).

Adicionalmente, en el problema magnético, se requiere de las condiciones de frontera en el centro y en las paredes del cilindro interno, como también, en las paredes del cilindro externo, por donde circula una densidad de corriente superficial, fuente del campo magnético rotativo. Al igual que en la geometría cilíndrica, las condiciones de frontera están relacionadas con la continuidad de la componente normal de la densidad de campo magnético  $B_r$ , y el salto de la componente azimutal de la intensidad campo magnético  $H_\theta$ , [43].

El objetivo principal de este capítulo es obtener la solución numérica del modelo ferrohídrodinámico de la TDMAI, implementando la ecuación MRSh-74, para campos magnéticos en los que  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ , con el fin de observar el desempeño del modelo, con base en las mediciones experimentales de Torres-Díaz *et al* [2]. Todo lo anterior, para una geometría anular.

#### 4.2 DESCRIPCIÓN FÍSICA DEL SISTEMA

El sistema físico consta de una muestra de ferrofluido, inmersa en el espacio anular de dos cilindros concéntricos estáticos, que son de longitud axial infinita. Uno ubicado en

la región  $r \leq R_1$  y el otro ubicado en la región  $R_2 \leq r \leq R_3$  (ver figura 48). Las paredes de la geometría coaxial están realizadas con material no magnético de permeabilidad magnética relativa  $\mu_r$ . La fuente del campo magnético rotativo, al igual que en la geometría cilíndrica, es una densidad de corriente sinusoidal  $\mathbf{K}_s = K \cos(\tilde{t} - \theta) \mathbf{i}_z$ , en las paredes externas de la geometría, es decir,  $r = R_3$ . Las líneas discontinuas de la figura 48-ii) corresponden a un bosquejo general de los perfiles de la magnitud de la velocidad lineal,  $v_\theta(r)$ , propuestos de manera previa en las referencias [6, 17]. Con el fin de analizar el fenómeno del flujo, el sistema físico de estudio se divide en tres regiones: la región 1 corresponde al cilindro interno no magnético en  $r \leq R_1$ , la región 2 corresponde al ferrofluido ubicado en el espacio anular donde  $R_1 \leq r \leq R_2$  y, finalmente, la región 3 corresponde al cilindro externo ubicado en  $R_2 \leq r \leq R_3$ .

Con el fin de simplificar la solución del sistema magnético, se supone que  $R_2 = R_3$ , despreciando, de esta forma, el espesor del cilindro externo que separa al espacio anular (donde se encuentra el ferrofluido), con la densidad de corriente que produce el campo magnético rotativo, lo cual reduce el análisis del sistema a la región 1 y 2. Siendo así, la región 1: el espacio físico en el que se encuentra el cilindro interno del contenedor anular, es decir,  $r \leq R_1$ , y por su parte, la región 2: el lugar en el que se encuentra contenido el ferrofluido, esto es,  $R_1 \leq r \leq R_2$ . Ahora, con referencia a los valores adimensionales del radio del contenedor ( $\tilde{r}$ ), y con el fin de implementar las expresiones adimensionales del modelo ferrohodinámico, se tiene que la región 1 y 2 están delimitadas por las zonas en las que  $\tilde{r} \leq \gamma$  y  $\gamma \leq \tilde{r} \leq 1$ , respectivamente, siendo  $\gamma = \frac{R_1}{R_2}$ .

De manera similar a las geometrías estudiadas anteriormente, las bases de los resultados reportados en este capítulo son las establecidas en las referencias [4, 6, 17, 55].

### 4.3 ECUACIONES VECTORIALES GOBERNANTES

**4.3.1 Problema hidrodinámico:** Las ecuaciones que forman el problema hidrodinámico del contenedor anular, al igual que en la geometría cilíndrica, son la Ec. (30) y (31). Considerando el término de la fuerza magnética,  $\frac{\zeta}{\Omega_f \eta} \tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}}$ , el cual es diferente de cero (en el contenedor anular), debido a la no uniformidad del campo magnético [4]. De modo que, este término, en la dirección del movimiento del ferrofluido, viene dado por la Ec. (207).

$$\tilde{f}_\theta = \left( \tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}} \right)_\theta = \tilde{M}_r \frac{\partial \tilde{H}_\theta}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{M}_\theta}{\tilde{r}} \left( \frac{\partial \tilde{H}_\theta}{\partial \theta} + \tilde{H}_r \right). \quad (207)$$

Como se puede observar en la Ec. (207), la fuerza magnética es dependiente del tiempo, ya que  $\tilde{H}_r$  y  $\tilde{H}_\theta$  son funciones del tiempo  $\tilde{t}$ . Por tal motivo, para la solución del sistema de ecuaciones hidrodinámicas se requiere, al igual que en la geometría cilíndrica, calcular los valores promedio, tanto para la fuerza magnética como para el torque magnético. Estos valores se determinan con la ayuda de la Ec. (86).

**4.3.2 Condiciones de frontera del problema hidrodinámico:** Para las condiciones de frontera, se debe tener en cuenta la simetría axial en los perfiles de velocidad.

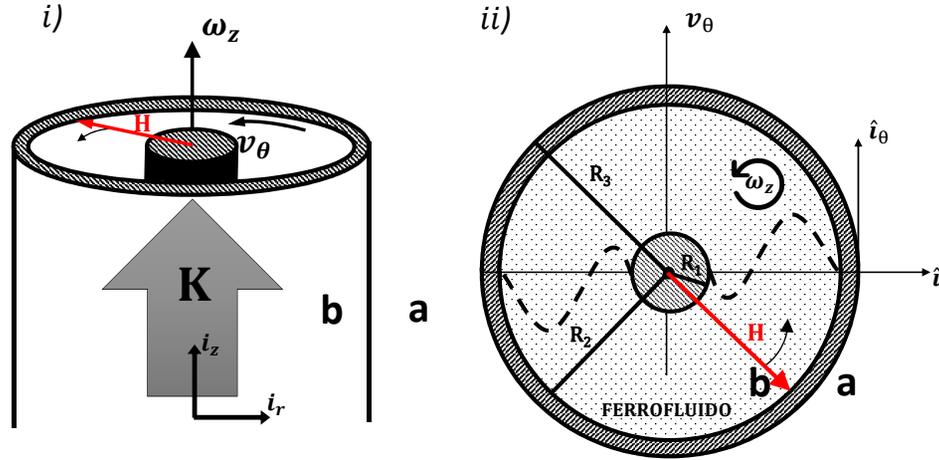


Figura 48: Geometría anular (cilindros coaxiales no magnéticos) de longitud axial infinita en la dirección  $i_z$  y permeabilidad magnética relativa  $\mu_r$ , en donde *i*) representa la vista frontal y *ii*) la vista superior de la geometría anular. Con el fin de simplificar la solución del sistema magnético se desprecia el grosor del cilindro externo, es decir, se asume que  $R_2 = R_3$ . El campo magnético rotativo  $\mathbf{H}$  gira alrededor del eje axial  $\tilde{z}$ , y es generado por el devanado de un motor de inducción trifásico de dos polos, el cual se modela a través una distribución de corriente superficial,  $\mathbf{K}_s = K \cos(\tilde{t} - \theta) \mathbf{i}_z = \Re \{K e^{j(\tilde{t} - n\theta)}\} \mathbf{i}_z$ , en las paredes del cilindro externo ( $r = R_2$ ).

Asimismo, se debe implementar la condición frontera de no deslizamiento y no penetración, en las paredes del cilindro interno ( $\tilde{r} \leq \gamma$ ) y externo ( $\gamma \leq \tilde{r} \leq 1$ ). Lo anterior, se resume en la Ec. (208).

$$\begin{aligned} \tilde{v}_\theta(\theta) &= \tilde{v}_\theta(\theta + 2\pi) & \tilde{\omega}_z(\theta) &= \tilde{\omega}_z(\theta + 2\pi), \\ \tilde{v}_\theta(\gamma) &= 0 & \tilde{v}_\theta(1) &= 0, \\ \tilde{\omega}_z(\gamma) &= 0 & \tilde{\omega}_z(1) &= 0. \end{aligned} \quad (208)$$

En la Ec. (208),  $\gamma = \frac{R_1}{R_2}$  y representa el valor adimensional del radio, en donde se encuentra la frontera entre el cilindro interno y la muestra de ferrofluido.

**4.3.3 Problema magnético:** Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la geometría rectangular y cilíndrica (capítulo 2 y 3), en el problema magnético se implementa la ecuación MRSh-74, con el fin de determinar los perfiles de velocidad, para valores de campo magnético en los que  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ . Por tal motivo, el sistema magnético está compuesto por la Ec. (13), (44)-(46).

**4.3.4 Condiciones iniciales magnéticas:** Las condiciones iniciales que gobiernan el problema magnético son  $\tilde{M}_r(\tilde{r}, \theta, 0) = 0$  y  $\tilde{M}_\theta(\tilde{r}, \theta, 0) = 0$ , debido que al energizar la fuente de campo magnético, la magnetización del ferrofluido no experimenta saltos

escalonados en el tiempo. Ahora, con relación a la intensidad de campo magnético  $\mathbf{H}$ , no se requieren de condiciones iniciales, ya que en el problema magnético no se presentan derivadas temporales para las componentes de esta variable ( $\tilde{H}_r$  y  $\tilde{H}_\theta$ ).

**4.3.5 Condiciones de frontera magnéticas:** Las condiciones de frontera del problema magnético son las mismas Ec. (66) y (67), implementadas en el capítulo 3, pero adaptadas al sistema físico de la geometría anular de la figura 48. Dichas condiciones de frontera se muestran en la Ec. (209)-(212).

$$\tilde{B}_r|_{\tilde{r}=0} = 0, \quad (209)$$

$$\tilde{B}_r|_{\tilde{r}=\gamma}^{II} - \tilde{B}_r|_{\tilde{r}=\gamma}^I = 0, \quad (210)$$

$$\tilde{H}_\theta|_{\tilde{r}=\gamma}^{II} - \tilde{H}_\theta|_{\tilde{r}=\gamma}^I = 0, \quad (211)$$

$$\tilde{H}_\theta|_{\tilde{r}=1} = -\cos(\tilde{t} - \theta). \quad (212)$$

En la Ec. (209) se tiene en cuenta la continuidad del flujo de campo magnético, en la componente radial, alrededor de todo el eje axial [59]. De igual forma, las Ec. (210) y (211) están relacionadas con la continuidad de la densidad de campo magnético en la dirección radial, al igual que la continuidad de la componente azimutal de la intensidad de campo magnético, debido a la no existencia de corriente eléctrica en esta parte del sistema en estudio ( $\tilde{r} = \gamma$ ) [9]. Por su parte, la Ec. (212) es el resultado del salto en la magnitud de la intensidad de campo magnético tangencial, en la pared externa del contenedor ( $\tilde{r} = 1$ ), por donde circula la densidad de corriente, fuente generadora del campo magnético rotativo [9].

## 4.4 SOLUCIÓN PARA $\alpha \ll 1$

Al igual que en las otras geometrías tratadas en este documento, la base de los resultados de esta investigación fueron los trabajos reportados por Chaves *et al* [4, 6, 17], quienes determinaron de forma analítica los perfiles de velocidad de ferrofluidos contenidos en una geometría anular, bajo el efecto de campos magnéticos en los que  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ . En la metodología implementada en la referencia [4, 6, 17], los autores despreciaron todos aquellos términos dependientes de la magnitud del campo magnético aplicado, ya que  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Asimismo, se tuvo en cuenta que  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ , bajo la suposición de campos de baja amplitud. A continuación, con el propósito de contextualizar la validación del algoritmo que será implementado para  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ , se muestra, de forma general, el procedimiento para obtener la solución reportada en el trabajo de Chaves *et al* [4, 6, 17].

**4.4.1 Problema magnético:** Primeramente, a partir de la forma funcional de la densidad de corriente superficial en la pared del cilindro externo, Ec. (160), se supone que el campo magnético y la magnetización generados en la región 2 se pueden expresar como:

$$\tilde{\mathbf{H}}_2(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}) = \Re \left\{ \left[ \hat{H}_{r,2}(\tilde{r}) \mathbf{i}_r + \hat{H}_{\theta,2}(\tilde{r}) \mathbf{i}_\theta \right] e^{j(\tilde{t}-\theta)} \right\}, \quad (213)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_2(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}) = \Re \left\{ \left[ \hat{M}_{r,2}(\tilde{r}) \mathbf{i}_r + \hat{M}_{\theta,2}(\tilde{r}) \mathbf{i}_\theta \right] e^{j(\tilde{t}-\theta)} \right\}, \quad (214)$$

en donde  $\hat{H}_{r,2}$ ,  $\hat{H}_{\theta,2}$ ,  $\hat{M}_{r,2}$  y  $\hat{M}_{\theta,2}$  representan las componentes complejas del campo magnético y la magnetización en la región 2 (figura 48). Adicionalmente, para la solución a campos bajos, Chaves *et al* [4, 6] implementaron la ecuación Sh-72, la cual, para campos magnéticos en los que  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ , se puede expresar como lo establecido en la Ec. (173). En consecuencia, al resolver la Ec. (173), las componentes complejas de la magnetización se expresan en la Ec. (175), las cuales también fueron implementadas en el contenedor cilíndrico. De igual manera, considerando las leyes de Maxwell y teniendo en cuenta la Ec. (213), las ecuaciones diferenciales que describen la intensidad de campo magnético fueron presentadas en la Ec. (176). Así pues, al resolver la Ec. (176) para la geometría de la figura 48, se obtiene la Ec. (215) y (216).

$$\hat{H}_r^I = C_1^I + \frac{C_2^I}{\tilde{r}^2} \quad y \quad \hat{H}_\theta^I = -j \left( C_1^I - \frac{C_2^I}{\tilde{r}^2} \right), \quad (215)$$

$$\hat{H}_r^{II} = C_1^{II} + \frac{C_2^{II}}{\tilde{r}^2} \quad y \quad \hat{H}_\theta^{II} = -j \left( C_1^{II} - \frac{C_2^{II}}{\tilde{r}^2} \right). \quad (216)$$

En las Ec. (215) y (216), los súper índices  $I$  y  $II$  indican que está relacionado con la región 1 y 2 del sistema físico, respectivamente. Teniendo en cuenta que el campo magnético debe permanecer finito en toda la geometría de estudio, para la región 1 ( $r \leq \gamma$ ), es necesario que  $C_2^I = 0$ . Por lo tanto, las componentes complejas de la intensidad de campo magnético en esta región están dadas por la Ec. (217).

$$\hat{H}_r^I = C_1^I \quad y \quad \hat{H}_\theta^I = -jC_1^I. \quad (217)$$

A continuación, se aplican las condiciones de frontera magnética en las interfases,  $\tilde{r} = \gamma$  y  $\tilde{r} = 1$ , para determinar el valor de las constantes  $C_1^{II}$  y  $C_2^{II}$ . Estas condiciones de frontera son expresadas en la Ec. (218)-(220).

$$\mu_p \hat{H}_r^I(\gamma) = \hat{H}_r^{II}(\gamma) + \chi \hat{M}_r^{II}(\gamma), \quad (218)$$

$$\hat{H}_\theta^I(\gamma) = \hat{H}_\theta^{II}(\gamma), \quad (219)$$

$$\hat{H}_\theta^{II}(1) = -1. \quad (220)$$

Reemplazando la Ec. (216) y (217) en las Ec. (218)-(220), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}\mu_r C_1^I &= \mu_0 \left( C_1^{II} + \frac{C_2^{II}}{\gamma^2} \right) \left( \frac{1 + j\tilde{\Omega} + \chi}{1 + j\tilde{\Omega}} \right), \\ C_1^I &= C_1^{II} - \frac{C_2^{II}}{\gamma}, \\ C_1^{II} - C_2^{II} &= -j.\end{aligned}\quad (221)$$

Con base en el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas de la Ec. (221), se determinan los valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$  de ambas regiones, y a su vez, en la Ec. (222) y (223), se expresan las componentes complejas de la intensidad de campo magnético.

$$\hat{H}_r(\tilde{r}) = \frac{-j}{1 + \alpha + \beta} \left( 1 - \frac{\alpha + j\beta}{\tilde{r}^2} \right), \quad (222)$$

$$\hat{H}_\theta(\tilde{r}) = \frac{-1}{1 + \alpha + \beta} \left( 1 + \frac{\alpha + j\beta}{\tilde{r}^2} \right), \quad (223)$$

en donde

$$\alpha \equiv \frac{\mu_0^2 [(1 + \chi)^2 + \tilde{\Omega}^2] - \mu_p^2 (1 + \tilde{\Omega}^2)}{[\mu_0 (1 + \chi) + \mu_p]^2 + \tilde{\Omega}^2 (\mu_p + \mu_0)^2} \gamma^2, \quad (224)$$

$$\beta \equiv \frac{2\chi\mu_p\mu_0\tilde{\Omega}}{[\mu_0 (1 + \chi) + \mu_p]^2 + \tilde{\Omega}^2 (\mu_p + \mu_0)^2} \gamma^2. \quad (225)$$

