

Comprensión de las funciones seno y coseno en contextos físicos: un estudio con profesores en
formación de la UIS

Daniel Esteban Arenas Parra y Bohórquez Gómez Astrid Fernanda

Director

Jairo Gutiérrez Balaguera

Magister en Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

2026

Tabla de contenido

Introducción.....	10
1.Antecedentes.....	12
2.Justificación.....	16
3.Marco teórico.....	18
3.1. Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático (EOS).....	18
3.1. Objetos primarios de la actividad matemática.....	19
3.1.2. Significados institucionales y personales.....	21
3.1.3. Conflictos semióticos.....	22
3.2. Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM).....	22
3.2.1. Antecedentes: del PCK al CDM.....	23
3.2.2.Dimensiones del CDM y su pertinencia para esta investigación.....	24
3.2.3.Focalización del análisis: dimensiones epistémica y cognitiva.....	26
3.3.Registros de Representación Semiótica.....	26
3.3.1.Registros semióticos y actividad matemática.....	27
3.3.2.Tratamiento y conversión: operaciones fundamentales.....	28
3.3.3.Coordinación de registros y comprensión matemática.....	29
3.4.Tipos de Comprensión Matemática.....	30
3.4.1.Comprensión algorítmica.....	31
3.4.2.Comprensión representativa.....	32
3.4.3.Comprensión interpretativa.....	34
3.5.Las Funciones Seno y Coseno como Objeto Matemático.....	37
3.5.1.La función senosoidal general y sus parámetros.....	37

3.5.2.El movimiento subamortiguado como extensión del objeto.....	39
3.5.3.Representaciones canónicas y coordinación entre registros	41
3.5.4.Propiedades geométricas de la curva sinusoidal	42
3.5.5.Estándares curriculares y pertinencia del objeto.....	43
4. Metodología	44
4.1.Enfoque y tipo de Investigación.....	44
4.2.Muestra	45
4.3.Instrumento de recolección de datos	45
4.3.1.Descripción general	45
4.3.2.Modalidad de implementación.....	46
4.3.3.Estructura del instrumento	47
4.4.Análisis y validación del instrumento	55
4.4.1.Análisis Llenado de tanque.....	57
4.4.2.Análisis Circulo unitario	59
4.4.3.Análisis Rueda de la fortuna	64
4.4.4.Análisis Movimiento Amortiguado.....	70
4.5.Procedimiento de recolección de datos	75
4.6.Análisis de datos	76
4.6.1.Fase 1:.....	76
4.6.2.Fase 2:.....	76
5.Análisis de Datos.....	77
Proceso de sistematización	78
5.1.Presentación de Hallazgos	80

5.2.Análisis descriptivo	81
5.2.1.Tarea 1: Llenado de Tanque	81
5.2.2.Tarea 2: El círculo unitario	100
5.2.3.Tarea 3: La Rueda de la Fortuna	117
5.2.4.Tarea 4: Movimiento Subamortiguado	138
5.3.Síntesis y hallazgos transversales del análisis	152
5.3.1.Síntesis y hallazgos transversales del análisis	153
5.3.2.Tabla de síntesis: perfiles por participante a lo largo del instrumento	154
6.Discusión	155
6.1.Interpretación de Resultados.....	155
6.1.1.Sobre las estrategias de resolución de los FPM	156
6.1.2.Sobre los tipos de comprensión.....	158
6.1.3.Sobre las dificultades conceptuales.....	160
6.1.4.Implicaciones para la formación inicial docente.....	162
6.2.Contraste con el marco teórico	164
6.2.1.La dualidad personal-institucional	164
6.2.2.Conflictos semióticos	166
6.2.3.Los registros de representación.....	168
6.2.4.Las dimensiones epistémica y cognitiva del CDM	170
6.2.5.Los tipos de comprensión en relación con los antecedentes.....	172
6.3.Limitaciones y recomendaciones futuras del estudio.....	174
6.3.1.Limitaciones metodológicas	174
6.3.2.Limitaciones del instrumento.....	175

6.3.3.Limitaciones en la cobertura del marco teórico	176
6.4.Implicaciones	180
6.4.1.Implicaciones curriculares	180
7.Conclusiones.....	184
8.1 Perfiles individuales de comprensión.....	185
Brayan- Comprensión funcional integrada según el grupo	185
Carlos	186
María	187
Celín	188
Camilo	189
Andrey.....	190
8.2 Patrones transversales del grupo	191
8.3 Respuesta a la pregunta de investigación	194
8.4 Alcances del estudio	196
Referencias bibliográficas	199
Apéndice.....	203

Lista de Figuras

Figura1 Configuración Ontosemiótica de las funciones trigonométricas en la modelación de fenómenos físicos periódicos. _____ 79

Lista de Tablas

Tabla 1 Instrumento para la recolección de muestra.....	47
Tabla 2 Estructura del instrumento en GeoGebra.....	51
Tabla 3 Perfil de comprensión de Brayan en T1.	86
Tabla 4 Perfil de comprensión de Carlos en T1.....	88
Tabla 5 Perfil de comprensión de María en T1.	90
Tabla 6 Perfil de comprensión de Celín en T1.	92
Tabla 7 Perfil de comprensión de Camilo en T1.	94
Tabla 8 Perfil de comprensión de Andrey en T1.	95
Tabla 9 Perfil de comprensión de los FPM en T1.	97
Tabla 10 Perfil de comprensión de Brayan en T2.....	108
Tabla 11 Perfil de comprensión de Carlos en T2.....	109
Tabla 12 Perfil de comprensión de María en T2.	110
Tabla 13 Perfil de comprensión de Celín en T2.	111
Tabla 14 Perfil de comprensión de Camilo en T2.	112
Tabla 15 Perfil de comprensión de Andrey en T2.....	113
Tabla 16 Perfil de comprensión de los FPM en T2.	114
Tabla 17 Perfil de comprensión de Brayan en T3.....	125
Tabla 18 Perfil de comprensión de Carlos en T3.....	127
Tabla 19 Perfil de comprensión de María en T3.	129
Tabla 20 Perfil de comprensión de Celín en T3.	131
Tabla 21 Perfil de comprensión de Camilo en T3.	132
Tabla 22 Perfil de comprensión de Andrey en T3.....	134

Tabla 23 Perfil de comprensión de los FPM en T3.	136
Tabla 24 Perfil de comprensión de Brayan en T4	146
Tabla 25 Perfil de comprensión Carlos en T4.	147
Tabla 26 Perfil de comprensión de Celín en T4.	148
Tabla 27 Perfil de comprensión de los FPM en T4.	150
Tabla 28. Perfiles de comprensión de los FPM	154

Resumen

Título: Comprensión de las funciones seno y coseno en contextos físicos: un estudio con profesores en formación de la UIS

Autor: Daniel Esteban Arenas Parra, Bohórquez Gómez Astrid Fernanda

Palabras clave: funciones trigonométricas, formación docente, Enfoque Ontosemiótico.

Descripción: Este estudio analiza los conocimientos que manifiestan seis futuros profesores de matemáticas (FPM) de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (UIS) sobre las funciones seno y coseno en contextos de modelación de fenómenos físicos periódicos. La investigación se enmarca en un enfoque cualitativo de carácter exploratorio-descriptivo y emplea como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático (EOS), articulado con el modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) y la teoría de registros de representación semiótica de Duval. El instrumento de recolección de datos consiste en un libro interactivo de GeoGebra con cuatro situaciones de modelación: llenado de tanque, círculo unitario, rueda de la fortuna y movimiento subamortiguado.

Los hallazgos muestran que los participantes presentan mayor solidez en la comprensión algorítmica —construcción procedimental del modelo sinusoidal— que en las comprensiones representativa e interpretativa. La coordinación entre registros de representación es la dimensión más débil del grupo, y la interpretación física de los parámetros del modelo es inconsistente y variable entre participantes. Se identificaron conflictos semióticos recurrentes asociados a la confusión entre parámetros, la generalización incorrecta de la covariación entre funciones y la ausencia sistemática de verificación del modelo. Los resultados evidencian que la formación inicial ha desarrollado el conocimiento común del contenido trigonométrico, pero no ha consolidado el conocimiento especializado necesario para enseñarlo en contextos aplicados.

Abstract

Title: Comprensión de las funciones seno y coseno en contextos físicos: un estudio con profesores en formación de la UIS

Author: Daniel Esteban Arenas Parra, Bohórquez Gómez Astrid Fernanda

Key Words: trigonometric functions, teacher education, Onto-Semiotic Approach.

This study analyzes the knowledge manifested by six prospective mathematics teachers enrolled in the Mathematics Education program at the Universidad Industrial de Santander (UIS) regarding sine and cosine functions in the context of modeling periodic physical phenomena. The research follows a qualitative, exploratory-descriptive approach and draws on the Onto-Semiotic Approach to Mathematical Knowledge (OSA) as its theoretical framework, articulated with the Didactic-Mathematical Knowledge model (DMK) and Duval's theory of semiotic representation registers. Data were collected through an interactive GeoGebra workbook comprising four modeling tasks: tank filling, unit circle, Ferris wheel, and damped oscillatory motion. The findings indicate that participants demonstrate greater strength in algorithmic understanding — procedural construction of sinusoidal models — than in representational or interpretive understanding. Coordination across representation registers emerged as the weakest dimension across the group, and physical interpretation of model parameters proved inconsistent and highly variable among participants. Recurring semiotic conflicts were identified, including confusion between parameters, incorrect generalization of the covariation between sine and cosine functions, and a systematic absence of model verification. The results suggest that initial teacher education has developed common content knowledge of trigonometry but has not consolidated the specialized knowledge required to teach it effectively in applied contexts.

Introducción

El desarrollo del conocimiento trigonométrico tiene aportes fundamentales en el estudio del movimiento y de los fenómenos periódicos (Sánchez 2014). Sin embargo, en el contexto escolar este vínculo con el mundo físico suele perder su importancia, reduciendo la trigonometría a un conjunto de identidades, fórmulas, procedimientos algebraicos y ángulos notables que deben memorizarse (Fiallo 2011). Como consecuencia, se tienden a privilegiar técnicas operativas por encima de la interpretación geométrica, funcional, la modelación de fenómenos y la articulación entre distintas representaciones, aspectos esenciales para una comprensión profunda.

En particular, las funciones seno y coseno (fundamentales para describir fenómenos periódicos en la física) suelen estudiarse desde enfoques descontextualizados, lo que dificulta que los futuros profesores comprendan su naturaleza y su potencial en la modelación de situaciones reales. Esta brecha es especialmente relevante, ya que estos futuros docentes serán responsables de enseñar trigonometría en la educación secundaria y/o superior, un ámbito donde las funciones trigonométricas suelen percibirse como abstractas, arbitrarias y poco conectadas con la experiencia.

Recuperar la esencia fenomenológica de estas funciones, es decir, su relación con el movimiento circular y el comportamiento periódico; constituye tanto un desafío como una oportunidad para transformar su enseñanza.

Este trabajo busca contribuir a la comprensión de esta problemática mediante el análisis de cómo los futuros docentes de matemáticas interpretan y operan con las funciones seno y coseno cuando se enfrentan a tareas contextualizadas en fenómenos físicos. Para ello, se diseña un instrumento compuesto por actividades abiertas y exploratorias, apoyadas en el uso de GeoGebra.

El análisis se desarrolla a partir del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de Godino, Batanero y Font (2007), el cual constituye el marco teórico de referencia para comprender la actividad matemática como un sistema de prácticas, objetos y procesos. Desde esta perspectiva antropológica, semiótica y ontológica, el conocimiento matemático se analiza en términos de los objetos que emergen en la actividad, las relaciones entre ellos y los posibles conflictos de significado que se manifiestan durante la resolución de tareas.

En coherencia con el EOS, se adopta el modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) propuesto por Pino-Fan y Parra-Urrea (2018), entendido como una herramienta analítica y operacionaliza los principios del EOS para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El CDM permite organizar el análisis mediante niveles que hacen visible qué conocimientos movilizan los futuros profesores de matemáticas, cómo los utilizan y qué significados atribuyen a las funciones trigonométricas seno y coseno en contextos físicos.

De esta forma, el EOS proporciona el marco conceptual que fundamenta la interpretación de los significados matemáticos, mientras el CDM ofrece una estructura metodológica para analizar las prácticas, objetos y los procesos que emergen en la actividad de los participantes. La articulación de ambos permite identificar fortalezas, vacíos conceptuales y dificultades en la comprensión funcional de la trigonometría, generando evidencia empírica relevante que puede servir como punto de partida para reflexionar sobre las posibles transformaciones curriculares pertinentes en la formación inicial de docentes.

1. Antecedentes

La enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría han sido objeto de múltiples estudios debido a las dificultades que surgen en estos procesos y a la riqueza epistemológica de esta rama de las matemáticas, especialmente en el planteamiento y resolución de situaciones problema.

Diversas investigaciones coinciden en señalar que dichas dificultades no solo se relacionan con el objeto matemático en sí, sino también con la manera en que este es comprendido, representado y enseñado por los docentes.

Según Schoenfeld (1998), los conocimientos y las creencias que tiene el profesor sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje están altamente vinculados con su quehacer en el aula. En este contexto, el papel del docente es fundamental, ya que su dominio del objeto matemático influye directamente en la forma como se estructura la enseñanza y se orienta el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, como señala Godino (2009), no existe un consenso sobre la concepción que el docente debe tener de dicho objeto matemático que enseña, lo que evidencia la necesidad de comprender y analizar las diferentes facetas o dimensiones implicadas en su enseñanza y aprendizaje. Esta situación resulta particularmente relevante en el caso de las funciones trigonométricas seno y coseno, cuya comprensión requiere articular aspectos conceptuales, procedimentales y representacionales, así como su aplicación en contextos del mundo real.

Desde la perspectiva de los registros de representación, Duval (2006) argumenta que uno de los principales obstáculos, en los procesos de enseñanza y aprendizaje, radica en la dificultad para coordinar diferentes registros de representación, como el algebraico, el gráfico y el numérico. Esto afecta la manera en que los futuros docentes abordan la enseñanza de funciones trigonométricas, donde la falta de articulación entre dichos registros limita la comprensión funcional de los conceptos y dificulta su aplicación en situaciones contextualizadas. Asimismo, Barrantes y Blanco (2006) destacan que el conocimiento matemático del docente no solo debe limitarse a los procedimientos algorítmicos, sino también a la comprensión profunda de los conceptos y sus aplicaciones en distintos contextos como lo evidencian Brijlall, & Maharaj

(2014) ya que muchos profesores enfrentan dificultades al enseñar funciones trigonométricas debido a una comprensión limitada de los conceptos involucrados y a estrategias pedagógicas poco adecuadas. Se evidencia que tales desafíos se manifiestan especialmente cuando se busca aplicar estos conceptos en contextos reales (como fenómenos físicos) lo que resalta la necesidad de fortalecer la formación docente en estos aspectos.

Investigaciones más recientes Brendefur et al. (2021) analizan cómo un docente de secundaria con experiencia transforma su conocimiento sobre las funciones seno y coseno al planificar e impartir clases. La investigación evidencia discrepancias entre el conocimiento personal del profesor y el conocimiento que efectivamente moviliza en el aula, especialmente al representar y explicar valores de estas funciones en contextos del mundo real. Esta diferencia resalta la importancia de fortalecer en la formación docente no solo los aspectos conceptuales de las funciones trigonométricas, sino también las habilidades para articularlos con situaciones aplicadas, particularmente en el campo de la física.

Asimismo, la tesis de maestría de Sánchez Vásquez (2014), titulada "Las funciones trigonométricas seno y coseno a partir de sus aplicaciones", desarrollada en la Universidad Nacional de Colombia, ofrece un análisis detallado sobre cómo abordar la enseñanza de estas funciones desde contextos significativos. En su estudio, se destaca la importancia de que los profesores comprendan las funciones trigonométricas no solo desde una perspectiva formal, sino también como herramientas para modelar fenómenos reales. Este enfoque permite al docente identificar con mayor claridad las dificultades que enfrentan los estudiantes, al tiempo que fortalece su propio conocimiento conceptual y didáctico. Lo anterior reafirma la necesidad de considerar las aplicaciones físicas como un medio para enriquecer la formación inicial docente en trigonometría.

Desde el campo del conocimiento profesional docente, Shulman (1986) plantea tres categorías del conocimiento del contenido que debe dominar el profesor, siendo el primero el conocimiento del contenido y como fuente de este conocimiento la formación académica en la disciplina a enseñar, es por esto que se hace necesario realizar un análisis de la comprensión conceptual que tienen los profesores en formación en una de las áreas que predomina el campo laboral para el que debe estar preparado según el perfil de egresado de la UIS. El docente debe conocer las matemáticas que enseñará con profundidad y amplitud. Según Shoenfeld y Kilpatrick (2008) el profesor de matemáticas debe tener la capacidad de comprender los aspectos claves de cada tópico y además debe poder crear relaciones que apoyen el aprendizaje y trabajar con sus diversas representaciones y aplicaciones.

En esta línea, Ball, Thames y Phelps (2008) proponen el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés), el cual enfatiza la importancia de la comprensión profunda del contenido, el conocimiento pedagógico y la capacidad de conectar conceptos matemáticos con situaciones reales, que una enseñanza efectiva de la trigonometría debe incluir aplicaciones contextualizadas que permitan a los estudiantes desarrollar un pensamiento matemático más significativo.

A pesar de la diversidad de investigaciones que abordan las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, así como la importancia del conocimiento del profesor y el uso de contextos reales, se identifica una necesidad de estudio que analicen de manera integrada las prácticas matemáticas que movilizan los docentes en formación. En particular, resulta relevante indagar cómo se articulan los objetos matemáticos, los procesos y los significados que emergen cuando los futuros profesor interpretan y utilizan las funciones seno y coseno en situaciones de carácter físico. En ese sentido, modelos de análisis como el Conocimiento Didáctico-Matemático

(CDM), desarrollado por Pino-Fan y colaboradores desde el Enfoque Ontosemiótico, ofrecen herramientas teóricas y metodológicas pertinentes para estudiar de manera sistemática la comprensión funciones de la trigonometría a partir de la actividad matemática de los estudiantes.

2. Justificación

El perfil profesional de los Licenciados en Matemáticas de la UIS, plantea que el egresado está en la capacidad de construir una visión pedagógica que permita una comprensión y transformación de la realidad. Es decir, el Licenciado en matemáticas de la UIS deberá tener una visión de las matemáticas como ciencia construida por los hombres a partir de la necesidad que se le han presentado en la historia y no como una ciencia acabada de verdades absolutas. En ese sentido, apropiarse de la naturaleza de la trigonometría, puede permitir diseñar múltiples escenarios que permitan desarrollar en los estudiantes la capacidad de resolver problemas, argumentar y comunicar sus ideas matemáticas, promoviendo así una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos.

El MEN (2006) establece en el estándar de conocimiento en cuanto a funciones trigonométricas que el estudiante debe “Describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.” Se reconoce que la comprensión de la trigonometría no solo abarca la memorización de fórmula y procedimiento, sino que también involucra una comprensión profunda, como lo menciona Gutiérrez (2019, p. 34).

Según Schoenfeld (1998), los conocimientos y las creencias que tiene el profesor sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje están altamente vinculados con su quehacer en el aula. Esta afirmación cobra especial relevancia al considerar que muchos docentes en formación no han profundizado en el aprendizaje de la trigonometría, dado que en el plan de estudios de la

Licenciatura en Matemáticas de la UIS este contenido se aborda de forma superficial. En este sentido, resulta necesario indagar cuáles son los conocimientos que manifiestan los estudiantes de últimos semestres respecto a la trigonometría, con el fin de identificar si comprenden este objeto matemático desde un enfoque aplicativo o si lo conciben únicamente como un conjunto de reglas y fórmulas. Esta información es clave para identificar qué aspectos se deben fortalecer en la formación inicial de docentes. Con base en los hallazgos, se podrá argumentar la necesidad de diseñar un curso que atienda exclusivamente la didáctica de la trigonometría, permitiendo así una formación más sólida y contextualizada para los futuros docentes.

La relevancia de esta investigación también radica en que permite integrar y complementar los antecedentes previamente analizados: mientras estudios como los de Brijlall y Maharaj (2014), y el de Sánchez Vásquez (2014), identifican dificultades generales en la enseñanza de funciones trigonométricas, este estudio busca aportar evidencia empírica reciente y localizada sobre cómo los futuros profesores comprenden estas funciones en el contexto específico de su aplicación en fenómenos físicos. Por tanto, representa una contribución novedosa al conocimiento sobre la formación de profesores en un área escasamente explorada.

Este es un momento oportuno para realizar esta investigación, ya que la tendencia en la formación docente ha sido priorizar otros campos del conocimiento matemático, lo que pone en riesgo la permanencia y profundidad del estudio de la trigonometría en la formación inicial. Entre más tiempo pase, menos atención se prestará a la enseñanza de estas funciones, y más difícil será su integración significativa en el currículo, tanto universitario como escolar.

A nivel internacional, trabajos como el de Uribe y Retamal (2021) refuerzan esta preocupación al señalar que los futuros docentes enfrentan retos importantes al resolver problemas sobre funciones trigonométricas, evidenciando vacíos en los tipos de conocimientos

que despliegan, especialmente en lo conceptual y lo representacional. Estos autores analizan estos vacíos apoyándose en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático (EOS), que permite describir las prácticas, objetos y procesos movilizados en una tarea y comparar el significado personal de los estudiantes con el significado institucional esperado. Del mismo modo, el Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) de Pino-Fan y Parra-Urrea (2018) aporta niveles de análisis que permiten estudiar de forma articulada los problemas, prácticas, objetos y procesos que intervienen cuando un futuro profesor trabaja con funciones trigonométricas. Este modelo se complementa muy bien con el EOS, ya que ambos permiten observar no solo qué saben los estudiantes, sino cómo producen significados, qué representaciones privilegian y qué conflictos de significado aparecen.

3. Marco teórico

3.1. Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático (EOS)

El Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos (EOS), desarrollado por Godino, Batanero y Font (2007) y sistematizado en sus desarrollos posteriores (Godino, 2024), constituye el marco conceptual y metodológico central de esta investigación. El EOS surge como respuesta a la necesidad de articular, desde una perspectiva a la vez ontológica, semiótica y epistemológica, los procesos mediante los cuales se produce, comunica y aprende el conocimiento matemático. Su punto de partida es una concepción antropológica de las matemáticas: estas no se reducen a un sistema formal de definiciones y algoritmos, sino que son comprendidas como una actividad humana orientada a la resolución de problemas, de la cual emergen objetos y significados que dependen del contexto institucional y personal en que dicha actividad tiene lugar.

En coherencia con este enfoque, analizar lo que saben y hacen los futuros profesores de matemáticas (FPM) al resolver tareas sobre las funciones seno y coseno en contextos físicos no equivale únicamente a verificar si aplican correctamente un procedimiento. Implica, más bien, identificar qué prácticas matemáticas ponen en juego, qué objetos activan, qué significados atribuyen a los parámetros y representaciones involucrados, y en qué medida esos significados personales concuerdan o se distancian de los significados institucionales de referencia. El EOS proporciona las herramientas conceptuales necesarias para realizar ese análisis de manera sistemática.

3.1.1. Objetos primarios de la actividad matemática

Una de las contribuciones centrales del EOS es la propuesta de una ontología específica para las matemáticas educativas. Godino et al. (2007) postulan que en toda práctica matemática intervienen y emergen seis tipos de objetos primarios, cuya identificación permite describir con precisión la complejidad del conocimiento puesto en juego:

- **Situaciones-problema:** son las tareas, fenómenos o contextos que originan la actividad matemática y le otorgan sentido. En esta investigación, corresponden a las cinco situaciones diseñadas en contextos físicos —llenado de tanque, círculo unitario, rueda de la fortuna, movimiento subamortiguado— que constituyen el instrumento de recolección de datos.
- **Lenguajes:** comprenden los sistemas de representación empleados en las prácticas matemáticas —expresiones algebraicas, gráficas cartesianas, tablas numéricas, notación simbólica, lenguaje natural— en sus formas oral, escrita, gestual e icónica. En el estudio de las funciones trigonométricas, la coordinación entre registros algebraico, gráfico y numérico ocupa un lugar central.

- Conceptos-definición: son las ideas matemáticas introducidas mediante descripciones o definiciones. En el caso que nos ocupa, incluyen nociones como función periódica, amplitud, frecuencia angular, período, fase y línea media.
- Propositiones: son enunciados que establecen relaciones o propiedades entre los conceptos. Por ejemplo, la relación entre el coeficiente B de la función $f(x) = A\sin(Bt + C) + D$ y el período $T = 2\frac{\pi}{|B|}$, o la identidad fundamental $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$.
- Procedimientos: son las técnicas, algoritmos y operaciones que los sujetos emplean para resolver los problemas. Incluyen, entre otros, la determinación de parámetros a partir de condiciones contextuales, la evaluación de la función en valores específicos, y la verificación de la coherencia física del modelo.
- Argumentos: son los razonamientos utilizados para justificar o validar los procedimientos y proposiciones. Se manifiestan tanto en justificaciones de corte algebraico-deductivo como en argumentaciones de naturaleza geométrica o física.

Estos seis objetos no operan de manera aislada: se articulan en lo que el EOS denomina configuraciones ontosemióticas, es decir, redes de objetos y procesos interrelacionados que emergen de la actividad de resolución de una tarea específica (Godino et al., 2007; Godino, 2024). El análisis de las respuestas de los participantes en esta investigación se apoyará en la identificación de estas configuraciones, tanto en su versión epistémica —referida al conocimiento institucional esperado— como en su versión cognitiva —referida al conocimiento personal efectivamente manifestado por cada FPM.

3.1.2. Significados institucionales y personales

Una distinción conceptual estructurante del EOS es la que se establece entre el significado institucional y el significado personal de un objeto matemático. El significado institucional corresponde al sistema de prácticas operativas y discursivas que se esperarían en las tareas propuestas movilizan, es decir, la configuración epistémica construida en el análisis a priori de esta investigación, la cual anticipa los objetos primarios, procesos y dimensiones que emergen al resolver situación de manera matemáticamente válida. Este significado no necesariamente está ligado al de la institución de los participantes, sino al conjunto de prácticas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos que se consideran pertinentes para abordar las funciones seno y coseno en contextos de modelación de fenómenos físicos periódicos. El significado personal, en cambio, es el sistema de prácticas que cada sujeto efectivamente realiza al enfrentarse a una clase de problemas, y refleja el estado de su comprensión en un momento dado (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2024). En esta investigación, el contraste sistémico entre ambos significados-el institucional de referencia construido en el análisis a priori y su configuración epistémica y el personal manifestado en las producciones de cada FPM, constituyen los análisis a posteriori y sus configuraciones personales.

Esta dualidad tiene consecuencias metodológicas directas para la investigación: al analizar las producciones de los FPM, se busca precisamente describir y caracterizar sus significados personales sobre las funciones seno y coseno en contextos físicos, y contrastarlos con los significados institucionales de referencia. Dicho contraste permite identificar tanto los conocimientos consolidados como los vacíos conceptuales y los posibles conflictos de significado.

3.1.3. Conflictos semióticos

El EOS introduce el concepto de conflicto semiótico para designar cualquier disparidad o discordancia entre los significados que dos sujetos —o un sujeto y una institución— atribuyen a una misma expresión, representación o procedimiento matemático (Godino et al., 2007). Cuando la disparidad se produce entre el significado personal de un estudiante y el significado institucional esperado, se habla de un conflicto semiótico de tipo cognitivo; cuando ocurre entre dos prácticas del propio sujeto, refleja una inconsistencia interna en su sistema de conocimientos.

En el contexto de esta investigación, los conflictos semióticos constituyen indicadores analíticos clave: permiten identificar dónde y de qué manera los FPM producen interpretaciones erróneas o incompletas de los parámetros trigonométricos, confunden registros de representación, o aplican procedimientos sin comprender su significado en el fenómeno físico modelado. Su identificación y descripción sistemática es uno de los objetivos del análisis a posteriori.

3.2. Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)

El Modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), desarrollado en el marco del EOS por Godino (2009) y ampliado por Pino-Fan y Godino (2015) y Godino et al. (2017), constituye la herramienta analítica que permite operacionalizar el estudio del conocimiento profesional de los futuros profesores de matemáticas. A diferencia de otros modelos que describen el conocimiento docente en categorías amplias y de difícil delimitación empírica, el CDM ofrece un sistema de dimensiones articuladas directamente con la estructura de los procesos educativos-instruccionales que propone el EOS, lo que lo hace especialmente pertinente para examinar qué conocimientos movilizan los FPM al resolver tareas sobre las funciones seno y coseno en contextos físicos.

3.2.1. *Antecedentes: del PCK al CDM*

El interés por caracterizar el conocimiento específico que distingue al profesor de matemáticas de un especialista en la disciplina tiene su origen en la propuesta de Shulman (1986), quien introdujo el concepto de **Conocimiento Pedagógico del Contenido** (*Pedagogical Content Knowledge*, PCK) para designar ese saber profesional que integra el dominio del contenido matemático con la comprensión de cómo este puede ser enseñado y aprendido. El PCK supuso un avance significativo al reconocer que el conocimiento disciplinar por sí solo no es suficiente para una enseñanza efectiva: el profesor necesita, además, comprender las representaciones más adecuadas para un contenido, anticipar las dificultades de los estudiantes y seleccionar estrategias didácticas pertinentes.

A partir de este planteamiento, Ball, Thames y Phelps (2008) desarrollaron el modelo del **Conocimiento Matemático para la Enseñanza** (*Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT), que desagrega el conocimiento docente en subdominios diferenciados: el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del horizonte matemático, el conocimiento del contenido y los estudiantes, el conocimiento del contenido y la enseñanza, y el conocimiento del contenido y el currículo. El MKT aportó una mayor precisión descriptiva al PCK y generó una extensa tradición de investigación empírica sobre el conocimiento del profesor de matemáticas.

No obstante, tanto el PCK como el MKT presentan una limitación señalada por Godino (2009): sus categorías son suficientemente generales como para resultar difíciles de operacionalizar en el análisis de prácticas matemáticas concretas, y no están articuladas con una teoría explícita sobre la naturaleza del conocimiento matemático. El CDM surge precisamente para atender esta limitación: retoma las contribuciones de ambos modelos y las reinterpreta y

amplía desde los supuestos ontológicos, semióticos y epistemológicos del EOS, de modo que cada dimensión del conocimiento docente queda anclada en los objetos, procesos y prácticas que caracterizan la actividad matemática.

3.2.2. Dimensiones del CDM y su pertinencia para esta investigación

El CDM organiza el conocimiento del profesor de matemáticas en seis dimensiones o facetas que corresponden a los componentes del proceso educativo-instruccional descritos por el EOS (Godino et al., 2017; Godino, 2024). Cada dimensión refiere a un tipo específico de conocimiento que el profesor pone en juego al diseñar, implementar o evaluar situaciones de enseñanza y aprendizaje:

- **Dimensión epistémica:** comprende el conocimiento sobre los significados institucionales del objeto matemático, es decir, los sistemas de prácticas, objetos primarios y configuraciones ontosemióticas asociados al contenido que se enseña. Para los FPM participantes en esta investigación, esta dimensión se manifiesta en la capacidad de identificar correctamente los parámetros de una función sinusoidal, movilizar las representaciones pertinentes y justificar el modelo propuesto en términos matemáticamente válidos.
- **Dimensión cognitiva:** refiere al conocimiento sobre los significados personales que los estudiantes construyen, incluyendo sus conocimientos previos, las posibles dificultades y los conflictos semióticos que pueden surgir en el aprendizaje del objeto. En el marco de esta investigación, esta dimensión se examina a partir de los propios significados personales que los FPM manifiestan en sus producciones, lo que permite identificar vacíos conceptuales y concepciones incompletas.

- **Dimensión interaccional:** involucra el conocimiento sobre los patrones de interacción didáctica que favorecen la negociación y construcción de significados matemáticos. Aunque en esta investigación los FPM actúan como resolutores y no como enseñantes, esta dimensión resulta relevante para interpretar la manera en que justifican y comunican sus razonamientos.
- **Dimensión mediacional:** abarca el conocimiento sobre el uso adecuado de recursos y herramientas para el aprendizaje matemático, incluyendo tecnologías digitales. En este estudio, se expresa en la capacidad de los FPM para articular el trabajo en el libro interactivo de GeoGebra con las producciones en lápiz y papel.
- **Dimensión ecológica:** corresponde al conocimiento sobre las relaciones del contenido con el currículo, con otras disciplinas y con el contexto socioprofesional. Se evidencia cuando los FPM reconocen las conexiones entre las funciones trigonométricas y los fenómenos físicos propuestos, y cuando sitúan el objeto matemático en el marco de los estándares curriculares establecidos por el MEN (2006).
- **Dimensión afectiva:** comprende el conocimiento sobre los aspectos emocionales, actitudinales y motivacionales que intervienen en el aprendizaje matemático. Si bien no constituye el foco central del análisis, su consideración permite contextualizar algunas respuestas de los participantes, especialmente en situaciones de mayor complejidad conceptual como el movimiento subamortiguado.

3.2.3. Focalización del análisis: dimensiones epistémica y cognitiva

Siguiendo la orientación del CDM y en coherencia con los objetivos de esta investigación, el análisis de las producciones de los FPM se centrará prioritariamente en las dimensiones epistémica y cognitiva. Esta decisión responde a una razón metodológica precisa: las tareas del instrumento están diseñadas para provocar prácticas matemáticas observables que permitan caracterizar qué objetos movilizan los participantes, qué significados atribuyen a las funciones seno y coseno en contextos físicos, y en qué aspectos sus significados personales difieren de los institucionales de referencia.

La dimensión epistémica orienta la construcción del análisis a priori de cada tarea: permite anticipar las configuraciones de objetos y procesos que debería activar una solución experta, identificar los posibles significados parciales del objeto en juego y formular los criterios de validez matemática con los que se contrastarán las respuestas observadas. La dimensión cognitiva, a su vez, guía el análisis a posteriori: permite describir los significados personales efectivamente manifestados por cada FPM, identificar los conflictos semióticos presentes en sus producciones y caracterizar el tipo de comprensión —algorítmica, representativa o interpretativa— que predomina en cada caso.