De acuerdo con la Ec. (222) y (223), se puede observar, a diferencia de lo obtenido para la geometría cilíndrica, que la intensidad de campo magnético en un contenedor anular es dependiente del radio, es decir, no es uniforme. Entonces, al reemplazar las Ec. (222)-(225) en la Ec. (175), se determinan las componentes complejas de la magnetización de orden cero, las cuales son expresadas en la Ec. (226).

$$\hat{M}_r = \frac{\frac{-j}{1 + \alpha + \beta} \left( 1 - \frac{\alpha + j\beta}{\tilde{r}^2} \right)}{1 + j\tilde{\Omega}} \quad \text{y} \quad \hat{M}_\theta = \frac{\frac{-1}{1 + \alpha + \beta} \left( 1 + \frac{\alpha + j\beta}{\tilde{r}^2} \right)}{1 + j\tilde{\Omega}}. \quad (226)$$

Por su parte, la fuerza magnética promedio de orden cero,  $\langle \tilde{f}_\theta \rangle_{t,0}$ , se puede obtener a partir de la siguiente expresión [4, 6]:

$$\langle \tilde{f}_\theta \rangle_{t,0} = \frac{1}{1 + j\tilde{\Omega}^2} \left[ \hat{H}_r^* \frac{d\hat{H}_\theta}{d\tilde{r}} + \hat{H}_r \frac{d\hat{H}_\theta^*}{d\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \left( \hat{H}_\theta^* \hat{H}_r + \hat{H}_\theta \hat{H}_r^* \right) \right]. \quad (227)$$

En la Ec. (227), el símbolo \* indica el complejo conjugado del valor que le precede. De esta forma, al reemplazar la Ec. (222), (223) y (226), en la Ec. (227), Chaves *et al.*

[4, 6] obtuvieron la Ec. (228), que representa el valor de la fuerza magnética promedio de orden cero.

$$\langle \tilde{f}_\theta \rangle_{t,0} = \frac{2(\alpha^2 + \beta^2) \tilde{\Omega}}{[(1 + \alpha)^2 + \beta^2] (1 + \tilde{\Omega}^2)} \frac{1}{\tilde{r}^5}. \quad (228)$$

De forma similar, obtuvieron el valor del torque magnético promedio de orden cero, dado por la Ec. (229).

$$\langle \tilde{l}_z \rangle_{t,0} = \langle \tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}} \rangle_{t,0} = \frac{\tilde{\Omega}}{[(1 + \alpha)^2 + \beta^2] (1 + \tilde{\Omega}^2)} \left( 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\tilde{r}^4} \right). \quad (229)$$

**4.4.2 Problema hidrodinámico:** Por otra parte, el sistema de ecuaciones hidrodinámicas está compuesto por la componente azimutal de la ecuación de balance de momento lineal, Ec. (30), la componente vertical de la ecuación de balance de momento angular interno, Ec. (31), la fuerza magnética de orden cero, Ec. (228), y el torque magnético de orden cero, Ec. (229). De forma que, el sistema de ecuaciones hidrodinámico de la geometría anular, para  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ , está conformado por la Ec. (228)-(231), con la aplicación de lo establecido en la Ec. (36).

$$\eta_e \frac{d}{d\tilde{r}} \left[ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{v}_\theta) \right] - 2\zeta \frac{d\tilde{\omega}_z}{d\tilde{r}} + \frac{\zeta}{\tilde{\Omega}} \langle \tilde{f}_\theta \rangle_t = 0, \quad (230)$$

$$\frac{2}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{v}_\theta) - 4\tilde{\omega}_z + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{d\tilde{\omega}_z}{d\tilde{r}} \right) + \frac{\langle \tilde{l}_z \rangle_t}{\tilde{\Omega}} = 0. \quad (231)$$

Una vez planteado el sistema a resolver, Ec. (228)-(231), se procede a discretizar. Dando como resultado la Ec. (232)-(235).

$$\eta_e \left( \frac{-\tilde{v}_{\theta,i}}{\tilde{r}_i^2} + \frac{\tilde{v}_{\theta,i-1} - 2\tilde{v}_{\theta,i} - \tilde{v}_{\theta,i+1}}{\Delta \tilde{r}^2} \right) - \zeta \left( \frac{\tilde{\omega}_{z,i+1} - \tilde{\omega}_{z,i-1}}{2\Delta \tilde{r}} \right) = -\frac{\zeta}{\tilde{\Omega}} \langle \tilde{f}_\theta \rangle_{t,i}, \quad (232)$$

$$2 \frac{\tilde{v}_{\theta,i}}{\tilde{r}_i} + \frac{\tilde{v}_{\theta,i+1} - \tilde{v}_{\theta,i-1}}{2\Delta \tilde{r}} - 4\tilde{\omega}_{z,i} + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \left( \frac{1}{\tilde{r}_i} \frac{\tilde{\omega}_{z,i+1} - \tilde{\omega}_{z,i-1}}{2\Delta \tilde{r}} + \frac{\tilde{\omega}_{z,i-1} - 2\tilde{\omega}_{z,i} + \tilde{\omega}_{z,i+1}}{\Delta \tilde{r}^2} \right) = -\frac{\langle \tilde{l}_z \rangle_{t,i}}{\tilde{\Omega}}, \quad (233)$$

$$\langle \tilde{f}_\theta \rangle_{t,i} = \frac{2(\alpha^2 + \beta^2) \tilde{\Omega}}{[(1 + \alpha)^2 + \beta^2] (1 + \tilde{\Omega}^2)} \frac{1}{\tilde{r}_i^5}, \quad (234)$$

$$\langle \tilde{l}_z \rangle_{t,i} = \frac{\tilde{\Omega}}{[(1 + \alpha)^2 + \beta^2] (1 + \tilde{\Omega}^2)} \left( 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\tilde{r}_i^4} \right). \quad (235)$$

En el sistema de ecuaciones anterior, la variable  $i$  corresponde a los nodos de la coordenada radial  $\tilde{r}$ . Para mayor referencia ver figura 35.

**4.4.3 Metodología algoritmo solución:** Una vez establecido el sistema de ecuaciones discretas del modelo ferrohodinámico para  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ , se ejecuta la metodología mostrada en la figura 49. Es de notar que, esta metodología difiere de la establecida en la figura 9, debido a que en el sistema de ecuaciones trabajado por Chaves *et al* [4, 6], se ha resuelto de forma analítica el problema magnético. Dicho lo anterior, el resumen del procedimiento para la solución se expresa a continuación:

1. Ingresar las características del ferrofluido, la geometría del contenedor y las particularidades de la simulación a realizar (cantidad de nodos, iteraciones máximas, entre otros).
2. Calcular los valores de la fuerza magnética,  $\langle \tilde{f}_\theta \rangle_{t,i}$ , y el torque promedio de orden cero,  $\langle \tilde{l}_z \rangle_{t,i}$ , con la implementación de la Ec. (234) y (235).
3. A partir del torque y la fuerza magnética promedio de orden cero, calculado en la iteración anterior (en el caso de la primera iteración se asume el valor de torque promedio inicial suministrado por el usuario), determinar los perfiles de velocidad lineal y de giro, teniendo en cuenta que  $\tilde{v}_\theta = f(\tilde{r}, \tilde{\omega}_z, \tilde{f}_\theta)$  y  $\tilde{\omega}_z = f(\tilde{r}, \tilde{v}_\theta, \tilde{l}_z)$ , Ec. (232) y (233).
4. Si las velocidades no alcanzan convergencia, volver al paso 3. De lo contrario, establecer a  $\tilde{v}_\theta(\tilde{r})$  y  $\tilde{\omega}_z(\tilde{r})$  como los perfiles de velocidad de orden cero, correspondientes al valor de torque y fuerza magnética promedio del punto radial en cuestión.

## 4.5 SOLUCIÓN PARA $\alpha \gg 1$

A continuación, se plantea el sistema de ecuaciones ferrohodinámico para una muestra de ferrofluido en el contenedor de la figura 48, bajo el efecto de campos magnéticos para los que  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ . Asimismo, se presenta la discretización del modelo y la metodología de la solución numérica implementada.

**4.5.1 Problema hidrodinámico:** El sistema hidrodinámico es el mismo planteado para  $\alpha \ll 1$ , ya que, al igual que en la geometría cilíndrica del capítulo 3, aunque  $\varepsilon \neq 0$ , en la Ec. (193) se determina la nulidad del término dependiente de la divergencia de la velocidad de giro, es decir,  $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\omega} = \frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial \tilde{z}} = 0$ . Por tal motivo, el sistema de ecuaciones hidrodinámicas está compuesto por la Ec. (232) y (233), con las condiciones de frontera de la Ec. (208). Estas últimas son discretizadas y presentadas en la Ec. (236).

$$\begin{aligned} \tilde{v}_\theta, \tilde{r}=\gamma &= 0, & \tilde{v}_\theta, \text{nder} &= 0, \\ \tilde{\omega}_z, \tilde{r}=\gamma &= 0, & \tilde{\omega}_z, \text{nder} &= 0. \end{aligned} \tag{236}$$

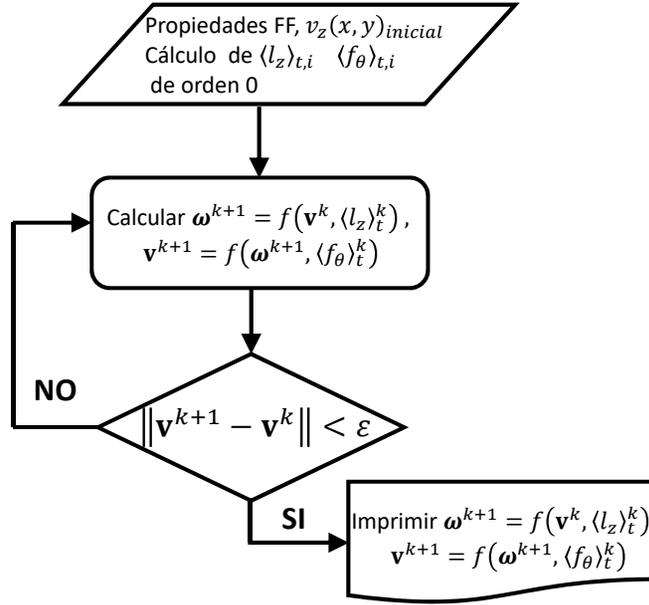


Figura 49: Diagrama de flujo de la metodología del algoritmo, para la solución numérica del sistema de ecuaciones hidrodinámicas de la TDMAI, para muestras de ferrofluido en un contenedor anular y campos magnéticos en los que  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ . El problema magnético ha sido resuelto de manera analítica por Chaves *et al* [4, 6]. Por tal motivo, la discretización es realizada sólo para el problema hidrodinámico.

En la Ec. (236),  $nder$  corresponde al número de nodos en los que se ha discretizado la coordenada radial del contenedor.

**4.5.2 Problema magnético:** El sistema de ecuaciones magnéticas está formado por la Ec. (196)-(200), con las condiciones de frontera de la Ec. (209)-(212). Estas condiciones de frontera son discretizadas y presentadas en la Ec. (237).

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}_{r, \tilde{r}=0}^{j,k}|_I + (\mu_r - 1) \tilde{M}_{r, \tilde{r}=0}^{j,k}|_I &= 0, \\
 \mu_r \tilde{H}_{r, \tilde{r}=\gamma}^{j,k}|_I &= \tilde{H}_{r, \tilde{r}=\gamma}^{j,k}|_{II} + \chi \tilde{M}_{r, \tilde{r}=\gamma}^{j,k}|_{II}, \\
 \tilde{H}_{\theta, \tilde{r}=\gamma}^{j,k}|_I &= \tilde{H}_{\theta, \tilde{r}=\gamma}^{j,k}|_{II}, \\
 \tilde{H}_{\theta, \tilde{r}=1}^{j,k}|_{II} &= -\cos(\tilde{t}_k - \theta_j).
 \end{aligned} \tag{237}$$

En las expresiones de la Ec. (237), las variables  $i$ ,  $j$  y  $k$  corresponden a los nodos de las variables  $\tilde{r}$ ,  $\theta$  y  $\tilde{t}$ , respectivamente. Para mayor ilustración ver figura 50.

**4.5.3 Derivadas en la frontera  $\tilde{r} = \gamma$ :** Para la solución numérica del sistema de ecuaciones magnéticas fueron implementadas las diferencias finitas *hacia atrás*, tal como se muestra en la Ec. (238).

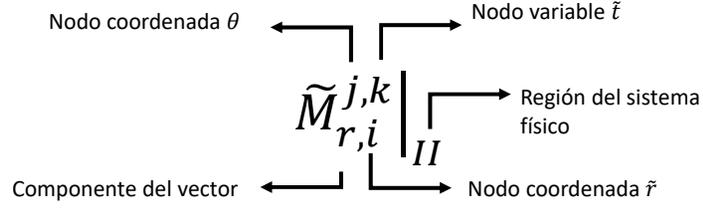


Figura 50: Esquema de término discreto en donde las variables  $i$ ,  $j$ ,  $k$  corresponden a los nodos en la coordenada radial  $\tilde{r}$ , la coordenada azimutal  $\theta$  y la variable temporal  $\tilde{t}$ , respectivamente. Asimismo, los símbolos  $I$  y  $II$  representan la región I y II, correspondientemente, del sistema anular en estudio.

$$\frac{\partial \tilde{H}_r}{\partial \tilde{r}} \cong \frac{\tilde{H}_{r,i}^{j,k} - \tilde{H}_{r,i-1}^{j,k}}{\Delta \tilde{r}}. \quad (238)$$

Por tal motivo, la metodología de solución hace un recorrido de los nodos radiales (de dentro hacia fuera), comenzando en el nodo posterior al del centro del cilindro interno ( $i = 2$ ), y finalizando en las paredes del cilindro externo ( $i = n_{der}$ ), tal como se referencia en la figura 51. En este orden de ideas, en la frontera  $\tilde{r} = \gamma$ , los nodos asignados corresponden a la región  $I$  y  $II$  al mismo tiempo. De ahí que, en la aplicación de las diferencias finitas en esta frontera, es necesario especificar la región a la que se hace referencia en la operación.

Ahora, con el fin de resolver numéricamente el problema magnético, es necesario trabajar los términos de la frontera de la pared del cilindro interno ( $\tilde{r} = \gamma$ ) referidos solo a una de las dos regiones, es decir, en función de las variables de la región I o en función de las variables de la región II, pero no con ambas al tiempo, ya que esto conllevaría a un mayor número de incógnitas que de ecuaciones disponibles en el sistema, lo cual no haría posible determinar los perfiles de flujo del ferrofluido para esta geometría, bajo estas condiciones, es decir,  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ . En consecuencia, en la Ec. (239) se expresan las componentes de la intensidad de campo magnético y magnetización de la región  $I$ , en función de la intensidad de campo magnético y magnetización de la región  $II$  (el procedimiento se presenta en el Anexo C). Lo anterior, con el fin de expresar los términos en la frontera,  $\tilde{r} = \gamma$ , en función de los términos de la región II, dado que en esta zona es donde se pretende realizar la estimación de los perfiles.

$$\begin{aligned} \tilde{H}_r^I|_{\tilde{r}=\gamma} &= \frac{(1 + \chi)}{\mu_r} \tilde{H}_r^{II}|_{\tilde{r}=\gamma}, \\ \tilde{H}_\theta^I|_{\tilde{r}=\gamma} &= \tilde{H}_\theta^{II}|_{\tilde{r}=\gamma}, \\ \tilde{M}_r^I|_{\tilde{r}=\gamma} &= \frac{(1 + \chi)}{\mu_r} \tilde{M}_r^{II}|_{\tilde{r}=\gamma}, \\ \tilde{M}_\theta^I|_{\tilde{r}=\gamma} &= \tilde{M}_\theta^{II}|_{\tilde{r}=\gamma}. \end{aligned} \quad (239)$$

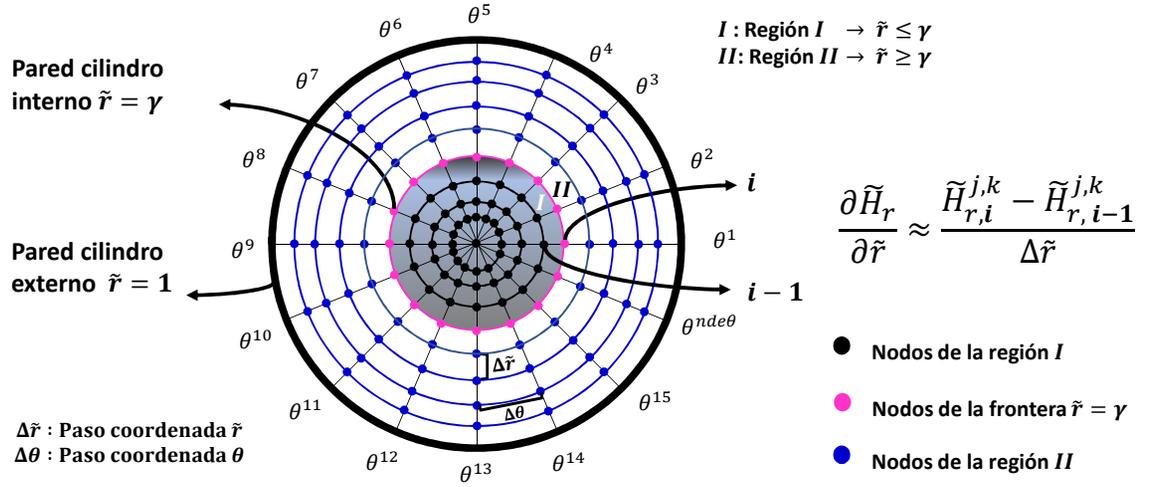


Figura 51: Esquema de discretización en la dirección radial y azimutal del contenedor anular de longitud axial  $\tilde{z}$  infinita. Los círculos de color negro, magenta y azules representan, respectivamente, a los nodos en los que se ha discretizado la región I ( $\tilde{r} \leq \gamma$ ), la frontera en  $\tilde{r} = \gamma$  y la región II ( $\gamma \leq \tilde{r} \leq 1$ ). Por su parte,  $nder$  y  $nde\theta$  son el número de nodos espaciales en la coordenada  $\tilde{r}$  y  $\theta$ , correspondientemente, los cuales son seleccionados por el usuario del algoritmo de solución numérica.  $\Delta \tilde{r}$  y  $\Delta \theta$  representan el paso en la coordenada  $\tilde{r}$  y  $\theta$ . Para este esquema ilustrativo  $nder = 9$  y  $nde\theta = 16$ .

Como puede observarse en la Ec. (239), para la componente radial, tanto de la intensidad de campo magnético como de la magnetización, el salto en la frontera  $\tilde{r} = \gamma$  depende de la relación entre las permeabilidades magnéticas relativas de cada región, mientras que para la componente azimutal, de estas mismas variables, no se presenta ningún tipo de cambio a lo largo de la interfase. En este orden de ideas, las ecuaciones de Maxwell discretas, expresadas en la Ec. (199) y (200), específicamente para los nodos de la región I en los que  $\tilde{r} = \gamma$ , quedan expresadas en la Ec. (240) y (241).

$$A_\gamma \tilde{H}_{\theta,\gamma}^{j,k} |_I + B_\gamma \tilde{H}_{\theta,\gamma-1}^{j,k} |_I - c \tilde{H}_{r,\gamma}^{j,k} |_I + c \tilde{H}_{r,\gamma}^{j-1,k} |_I = 0, \quad (240)$$

$$A_\gamma \tilde{H}_{r,\gamma}^{j,k} |_I + B_\gamma \tilde{H}_{r,\gamma-1}^{j,k} |_I + c \tilde{H}_{\theta,\gamma}^{j,k} |_I - c \tilde{H}_{\theta,\gamma}^{j-1,k} |_I = -\chi \left\{ A_\gamma \tilde{M}_{r,\gamma}^{j,k} |_I + B_\gamma \tilde{M}_{r,\gamma-1}^{j,k} |_I + c \tilde{M}_{\theta,\gamma}^{j,k} |_I - c \tilde{M}_{\theta,\gamma}^{j-1,k} |_I \right\}, \quad (241)$$

en donde

$$A_\gamma = 1 + \frac{\gamma}{\Delta \tilde{r}}, \quad B_\gamma = -\frac{\gamma}{\Delta \tilde{r}}, \quad c = \frac{1}{\Delta \theta}. \quad (242)$$

Con el fin de expresar todas las ecuaciones discretas en función de las variables de la región II, dado que en esta región es donde se generan los perfiles de velocidad, la

Ec. (240) y (241) son reformuladas y presentadas en la Ec. (243) y (244), considerando lo establecido previamente en las condiciones de frontera de la Ec. (239).

$$A_\gamma \tilde{H}_{\theta,\gamma}^{j,k} |_{II} + B_\gamma \tilde{H}_{\theta,\gamma-1}^{j,k} |_I - c' \tilde{H}_{r,\gamma}^{j,k} |_{II} + c' \tilde{H}_{r,\gamma}^{j-1,k} |_{II} = 0, \quad (243)$$

$$A'_\gamma \tilde{H}_{r,\gamma}^{j,k} |_{II} + B_\gamma \tilde{H}_{r,\gamma-1}^{j,k} |_I + c \tilde{H}_{\theta,\gamma}^{j,k} |_{II} - c \tilde{H}_{\theta,\gamma}^{j-1,k} |_{II} = -\chi \left\{ A'_\gamma \tilde{M}_{r,\gamma}^{j,k} |_{II} + B_\gamma \tilde{M}_{r,\gamma-1}^{j,k} |_I + c \tilde{M}_{\theta,\gamma}^{j,k} |_{II} - c \tilde{M}_{\theta,\gamma}^{j-1,k} |_{II} \right\}, \quad (244)$$

en donde

$$A'_\gamma = \left( 1 + \frac{\gamma}{\Delta \tilde{r}} \right) \frac{(1 + \chi)}{\mu_r}, \quad (245)$$

$$c' = c \frac{(1 + \chi)}{\mu_r}. \quad (246)$$

**4.5.4 Fuerza y torque magnético:** Una vez resuelto el sistema de las ecuaciones de Maxwell, se obtienen los valores  $\tilde{H}_{r,i}^{j,k}$  y  $\tilde{H}_{\theta,i}^{j,k}$ . Seguidamente, se procede a la solución de la ecuación de magnetización MRSh-74 en cada una de sus componentes, tal cual como se resolvió para la geometría cilíndrica, con el fin de obtener los valores  $M_{r,i}^{j,k}$  y  $M_{\theta,i}^{j,k}$  en toda la zona geométrica que contiene el ferrofluido, es decir,  $\gamma \leq \tilde{r} \leq 1$ .

Una vez resuelto el problema magnético, se obtienen los valores de la fuerza y el torque ( $\tilde{f}_{\theta,i}^{j,k}$  y  $\tilde{l}_{z,i}^{j,k}$ ) para cada uno de los nodos de la discretización, los cuales son del dominio temporal  $k$ . Por tal motivo, se calcula el valor promedio de dichas cantidades,  $\langle \tilde{f}_\theta \rangle_{t,i}^j$  y  $\langle \tilde{l}_z \rangle_{t,i}^j$ , tal como lo expuesto en la Ec. (247) y (248), aplicando el concepto de la Ec. (86), con el fin de implementar estos valores en las ecuaciones hidrodinámicas del sistema, Ec. (232) y (233). De esta forma, al resolver el sistema hidrodinámico resultante, se determinan los perfiles de velocidad lineal y de giro  $\tilde{v}_\theta(\tilde{r})$  y  $\tilde{\omega}_z(\tilde{r})$ , respectivamente.

$$\langle \tilde{f}_\theta \rangle_{t,i}^j = \left\langle \tilde{M}_{r,i}^{j,k} \frac{(\tilde{H}_{\theta,i}^{j,k} - \tilde{H}_{\theta,i-1}^{j,k})}{\Delta \tilde{r}} + \tilde{M}_{\theta,i}^{j,k} \left[ \frac{1}{\tilde{r}_i} \frac{(\tilde{H}_{\theta,i}^{j,k} - \tilde{H}_{\theta,i}^{j-1,k})}{\Delta \theta} + \frac{\tilde{H}_{r,i}^{j,k}}{\tilde{r}_i} \right] \right\rangle_t, \quad (247)$$

$$\langle \tilde{l}_z \rangle_{t,i}^j = \left\langle \tilde{M}_{r,i}^{j,k} \tilde{H}_{\theta,i}^{j,k} - \tilde{M}_{\theta,i}^{j,k} \tilde{H}_{r,i}^{j,k} \right\rangle_t. \quad (248)$$

**4.5.5 Metodología algoritmo solución:** La metodología que ejecuta el algoritmo numérico de solución es la misma que se presenta en la figura 9, ya que en la geometría rectangular, cilíndrica y anular los procedimientos que se ejecutan son los mismos. En este orden, se procede a realizar la validación del algoritmo numérico, por medio de la comparación de los resultados de las simulaciones con los resultados de la solución

analítica de Chaves *et al* [4, 6]. Esta última solo aplica para campos magnéticos en los que  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ . Debido a lo anterior, se realizó la simulación para un campo magnético de 0,1 mT, que para las características particulares de la muestra de ferrofluido WGBF-1 (ver tabla 2), corresponde a un valor  $\alpha = 0,03$ .

Debido a la falta de recursos computacionales disponibles, para la ejecución del algoritmo con una cantidad adecuada de nodos angulares ( $n_{de\theta} \geq 5000$ ), se hicieron aproximaciones ajustadas a las características del sistema en estudio, con el fin de realizar la validación del algoritmo numérico.

**4.5.6 Validación del algoritmo I:** En la figura 52, se muestra el comportamiento de la fuerza magnética promedio a lo largo del dominio radial del contenedor de la figura 51, con  $\gamma = 0,2$ . En estos resultados se observa que la magnitud de la fuerza magnética decae exponencialmente, haciéndose prácticamente nula en la mayoría de los puntos radiales del dominio (a diferencia de los puntos cercanos al cilindro interno). Debido a la anterior observación, la primera forma para validar el algoritmo es a través de la suposición de la nulidad de esta fuerza en todo el dominio radial, tal como se expresa en la Ec. (249).

$$\langle \tilde{f}_\theta \rangle_{t,i}^j = 0. \quad (249)$$

Dicho lo anterior, se procede a realizar la simulación de los perfiles de velocidad lineal y de giro,  $\tilde{v}_\theta(\tilde{r})$  y  $\tilde{\omega}_z(\tilde{r})$ , de la muestra WGBF-1, para una densidad de campo magnético  $B = 0,01$  mT, que equivale a  $\alpha = 0,003$  y una frecuencia  $f = 1$  Hz, equivalente a  $\tilde{\Omega} = 0,015$ . En la figura 53,  $v_\theta$  lz0 y  $\omega_z$  lz0 corresponden a las soluciones obtenidas con el algoritmo numérico, el cual implementa el torque magnético analítico de orden cero de las referencias [4, 6]. Por su parte,  $v_\theta$  MRSh y  $\omega_z$  MRSh representan las soluciones obtenidas a través del algoritmo numérico, el cual se pretende implementar para ferrofluidos bajo el efecto de campos magnéticos en los que  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ .

**4.5.7 Validación del algoritmo II:** Con el propósito de tener en cuenta el término  $\tilde{f}_\theta$  dentro de las ecuaciones hidrodinámicas de la TDMAI, se asume que  $\langle \tilde{f}_\theta \rangle_{t,i}^j \neq 0$  en todos los puntos del dominio anular de la figura 51. Ahora, en la figura 54 se presentan los resultados del problema magnético ( $\tilde{H}_r, \tilde{H}_\theta, \tilde{M}_r, \tilde{M}_\theta$ ). De modo que, “an” representan las soluciones analíticas obtenidas en las referencias [4, 6], mientras que “num” representan las soluciones numéricas obtenidas por medio de la implementación de la Ec. (196)-(200), (232) y (233). A partir de estos resultados, en la Ec. (250) se establece la relación entre  $\tilde{H}_r$  y  $\tilde{H}_\theta$ .

$$\frac{\partial \tilde{H}_\theta}{\partial \theta} \approx -\tilde{H}_r. \quad (250)$$

Por tal motivo, la fuerza magnética de la Ec. (207) puede ser aproximada de la siguiente manera:

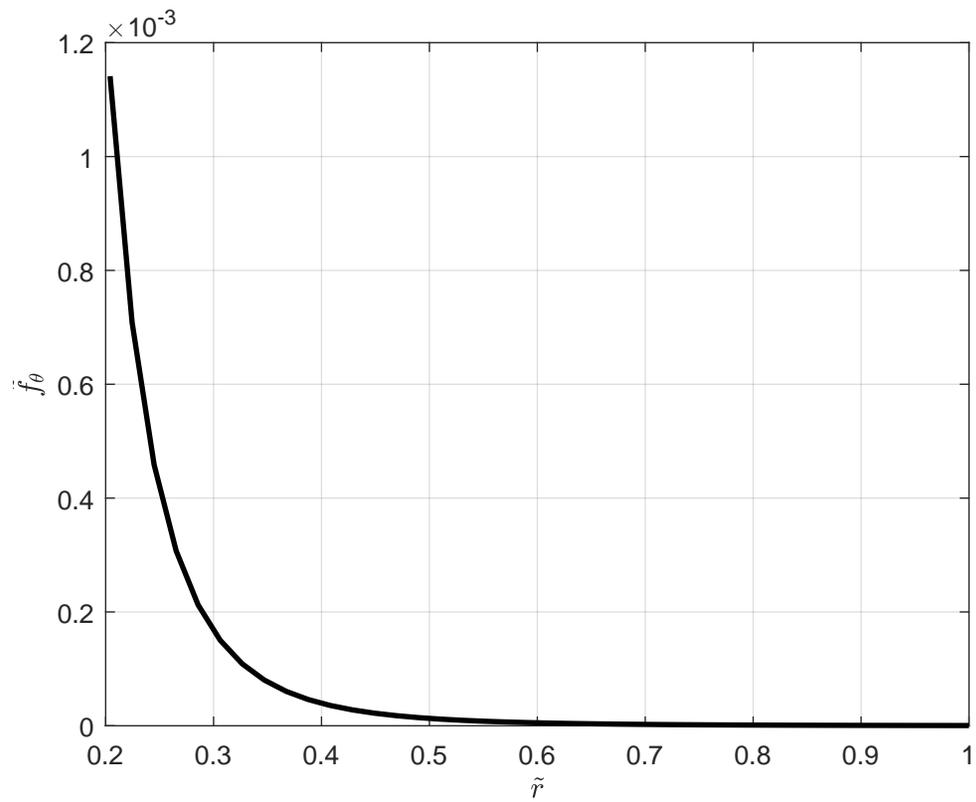


Figura 52: Representación gráfica de la expresión analítica de la fuerza magnética,  $\tilde{f}_\theta(\tilde{r})$ , obtenida por Chaves *et al* [4], aplicada a la muestra de ferrofluido WGBF-1,  $B = 0,01$  mT,  $\alpha = 0,003$ ,  $f = 1$  Hz,  $\tilde{\Omega} = 0,015$ ,  $\kappa = 3,3$  y contenida en la geometría anular de la figura 48, para  $\gamma = 0,2$ ,  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ .

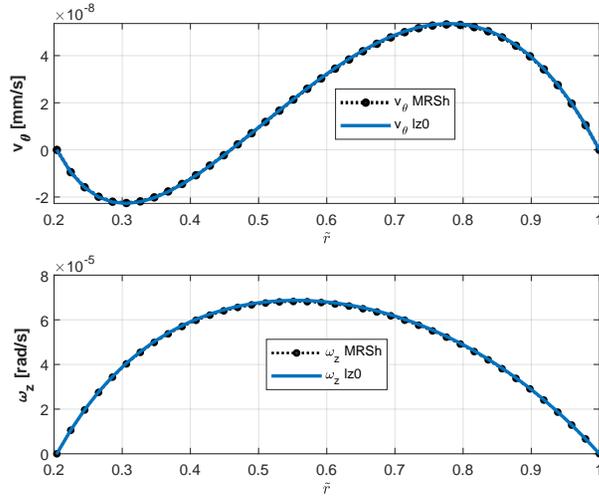


Figura 53: Validación I del algoritmo numérico implementado para la solución de problema ferrohídrodinámico en la geometría anular. En la validación se utilizaron los resultados de la solución analítica obtenida por Chaves *et al* [4]. Adicionalmente, se asumió  $\tilde{f}_\theta = 0$ ,  $f = 1$  Hz,  $B = 0,01$  mT,  $\alpha = 0,003$ ,  $\tilde{\Omega} = 0,015$  y  $\kappa = 3,3$  en WGBF-1.  $v_\theta$  lz0 y  $\omega_z$  lz0 representan la solución analítica, válida para  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ , mientras que  $v_\theta$  MRSh y  $\omega_z$  MRSh representan la solución obtenida a través del algoritmo de solución numérica, válida para  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ .

$$\tilde{f}_\theta = \left( \tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}} \right)_\theta \approx \tilde{M}_r \frac{d\tilde{H}_\theta}{d\tilde{r}}. \quad (251)$$

Con base en la Ec. (251), se procede a realizar la simulación de los perfiles de velocidad lineal y de giro,  $\tilde{v}_\theta(\tilde{r})$  y  $\tilde{\omega}_z(\tilde{r})$ , de la muestra WGBF-1, para una densidad de campo magnético  $B = 0,01$  mT ( $\alpha = 0,003$ ) y una frecuencia  $f = 1$  Hz ( $\tilde{\Omega} = 0,015$ ). En la figura 55,  $v_\theta$  lz0 y  $\omega_z$  lz0 corresponden a las soluciones obtenidas con el algoritmo numérico, el cual implementa la fuerza y el torque magnético de orden cero. Por su parte,  $v_\theta$  MRSh y  $\omega_z$  MRSh representan las soluciones obtenidas a través del algoritmo-solución, para  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ . La cantidad de nodos implementados en las simulaciones fueron  $nder = 50$  y  $nde\theta = 100$ .