3.3. Registros de Representación Semiótica

La Teoría de los Registros de Representación Semiótica, desarrollada por Raymond Duval (1993, 2006), constituye un complemento analítico indispensable del EOS en esta investigación. Mientras el EOS proporciona el marco ontológico y semiótico general para describir los objetos y procesos que intervienen en la actividad matemática, la teoría de Duval ofrece herramientas específicas para analizar el papel que cumplen las distintas formas de

representación en la construcción del conocimiento matemático. Su articulación con el EOS ha sido estudiada por Godino et al. (2016), quienes señalan que ambos marcos son complementarios: la teoría de registros enriquece el análisis del componente lingüístico de las configuraciones ontosemióticas, mientras que el EOS aporta una visión más amplia de los objetos y procesos que intervienen en las transformaciones entre representaciones.

3.3.1. Registros semióticos y actividad matemática

Duval (1993) define un registro de representación semiótica como un sistema de signos que posee sus propios mecanismos de significación y de funcionamiento, y que permite tanto representar objetos matemáticos como operar sobre ellos. Una condición fundamental de su propuesta es que los objetos matemáticos no son directamente perceptibles: solo es posible acceder a ellos a través de sus representaciones. Esta condición hace que el dominio de los registros semióticos no sea un aspecto secundario del aprendizaje matemático, sino una condición de posibilidad para la comprensión del objeto mismo.

En el estudio de las funciones seno y coseno, la actividad matemática moviliza de manera recurrente al menos tres registros de representación cuya coordinación resulta central para la comprensión del objeto:

- **Registro algebraico-simbólico:** comprende las expresiones de la forma $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+D$ y las operaciones que se realizan sobre ellas, como la identificación y determinación de parámetros, la verificación de condiciones iniciales o la manipulación de identidades trigonométricas.
- **Registro gráfico:** incluye las representaciones visuales de las funciones en el plano cartesiano, donde la periodicidad, la amplitud, el desplazamiento vertical y el desplazamiento de fase adquieren una forma perceptible y manipulable.

- **Registro numérico-tabular:** involucra las tablas de valores, el cálculo de magnitudes específicas y la evaluación de la función en instantes concretos del fenómeno físico modelado.

A estos tres registros propios de la actividad matemática se suma, en el contexto de esta investigación, el registro verbal-contextual, mediante el cual los participantes interpretan los parámetros matemáticos en términos de las magnitudes físicas del fenómeno: la amplitud como desplazamiento máximo o el período como tiempo de un ciclo completo.

3.3.2. *Tratamiento y conversión: operaciones fundamentales*

Duval (2006) distingue dos tipos de transformaciones que operan sobre las representaciones semióticas, y que resultan analíticamente relevantes para esta investigación:

El tratamiento es la transformación que se realiza dentro de un mismo registro, siguiendo las reglas propias de ese sistema semiótico. Por ejemplo, operar algebraicamente sobre la $f(t) = 2e - t\sin(3t)$ para identificar la frecuencia angular, o modificar una gráfica para representar el efecto de duplicar el período, son tratamientos dentro del registro algebraico y gráfico, respectivamente.

La conversión es la transformación que lleva una representación de un registro a otro, conservando el objeto matemático referido, pero cambiando el sistema semiótico que lo expresa. Por ejemplo, traducir las condiciones físicas de una situación —"el nivel del agua oscila entre 1 m y 11 m con un período de 16 minutos"— a la expresión algebraica $h(t) = 600 + 500\sin(8\pi t)$, o construir la gráfica de una función a partir de su expresión simbólica, son operaciones de conversión.

Y, según Duval (2006), la transformación cognitivamente más exigente y la que mayor dificultad presenta en el aprendizaje matemático, precisamente porque requiere reconocer el

mismo objeto en sistemas de representación estructuralmente distintos. Esta dificultad se acentúa en el estudio de las funciones trigonométricas en contextos físicos, donde la conversión no solo opera entre registros matemáticos, sino también entre el registro contextual-físico y los registros formales de la disciplina.

3.3.3. Coordinación de registros y comprensión matemática

Un resultado central de la teoría de Duval es que la comprensión matemática profunda requiere la coordinación entre al menos dos registros de representación distintos. Cuando un sujeto opera únicamente dentro de un registro —por ejemplo, aplica correctamente el algoritmo de determinación de parámetros sin poder interpretar su significado en la gráfica o en el fenómeno físico— puede existir competencia procedimental sin comprensión conceptual genuina. La ausencia de coordinación entre registros es, para Duval (2006), una de las causas estructurales de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

Este principio tiene una doble implicación para esta investigación. En el plano del diseño del instrumento, justifica la decisión metodológica de combinar el entorno dinámico de GeoGebra —que favorece la exploración del registro gráfico y la manipulación visual de los parámetros— con el formato de lápiz y papel, que demanda la verbalización, la simbolización algebraica y la argumentación explícita (Duval, 1993; Laborde, 2000). Esta combinación busca precisamente provocar situaciones en las que los FPM deban transitar entre registros, haciendo observable el grado de coordinación que son capaces de establecer.

En el plano del análisis de datos, la distinción entre tratamiento y conversión proporciona categorías descriptivas para caracterizar las producciones de los participantes: permite identificar si un FPM opera fluidamente dentro de un registro, pero encuentra dificultades al convertir a otro, o si su comprensión del objeto matemático está limitada a una sola forma de representación.

Esta información es coherente con los tipos de comprensión —algorítmica, representativa e interpretativa— que se describen en el apartado 4.4 y con las dimensiones epistémica y cognitiva del CDM analizadas en el apartado 4.2.

3.4. Tipos de Comprensión Matemática

La caracterización de la comprensión matemática como un fenómeno complejo y multidimensional es una preocupación central en la investigación en educación matemática. Desde el EOS, comprender un objeto matemático no equivale a retener su definición formal ni a ejecutar correctamente los procedimientos asociados, sino que implica participar en sistemas de prácticas donde ese objeto interviene de manera significativa, estableciendo conexiones entre sus distintas representaciones, justificando los procedimientos empleados e interpretando los resultados en los contextos que le dan sentido (Godino, Batanero y Font, 2007). En esta línea, Godino (2024) precisa que el conocimiento y la comprensión matemática pueden describirse en términos de tramas de funciones semióticas que un sujeto es capaz de establecer entre los objetos implicados en las prácticas requeridas para la solución de problemas.

Para los propósitos de esta investigación, y en coherencia con el enfoque adoptado por Uribe y Retamal (2021) en su estudio sobre los conocimientos desplegados por futuros profesores de matemáticas al resolver problemas sobre funciones trigonométricas, se distinguen tres tipos de comprensión que permiten caracterizar de manera diferenciada las producciones de los FPM: la comprensión algorítmica, la comprensión representativa y la comprensión interpretativa. Estos tres tipos no constituyen niveles jerárquicos estrictamente ordenados ni compartimentos estancos, sino dimensiones analíticas complementarias cuya presencia o ausencia —así como su grado de articulación— en las respuestas de los participantes ofrece

evidencia sobre la naturaleza y profundidad del conocimiento movilizado. Su análisis se articula directamente con las dimensiones epistémica y cognitiva del CDM descritas en el apartado 4.2, y con las operaciones de tratamiento y conversión entre registros descritas en el apartado 4.3.

3.4.1. *Comprensión algorítmica*

La comprensión algorítmica refiere al dominio de los procedimientos, técnicas y algoritmos específicos asociados a las funciones trigonométricas, así como a la capacidad de ejecutarlos de manera correcta y eficiente. Implica no solo la ejecución mecánica de pasos, sino también la comprensión de cuándo y por qué aplicar un determinado algoritmo en función de las condiciones del problema (Brijlall y Maharaj, 2014).

En el contexto específico de las funciones seno y coseno en situaciones físicas, la comprensión algorítmica abarca un conjunto de competencias procedimentales identificables en las producciones de los FPM:

- Determinación de parámetros: a partir de las condiciones del fenómeno físico — valores máximos y mínimos, período, condición inicial— el FPM es capaz de calcular correctamente la amplitud $A = \frac{(y_{max}-y_{min})}{2}$, la línea media $D = \frac{(y_{max}+y_{min})}{2}$, la frecuencia angular $\omega = \frac{2\pi}{T}$ y la fase ϕ .
- Evaluación de la función: dado un modelo trigonométrico establecido, el FPM puede sustituir valores específicos de la variable independiente y calcular el valor correspondiente de la función, verificando la coherencia del resultado con las condiciones físicas del problema.
- Manipulación algebraica: el FPM opera dentro del registro algebraico-simbólico con fluidez, aplicando propiedades de las funciones trigonométricas, identidades

fundamentales y transformaciones de la expresión general $f(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$ en el caso del movimiento subamortiguado.

- Aplicación de relaciones entre parámetros: el FPM reconoce y aplica correctamente las relaciones $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $f = \frac{1}{T}$ y $\omega = 2\pi f$, diferenciando con precisión entre período, frecuencia y frecuencia angular.

Desde la perspectiva del EOS, la comprensión algorítmica se manifiesta predominantemente en la movilización de procedimientos y en la realización de tratamientos dentro del registro algebraico (Duval, 2006). Su presencia en las producciones de los FPM es condición necesaria pero no suficiente para una comprensión global del objeto: un FPM puede demostrar dominio procedimental sin ser capaz de interpretar el significado físico de los parámetros obtenidos ni de coordinar el resultado algebraico con su representación gráfica.

Un indicador analítico particularmente relevante en esta investigación es la presencia o ausencia de verificación: los FPM que comprenden algorítmicamente el objeto no solo obtienen un modelo matemático, sino que comprueban que los valores calculados satisfacen las condiciones del problema, lo que evidencia una comprensión del algoritmo como herramienta de validación y no solo de cálculo.

3.4.2. *Comprensión representativa*

La comprensión representativa refiere a la capacidad de trabajar de manera flexible con las múltiples formas de representación de un objeto matemático y, crucialmente, de establecer conexiones significativas entre ellas. No basta con reconocer cada representación de manera aislada: la comprensión representativa genuina requiere que el sujeto sea capaz de transitar de un

registro a otro conservando el referente matemático, es decir, de realizar conversiones en el sentido de Duval (2006).

Para las funciones seno y coseno en contextos físicos, la comprensión representativa se evidencia cuando el FPM es capaz de:

- Articular el registro gráfico con el algebraico: reconocer en una curva sinusoidal los valores de amplitud, período, desplazamiento vertical y fase, y trasladarlos correctamente a la expresión simbólica correspondiente; o, a la inversa, construir o anticipar la forma de la gráfica a partir de los parámetros de la función.
- Coordinar el registro contextual-físico con los registros formales: identificar que la amplitud de la función no es solo un coeficiente numérico sino la mitad de la diferencia entre el nivel máximo y mínimo del fenómeno; que el período corresponde al tiempo de un ciclo completo del proceso; que la línea media representa el valor promedio alrededor del cual oscila el sistema.
- Utilizar el entorno dinámico de GeoGebra como mediador semiótico: manipular los parámetros de la función en el registro visual-dinámico y observar sus efectos sobre la gráfica, estableciendo conexiones entre la variación paramétrica y el comportamiento representado.
- Reconocer equivalencias entre representaciones: identificar que $f(t) = -3\cos(5\pi/t) + 14$ y $f(t) = 3\cos(\pi/5t + \pi) + 14$ son expresiones distintas de un mismo fenómeno, o que una función coseno desplazada puede expresarse como una función seno con un desfase específico.

Desde la perspectiva del EOS, la comprensión representativa está directamente asociada al objeto primario lenguaje y a los procesos de representación y significación que operan entre

los distintos sistemas semióticos. Su análisis en las producciones de los FPM permite identificar no solo si conocen las representaciones canónicas del objeto, sino en qué medida son capaces de coordinarlas y de utilizarlas como herramientas de exploración y validación.

Un indicador de comprensión representativa particularmente revelador en el contexto de esta investigación es la elección y justificación de la función: cuando un FPM opta por modelar una situación con una función seno en lugar de coseno —o viceversa— y es capaz de argumentar esa elección en términos de la condición inicial del fenómeno y de la posición del punto de partida en la gráfica, está manifestando una coordinación genuina entre el registro contextual, el gráfico y el algebraico.

3.4.3. Comprensión interpretativa

La comprensión interpretativa es la dimensión que mayor profundidad conceptual demanda y la que más directamente conecta el conocimiento matemático con el mundo físico que lo motiva. Refiere a la capacidad de asignar significado a los objetos matemáticos en contextos específicos: no solo de obtener un modelo trigonométrico correcto, sino de leer ese modelo como una descripción del fenómeno, de comprender qué dice la matemática sobre el comportamiento físico del sistema y de transitar bidireccionalmente entre la descripción matemática y la interpretación contextual (Godino, Batanero y Font, 2007).

En el estudio de las funciones seno y coseno en situaciones físicas, la comprensión interpretativa se manifiesta cuando el FPM es capaz de:

- Interpretar los parámetros en términos del fenómeno: reconocer que la amplitud A en el modelo del tanque corresponde a la mitad del rango de oscilación del nivel del agua; que ω en el modelo de la rueda de la fortuna determina la velocidad de

rotación; que el factor $e^{(-\gamma t)}$ en el movimiento subamortiguado representa la disminución progresiva de la energía del sistema por efecto del amortiguamiento.

- Establecer restricciones físicas sobre el modelo matemático: reconocer que el dominio de la función debe acotarse a los valores físicamente posibles, que la amplitud no puede superar ciertos límites impuestos por la geometría del sistema, o que los valores negativos de la función pueden carecer de sentido físico en determinados contextos.
- Interpretar características cualitativas de la función: describir en qué momentos el fenómeno varía más rápidamente —relacionando este hecho con la pendiente de la gráfica y con el concepto implícito de razón de cambio— y en qué momentos se aproxima a sus valores extremos.
- Generalizar el modelo: comprender qué sucede con el fenómeno cuando se modifican las condiciones —por ejemplo, al duplicar la frecuencia del sistema de bombeo o al cambiar la posición inicial de la cabina en la rueda de la fortuna— y traducir esas modificaciones en cambios precisos sobre los parámetros del modelo.
- Evaluar la validez del modelo: contrastar los resultados obtenidos con las condiciones del fenómeno real, identificar inconsistencias entre el modelo propuesto y la situación descrita, y proponer correcciones fundamentadas.

Desde la perspectiva del EOS, la comprensión interpretativa involucra de manera articulada los seis tipos de objetos primarios: requiere movilizar situaciones para dar sentido al problema, lenguajes para representarlo, conceptos para describir el fenómeno, proposiciones para establecer relaciones entre sus componentes, procedimientos para construir el modelo, y

argumentos para justificar su validez y su coherencia con el contexto físico. Es, por tanto, la dimensión que más fielmente refleja la comprensión del objeto matemático en su integralidad.

En el análisis de las producciones de los FPM, la comprensión interpretativa se convierte en un indicador especialmente sensible de la brecha entre el conocimiento procedimental y el conocimiento conceptual: un participante puede demostrar dominio algorítmico y representativo, pero encontrar dificultades significativas al momento de leer el modelo obtenido en clave física, lo que revela una compartimentación del conocimiento que limita su utilidad pedagógica futura.

3.4.4. Articulación de los tres tipos de comprensión

Los tres tipos de comprensión descritos no operan de manera independiente: en una práctica matemática rica, se articulan y se refuerzan mutuamente. La comprensión algorítmica provee las herramientas procedimentales sin las cuales la construcción del modelo sería imposible; la comprensión representativa permite acceder al objeto desde múltiples perspectivas, dotando de coherencia a los resultados obtenidos; la comprensión interpretativa otorga significado a todo el proceso, conectando el objeto matemático con la realidad que describe y justificando el esfuerzo cognitivo que su estudio demanda.

Sin embargo, en el contexto de la formación inicial de docentes, es frecuente observar desarrollos asimétricos entre estas tres dimensiones: la enseñanza tradicional de la trigonometría tiende a privilegiar la comprensión algorítmica, dejando en segundo plano —o ausentes del todo— las comprensiones representativa e interpretativa (Brijlall y Maharaj, 2014; Uribe y Retamal, 2021). Esta asimetría tiene consecuencias directas sobre la práctica docente futura: un profesor que no ha desarrollado comprensión interpretativa de las funciones trigonométricas difícilmente podrá facilitar en sus estudiantes la construcción del tipo de significados que los

estándares curriculares colombianos demandan al plantear que los estudiantes deben ser capaces de "describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas" (MEN, 2006, p. 76).

La identificación del tipo de comprensión predominante en las producciones de cada FPM, así como de las articulaciones y brechas entre ellos, constituye uno de los ejes centrales del análisis de datos de esta investigación.

3.5. Las Funciones Seno y Coseno como Objeto Matemático

La delimitación del objeto matemático central de esta investigación cumple una función precisa en el marco teórico: establecer con claridad cuáles son los significados institucionales de referencia con los que se contrastarán los significados personales de los FPM. No se trata, por tanto, de una descripción exhaustiva del campo trigonométrico, sino de una caracterización técnica de los elementos del objeto —parámetros, representaciones, propiedades y contextos de uso— que son efectivamente convocados por las situaciones del instrumento y que constituyen el referente del análisis a priori y a posteriori.

3.5.1. La función senosoidal general y sus parámetros

En el marco de esta investigación, el objeto matemático central es la función sinusoidal generalizada, cuya forma canónica puede expresarse como:

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + D \text{ o } f(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + D$$

donde A , ω , φ D son parámetros reales que determinan completamente el comportamiento de la función y cuya interpretación matemática y física constituye el núcleo del conocimiento que esta investigación examina. Cada parámetro condensa una relación específica

entre la estructura algebraica de la función y las características observables del fenómeno que modela:

Amplitud (A): es la distancia entre la línea media y el valor máximo o mínimo de la función. Algebraicamente, $A = (f_{\max} - f_{\min})/2$, donde $f_{\max}$ y $f_{\min}$ son los valores extremos de la función. El signo de A determina la orientación de la curva respecto a su eje central: si $A > 0$, la función inicia su ciclo con un movimiento ascendente desde la línea media; si $A < 0$, la curva queda invertida respecto a dicho eje. En contextos físicos, la amplitud expresa la magnitud del desplazamiento máximo respecto a la posición de equilibrio, la diferencia entre el nivel máximo y el nivel medio de un fluido, o el radio de una trayectoria circular proyectada.

Frecuencia angular (ω): determina la rapidez con que la función completa sus ciclos. Su relación con el período T y con la frecuencia f está dada por:

$$\omega = 2\pi / T = 2\pi f$$

Un incremento en ω produce una compresión horizontal de la gráfica —el fenómeno oscila más rápidamente— mientras que una disminución lo dilata. La distinción precisa entre ω , f y T es uno de los focos de análisis de esta investigación, dado que la confusión entre estos tres conceptos constituye uno de los conflictos semióticos más frecuentes en el conocimiento trigonométrico de los FPM.

Fase inicial (ϕ): es el ángulo inicial de la función en $t=0$ y determina el desplazamiento horizontal de la curva respecto a la función sinusoidal estándar. Su valor queda fijado por la condición inicial del fenómeno: la posición del sistema en el instante en que comienza la observación. El desplazamiento de fase $\Delta t = -\phi/\omega$ expresa ese desplazamiento en unidades de tiempo, y permite identificar en qué punto del ciclo se encuentra el fenómeno en $t=0$.

Línea media (D): es el valor promedio alrededor del cual oscila la función, calculado como $D = (f_{\max} + f_{\min})/2$. Produce un desplazamiento vertical de toda la curva respecto al eje de abscisas. En contextos físicos, representa el nivel de equilibrio del sistema: la altura media de una cabina en una rueda de la fortuna, el nivel promedio del agua en un tanque, o la posición de reposo de un oscilador.

Estos cuatro parámetros no son independientes entre sí ni del fenómeno que modelan: su determinación conjunta a partir de las condiciones de una situación física requiere precisamente la articulación entre la comprensión algorítmica, representativa e interpretativa descritas en el apartado 4.4. Un FPM que comprende el objeto en su integralidad es capaz no solo de calcularlos correctamente, sino de leerlos en la gráfica, de justificar su valor en términos del contexto y de anticipar cómo se modifica la función cuando alguna condición del fenómeno cambia.

3.5.2. *El movimiento subamortiguado como extensión del objeto*

Una de las situaciones del instrumento convoca una extensión del objeto matemático central que incorpora una capa adicional de complejidad estructural: la función sinusoidal con decaimiento exponencial, cuya forma general es: $x(t) = Ae^{(-\gamma t)} \sin(\omega t + \varphi)$

Donde $\gamma > 0$ es el coeficiente de amortiguamiento y $\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)}$ es la frecuencia angular del sistema subamortiguado, determinada conjuntamente por la frecuencia natural y el coeficiente

A diferencia de la función sinusoidal general descrita en el apartado anterior, en este modelo la amplitud no es un parámetro constante sino una expresión que depende del tiempo: $A(t) = Ae^{(-\gamma t)}$, que decrece a medida que t crece. Este rasgo distingue estructuralmente al modelo subamortiguado del modelo sinusoidal simple y exige una comprensión diferenciada de cada parámetro en relación con el fenómeno físico que describe.

En cuanto a sus parámetros y propiedades, el modelo subamortiguado conserva los elementos constitutivos de la función sinusoidal general —frecuencia angular, fase inicial y desplazamiento desde el equilibrio— pero les añade una dependencia temporal que modifica su interpretación:

- El **coeficiente de amortiguamiento** regula la tasa a la que la amplitud de las oscilaciones disminuye con el tiempo. Físicamente, expresa la pérdida progresiva de energía del sistema por efecto de la fricción o resistencia del medio. Cuanto mayor es γ , más rápida es la extinción del movimiento oscilatorio.
- La **frecuencia angular subamortiguada** determina la rapidez con que el sistema completa sus ciclos en presencia del amortiguamiento, y es siempre menor que la frecuencia natural ω_0 . Su relación con el período del movimiento se mantiene como $T = 2\pi/\omega$, aunque este período ya no corresponde a oscilaciones de igual amplitud.
- La **fase inicial** φ conserva su función de determinar el estado del sistema en $t = 0$, pero su determinación requiere aplicar simultáneamente las condiciones iniciales de posición $x(0)$ y velocidad $x'(0)$, lo que demanda el uso de la regla de derivación del producto, a diferencia del modelo sinusoidal simple donde basta con una condición de posición.
- La **amplitud inicial** representa el desplazamiento máximo del sistema en el instante $t = 0$ y es el valor desde el que parte el decaimiento. Su determinación a partir de las condiciones iniciales constituye el procedimiento algorítmico más exigente que convoca esta situación.

3.5.3. *Representaciones canónicas y coordinación entre registros*

El objeto matemático central de esta investigación se manifiesta a través de al menos cuatro sistemas de representación cuya coordinación, como se señaló en el apartado 4.3, es condición de la comprensión profunda:

El registro algebraico-simbólico es el sistema en el que el objeto queda formalizado: la expresión $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + D$ condensa en cuatro parámetros toda la información relevante del fenómeno y permite realizar operaciones y predicciones con precisión. Es el registro en el que la comprensión algorítmica se manifiesta con mayor claridad.

El registro gráfico hace perceptibles y manipulables las propiedades del objeto: la amplitud como altura de la curva desde su eje central, el período como longitud de un ciclo completo, el desplazamiento vertical como traslación del eje de simetría, y el desplazamiento de fase como traslación horizontal de la curva. Es el registro privilegiado para la comprensión representativa y para la exploración dinámica en GeoGebra.

El registro numérico-tabular permite verificar la coherencia del modelo evaluando la función en puntos específicos y contrastando los valores obtenidos con los datos del fenómeno. Es especialmente relevante en las situaciones que solicitan explícitamente verificar un resultado o calcular la posición del sistema en un instante concreto.

El registro contextual-verbal es el registro en el que el objeto adquiere su significado físico: los parámetros matemáticos se traducen en magnitudes observables, las propiedades de la función se leen como características del comportamiento del sistema, y el modelo algebraico se evalúa en términos de su capacidad para describir y predecir la realidad física. Es el registro en el que la comprensión interpretativa se hace más visible.

La articulación entre estos cuatro registros es precisamente lo que las situaciones del instrumento buscan provocar: cada tarea demanda que los FPM transiten entre ellos, y la calidad de esos tránsitos —la fluidez de las conversiones, la coherencia de las interpretaciones, la capacidad de usar un registro para validar los resultados obtenidos en otro— es el principal indicador del tipo y profundidad de comprensión que cada participante ha desarrollado sobre el objeto.

3.5.4. Propiedades geométricas de la curva sinusoidal

La función sinusoidal no solo se comprende como objeto algebraico definido por sus parámetros, sino que se materializa gráficamente en el plano cartesiano como una curva con propiedades geométricas propias, independientes de la expresión analítica que se genera. Reconocer estas propiedades en la gráfica, antes de o con independencia de su formalización algebraica, constituye una dimensión específica del conocimiento del objeto que no se reduce al dominio o interpretación de los parámetros.

La curva sinusoidal es continua y suave, no presenta discontinuidades, esquinas ni puntos angulosos en su dominio y es visualmente reconocible como una función uniforme y periódica, es decir, existe $T > 0$ tal que la curva se repite idénticamente cada intervalo de longitud T a lo largo del eje horizontal. Implica que cualquier fragmento de la curva de longitud T contiene toda la información geométrica del objeto, basta con analizar al menos un ciclo completo.

La gráfica geométrica de las funciones seno y coseno presentan simetría respecto a sus puntos críticos, cada máximo y cada mínimo constituyen un eje de simetría vertical. Esta propiedad tiene consecuencias directas para la lectura gráfica del periodo como la distancia entre un máximo y un mínimo inmediatamente siguiente, es igual a T .

Posee puntos de inflexión en la línea media, estos puntos en la curvatura cambian de cóncava a convexa (o a la inversa) y la curva alcanza su mayor tasa de variación. Esta propiedad permite identificar visualmente la línea media como el eje de simetría horizontal que equidista de los valores máximo y mínimo.

Estas propiedades geométricas constituyen el recurso visual sobre el que opera el registro gráfico descrito en la sección anterior. Su reconocimiento en una curva concreta es una condición previa a la interpretación de los parámetros del registro algebraico, un FPM que no ha desarrollado esta lectura geométrica puede dominar el cálculo de parámetro sin ser capaz de verificar el modelo algebraico obtenido es coherente con la curva que se generó, aprovechando el espacio virtual de GeoGebra.

3.5.5. *Estándares curriculares y pertinencia del objeto*

La pertinencia del objeto matemático seleccionado para esta investigación está respaldada por los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas establecidos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Para el ciclo de educación media, el MEN (2006) establece que los estudiantes deben ser competentes para "describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas" y para "modelar situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpretar y utilizar sus derivadas" (p. 76).

Estos estándares tienen una implicación directa para la formación inicial de profesores: los egresados de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS deberán no solo conocer las funciones trigonométricas en sus aspectos formales, sino estar en condiciones de diseñar situaciones de aprendizaje en las que sus futuros estudiantes construyan el tipo de comprensión que los estándares demandan. Un futuro docente que ha desarrollado únicamente comprensión

algorítmica del objeto difícilmente podrá facilitar en sus estudiantes la construcción de los significados físicos que los estándares priorizan.

Esta tensión entre el tipo de comprensión que efectivamente desarrollan los FPM durante su formación y el tipo de comprensión que deberán promover en su práctica docente futura constituye la motivación central de esta investigación y la razón por la que el análisis se organiza en torno a los tres tipos de comprensión descritos en el apartado 4.4, examinados a la luz de las dimensiones epistémica y cognitiva del CDM (apartado 4.2) y de la teoría de registros de representación semiótica (apartado 4.3).

4. Metodología

4.1. Enfoque y tipo de Investigación

La investigación se enmarca en un enfoque cualitativo de carácter exploratorio - descriptivo, ya que se busca comprender en profundidad los tipos de conocimientos que emergen en los futuros profesores de matemáticas al resolver actividades sobre las funciones trigonométricas, particularmente del seno y coseno, retomando el esquema metodológico de Uribe y Retamal (2021). No se pretende generalizar los hallazgos a una población general, sino caracterizar los tipos de conocimiento (algorítmico, representativo e interpretativo) a partir del análisis de las prácticas, objetos y significados que movilizan al enfrentarse a situaciones de modelación trigonométrica.

En este sentido, el interés se centra en los significados personales que los FPM construyen sobre las funciones seno y coseno y en el contraste con el significado institucional

construido por la configuración epistémica elaborada en el análisis a priori de cada tarea. Este contraste permite identificar los conocimientos consolidados y, además, los vacíos conceptuales y los conflictos semióticos presentes en las tareas de los FPM.

4.2. Muestra

La muestra será intencional, conformada por 6 estudiantes de últimos semestres de Licenciatura en Matemáticas de la UIS. El criterio de selección es que hayan cursado espacios académicos relacionados con la didáctica de la trigonometría y ecuaciones diferenciales, dado que constituyen los últimos escenarios formativos en los que los futuros profesores mantienen una relación sistemática con la trigonometría dentro del plan de estudios. Se espera que este grupo represente un perfil avanzado de la formación docente, donde ya se tienen una base disciplinar y saberes que influirán en su futura práctica profesional.

4.3. Instrumento de recolección de datos

4.3.1. Descripción general

A diferencia de lo realizado por Uribe y Retamal (2021), quienes emplearon un cuestionario de cuatro ítems para caracterizar los conocimientos trigonométricos de los futuros profesores de matemáticas, en el presente trabajo se propone un instrumento de mayor amplitud que permita indagar en la esencia de los objetos matemáticos. Este se estructura a partir de cuatro ejes definidos por los investigadores: razón de cambio, propiedades, representación gráfica, dominio y rango de las funciones seno y coseno. Estos ejes están implícitos en cada uno de los 4 ejercicios propuestos. Los ítems son de carácter abierto y que no buscan una respuesta algorítmica y procedimental, sino que demanda procesos de interpretación, coordinación entre representaciones y argumentación.

De Uribe y Retamal (2021) se retoma principalmente el marco metodológico de análisis, centrado en la identificación de conocimiento que emergen en las respuestas (algorítmico, representativo e interpretativo) a través del análisis de los elementos primarios en las configuraciones del significado del objeto matemático. Sin embargo, la definición de los ejes temáticos y el diseño de los problemas constituyen un aporte original de esta investigación, orientada en la comprensión funcional de seno y coseno como objetos abstractos.

4.3.2. Modalidad de implementación

El cuestionario será implementado de forma combinada con lápiz y papel, y se hará uso de un software de geometría dinámica (SGD) por medio de un libro interactivo. Esta doble aproximación metodológica se fundamenta en la teoría de registros semióticos de Duval (2006), quien plantea que la comprensión matemática profunda requiere la coordinación entre diferentes sistemas de representación. Mientras el SGD facilita la exploración dinámica y la manipulación del registro gráfico, el formato de lápiz y papel permite capturar la verbalización, la simbolización algebraica y los procesos de argumentación que emergen durante la resolución (Duval, 1993, 2004). Esta combinación posibilita observar cómo los futuros profesores transitan entre registros y qué tipos de conocimiento movilizan en cada uno de ellos.

La decisión de emplear GeoGebra como recurso se fundamenta en que existe un vacío en la implementación de SGD sobre trigonometría. Fiallo (2010) señala que, aunque existe un amplio repertorio de investigaciones que consolidan el uso de SGD para la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría, son escasos los trabajos que aborden de manera específica la trigonometría con estos recursos, salvo para la visualización de propiedades trigonométricas.

De acuerdo con Laborde (2000) los SGD favorecen la interacción entre construir y demostrar, permitiendo que los estudiantes pasen de la manipulación experimental en el software

a la justificación teórica. El libro permitirá que los futuros profesores exploren las funciones y posteriormente argumenten sus respuestas de forma conceptual y además permite introducir métodos específicos de experimentación, como la revisión de archivos construidos por los estudiantes y el análisis de sus producciones en el entorno dinámico (Gutiérrez, 2005). Link del libro redireccionado a geogebra: <https://www.geogebra.org/m/rtwn3bab>

4.3.3. Estructura del instrumento

Tabla 1.

Instrumento para la recolección de muestra

Estructura del instrumento
1. Llenado de tanque
Un tanque vertical cuya altura útil es de 10 m se encuentra instalado en una plataforma de carga situada a 1 m sobre el nivel del suelo. El tanque opera mediante un sistema de bombeo alternado, que permite la entrada y salida periódica del agua, con un período de 16 min. El sistema de válvulas que se abren y cierran de manera gradual, por lo que el caudal varía suavemente en el tiempo. Se supone que no existen pérdidas netas de agua debidas a evaporación, fugas o fricción, de modo que el proceso es simétrico en cada ciclo. Bajo estas condiciones, la altura del nivel del agua $h(t)$, medida en centímetros y referida al fondo del tanque, puede modelarse mediante una función senoidal del tiempo.

A) Proponga un modelo senoidal que represente esta situación. Realice las restricciones físicas necesarias. B) Describa en qué momento el agua sube más rápido y cuándo más despacio. C) ¿Cómo se modifica la función que modela la altura del nivel del agua si se duplica la frecuencia del sistema de bombeo, manteniendo constante la amplitud de la oscilación y el nivel medio? Revisar las condiciones que se necesitan para que sea senoidal y no lineal
--

2. *Círculo unitario*

Suponga un punto P que se mueve en sentido antihorario sobre la circunferencia del círculo unitario y que describe un ángulo θ con respecto al eje positivo de x y con vértice en el origen. A) Defina la posición de P ($x(\theta)$, $y(\theta)$) en términos del ángulo. B) ¿$x(\theta)$ y $y(\theta)$ están relacionadas? si es así, ¿cómo es esa relación? Describe cómo varía $x(\theta)$ cuando $y(\theta)$ crece. ¿Qué ocurre con los máximos y mínimos de cada variable en esta variación?
--

3. *La rueda de la fortuna*

Una noria (rueda de la fortuna) tiene 25 metros de diámetro y se aborda desde una plataforma que está a un metro sobre el suelo. La noria tiene cabinas numeradas del 1 al 12, distribuidas uniformemente alrededor de su circunferencia, como las horas en un reloj. La cabina 1 está inicialmente en la posición de las "6 en punto" (parte más baja, al nivel de la plataforma de carga). La noria gira en sentido antihorario a velocidad constante y completa una revolución completa en 10 minutos. El operador del parque necesita desarrollar un sistema de predicción de alturas para comunicar a los usuarios (especialmente aquellos con miedo a las alturas) información precisa sobre su recorrido.