**4.5.8 Resultados y análisis:** Una vez validado el algoritmo numérico de solución, con el cual se pretende determinar los perfiles de velocidad de una muestra de ferrofluido contenida en la geometría descrita en la figura 48, se procede a realizar las simulaciones para diferentes valores de intensidad de campo magnético y frecuencia de rotación en los que  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ . El propósito de esta sección es mostrar el desempeño de la ecuación MRSh-74 dentro de la TDMAI, comparando los resultados obtenidos por medio de simulaciones con las mediciones experimentales de la referencia [2]. En este orden de ideas, en la figura 56 se muestran los perfiles de velocidad del ferrofluido

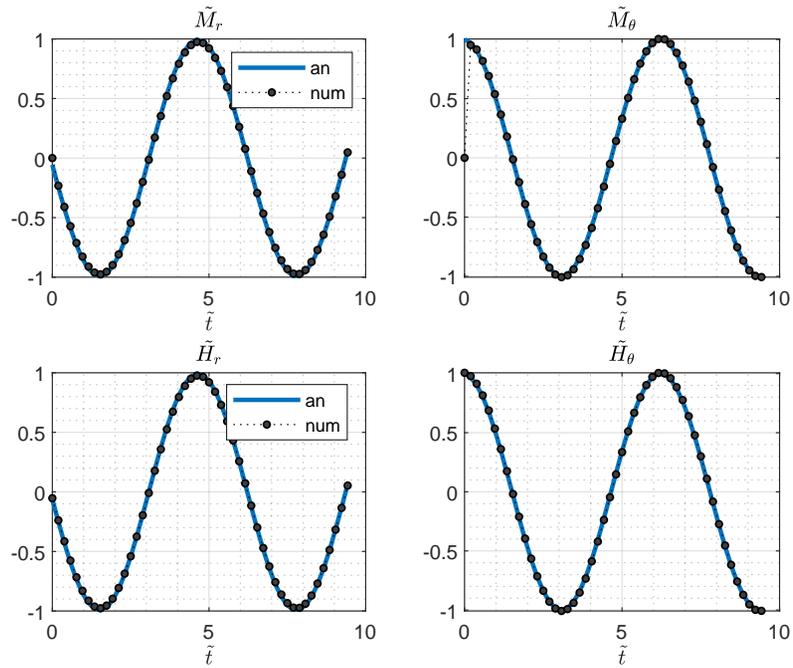


Figura 54: Resultados analíticos y numéricos para la intensidad de campo magnético  $\mathbf{H}$  y la magnetización  $\mathbf{M}$ , de la muestra de ferrofluido WGBF-1 contenida en una geometría anular. Los resultados mostrados corresponden para el punto en donde  $\tilde{r} = 0,6$  y  $\theta = \pi$  rad .  $\tilde{f}_\theta = 0$ ,  $f = 1$  Hz,  $B = 0,01$  mT,  $\alpha = 0,003$ ,  $\tilde{\Omega} = 0,015$  y  $\kappa = 3.3$ . an representa la solución analítica obtenida por Chaves [4] y num representa la solución del sistema ferrohodinámico de la TDMAI, obtenida a través del algoritmo de solución numérica, implementando la ecuación MRSh-74 para la descripción del problema magnético.

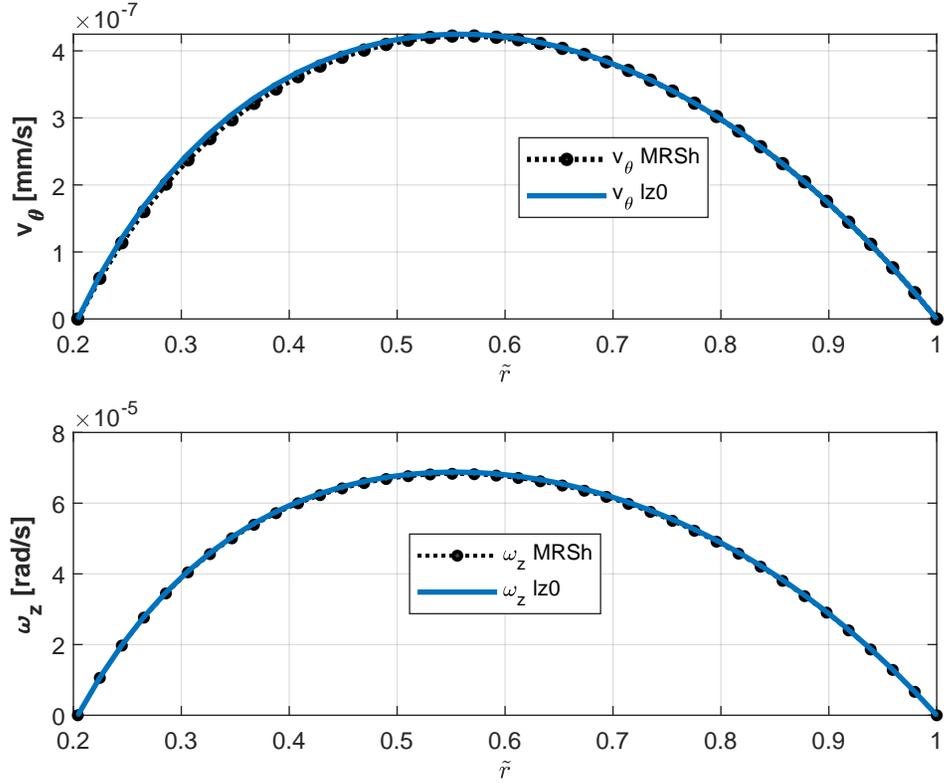


Figura 55: Validación II del algoritmo numérico implementado para la solución de problema ferrohrodinámico en la geometría anular de la figura 48, en donde se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 en el sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término  $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$  en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo  $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$  en la ecuación MRSh-74. En la validación se utilizaron los resultados de la solución de orden cero para  $\alpha \ll 1$ , obtenidos por Chaves *et al* [4]. Asimismo, se asumió  $\tilde{f}_\theta \approx \tilde{M}_r \frac{d\tilde{H}_\theta}{d\tilde{r}}$ ,  $f = 1 \text{ Hz}$ ,  $B = 0,01 \text{ mT}$ ,  $\alpha = 0,003$ ,  $\kappa = 3,3$  y la muestra de ferrofluido WGBF-1.  $v_\theta \text{ lz0}$  y  $\omega_z \text{ lz0}$  representa la solución analítica obtenida por Chaves *et al* [4].  $v_\theta \text{ MRSh}$  y  $\omega_z \text{ MRSh}$  representa la solución obtenida a través del algoritmo de solución numérica, diseñado para obtener los perfiles de velocidad de ferrofluidos sometidos a campos magnéticos en donde  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ .

WBF-2, para los diferentes valores de densidad de campo magnético, a una frecuencia de 150 Hz y un valor de  $\kappa = 0,44$ . En donde se puede observar un aumento en la magnitud de los perfiles de velocidad en la medida que aumenta la magnitud del campo magnético externo. Adicionalmente, se puede observar, a partir de la figura 56, que la predicción de los perfiles, a través de la TDMAI, presenta concordancia cualitativa, mas no cuantitativa con los perfiles reportados en los experimentos de Torres-Diaz *et al* [2], los cuales se ilustran en la figura 57.

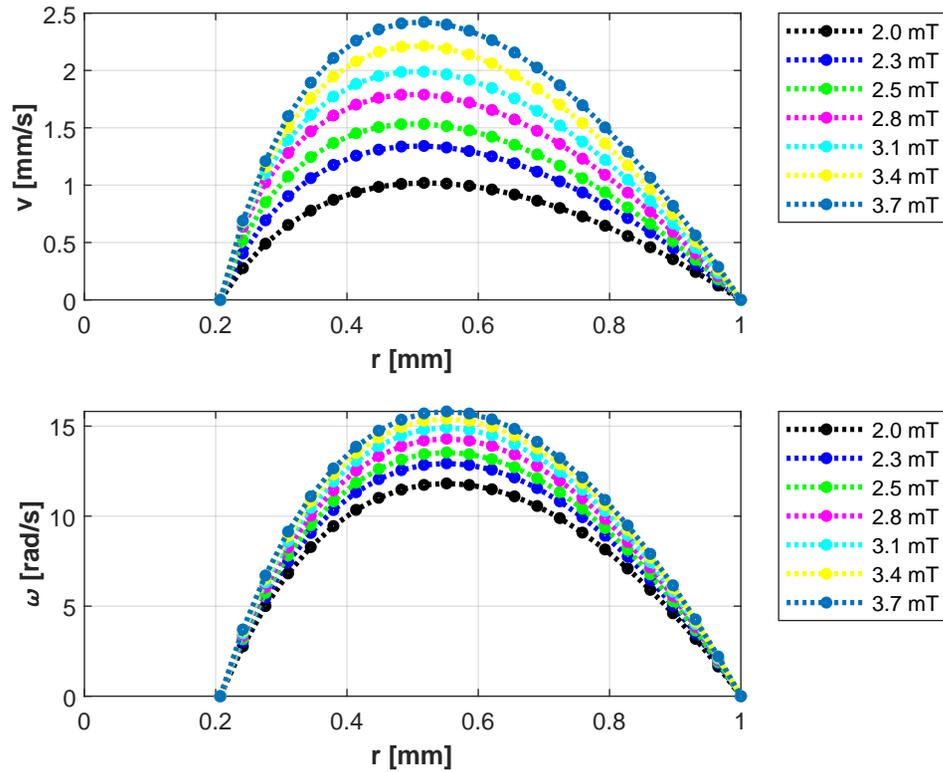


Figura 56: Perfiles de velocidad lineal y de giro en la geometría anular para WBF-2, bajo el efecto de diferentes densidades de campo magnético,  $f = 200$  Hz,  $\kappa = 0,44$ . En el problema ferrohrodinámico se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 como parte del sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término  $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$  en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo  $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$  en la ecuación MRSh-74. En las simulaciones se asumió  $\tilde{f}_\theta \approx \tilde{M}_r \frac{d\tilde{H}_\theta}{d\tilde{r}}$ .

De igual manera, se procede a implementar el modelo para predecir los perfiles de velocidad para una densidad de campo  $B = 5,62$  mT, y diferentes frecuencias de rotación del campo magnético. En consecuencia, la figura 58 muestra que, a diferencia de la situación presentada en los perfiles de velocidad al aumentar la magnitud del campo magnético, al incrementar la frecuencia de rotación del campo no se presenta un cambio significativo en los perfiles de velocidad lineal,  $\tilde{v}_\theta(\tilde{r})$ . Por el contrario, en los perfiles de velocidad de giro,  $\tilde{\omega}_z(\tilde{r})$ , se puede observar que las nanopartículas magnéticas

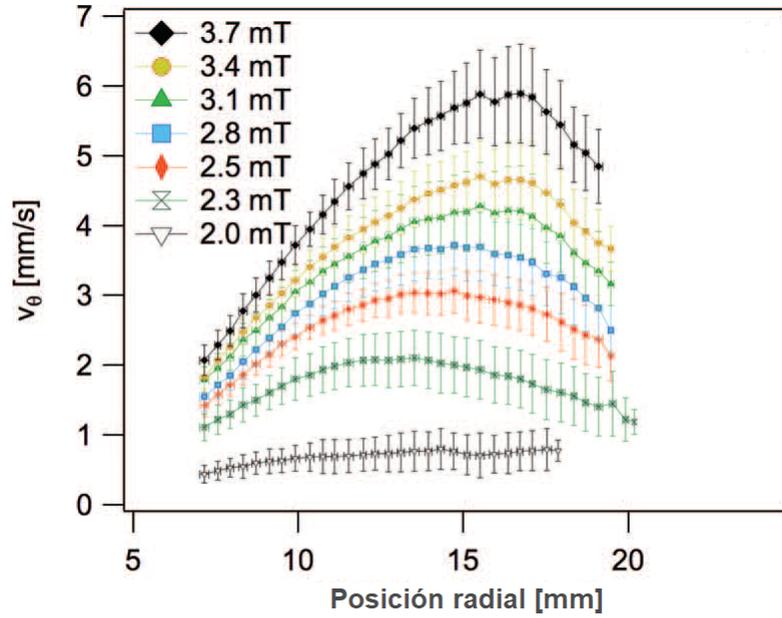


Figura 57: Medidas experimentales de los perfiles de flujo para la muestra WBF-2, contenida en geometría anular, bajo el efecto de diferentes densidades de campo magnético.  $f = 150$  Hz y  $\kappa = 0, 44$ , [2].

presentan un aumento sostenido en la velocidad de giro, para los valores implementados en la simulación. En los experimentos llevados a cabo por Torres-Díaz *et al* [2], no se reportaron datos con los cuales se puedan contrastar estos resultados.

Por otra parte, en los perfiles de velocidad lineal y de giro, para estas condiciones simuladas, se observa que la velocidad máxima se presenta en el mismo punto geométrico del contenedor anular. A partir de este punto la velocidad empieza a decaer hasta que su valor se hace nulo en la pared del cilindro externo, tal cual como se estableció en la condición de frontera de no deslizamiento y no penetración, Ec. (236). Por tal motivo, se puede deducir que los cambios en la magnitud de la densidad o en la frecuencia de rotación del campo, al igual que en la geometría cilíndrica, no modifican el punto geométrico donde se presenta la velocidad máxima en el sistema.

**4.5.9 Análisis del error:** Con el fin de evaluar el efecto de las aproximaciones aplicadas al modelo de la TDMAI en la metodología analítica (tabla 3), en la figura 59 se comparan los perfiles obtenidos con el algoritmo numérico, respecto a los obtenidos en la referencia [6], para valores de  $B = [0, 1, 1.5, 6, 0, 8, 0]$  mT.

De acuerdo con la figura 59, se puede clarificar una vez más la concordancia cualitativa y cuantitativa de los perfiles, en ambas metodologías de solución, para valores de amplitud de campo magnético en los que la magnetización de equilibrio se puede aproximar como  $\mathbf{M}_{\text{eq}} = \chi \mathbf{H}$ . Sin embargo, queda en evidencia la discrepancia y limitación de la estrategia analítica, ya que no predice el fenómeno de saturación en los perfiles de velocidad.

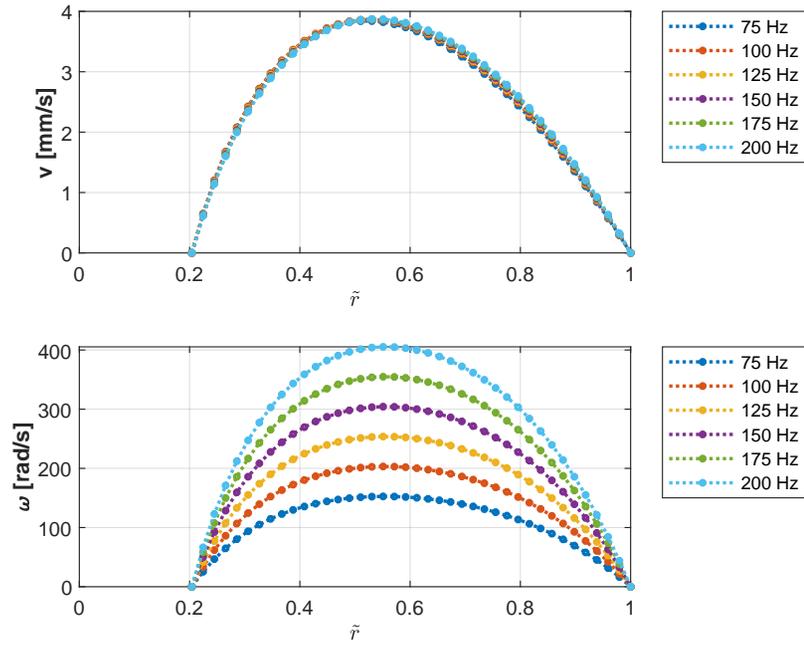


Figura 58: Perfiles de velocidad lineal y de giro en la geometría anular para WBF-2, bajo el efecto de diferentes frecuencias de campo magnético, a 5,62 mT y  $\kappa = 3,3$ . En el problema ferrohodinámico se tiene en cuenta la ecuación MRSh-74 como parte del sistema de ecuaciones de la TDMAI, el término  $\nabla \cdot (\chi \mathbf{M} + \mathbf{H})$  en la solución de las ecuaciones de Maxwell y el término convectivo  $\Omega \varepsilon \mathbf{v} \nabla \mathbf{M}$  en la ecuación MRSh-74. En las simulaciones se asumió  $\tilde{f}_\theta \approx \tilde{M}_r \frac{d\tilde{H}_\theta}{d\tilde{r}}$ .