La función $h(t)$ representa la altura de una persona en la cabina 1 (en metros sobre el suelo) después de que la rueda comienza a girar, en función del tiempo t en minutos.

Desarrolla un sistema completo que permita:

A) Determina la amplitud, la línea media y el período de la función $h(t)$.

Explica qué representa cada uno de estos parámetros en el contexto.

B) Encuentra un modelo matemático para la función de altura $h(t)$. Justifica tu elección de función.

C) Calcula: ¿Qué tan alto sobre el suelo está una persona en la cabina 1 después de 5 minutos? Verifica.

D) Determina un dominio y un recorrido apropiados para $h(t)$ en esta situación práctica. Considera:

¿Cuánto tiempo es razonable que dure un paseo típico en la noria?

¿Entre qué valores de altura puede estar físicamente una persona?

Justifica tus decisiones desde la perspectiva de la operación real del parque.

4. *Movimiento subamortiguado*

La ecuación que describe el movimiento amortiguado está dada por:

$$f(t) = x_m e^{(-\gamma t)} \text{sen}(\omega t + \varphi),$$

donde

$$\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)}$$

ω_0 = frecuencia angular natural

φ = constante de fase

Un automóvil que tiene su sistema de amortiguadores, en uno de ellos se tiene una frecuencia angular de $\omega_0 = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, y cuyo parámetro de amortiguamiento es 2s^{-1} , se encuentra inicialmente en reposo en la posición de equilibrio. En el instante $t=0$ recibe un impulso que lo pone en movimiento con una velocidad inicial $v_0 = 60 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ y una amplitud inicial de 2 m.

A) Escribe el modelo que describe el movimiento amortiguador del vehículo.

B) ¿Qué significan los puntos de corte con el eje x de la función planteada en el índice anterior? Escribe algunos de los hallados.

C) ¿Cuál es la amplitud máxima? ¿Qué significado tiene esta amplitud?

D) Aproximadamente, ¿En qué valor el amortiguador del carro deja de oscilar?

E) Grafica y describe el comportamiento del amortiguador.

Tabla 2.

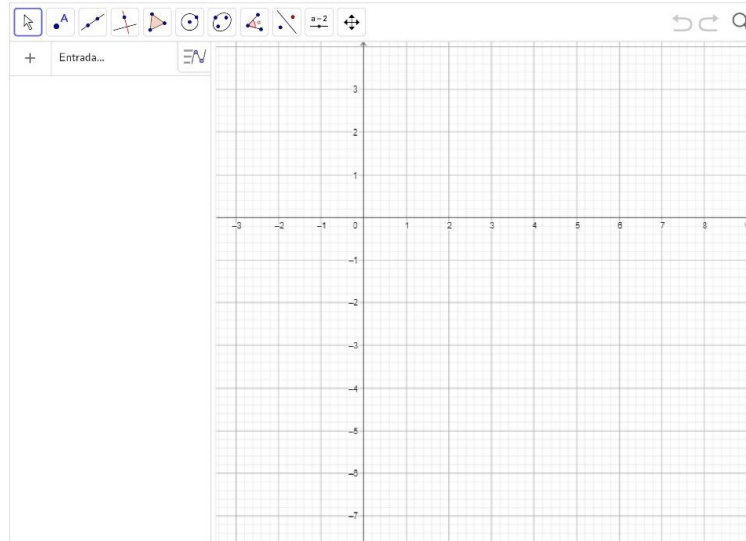
Estructura del instrumento en GeoGebra

1. Llenado de tanque

Llenado de Tanque

Autor: DANIELARENAS2211362, astridbg48002

A) Proponga un modelo senoidal que represente esta situación. Realice las restricciones físicas necesarias.



B) Describe cuándo el agua sube más rápido y cuándo más despacio.

Ab π Escribe aquí tu respuesta...

C) ¿Cómo se modifica la función que modela la altura del nivel del agua si se duplica la frecuencia del sistema de bombeo, manteniendo constante la amplitud de la oscilación y el nivel medio?

Ab π Escribe aquí tu respuesta...

2. Circulo unitario

Círculo Unitario

Autor: DANIELARENAS2211362 , astridbg48002

A) Define la posición $P(x(\theta), y(\theta))$ en términos del ángulo

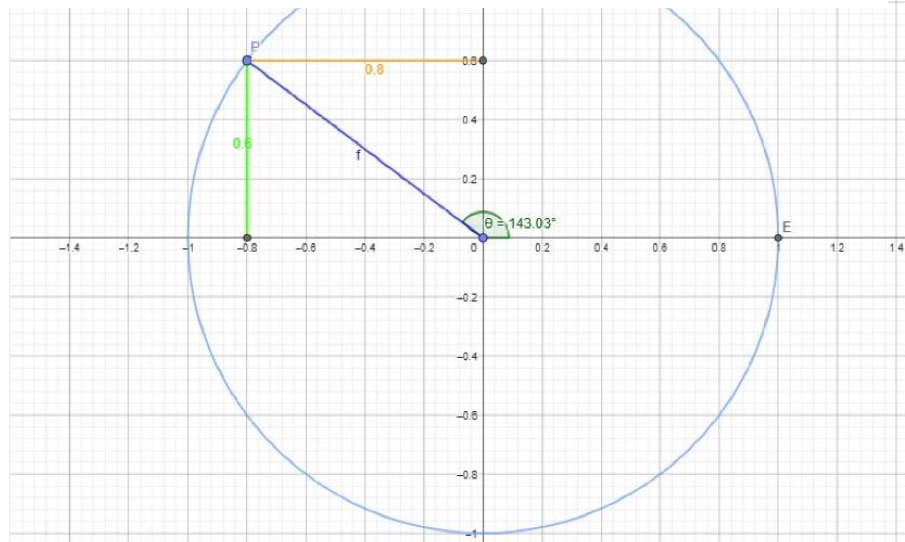
Aa π

Escribe aquí tu respuesta...

B) Describe cómo varía $x(\theta)$ cuando $y(\theta)$ crece. ¿Qué ocurre con los máximos y mínimos de cada variable en esta variación?

Aa π

Escribe aquí tu respuesta...



3. La rueda de la fortuna

La rueda de la fortuna

Autor: DANIELARENAS2211362 , astridbg48002

Una noria (rueda de la fortuna) tiene 25 metros de diámetro y se aborda desde una plataforma que está a un metro sobre el suelo. La noria tiene cabinas numeradas del 1 al 12, distribuidas uniformemente alrededor de su circunferencia, como las horas en un reloj. La cabina 1 está inicialmente en la posición de las "6 en punto" (parte más baja, al nivel de la plataforma de carga). La noria gira en sentido anti-horario a velocidad constante y completa una revolución completa en 10 minutos. El operador del parque necesita desarrollar un sistema de predicción de alturas para comunicar a los usuarios (especialmente aquellos con miedo a las alturas) información precisa sobre su recorrido.

La función $h(t)$ representa la altura de una persona en la cabina 1 (en metros sobre el suelo) después de que la rueda comienza a girar, en función del tiempo t en minutos.

A) Determina la amplitud, la línea media y el período de la función $h(t)$. Explica qué representa cada uno de estos parámetros en el contexto.

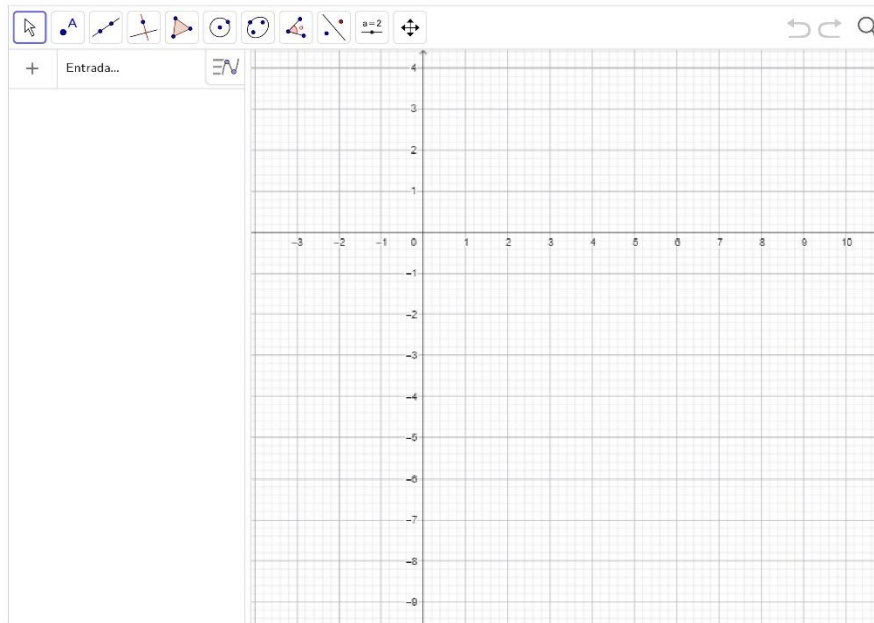
Aa π

Escribe aquí tu respuesta...

B) Encuentra un modelo matemático para la función de altura $h(t)$. Justifica tu elección de función

Aa π

Escribe aquí tu respuesta...



C) Calcula: ¿Qué tan alto sobre el suelo está una persona en la cabina 1 después de 5 minutos? Verifica.

Aa π

Escribe aquí tu respuesta...

D) Determina un dominio y un recorrido apropiados para $h(t)$ en esta situación práctica. Considera:

- ¿Cuánto tiempo es razonable que dure un paseo típico en la noria?

Aa π

Escribe aquí tu respuesta...

- ¿Entre qué valores de altura puede estar físicamente una persona?

Aa π

Escribe aquí tu respuesta...

4. Movimiento subamortiguado

Movimiento Sub-amortiguado

Autor: DANIELARENAS2211362 , astridbg48002

La ecuación que describe el movimiento amortiguado está dada por:

$$f(t) = x_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t - \varphi), \text{ donde}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

ω_0 = frecuencia angular natural

φ = constante de fase

γ = parámetro de amortiguamiento

Un automóvil que tiene su sistema de amortiguadores, en uno de ellos se tiene una frecuencia angular de $\omega_0 = \frac{15 \text{ rad}}{\text{s}}$, y cuyo parámetro de amortiguamiento es $\gamma = 2 \text{ s}^{-1}$ se encuentra inicialmente en reposo en la posición de equilibrio. En el instante $t=0$ recibe un impulso que lo pone en movimiento con una velocidad inicial $v_0 = \frac{60 \text{ cm}}{\text{s}}$ y una amplitud inicial de 2 m.

A) Escribe el modelo que describe el movimiento amortiguador del vehículo.

Aa π

Escribe aquí tu respuesta...

B) ¿Qué significan los puntos de corte con el eje x de la función planteada en el índice anterior? Escribe algunos de los hallados.

Aa π

Escribe aquí tu respuesta...

C) ¿Cuál es la amplitud máxima? ¿Qué significado tiene esta amplitud?

Aa π

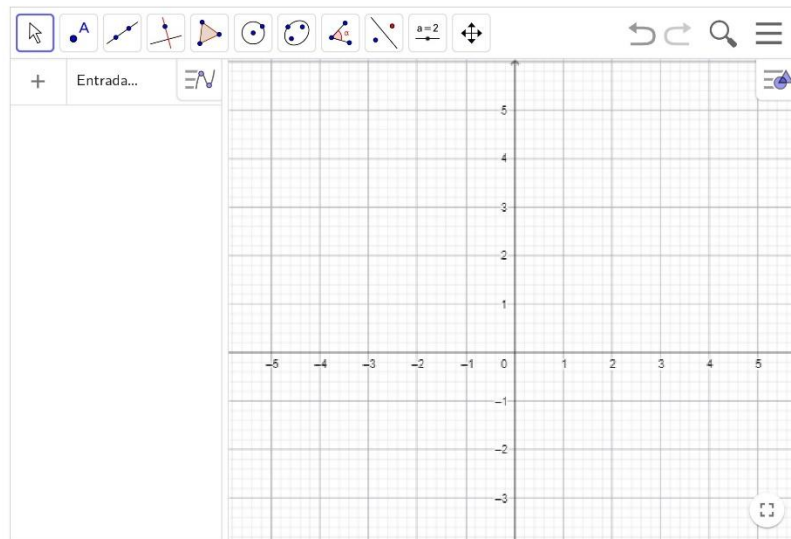
Escribe aquí tu respuesta...

D) Aproximadamente, ¿En qué valor el amortiguador del carro deja de oscilar?

Aa π

Escribe aquí tu respuesta...

E) Grafica el comportamiento del amortiguador.



F) Describe el comportamiento del amortiguador.

As π Escribe aquí tu respuesta...

4.4. Análisis y validación del instrumento

El instrumento diseñado para esta investigación requiere un proceso de análisis y validación, con el fin de garantizar que las tareas propuestas efectivamente movilicen los significados funcionales del seno y coseno que se pretenden estudiar. En primer lugar, se realizará un análisis a priori de las actividades, entendiendo como la identificación y descripción

de los objetos matemáticos, procesos, significados y posibles conflictos que emergen en la solución de cada tarea. Este tipo de análisis ha sido ampliamente justificado en la investigación de educación matemática, pues permite anticipar las estrategias de solución, los recursos teóricos que se ponen en juego, los posibles errores o dificultades de los estudiantes. Este análisis a priori tiene como objetivo fundamental anticipar las posibles trayectorias de solución y contrarrestarlas posteriormente con las producciones de los futuros profesores (Castro, Godino, Konic y Rivas, 2011) y asegurar que las tareas promuevan procesos de interpretación, coordinación de representaciones y argumentación.

Para llevar a cabo el análisis, se tomarán como referencia los niveles de análisis del Enfoque Onto semiótico (EOS) y del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2018):

- **Nivel de prácticas matemáticas y didácticas:** se identificarán las acciones y procedimientos que los estudiantes podrían desplegar al resolver los problemas (ej. Uso de representaciones gráficas, aplicación de identidades, razonamientos sobre la periodicidad, etc.)
- **Nivel de objetos y procesos:** se describirán los objetos matemáticos en juego (elementos lingüísticos, definiciones/ propiedades, procedimientos y argumentos) así como los procesos, representación y justificación que se espera que emerjan.
- **Nivel de normas y metanormas:** se explorarán las reglas implícitas que pueden condicionar la resolución, como la preferencia por el cálculo algebraico frente al razonamiento gráfico o la búsqueda de justificaciones formales.

- **Nivel de idoneidad didáctica:** se valorará si las tareas permiten acceder a los significados funcionales de seno y coseno que se buscan estudiar y si se adecuan al nivel de los docentes en formación.

La configuración epistémica resultante del análisis a priori constituye un significado institucional de referencia con el que se contrastarán los significados personales movilizados por cada FPM.

4.4.1. *Análisis Llenado de tanque*

I. Nivel de Prácticas Matemáticas y Didácticas:

1) Prácticas esperadas de los estudiantes:

- Traducir las condiciones del enunciado a parámetros de una función senoidal.
- Determinar la línea media M , amplitud A , período T , frecuencia angular y fase.
- Interpretar “sube más rápido/despacio” en términos de razón de cambio.

2) Prácticas didácticas:

- Uso del archivo GeoGebra para dinamizar representaciones y apoyar la vinculación algebraica $\leftrightarrow$ gráfico $\leftrightarrow$ contexto físico.

II. Nivel de Configuraciones de Objetos y Procesos:

1) Objetos primarios:

- **Elementos lingüísticos:** función senoidal, amplitud, línea media, periodo, frecuencia angular, fase.
- **Definiciones/propiedades:**
 - $T = 16 \text{ min}, \omega = \frac{2\pi}{T}$
 - **M**= nivel medio del agua en cm.
 - $A = \frac{\text{altura máxima}-\text{mínima}}{2}$
 - **Restricciones:** $M \pm A \in [100, 1100] \text{ cm}$ (entre 1 m sobre el suelo y 11 m sobre el suelo)

b) Procedimientos: modelar $h(t) = M + A \sin(\omega t + \varphi)$

elección de fase para que $t=0$ corresponda a la altura mínima.

• **Procesos:**

- Modelación matemática → validación física (revisar si los valores son posibles)
- Interpretación gráfica del cambio → uso implícito de la derivada
- Predicción del efecto de duplicar frecuencia (relación inversa con el periodo)

III. Nivel de Normas y Metanormas:

a) Normas matemáticas:

- El ajuste de fase debe responder a la condición inicial $h(0) = \text{mínimo}$

- El análisis de velocidad debe hacerse considerando la pendiente, no la altura.

b) Metanormas:

- Al plantear el modelo se debe validar respetando las restricciones físicas de fenómeno (no se puede exceder la capacidad del tanque ni tener en cuenta los valores negativos).
- Es necesario justificar tanto algebraica como interpretativamente, no basta con una sola representación.

IV. Nivel de idoneidad didáctica:

- a) Epistémica:** el problema activa significados esenciales de la función seno en su carácter de modelo periódico en fenómenos físicos.
- b) Cognitiva:** la tarea es accesible con los conocimientos previos de los estudiantes de últimos semestres, pero a la vez desafía el razonamiento más allá de lo algorítmico.
- c) Interaccional:** el uso de GeoGebra promueva la exploración autónoma.
- d) Mediacional:** el recurso dinámico apoya la visualización de la pendiente y las consecuencias de la variación en la frecuencia.

Afectiva: la conexión con un contexto real motiva y da sentido a la abstracción trigonométrica.

4.4.2. Análisis Circulo unitario

I. Nivel de Prácticas Matemáticas y Didácticas

a) Prácticas esperadas de los estudiantes:

- i) Identificar la relación entre ángulo y coordenadas: Reconocer que, en el círculo unitario, las coordenadas de un punto están determinadas por las funciones trigonométricas del ángulo.
- ii) Definir funciones trigonométricas: Expresar $x(\theta) = \cos(\theta)$ e $y(\theta) = \sin(\theta)$ a partir de la definición analítica en el círculo unitario.
- iii) Establecer relaciones algebraicas: Identificar y justificar la identidad fundamental $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.
- iv) Analizar razones de cambio: Comparar las derivadas $dx/d\theta$ y $dy/d\theta$, o interpretar geométricamente cuándo cada coordenada cambia más rápidamente.
- v) Coordinar registros: Transitar entre la representación geométrica (punto en la circunferencia), la representación algebraica (ecuaciones) y la interpretación funcional (razón de cambio).

b) Prácticas didácticas:

- i) Uso de GeoGebra: Construir un punto P dinámico sobre el círculo unitario controlado por un deslizador para el ángulo θ , visualizando cómo varían las coordenadas $x(\theta)$ e $y(\theta)$.
- ii) Visualización de funciones: Trazar simultáneamente las gráficas de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ para comparar sus razones de cambio en diferentes intervalos.

- iii) Representación de vectores: Proyectar las coordenadas del punto P sobre los ejes x e y para evidenciar la relación con seno y coseno.
- iv) Animación del movimiento: Implementar el movimiento del punto P para observar en tiempo real cómo las razones de cambio varían según la posición angular.

II. Nivel de Configuraciones de Objetos y Procesos

a) Objetos primarios:

i) Elementos lingüísticos:

- Círculo unitario, punto P, ángulo θ , coordenadas $(x(\theta), y(\theta))$
- Sentido antihorario, eje positivo de x, vértice en el origen
- Razón de cambio, relación entre funciones

ii) Definiciones/propiedades:

- Círculo unitario: $x^2 + y^2 = 1$ con centro en el origen y radio $r = 1$
- Definición analítica: $x(\theta) = \cos(\theta)$, $y(\theta) = \sin(\theta)$
- Identidad pitagórica: $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$
- Derivadas: $dx/d\theta = -\sin(\theta)$, $dy/d\theta = \cos(\theta)$
- Periodicidad: ambas funciones tienen período 2π

b) Procedimientos:

- i) Proyección ortogonal del punto P sobre los ejes coordenados
- ii) Aplicación de la identidad fundamental para verificar que $P \in$ círculo unitario

- iii) Cálculo o interpretación cualitativa de las derivadas
- iv) Comparación de $|dx/d\theta|$ vs $|dy/d\theta|$ en diferentes cuadrantes

c) Procesos:

- i) Idealización: Abstracción del movimiento circular al círculo unitario matemático
- ii) Representación múltiple: Coordinar la representación geométrica (punto en círculo), algebraica (funciones), y gráfica (curvas sen y cos)
- iii) Particularización: Evaluar en ángulos notables ($0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$) para verificar coherencia
- iv) Generalización: Reconocer que, para cualquier θ , las relaciones se mantienen
- v) Interpretación: Dar sentido físico/geométrico a la razón de cambio como "velocidad" de variación de cada coordenada

III. Nivel de Normas y Metanormas

a) Normas matemáticas:

- i) Convención angular: El ángulo θ se mide desde el eje positivo x en sentido antihorario, usando la convención estándar del círculo unitario
- ii) Notación funcional: Uso de $x(\theta)$ e $y(\theta)$ para enfatizar la dependencia funcional de las coordenadas respecto al ángulo
- iii) Sistema de coordenadas: Ubicación del vértice del ángulo en el origen del plano cartesiano

- iv) Unidades coherentes: θ debe interpretarse en radianes para la consistencia con las derivadas

b) Metanormas:

- i) Validación geométrica-algebraica: Toda relación propuesta debe verificarse tanto geométricamente (en el círculo) como algebraicamente (mediante identidades)
- ii) Coherencia con definiciones: Las expresiones para $x(\theta)$ e $y(\theta)$ deben ser consistentes con las definiciones estándar de las funciones trigonométricas
- iii) Restricción del dominio implícito: Aunque θ puede tomar cualquier valor real, el análisis debe reconocer la periodicidad
- iv) Comparación cualitativa válida: Para comparar razones de cambio, se debe considerar el valor absoluto o especificar el intervalo de θ

IV. Nivel de Idoneidad Didáctica

- a) **Epistémica:** El ejercicio activa significados esenciales de las funciones trigonométricas
- b) **Cognitiva:** Accesibilidad: Los estudiantes de últimos semestres de licenciatura tienen los conocimientos previos necesarios (geometría analítica, cálculo básico, definiciones trigonométricas)
- c) **Interaccional:** Exploración autónoma: GeoGebra permite manipular θ y observar directamente los cambios en $x(\theta)$ e $y(\theta)$

- d) **Mediacional:** Recurso tecnológico: GeoGebra facilita la visualización dinámica del punto P y las gráficas de las funciones simultáneamente
- e) **Afectiva:** Conexión con conocimiento previo, Motivación conceptual

4.4.3. *Análisis Rueda de la fortuna*

I. Nivel de Prácticas Matemáticas y Didácticas

a) Prácticas esperadas de los estudiantes:

- i) Modelar un fenómeno periódico, traducir una situación física en un modelo que relacione la altura de una persona con el tiempo, mediante una función trigonométrica.
- ii) Indicar los parámetros del modelo, la amplitud, la línea media y el período a partir de los datos físicos del problema (diámetro, altura de la plataforma y tiempo de una revolución)
- iii) Seleccionar una función adecuada: analizar la condición inicial para decidir si el modelo debe representarse con una función seno o coseno, justificando la elección.
- iv) Expresar algebraicamente el modelo o $h(t) = M + A \cos(\omega t + \varphi)$ sustituyendo los valores de los parámetros identificados.
- v) Analizar el comportamiento de la función para determinar los momentos de máxima y mínima altura, interpretar su significado físico y verificar que la función cumple con las condiciones del problema.

- vi) Generalizar y predecir usando el modelo construido para responder preguntas sobre alturas específicas y justificar la coherencia de la respuesta en el contexto físico.

b) Prácticas didácticas:

- i) El uso de GeoGebra para la exploración dinámica, simular el movimiento de la rueda de la fortuna en un entorno de geometría dinámica podría permitir observar cómo varía la altura de una persona con el tiempo.
- ii) Visualizar los parámetros, manipular la amplitud, el período y la línea media para observar los efectos de cada parámetro sobre la gráfica y conectar estos cambios con el fenómeno físico.
- iii) Conexión entre representaciones, promoviendo la articulación entre el modelo geométrico (rueda), algebraico y gráfico (curva seno o coseno)

II. Nivel de Configuraciones de Objetos y Procesos

a) Objetos primarios:

i) Elementos lingüísticos:

- Altura $h(t)$, tiempo, período, amplitud, línea media, función seno, función coseno, frecuencia angular, fase, movimiento circular uniforme, variación periódica, modelo trigonométrica, interpretación gráfica.

ii) Definiciones/propiedades:

- Función periódica: Una función f es periódica si existe un número positivo T tal que $f(t + T) = f(t)$, para todo t en su dominio.
- Amplitud: Distancia entre la línea media y el máximo o mínimo de la función; en este contexto la mitad del diámetro de la rueda.
- Línea media: altura promedio que representa el punto medio entre el máximo y mínimo del movimiento.
- Período: Tiempo que tarda la rueda en completar una revolución, equivalente a 10 min en el problema.
- Frecuencia angular: Razón de cambio del ángulo con respecto al tiempo, definida como $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- Modelo trigonométrico del movimiento circular
- $h(t) = M + A \sin(\omega t + \varphi)$ o
- $h(t) = M + A \cos(\omega t + \varphi)$

donde M es la línea media, A es la amplitud, ω es la frecuencia angular y φ la fase inicial.

iii) Argumentos:

- La función seno o coseno describe la proyección vertical del movimiento circular de la persona sobre la rueda, permitiendo modelar la altura en función del tiempo.

- La variación de la altura respecto al tiempo refleja una razón de cambio continua y periódica.
- El modelo se fundamenta en el movimiento circular uniforme, donde la componente vertical varía según una función seno o coseno.
- La altura obtenida a los 5 min debe ser coherente con la posición física esperada.
- Coherencia entre las representaciones.

b) Procedimientos:

- i)** Determinar el radio, la amplitud y la línea media del movimiento a partir del contexto físico.
- ii)** Calcular el período a partir del tiempo que tarda en completar una revolución.
- iii)** Traducir la información del problema a una expresión algebraico del tipo $h(t)=M+A\sin(\omega t+\varphi)$.
- iv)** Ajustar el modelo según la posición inicial (fase) descrita en el enunciado.
- v)** Evaluar la función para un valor particular y justificar el resultado geométricamente.
- vi)** Identificar el dominio y recorrido acordes con la situación teniendo en cuenta las condiciones del fenómeno físico.

c) Procesos:

- i)** Traducción del fenómeno físico al *modelo matemático*.
- ii)** Coordinación de representaciones, de lo geométrico a lo algebraico y lo gráfico.
- iii)** Reconocimiento de la estructura común de los movimientos periódicos.
- iv)** Argumentación de la validez del modelo mediante razonamiento geométrico o simulación en GeoGebra.
- v)** Análisis del comportamiento de la función en distintos intervalos de tiempo, interpretación funcional.
- vi)** Abstracción, paso de la situación concreta a una comprensión formal de los parámetros de la función trigonométrica.
- vii)** Predicción con el uso del modelo para estimar altura o tiempos de paso por posiciones determinadas.

III. Nivel de Normas y Metanormas**a) Normas matemáticas:**

- i)** Se considera válida una solución cuando el modelo propuesto representa correctamente las condiciones iniciales y el comportamiento descrito en el problema.
- ii)** El uso de notación funcional precisa y coherente (identificación de variables dependientes e independientes).

- iii) Coherencia entre las distintas representaciones como criterio de validez del modelo.
- iv) Se espera que los futuros profesor de matemáticas razonen más allá del procedimiento algebraico, incorporando interpretaciones geométricas y físicas del fenómeno,
- v) La argumentación basada en el significado funcional del seno/coseno y no únicamente en la aplicación de fórmulas.

b) **Metanormas:**

- i) El diseño de la tarea busca que el estudiante no encuentre una respuesta numérica, sino que construya el significado funcional y relaciones las magnitudes (variables) involucradas.
- ii) Se fomenta la metacognición del futuro profesor, que este sea consciente de cómo construye su modelo, qué supuestos usa y cómo valida el razonamiento.
- iii) Justificar y comunicar la solución con lenguaje matemático preciso y argumentación coherente.

IV. **Nivel de Idoneidad Didáctica**

- a) **Epistémica:** el problema moviliza los conceptos fundamentales del seno y coseno como funciones periódicas y posibilita conectar el modelo algebraico con un fenómeno real, evitando el tratamiento puramente algorítmico. La

construcción del modelo favorece una comprensión profunda de los parámetros y de las relaciones entre ellos.

- b) **Cognitiva:** El ítem 2.2 ofrece un nivel de complejidad adecuado para estudiantes de últimos semestres de licenciatura, pues requiere coordinar conocimientos de trigonometría, funciones y modelación. Permite observar concepciones centradas en el cálculo mecánico frente a comprensiones funcionales más abstractas.
- c) **Interaccional:**
 - i) **Ecológica:** El contexto de la rueda de la fortuna es reconocible y transdisciplinar, con conexión física y al movimiento circular uniforme. Facilita el interés y la relevancia de la tarea en la formación de futuros profesores.
 - ii) **Mediacional:** El uso de GeoGebra permite explorar el comportamiento de la función, visualizar el movimiento circular y comprender la naturaleza periódica del fenómeno. El software actúa como mediador semiótico que vincula el contexto real con las representaciones matemáticas dinámicas.
 - iii) **Afectiva:** El carácter visual e intuitivo favorece la motivación, la curiosidad y el sentido de logro. El trabajo con la tecnología fomenta la autonomía y la experimentación en el aprendizaje matemático.

4.4.4. Análisis Movimiento Amortiguado.

I. Nivel de Prácticas Matemáticas y Didácticas

a) Prácticas esperadas de los estudiantes:

- i) Identificar las variables y unidades y convertir si es necesario.
- ii) Calcular $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ y evaluar constantes numéricas
- iii) Usar las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$ para determinar
- iv) Interpretar el papel de la exponencial (amortiguamiento) $e^{-\gamma t}$
- v) Evaluar la función para instantes concretos y localizar ceros, máximos y mínimos (Analítica y gráficamente)

b) Prácticas didácticas:

- i) Usar GeoGebra para graficar $x(t)$, ajustar parámetros y observar el efecto de estos sobre las oscilaciones de la función.
- ii) Justificación de la elección de parámetros y que propongan criterios para decidir cuándo “deja de oscilar”

II. Nivel de Configuraciones de Objetos y Procesos

a) Objetos primarios:

- i) **Elementos lingüísticos:** Movimiento amortiguado, frecuencia angular, amortiguamiento, parámetro de fricción, fase, amplitud, envolvente, decaimiento exponencial, oscilación, modelo trigonométrico–exponencial, posición de equilibrio.

ii) Definiciones/propiedades:

- **Movimiento armónico amortiguado:** Movimiento oscilatorio cuya amplitud decrece exponencialmente en el tiempo debido a la resistencia o fricción.
- **Ecuación general:** $f(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$

▫ donde:

- A =amplitud inicial
- γ =coeficiente de amortiguamiento
- φ = Fase inicial
- **Amplitud efectiva:** $Ae^{-\gamma t}$, que decrece con el tiempo.
- **Período subamortiguado:** $T = \frac{2\pi}{\omega}$, mayor que el del movimiento sin fricción.

b) Procedimientos:

- i) Sustituir los valores dados $\omega_0 = 15 \frac{rad}{s}$, $\gamma = 2.5s^{-1}$, $v_o = \frac{60cm}{s}$ para determinar ω
- ii) Construir la ecuación particular del movimiento amortiguado.
- iii) Identificar los puntos de intersección con el eje x resolviendo $f(t)=0$
- iv) Calcular la **amplitud máxima inicial** y **determinar su significado físico**.
- v) Estimar el tiempo en el cual el movimiento deja de ser apreciable (por ejemplo, cuando $e^{-\gamma t} \approx 0.01$).
- vi) Graficar el modelo y analizar el comportamiento temporal.

c) Argumentos:

- i) Argumento físico: El término exponencial representa la pérdida de energía por fricción.

- ii) Argumento geométrico: los límites máximos y mínimos de la función senoidal.
- iii) Argumento funcional: La composición combina periodicidad y decaimiento.
- iv) Argumento aplicado: El modelo describe sistemas reales como amortiguadores.
- v) El contraste con el movimiento armónico simple ayuda a comprender la función de cada parámetro.

d) Procesos:

- i) Modelación: Traducción del fenómeno físico (suspensión de un vehículo) a una representación matemática.
- ii) Representación: Coordinación entre los registros algebraico, gráfico y verbal.
- iii) Razonamiento funcional: Interpretar el efecto de los parámetros sobre la gráfica.
- iv) Generalización: Extender el modelo a otros sistemas oscilatorios.
- v) Comunicación: Expresar el modelo con lenguaje matemático preciso y justificar su validez.

III. Nivel de Normas y Metanormas

a) Normas matemáticas:

- i) La solución es válida si el modelo matemático respeta las condiciones físicas iniciales y describe coherentemente el decaimiento del movimiento.
- ii) Se deben usar unidades coherentes y notación funcional precisa.
- iii) Se espera que el estudiante justifique cada parámetro en términos del contexto físico (no solo algebraicamente).
- iv) La gráfica debe reflejar una oscilación con amplitud decreciente.

b) Metanormas:

- i) El propósito de la tarea no es hallar un número, sino comprender la naturaleza del modelo combinado seno–exponencial.
- ii) Se busca que los futuros docentes reflexionen sobre cómo representar y explicar la pérdida de energía en términos matemáticos.
- iii) Se valora la interpretación conceptual por encima del mero cálculo simbólico.
- iv) Se promueve el uso de herramientas tecnológicas para validar visualmente el modelo.