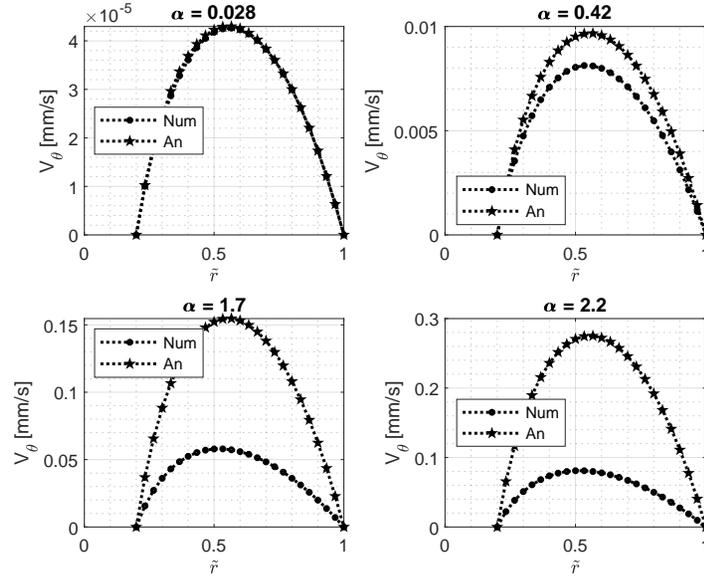


Figura 59: Efecto del parámetro  $\alpha$  en las predicciones de velocidad máxima,  $v_\theta(\tilde{r})$ .  $f = 150$  Hz,  $\kappa = 3, 3$ , WGBF-1. Num representa la solución obtenida a través del algoritmo numérico y An la solución analítica a través del método de las funciones de Bessel, [6].  $B = [0, 1 \ 1, 5 \ 6, 0 \ 8, 0]$  mT.

Asimismo, en la figura 60, en la solución que implementa la metodología propuesta en la referencia [6], se aprecia el constante aumento de los valores de velocidad máxima al incrementar la amplitud de campo magnético. Por el contrario, en la solución numérica del modelo, se observa un comportamiento de saturación similar al que se presentó tanto en el contenedor cuadrado como el cilíndrico (ver figuras 26 y 42). Esto explica el aumento exponencial del error entre estas dos metodologías, como se observa en la figura 61.

Finalmente, con el propósito de evaluar los resultados obtenidos por medio de la TDMAI, en la figura 62 se comparan los valores de velocidad máxima obtenidos con el modelo y las mediciones experimentales de la referencia [2]. Lo anterior, para la muestra de ferrofluido WBF-2, en un contenedor como el de la figura 48, 200 Hz y  $\kappa = 0, 44$ .

Al igual que en la geometría cilíndrica, las discrepancias teoría-experimentos persisten en la geometría anular, en parte, debido a no considerar en la TDMAI los efectos de magnetostricción, y a las incertidumbres relacionadas con la estimación del parámetro  $\kappa$  en la referencia [2]. Adicionalmente, se deben considerar las limitaciones computacionales que se tuvieron al implementar la solución numérica del modelo, lo cual condujo a la aproximación del valor de la densidad de fuerza magnética,  $\tilde{f}_\theta = (\tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}})_\theta \approx \tilde{M}_r \frac{d\tilde{H}_\theta}{d\tilde{r}}$ , despreciando el efecto de la magnetización y el cambio de la componente azimutal de la intensidad de campo magnético,  $\tilde{M}_\theta \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{H}_\theta}{d\theta} + \frac{\tilde{H}_r}{\tilde{r}} \right)$ , en los perfiles de velocidad. Sin embargo, comparando cualitativamente los resultados, en la figura 62 se puede apreciar que el modelo de la TDMAI y las mediciones experimen-

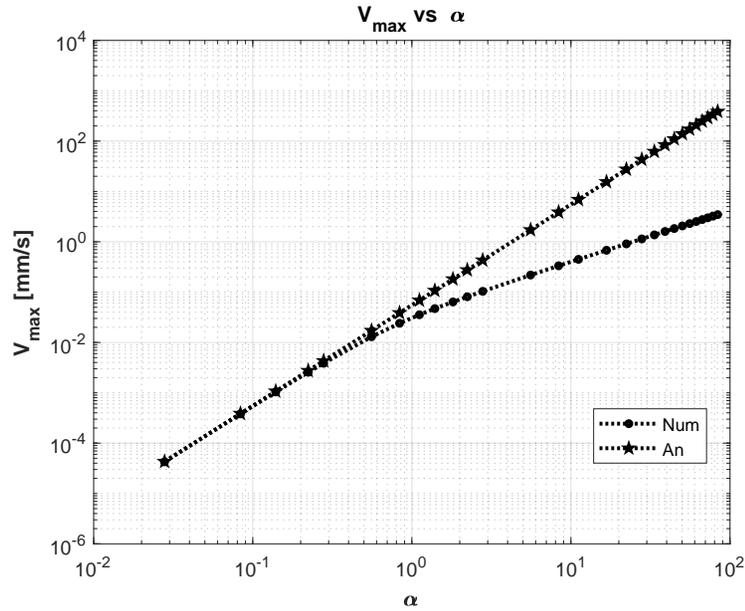


Figura 60: Efecto del parámetro  $\alpha$  en las predicciones de velocidad máxima,  $v_{\theta}(\tilde{r})$ .  $f = 1$  Hz,  $\kappa = 3,3$ , WGBF-1. Num representa la solución obtenida a través del algoritmo numérico y An la solución analítica a través del método de las funciones de Bessel, [6].

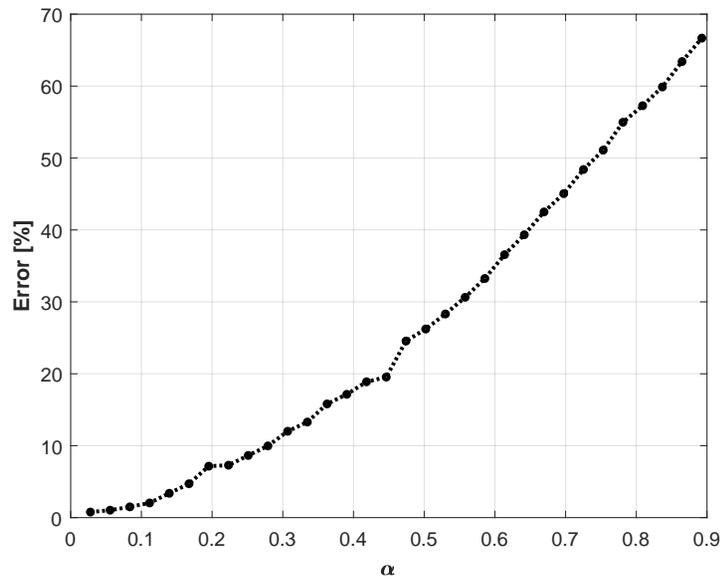


Figura 61: Efecto del parámetro  $\alpha$  en la diferencia porcentual de las predicciones de la velocidad máxima,  $v_{\theta}(\tilde{r})$ , por medio de la solución analítica y numérica del modelo de la TDMAI.  $f = 1$  Hz,  $\kappa = 3,3$ , WGBF-1.

tales registran, aunque para magnitudes diferentes, una tendencia de saturación en los valores de velocidad, lo cual está acorde con lo esperado en la evolución de los perfiles.

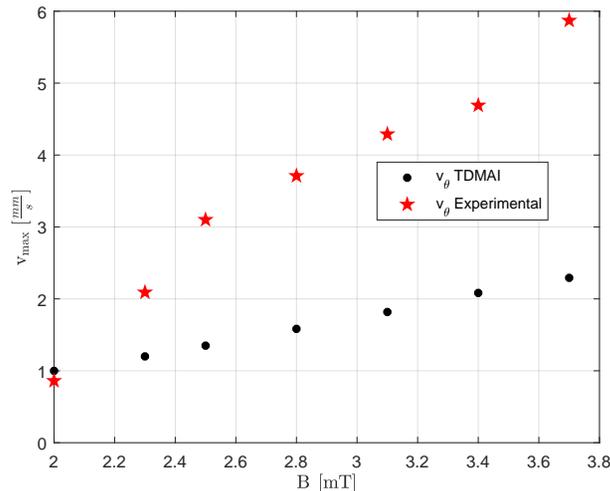


Figura 62: Comparación de los resultados obtenidos con la TDMAI y las mediciones experimentales de la referencia [2], para la geometría de la figura 48. En las simulaciones numéricas se implementó la ecuación MRSh-74,  $f = 200$  Hz,  $\kappa = 0,44$ , WBF-2.  $v_{\theta}$  TDMAI representa la solución teórica y  $v_{\theta}$  Experimental las mediciones reportadas en [2].

## 4.6 OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

El aporte realizado en este capítulo fue la implementación de la TDMAI para predecir perfiles de velocidad lineal y de giro,  $\tilde{v}_{\theta}(\tilde{r})$  y  $\tilde{\omega}_z(\tilde{r})$ , para muestras de ferrofluidos contenidas en una geometría de dos cilindros fijos y concéntricos de longitud axial  $\tilde{z}$  infinita, bajo el efecto de campos magnéticos rotativos en los que  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ . La base para estos resultados fueron los trabajos realizados de manera previa por Chaves *et al* [4, 6, 16, 17] para esta misma geometría, donde fueron aplicados campos en los que  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ , debido a las limitaciones que presentó el método implementado para la solución del sistema de ecuaciones diferenciales del problema ferrodinámico. No obstante, dichos trabajos permitieron establecer una metodología para la solución del sistema de ecuaciones ferrodinámicas en esta investigación.

Después de realizar un análisis a los resultados obtenidos en este capítulo se puede observar y concluir que:

- A diferencia de lo presentado en la geometría cilíndrica, en la geometría anular se presenta un torque instantáneo no uniforme, lo cual está relacionado con la falta de uniformidad del campo magnético aplicado.
- La intensidad y la frecuencia de rotación del campo, al igual que en la geometría cilíndrica, no influyen en el punto geométrico en donde se presenta la velocidad máxima.

- Para los valores implementados en las simulaciones, al aumentar la intensidad de campo magnético, no se presentó saturación en los perfiles de velocidad para la muestra de ferrofluido, lo cual sugiere la necesidad de evaluar el modelo para magnitudes mayores de campo.
- La TDMAI describe, de forma cualitativa, la misma tendencia de las mediciones de velocidad reportadas por Torres-Díaz *et al* [2], para las variaciones de densidad de campo magnético. Pese a lo anterior, aún persisten diferencias cuantitativas entre lo predicho por el modelo y los resultados experimentales.
- Se recomienda considerar el efecto de la magnetostricción dentro del modelo de la TDMAI, Ec. (27), con el fin de reducir las discrepancias en los resultados teóricos-experimentales de la figura 62. Asimismo, la implementación de equipos de cómputo con mayor capacidad para ejecutar el algoritmo numérico, esto es, para una mayor cantidad de nodos en la coordenada angular,  $n_{de\theta}$ , teniendo en cuenta la definición de la fuerza magnética de la Ec. (247), con el propósito de obtener estimaciones más precisas. Lo anterior, considerando que la cantidad de nodos máximos que fueron implementados en la coordenada azimutal fue 150, dando como resultado un valor para el paso de  $\Delta\theta = 2,4^\circ$ , lo cual es una alta fuente de imprecisión al momento de evaluar la Ec. (247). Por lo cual, en esta investigación se hizo uso de las aproximaciones establecidas en la Ec. (249) y (251).
- Se sugiere recalcular los valores de  $\kappa$  utilizados en las medidas experimentales reportadas por Torres-Díaz *et al* [2], teniendo en cuenta los resultados obtenidos con el modelo a campos altos, ya que los valores implementados en las medidas experimentales [2], fueron obtenidos bajo la suposición de campos magnéticos de baja intensidad, lo cual no es lo más conveniente para experimentos donde no se cumple precisamente que  $\alpha \ll 1$ . Esto último, puede ser una de las razones por las cuales no se presentó una correspondencia cuantitativa en los perfiles de velocidad, tanto para la geometría cilíndrica como la anular.
- La solución numérica de los perfiles de velocidad lineal y de giro se obtuvo con la implementación de las condiciones de frontera en la pared del cilindro interno en  $\tilde{r} = \gamma$ . Partiendo de lo anterior, se pudo establecer que los valores de intensidad de campo magnético y magnetización de la región  $I$ , pueden expresados en función de los valores de intensidad de campo magnético y magnetización de la región  $II$ , tal como se expresa a continuación:

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}_r^I|_{\tilde{r}=\gamma} &= \frac{(1 + \chi)}{\mu_p} \tilde{H}_r^{II}|_{\tilde{r}=\gamma}, \\
 \tilde{H}_\theta^I|_{\tilde{r}=\gamma} &= \tilde{H}_\theta^{II}|_{\tilde{r}=\gamma}, \\
 \tilde{M}_r^I|_{\tilde{r}=\gamma} &= \frac{(1 + \chi)}{\mu_p} \tilde{M}_r^{II}|_{\tilde{r}=\gamma}, \\
 \tilde{M}_\theta^I|_{\tilde{r}=\gamma} &= \tilde{M}_\theta^{II}|_{\tilde{r}=\gamma}.
 \end{aligned} \tag{252}$$

- Las expresiones de la Ec. (252) fueron implementadas para la solución del problema numérico en la frontera del cilindro interno,  $\tilde{r} = \gamma$ , en donde los valores de las componentes  $\tilde{H}_r$  y  $\tilde{M}_r$  presentan saltos en su magnitud, debido a la diferencia de permeabilidades relativas de los materiales (cilindro interno y ferrofluido).
- En resumen, el aporte realizado en este capítulo fue la implementación de una condición de frontera en el eje axial del cilindro interno en  $\tilde{r} = 0$ , junto con las relaciones entre las variables magnéticas de la Ec. (252), con los cuales fue posible la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales de la TDMAI, para campos magnéticos en los que  $\alpha \gg 1$  y  $\tilde{\Omega} \gg 1$ .

## CAPÍTULO 5

---

### RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS

---

A continuación, se presentan algunas recomendaciones para obtener mejores resultados en trabajos futuros, relacionados con la aplicación de la TDMAI, para la descripción de los perfiles de velocidad de ferrofluidos bajo el efecto de un campo magnético rotativo.

- Con el fin de mejorar los resultados obtenidos para la muestras de ferrofluidos contenidos en una geometría rectangular, se requiere de las mediciones experimentales del coeficiente de viscosidad volumétrico del “*spin viscosity*” ( $\lambda'$ ). Con la anterior recomendación se busca resaltar que dicho parámetro, requerido en el modelo ferrohodinámico, fue establecido en un valor tal que  $\lambda' \gg \frac{4\eta\zeta R_o^2}{\eta_e}$ . Lo anterior, con el fin de obtener una solución al sistema de ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del movimiento.
- Realizar mediciones experimentales de la velocidad lineal para una geometría anular, en donde se pueda observar el efecto de los cambios en la frecuencia del campo magnético rotativo, en la generación de los perfiles. Con estas mediciones sería posible evaluar el desempeño del modelo ferrohodinámico, frente a este tipo de variaciones del campo externo.
- Evaluar los efectos de los esfuerzos tangenciales en la geometría cilíndrica y anular, tomando como punto de partida lo realizado en este trabajo en la geometría rectangular, con dominio bidimensional. Con esto podremos encontrar los perfiles de velocidad cercanos tanto a la parte inferior del contenedor como a la interfase ferrofluido-aire, es decir,  $\mathbf{v} = v_\theta(r, z)$ . Al tener en cuenta la coordenada radial y longitudinal como dominio de estudio, se van a obtener superficies de velocidad lineal y de giro que pueden mejorar el análisis de los resultados obtenidos, y de igual forma, permitiría observar el efecto conjunto de los esfuerzos volumétricos y superficiales actuando en la generación de los perfiles, para este tipo de geometrías.
- Los ferrofluidos implementados para la investigación fueron caracterizados previamente en el trabajo realizado por Torres-Díaz et al. [2]. En los experimentos reportados por estos autores, la variable  $\kappa$  fue calculada con base en un modelo que solo es válido para campos magnéticos en los que  $\alpha \ll 1$  [2, 3], lo cual no es

estrictamente válido para las magnitudes de campo magnético usados en la experimentación. Por tal motivo, se recomienda recalcular el valor de la variable  $\kappa$ , con el fin de validar los resultados del modelo con ferrofluidos caracterizados con métodos que también sean válidos para  $\alpha \gg 1$ . De esta forma, se podrá realizar un mejor estimado del parámetro fenomenológico  $\eta'$ , como también, una mejor predicción de los perfiles de velocidad. Lo anterior puede notarse al comparar las figuras 37 y 38, en donde se presentan similitudes en las simulaciones y las medidas obtenidas por Torres-Díaz et al. [2], a partir de 7,9 mT aproximadamente. Sin embargo, esto fue posible al usar un valor de  $\kappa = 3,3$  en las simulaciones, mientras que el reportado en los experimentos fue de 0,47.

- Tener en cuenta la influencia de la componente  $y$  del campo magnético y la magnetización, al momento de resolver el problema magnético en la geometría rectangular. Ya que, para facilitar el tratamiento matemático del problema, en el presente trabajo se despreció esta componente al especificar el giro del campo magnético en el plano  $xz$ , es decir, alrededor del eje  $y$ .
- Se requiere un diseño experimental en la geometría rectangular, como la realizada por Krauss et al. [45, 46], con el fin de comparar los resultados obtenidos con la TDMAI y datos experimentales. Lo anterior, ya que los resultados reportados en la literatura consultada, carecen de las especificaciones que permitan validar los resultados obtenidos a través de las simulaciones.
- En la geometría anular, se recomienda ejecutar los algoritmos de solución numérica en ordenadores de mayor capacidad de computo, con el fin de aumentar la cantidad de nodos angulares,  $n_{de\theta}$ , en la solución de los perfiles de velocidad. De esta forma, se obtendrían resultados más exactos con relación al modelo matemático, y así, no serían necesarias las aproximaciones realizadas en las expresiones de fuerza magnética, Ec. (249) y (251).