IV. Nivel de Idoneidad Didáctica

- a) Epistémica:** El ítem permite articular el conocimiento de funciones trigonométricas, exponenciales y su composición, situándolas en un contexto real de movimiento físico. Favorece una comprensión estructural del modelo y la interpretación de sus parámetros.

- b) Cognitiva:** La tarea implica razonamiento avanzado al combinar dos tipos de funciones, interpretar su comportamiento conjunto y conectarlo con conceptos de amortiguamiento y frecuencia. Se adecua al nivel de futuros profesores con formación en análisis y modelación.
- c) Ecológica:** El fenómeno del amortiguamiento se vincula con experiencias cotidianas (suspensión de un automóvil, resortes) integrando la matemática con la física aplicada.
- d) Mediacional:** El uso de GeoGebra o simuladores permite observar la envolvente y la variación dinámica de la amplitud. La herramienta funciona como mediador entre la formalización matemática y la interpretación física.
- e) Afectiva:** El contexto tecnológico y real despierta interés, especialmente al visualizar la amortiguación. Promueve actitudes positivas hacia la modelación y la conexión entre matemáticas y fenómenos naturales.

4.5. Procedimiento de recolección de datos

La recolección de datos se realizará mediante la aplicación de un instrumento diseñado en formato de libro interactivo de GeoGebra, compuesto por problemas abiertos distribuidos en cinco ejes de análisis: razón de cambio, propiedades, representaciones múltiples, dominio y rango y funciones inversas de las funciones seno y coseno.

El diseño busca promover la exploración y visualización de los fenómenos trigonométricos, favoreciendo la argumentación y la coordinación de los registros para el análisis de datos. Laborde (2000) argumenta que los entornos dinámicos facilitan la articulación entre la acción experimental y la justificación teórica, mientras que Gutiérrez (2005) resalta que los registros digitales pueden convertirse en evidencias del razonamiento matemático.

Cada participante resolverá las tareas en el entorno de GeoGebra, registrando sus observaciones, conjeturas y justificaciones tanto en el archivo digital como en un formato de respuesta complementario. Esto permitirá recoger no solo las respuestas finales, sino también las acciones intermedias y estrategias empleadas durante la resolución, proporcionando información valiosa sobre el tipo de conocimiento matemático que emerge.

4.6. Análisis de datos

El análisis de datos se estructuró en dos fases articuladas con el marco teórico de la investigación.

4.6.1. Fase 1:

El análisis a priori del instrumento, descrita a detalle en la sección 5.3.3, en el que se anticiparon las trayectorias de solución posibles y un análisis a posteriori, en el que se examinarán las producciones efectivas de los futuros profesores de matemáticas. Desde un enfoque cualitativo e interpretativo, con el fin de caracterizar los tipos de conocimiento que emergen al responder tareas propuestas sobre las funciones seno y coseno en contextos físicos. Constituye el referente del significado institucional con el que se contrata el análisis de a posteriori.

4.6.2. Fase 2:

El análisis se realizará bajo el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007), articulado con el modelo de Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) (Castro, Pino-Fan y Parra-Urrea, 2018). El EOS permite analizar los objetos, procesos y significados implicados en las prácticas matemáticas, mientras que el CDM amplía esta visión al incorporar las facetas mediacionales y afectivas, vinculadas con los recursos tecnológicos y las actitudes hacia el aprendizaje.

Se realizará una lectura global de las respuestas con el fin de identificar las estrategias de resolución empleadas y los elementos matemáticos explícitos e implícitos presentes en cada producción. Esta fase permite una primera caracterización de las prácticas matemáticas de los FPM.

Como plantean Castro, Pino-Fan y Parra-Urrea, (2018), el CDM ofrece herramientas para examinar los procesos de enseñanza y aprendizaje que otros modelos del conocimiento docente no consideran con la misma profundidad. En particular, sus dimensiones-matemática, didáctica y meta- didáctica matemática- permiten comprender cómo se integran las facetas del conocimiento docente (epistémica, mediacional, afectiva, cognitiva, ecológica e interaccional) en la práctica educativa. Para el análisis de las producciones con el fin de examinar los conflictos de significado y anticipar las dificultades cognitivas que emergen al resolver las tareas sobre las funciones seno y coseno, se identificarán los elementos (situaciones-problema, elementos lingüísticos, conceptos-definición, proposiciones, procedimientos y argumentos) presentes en las respuestas.

Finalmente, el estudio considerará la dualidad personal-institucional (Godino, Batanero y Font, 2007) entendiendo la cognición personal como las producciones individuales y los conocimientos específicos de los FPM y la institucional como el conocimiento matemático general presentes en las producciones. El contraste entre ambos tipos permitirá caracterizar los tipos de conocimiento (algorítmico, representativo e interpretativo) que los futuros profesores movilizan.

5. Análisis de Datos

En este capítulo se presentan los hallazgos obtenidos a partir del análisis de las producciones de los seis futuros profesores de matemáticas (FPM) participantes en la

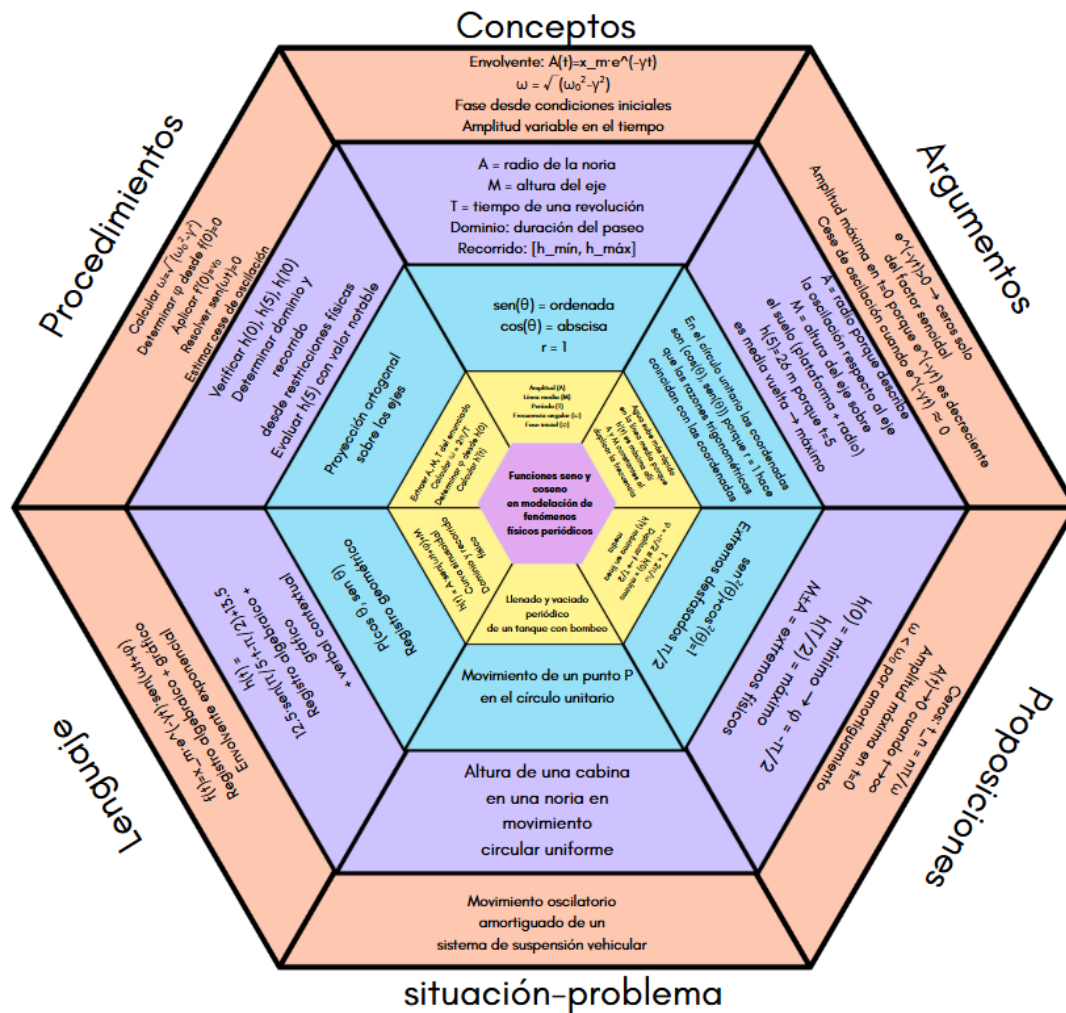
investigación. El análisis toma como referencia la configuración epistémica construida en el análisis a priori (sección 5.4.1), que constituye el significado institucional, en términos del EOS con el que se contrastan los significados personales manifestados por cada participante en sus producciones para poder identificar los conflictos semióticos. El marco interpretativo es el Enfoque Ontosemiótico (EOS), articulado con el modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) y la teoría de registros de representación semiótica de Duval (2006), cuya articulación se describe a detalle en el capítulo 4.

Proceso de sistematización

El análisis de los datos se desarrolló de forma progresiva en tres etapas articuladas. La primera, se construyó la configuración epistémica de referencia de cada tarea mediante el análisis a priori, identificando los seis objetos primarios del EOS, situaciones-problema; las tareas planteadas para la movilización del lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos que emergen en una solución experta de cada tarea. Esta configuración fue sintetizada en el hexágono ontosemiótico de la figura X, constituyó el referente del significado institucional, no describe el significado matemático general de las funciones seno y coseno, sino el sistema específico de objetos primarios que emergen al resolver las cuatro tareas del instrumento-situaciones de modelación de fenómenos físicos periódicos.

Figura 1.

1 Configuración Ontosemiótica de las funciones trigonométricas en la modelación de fenómenos físicos periódicos.



Nota. Esta figura muestra la configuración del significado institucional de referencia realizado en el análisis a priori, aquí se identifican los objetos que se espera sean activados por los FPM.

En la segunda etapa se realizó la recolección y organización del material empírico. Cada participante resolvió las cuatro tareas entorno del libro interactivo de GeoGebra, registrando construcciones y justificaciones en el archivo digital y complementando sus respuestas en papel.

Para cada participante y para ítem de las tareas se organizaron las evidencias constituyendo la fuente primaria para el análisis. En la tercera etapa, se realizó el análisis a posteriori por medio de rejillas analíticas a las producciones de cada participante por ítem. Las rejillas operacionalizan conjuntamente el EOS y el CDM en cuatro niveles organizados del mismo modo que el análisis a priori. Es importante señalar que el proceso de sistematización permitió filtrar las producciones explícitas e implícitas que pueden inferirse a partir de los resultados en GeoGebra. El análisis ontosemiótico busca identificar los objetos y procesos que operan en la actividad.

Los resultados se presentan tarea por tarea, siguiendo la secuencia del instrumento de recolección de datos, dentro de cada tarea se organizan las prácticas del grupo, los objetos y procesos actividades, las normas y metanormas observadas, los perfiles de comprensión individuales y los conflictos semióticos observados. Cada tarea cierra con una síntesis grupal que contrasta los perfiles de los participantes y articula los hallazgos transversales más relevantes presentes en las producciones de la tarea.

Al finalizar la síntesis de las cuatro tareas, el capítulo presenta una síntesis global que incluye una tabla comparativa de todos los participantes, los patrones transversales que emergen del conjunto de las tareas y la caracterización del tipo de conocimiento que los FPM manifiestan al enfrentarse a situaciones de modelación trigonométrica en contextos físicos.

Los participantes son identificados con los seudónimos: Brayan, Carlos, María, Celin, Camilo y Andrey.

5.1. Presentación de Hallazgos

Los hallazgos se presentan tarea por tarea. Para la tarea de Llenado de Tanque, los niveles de prácticas matemáticas, objetos y procesos, y normas se exponen de manera grupal; los

perfiles de comprensión y los conflictos semióticos se desarrollan de forma individual por participante.

5.2. Análisis descriptivo

5.2.1. Tarea 1: Llenado de Tanque

La tarea de Llenado de Tanque plantea una situación de modelación periódica en la que el nivel del agua $h(t)$ en un tanque de 10 m de altura instalado a 1 m sobre el suelo varía de forma sinusoidal con un período de 16 minutos. La tarea consta de tres preguntas: la primera solicita proponer un modelo senoidal con sus restricciones físicas; la segunda pide describir cuándo el agua sube más rápido y cuándo más despacio; y la tercera pregunta cómo se modifica la función si se duplica la frecuencia del sistema de bombeo. El modelo institucional de referencia es $h(t) = 5 - 4 \cdot \cos(\pi t/8)$, con amplitud $A = 4$ m, línea media $M = 5$ m, frecuencia angular $\omega = \pi/8$ rad/min y condición inicial $h(0) = \text{mínimo} = 1$ m.

I. Prácticas matemáticas y didácticas

A lo largo de las tres preguntas, la práctica más consistente del grupo es la traducción de las condiciones del enunciado a la estructura algebraica de una función sinusoidal: la mayoría identifica el período, calcula la frecuencia angular y estima la amplitud y la línea media. Sin embargo, la completitud de esa traducción varía considerablemente: mientras algunos participantes integran todos los parámetros con justificación explícita, otros producen una expresión funcional sin que los parámetros elegidos respondan de forma verificada a las condiciones del fenómeno.

En las preguntas de análisis y modificación (segunda y tercera), las prácticas se vuelven marcadamente más heterogéneas. Ningún participante calcula

algebraicamente $h'(t)$ para analizar la razón de cambio, a pesar de que el modelo construido en la primera pregunta proporciona todos los elementos para hacerlo. Las respuestas son predominantemente verbales, apoyadas en intuición geométrica. De forma similar, en la pregunta de modificación únicamente Brayan produce una expresión algebraica para la función con frecuencia duplicada, aunque con un error en la dirección de la operación sobre ω . Respecto al uso de GeoGebra, se observan tres patrones: un uso limitado a la entrada de la expresión algebraica sin exploración activa (María), un uso exploratorio con manipulación de parámetros y visualización de la curva (Carlos, Celin), y un uso avanzado que incorpora puntos dinámicos, tangentes y cálculo de derivadas (Brayan). Dos participantes —Camilo y en parte Andrey— trabajan predominantemente en papel.

II. Objetos y procesos

Los objetos primarios más consistentemente activados en el grupo son los elementos lingüísticos algebraicos (expresión sinusoidal con sus parámetros), los conceptos de período, amplitud, frecuencia angular y línea media, y los procedimientos de cálculo de parámetros a partir de los datos del enunciado. Estos objetos se activan con mayor uniformidad en la primera pregunta, donde la demanda es más estructurada.

Los objetos menos activados son los argumentos de justificación y las proposiciones que vinculan el modelo matemático con las restricciones físicas del fenómeno. La restricción de dominio —que impide valores físicamente imposibles del nivel del agua— está ausente o es solo verbal en la mayor parte del

grupo; únicamente Brayan la formaliza algebraicamente en GeoGebra mediante una función condicional. El objeto derivada, central para la segunda pregunta, no es activado en su forma algebraica por ningún participante, aunque sí aparece en el discurso verbal de algunos (Andrey lo nombra explícitamente, Celin lo evoca de forma implícita).

Los procesos predominantes son de modelación (traducción de condiciones físicas a parámetros) y de representación simple dentro de un único registro. Los procesos de conversión entre registros —particularmente del registro contextual-físico al algebraico— son los que generan mayor dificultad: todos los participantes reconocen verbalmente el efecto de duplicar la frecuencia, pero solo Brayan intenta traducir ese reconocimiento en una modificación algebraica del modelo. La dirección inversa —leer la expresión algebraica en clave física— es más accesible para el grupo, como lo demuestran Carlos y María en la tercera pregunta.

III. Normas y metanormas

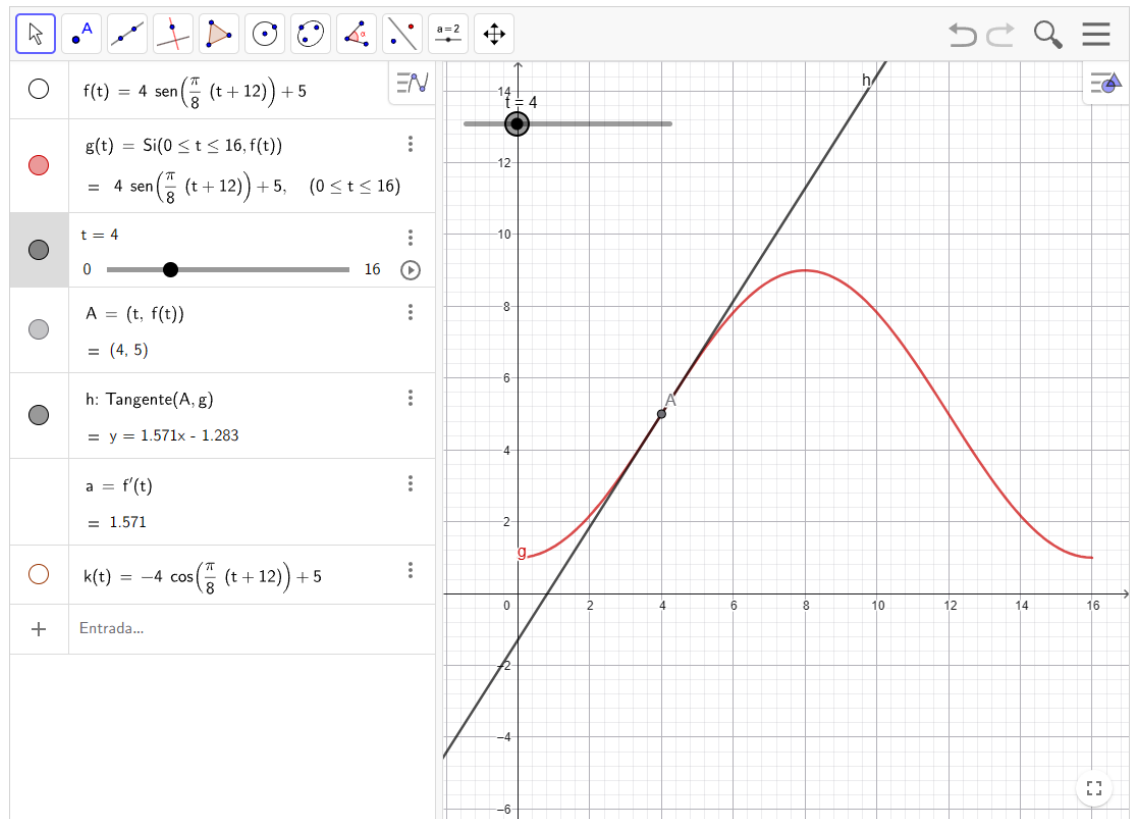
La norma de ajuste de la fase según la condición inicial $h(0) = \text{mínimo}$ es observada por la mayoría, aunque no siempre justificada. La norma de validación física del modelo —verificar que los valores extremos de la función coincidan con las condiciones del fenómeno— es cumplida parcialmente: los participantes obtienen los valores esperados pero pocos comprueban de forma explícita que el modelo sea coherente con la situación real.

La metanorma más relevante que emerge del análisis grupal es la ausencia sistemática de verificación del resultado producido: en ninguna de las tres

preguntas ningún participante calcula el valor resultante de su modelo para confirmar que satisface las condiciones del problema. En la tercera pregunta, esto tiene consecuencias directas en el caso de Brayan, cuya fórmula tiene una apariencia formal correcta pero produce un período de 32 minutos en lugar de 8, error que la verificación habría revelado de inmediato. Una segunda metanorma observada es la compartimentación entre preguntas: el modelo construido en la primera pregunta no es movilizado como herramienta activa en las preguntas siguientes. Ningún participante toma explícitamente $h(t)$ como punto de partida para calcular $h'(t)$ en la segunda pregunta, ni para modificar ω en la tercera desde el modelo ya construido (con la excepción parcial de Brayan). Esto sugiere que los FPM conciben las preguntas como tareas independientes, no como partes articuladas de una misma situación de modelación.

IV. Perfil de comprensión por participante

Brayan: Brayan muestra el perfil más integrado del grupo en la primera pregunta: interpreta la fase como desplazamiento temporal de 12 minutos ($3T/4$), formaliza la restricción de dominio en GeoGebra mediante una función condicional, y anticipa la segunda pregunta al construir la derivada $f(4) = \pi/2 \approx 1.571$ m/min como herramienta de análisis dinámico.



Sin embargo, a lo largo de la tarea muestra una tendencia decreciente en la completitud de sus respuestas: en la segunda pregunta no transfiere el valor de la derivada ya calculado para fundamentar su análisis, y en la tercera produce la única expresión algebraica del grupo, pero con la dirección de la operación sobre ω invertida ($\pi/16$ en lugar de $\pi/4$), sin acompañarla de ninguna explicación verbal.

Tarea 2

B) Describe cuándo el agua sube más rápido y cuándo más despacio.

Aa π

El agua sube mas rapido cuando t esta en $[0,4]$ y el agua sube mas despacio cuando t esta en $(4,8]$

Tarea 3

C) ¿Cómo se modifica la función que modela la altura del nivel del agua si se duplica la frecuencia del sistema de bombeo, manteniendo constante la amplitud de la oscilación y el nivel medio?

Aa π

$$4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{16}(t + 12)\right) + 5$$

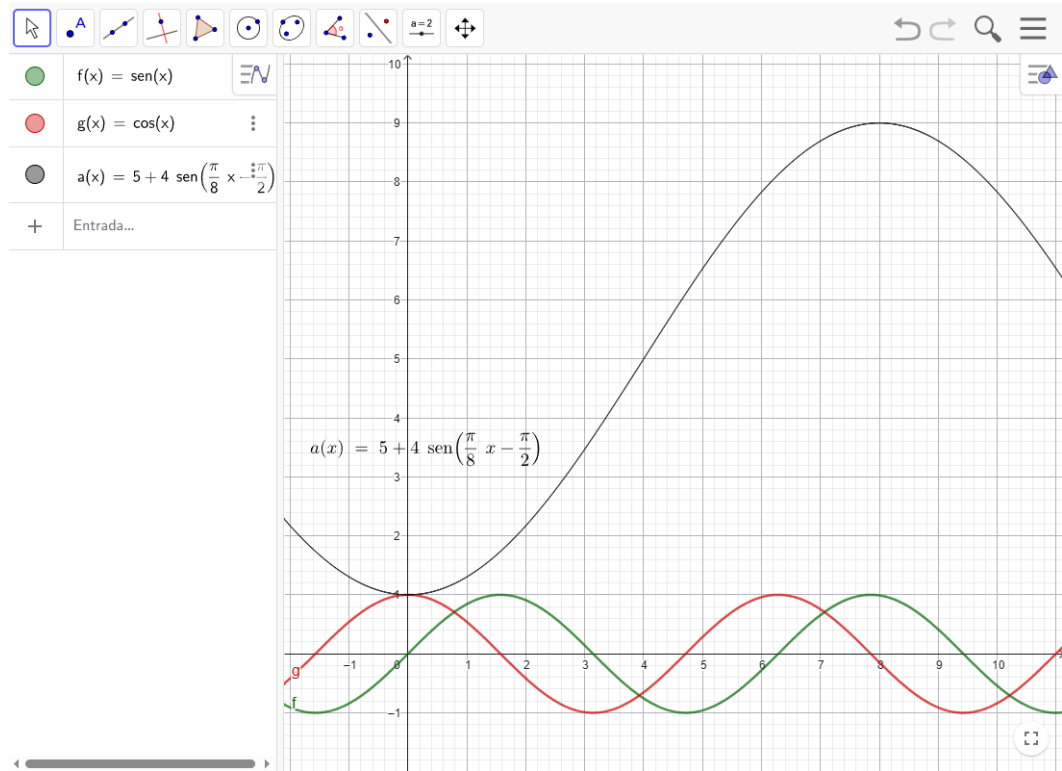
Tabla 3.

Perfil de comprensión de Brayan en la Tarea 1.

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Brayan	Alta ✓	Alta ✓	Alta / Decreciente

Nota. En esta tabla se presenta el perfil de comprensión de Brayan en T1.

Carlos: El perfil de Carlos a lo largo de la tarea revela una oscilación entre fortalezas y debilidades según el tipo de demanda. En la primera pregunta demuestra comprensión algorítmica sólida e interpretativa emergente: identifica correctamente todos los parámetros, los justifica verbalmente y les asigna significado físico.



En la segunda pregunta, incurre en el error conceptual más grave del grupo: identifica el máximo de $h(t)$ como el momento de mayor velocidad de llenado, confundiendo la posición con la razón de cambio, y abandona tanto el modelo construido como GeoGebra.

Tarea 2

B) Describe cuándo el agua sube más rápido y cuándo más despacio.

Aa π A simple vista podría parecer que el agua sube más rápido cerca del punto máximo, pero puede ser que sea un crecimiento constante y que simplemente con lo que se observa no se pueda asegurar, aunque se tenga la leve impresión.

Tarea 3

C) ¿Cómo se modifica la función que modela la altura del nivel del agua si se duplica la frecuencia del sistema de bombeo, manteniendo constante la amplitud de la oscilación y el nivel medio?

Aa π Al duplicar la frecuencia, el comportamiento cualitativo del sistema no cambia: el nivel sigue siendo periódico, simétrico y con el mismo rango de variación. Lo que se modifica es el tiempo en el que ocurre la entrada y salida del líquido, haciendo que las oscilaciones ocurran más rápidamente.

En la tercera, sin embargo, produce la respuesta verbalmente más sofisticada del grupo: enumera con precisión qué propiedades permanecen invariantes y cuáles

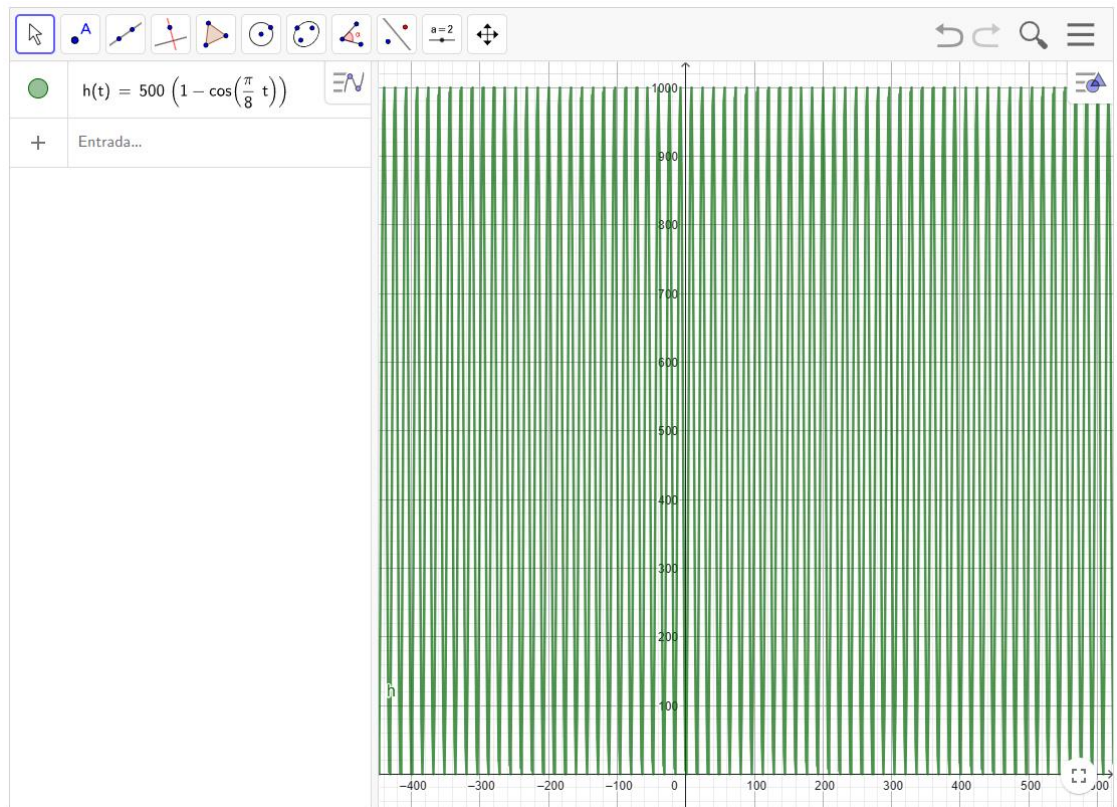
cambian al duplicar la frecuencia, usando vocabulario técnico pertinente, aunque sin producir ninguna expresión algebraica. Este perfil no lineal sugiere una comprensión segmentada por tipo de demanda cognitiva.

Tabla 4.

Perfil de comprensión de Carlos en T1

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Carlos	Sólida / Ausente	Parcial	Media-alta / Oscilante

María: Muestra un patrón inverso al de Carlos: su comprensión interpretativa crece de pregunta en pregunta —de ausente a emergente a sólida—, mientras que su comprensión algorítmica permanece débil o ausente a lo largo de toda la tarea. En la primera pregunta, el modelo que propone confunde la línea media con la amplitud ($M = A = 500$ cm), lo que genera un modelo físicamente inválido; no externaliza ningún proceso de razonamiento.



En la segunda pregunta responde de forma intuitiva y emergente, sin cálculo algebraico. En la tercera, sin producir ninguna expresión formal, identifica correctamente el efecto gráfico con el término técnico 'compresión horizontal' y describe con precisión cómo el cambio afecta el ciclo físico del bombeo.

Tarea 2

B) Describe cuándo el agua sube más rápido y cuándo más despacio.

Ans π Para esto yo lo relacionaría con la derivada ya que me representa el cambio o la variación y pues analizando la derivada de la función se tendría que la velocidad depende el seno. El agua sube más despacio cuando la derivada es cero y diría que sube más rápido cuando la velocidad es un punto máximo y es positivo.

Tarea 3

C) ¿Cómo se modifica la función que modela la altura del nivel del agua si se duplica la frecuencia del sistema de bombeo, manteniendo constante la amplitud de la oscilación y el nivel medio?

Ans π Pues como estamos duplicando según lo que se da de funciones lo que va a suceder es que gráficamente la función se va a comprimir horizontalmente, además al hacer esto el llenado del tanque va a ser más rápido al igual que el vaciado.

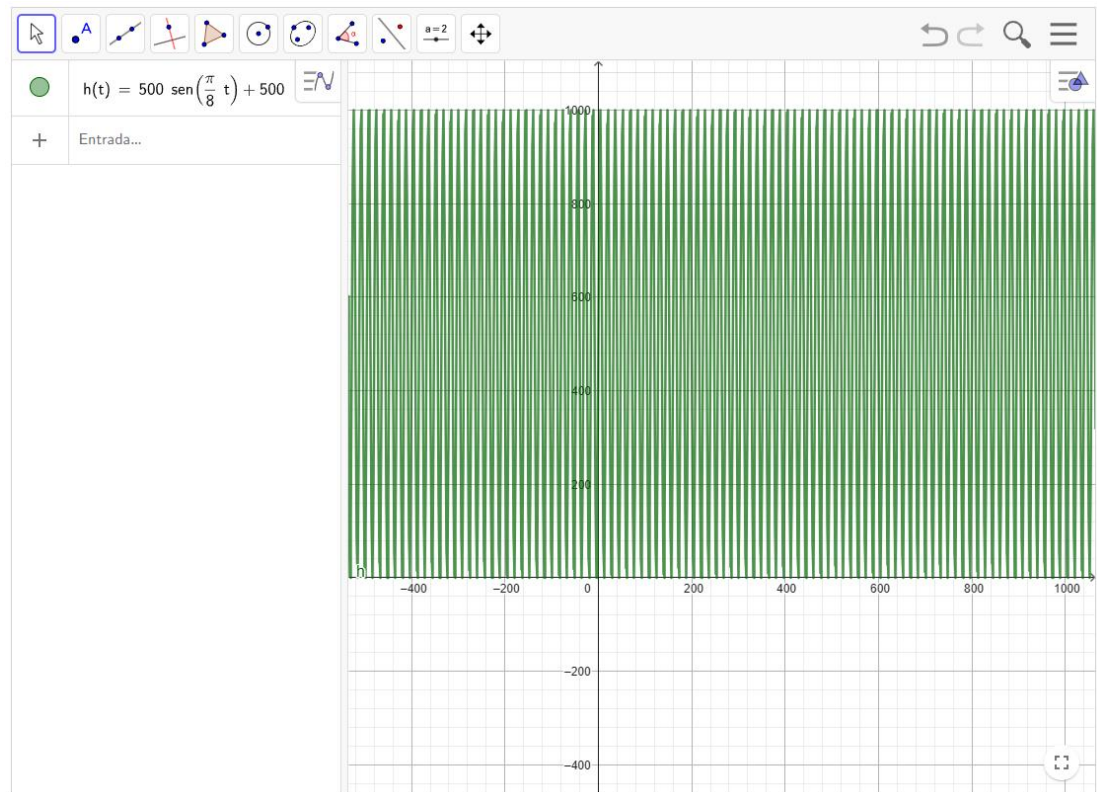
Este perfil —intuitivamente correcto pero formalmente incompleto— refleja una comprensión que capta el comportamiento del objeto sin poder formalizarlo.

Tabla 5.

Perfil de comprensión de María en T1

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
María	Parcial / Ausente	Baja / Media	Progresiva ↑

Celin: Construye un modelo senoidal con ω incorrecto, sin que la elección de la fase responda de forma verificada a la condición inicial; su uso de GeoGebra incluye una simulación animada del fenómeno, aunque la articulación entre el registro algebraico y el gráfico no es explicitada.



En la segunda pregunta establece de forma implícita la relación entre pendiente y velocidad de cambio, identificando correctamente los momentos de mayor y menor crecimiento, aunque su análisis se limita al tramo de llenado. En la tercera, reconoce verbalmente el efecto de duplicar la frecuencia e identifica el efecto sobre el fenómeno físico con comprensión correcta, pero no traduce ese reconocimiento en una expresión algebraica ni en la modificación formal del parámetro ω .

Tarea 2

B) Describe cuándo el agua sube más rápido y cuándo más despacio.

Aa π El agua sube más rápido cuando la derivada de la función $h(t)$ es máxima, es decir, la pendiente de la función es más grande que sería en $h(t)=500$ y la curva de la función va subiendo (ascendiendo); por otro lado, el agua sube más lento justo en los instantes cuando esta por llenarse completamente el tanque o cuando empieza a llenarse, por que la pendiente de estos puntos en $h(t)$ es casi o es 0.

Tarea 3

C) ¿Cómo se modifica la función que modela la altura del nivel del agua si se duplica la frecuencia del sistema de bombeo, manteniendo constante la amplitud de la oscilación y el nivel medio?

Aa π Dada la ecuación general de seno al duplicar la frecuencia el periodo de la función se reduce a la mitad, es decir, el tanque se llenaría en 8 min. Es lógico pensar que gráficamente al cambiar la frecuencia, se estreche la gráfica de la función y por ende sea más rápido completar el ciclo, o sea, llenar el tanque rápido.

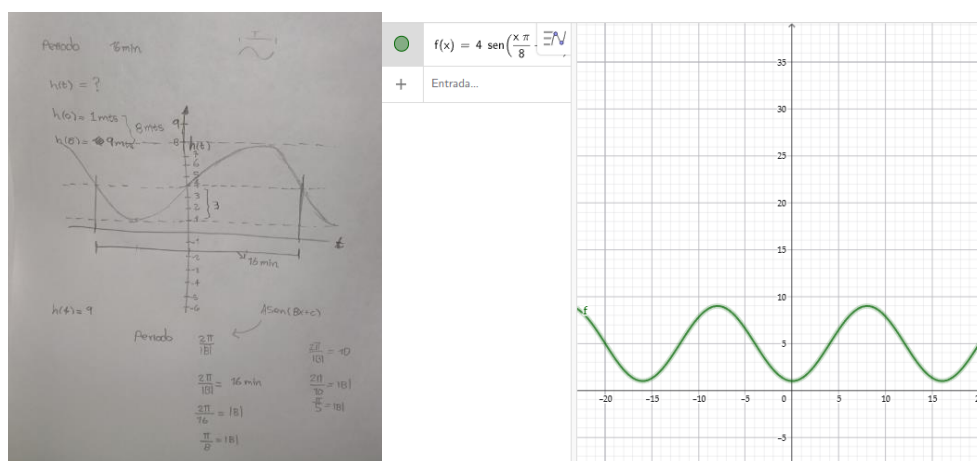
Su perfil global refleja una comprensión parcial que se apoya más en la intuición contextual que en la articulación entre registros.

Tabla 6.

Perfil de Comprensión de Celín en T1

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Celin	Media / Ausente	Media	Media / Alta

Camilo: Presenta la asimetría más marcada del grupo entre comprensión algorítmica e interpretativa. En la primera pregunta calcula correctamente todos los parámetros del modelo ($A = 4$, $M = 5$, $\omega = \pi/8$, $\phi \approx 4.7$) con proceso explícito en papel y produce una gráfica manual cualitativamente correcta, pero ningún parámetro recibe interpretación física ni se vincula con las condiciones del fenómeno; las restricciones físicas están completamente ausentes.



En las preguntas segunda y tercera responde exclusivamente en lenguaje cotidiano, sin movilizar el aparato algebraico ni gráfico disponible, aunque identifica de forma intuitiva que la mayor velocidad ocurre cuando el nivel está en la línea media y que más frecuencia implica ciclos más cortos.

Tarea 2

B) Describe cuándo el agua sube más rápido y cuándo más despacio.

As π Sube más rapido cuando pasa los 5 metros, sube despacio antes de los 5 metros

Tarea 3

C) ¿Cómo se modifica la función que modela la altura del nivel del agua si se duplica la frecuencia del sistema de bombeo, manteniendo constante la amplitud de la oscilación y el nivel medio?

As π Se duplicaría la cantidad de oscilaciones que tendría en los 16 minutos, haciendo que suba y baje mucho más rapido el nivel de agua

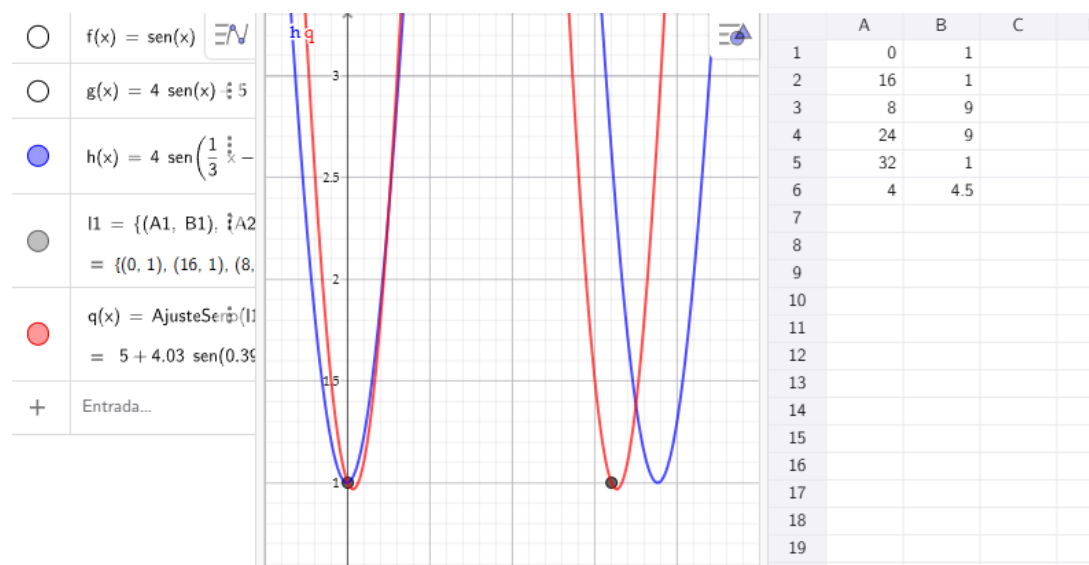
Este patrón —solidez algorítmica en la construcción, ausencia de uso del modelo como instrumento de análisis— evidencia que el modelo existe como objeto construido, pero no como herramienta de razonamiento.

Tabla 7.

Perfil de comprensión de Camilo en T1

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Camilo	Alta / Ausente	Media / Baja	Emergente

Andrey: Presenta una inconsistencia entre registros en la primera pregunta: calcula $\omega = \pi/8$ correctamente en papel, pero ingresa $\omega = 1/3$ en GeoGebra, contradicción que no detecta porque la herramienta AjusteSeno del software corrige el error de forma automática. Esta situación ilustra un riesgo del uso de software: la herramienta puede producir un resultado correcto que oculta una contradicción en el razonamiento. Ningún parámetro recibe interpretación física.



En la segunda pregunta identifica $t = 4$ min como el instante de mayor velocidad usando el término 'derivada', aunque la descripción de los mínimos es imprecisa.

En la tercera, duplica ω correctamente de $\pi/8$ a $\pi/4$ en papel, pero confunde período con frecuencia angular al verbalizarlo y no escribe la nueva función ni describe el efecto físico. Su perfil global muestra acceso fragmentado a los objetos clave del ejercicio, sin articulación entre ellos.

B) Describe cuándo el agua sube más rápido y cuándo más despacio.

Mientras mas cerca estemos de los valores del seno a 9 por la derecha el cambio disminuye y el tanque se llena mas lento, usamos lo valores en $t=4$ por ejemplo el cambio es mayor

Tarea 3

C) ¿Cómo se modifica la función que modela la altura del nivel del agua si se duplica la frecuencia del sistema de bombeo, manteniendo constante la amplitud de la oscilación y el nivel medio?

cambiaríamos el periodo de $\pi/8$ a $\pi/4$

Tabla 8.

Perfil de comprensión de Andrey en T1

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Andrey	Parcial (inconsistencia)	Media (no articulada)	Media / No evidenciada

V. Conflictos semióticos

El conflicto más extendido y de mayor consecuencia en la tarea es la confusión entre la línea media y la amplitud, presente en María: al usar $M = A = 500$ cm, el modelo producido permite que el nivel del agua llegue a cero, violando la condición física del sistema. Este conflicto refleja una comprensión de los parámetros como valores numéricos abstractos, desvinculados de su significado geométrico y contextual.

Un segundo conflicto relevante es el error altura-velocidad que comete Carlos en la segunda pregunta: identificar el máximo de $h(t)$ como el momento de mayor velocidad de llenado. Este es uno de los errores más documentados en el aprendizaje de las funciones y la derivada, e ilustra la dificultad de distinguir entre la posición de un sistema en un instante dado y su razón de cambio en ese mismo instante. Variaciones de este conflicto aparecen también en Brayan —quien confunde velocidad creciente con velocidad mayor (error de orden entre h' y h'')— y en María —quien identifica los instantes de $h'(t) = 0$ como los de 'menor velocidad', confundiendo velocidad nula con velocidad mínima positiva.

En la tercera pregunta surge el conflicto de inversión de la relación frecuencia–frecuencia angular ($\omega = 2\pi f$): Brayan opera sobre ω en la dirección incorrecta al dividirlo por 2 en lugar de multiplicarlo, produciendo un modelo con el doble del período en vez de la mitad. Andrey, por su parte, duplica ω correctamente, pero confunde los conceptos de período y frecuencia angular al verbalizarlo, lo que evidencia que el error no es siempre operacional sino que puede ser también conceptual.

El conflicto metodológico más sistemático de la tarea es la ausencia de verificación del resultado producido: en ninguna de las tres preguntas ningún participante comprueba que el modelo obtenido satisface las condiciones del fenómeno. En el caso de Brayan, esta omisión es especialmente significativa porque la fórmula producida tiene una apariencia formal impecable que oculta un error conceptual solo detectable mediante el cálculo del período resultante.

Finalmente, el caso de Andrey en la primera pregunta introduce un conflicto de tipo mediacional: la inconsistencia no detectada entre el valor de ω calculado en papel y el valor ingresado en GeoGebra. La corrección automática del software impide que el error se haga visible al participante, señalando que el uso de herramientas tecnológicas sin verificación activa puede encubrir contradicciones en el razonamiento.

VI. Síntesis grupal — Tarea: Llenado de Tanque

La siguiente tabla consolida los perfiles de comprensión de los seis participantes a lo largo de la tarea completa, considerando el desempeño global en las tres dimensiones:

Tabla 9.

Perfiles de comprensión de los FPM en T1.

Participante	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Brayan	Alta en construcción; error en modificación	Alta — cuatro registros articulados	Alta en Preg. A; decreciente en B y C
Carlos	Sólida en construcción; ausente en análisis y modificación	Parcial — no articula gráfico y algebraico	Media-alta; error altura- velocidad en Preg. B; alta en Preg. C

María	Parcial — confunde M y A	Baja — un solo registro en cada pregunta	Progresiva: ausente → emergente → sólida
Celin	Media — ω correcto; fase sin justificar	Media — articulación implícita	Media en análisis; alta en modificación conceptual
Camilo	Alta en construcción; ausente en análisis y modificación	Media solo en Preg. A; baja en B y C	No evidenciada en construcción; emergente en análisis y modificación
Andrey	Parcial — inconsistencia entre registros no detectada	Media — coordinación sin coherencia verificada	Media en análisis; no evidenciada en modificación

El análisis conjunto de la tarea permite identificar cuatro hallazgos transversales:

Primero, la asimetría entre comprensión algorítmica e interpretativa es el rasgo más definitorio del grupo. Los participantes con mayor dominio procedimental en la construcción del modelo (Brayan, Camilo) no son necesariamente quienes muestran mayor comprensión interpretativa en el análisis y la modificación; y los que demuestran comprensión interpretativa más sólida ante preguntas cualitativas (Carlos, María, Celin en la tercera pregunta) son quienes no producen expresiones algebraicas. Esta disociación es consistente con lo señalado por Brijlall y Maharaj

(2014) respecto a la compartimentación del conocimiento trigonométrico en la formación inicial docente.

Segundo, la comprensión representativa es la dimensión más débil y homogéneamente distribuida en el grupo. Ningún participante logra una coordinación plena de registros en ninguna pregunta: todos operan predominantemente dentro de un registro y encuentran dificultades en las conversiones que involucran el registro contextual-físico, en particular la traducción de una modificación verbal del fenómeno a una transformación algebraica del modelo.

Tercero, la ausencia de verificación del resultado es un patrón sistemático que atraviesa el grupo. Esta limitación tiene implicaciones directas para la práctica docente futura: un futuro profesor que no ha incorporado la verificación como parte de su práctica de modelación difícilmente podrá promover esta competencia en sus estudiantes, que es además una de las demandas explícitas de los estándares curriculares del MEN (2006).

Cuarto, la compartimentación entre preguntas evidencia que los FPM no conciben la tarea como una situación de modelación articulada, sino como un conjunto de preguntas independientes. El modelo construido en la primera pregunta no es movilizado como herramienta activa en las siguientes, lo que limita la profundidad del análisis y la capacidad de generación de respuestas formalmente fundamentadas.

5.2.2. Tarea 2: El círculo unitario

La tarea del Círculo Unitario plantea una situación donde se sugiere la exploración geométrica y funcional en la que un punto P se mueve en sentido antihorario sobre la circunferencia de radio 1, describiendo un ángulo θ respecto al eje positivo x con vértice en el origen. La tarea está compuesta de dos preguntas, donde en la primera se solicita definir la posición del punto P en términos del ángulo, y la segunda pide describir cómo varía $x(\theta)$ cuando $y(\theta)$ crece y qué ocurre con los máximos y mínimos de cada variable. Se esperaba que los FPM activaran prácticas que les permitiera definir $P = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, donde $x(\theta) = \cos(\theta)$ y $y(\theta) = \sin(\theta)$, derivado de la definición analítica de las funciones trigonométricas en el círculo unitario, con la identidad pitagórica $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ como argumento para validar la respuesta.

I. Prácticas matemáticas y didácticas

La práctica más consistente del grupo de participante en la primera pregunta es la producción algebraica que asigna las funciones trigonométricas seno y coseno a las coordenadas del punto P. Sin embargo, la calidad con que se realiza la asignación varía de forma considerable. Brayan y Carlos producen asignaciones correctas por medio de prácticas diferentes. El primero mediante un resultado directo, pero sin argumentos, el segundo mediante una justificación geométrica, pero sin la expresión algebraica. Por otro lado, María invierte las coordenadas, Celín produce la asignación correcta con una justificación conceptual débil y Camilo introduce un factor en la notación imprecisa que no afecta la estructura matemática, pero es confusa en la dependencia funcional.

Ninguno de los participantes registra una respuesta que integra de forma simultánea la expresión algebraica correcta, la justificación geométrica desde las

proyecciones y la verificación con el ángulo construido en GeoGebra, cada uno tiene un rasgo complementario para la respuesta de los demás.

En la segunda pregunta, las prácticas se ven más divididas, los participantes no registraron una descripción completa de la covariación entre las variables $y(\theta)$ y $x(\theta)$, responden la primera parte de la pregunta generalizando el comportamiento del primer cuadrante a los otros intervalos, omitiendo el cuarto cuadrante donde la covariación es directa. Las respuestas sobre los extremos son más exitosas, pero también presentan vacíos, María identifica correctamente los extremos positivos, pero omite los negativos, Brayan es el único de los participantes que incluye el mínimo $y(\theta)=-1$ y la relación recíproca en los extremos cuando x se acerca a y igual a 0; Celín usa un ejemplo en el intervalo de $[0, \pi/2]$ sin generalizar; Camilo y Andrey comparten el mismo conflicto, confundir el valor cero de una función en el extremo de la otra con su máximo o mínimo.

II. Objetos y procesos

Los objetos primarios más consistentes que fueron activados en el grupo son los elementos lingüísticos algebraicos, la expresión del par ordenado $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ y el concepto de función trigonométrica como coordenado del punto P. Estos objetos se activan con mayor uniformidad en la primera pregunta. Los objetos menos activados son los que vinculados a la justificación y las proposiciones que vinculan la definición de función con la geometría del círculo unitario.

La identidad pitagórica $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, que es el argumento que conecta la definición algebraica con las propiedades de variación, no es activada ni sugerida por alguno de los participantes del grupo. La distinción por cuadrantes en la

descripción de covariación es el objeto ausente más significativo de la segunda pregunta, todos responden la covariación lo hacen considerando el primer cuadrante y generalizando sin restricciones.

El proceso de conversión entre registros es una gran dificultad en ambas preguntas. En la primera, la conversión entre el registro geométrico-proyecciones del radio sobre los ejes- y el registro algebraico- pitagórico $x(\theta)=\cos(\theta)$ y $y(\theta)=\sin(\theta)$, no es realizada de forma completa por ningún FPM, Carlos realiza la conversión directa de lo geométrico a lo verbal, pero no llega al algebraico; Brayan produce el algebraico sin evidenciar lo geométrico; los demás presentan dificultades en alguno de los extremos de la conversión. En la segunda pregunta, la conversión entre el registro geométrico, el movimiento de P sobre el círculo, y el registro verbal-funcional de la descripción de la covariación es el proceso central y en todos los casos queda limitada la respuesta.

III. Normas y metanormas

La norma de asignación correcta de las coordenadas x y y es observada explícitamente en Brayan, correctamente justificada, pero sin formalización por Carlos, fue argumentada de forma confusa por Celín, con errores de asignación por María, con imprecisiones de notación por Camilo y Andrey, la norma básica de la tarea solo fue correcta en las producciones de dos de los FPM de forma algebraica.

La metanorma más relevante que emerge del análisis grupal es la ausencia de verificación con la construcción. Todos los participantes tienen acceso a la

construcción dinámica de GeoGebra y ninguno la usó para justificar, verificar o contrastar su respuesta. En el caso de María, esta omisión es especialmente significativa: la verificación hubiera revelado de inmediato el error cometido en las coordenadas planteadas, pues su expresión hubiera ubicado a P en el cuarto cuadrante cuando visiblemente en ángulo lo ubicaba en el segundo.

Una metanorma compartida es la restricción compartida del análisis de la segunda pregunta, todos construyen la comprensión de la covariación en el intervalo $[0, \pi/2]$ y ninguno la alcanza a extender al cuarto cuadrante, donde covarian de forma directa. Este es el punto ciego colectivo no es un error puntual sino una concepción compartida sobre el análisis de esta tarea.

Finalmente, la metanorma que justifica algebraicamente mediante la identidad pitagórica está ausente en todo el grupo. Ningún participante usa como argumento general para hablar de la relación de los extremos de seno y coseno $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, a pesar de que varias de las respuestas llegan de forma intuitiva al comportamiento de la identidad, pero no llegan a esta identidad para justificar de forma inmediata.

IV. Idoneidad

Idoneidad epistémica: La faceta epistémica examina en qué medida las producciones de los FPM activan los objetos primarios del significado institucional referencial de la tarea la definición analítica de las coordenadas desde las proyecciones del radio unitario, la identidad pitagórica como argumento de validación, y la descripción completa de la covariación entre seno y coseno en todos los cuadrantes, lo esperado en el análisis a priori.

El nivel epistémico del grupo en esta tarea se podría considerar medio-bajo, con variaciones significativas entre participantes y entre preguntas.

En la primera pregunta, el objeto más activado es la expresión algebraica del par ordenado (cos, sen), presente en cinco de los seis participantes en alguna forma o variación.

Sin embargo, la activación es parcial en la mayoría de los casos: Brayan produce la asignación correcta sin proceso visible; Carlos justifica geoméricamente sin formalizar algebraicamente; María invierte las coordenadas; Celin justifica con una argumentación conceptualmente débil que mezcla dos contextos de definición; Camilo introduce un factor de escala que desnaturaliza la definición del círculo unitario; y Andrey usa una variable incorrecta que oscurece la dependencia funcional. El objeto que ningún participante activa es la condición $r = 1$ como elemento definitorio que permite identificar directamente las coordenadas con cos y sen — solo Carlos la menciona explícitamente de forma verbal.

En P2, la activación epistémica es aún más fragmentada. El objeto matemático central, la descripción completa de la covariación entre $x(\theta)$ y $y(\theta)$ con distinción por cuadrantes, no es activado por ningún participante. Los objetos parcialmente activados son la covariación inversa en el primer cuadrante (Brayan, Carlos, Celín) y los valores notables en los extremos (María, Brayan). El objeto completamente ausente en todo el grupo es la identidad pitagórica $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ como argumento general que justifica y unifica ambas preguntas.

Idoneidad cognitiva: La faceta cognitiva examina los significados personales logrados que cada FPM manifiesta en sus producciones, los conflictos semióticos presentes y el tipo de comprensión predominante.

Brayan evidencia el perfil cognitivo más completa de la tarea, en P1 su comprensión no es justificada, el resultado correcto sin proceso visible impide determinar si proviene de comprensión geométrica consolidada o de recuperación memorística. En la segunda pregunta su comprensión interpretativa es la más amplia del grupo, aborda ambas partes de la pregunta con tres proposiciones articuladas, pero con dos limitaciones cognitivas relevantes, la generalización de la covariación al primer cuadrante compartida con Carlos, y la aplicación imprecisa del vocabulario de límites laterales.

Carlos evidencia una comprensión interpretativa sólida en la primera pregunta, la única del grupo fundamentada en la geometría del círculo, con una limitación, la brecha entre la comprensión conceptual y verbal; y la producción algebraica. En la segunda pregunta su comprensión es parcial, correcto en el primer cuadrante, sin extensión a otros cuadrantes ni mención de extremos.

María presenta el conflicto semiótico más significativo de la tarea en P1, la inversión sistemática de las coordenadas revela una concepción activa de que "el seno va primero" en la geometría del círculo, sin verificación alguna. En P2, en contraste, evidencia la comprensión interpretativa más cuidadosa de los extremos, correcta en los valores positivos, aunque incompleta en los negativos; pero omitiendo la parte de la covariación.

Celín evidencia en P1 un conflicto cognitivo específico, la superposición entre la definición de seno como razón trigonométrica en triángulos rectángulos y su interpretación como coordenada en el círculo unitario. El argumento "cuántas veces cabe el radio en la ordenada", revela que los dos contextos de definición no han sido completamente diferenciados. En la segunda pregunta su comprensión es local y correcta, bien fundamentada en el intervalo $[0, \pi/2]$, pero no se generaliza en el comportamiento de las funciones.

Camilo evidencia el vacío cognitivo más profundo de la tarea en P1 fue la introducción del factor f en la expresión algebraica para definir la posición del punto P , no está consolidada como objeto matemático. En P2 comparte presenta el conflicto semiótico de confundir el valor cero con el extremo de la otra función, lo que evidencia que la relación complementaria entre los extremos de seno y coseno no está correctamente establecida.

Andrey evidencia en la primera pregunta una comprensión correcta del objeto, con una limitación notacional que no es trivial desde la perspectiva cognitiva, el uso de x en lugar de θ sugiere que la dependencia funcional del punto respecto al ángulo no está completamente conceptualizada como tal, teniendo en cuenta que se están definiendo las coordenadas en función del ángulo. En P2 comparte con Camilo los mismos conflictos semióticos, proporcionalidad incorrecta y confusión entre cero y extremo, lo que evidencia que ambos participantes tienen una comprensión intuitiva de la covariación que no ha sido suficientemente profundizada.

V. Perfiles de comprensión.

Brayan: El perfil de Brayan en esta tarea revela la una tensión del instrumento, la coexistencia de resultado correctos con procesos poco visibles. [AB1.1] En la primera pregunta produce la asignación correcta de las coordenadas sin ninguna justificación. Lo que impide determinar si viene de una comprensión representativa, interpretativa o una recuperación memorística.

A) Defina la posición $P(x(\theta), y(\theta))$ en términos del ángulo



$P = (\cos(\theta), \sin(\theta))$

En la segunda pregunta produce la respuesta estructuralmente más completa del grupo. Tres posiciones articuladas que abordan la covariación, los extremos positivos y negativos de $y(\theta)$ y la relación recíproca que tiene con los extremos de $x(\theta)$.

B) Describe cómo varía $x(\theta)$ cuando $y(\theta)$ crece. ¿Qué ocurre con los máximos y mínimos de cada variable en esta variación?



Cuando $y(\theta)$ crece $x(\theta)$ tiende a cero. Cuando $x(\theta)$ se acerca a cero por izquierda $y(\theta)=1$ (Maximo), y cuando se acerca a cero por derecha $y(\theta)=-1$ (minimo). Cuando $x(\theta)$ es minimo y maximo $y(\theta)$ es 0

Su uso del vocabulario de límites laterales es un rasgo de su perfil de comprensión, aunque no es un argumento completamente riguroso. La generalización de la covariación al primer cuadrante es una de las limitaciones compartidas en el grupo.

Tabla 10.

Perfil de comprensión de Brayan en T2

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Brayan	Alta	Media	Media-Alta

Carlos: presenta en esta tarea el perfil más consistente, produciendo una comprensión conceptual sólida que no alcanza la formalización algebraica. En la primera pregunta produce la única respuesta justificada del grupo, parte del $\text{radio}=1$, identifica las proyecciones ortogonales en los ejes y asigna correctamente el coseno a la proyección horizontal y seno a la vertical, pero no traduce esta comprensión a una expresión algebraica. Es el participante que más evidentemente por qué las coordenadas son coseno y seno, pero el único que no escribe la fórmula que expresa la ubicación del punto P dependiente del ángulo que lo describe.

A) Defina la posición P $(x(\theta), y(\theta))$ en términos del ángulo

Aa π Como se trata de un círculo unitario sabemos que, el radio de la circunferencia será 1 y las proyecciones de las coordenada horizontal es el coseno del ángulo y la coordenada vertical es el seno del ángulo.

En la segunda pregunta describe correctamente la covariación en el primer cuadrante con lenguaje geométrico y apoyándose en el software dinámico, pero no extiende el análisis a los otros cuadrantes ni menciona el análisis de los extremos de las funciones.

B) Describe cómo varía $x(\theta)$ cuando $y(\theta)$ crece. ¿Qué ocurre con los máximos y mínimos de cada variable en esta variación?

Aa π Cuando el punto se mueve en sentido antihorario y la coordenada vertical aumenta, la coordenada horizontal disminuye, esto dado el comportamiento de las funciones seno y coseno.

Tabla 11.

Perfil de comprensión de Carlos en T2

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Carlos	Ausente	Media	Alta-Media

María: pregunta en esta tarea la mayor disonancia entre respuestas a las dos preguntas planteadas. En la primera produce el error más notable del grupo, invierte las coordenadas, que no es un error de escritura, sino que activa la concepción de que el seno va primero. Este conflicto de asignación refleja el orden con que se presentan las funciones trigonométricas trasladado al plano cartesiano, donde el error hubiese sido detectado con la verificación del software dinámico.

A) Defina la posición $P(x(\theta), y(\theta))$ en términos del ángulo

Aa
π

$P(\theta) = (\text{sen}(\theta), \text{cos}(\theta))$

En la segunda pregunta produce una respuesta más acertada, donde a pesar del error identifica correctamente que los extremos no coinciden y enuncia con presión los valores notables para seno=1, entonces coseno=0; coseno=1; seno=0), aunque omite los mínimos negativos y no responde la primera parte de la pregunta sobre su covariación, que asocia el concepto del compartimiento de sus derivadas.

B) Describe cómo varía $x(\theta)$ cuando $y(\theta)$ crece. ¿Qué ocurre con los máximos y mínimos de cada variable en esta variación?



Si esta creciendo graficamente podemos ver el punto se está moviendo hacia arriba en el círculo. Los máximos y mínimos no pasan al mismo tiempo, porque cuando el seno está en su valor máximo (1), el coseno vale 0, y cuando el coseno es máximo (1), el seno vale 0.

Tabla 12.

Perfil de comprensión de María en T2

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
María	Media	Baja	Media

Celín: produce en la primera pregunta la expresión correcta de asignación para las coordenadas x y y en función del ángulo que describe el punto P, acompañada en un intento de justificar con la definición de razón trigonométrica en triángulo rectángulos trasladándolo al círculo unitario. La expresión “cuántas veces cabe el radio en la ordenada” revela conflictos en la comprensión del significado del seno en contextos definitorios del seno, produce una explicación geométrica imprecisa para una producción algebraica correcta.

A) Defina la posición P $(x(\theta), y(\theta))$ en términos del ángulo



Al observar el círculo unitario y las relaciones en él, se sabe que el seno de un ángulo θ es cuantas veces cabe el radio en la ordenada (y-segmento verde), es decir la razón $\text{sen}(\theta)=y(\text{ordenada})/1(\text{radio})$ y el coseno de un ángulo θ es cuantas veces cabe el radio en la abscisa (x-segmento naranja), es decir, la razón $\text{cos}(\theta)=x(\text{abscisa})/1(\text{radio})$. Para finalmente concluir que la posición de P en términos del ángulo es $P(\text{cos}(\theta), \text{sen}(\theta))$.

En la segunda pregunta describe correctamente la covariación en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ con ejemplos específicos y menciona los valores notables extremos en el intervalo, pero no extiende ni generaliza los resultados ni usa la identidad pitagórica como argumento general.

B) Describe cómo varía $x(\theta)$ cuando $y(\theta)$ crece. ¿Qué ocurre con los máximos y mínimos de cada variable en esta variación?

π Gráficamente se observa que cuando $y(\theta)$ crece, $x(\theta)$ disminuye, incluso tomando $x(\theta)=\cos(\theta)$ y $y(\theta)=\sin(\theta)$, cuando la función $\sin(\theta)$ asciende, por ejemplo en el intervalo de 0 a $\pi/2$, la función $\cos(\theta)$ desciende en este mismo intervalo. Con respecto a los máximos y mínimos, cuando $x(\theta)=1$ (máximo), $y(\theta)=0$ es (mínimo); cuando $y(\theta)=1$ (máximo), $x(\theta)=0$ es mínimo.

Tabla 13.

Perfil de comprensión de Celín en T2

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Celín	Media	Media	Baja-Media

Andrey: presenta la primera respuesta correcta, pero con imprecisiones en la notación, aunque no tiene mayor consecuencia algebraica, tiene implicaciones relevantes en el uso de x como variable y no de θ la dependencia funcional respecto al ángulo y que puede confundirse con los valores del eje horizontal. En la segunda pregunta, realiza una generalización incorrecta de la covariación inversa a todos los intervalos, afirmación de proporcionalidad incorrecta y confusión entre el valor cero de una función en el valor extremos máximo de la otra.

A) Defina la posición P $(x(\theta), y(\theta))$ en términos del ángulo

π $(\cos(x), \sin(x))$

Tarea 6

B) Describe cómo varía $x(\theta)$ cuando $y(\theta)$ crece. ¿Qué ocurre con los máximos y mínimos de cada variable en esta variación?

π cuando uno crece el otro disminuyen en la misma proporción, cuando un valor de x esta en un mínimo el valor de y esta en un máximo

Tabla 14.

Perfil de comprensión de Andrey en T2

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Andrey	Media	Baja	Baja

Camilo: Presenta en esta tarea dos errores significativos, la introducción del factor f de la función en la notación revela que no se distingue la notación del seno y coseno en una circunferencia y su estudio en el círculo unitario. Este error no es de asignación, distinto al de María, sino formalización algebraica donde se ve afectado el dominio de la definición de funciones trigonométricas.

A) Defina la posición $P(x(\theta), y(\theta))$ en términos del ángulo

As

π

(f · Cos(θ), f · Sen(θ))

En la segunda pregunta su respuesta comparte el mismo conflicto que Andrey, afirma que la covariación es inversa, y que cuando x es mínimo y es máximo-confusión entre el valor de una función en los extremos.

Tarea 6

B) Describe cómo varía $x(\theta)$ cuando $y(\theta)$ crece. ¿Qué ocurre con los máximos y mínimos de cada variable en esta variación?

As

π

X(θ) Disminuye a medida que Y(θ), Cuando X(θ) llega a su máximo Y(θ) llega a su mínimo y viceversa

Tabla 15.

Perfil de comprensión de Camilo en T2

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Camilo	Baja	Baja	Baja

VI. Conflictos semióticos

El conflicto semiótico más evidencia de la tarea fue la generalización de la covariación de las dos funciones en todos los cuadrantes, sin la verificación debida en la representación gráfica del software dinámica GeoGebra. Todos los participantes responden la primera parte de la segunda pregunta, describiendo de forma correcta que $x(\theta)$ decrece cuando $y(\theta)$ crece en el primer cuadrante, pero generalizando esta relación sin restricciones, lo cual no es cierto en todos los cuadrantes, ya que en el IV crecen simultáneamente desde sus valores mínimos hacia $(1,0)$, lo cual no es considerado por ninguno de los FPM. Este punto revela que la comprensión de la covariación entre seno y coseno se construye desde lo más intuitivo (primer cuadrante en la mayoría).

El segundo conflicto más relevante es la confusión entre el valor cero y el extremo de la otra función, compartido por Andrey y Camilo; ambos afirman que cuando $x(\theta)$ es mínimo, $y(\theta)$ es máximo. En realidad, cuando $\cos(\theta) = -1$, $\sin(\theta) = 0$, no está en su punto máximo. Este conflicto revela que los participantes mencionados reconocen que los extremos de las funciones trigonométricas seno y coseno no coinciden, pero atribuyen de forma incorrecta el valor que toma la otra función, lo cual distorsiona su relación correcta.

El tercer conflicto significativo es la inversión de coordenadas en María, asignar $\sin(\theta) @ x$ y $\cos(\theta) @ y$, este conflicto es distinto a los demás porque no afecta la comprensión de la covariación ni de los extremos sino exclusivamente la asignación de qué función se proyecta en cada uno de los ejes.

Finalmente, el conflicto entre razones trigonométricas y coordenadas de Celín “cuántas veces cabe el radio en la ordenada”, revela la tensión que existe entre los dos contextos de definición del seno que no han sido completamente diferenciados, el triángulo rectángulo (seno como razón entre el c.o/h) y del círculo unitario (seno como coordenada vertical del punto P, posible directamente porque el $r=1$)

VII. Síntesis grupal-Tarea: Círculo unitario

Tabla 16.