---

## REFERENCIAS

---

- [1] Victor Peña, Arlex Chaves, and David Fuentes. Evaluación de dos ecuaciones de magnetización para la predicción del flujo de ferrofluido generado por un campo magnético rotando de alta amplitud. Master's thesis, Universidad Industrial de Santander, Bucarmanga, 2015.
- [2] I Torres-Diaz, A Cortes, Y Cedeno-Mattei, O Perales-Perez, and C Rinaldi. Flows and torques in brownian ferrofluids subjected to rotating uniform magnetic fields in a cylindrical and annular geometry. *Physics of Fluids (1994-present)*, 26(1):012004, 2014.
- [3] Arlex Chaves, Markus Zahn, and Carlos Rinaldi. Spin-up flow of ferrofluids: Asymptotic theory and experimental measurements. *Physics of Fluids (1994-present)*, 20(5):053102, 2008.
- [4] Arlex Chaves. *Magnetorheology in Rotating Magnetic Fields*. phdthesis, University of Puerto Rico Mayagüez Campus, 2007.
- [5] Arlex Chaves and Carlos Rinaldi. Interfacial stress balances in structured continua and free surface flows in ferrofluids. *Physics of Fluids (1994-present)*, 26(4):042101, 2014.
- [6] Arlex Chaves, Isaac Torres-Diaz, and Carlos Rinaldi. Flow of ferrofluid in an annular gap in a rotating magnetic field. *Physics of Fluids (1994-present)*, 22(9):092002, 2010.
- [7] Joseph L Neuringer and Ronald E Rosensweig. Ferrohydrodynamics. *Physics of Fluids (1958-1988)*, 7(12):1927–1937, 1964.
- [8] R Moskowitz and RE Rosensweig. Nonmechanical torque-driven flow of a ferromagnetic fluid by an electromagnetic field. *Applied Physics Letters*, 11(10):301–303, 1967.
- [9] Ronald E Rosensweig. *Ferrohydrodynamics*. Courier Corporation, 2013.
- [10] MI Shliomis. Effective viscosity of magnetic suspensions. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 34:1291, 1972.

- 
- [11] John P McTague. Magnetoviscosity of magnetic colloids. *The Journal of Chemical Physics*, 51(1):133–136, 1969.
- [12] Alexei P Krekhov, Mark I Shliomis, and Shinichi Kamiyama. Ferrofluid pipe flow in an oscillating magnetic field. *Physics of Fluids (1994-present)*, 17(3):033105, 2005.
- [13] Carlos Rinaldi, Fernando Gutman, Xiaowei He, Adam D Rosenthal, and Markus Zahn. Torque measurements on ferrofluid cylinders in rotating magnetic fields. *Journal of magnetism and magnetic materials*, 289:307–310, 2005.
- [14] Mark I Shliomis and Konstantin I Morozov. Negative viscosity of ferrofluid under alternating magnetic field. *Physics of Fluids (1994-present)*, 6(8):2855–2861, 1994.
- [15] RE Rosensweig, J Popplewell, and RJ Johnston. Magnetic fluid motion in rotating field. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 85(1):171–180, 1990.
- [16] A Chaves, C Rinaldi, S Elborai, X He, and M Zahn. Bulk flow in ferrofluids in a uniform rotating magnetic field. *Physical Review Letters*, 96(19):194501, 2006.
- [17] Arlex Chaves, Fernando Gutman, and Carlos Rinaldi. Torque and bulk flow of ferrofluid in an annular gap subjected to a rotating magnetic field. *Transactions of the ASME*, 129:412–422, 2007.
- [18] Isaac Torres-Díaz and Carlos Rinaldi. Ferrofluid flow in the annular gap of a multipole rotating magnetic field. *Physics of Fluids (1994-present)*, 23(8):082001, 2011.
- [19] MD Cowley and Ronald E Rosensweig. The interfacial stability of a ferromagnetic fluid. *Journal of Fluid mechanics*, 30(4):671–688, 1967.
- [20] EI Kats. Rosensweig instability in ferrofluids. *Low Temperature Physics*, 37(10):812–814, 2011.
- [21] K Raj, B Moskowitz, and R Casciari. Advances in ferrofluid technology. *Journal of magnetism and magnetic materials*, 149(1-2):174–180, 1995.
- [22] VK Jain, RP Pant, and Vinod Kumar. Applications of ferrofluids in micro electro mechanical systems (mems) and micropumps. *Magnetohydrodynamics*, 44(4):417–424, 2008.
- [23] AA Bozhko and GF Putin. Magnetic action on convection and heat transfer in ferrofluid. 2004.
- [24] SF Medeiros, AM Santos, H Fessi, and A Elaissari. Stimuli-responsive magnetic particles for biomedical applications. *International journal of pharmaceuticals*, 403(1-2):139–161, 2011.

- 
- [25] MC Bautista, O Bomati-Miguel, X Zhao, MP Morales, T Gonzalez-Carreno, R Pérez de Alejo, J Ruiz-Cabello, and S Veintemillas-Verdaguer. Comparative study of ferrofluids based on dextran-coated iron oxide and metal nanoparticles for contrast agents in magnetic resonance imaging. *Nanotechnology*, 15(4):S154, 2004.
- [26] VM Zaitsev and MI Shliomis. Entrainment of ferromagnetic suspension by a rotating field. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 10(5):696–700, 1969.
- [27] OA Glazov. Role of higher harmonics in ferrosuspension motion in a rotating magnetic field. *Magnetohydrodynamics*, 11(4):31, 1975.
- [28] OA Glazov. Motion of a ferrosuspension in rotating magnetic fields. *Magnetohydrodynamics*, 11(2):16–22, 1975.
- [29] Rafael Tadmor. Marangoni flow revisited. *Journal of colloid and interface science*, 332(2):451–454, 2009.
- [30] MA Martsenyuk, Yu L Raikher, and MI Shliomis. On the kinetics of magnetization of suspension of ferromagnetic particles. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 38(2):413–416, 1974.
- [31] Arlex Chaves-Guerrero, Víctor A Peña-Cruz, Carlos Rinaldi, and David Fuentes-Díaz. Spin-up flow in non-small magnetic fields: Numerical evaluation of the predictions of the common magnetization relaxation equations. *Physics of Fluids*, 29(7):073102, 2017.
- [32] Aníbal Alvíz. Efecto de couple stresses y esfuerzos asimetricos en el flujo de un ferrofluido impulsado por un campo magnetico rotativo en un canal. Master’s thesis, Universidad Industrial de Santander, 2015.
- [33] Abdel-Fatah Lehlooh, Sami H Mahmood, and John M Williams. On the particle size dependence of the magnetic anisotropy energy constant. *Physica B: Condensed Matter*, 321(1-4):159–162, 2002.
- [34] Mark I Shliomis. Ferrohydrodynamics: retrospective and issues. In *Ferrofluids*, pages 85–111. Springer, 2002.
- [35] Carlos Rinaldi and Markus Zahn. Effects of spin viscosity on ferrofluid duct flow profiles in alternating and rotating magnetic fields. *Journal of magnetism and magnetic materials*, 252:172–175, 2002.
- [36] JS Dahler and LE Scriven. Angular momentum of continua. *Nature*, 192:36–37, 1961.
- [37] Duane W Condiff and John S Dahler. Fluid mechanical aspects of antisymmetric stress. *Physics of Fluids (1958-1988)*, 7(6):842–854, 1964.

- 
- [38] JS Dahler and LE Scriven. Theory of structured continua. i. general consideration of angular momentum and polarization. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 275, pages 504–527. The Royal Society, 1963.
- [39] HOWARD Brenner. Rheology of two-phase systems. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2(1):137–176, 1970.
- [40] Howard Brenner. Antisymmetric stresses induced by the rigid-body rotation of dipolar suspensions: Vortex flows. *International journal of engineering science*, 22(6):645–682, 1984.
- [41] RE Rosensweig. *Ferrohydrodynamics*. 1997.
- [42] D Soto-Aquino and C Rinaldi. Magnetoviscosity in dilute ferrofluids from rotational brownian dynamics simulations. *Physical Review E*, 82(4):046310, 2010.
- [43] Martin A Plonus. *Electromagnetismo aplicado*. Reverté, 1994.
- [44] PN Kaloni. Some remarks on the boundary conditions for magnetic fluids. *International journal of engineering science*, 30(10):1451–1457, 1992.
- [45] Robert Krauß, Bert Reimann, Reinhard Richter, Ingo Rehberg, and Mario Liu. Fluid pumped by magnetic stress. *Applied Physics Letters*, 86(2):024102, 2005.
- [46] Robert Krauß, Mario Liu, Bert Reimann, Reinhard Richter, and Ingo Rehberg. Pumping fluid by magnetic surface stress. *New Journal of Physics*, 8(1):18, 2006.
- [47] Ronald E Rosensweig. Stress boundary-conditions in ferrohydrodynamics. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 46(19):6113–6117, 2007.
- [48] S Feng, AL Graham, JR Abbott, and H Brenner. Antisymmetric stresses in suspensions: vortex viscosity and energy dissipation. *Journal of Fluid Mechanics*, 563:97–122, 2006.
- [49] Shahriar Khushrushahi and Markus Zahn. Ultrasound velocimetry of ferrofluid spin-up flow measurements using a spherical coil assembly to impose a uniform rotating magnetic field. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 323(10):1302–1308, 2011.
- [50] BU Felderhof. Entrainment by a rotating magnetic field of a ferrofluid contained in a sphere. *Physical Review E*, 84(4):046313, 2011.
- [51] Isaac Torres-Díaz, Carlos Rinaldi, Shahriar Khushrushahi, and Markus Zahn. Observations of ferrofluid flow under a uniform rotating magnetic field in a spherical cavity. *Journal of Applied Physics*, 111(7):07B313, 2012.
- [52] Bhumika Sule, Isaac Torres-Díaz, and Carlos Rinaldi. Flow of immiscible ferrofluids in a planar gap in a rotating magnetic field. *Physics of Fluids (1994-present)*, 27(7):073303, 2015.

- 
- [53] Markus Zahn and Donald R Greer. Ferrohydrodynamic pumping in spatially uniform sinusoidally time-varying magnetic fields. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 149(1):165–173, 1995.
- [54] J Popplewell, RE Rosensweig, and RJ Johnston. Magnetic field induced rotations in ferrofluids. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(5):1852–1854, 1990.
- [55] Carlos Rinaldi. *Continuum modeling of polarizable systems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2002.
- [56] HOWARD Brenner. Rheology of a dilute suspension of dipolar spherical particles in an external field. *Journal of Colloid and Interface Science*, 32(1):141–158, 1970.
- [57] John H Mathews, Kurtis D Fink, et al. *Numerical methods using MATLAB*, volume 4. Pearson Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2004.
- [58] MI Shliomis. Magnetic fluids. *Physics-Uspokhi*, 17(2):153–169, 1974.
- [59] William M Deen. *Analysis of Transport Phenomena, Topics in Chemical Engineering*, volume 3. Oxford University Press, New York, 1998.
- [60] I Torres-Diaz and C Rinaldi. Ferrofluid flow in a spherical cavity under an imposed uniform rotating magnetic field: Spherical spin-up flow. *Physics of Fluids (1994-present)*, 24(8):082002, 2012.

---

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] Chaves, A., Zahn, M., Rinaldi, C., “Spin-up flow of ferrofluids: Asymptotic theory and experimental measurements,” *Physics of Fluids*, pp. 053102, 2008.
- [2] Chaves, A., Torres-Diaz, I., Rinaldi, C., “Flow of ferrofluid in an annular gap in a rotating magnetic field,” *Physics of Fluids*, pp. 092002, 2010.
- [3] Chaves, A., Rinaldi, C., “Interfacial stress balances in structured continua and free surface flows in ferrofluids,” *Physics of Fluids*, pp. 042101, 2014.
- [4] Chaves-Guerrero, A., Peña-Cruz, V. A., Rinaldi, C., Fuentes-Díaz, D., “Spin-up flow in non-small magnetic fields: Numerical evaluation of the predictions of the common magnetization relaxation equations,” *Physics of Fluids*, pp.073102, 2017.
- [5] Deen, W. M., “Analysis of transport phenomena,” *Oxford University Press*, 1998.
- [6] Krauß, R., Liu, M., Reimann, B., Richter, R., Rehberg, I., “Pumping fluid by magnetic surface stress,” *New Journal of Physics*, 2006.
- [7] Martsenyuk, M. A., Raikher, Y. L., Shliomis, M. I., “On the kinetics of magnetization of suspension of ferromagnetic particles,” *Soviet Physics-JETP*, pp.413-416, 1974.
- [8] Moskowitz, R., Rosensweig, R. E., “Nonmechanical torque-driven flow of a ferromagnetic fluid by an electromagnetic field,” *Applied Physics Letters*, pp. 301-303, 1967.
- [9] Neuringer, J. L., Rosensweig, R. E., “Ferrohydrodynamics,” *The Physics of Fluids*, pp. 1927-1937, 1964.
- [10] Rosensweig, R. E., “Stress boundary-conditions in ferrohydrodynamics,” *Industrial engineering chemistry research*, pp. 6113-6117, 2007.
- [11] Rosensweig, R. E., “Ferrohydrodynamics,” *Courier Corporation.*, 2013.
- [12] Shliomis, M. I., “Effective viscosity of magnetic suspensions,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, 1971.

- 
- [13] Torres-Díaz, I., Rinaldi, C., Khushrushahi, S., Zahn, M., “Observations of ferrofluid flow under a uniform rotating magnetic field in a spherical cavity,” *Journal of Applied Physics*, pp. 012004, 2012.
- [14] Torres-Díaz, I., Cortes, A., Cedeno-Mattei, Y., Perales-Perez, O., Rinaldi, C., “Flows and torques in Brownian ferrofluids subjected to rotating uniform magnetic fields in a cylindrical and annular geometry,” *Physics of Fluids*, pp. 012004, 2014.
- [15] Zahn, M., Greer, D. R., “Ferrohydrodynamic pumping in spatially uniform sinusoidally time-varying magnetic fields,” *Journal of magnetism and Magnetic materials*, 1995.
- [16] Zaitsev, V. M., Shliomis, M. I., “Entrainment of ferromagnetic suspension by a rotating field,” *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1969.

## ANEXO A

# OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN SH-72 Y MRSH-74 SIN DIMENSIONES

En este anexo, se presenta el proceso para deducir la ecuación Sh-72 sin dimensiones. La metodología para obtener una ecuación adimensional y de orden uno fue presentada anteriormente por Chaves *et al* [3, 4], la cual es resumida a continuación.

La ecuación de magnetización propuesta por Shliomis es [10]:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{vM}) = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{M} - \frac{1}{\tau} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0). \quad (1)$$

Las variables escaladas del sistema, las cuales fueron determinadas en la referencia [3], son:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \frac{\mathbf{M}}{\chi_i H}, & \tilde{\mathbf{H}} &= \frac{\mathbf{H}}{H}, & \tilde{\mathbf{B}} &= \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 H}, & \tilde{\nabla} &= \delta \nabla, & \tilde{x} &= \frac{x}{\delta}, & \tilde{t} &= \Omega t_f, \\ \tilde{p} &= \frac{\zeta p}{\mu_0 \eta \chi_i H^2 \tilde{\Omega}}, & \tilde{\boldsymbol{\omega}} &= \frac{\zeta \boldsymbol{\omega}}{\mu_0 \chi_i H^2 \tilde{\Omega}}, & \tilde{\mathbf{v}} &= \frac{\zeta \mathbf{v}}{\mu_0 \chi_i H^2 \tilde{\Omega} \delta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Reemplazando el valor de las variables dimensionales de la Ec. (3) en la Ec. (1), da como resultado la Ec. (3).

$$\Omega \tau \chi \kappa \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\mu_0 \chi_i K^2 \tau}{\zeta} \tilde{\Omega} \chi \kappa \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}} = \frac{\mu_0 \chi_i K^2 \tau}{\zeta} \tilde{\Omega} \chi \kappa \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{M}} - \chi \kappa \tilde{\mathbf{M}} + \mathbf{M}_{eq}. \quad (3)$$

Al dividir la Ec. (3) por el termino  $\chi \kappa$ , se tiene que:

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\mu_0 \chi_i K^2 \tau}{\zeta} \tilde{\Omega} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}} = \frac{\mu_0 \chi_i K^2 \tau}{\zeta} \tilde{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{M}} - \tilde{\mathbf{M}} + \frac{\mathbf{M}_{eq}}{\chi \kappa}. \quad (4)$$

En la Ec. (4), se puede observar el coeficiente que acompaña al término convectivo,  $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}}$ , y al termino  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{M}}$ , el cual, en la referencia [3], fue seleccionado como el parámetro de perturbación,  $\varepsilon$ , quedando definido de la siguiente manera:

$$\varepsilon \equiv \frac{\mu_0 \chi_i K^2 \tau}{\zeta}. \quad (5)$$

Finalmente, la Ec. (4) queda expresada como se muestra en la Ec. (6).