Perfiles de comprensión de los FPM en T2

Participante	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Brayan	Alta; sin registros visibles	Media; registro analítico, registro del movimiento	Media-Alta; respuesta más completa, pero con generalización incorrecta de la variación en todos los intervalos.
Carlos	Ausente; no presenta	Media; registro verbal-geométrico sin	Alta-Media; en la primera pregunta, comprensión

	expresión algebraica.	traducción a la algorítmica.	justificada geoméricamente, limitada en P2.
María	Media; error en la asignación en P1 y sin proceso en P2.	Baja; un solo registro de la pregunta, donde no traduce la producción geométrica en algebraica.	Media; error conceptual en la P1; comprensión correcta aunque incompleta de los extremos en la P2.
Celín	Media; resultado correcto con justificación imprecisa.	Media; intenta coordinar las representaciones geométrica-algebraica con dificultades en la traducción.	Baja-Media; confusión entre razón y coordenada en P1; comprensión parcial y no generalizada de la P2.
Andrey	Media; imprecisión de notación	Baja; expresión algebraica sin coordinación verbal P1; conflictos de traducción en P2.	Baja, comprensión intuitiva de la covariación en P2.
Camilo	Baja; error de notación algebraica en P1; error de	Baja; respuesta sin articulación de registros, ni	Baja, los conceptos no reciben significado

	generalización en P2 sin procedimiento	verificación gráfica.	geométrico o funcional,
--	--	--------------------------	----------------------------

El análisis transversal de la tarea permite identificar cuatro hallazgos.

El primero, la complementariedad entre perfiles es el rasgo más notorio de la tarea, ningún participante produce una respuesta completa en las dos preguntas, en la primero Carlos tiene la comprensión geométrica, pero sin expresión algebraica, Brayan tiene la representación algebraica sin la justificación geométrica, y los demás presentan conflictos en alguno de los registros. En la segunda Brayan tiene la mayor amplitud en la configuración del objeto, María los valores exactos de los extremos positivos y Celín un ejemplo concreto del primer cuadrante. Si se unieran las respuestas del grupo, se obtendría una respuesta casi completa, ya que ninguno de los FPM individualmente logra la completitud.

Segundo, se hace evidente la ausencia de verificación con GeoGebra, el patrón más sistemático y de mayor consecuencia en esta tarea, todos los participantes tienen acceso a la construcción del punto P en el círculo unitario con ángulo visible y es poco usado en la verificación de respuestas. En el caso de María, omitir esto fue especialmente significativo porque la herramienta le hubiese revelado el error de inversión de coordenadas. Esto evidencia que los FPM no usan GeoGebra como herramienta de validación.

Tercero, la identidad pitagórica $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ está completamente ausente en los argumentos de todo el grupo. Esta identidad es el objeto matemático que unifica P1 y P2, su ausencia dentro de los procesos y prácticas

activadas revela que el grupo no lo moviliza como herramienta de argumentación, aunque varios de ellos llegan intuitivamente a conclusiones que ella fundamentaría.

Cuarto, la covariación y extremos en el cuarto cuadrante como punto ciego colectivo, representa un límite dentro de la comprensión del grupo. La covariación directa entre $\sin(\theta) @ x$, $\cos(\theta) @ y$, cuando ambas crecen desde sus valores mínimos hacia $(1,0)$, lo que sucede en el cuarto cuadrante, no se considera en la generalización de los participantes, esto puede reflejar que la comprensión de la covariación se construye desde la relación que existe entre las variables en el primer cuadrante, lo que se usa como una referencia explorada, pero no construida anteriormente, y no considerar, al menos, el comportamiento completo de las funciones en un período, lo que podría constituir una limitación considerable para un futuro docente que deberá enseñar las funciones trigonométricas en el todo integrado de su significado y más precisamente en los procesos de modelación, que resultan ser más abstractos.

5.2.3. Tarea 3: La Rueda de la Fortuna

La tarea de la Rueda de la Fortuna sitúa a los FPM como diseñadores de un sistema de predicción de alturas para un parque de atracciones. La noria tiene 25 m de diámetro, se aborda desde una plataforma a 1 m sobre el suelo, y completa una revolución en 10 minutos. La cabina 1 inicia en la posición más baja. La tarea consta de cuatro preguntas: la primera pide determinar amplitud, línea media y período con su interpretación contextual; la segunda solicita construir el modelo $h(t)$ y justificar la función elegida; la tercera pide calcular y verificar la altura a los 5

minutos; y la cuarta demanda establecer un dominio y recorrido apropiados justificados desde la operación real del parque. El modelo institucional de referencia es $h(t) = -12.5 \cdot \cos(\pi t/5) + 13.5$, con $A = 12.5$ m, $M = 13.5$ m, $T = 10$ min y condición inicial $h(0) = 1$ m.

I. Prácticas matemáticas y didácticas

La práctica más homogénea del grupo es el cálculo numérico de los parámetros básicos: la amplitud como semidiámetro de la rueda y la línea media como promedio entre la altura máxima y la mínima. Estos dos valores son obtenidos correctamente por la mayoría, con la excepción de Camilo, quien confunde la amplitud con la línea media al asignarles a ambas el valor del radio (12.5 m). La determinación del período, por su parte, es correcta para todos salvo Brayan —quien nombra ω como T — y Camilo, quien asigna a T el valor de $\omega = \pi/5$. En la construcción del modelo, la práctica predominante es el uso de la función coseno negativo para satisfacer la condición inicial $h(0) = 1$ m (posición más baja). Esta elección es técnicamente correcta y la realizan de forma autónoma María y Brayan, aunque sin justificarla verbalmente en el caso de María. Carlos intenta la misma construcción pero introduce un error de notación decimal en GeoGebra —el separador de punto en lugar de coma— que amplifica la amplitud de 12.5 a 60, generando una gráfica con valores negativos que no contrasta con las restricciones físicas. Celin construye el modelo correctamente con dominio técnico. Camilo propaga el error de M del primer ítem al modelo, obteniendo una expresión estructuralmente válida pero con parámetros equivocados.

En las preguntas de cálculo y de dominio/recorrido, las prácticas se vuelven marcadamente más divergentes. Para calcular $h(5)$, María produce el proceso

algebraico más explícito y completo del grupo; Carlos razona desde la simetría periódica sin calcular; Brayan enuncia el resultado sin mostrar proceso alguno. En la pregunta sobre dominio y recorrido, la mayoría produce los valores correctos, pero la justificación desde la perspectiva de la operación del parque —demanda central del enunciado— está ausente o es superficial en todos los participantes. Respecto al uso de GeoGebra, se observan diferencias cualitativas: Brayan construye el sistema de verificación más completo del instrumento en la segunda pregunta (evaluación de $f(5)$, intersección con recta de referencia, restricción del dominio) mientras que Carlos experimenta una falla técnica de notación que compromete su gráfica. Camilo utiliza las herramientas de intersección sin detectar que los valores resultantes revelan un error físico en su modelo.

II. Objetos y procesos

Los objetos primarios más consistentemente activados son los elementos lingüísticos algebraicos de la función sinusoidal (amplitud, línea media, período, frecuencia angular, fase) y los procedimientos de cálculo de parámetros a partir de los datos geométricos del problema. La relación $A = \text{diámetro}/2$ y la obtención de M como promedio entre $h_{\text{máx}}$ y $h_{\text{mín}}$ son los procedimientos más uniformes del grupo.

El objeto condición inicial — $h(0) = 1$ m como criterio para elegir y determinar la fase— es activado implícitamente por María y Brayan (ambos producen modelos que la satisfacen) pero no es verbalizado como argumento de elección por ninguno de los dos. Carlos es el único que menciona verbalmente la condición inicial como parte de su justificación, aunque sin calcularla algebraicamente. Este

objeto es, por tanto, simultáneamente el más relevante para la correcta construcción del modelo y el menos explicitado como proposición activa en el grupo.

El proceso de conversión entre registros más demandante de la tarea es la traducción de las condiciones físicas de la noria al registro algebraico del modelo, y su sentido inverso: leer el modelo como descripción del comportamiento físico del sistema. En la pregunta de dominio y recorrido, este proceso de doble dirección es donde más se diferencia el grupo: Carlos produce la argumentación causal más completa (vincula $h = 1$ m con la plataforma y $h = 26$ m con la cima de la rueda) pero sin notación matemática; María produce la notación correcta sin argumentación causal; Brayan aporta el referente 'sobre el suelo' sin causas físicas ni notación formal. Esta distribución de componentes entre participantes distintos constituye el hallazgo representativo más llamativo de la tarea.

La verificación del resultado —solicitada explícitamente en la tercera pregunta— es el proceso más sistemáticamente ausente: ningún participante la produce en ninguna de las preguntas que la solicitan. En particular, Brayan había calculado $f(5) = 26$ en la segunda pregunta como parte de su sistema de verificación en GeoGebra, pero no la referencia como respaldo al responder la tercera pregunta.

III. Normas, metanormas e idoneidad

La norma de selección de la función según la condición inicial es observada por la mayoría en cuanto al resultado (el modelo satisface $h(0) = 1$ m) pero no en cuanto a la justificación: solo Carlos menciona verbalmente la condición inicial como criterio de elección, y su modelo algebraico contiene un error de ejecución

técnica. Esta disociación entre saber la norma y poder aplicarla con precisión es un rasgo característico del grupo en esta tarea.

La norma de validación física —contrastar el modelo con los límites físicos del sistema— es incumplida de forma notable por Carlos, cuya gráfica produce alturas negativas sin que él lo detecte, y por Camilo, cuyas herramientas de verificación en GeoGebra señalan intersecciones en valores físicamente incoherentes sin que active ninguna revisión. Ambos casos evidencian que la verificación física no es parte activa de la práctica de modelación de estos participantes.

La metanorma de coherencia entre preguntas —usar lo construido en una pregunta como herramienta para la siguiente— presenta un único caso de cumplimiento explícito: Brayan transfiere los parámetros de la primera pregunta para construir el modelo en la segunda, y verifica algebraicamente $f(5)$ y $f(10)$. Sin embargo, no transfiere ese resultado hacia la tercera pregunta. En el resto del grupo, la cadena de modelación (calcular parámetros $\rightarrow$ construir modelo $\rightarrow$ usarlo para predecir) se rompe en el paso del modelo al cálculo, o del cálculo a la verificación.

La metanorma de justificación verbal de las decisiones de modelación —presente en el enunciado de forma explícita en las preguntas B y D— es respondida de forma parcial o ausente por todos los participantes. El grupo tiende a producir el resultado sin explicitar el razonamiento que lo sustenta, patrón que es especialmente persistente en María y Camilo, y que se atenúa en Carlos y Brayan solo en preguntas específicas.

Desde la faceta epistémica, la tarea activa un espectro más amplio de significados del objeto que la tarea de Llenado de Tanque: la condición inicial como determinante de la fase, la equivalencia entre seno desplazado y coseno negativo, la restricción del dominio a los valores físicamente posibles, y la interpretación del recorrido desde la estructura del modelo ($M \pm A$). Sin embargo, solo Brayan activa la mayoría de estos significados en la segunda pregunta; los demás participantes acceden a subconjuntos más restringidos. El significado de la línea media como altura del eje de la rueda —que va más allá de su definición operacional como promedio— es accedido explícitamente solo por Carlos ('la distancia del suelo a la altura de la noria'), y el de la amplitud como radio de la trayectoria circular proyectada no es enunciado con esa precisión por ningún participante. Esto indica que el sistema de proposiciones que articula el modelo matemático con la geometría del objeto físico permanece parcialmente invisible para el grupo.

Desde la faceta cognitiva, los conflictos observados en esta tarea son de naturaleza distinta a los de la tarea anterior. La confusión amplitud/línea media reaparece en Camilo con mayor fuerza que en el Ejercicio 1 —donde él mismo los había diferenciado correctamente—, lo que sugiere que la presencia de una magnitud geométrica única (el radio) que determina ambos parámetros en la noria genera una dificultad cognitiva específica a este contexto. La confusión T/ω reaparece en Brayan y Camilo, confirmando que la relación entre período y frecuencia angular no está consolidada como objeto matemático en estos participantes. El error de Carlos con el separador decimal introduce un conflicto

mediacional nuevo: la brecha entre la intención correcta y la ejecución técnica en el software, que se traduce en un modelo gráficamente incorrecto que el participante no detecta porque no contrasta la gráfica con los límites físicos del problema. En conjunto, estos conflictos señalan que las dificultades cognitivas del grupo en esta tarea están concentradas en la interfaz entre la geometría del objeto físico, la estructura paramétrica del modelo y la ejecución técnica en el entorno digital. Pg 29 de 46

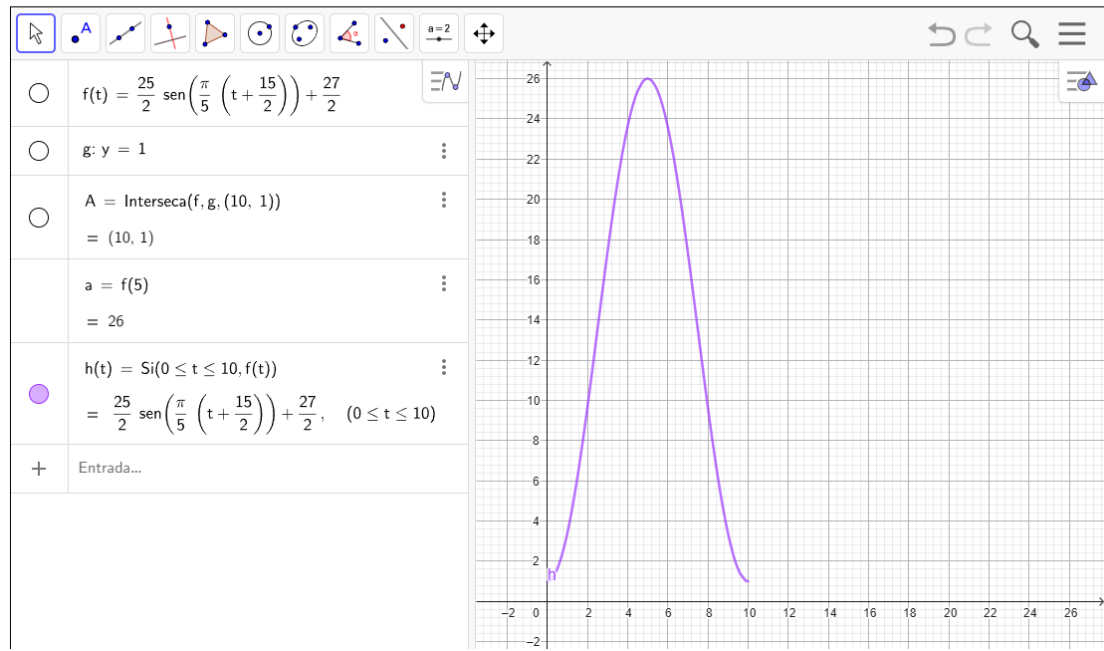
IV. Perfil de comprensión por participante

Brayan: muestra su producción más completa del instrumento en la segunda pregunta de esta tarea: construye el modelo $h(t) = (25/2) \cdot \text{sen}(\pi/5 \cdot (t + 15/2)) + 27/2$ —algebraicamente equivalente al de referencia— calculando la fase desde la condición inicial $h(0) = 1$ m, y lo verifica mediante cuatro herramientas independientes en GeoGebra (evaluación algebraica, intersección con recta de referencia, y restricción del dominio). Produce también la justificación verbal más precisa del grupo para la elección de la función. Sin embargo, su perfil muestra una oscilación característica: a mayor elaboración en una pregunta, menor en la siguiente.

B) Encuentra un modelo matemático para la función de altura $h(t)$. Justifica tu elección de función

Aa π Es la función que se muestra en applet si consideramos que en $h(0) = 1$ y para realizar esto pues se hace un desplazamiento hacia la izquierda de $15/2$ para cumplir esta condición y la amplitud y el desplazamiento horizontal ya se encontro en el punto anterior

Tarea 9



En la tercera pregunta, tras haber construido ese sistema de verificación completo, responde con una única oración sin mostrar ningún proceso.

C) Calcula: ¿Qué tan alto sobre el suelo está una persona en la cabina 1 después de 5 minutos? Verifica.

Aa π a los 5 minutos esta a 26 metros sobre el suelo

En la primera, comete el conflicto T/ω —reporta ω como T — que convive paradójicamente con el uso correcto de ese valor en el modelo.

A) Determina la amplitud, la línea media y el período de la función $h(t)$. Explica qué representa cada uno de estos parámetros en el contexto.

Aa π el periodo de la función seria de $\pi/5$ ya que la frecuencia en el que da una revolución es de 10 min y al utilizar $T=2\pi/f$ tenemos que $T=2\pi/5=\pi/5$.

Teniendo en cuenta que la altura mínima de la persona en la cabina 1 es de 1 m sobre el suelo y la altura máxima de la cabina 1 es de 26 metros sobre el suelo, encontramos que la amplitud es de $25/2$ con un desplazamiento vertical de $27/2$ para que se tenga la altura máxima y mínima (<https://ibb.co/0RVXkrzQ>).

La línea media en este caso va ser de $(26+1)/2=27/2$

En la cuarta, produce los valores correctos verbalmente, pero sin notación matemática ni argumentación causal de los límites físicos.

Tarea 11

D) Determina un dominio y un recorrido apropiados para $h(t)$ en esta situación práctica. Considera:
- ¿Cuánto tiempo es razonable que dure un paseo típico en la noria?

Aa π

un tiempo razonable seria de 0 a 10 minutos para una sola vuelta

Tabla 17.

Perfil de comprensión de Brayan en T3

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Brayan	Alta / Oscilante	Alta en Preg. B; baja en C y D	Alta en Preg. B; media- baja en resto

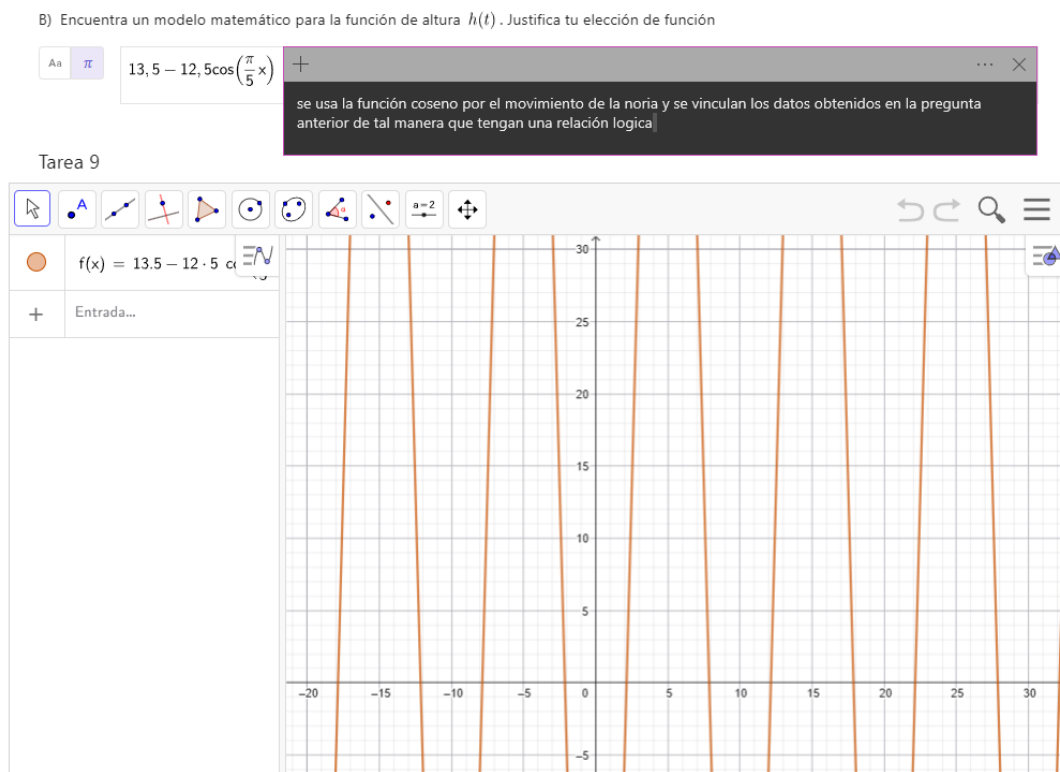
Carlos: El perfil de Carlos en esta tarea consolida el rasgo más diagnósticamente relevante de su conocimiento: comprensión interpretativa alta con formalización algebraica sistemáticamente ausente. En la primera pregunta produce la interpretación de la línea media más precisa del grupo ('la distancia del suelo a la altura de la noria'), integra los valores numéricos con su significado contextual y representa la respuesta más completa del instrumento en esa pregunta.

A) Determina la amplitud, la línea media y el período de la función $h(t)$. Explica qué representa cada uno de estos parámetros en el contexto.

Aa π

La amplitud es 12,5 metros y representa la distancia máxima, la línea media es 13,5 al distancia del suelo a la altura de la noria, el período son 10 minutos que es el tiempo de la rueda dando la vuelta.

En la segunda, intenta la construcción algebraica —lo cual es en sí mismo un avance respecto a tareas anteriores— pero un error de notación decimal en GeoGebra compromete la gráfica, y no detecta que los valores resultantes son físicamente imposibles.



En la tercera, razona desde la simetría periódica del modelo y llega al punto más alto sin calcular algebraicamente, produciendo el argumento conceptual más sofisticado del grupo, pero sin cuantificarlo.

C) Calcula: ¿Qué tan alto sobre el suelo está una persona en la cabina 1 después de 5 minutos? Verifica.

A los 5 minutos ha pasado media vuelta (porque el período es 10 minutos), por lo tanto debe estar en el punto más alto

En la cuarta, ofrece la argumentación causal más completa del grupo —con causas físicas explícitas para cada límite— pero sin ninguna notación matemática.

La complementariedad con María en casi todas las preguntas de esta tarea es el hallazgo más sistemático del instrumento: María produce la forma; Carlos produce el argumento.

Tabla 18.

Perfil de comprensión de Carlos en T3

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Carlos	Media / Ausente en Preg. C	Media — falla técnica en Preg. B	Alta y consistente

María: muestra en esta tarea su producción algebraica más sólida del instrumento. En la primera pregunta calcula los tres parámetros correctamente y diferencia amplitud y línea media sin error, aunque sin ninguna interpretación contextual.

A) Determina la amplitud, la línea media y el período de la función $h(t)$. Explica qué representa cada uno de estos parámetros en el contexto.



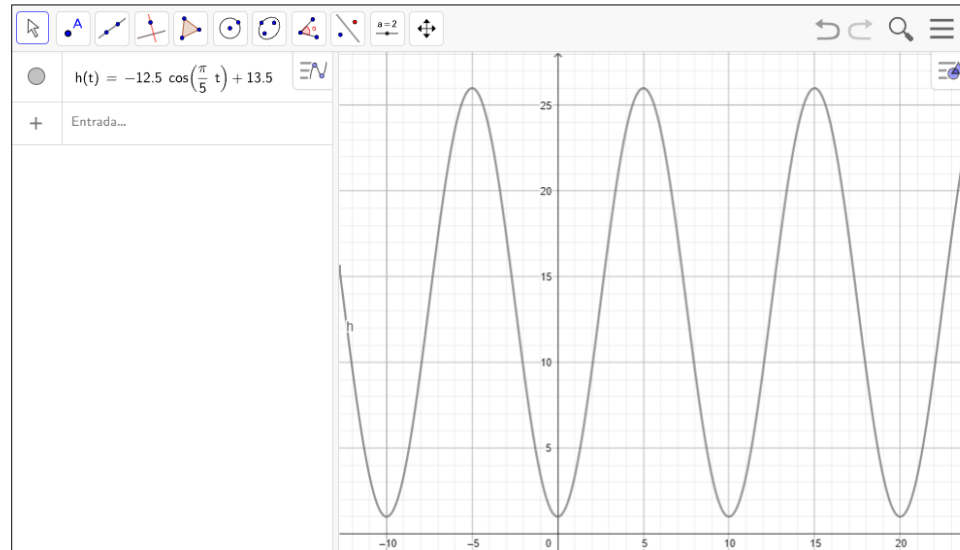
Amplitud: 12.5 ; Línea media: 13.5 ; Período: 10

En la segunda construye el modelo exacto esperado — $h(t) = -12.5 \cdot \cos(\pi t/5) + 13.5$ — con la elección correcta del signo negativo, y produce la gráfica verificadora en GeoGebra; no justifica verbalmente la elección de la función.

B) Encuentra un modelo matemático para la función de altura $h(t)$. Justifica tu elección de función

$h(t) = -12.5 \cos((\pi/5)t) + 13.5$

Tarea 9



En la tercera pregunta presenta el proceso algebraico más explícito y completo del grupo, con justificación paso a paso del valor $\cos(\pi) = -1$, y concluye con una interpretación contextual precisa; no produce verificación.

C) Calcula: ¿Qué tan alto sobre el suelo está una persona en la cabina 1 después de 5 minutos? Verifica.

$h(t) = -12.5 \cos((\pi/5)t) + 13.5$
 Sustituimos $t = 5$:
 $h(5) = -12.5 \cos((\pi/5)(5)) + 13.5$
 $h(5) = -12.5 \cos(\pi) + 13.5$
 Como $\cos(\pi) = -1$, entonces:
 $h(5) = -12.5(-1) + 13.5$
 $h(5) = 12.5 + 13.5$
 $h(5) = 26$
Después de 5 minutos la persona está a 26 metros sobre el suelo.

En la cuarta, enuncia los valores correctos con notación matemática apropiada, pero sin argumentación causal ni consideración de la variabilidad del dominio. El patrón transversal de María es la inversa del de Carlos: produce la forma correcta sin el argumento que la sustenta.

D) Determina un dominio y un recorrido apropiados para $h(t)$ en esta situación práctica. Considera:
- ¿Cuánto tiempo es razonable que dure un paseo típico en la noria?



Dominio apropiado:

$0 \leq t \leq 10$ Porque una vuelta completa dura 10 minutos. Recorrido apropiado: $1 \leq h(t) \leq 26$

Tabla 19.

Perfil de comprensión de María en T3

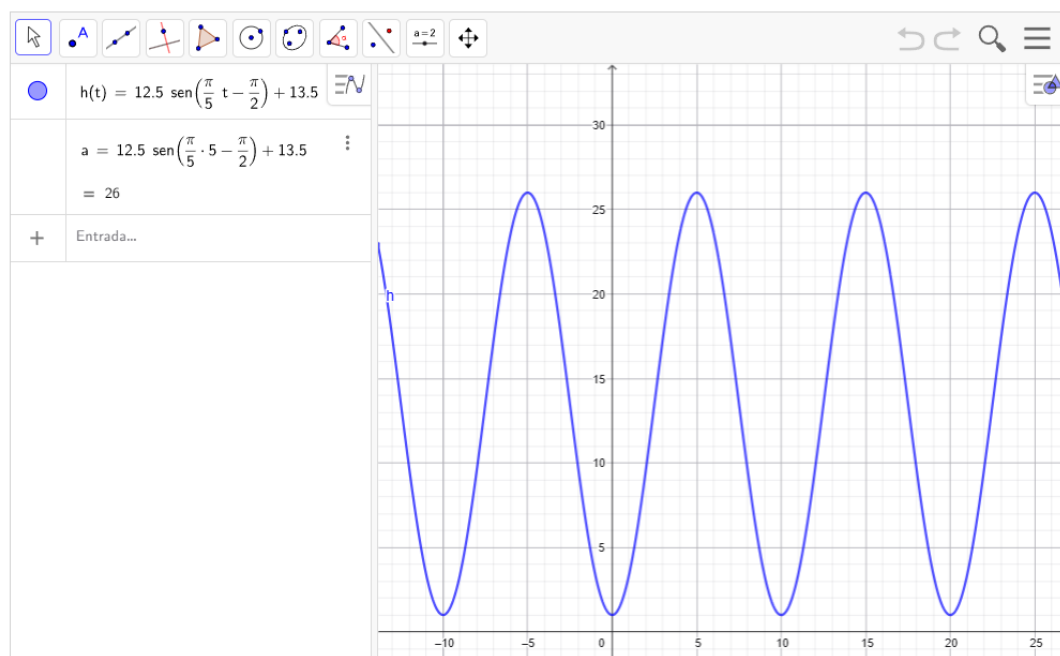
	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
María	Alta y consistente ✓	Alta en Preg. B; media en C	Ausente / Emergente / Creciente

Celin: calcula correctamente los tres parámetros en la primera pregunta y los acompaña de interpretaciones parciales: el período recibe interpretación física completa, la amplitud se interpreta en su dimensión geométrica, aunque no en su rol funcional, y la línea media no alcanza el significado esperado de altura del eje de la noria. En la segunda pregunta construye el modelo con dominio técnico correcto y usa GeoGebra como herramienta de construcción, aunque sin articularla de forma explícita como recurso de validación.

B) Encuentra un modelo matemático para la función de altura $h(t)$. Justifica tu elección de función

Como función base elegí la función seno trasladada $\pi/2$ a la derecha, pues con esta transformación cuando el tiempo sea cero inicia en un mínimo, pues la cabina de la noria inicia del punto más bajo. Luego, agregue los datos de la amplitud, frecuencia $= 2\pi/10 = \pi/5$ y la línea media que se observa como una traslación en el eje y. Obteniendo: $h(t) = 12.5 \sin(\pi/5 \cdot t - \pi/2) + 13.5$

Tarea 9



En la cuarta pregunta muestra su comprensión interpretativa más sólida: reconoce que el dominio no es una propiedad fija sino una decisión condicionada por la operación del parque, considerando explícitamente la posibilidad de múltiples vueltas. Sin embargo, el recorrido se enuncia sin justificación algebraica ni física —los valores aparecen correctos, pero sin derivarlos desde $M \pm A$ ni conectarlos con los elementos físicos de la noria.

D) Determina un dominio y un recorrido apropiados para $h(t)$ en esta situación práctica. Considera:

- ¿Cuánto tiempo es razonable que dure un paseo típico en la noria?

El dominio de la función $h(t)$ en este caso sería $t \in [0, 10]$ minutos. Dependiendo de que tantas vueltas deseen las personas que se suban varía el dominio, podrían dar paseos de 1, 2, 3 o más vueltas, siendo el dominio $t \in [0, 30]$ si quieren 3 vueltas.

Esta asimetría entre un dominio bien argumentado y un recorrido sin justificar es el rasgo más característico de su perfil en esta tarea.

Tabla 20.

Perfil de comprensión de Celín en T3

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Celín	Sólida en construcción; parcial en D	Media-alta en Preg. B; baja en D	Parcial en A; alta en dominio de D

Camilo: presenta en esta tarea sus conflictos semióticos más significativos del instrumento. En la primera pregunta confunde amplitud y línea media al asignarles a ambas el valor del radio (12.5 m), y confunde período con frecuencia angular al reportar $T = \pi/5$. Este doble conflicto contrasta con su desempeño en la tarea de Llenado de Tanque, donde los parámetros equivalentes fueron calculados correctamente, lo que sugiere que la presencia de un único valor geométrico (el radio) que determina simultáneamente A y M en la noria genera una dificultad específica a este contexto.

A) Determina la amplitud, la línea media y el período de la función $h(t)$. Explica qué representa cada uno de estos parámetros en el contexto.



Como la rueda tiene diámetro de 25, el radio (12.5) será la amplitud de la función la cual indica la altura media a partir de la cual se establece que tan alto o bajo puede estar la cabina 1, la línea media es 12.5 que representa el radio de la noria y el período de la función será $(\pi/5)$ la cual nos dice cada cuanto la cabina estará en un máximo o mínimo.

El error en M se propaga al modelo de la segunda pregunta, que es estructuralmente válido pero con parámetros incorrectos. En GeoGebra usa la herramienta de intersección sin advertir que los valores resultantes son físicamente incoherentes con los datos del problema. En las preguntas de cálculo y dominio/recorrido produce valores que son internamente consistentes con su

modelo (no con el fenómeno real), y en ningún momento establece conexión entre los resultados matemáticos y las condiciones físicas de la noria. La justificación verbal está completamente ausente a lo largo de toda la tarea.

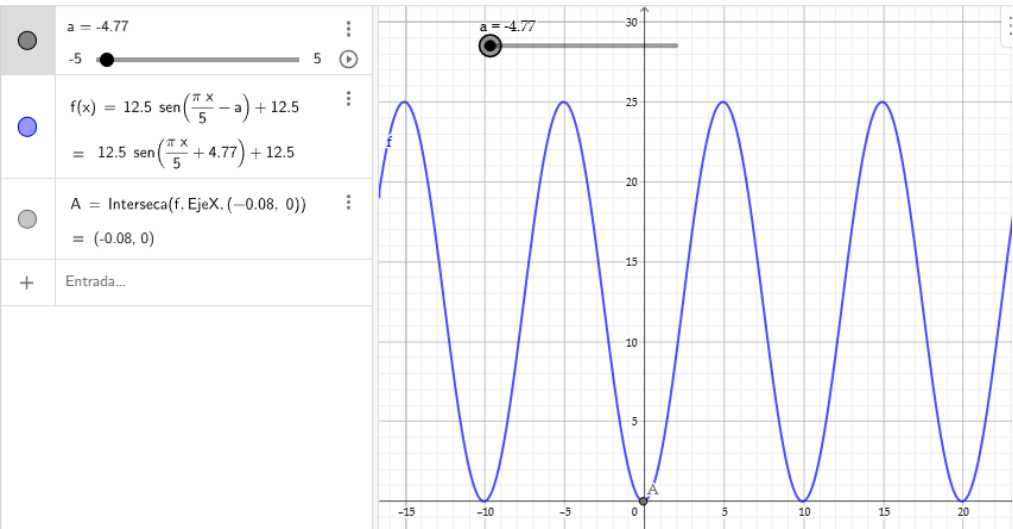


Tabla 21.