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial t} + \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{M}} - \tilde{\mathbf{M}} + \frac{\mathbf{M}_{eq}}{\chi \kappa}. \quad (6)$$

A continuación, se presenta el procedimiento para deducir la ecuación MRSh-74 adimensional. La ecuación lineal que describe la relajación de la magnetización ( $\mathbf{M}$ ) presente en la partícula ferromagnética, debido al efecto de un campo magnético externo ( $\mathbf{H}$ ), es [30]:

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} - \frac{\mathbf{H} [\mathbf{H} \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{M}_{eq})]}{\tau_{\parallel} |\mathbf{H}|^2} - \frac{\mathbf{H} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})}{\tau_{\perp} |\mathbf{H}|^2}, \quad (7)$$

donde

$$\tau_{\parallel} = \frac{d \ln L(\alpha)}{d \ln \alpha} \tau_B, \quad \tau_{\perp} = \frac{2L(\alpha)}{\alpha - L(\alpha)}, \quad (8)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \frac{\mu_0 M_d d^3 |\mathbf{H}|}{k_B T}. \quad (9)$$

En la Ec. (7), se extiende el término de la derivada material,  $\frac{D}{Dt}$ , y se aplica la definición del producto vectorial triple en el tercer término, con el fin de obtener la Ec. (10) y (11).

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{M}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} - \left[ \frac{\mathbf{H} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{M})}{\tau_{\parallel} |\mathbf{H}|^2} - \frac{\mathbf{H} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{M}_{eq})}{\tau_{\parallel} |\mathbf{H}|^2} - \left[ \frac{\mathbf{M} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{M})}{\tau_{\perp} |\mathbf{H}|^2} \right] \right]. \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{M}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} - \frac{\mathbf{H} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{M})}{\tau_{\parallel} |\mathbf{H}|^2} + \frac{\mathbf{H} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{M}_{eq})}{\tau_{\parallel} |\mathbf{H}|^2} - \frac{\mathbf{M}}{\tau_{\perp}} + \frac{\mathbf{H} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{M})}{\tau_{\perp} |\mathbf{H}|^2}. \quad (11)$$

Por lo tanto, al considerar que la magnetización de equilibrio,  $\mathbf{M}_{eq}$ , se puede expresar como

$$\frac{M_{eq}}{\phi M_d} = L(\alpha) \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} = \left[ \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \right] \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}, \quad (12)$$

donde

$$\alpha = \frac{\mu_0 M_d |\mathbf{H}| V_c}{k_B T}. \quad (13)$$

Por tal motivo, de acuerdo con la Ec. (12),

$$\mathbf{M}_{eq} = \phi M_d \left[ \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \right] \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}. \quad (14)$$

En consecuencia, la magnetización de equilibrio adimensional,  $\tilde{\mathbf{M}}_{eq}$ , se puede expresar como

$$\tilde{\mathbf{M}}_{eq} = \frac{\mathbf{M}_{eq}}{\chi K} = \frac{\phi M_d}{\chi K} \left[ \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \right] \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}. \quad (15)$$

Por otra parte, la susceptibilidad magnética inicial ( $\chi$ ) se puede definir como en la Ec. (16), [1].

$$\chi = \frac{\pi \phi \mu_0 M_d^2 d^3}{18 k_B T}, \quad (16)$$

de modo que, al reemplazar la Ec. (16) y (9) en la Ec. (15) se obtiene la Ec. (17)

$$\tilde{\mathbf{M}}_{eq} = 3 \tilde{\mathbf{H}} \left[ \frac{\coth(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right]. \quad (17)$$

Por esta razón,

$$\mathbf{M}_{eq} = 3 \chi \mathbf{H} \left[ \frac{\coth(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right]. \quad (18)$$

De modo que, la Ec. (11) queda expresada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{M}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} + \frac{\mathbf{H}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{M})}{\tau_{\perp} |\mathbf{H}|^2} - \frac{\mathbf{H}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{M})}{\tau_{\parallel} |\mathbf{H}|^2} + \frac{3 \chi \mathbf{H} \varphi}{\tau_{\parallel}} - \frac{\mathbf{M}}{\tau_{\perp}}, \quad (19)$$

donde

$$\varphi = \frac{\coth(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}, \quad (20)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{2} \varepsilon |\tilde{\mathbf{H}}|^2}. \quad (21)$$

Considerando cada variable con dimensiones, de acuerdo con lo establecido en la Ec. (3) del Apéndice A, la Ec. (19) se reformula como,

$$\begin{aligned} \Omega \chi K \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\mu_0 \chi K^2 \tilde{\Omega} R_0}{\zeta} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \left( \frac{1}{R_0} \tilde{\nabla} \cdot \chi K \tilde{\mathbf{M}} \right) = \\ \frac{\mu_0 \chi K^2 \tilde{\Omega}}{\zeta} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \chi K \tilde{\mathbf{M}} + \frac{K \tilde{\mathbf{H}} (K \tilde{\mathbf{H}} \cdot \chi K \tilde{\mathbf{M}})}{K^2 |\tilde{\mathbf{H}}|^2} \\ \left( \frac{1}{\tau_{\perp}} - \frac{1}{\tau_{\parallel}} \right) + \frac{3 \chi K \tilde{\mathbf{H}} \varphi}{\tau_{\parallel}} - \frac{\chi K \tilde{\mathbf{M}}}{\tau_{\perp}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Multiplicando la Ec. (22) por el termino  $\frac{\tau}{\chi K}$ , se tiene la Ec. (23).

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\mu_0 \chi K^2 \tau}{\zeta} \tilde{\Omega} \tilde{\mathbf{v}} \cdot (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{M}}) = \frac{\mu_0 \chi K^2 \tau}{\zeta} \tilde{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{M}} \\ + \frac{\tilde{\mathbf{H}} (\tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{M}})}{|\tilde{\mathbf{H}}|^2} \left( \frac{1}{B_{\perp}} - \frac{1}{B_{\parallel}} \right) + \frac{3 \tilde{\mathbf{H}} \varphi}{B_{\parallel}} - \frac{\tilde{\mathbf{M}}}{B_{\perp}}, \end{aligned} \quad (23)$$

donde

$$B_{\parallel} = \frac{\tau_{\parallel}}{\tau_B} = \frac{d \ln L(\alpha)}{d \ln(\alpha)}, \quad B_{\perp} = \frac{\tau_{\perp}}{\tau_B} = \frac{2L(\alpha)}{\alpha - L(\alpha)}, \quad (24)$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{d \ln L(\alpha)}{d \ln \alpha} \tau_B, \quad \tau_{\perp} = \frac{2L(\alpha)}{\alpha - L(\alpha)}. \quad (25)$$

Finalmente, en la Ec. (26) se presenta la ecuación de relajación de la magnetización adimensional MRSh-74.

$$\tilde{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\mathbf{v}} \cdot (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{M}}) = \tilde{\Omega} \varepsilon \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{M}} + \frac{\tilde{\mathbf{H}} (\tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{M}})}{|\tilde{\mathbf{H}}|^2} \left( \frac{1}{B_{\perp}} - \frac{1}{B_{\parallel}} \right) + \frac{3 \tilde{\mathbf{H}} \varphi}{B_{\parallel}} - \frac{\tilde{\mathbf{M}}}{B_{\perp}}. \quad (26)$$

## ANEXO B

# APLICACIÓN DE SERIES DE FOURIER

A continuación, se presenta la aplicación de la metodología de solución en series de Fourier para determinar los perfiles de velocidad lineal, en una geometría rectangular con dominio bidimensional. En este análisis se supone el coeficiente fenomenológico  $\eta' = 0$ . Este procedimiento está relacionado con la presentación de la metodología expuesta en Deen [59].

De forma inicial, se expresa la componente axial de la ecuación de balance de momento lineal, para  $\alpha \ll 1$ , teniendo en cuenta el ancho y la altura del canal,  $W$  y  $H$  respectivamente.

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{H^2}{W^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{y}^2} = 0. \quad (1)$$

La Ec. (1) es la misma Ec. (150), pero con la implementación de la variable horizontal adimensional  $\tilde{y}$ , definida como  $\tilde{y} = \frac{y}{W}$ . Para la solución de la Ec. (1), se requieren de las condiciones de frontera expuestas en la Ec. (2). Para mayor referencia, ver figura 18.

$$\tilde{v}_z(\tilde{x}, 0) = 0, \quad \tilde{v}_z(\tilde{x}, 1) = 0, \quad \tilde{v}_z(0, \tilde{y}) = 0 \quad y \quad \frac{\partial \tilde{v}_z(1, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} = A. \\ A = -\frac{\zeta \langle \tilde{l}_y \rangle_{t,0}}{2\eta\tilde{\Omega}}. \quad (2)$$

Las condiciones de frontera de la Ec. (2) tienen en cuenta la velocidad nula en la pared inferior y en las paredes laterales del canal. Asimismo, la velocidad se hace no uniforme debido a la variación impuesta por los esfuerzos tangenciales en la frontera de  $\tilde{x} = 1$  (interfase ferrofluido-aire). A continuación, se busca evaluar el efecto de los esfuerzos tangenciales en la interfase, relacionados con la generación de flujo, a través de la solución de  $\tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y})$ , en el dominio bidimensional del canal. El procedimiento de solución comienza asumiendo que la velocidad  $\tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y})$ , producto de la solución de la Ec. (1), se puede expresar como:

$$\tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\tilde{x}) \Phi_n(\tilde{y}). \quad (3)$$

En donde  $\Phi_n(\tilde{y})$  es la función base, la cual depende de las condiciones de frontera del sistema en estudio. Para este caso en particular, teniendo en cuenta la condición de frontera nula para la coordenada horizontal en  $\tilde{y} = 0$  y  $\tilde{y} = 1$  (paredes laterales), la función base a implementar es:

$$\Phi_n(\tilde{y}) = \sqrt{2} \sin(n\pi\tilde{y}). \quad \text{Para } n = 1, 2 \dots \quad (4)$$

La Ec. (4) cumple con las condiciones de frontera de la Ec. (2), para la coordenada horizontal  $\tilde{y}$ . El factor  $\sqrt{2}$  normaliza la función base de una forma deseada. A continuación, se prosigue a determinar los coeficientes  $C_n(\tilde{x})$  que multiplican a la ecuación base, para completar la solución expresada en la Ec (3). Ahora, asumiendo que la función  $\tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y})$  puede ser representada a través de una serie de Fourier, los coeficientes  $C_n(\tilde{x})$  que multiplican a la función base escogida, corresponden a los términos  $\tilde{v}_n(\tilde{x})$ , los cuales son definidos con relación al producto interno de funciones,  $\langle f, g \rangle \equiv \int_a^b f(x) g(x) dx$ , de la siguiente manera:

$$C_n(\tilde{x}) = \tilde{v}_n(\tilde{x}) = \langle \Phi_n(\tilde{y}), \tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y}) \rangle. \quad (5)$$

Es así como, al determinar los coeficientes  $C_n(\tilde{x})$ , obtendremos la solución de la Ec. (1), la cual describe los perfiles de velocidad lineal, para ferrofluidos en un contenedor de placas planas y paralelas, bajo el efecto de un campo magnético en el que  $\alpha \ll 1$  y  $\tilde{\Omega} \ll 1$ . Por lo tanto, aplicando la Ec. (5) a la Ec. (1), se tiene que:

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{H^2}{W^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{y}^2} \right) \Phi_n(\tilde{y}) d\tilde{y} = \int_0^1 \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}^2} \Phi_n(\tilde{y}) d\tilde{y} + \frac{H^2}{W^2} \int_0^1 \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{y}^2} \Phi_n(\tilde{y}) d\tilde{y} = 0. \quad (6)$$

En el primer término de la derecha de la Ec. (6), la derivada es con respecto a la variable  $\tilde{x}$ , mientras que la integral es con respecto a la variable  $\tilde{y}$ . Por lo tanto, es posible sacar de la integral dicha derivada, quedando este término expresado de la siguiente manera:

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}^2} \Phi_n(\tilde{y}) d\tilde{y} = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \int_0^1 \tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y}) \Phi_n(\tilde{y}) d\tilde{y} = \frac{\partial^2 \tilde{v}_n(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2}. \quad (7)$$

Por otro lado, el segundo término de la derecha de la Ec. (6), se resuelve realizando una integración por partes, operada como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{y}^2} \Phi_n(\tilde{y}) d\tilde{y} &= \left( \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{y}} \Phi_n \right)_{\tilde{y}=0}^{\tilde{y}=1} - \int_0^1 \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{y}} \frac{d\Phi_n(\tilde{y})}{d\tilde{y}} d\tilde{y} \\
 &= \left( \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{y}} \Phi_n \right)_{\tilde{y}=0}^{\tilde{y}=1} - \left( \tilde{v}_z \frac{d\Phi_n}{d\tilde{y}} \right)_{\tilde{y}=0}^{\tilde{y}=1} + \int_0^1 \tilde{v}_z \frac{d^2 \Phi_n}{d\tilde{y}^2} d\tilde{y}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

En la Ec. (8), el primer y el segundo término son nulos, debido a la función base seleccionada y la velocidad nula en las paredes laterales del canal. Por tal motivo:

$$\frac{H^2}{W^2} \int_0^1 \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{y}^2} \Phi_n(\tilde{y}) d\tilde{y} = \frac{H^2}{W^2} \int_0^1 \tilde{v}_z \frac{d^2 \Phi_n}{d\tilde{y}^2} d\tilde{y}. \quad (9)$$

Ahora, teniendo en cuenta la definición de la Ec. (4), se tiene que:

$$\frac{d^2 \Phi_n}{d\tilde{y}^2} = -\sqrt{2} (n\pi)^2 \sin(n\pi\tilde{y}) = -(n\pi)^2 \Phi_n(\tilde{y}). \quad (10)$$

Por tal motivo, la Ec. (9) queda definida como:

$$\begin{aligned}
 \frac{H^2}{W^2} \int_0^1 \tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y}) \frac{d^2 \Phi_n}{d\tilde{y}^2} d\tilde{y} &= -\frac{H^2}{W^2} \int_0^1 \tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y}) (n\pi)^2 \Phi_n(\tilde{y}) d\tilde{y} \\
 &= -\frac{H^2}{W^2} (n\pi)^2 \int_0^1 \tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y}) \Phi_n(\tilde{y}) d\tilde{y} = -\frac{H^2}{W^2} (n\pi)^2 \tilde{v}_n(\tilde{x}). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Entonces, la Ec. (6) queda transformada como se expresa en la Ec. (12).

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_n(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{H^2}{W^2} (n\pi)^2 \tilde{v}_n(\tilde{x}) = 0. \quad (12)$$

De igual manera, aplicando el concepto de la transformada de Fourier a las condiciones de frontera, se obtiene, para la pared inferior del canal, que:

$$\tilde{v}_n(\tilde{x} = 0) = \int_0^1 \tilde{v}_z(0, \tilde{y}) \Phi_n(\tilde{y}) d\tilde{y} = 0. \quad (13)$$

Por su parte, en la interfase ferrofluido-aire, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{v}_z(1, \tilde{y})}{d\tilde{x}} &= -\frac{\zeta \tilde{l}_y}{2\eta \tilde{\Omega}} = A, \\
 \frac{d\tilde{v}_n(1)}{d\tilde{x}} &= \int_0^1 \frac{\partial \tilde{v}_z(1, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} \Phi_n(\tilde{y}) d\tilde{y} = \int_0^1 A \Phi_n(\tilde{y}) d\tilde{y} = \int_0^1 A \sqrt{2} \sin(n\pi\tilde{y}) d\tilde{y}, \\
 \frac{d\tilde{v}_n(1)}{d\tilde{x}} &= -\frac{\sqrt{2}A}{n\pi} [(-1)^n - 1]. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Entonces, al resolver la Ec. (12), se determina que:

$$\tilde{v}_n(\tilde{x}) = C_1 e^{\frac{n\pi H\tilde{x}}{W}} + C_2 e^{-\frac{n\pi H\tilde{x}}{W}}. \quad (15)$$

Por lo tanto, al implementar las condiciones de frontera transformadas, se obtienen las dos ecuaciones necesarias para determinar el valor de las constantes  $C_1$  y  $C_2$ , tal como se expresa en la Ec. (16).