Perfil de comprensión de Camilo en T3

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Camilo	Parcial — errores propagados	Parcial— coordinación sin validación	No evidenciada

Tabla C. I

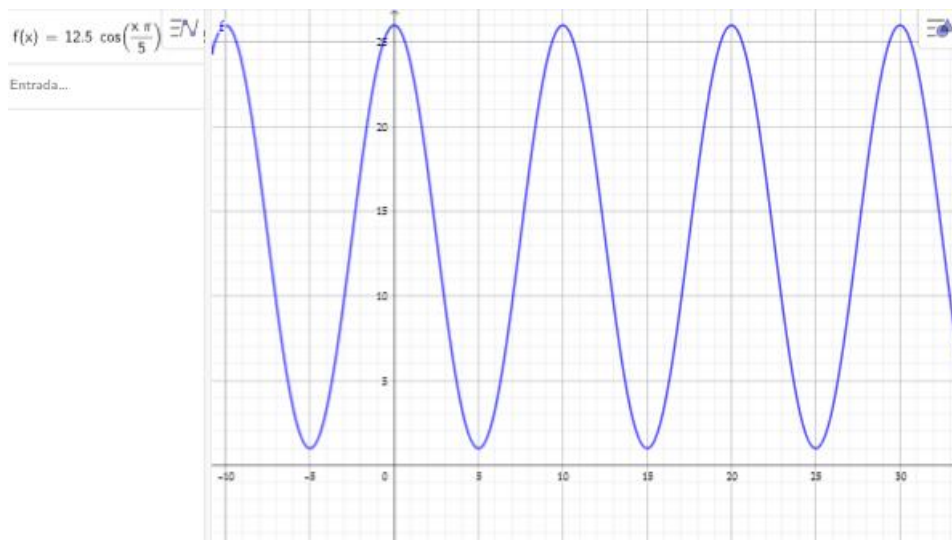
Andrey: calcula correctamente los tres parámetros en la primera pregunta y los acompaña de interpretaciones parciales similares a las de Celin: el período recibe interpretación física completa y correcta; la amplitud se caracteriza en su dimensión geométrica pero no en su rol funcional; la línea media se describe en

términos temporales en lugar de geométricos, lo que revela que el parámetro M no ha sido anclado al significado de altura del eje de la noria.

A) Determina la amplitud, la línea media y el período de la función $h(t)$. Explica qué representa cada uno de estos parámetros en el contexto.

La amplitud es 12.5 que es la mitad del radio de la noria, la línea media es 13.5 que divide el ciclo en dos y el período es el tiempo que dura en dar una vuelta completa

En la segunda pregunta construye el modelo con procedimientos correctos y ajuste de fase, pero no argumenta completamente su elección ni valida el modelo con rigor.



Su comprensión de la relación entre el modelo y el fenómeno es presente pero no articulada con profundidad. En las preguntas restantes su producción es limitada en extensión, aunque mantiene coherencia interna con los parámetros que calculó.

Tabla 22.

Perfil de comprensión de Andrey en T3

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Andrey	Sólida / Media-alta	Parcial — algebraico sin validación gráfica	Parcial — correcta en T; incompleta en A y M

V. Conflictos semióticos

El conflicto más extendido de la tarea es la confusión entre amplitud y línea media en contextos donde ambos parámetros derivan de la misma magnitud geométrica. Camilo los equipara al asignarles a ambos el valor del radio, mientras que en la tarea de Llenado de Tanque los había diferenciado correctamente. Esto sugiere que el conflicto no es una confusión general entre los conceptos, sino una dificultad específica que emerge cuando la geometría del objeto físico ofrece un único valor numérico (el radio) que puede identificarse superficialmente con cualquiera de los dos parámetros. La comprensión de que A y M cumplen roles funcionales distintos en la función —independientemente de que compartan el mismo valor numérico en ciertos contextos— es el objeto de comprensión que este conflicto pone en evidencia.

La confusión T/ω reaparece en Brayan y Camilo. En el caso de Brayan el conflicto es terminológico —usa el valor correcto de ω en el modelo pero lo llama T—, mientras que en Camilo es operacional: reporta ω como período y esto se propaga a los cálculos posteriores. La persistencia de este conflicto en dos

participantes con perfiles muy distintos sugiere que la relación $T = 2\pi/\omega$ no ha sido interiorizada como proposición activa, sino que opera como una fórmula de uso ocasional sin anclaje conceptual en la distinción entre frecuencia y período. El conflicto mediacional de Carlos —la confusión entre el separador decimal punto y el operador de multiplicación en GeoGebra— introduce una categoría de error nueva en el análisis: la brecha entre intención correcta y ejecución técnica defectuosa. Lo más significativo no es el error en sí, que es de carácter técnico, sino la ausencia de detección: Carlos no contrasta la gráfica obtenida con los límites físicos del problema ($h \in [1, 26]$ m) que él mismo había calculado en la primera pregunta. Este conflicto entre registros —el algebraico intencional y el gráfico resultante— y la incapacidad de usar uno para validar el otro es el indicador más claro de que la verificación física del modelo no forma parte activa de su práctica de modelación.

El conflicto de complementariedad —nombre con el que puede designarse el patrón más sistemático de esta tarea— no es un error conceptual individual sino una distribución estructural del conocimiento en el grupo: ningún participante reúne simultáneamente la formalización algebraica, la argumentación causal física y la verificación del modelo. En la tercera pregunta, María tiene el proceso algebraico, Carlos tiene el argumento conceptual y Brayan tiene el resultado numérico; ninguno de los tres tiene la verificación. En la cuarta, María tiene la notación, Carlos tiene la argumentación causal, y Brayan tiene el referente 'sobre el suelo'. La respuesta completa es siempre la suma de participantes distintos, y la

única ausencia genuinamente compartida en todas las preguntas es la verificación explícita del resultado.

VI. Síntesis grupal

La siguiente tabla consolida los perfiles de comprensión de los seis participantes a lo largo de la tarea completa:

Tabla 23.

Perfiles de comprensión de los FPM en T3

Participante	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Brayan	Alta en B; conflicto T/ω en A; mínima en C y D	Alta en B — cuatro registros; baja en C y D	Alta en B; media en D; oscilante
Carlos	Media en A; error técnico en B; ausente en C	Media en A; comprometida en B; baja en C y D	Alta y consistente en toda la tarea ✓
María	Alta y consistente ✓	Alta en B; media en C; baja en A y D	Ausente en A y B; media en C; parcial en D
Celin	Sólida en A y B; parcial en D	Media-alta en B; baja en D	Parcial en A; alta en dominio de D

Camilo	Parcial — conflictos A/M y T/ ω propagados	Parcial — coordinación sin validación física	No evidenciada en ninguna pregunta
Andrey	Sólida en A y B	Parcial — algebraico sin validación gráfica	Parcial — correcta en T; incompleta en A y M

El análisis de la tarea permite identificar tres hallazgos transversales que se añaden y profundizan los de la tarea de Llenado de Tanque.

El primero es la complementariedad grupal como patrón estructural. En esta tarea se hace visible con mayor nitidez que en la anterior: en cada pregunta, los componentes de la respuesta completa están distribuidos entre participantes distintos y ninguno los reúne todos. Este patrón no es aleatorio ni anecdótico: se reproduce de forma estable a lo largo de las cuatro preguntas y señala que el grupo, en conjunto, posee los significados necesarios para responder la tarea, pero cada individuo solo accede a un subconjunto de ellos. Desde el EOS, esto puede interpretarse como una fragmentación de la configuración epistémica de referencia en múltiples configuraciones personales parciales que, sumadas, la aproximan sin alcanzarla.

El segundo hallazgo es la emergencia del conflicto mediacional como categoría específica de esta tarea. El error de Carlos con el separador decimal, y la incapacidad de detectarlo mediante la comparación entre la gráfica obtenida y los límites físicos del problema, pone de manifiesto que la coordinación entre el

registro tecnológico y el registro contextual-físico no es automática: usar GeoGebra no garantiza que el modelo producido sea validado contra la realidad que describe. Este hallazgo tiene implicaciones directas para la dimensión mediacional del CDM: el uso competente del software requiere no solo habilidades técnicas sino la práctica activa de contrastar los resultados digitales con las restricciones físicas del fenómeno.

El tercero es la recurrencia del conflicto T/ω en participantes con perfiles distintos (Brayan y Camilo), que confirma que la relación entre período y frecuencia angular es uno de los objetos matemáticos menos consolidados del grupo. En Brayan el conflicto es terminológico y no afecta el modelo; en Camilo es operacional y se propaga. Esta diferencia de impacto entre dos instancias del mismo conflicto es un indicador de que el nivel de consolidación del objeto varía dentro del grupo: para Brayan opera como una etiqueta intercambiable; para Camilo opera como una confusión conceptual que determina el resultado.

5.2.4. Tarea 4: Movimiento Subamortiguado

La tarea del movimiento subamortiguado plantea una situación física más compleja que las anteriores del instrumento, el amortiguador de un vehículo con frecuencia angular $\omega_o = 15$ rad/s, parámetro de amortiguamiento $\gamma = 2s^{-1}$, velocidad inicial $v_o = 60$ cm/s, y una amplitud inicial de 2m. La tarea consta de tres preguntas: P1 solicita escribir el modelo que describe el movimiento; P2 pide identificar el significado físico de los ceros de la función y escribir algunos; y P3 pregunta cuál es la amplitud máxima y qué significa. El modelo institucional de referencia que es $f(t) = 2e^{(-2t)} \sin(\sqrt{22}t)$, obtenido de aplicar las condiciones iniciales $f(0)=0$ y $f'(0)=v_o$

mediante la regla del producto. La tarea no fue respondida por los seis participantes -María, Camilo y Andrey no la completaron-lo que en sí es un indicador del nivel de exigencia que representa para los FPM de últimos semestres.

I. Prácticas matemáticas y didácticas

La práctica más diferenciada del grupo en la primera pregunta es el manejo de la estructura del modelo como producto de una función exponencial y la función senoidal. Brayan y Celín plantean correctamente la forma del modelo con estructura de producto $f(t) = x_m e^{-\gamma t} \text{sen}(\omega t + \varphi)$; Carlos construye un modelo de resta $f(t) = 0.04e^{-2t} - 2\text{sen}(14.87t)$ que es el error estructural más importante de la tarea y que genera mayores consecuencias en las P2 y P3.

El cálculo $\omega = \sqrt{(\omega_o^2 - \gamma^2)} = \sqrt{221}$ es realizado correctamente por Brayan y Celín. Carlos usa un valor distinto (14.87) que es una aproximación con una diferencia menor, pero que puede ser sintomática en procesos de cálculo en el movimiento. Sin embargo, el paso que más diferencia a los tres participantes es la determinación del parámetro x_m mediante la derivada y las condiciones iniciales. Brayan es el único que ejecuta la regla del producto para calcular la derivada y aplicar $f'(0) = v_o$, proceso que ocupa 2 páginas de proceso algebraico. Celín llega al valor $x_m = 460/\sqrt{221}$ sin proceso visible, lo que es incorrecto respecto al procedimiento esperado. Carlos obtiene $x_m = 0.04$ mediante v_o/ω usando su propio valor de ω sin proceso explícito.

En P2 y P3, las prácticas se diferencian más que en la anterior.

Brayan construye una red coherente de respuestas ancladas en su modelo correcto, los ceros se derivan trivialmente de $\text{sen}(\sqrt{221}) = 0$ y la amplitud máxima se obtiene del punto dinámico G en GeoGebra. Celín demuestra mayor rigor algebraico en P2, deriva la formula general de forma correcta, pero invierte el orden de prioridades que pide el enunciado, respondiendo el procedimiento antes que su significado físico. Carlos enfrenta dificultades técnicas en la segunda pregunta directamente causadas de su modelo incorrecto, los ceros de una resta de funciones algebraicas, lo que impide producir una lista de valores. En P3 Carlos hereda el valor incorrecto de la amplitud y además comete un error conceptual al confundir la amplitud con la frecuencia natural.

El uso de GeoGebra muestra tres patrones distintos, Brayan lo usa estratégicamente como herramienta de exploración dinámica, construye un punto G para identificar el primer máximo y como verificador de los ceros mediante la función intersección. Celín no usa GeoGebra en ninguna de las tres preguntas y Carlos tampoco evidencia uso del software.

II. Objetos y procesos

Los objetos primarios más consistentes activados en el grupo fue el planteamiento del modelo a partir de su estructura como composición de funciones y el cálculo de la frecuencia angular subamortiguada. Ambos objetos presentes en los tres participantes, aunque en distintos niveles de profundidad y precisión.

El objeto menos activado y relevante epistémicamente para la solución de esta tarea, fue la regla del producto como herramienta para calcular la derivada y determinar x_m desde la condición de velocidad inicial. Solo Brayan ejecuta el

proceso de forma explícita. En Celín el proceso es invisible, x_m aparece como resultado sin desarrollo y en Carlos la derivación tampoco es explícita. La ausencia de procedimiento, que es el núcleo procedimental más exigente del planteamiento del modelo subamortiguado puede indicar algunos límites del dominio algorítmico de los participantes ante una función compuesta por el producto de funciones senoidal y exponencial.

Los objetos activados para la interpretación físico de los ceros; los instantes en que el amortiguador regresa a la posición de equilibrio, está completamente ausente en la respuesta de Celín y parcialmente presentes en Brayan y Carlos. Ambos mencionan que son puntos de equilibrio, pero no se desarrolla el significado físico de por qué el sistema regresa al equilibrio en esos instantes ni con qué frecuencia lo hace.

El proceso de interpretación entre los registros algebraicos y el contexto físico fue el que presentó mayor dificultad en las respuestas del grupo para P1, P2 y P3. Ningún participante logra una interpretación plena del modelo en términos de comportamiento, la frecuencia angular como frecuencia de oscilación, x_m como el desplazamiento máximo desde el punto de equilibrio, no se recibe interpretación física de estos parámetros en ninguna de las producciones de los FPM.

III. Normas y metanormas

La normal más relevante de la tarea estaba en la estructura del modelo subamortiguado como producto de funciones, cumplida por Brayan y Celín e

ignorada por Carlos. Este error es el que mayor consecuencia trae porque genera respuestas más complejas para las P2 y P3 del participante.

La metanorma de verificación del modelo contra las condiciones iniciales está ausente en los tres participantes, Brayan se acerca a allá al aplicar las condiciones en el proceso de determinación de los parámetros del modelo, pero no lo verifica explícitamente al final.

La metanorma que prioriza el significado sobre el procedimiento, es invertida por Celín en la segunda pregunta, omitiendo completamente la interpretación física aunque el enunciado lo demanda en primer lugar. Carlos invierte el orden pero porque su dificultad para calcular los ceros lo lleva a centrarse en el significado sin poder hablar de valores concretos.

IV. Idoneidad

Epistémica

El nivel epistémico del grupo en esta tarea es heterogéneo. Brayan activa todos los objetos primarios esperados, estructura del modelo, parámetros derivados de las condiciones iniciales, fórmula de ceros, máximo efectivo, es quien tiene el proceso más completo y articulado de la tarea. Celín activa parcialmente los objetos de P1 y P2, estructura correcta, ω correcta y fórmula de ceros correcta, pero sin el proceso con que se determinó x_m y sin ninguna interpretación físico en las preguntas. Carlos activó correctamente el parámetro ω , pero comete el error estructural del modelo más grave, que dificulta las activaciones posteriores. El objeto epistémico más relevante de la tarea no era plantear la estructura del modelo, ya que este se presentaba con la indicación explícita de cada uno de los

parámetros, sino activar plenamente la interpretación física del modelo integrado como descripción del comportamiento del amortiguador, ω como la frecuencia de oscilación subamortiguada y x_m como desplazamiento máximo desde el punto de equilibrio.

Cognitiva

Brayan evidencia en esta tarea la comprensión cognitiva más integrada de la tarea. Las comprensiones algorítmicas, representativa e interpretativo operan en algún punto de la tarea de forma integradora, primero desarrollo el proceso algebraico completo usando la derivación de los ceros y del máximo efectivo, y GeoGebra funciona como el medio que integra el registro algebraico con los gráficos y apoyando la interpretación física. Sus argumentos le permiten tomar decisiones razonables para poder darle solución e interpretación parcial a la estructura del modelo.

Carlos presenta una brecha cognitiva específica con respecto a los otros FPM, comprende conceptualmente el modelo que debe describir, pero no domina la estructura algebraica para plantearlo. Este conflicto entre la comprensión interpretativa y la algorítmica es contraria al caso de Celín, evidenciando dos tipos de patrones diferentes en la comprensión del objeto, uno estructural; Carlos, y otro interpretativo; Celín.

Celín evidencia el conflicto en la interpretación del modelo dentro del contexto físico, mostrando solidez en algorítmica al lograr plantearlo de forma correcta. El

dominio del procedimiento para calcular los ceros, pero ninguno de esos ceros recibe significado; el retorno del amortiguador al equilibrio.

V. Perfiles de comprensión

Brayan: Presenta el perfil más integrado en la tarea, y del instrumento. Es el único participante que produce el modelo correcto con el proceso explícito completo, desarrollo algebraico a lápiz en el cálculo de los parámetros usando las condiciones iniciales y la derivada por regla del producto.

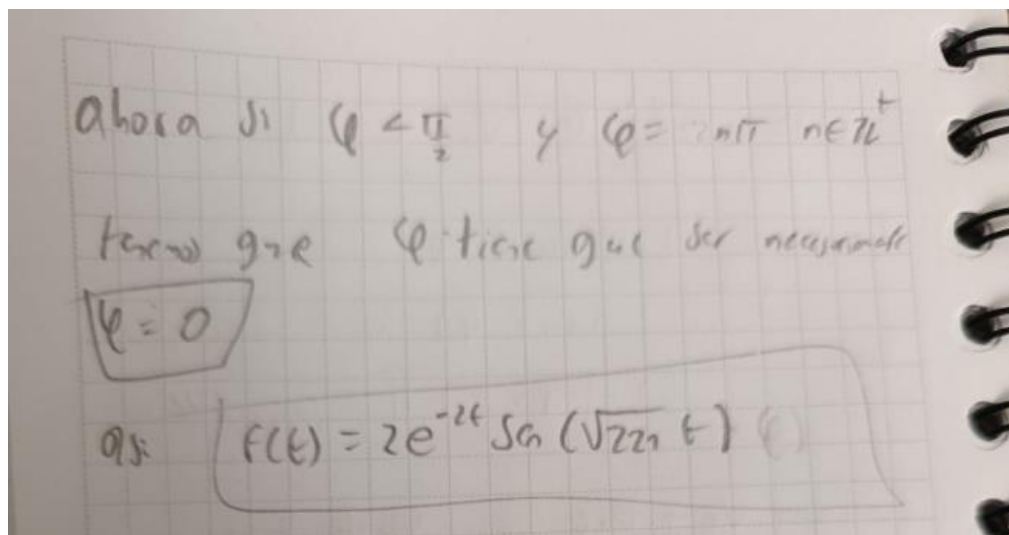
Handwritten mathematical work on a spiral notebook, showing the derivation of a damped harmonic oscillator model.

Left Page:

- $f(t) = x_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$
- $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
- $\omega_0 = \text{frecuencia angular natural}$
- $\phi = \text{constante de fase}$
- $\gamma = \text{coeficiente de amortiguamiento}$
- $\omega_0 = 25 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
- $\gamma = \frac{2}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
- $f(0) = 0$
- $V_0 = 60 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$
- $W = \sqrt{152 - 2^2}$
- $\omega = \sqrt{225 - 4} = \sqrt{221}$
- $\omega = \sqrt{221}$
- $f(t) = x_0 e^{-2t} \sin(\sqrt{221} t + \phi)$
- Amplitud inicial $= 2 \text{ m}$

Right Page:

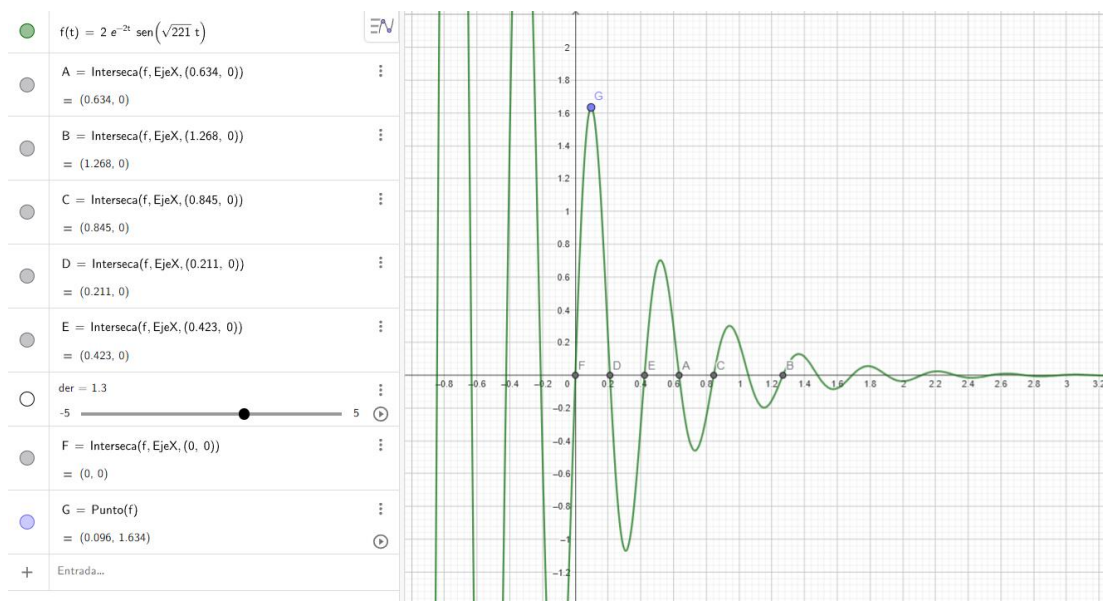
- $f(t) = 2 e^{-2t} \sin(\sqrt{221} t + \phi)$
- $f(0) = 0 \Rightarrow 2 \sin(-\phi) = 0$
- $\Rightarrow \sin(-\phi) = 0 \Rightarrow -\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$
- $\Rightarrow \phi = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$
- Como $V_0 = 0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ para $t=0$
- $f'(t) = 2 [-2 e^{-2t} \sin(\sqrt{221} t + \phi) + e^{-2t} \cos(\sqrt{221} t + \phi) (\sqrt{221})]$
- $f'(0) = 2 [-2 \sin(-\phi) + \sqrt{221} \cos(-\phi)]$
- $f'(0) = 2 \sqrt{221} \cos(-\phi)$
- $0.6 = 2 \sqrt{221} \cos(-\phi)$
- $\cos(\phi) = \frac{0.6}{2 \sqrt{221}} = 0.02$
- $\phi = \cos^{-1}\left(\frac{0.6}{2 \sqrt{221}}\right) = 1.55 \text{ rad}$
- Como V_0 es positiva $\phi < \frac{\pi}{2}$



En P2 produce la fórmula general de los ceros y seis valores concretos verificados en GeoGebra, e identifica los ceros como “puntos de equilibrio”.

B) ¿Qué significan los puntos de corte con el eje x de la función planteada en el índice anterior? Escribe algunos de los hallados.

los puntos de corte con el eje x van a ser los puntos de equilibrio



En P3 identifica el máximo efectivo mediante el punto dinámico G construido en GeoGebra, lo que evidencia un uso del software como herramienta de exploración y verificación y no solo para visualizar el modelo.

C) ¿Cuál es la amplitud máxima? ¿Qué significado tiene esta amplitud?



la amplitud maxima es de 1.634 y seria el mayor desplazamiento

Tabla 24.

Perfil de comprensión de Brayan en T4

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Brayan	Alta	Alta	Alta

Carlos: El perfil de comprensión Carlos en esta tarea muestra el efecto del error estructural en la primera pregunta, al construir el modelo como resta en lugar de producto, lo que generó dificultades directas en las siguientes preguntas.

A) Escribe el modelo que describe el movimiento amortiguador del vehículo.



$$f(t) = 0.04e^{(-2t)} - 2t\sin(14.87t)$$

Los ceros son algebraicamente intratables con la ecuación planteada por el participante, aun así identifica los ceros como los instantes donde el amortiguador está en equilibrio y en P3 reconoce el instante $t=0$ como el de máximo valor envolvente.

Tarea 15

C) ¿Cuál es la amplitud máxima? ¿Qué significado tiene esta amplitud?

Aa π La amplitud máxima es aproximadamente 0.04 m es la frecuencias natural del amortiguador

Tarea 16

D) Aproximadamente, ¿En qué valor el amortiguador del carro deja de oscilar?

Aa π El amortiguador no deja de oscilar porque la función seno se mantiene en oscilamiento en el tiempo transcurrido.

Su limitación no es interpretativa sino parte del modelo algebraico incorrecto que compromete las consecuencias de los resultados.

Tabla 25.

Perfil de comprensión de Carlos en T4

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Carlos	Media	Media	Media

Celín: presenta un patrón en el grupo, solidez algorítmica combinada con la ausencia de interpretación física del modelo. En la primera pregunta construye correctamente la estructura del modelo y calcula ω , pero x_m aparece sin procedimiento visible.

A) Escribe el modelo que describe el movimiento amortiguador del vehículo.

Aa π
$$f(t) = \frac{460}{\sqrt{221}} e^{(-2t)} \text{sen}(\sqrt{221}t)$$

En la segunda pregunta demuestra un rigor algebraico más fuerte, identificando los instantes $t_n = n\pi/\sqrt{221}$ e identificando $e^{(-2t)} \neq 0$, de forma lógica, pero sin asignar significado a los ceros.

B) ¿Qué significan los puntos de corte con el eje x de la función planteada en el índice anterior? Escribe algunos de los hallados.

Aa π

Los puntos de corte con el eje x, se determinan a partir de $f(t)=0$. Es decir, cuando $\sin(\sqrt{221}t)=0$, que sería $t_n=n\pi/\sqrt{221}$. Algunos son $t_0=0$; $t_2=0.423$ s; $t_5=1.057$ s.

En P3 evalúa correctamente la envolvente en $t=0$ y justifica que ese es el máximo por ser una función decreciente, pero tampoco interpreta físicamente el valor obtenido.

C) ¿Cuál es la amplitud máxima? ¿Qué significado tiene esta amplitud?

Aa π

La amplitud dependerá del tiempo $460 / \sqrt{221} e^{(-2*0)} = 460/\sqrt{221}$ que es aproximadamente 30.9 cm, con $t=0$, por que la función disminuye con el tiempo.

Al largo de las tres preguntas, los parámetros calculados por la participante no reciben significado en términos del comportamiento del amortiguador vehicular.

Tabla 26.

Perfil de comprensión de Celín en T4

	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Celín	Media	Baja	Baja

VI. Conflictos semióticos

El conflicto semiótico más diferenciado y de mayor consecuencia en la tarea es el error en la estructura del modelo de Carlos, construir $f(t) = 0.04e^{-2t} - 2\sin(14.87t)$ como diferencia de dos funciones en lugar de un producto. Este error puede ser de cálculo o en la comprensión de la naturaleza del modelo, que

era explicitado en el enunciado. La estructura del modelo $f(t) = x_m e^{-\gamma t} \text{sen}(\omega t + \varphi)$, expresa que la exponencial modula la amplitud del seno, es la relación entre las funciones. Desde la perspectiva del EOS, esto representa un conflicto semiótico entre el significado personal de Carlos y el institucional referencial que lo describe como composición multiplicativa. Las consecuencias de este conflicto se extienden a las siguientes preguntas.

El segundo conflicto relevante es la ausencia de determinación de x_m en la producción de Celín. El valor $460/\sqrt{221}$ aparece sin ningún desarrollo algebraico visible, lo que impide determinar si proviene de un procedimiento incorrecto. Lo que evidencia esto es que el proceso esperado de calcular la derivada por la regla del producto y aplicar las condiciones iniciales no está presente. Este conflicto revela que el vínculo entre las condiciones iniciales del modelo no está consolidado, lo que representa uno de los aspectos interpretativos de la tarea.

El tercer conflicto fue evidenciado en la confusión entre la amplitud y la frecuencia natural en la producción de Carlos en P3, denominar 0.04 como la Frecuencia natural del sistema, cuando amplitud y frecuencia son parámetros con dimensiones distintas dentro del modelo (m vs. Rad/s). Este conflicto evidencia que los objetos matemáticos del modelo subamortiguado, sus parámetros y sus significados físicos no están diferenciados con precisión.

El cuarto conflicto la interpretación física en Celín en la segunda pregunta, donde responde con rigor el procedimiento de generalización de los ceros, pero omite completamente su interpretación que el enunciado demanda en primer lugar. Este conflicto se puede como de interpretación en el propósito de la pregunta.

VII. Síntesis grupal Tarea: Movimiento subamortiguado

Tabla 27.

Perfiles de comprensión de los FPM en T4.

Participante	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Brayan	Alta; modelo correcto con proceso completo mediante el uso de la derivada y aplicando las condiciones del contexto físico.	Alta; usa formulas generales, algebra, derivada y Geogebra de forma integrada para responder.	Alta; comprende la envolvente como decaimiento; interpreta la desfase desde la física y los ceros como equilibrio.
Carlos	Media; ω correcto, error estructural en el modelo como resta; x_m incorrecto.	Media; la respuesta verbal presenta errores heredados del modelo, dificultad para interpretar todos	Media; comprende el decaimiento exponencial y el equilibrio, error en amplitud-frecuencia.

		los parámetros en el contexto físico.	
Celín	Media; ω correcto y estructura correcta; x_m incorrecta con ausencia del proceso de derivación	Baja; respuesta exclusivamente algebraica; no se mueve entre representaciones del modelo.	Baja; ningún parámetro ni resultado recibe significado físico en ninguna de las tres preguntas.

El análisis de la tarea permite identificar hallazgos transversales en los resultados.

Primero, las producciones de los FPM son notablemente diferenciables, cada participante tenía elementos que los demás no. En esta tarea, Brayan completa un perfil más integral que Carlos y Celín en todas las dimensiones movilizadas: produce el modelo correcto, con la derivada explícita, halla los ceros de la función, verifica en GeoGebra y el máximo efectivo. Esta asimetría con los otros participantes es el punto de mayor diferenciación del instrumento y revela que la tarea del movimiento subamortiguado discrimina con mayor precisión los perfiles de comprensión.

Segundo, las consecuencias del error estructural en el modelo de Carlos. El error de P1 De modelo como resta, comprometió la segunda pregunta (ceros intratables) y la tercera (amplitud incorrecta), generando un perfil donde cada respuesta hereda las limitaciones de la anterior. Esto evidencia que, en la tarea de modelación, los objetos matemáticos de cada pregunta están articulados en una

cadena de dependencias que hace que el error inicial tenga consecuencias irreversibles sobre todo el análisis de lo que movilizó el FPM en las preguntas posteriores.

Tercero, la regla de derivación del producto como herramienta de determinación de parámetros es el objeto matemático que más claramente separa los perfiles del grupo. Es el único procedimiento que requiere el dominio de la diferenciación de una función compuesta multiplicativa, la competencia más técnica y algebraica exigente del instrumento, la ausencia de este procedimiento en las producciones de Celin y Carlos revela que el vínculo entre el análisis diferencial y la modelación en contextos físicos no está consolidado en la formación inicial de estos FPM.

Cuarto, la no respuesta de tres participantes es en sí misma un hallazgo que se debe presentar como resultado. El abandono de María, Camilo y Andrey ante la tarea del movimiento subamortiguado evidencia que el nivel de abstracción de esta tarea supera el umbral de competencia que su formación inicial les ha proporcionado en el dominio de las funciones trigonométricas combinadas con funciones exponenciales en un contexto físico.

5.3. Síntesis y hallazgos transversales del análisis

Una vez desarrollado el análisis descriptivo tarea por tarea, es posible identificar un conjunto de hallazgos que no pertenecen a ninguna tarea en particular, sino que atraviesan el instrumento completo y caracterizan al grupo como unidad. Estos hallazgos constituyen el cierre del capítulo de análisis de datos y el punto de partida para la interpretación de resultados que se desarrolla en el capítulo siguiente.

5.3.1. *Síntesis y hallazgos transversales del análisis*

El primero es la complementariedad estructural del grupo. En cada tarea y en cada pregunta compleja, los componentes de la respuesta esperada se distribuyen entre participantes distintos: ningún FPM los reúne todos, y la suma de las producciones del grupo aproxima la respuesta completa sin alcanzarla. Este patrón no es anecdótico sino sistemático y reproducible a lo largo de las cuatro tareas. Desde el EOS, puede interpretarse como la fragmentación de la configuración epistémica de referencia en configuraciones personales parciales que son complementarias entre sí. Desde una perspectiva pedagógica, este hallazgo sugiere que el diseño de situaciones de aprendizaje colaborativo en la formación inicial —donde las complementariedades entre perfiles se vuelvan visibles y productivas— podría potenciar significativamente el desarrollo de una comprensión más integrada del objeto.

El segundo hallazgo transversal es la asimetría entre la comprensión del objeto como procedimiento y la comprensión del objeto como herramienta de análisis. Los FPM han aprendido a construir modelos trigonométricos, pero no han desarrollado de forma equivalente la práctica de usar esos modelos para leer, predecir y verificar el comportamiento del fenómeno que describen. El modelo existe como producto de la tarea, no como instrumento activo de razonamiento. Esta distinción entre objeto construido e instrumento movilizado es uno de los ejes conceptuales más relevantes para el diseño curricular de la didáctica de la trigonometría en la formación inicial docente.

El tercer hallazgo es la gradación de la complejidad cognitiva entre tareas, que el instrumento revela de forma nítida. La tarea de Llenado de Tanque y la de Rueda de la Fortuna son accesibles para el grupo en su dimensión algorítmica; el Círculo Unitario desafía la comprensión de las funciones desde su definición geométrica y la covariación; el Movimiento

Subamortiguado supera el umbral de competencia de la mitad del grupo. Esta gradación no es lineal en términos de dificultad procedimental, sino que refleja el nivel creciente de articulación entre objetos matemáticos distintos —funciones exponenciales y trigonométricas, análisis diferencial y modelación física— que cada tarea exige. Este perfil de dificultad es en sí mismo un insumo para la reflexión curricular sobre la secuencia y profundidad con que se abordan las funciones trigonométricas en la Licenciatura en Matemáticas.