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, \\ \frac{n\pi H}{W} C_1 e^{\frac{n\pi H}{W}} - \frac{n\pi H}{W} C_2 e^{-\frac{n\pi H}{W}} &= -\frac{\sqrt{2}A}{n\pi} [(-1)^n - 1], \\ C_1 = -C_2 &= \frac{-\sqrt{2}A W e^{\frac{n\pi H}{W}} [(-1)^n - 1]}{H (n\pi)^2 \left( e^{\frac{2n\pi H}{W}} + 1 \right)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Finalmente, de acuerdo con la definición de la Ec. (3), la solución a la Ec. (1) es:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\tilde{x}) \Phi_n(\tilde{y}), \\ \tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sqrt{2}A W e^{\frac{n\pi H}{W}} [(-1)^n - 1]}{H (n\pi)^2 \left( e^{\frac{2n\pi H}{W}} + 1 \right)} \left( e^{\frac{n\pi H\tilde{x}}{W}} - e^{-\frac{n\pi H\tilde{x}}{W}} \right) \sin(n\pi\tilde{y}). \end{aligned} \quad (17)$$

De esta manera, se obtuvieron los perfiles de velocidad lineal,  $\tilde{v}_z(\tilde{x}, \tilde{y})$ , para ferrofluidos que están bajo el efecto de campos magnéticos rotativos de baja intensidad, contenidos en un canal rectangular de ancho y altura  $W$  y  $H$ , respectivamente, y  $\eta' = 0$ .

## ANEXO C

# VARIABLES MAGNÉTICAS EN $\tilde{r} = \gamma$

En este anexo, se presenta el proceso para obtener las expresiones de las variables magnéticas de la región  $I$ , en función de las variables magnéticas de la región  $II$ , para la frontera del cilindro interno en  $\tilde{r} = \gamma$ , en el contenedor de la figura 51. Lo anterior, con el fin de implementar las diferencias finitas a los términos relacionados con la derivada radial,  $\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}$ , en las ecuaciones del problema magnético.

De manera inicial, se toman las condiciones de frontera para la zona geométrica en la que  $\tilde{r} = \gamma$ .

$$\text{En } \tilde{r} = \gamma \quad \begin{cases} \tilde{B}_r^{II} - \tilde{B}_r^I = 0, \\ \tilde{H}_\theta^{II} - \tilde{H}_\theta^I = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Prosiguiendo, en la Ec. (1) se tiene en cuenta la definición de la densidad de campo magnético  $\tilde{\mathbf{B}}$ , en función de la intensidad de campo magnético  $\tilde{\mathbf{H}}$  y la magnetización  $\tilde{\mathbf{M}}$ , lo cual se expresa en la Ec. (2).

$$\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{H}} + \chi \tilde{\mathbf{M}} = \mu \tilde{\mathbf{H}}. \quad (2)$$

En consecuencia, la Ec. (1) se expresa como:

$$\mu_r \tilde{H}_r^I = \tilde{H}_r^{II} + \chi \tilde{M}_r^{II}, \quad (3)$$

$$\tilde{H}_\theta^I = \tilde{H}_\theta^{II}. \quad (4)$$

Por su parte, independientemente de la región de análisis del fenómeno, la componente radial de la densidad de campo magnético,  $\tilde{B}_r$ , se puede representar de la siguiente manera:

$$\tilde{B}_r = \mu_r \tilde{H}_r = \tilde{H}_r + \chi \tilde{M}_r. \quad (5)$$

De modo que, al reorganizar la Ec. (5) se obtiene

$$(\mu_r - 1) \tilde{H}_r = \chi \tilde{M}_r. \quad (6)$$

Ahora, considerando la definición de la susceptibilidad magnética ( $\chi$ ) en función de la permeabilidad magnética relativa del ferrofluido ( $\mu_r$ ), se tiene que:

$$\mu_r = 1 + \chi. \quad (7)$$

Por lo tanto, la Ec. (6) queda expresada como:

$$\tilde{H}_r = \tilde{M}_r. \quad (8)$$

De manera que, al reemplazar la Ec. (8) en la Ec. (3) se obtiene la siguiente expresión, para la componente radial de la intensidad de campo magnético, en la frontera  $\tilde{r} = \gamma$ .

$$\tilde{H}_r^I = \frac{(1 + \chi)}{\mu_r} \tilde{H}_r^{II}. \quad (9)$$

De forma análoga, al aplicar la Ec. (8) a la Ec. (9), se obtiene la expresión de la magnetización en la frontera  $\tilde{r} = \gamma$ .

$$\tilde{M}_r^I = \frac{(1 + \chi)}{\mu_r} \tilde{M}_r^{II}. \quad (10)$$

De modo similar, al considerar la componente  $\theta$  de la densidad de campo magnético,  $\tilde{B}_\theta$ , y la Ec. (7), se tiene que:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_\theta &= \mu_r \tilde{H}_\theta = \tilde{H}_\theta + \chi \tilde{M}_\theta, \\ (\mu_r - 1) \tilde{H}_\theta &= \chi \tilde{M}_\theta, \\ \tilde{H}_\theta &= \tilde{M}_\theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Por tal motivo, la Ec. (4) puede ser expresada en términos de la magnetización en  $\tilde{r} = \gamma$ .

$$\tilde{M}_\theta^I = \tilde{M}_\theta^{II}. \quad (12)$$

Para implementar estos resultados en la metodología de solución numérica, se discretizan la Ec. (4), (9), (10) y (12). Obteniendo así las expresiones de la Ec. (13).

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{r,\gamma}^{j,k|I} &= \frac{(1 + \chi)}{\mu_r} \tilde{H}_{r,\gamma}^{j,k|II}, \\ \tilde{H}_{\theta,\gamma}^{j,k|I} &= \tilde{H}_{\theta,\gamma}^{j,k|II}, \\ \tilde{M}_{r,\gamma}^{j,k|I} &= \frac{(1 + \chi)}{\mu_r} \tilde{M}_{r,\gamma}^{j,k|II}, \\ \tilde{M}_{\theta,\gamma}^{j,k|I} &= \tilde{M}_{\theta,\gamma}^{j,k|II}. \end{aligned} \quad (13)$$

En donde las variables  $i$ ,  $j$  y  $k$  representan los nodos de la coordenada  $\tilde{r}$ ,  $\theta$  y  $\tilde{t}$ , respectivamente. Para mayor referencia ver figura 50.

## ANEXO D

# ECUACIONES HIDRODINÁMICAS ADIMENSIONALES

En este anexo se presenta el proceso para obtener el sistema de ecuaciones hidrodinámicas adimensionales. Para iniciar, se presenta como referencia la ecuación de balance de momento lineal, Ec. (1).

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} - \nabla p - 2\zeta \nabla \times \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right) + \eta \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (1)$$

Ahora, teniendo en cuenta que el primer término de la Ec. (1) se puede considerar nulo, teniendo en cuenta un flujo desarrollado de bajo número de Reynolds, es decir, en el que se pueden despreciar los efectos convectivos relacionados con el fenómeno de transporte, por lo tanto:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) = \mathbf{0}. \quad (2)$$

De igual manera, las escalas de las variables del sistema que se toman como referencia se presentan en la Ec. (3).

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \frac{\mathbf{M}}{\chi_i H}, & \tilde{\mathbf{H}} &= \frac{\mathbf{H}}{H}, & \tilde{\mathbf{B}} &= \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 H}, & \tilde{\nabla} &= \delta \nabla, & \tilde{r} &= \frac{r}{R_0}, & \tilde{t} &= \Omega t_f, \\ \tilde{\Omega} &= \Omega \tau, & \tilde{p} &= \frac{\zeta p}{\mu_0 \eta \chi_i H^2 \tilde{\Omega}}, & \tilde{\boldsymbol{\omega}} &= \frac{\zeta \boldsymbol{\omega}}{\mu_0 \chi_i H^2 \tilde{\Omega}}, & \tilde{\mathbf{v}} &= \frac{\zeta \mathbf{v}}{\mu_0 \chi_i H^2 \tilde{\Omega} \delta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Es por esto que, al implementar la Ec. (2) y (3) en la Eq. (1), se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \frac{\mu_0 \chi K^2}{\eta} \tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}} - \frac{\mu_0 \chi K^2 \tilde{\Omega}}{\zeta} \tilde{\nabla} \tilde{p} \\ &\quad - \frac{2\zeta}{\eta} \tilde{\nabla} \times \left( \frac{1}{2} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \right) \frac{\mu_0 \chi K^2 \tilde{\Omega}}{\zeta} + \frac{\mu_0 \chi K^2 \tilde{\Omega}}{\zeta} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Ahora, al multiplicar la Ec. (4) por el factor  $\frac{\zeta}{\mu_0 \chi K^2 \tilde{\Omega}}$ , se obtiene la Ec. (5).

$$\mathbf{0} = \frac{\zeta}{\tilde{\Omega}\eta} \tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}} - \tilde{\nabla} \tilde{p} - \frac{2\zeta}{\eta} \tilde{\nabla} \times \left( \frac{1}{2} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \right) + \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}. \quad (5)$$

Seguidamente, al aplicar la expansión del producto triple vectorial al tercer término de la Ec. (5), y considerando la ecuación de continuidad, se puede expresar que

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\nabla} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) - \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}. \quad (6)$$

Finalmente, al implementar la Ec. (6) en la Ec. (5), reduciendo términos semejantes, se obtiene la ecuación de conservación del momentum lineal de forma adimensional, mostrada en la Ec. (7).

$$\mathbf{0} = \frac{\zeta}{\tilde{\Omega}\eta} \tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}} - \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{2\zeta}{\eta} \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{\eta_e}{\eta} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}. \quad (7)$$

Asimismo, la ecuación de balance de momento angular interno es:

$$\rho I \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} + \eta' \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + 4\zeta \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right). \quad (8)$$

De forma análoga a lo considerado en la ecuación de balance de momento lineal, se realiza un análisis en estado no transiente y se supone un ferrofluido de bajo número de Reynolds, de modo que:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Por tal motivo, la Ec. (8) se reduce a:

$$\mathbf{0} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} + \eta' \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + 4\zeta \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right). \quad (10)$$

Ahora, considerando las expresiones de las variables adimensionales de la Ec. (3), se tiene que la Ec. (10) puede ser presentada así:

$$\mathbf{0} = \mu_0 \chi K^2 \tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}} + \eta' \tilde{\nabla}^2 \tilde{\boldsymbol{\omega}} \frac{\mu_0 \chi K^2 \tilde{\Omega}}{R_0^2 \zeta} + 4 \mu_0 \chi K^2 \tilde{\Omega} \left( \frac{1}{2} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \right). \quad (11)$$

De ahí que, al dividir la Ec. (11) por el término  $\mu_0 \chi K^2 \tilde{\Omega}$ , se obtiene la Ec. (12).

$$\mathbf{0} = \frac{1}{\tilde{\Omega}} \tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}} + \frac{\eta'}{R_0^2 \zeta} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\boldsymbol{\omega}} + 4 \left( \frac{1}{2} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \right). \quad (12)$$

Finalmente, reescribiendo el coeficiente del término difusivo, segundo término del miembro derecho de la Ec. (12), en la Ec. (13) se presenta la ecuación de balance de momento angular interno adimensional.

$$\mathbf{0} = \frac{1}{\tilde{\Omega}} \tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}} + 2 \left( \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} \right) - 4 \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad (13)$$

donde

$$\kappa^2 \equiv \frac{4\eta R_0^2 \zeta}{\eta_e \eta'} \quad \text{and} \quad \eta_e = \eta + \zeta. \quad (14)$$

## ANEXO E

# CONDICIÓN DE FRONTERA MAGNÉTICA EN $\tilde{r} = 0$

A continuación, se muestra la aplicación de la ecuación de conservación integral a un volumen de control en movimiento [59], aplicada a una muestra de ferrofluido inmersa en el contenedor cilíndrico de la figura 33.

Considerando que un volumen de control es cualquier región cerrada en el espacio, con el fin de formular ecuaciones de balance, se tiene que la forma básica de la ecuación de conservación integral es [59]:

$$\frac{d}{dt} \int_V b dV = - \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V B_v dV. \quad (1)$$

En la Ec. (1),  $V$  y  $S$  representan el espacio ocupado y la superficie del volumen de control, respectivamente. De igual manera,  $b$  representa la concentración de la cantidad en estudio,  $\mathbf{F}$  el flux total de esta cantidad,  $\mathbf{n}$  el vector normal unitario en cada punto de la superficie del volumen de control y  $B_v$  la tasa de generación o formación de una cantidad por unidad de volumen. También, la velocidad del fluido y la velocidad de la superficie de control son  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v}_s$ , respectivamente. Para un punto dado en la superficie de control la velocidad relativa del fluido con respecto a la superficie es  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_s$  y la componente de la velocidad, que es perpendicular a la superficie de control y dirigida hacia el exterior del volumen, es  $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{n}$ . En la Ec. (1) se consideró una superficie de control fija, esto es,  $\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$ . Por lo tanto, la cantidad contenida en un elemento diferencial de volumen centrado alrededor de un punto dado  $\mathbf{r}$  es  $b(\mathbf{r}, t) dV$ . La tasa de *entrada* de la cantidad en el volumen de control, a través del elemento diferencial de superficie es  $-(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS$ . El signo menos es necesario, ya que el vector normal unitario  $\mathbf{n}$  apunta hacia afuera del volumen de control. Debido a que esta cantidad se genera dentro del volumen de control, se puede expresar por medio del término  $B_v dV$ . La notación  $\int_V dV$  y  $\int_S dS$  indican que se integra alrededor del volumen y la superficie de control, respectivamente. Debido a que la cantidad en estudio depende del espacio y del tiempo, una vez se integra el primer término de la Ec. (1), la expresión resultante solo dependerá del tiempo. Por tal motivo, se implementa la derivada total  $\left(\frac{d}{dt}\right)$  en vez de la parcial  $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ .

Ahora, un volumen de control móvil es aquel que se está moviendo, rotando o deformando, de modo que,  $V$  y  $S$  dependen del tiempo y  $\mathbf{v}_s \neq \mathbf{0}$ . En estos casos se debe incluir un nuevo término a la Ec. (1), para contabilizar el hecho de que una superficie en movimiento genera un flux relativo a la superficie. La expresión  $\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} dS$  representa la forma en que el volumen es barrido por medio del elemento de la superficie de control. En consecuencia, la expresión  $b \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} dS$  representa la tasa de entrada de una cantidad debido al movimiento de la superficie de control, lo cual se expresa en la Ec. (2).

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} b dV = - \int_{S(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V(t)} B_v dV + \int_{S(t)} b \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2)$$

De acuerdo a la fórmula de Leibniz para derivar una integral volumétrica, el primer término del lado izquierdo de la Ec. (2) se puede expresar como

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} b dV = \int_{V(t)} \frac{\partial b}{\partial t} dV + \int_{S(t)} b \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3)$$

Por lo tanto, la Ec. (2) se reformula como está en la Ec. (4).

$$\int_{V(t)} \frac{\partial b}{\partial t} dV = - \int_{S(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V(t)} B_v dV. \quad (4)$$

La Ec. (4) es un enunciado de conservación generalizado, que solo requiere que  $b$  sea continua dentro del volumen  $V(t)$ . Note que ahora la derivada del tiempo se encuentra dentro del integrando y, por lo tanto, es una derivada parcial.

Ahora, dividiendo cada término de la Ec. (4) por  $S$  y reordenando, se tiene que

$$\frac{1}{S} \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{V}{S} \left[ \frac{1}{V} \int_V \left( B_v - \frac{\partial b}{\partial t} \right) dV \right]. \quad (5)$$

Además, para un volumen de control de una forma dada  $V = c_v L^3$  y  $S = c_s L^2$ , donde  $L$  es la longitud característica y  $c_v$  y  $c_s$  son constantes que dependen de la forma. Por tal motivo, para cualquier volumen de control  $\frac{V}{S} \rightarrow 0$  en la medida que  $L \rightarrow 0$ , mientras que el término en los corchetes de la Ec. (5) permanece finito en este límite. Entonces,

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (6)$$

Una conclusión importante de la Ec. (6) es que la componente normal de  $\mathbf{F}$  debe ser continua en todos los puntos interiores. Por tal motivo, es común colocar una frontera matemática en el interior de una fase, con el fin de explotar algunas formas simétricas que se presentan. Esto es, si existe un plano simétrico con vector unitario normal  $\mathbf{n}$ , entonces la componente del flux  $F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  debe cambiar de signo en la simetría del

plano. La única manera en que  $F_n$  puede cambiar y permanecer continua es que se cumpla con lo establecido en la Ec. (7).

$$F_n = 0. \quad (7)$$

Ahora, considerando la simetría axial del contenedor cilíndrico de la figura 33, en  $r = 0$ , se tiene que el flux magnético está relacionado con la densidad de campo magnético  $\mathbf{B}$ . Por tal motivo, teniendo en cuenta que  $\mathbf{n} = \mathbf{i}_r$ , y aplicando la Ec. (7) al problema magnético, se obtiene que

$$B_r |_{r=0} = 0. \quad (8)$$

Finalmente, la Ec. (8) se expresa de forma adimensional, con lo que se obtiene la Ec. (9). Esta última es la condición de frontera implementada en el modelo de la TDMAI, con el fin de solucionar el problema magnético, para amplitudes en las que  $\alpha \gg 1$ . Siendo esta ecuación uno de los principales aportes de esta investigación.

$$\tilde{B}_r |_{\tilde{r}=0} = \tilde{H}_r |_{\tilde{r}=0} + \chi \tilde{M}_r |_{\tilde{r}=0} = 0. \quad (9)$$