5.3.2. *Tabla de síntesis: perfiles por participante a lo largo del instrumento*

La siguiente tabla consolida el perfil global de cada FPM en las tres dimensiones de comprensión, considerando el desempeño acumulado a lo largo de las cuatro tareas:

Tabla 28.

Perfiles de comprensión de los FPM

Participante	Algorítmica	Representativa	Interpretativa
Brayan	Alta y consistente; oscilaciones puntuales (T/ω en Noria)	Alta en tareas complejas; baja en preguntas de texto puro	Alta en construcción; decreciente en análisis y modificación
Carlos	Media: sólida en parámetros numéricos; errores estructurales en modelos complejos	Baja: comprensión verbal sin traducción algebraica sistemática	Alta y consistente; la dimensión más desarrollada del grupo

María	Media-alta: sólida en modelos contextualizados; confusión M/A en Tanque	Media: un registro activo por pregunta; coordinación ausente	Progresiva: ausente → emergente → sólida a lo largo del instrumento
Celin	Alta en construcción del modelo; ausente en justificación de parámetros	Media: algebraico sin articulación gráfica ni física	Parcial: correcta en algunos rasgos contextuales; ausente en la mayoría
Camilo	Baja-media: errores paramétricos frecuentes; deterioro entre tareas	Baja: un único registro por respuesta; sin conversión entre ellos	No evidenciada de forma explícita en ninguna tarea
Andrey	Media: correcta en parámetros básicos; inconsistencias entre registros no detectadas	Media: coordinación sin verificación de coherencia entre registros	Media-baja: emergente en análisis verbal; ausente en modelación formal

6. Discusión

6.1. Interpretación de Resultados

La interpretación que se presenta a continuación se articula con los hallazgos del análisis descriptivo del capítulo anterior y se organiza en torno a los tres objetivos específicos de la

investigación. Su propósito es dar sentido a los patrones observados en las producciones de los FPM, contrastarlos con los referentes teóricos del EOS y el CDM, y derivar de ellos implicaciones concretas para la formación inicial docente en trigonometría.

6.1.1. Sobre las estrategias de resolución de los FPM

En respuesta al primer objetivo específico —examinar las estrategias usadas por los docentes en formación al solucionar situaciones problema sobre las funciones seno y coseno—, el análisis permite concluir que el grupo exhibe un repertorio de estrategias marcadamente asimétrico según el tipo de demanda cognitiva de cada pregunta.

Cuando la demanda es procedimental y la estructura de la respuesta esperada es algebraica, la estrategia predominante es la traducción directa de los datos del enunciado a los parámetros del modelo sinusoidal: los FPM identifican el período, calculan la frecuencia angular, estiman la amplitud y la línea media, y ensamblan la expresión funcional. Esta estrategia se activa con relativa uniformidad en las tareas de modelación contextualizada (Llenado de Tanque y Rueda de la Fortuna) y produce, en la mayoría de los casos, modelos algebraicamente correctos o aproximados. Sin embargo, la estrategia de verificación —contrastar el modelo obtenido con las condiciones físicas del problema— está sistemáticamente ausente en el grupo a lo largo de todo el instrumento. Ningún participante, en ninguna tarea, comprueba de forma explícita que el modelo producido satisface simultáneamente todas las condiciones del fenómeno.

Cuando la demanda es interpretativa o argumentativa, las estrategias se diversifican y se debilitan. Ante preguntas que solicitan explicar el significado físico de un parámetro o justificar la elección de una función, el grupo recurre a tres estrategias diferenciadas: la omisión completa de la justificación (María, Camilo), la argumentación verbal sin formalización algebraica (Carlos), o la formalización algebraica sin argumentación verbal (Brayan, Celin). Solo en casos

aislados —y nunca de forma consistente— un mismo participante combina ambas dimensiones en una única respuesta. Este hallazgo es convergente con lo señalado por Brijlall y Maharaj (2014): la enseñanza tradicional de la trigonometría tiende a desarrollar la dimensión procedimental a expensas de la interpretativa, y este desequilibrio se traslada a la práctica de los futuros docentes.

Ante tareas de mayor complejidad estructural, como el Movimiento Subamortiguado, la estrategia dominante para tres participantes fue la no respuesta. María, Camilo y Andrey no produjeron ninguna respuesta válida, lo que constituye en sí mismo un dato sobre el umbral de competencia alcanzado por la formación inicial: cuando el objeto matemático exige la articulación de funciones exponenciales y trigonométricas en un modelo compuesto y la base conceptual disponible resulta insuficiente. Los tres participantes que sí respondieron (Brayan, Carlos y Celin) exhiben perfiles diferenciados que revelan cómo se distribuye ese umbral de competencia dentro del grupo.

Una estrategia transversal que merece destacarse es el uso del software GeoGebra como sustituto del razonamiento algebraico: varios participantes ingresan la expresión en el software sin verificar si el modelo es físicamente coherente, y en algunos casos —Camilo en la Rueda de la Fortuna, Carlos con el error del separador decimal— las herramientas del software producen resultados incorrectos que no son contrastados con las restricciones físicas del problema. Esto evidencia que el uso de tecnología no garantiza por sí mismo la validación del modelo, sino que requiere una práctica activa de cotejo entre los registros digital y contextual-físico.

6.1.2. Sobre los tipos de comprensión

En respuesta al segundo objetivo específico —caracterizar la comprensión representativa, algorítmica e interpretativa de los FPM sobre las funciones seno y coseno en aplicaciones del mundo real—, el análisis permite concluir lo siguiente.

6.1.2.1. Comprensión algorítmica

La comprensión algorítmica es la dimensión más desigualmente distribuida del grupo: los participantes que la muestran de forma sólida —Brayan en la mayoría de las tareas, Celin y María en tareas específicas— lo hacen con alto nivel de precisión y completitud, mientras que quienes presentan errores algorítmicos los cometen de forma sistemática y con efectos en cadena. El caso más ilustrativo es el de Carlos en el Movimiento Subamortiguado, cuyo error inicial de estructura del modelo (resta en lugar de producto) comprometió de forma irreversible todas las preguntas subsiguientes de esa tarea.

Un hallazgo relevante es que el nivel de comprensión algorítmica no es constante a lo largo del instrumento para ningún participante: los mismos FPM que calculan correctamente amplitud, período y frecuencia angular en la primera tarea cometen errores en esos mismos parámetros en tareas posteriores —Camilo confunde A y M en la Rueda de la Fortuna; Brayan y Camilo confunden T y ω en la misma tarea—. Esto sugiere que la comprensión algorítmica de los parámetros trigonométricos no está completamente consolidada como objeto matemático estable, sino que su activación depende del contexto geométrico del problema y de los valores numéricos involucrados.

6.1.2.2. Comprensión representativa

La comprensión representativa es la dimensión más débil y más homogéneamente baja del grupo a lo largo de todo el instrumento. En ninguna tarea y en ningún participante se observa

una coordinación plena de los cuatro registros relevantes —algebraico-simbólico, gráfico, numérico-tabular y contextual-verbal— en una misma respuesta. Los participantes operan predominantemente dentro de uno o dos registros, y los procesos de conversión entre ellos —especialmente la traducción del registro contextual-físico al algebraico y en sentido inverso— son los que generan mayor dificultad.

El uso de GeoGebra, que en principio debería potenciar la comprensión representativa al facilitar la exploración del registro gráfico, no logra compensar esta debilidad porque los FPM no lo emplean sistemáticamente como herramienta de verificación cruzada entre registros. La herramienta es utilizada principalmente como dispositivo de entrada y visualización, no como mediador activo entre la expresión algebraica y el contexto físico. La excepción es Brayan, quien en la Rueda de la Fortuna construye el sistema de verificación más completo del instrumento, coordinando cuatro herramientas de GeoGebra de forma articulada.

Un hallazgo específico es la ausencia del registro contextual como argumento activo: cuando los participantes producen un modelo algebraicamente correcto, no producen simultáneamente la lectura de ese modelo en clave física. El modelo existe como objeto construido, pero no como instrumento de descripción del fenómeno. Esto es especialmente visible en Camilo y Celin, quienes en varias tareas producen procedimientos algebraicos sólidos sin articular ninguna interpretación contextual.

6.1.2.3. Comprensión interpretativa

La comprensión interpretativa es la dimensión con mayor variabilidad entre participantes y entre tareas. Carlos muestra una comprensión interpretativa alta y consistente a lo largo de casi todo el instrumento —produce las argumentaciones físicas más precisas del grupo en la Rueda de la Fortuna y en el análisis del movimiento subamortiguado— pero sin acompañarla de

formalización algebraica. María muestra una comprensión interpretativa progresiva que crece a lo largo del instrumento: ausente en la primera tarea, emergente en la segunda, sólida en la tercera.

El hallazgo más significativo respecto a esta dimensión es que ningún participante la activa de forma completa cuando el modelo involucra la función compuesta exponencial-sinusoidal: la frecuencia subamortiguada como modificación de la frecuencia natural por efecto de la fricción, y la interpretación física de los ceros como instantes de retorno al equilibrio son objetos que o bien no aparecen en las producciones, o bien aparecen aislados sin articulación entre sí. Esto confirma que la comprensión interpretativa en contextos físicos complejos es la frontera más difícil de alcanzar en la formación inicial de docentes.

La relación entre los tres tipos de comprensión en el grupo no es lineal ni jerárquica: no existe un perfil que concentre las tres dimensiones de forma equilibrada en todas las tareas. Brayan se aproxima más a ese equilibrio, pero muestra oscilaciones llamativas —máxima elaboración en algunas preguntas, mínima en las siguientes— que revelan que la articulación de las tres comprensiones no está automatizada, sino que depende del tipo de demanda y del grado de novedad de la tarea.

6.1.3. Sobre las dificultades conceptuales

En respuesta al tercer objetivo específico —identificar las posibles dificultades conceptuales de los FPM al relacionar las funciones seno y coseno con situaciones reales en el ámbito de la física—, el análisis permite organizar las dificultades en cuatro categorías, ordenadas de menor a mayor generalidad.

6.1.3.1. Dificultades paramétricas

La primera categoría agrupa los conflictos relacionados con la comprensión de los parámetros de la función sinusoidal. La confusión entre amplitud y línea media emerge en contextos donde un único valor geométrico —el radio en la Rueda de la Fortuna— puede identificarse superficialmente con cualquiera de los dos parámetros. La confusión entre período y frecuencia angular reaparece en múltiples tareas y en participantes con perfiles distintos, lo que indica que la relación $T = 2\pi/\omega$ no ha sido interiorizada como proposición operativa, sino que se maneja como fórmula de uso ocasional. La confusión entre la amplitud constante y la amplitud efectiva en el modelo subamortiguado —presente en Carlos— añade una tercera instancia de este tipo de dificultad en un modelo de mayor complejidad estructural.

6.1.3.2. Dificultades en la coordinación de registros

La segunda categoría agrupa los conflictos relacionados con la coordinación entre sistemas de representación. La inversión de coordenadas de María en el Círculo Unitario —asignar seno a x y coseno a y — es el ejemplo más claro de un conflicto de conversión entre el registro geométrico y el algebraico-simbólico. La confusión de Celin entre la definición del seno como razón trigonométrica en triángulo rectángulo y su definición como coordenada vertical en el círculo unitario representa un conflicto entre dos contextos institucionales de definición del mismo objeto que no han sido suficientemente diferenciados. El error mediacional de Carlos con el separador decimal en GeoGebra, que produce una gráfica físicamente imposible sin que él lo detecte, ilustra la dificultad de coordinar el registro tecnológico con el registro contextual-físico.

6.1.3.3. Dificultades en la validación y verificación

La tercera categoría es la más sistemática del instrumento: la ausencia de verificación como práctica de modelación. En ninguna tarea, en ninguna pregunta y en ningún participante se

observa una verificación completa y explícita del modelo producido contra todas las condiciones del fenómeno. Esta ausencia no es fortuita ni producto de limitaciones de tiempo: es un patrón estable que atraviesa el instrumento de forma transversal. Desde la perspectiva del CDM, esto señala una laguna en la dimensión epistémica del conocimiento profesional de los FPM: la validación del modelo matemático como parte constitutiva de la práctica de modelación no forma parte de su repertorio activo, y un futuro profesor que no ha incorporado esta práctica en su propio conocimiento matemático difícilmente la promoverá en sus estudiantes.

6.1.3.4. Dificultades en la interpretación físico-matemática

La cuarta categoría agrupa los conflictos en la interfaz entre el objeto matemático y el fenómeno físico que describe. El error altura-velocidad de Carlos en la tarea de Llenado de Tanque —identificar el máximo de $h(t)$ como el momento de mayor velocidad— es una instancia del conflicto más documentado en la literatura sobre aprendizaje de funciones: la confusión entre la posición de un sistema y su razón de cambio. La generalización incorrecta de la covariación sen-cos a todos los cuadrantes, compartida por la mayoría del grupo en la tarea del Círculo Unitario, revela que la comprensión de la covariación entre funciones periódicas se construye desde el primer cuadrante y no se extiende de forma rigurosa a los demás.

6.1.4. Implicaciones para la formación inicial docente

Los resultados de esta investigación permiten señalar cuatro implicaciones concretas para la formación inicial de docentes de matemáticas en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS.

La primera implicación es la necesidad de diseñar espacios curriculares específicos para la didáctica de la trigonometría que no se limiten al repaso procedimental del objeto, sino que promuevan deliberadamente la comprensión representativa e interpretativa. Los hallazgos

muestran que los FPM de últimos semestres dominan en mayor medida los procedimientos de construcción de modelos trigonométricos que la lectura e interpretación de esos modelos como descripciones de fenómenos físicos. Un curso de didáctica de la trigonometría debería diseñarse desde este diagnóstico, priorizando tareas que exijan el tránsito entre registros y la validación del modelo contra el fenómeno.

La segunda implicación es incorporar explícitamente la práctica de verificación del modelo como un objeto de enseñanza, no como un paso opcional al final del procedimiento. La ausencia sistemática de verificación en el grupo —incluso en participantes con alto dominio algorítmico— sugiere que esta práctica no fue objeto de enseñanza explícita en su formación. Enseñar a verificar no es solo enseñar a comprobar un resultado: es enseñar a comprender el modelo como descripción comprometida con la realidad que describe.

La tercera implicación es aprovechar la complementariedad de perfiles del grupo como recurso pedagógico. El hecho de que distintos participantes posean distintas dimensiones de la comprensión del objeto abre la posibilidad de diseñar situaciones de aprendizaje colaborativo en las que esas complementariedades se vuelvan productivas: que Carlos y María trabajen juntos en una tarea de modelación, por ejemplo, podría generar interacciones donde la argumentación física del primero y la formalización algebraica de la segunda se articulen y mutuamente se enriquezcan.

La cuarta implicación es repensar el lugar del Movimiento Subamortiguado —y de los modelos compuestos en general— en la formación inicial. La no respuesta de tres participantes ante esta tarea no es un fracaso individual sino una señal sobre la secuencia y profundidad del currículo: si los futuros docentes llegan al final de la carrera sin haber articulado análisis diferencial y modelación trigonométrica en contextos físicos, el estudio de fenómenos

oscilatorios amortiguados —que es precisamente donde la trigonometría muestra su mayor potencia descriptiva— queda fuera de su horizonte de enseñanza futura.

6.2. Contraste con el marco teórico

6.2.1. *La dualidad personal-institucional*

El EOS refiere que el aprendizaje matemático puede describirse como un proceso de integración progresiva entre los significados personales; los logrados por cada sujeto, y el significado institucional referencia que defina las practicas, objetivos y procesos esperados (Godino y Batanero, 1994). En esta investigación, el contraste entre la configuración epistémica de referencia, construida en el análisis a priori, y las producciones de los seis FPM revela que ese contraste es siempre parcial y no es simétrico entre los participantes.

El hallazgo más relevante del instrumento es que ningún FPM activa la totalidad de los objetos primarios de la configuración epistémica de referencia en ninguna de las tareas, Lo que emerge en cambio es un patrón de complementariedad entre los participantes, los objetos movilizados de la configuración se distribuyen entre los participantes distintos, de forma que la suma de las producciones se aproxima a la configuración epistémica, significado institucional, pero sin alcanzarla. En la tarea 2, Brayan tiene la expresión algebraica sin justificación geométrica; Carlos tiene la justificación geométrica sin expresión algebraica; Celín tiene la justificación parcialmente correcta con la expresión algebraica, María tiene los valores extremos correctos, pero no desarrolla la covariación, En la tarea 3, Carlos produce una argumentación en lenguaje casual que vincula los parámetros con la geometría de la noria; María produce la expresión correcta del modelo; Brayan construye el sistema de verificación completo. Ninguno activa las prácticas completas de forma individual.

Desde la perspectiva del EOS, se podrían considerar múltiples configuraciones personales que son subconjuntos complementarios de la configuración epistémica. Cada FPM ha consolidado una porción distinta del sistema de objetos y procesos que define el significado institucional de las funciones seno y coseno en contextos físicos de fenómenos periódicos en procesos de modelación, pero ninguno ha consolidado el significado completo. Este resultado es coherente con lo que señala Godino (2024) donde menciona que la comprensión matemática puede describirse en términos de las funciones semióticas que un sujeto es capaz de establecer entre los objetos implicados en las prácticas; los FPM de esta investigación establecen activaciones parciales que no alcanzan la completitud de la configuración epistémica de referencia.

El objeto primario más distante del significado institucional referencial en todas las tareas es el de argumentos; las justificaciones que validan los procedimientos y conectan el modelo matemático con el fenómeno periódico físico. Este objeto está presente en el significado institucional en las cuatro tareas y ausente o fragmentado en la gran mayoría de las producciones de los participantes. La ausencia de argumentos no significa no es fuente suficiente para afirmar que los FPM no tengan intuiciones correctas con respecto a los fenómenos, varios lo demuestran, sino que no se ha desarrollado la práctica de traducir sus justificaciones en argumentos matemáticos y físicamente formulados. Desde el CDM, esto señala una brecha específica en la faceta epistémica del conocimiento profesional del docente, el conocimiento especializado del contenido que un futuro docente necesita incluye no solo resolver, sino promover procesos de justificación y argumentación en sus estudiantes.

6.2.2. Conflictos semióticos

EL EOS distingue dos tipos de conflictos semióticos que debemos tener en cuenta para esta investigación (Godino et al., 2007). Los conflictos cognitivos, resultando del contraste entre el significado personal y el significado institucional de referencia; y los conflictos internos, inconsistencias dentro del propio sistema de conocimientos del sujeto. El análisis a posteriori permite identificar ambos tipos de conflictos, observar sus distribuciones y discutir sus posibles consecuencias.

Los conflictos más persistentes a lo largo del instrumento son de naturaliza paramétrica. La confusión entre amplitud y línea media aparece en María T1 y Camilo T3, y en ambos casos el conflicto es estructuralmente diferente, ya que María confunde M con A al usar un único valor para ambos (500m), lo que genera un modelo físicamente incorrecto; Camilo asigna el valor del radio en ambos parámetros en la T3, conflicto que no emergió en la T1 al plantear el modelo. Este contraste es importante, ya que sugiere que la confusión entre amplitud y línea media no es una concepción errónea general sobre los parámetros de las funciones seno y coseno, sino una dificultad que emergió de forma específica cuando la geometría del objeto físico ofrece un único valor que pueda identificarse con cualquiera de los dos parámetros. La presencia de un solo objeto geométrico referente, el radio de la noria, que determina simultáneamente ambos parámetros, activa el conflicto en un participante que no lo evidenció al contrastar los valores del modelo con el fenómeno físico planteado.

La confusión entre los parámetros periodo y frecuencia angular es el conflicto más persistente del instrumento, aparece en Brayan y Camilo en T3, en Andrey T1 y su variante confusión entre periodo, frecuencia y frecuencia angular. La persistencia de este conflicto en participantes con perfiles cognitivos muy distantes entre sí señala que la relación $T=2\pi/\omega$ no está

interiorizada como proposición, sino que se opera como formula de uso sin ser conceptualmente sólida. Desde la perspectiva del EOS, esto podría indicar que el objeto proposicional que vincula el periodo y la frecuencia angular no forma parte activa de las configuraciones cognitivas de los FPM participantes.

El conflicto cognitivo de mayor consecuencia es el error en la estructuración del modelo de Carlos en la T4, construir el modelo subamortiguado como resta en lugar de producto. A diferencia de los conflictos con los parámetros del modelo funcional, afectan valores, pero mantienen la estructura del modelo, este conflicto afecta el objeto matemático mismo, la relación multiplicativa entre la exponencial envolvente y la sinusoidal, que es lo que permite que la exponencial module la amplitud del seno. El conflicto compromete de forma irreversible las siguientes preguntas de la tarea, produciendo el perfil de mayor impacto en todo el instrumento.

Dentro de los conflictos internos el caso más ilustrativo de esto está en el caso de Andrey en la T1, donde calcula correctamente la frecuencia en el papel, pero no detecta la contracción en el modelo ingresado al GeoGebra. porque la herramienta AjusteSeno corrige el error. Este conflicto interno revela que el valor producido en papel y el ingresado en el software no se verifican mutuamente. Desde la teoría de Duval (2006). Este es un caso de tratamiento defectuoso dentro del registro algebraico, donde no se genera ninguna verificación porque el FPM no contraste del registro digital al escrito que permitiría detectar la inconsistencia.

El segundo conflicto interno más relevante estuvo presente en Celín a lo largo de las tareas, produce procedimientos algebraicos correctos, sin que esos procedimientos produjeran interpretaciones físicas. El modelo existe como objeto formal y como instrumento para calcular las transformaciones dentro de las funciones seno y coseno, pero no como descripción del fenómeno. Esta existencia de solidez algorítmica en la formulación de modelos e interpretación

ausente, no es una contradicción dentro del significado personal de Celín, constituye una configuración parcial respecto al significado institucional que exige que el modelo sea leído como descripción física y no solo como expresión algebraica.

6.2.3. Los registros de representación

La teoría de Duval (2006) establece que la comprensión matemática profunda requiere la coordinación entre al menos dos registros de representación y que la transformación que lleva una representación de un registro a otro es la operación cognitiva más exigente. Los hallazgos del análisis de datos permiten precisar los casos específicos en la modelación de fenómenos periódicos con las funciones trigonométricas.

El registro más activo a lo largo de las cuatro tareas es el algebraico a través de los símbolos, todos los participantes producen expresiones variantes a la estructura $f(t) = A \cdot \text{Sen}(\omega t + \varphi) + M$ reproducen tratamientos dentro de este registro, el cálculo de parámetros, evaluación de puntos específicos, operan con mayor fluidez que en cualquier otro. Los tratamientos dentro del registro algebraico son la práctica más homogénea en las respuestas del grupo y la que genera menores dificultades.

El registro gráfico, mediado por el software dinámico de GeoGebra es el segundo más activo, pero con diferencias relevantes entre participantes. Brayan usa el entorno dinámico como mediador en el sentido pleno, construye puntos, tangentes, intersecciones; coordinando el registro gráfico con el algebraico y el numérico en un sistema de verificación. Los demás participantes usan GeoGebra como herramienta de visualización, sin que la gráfica que se produjo se volviera objeto de justificación o validación dentro de los fenómenos. Este uso diferenciado es un indicador del nivel de comprensión que representa a los FPM que

participaron, Brayan realiza conversiones entre los registros algebraicos y gráficos; los demás realizan tratamientos unidireccionales dentro del gráfico, pero sin traducciones entre registros.

Se va a considerar el registro de lenguaje natural como la interpretación física en el que los parámetros matemáticos se traducen en magnitudes referentes al fenómeno. Es el que mayor déficit presenta en el grupo y el que conecta las dificultades más relevantes de conversión entre registros.

La conversión entre el registro de lenguaje natural para interpretar los parámetros en función del fenómeno al registro algebraico es la práctica más demandada del instrumento y que mayor variabilidad produce dentro de los participantes. La dificultad no se presentó al reconocer qué valores debía tomar cada parámetro, proceso logrado por la mayoría, sino al justificar y verificar por qué esos valores son los correctos y en verificar de forma explícita que el modelo satisface las condiciones iniciales del fenómeno. La fase inicial es el parámetro donde se presenta mayor dificultad, ya que la mayoría de modelos presenta la fase correcta sin mencionar de forma explícita qué valor de la condición inicial implica el valor de este parámetro.

La conversión entre el registro algebraico al registro de lenguaje natural. Leer el modelo como descripción del fenómeno es la dirección de conversión más exigente en comparación con la anterior mencionada, y la que separa con mayor determinación los perfiles del grupo. Carlos es el participante que realiza esta conversión con mayor consistencia, asigna significados físicos a los parámetros. Camilo y Andrey lo realizan de forma muy escasa. Celín, produce los procedimientos algebraicos más cuidadosos, pero sin realizar la conversión al registro de lenguaje natural. Este patrón, solidez en el registro algebraico, ausencia de conversión hacia lo físico, es la consecuencia más clara de la falta de integración en la comprensión algorítmica e interpretativa que caracteriza las producciones del grupo.

La ausencia en el uso de GeoGebra como herramienta de verificación en la mayoría de las producciones, requiere la conversión entre el registro gráfico y el registro de lenguaje natural. Esta conversión bidireccional es precisamente la que el instrumento tenía como objetivo provocar mediante la combinación del software dinámico y los registros a lápiz y papel. El análisis de datos muestra que el entorno tecnológico no es suficiente para que provoque la conversión, el software promueve la producción de una representación gráfica, pero no garantiza que dicha representación sea contrastada con el fenómeno que describe.

6.2.4. *Las dimensiones epistémica y cognitiva del CDM*

El CDM propone que el conocimiento profesional del profesor de matemáticas se organiza en dimensiones que le permiten no solo describir qué sabe el docente sino cómo es conocimiento se opera en la práctica (Pino-Fan y Godino; 2015). Las dimensiones epistémica y cognitiva son las que están directamente relacionadas con las producciones de los FPM en este instrumento.

La faceta epistémica, conocimiento especializado del contenido que un docente necesita para enseñarlo, se examina en esta investigación como la calidad y completitud de los objetos activados en las producciones de los FPM. Los hallazgos permiten identificar el perfil epistémico del grupo con dos rasgos dominantes.

El primero es la solidez procedimental y la activación de conceptos básicos, todos los participantes conocen la forma canónica de la función sinusoidal, identifican el periodo y calculan la frecuencia, y así producen expresiones algebraicas con parámetros en sus posiciones correctas ajustadas a los fenómenos en la mayoría de las tareas. Estos objetos están referenciados en la dimensión epistémica del CDM, el conocimiento común del contenido que cualquier profesional licenciado debería poseer.

El segundo hallazgo relevante es la debilidad en los objetos argumentativos y proposicionales que articulan el modelo con el fenómeno físico, las proposiciones que vinculan los parámetros con sus significados físicos, los argumentos que justifican la elección de función y hace, y las normas que se deben tener en cuenta para la validación del modelo están ausentes o parcialmente presentes en las producciones de los FPM. Estos objetos, a diferencia de los mencionado en el primer hallazgo, corresponden al conocimiento ampliado del contenido en el CDM; el conocimiento especializado que va más allá del dominio técnico y que debería poseer el futuro docente para participar y promover estos procesos con los estudiantes, anticipando las dificultades que se puedan presentar y seleccionando representaciones adecuadas y justificadas matemática-contextualmente. La debilidad en el grupo señala que la formación inicial de docentes ha desarrollado el conocimiento común del contenido trigonométrico, pero no se ha consolidado lo suficiente el conocimiento especializado para la enseñanza.

La faceta cognitiva, el conocimiento sobre los significados personales que los estudiantes construyen y los conflictos que podrían surgir, se examina a través de los propios significados personales por los FPM, en cogerencia con la decisión metodológica de esta investigación de usar las producciones de los participantes como fuente de evidencia sobre su propia comprensión, se podría considerar metacognitiva. Los hallazgos que revelan los estudiantes de últimos semestres de la licenciatura han construido diferentes significados personales, como:

Algorítmicamente funcionales, pero interpretativamente parciales en la mayoría de los casos, los FPM pueden operar con la función sinusoidal y los parámetros que la ajustan como objeto algebraico, evaluar puntos específicos y modificar su frecuencia, pero encuentran dificultades para operarla como herramienta para describir fenómenos físicos en procesos de

modelación, como los mencionan los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas MEN (2006).

Dependencia del contexto geométrico del problema, la confusión entre T/ω y amplitud/línea media aparecen en tareas específicas con configuraciones geométricas provocadas en el contexto descrito del problema, no como errores en los parámetros en todo el instrumento. Esto sugiere que los objetos matemáticos no están completamente consolidados como objetos, sino que su activación correcta depende del contexto en que se presenta.

El tercer hallazgo es la complementariedad entre sí a nivel grupal, ningún FPM desarrolló las mismas producciones que otro, lo que produce un patrón estructural descrito, desde la faceta cognitiva del CDM, esto podría tener consecuencias directas en el diseño de situaciones de aprendizaje que haga visibles y productivas la integración de todo el significado de las funciones trigonométricas en procesos de modelación de fenómenos físicos, estrategia pertinente para consolidar en la formación docente en trigonometría.

6.2.5. *Los tipos de comprensión en relación con los antecedentes*

Los hallazgos de esta investigación conversan con lo de Uribe y Retamal (2021) en su estudio sobre futuros profesor de matemáticas chilenos que resolvieron problemas sobre funciones trigonométricas usando el EOS como marco analítico de datos. Ambos estudios identifican la comprensión algorítmica como la más activada, la representativa de forma no tan presente en las producciones y la interpretativa con una alta variabilidad entre participantes. Ambos estudios, realizados en contextos distantes- Chile y Colombia- con instrumentos distintos, podrían sugerir que el patrón de la UIS puede ser más bien estructural de la formación inicial docente en trigonometría en el contexto latinoamericano,

La comprensión algorítmica es la más desarrolladas del grupo, pero con matices entre participantes que son relevantes respecto a lo que el marco teórico define como alcance completo. Brijhall y Maharaj (2014) señalan que la comprensión algorítmica no es solo la ejecución mecánica de procedimientos sino la comprensión de cuándo y por qué aplicar un algoritmo. En ese sentido, la comprensión algorítmica del grupo es más estrecha que la definición, los FPM ejecutan los procedimientos, peor no siempre demuestran comprensión de su justificación, la fase de determina correctamente sin explicar por qué el valor satisface las condiciones, el modelo se construye sin verificar que sea coherente con todas las condiciones del fenómeno.

La comprensión representativa es la más débil de forma homogénea en el grupo, en coherencia con Duval (2006) según el cual la ausencia de coordinación entre registros es una causa estructural de las dificultades en el aprendizaje matemático. Los hallazgos permiten precisar que la debilidad en la comprensión representativa no se distribuye de forma uniforme entre todas las posibles conversiones, la que presenta mayor dificultad es la que involucra el registro de lenguaje natural-físico como origen o destino. Las conversiones entre el registro algebraico y grafico son más accesibles. Este hallazgo enriquece la propuesta de Duval, no todas las conversiones son igualmente difíciles y en el caso de las funciones trigonométricas en contextos físicos, la conversión crítica es la involucra el registro que da sentido al modelo a través del lenguaje natural.

La comprensión interpretativa, variable entre participantes y entre tareas, y la que más tensión señala en el marco teórico entre el tipo de comprensión que desarrollan los FPM en su formación inicial y el tipo que deberán promover en sus estudiantes. Los estándares del MEN (2006) establecen que los estudiantes deben tener las competencias para "describir y modelar

fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas", lo cual demanda una comprensión interpretativa. Los hallazgos demuestran que los FPM se forman para enseñar ese estándar de forma fragmentada. Carlos la demuestra con consistencia en la dimensión verbal y argumentativa(parcial), pero sin formalización algebraica; Brayan la demuestra en la construcción del modelo pero con tendencia decreciente hacia el análisis; María la construye de forma progresiva a lo largo del instrumento; Celín lo activa de forma casi nula. Esta heterogeneidad no es solo resultado ante el estado del conocimiento actual de los participantes, podría ser un indicador sobre las limitaciones de la formación inicial para desarrollar de forma integral la comprensión interpretativa de las funciones trigonométricas como herramientas de modelación.

6.3. Limitaciones y recomendaciones futuras del estudio

6.3.1. *Limitaciones metodológicas*

Dentro de las limitaciones consecuentes del diseño de la metodología, la muestra permite una caracterización de los significados personales por cada FPM que participó en la muestra, coherente con el enfoque cualitativo de la investigación. Sin embargo, esta decisión impide en los hallazgos una generación en la población de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, lo cual podría permitir poder discutir en términos de la formación inicial de docentes con mayor dominio de la información en población general. Son hallazgos válidos para los seis participantes, pero no se puede asumir como representativo, teniendo en cuenta, además, la variabilidad de perfiles dentro de los resultados.

Una réplica del instrumento con una muestra más amplia podría permitir examinar patrones, aplicar análisis de frecuencia sobre los tipos de conflictos semióticos, identificando cuáles son estadísticas relevantes y cuáles emergen de forma más ocasional.

El instrumento se aplicó en un momento único, lo que nos permite hablar del estado de comprensión en ese instante, pero no permite observar la evolución de significados personales, lo cual se podría estudiar en un diseño longitudinal donde se puede aplicar el instrumento en varios momentos y en un espacio didáctico para poder potenciar el desarrollo de forma intencional, reconocer qué tipos de instrucciones activan de forma rápida los tipos de comprensión y qué conflictos semióticos persisten en estos procesos.

Además, se debe resaltar que el análisis a posteriori se base principalmente en las producciones escritas y digitales de los participantes, esta decisión es coherente con el diseño del instrumento, sin embargo, implica que en varios casos no fue posible determinar con mayor certeza el origen del resultado. Una réplica del instrumento que incorpore entrevistas donde los participantes puedan verbalizar su razonamiento, permitiría reducir de forma significativa la ambigüedad y enriquecer el análisis de los objetos implícitos con evidencia directa sobre los procesos activados y desde donde se originan las producciones.

6.3.2. Limitaciones del instrumento

La no respuesta de tres de los seis participantes en la T4 es la dificultad más evidente del instrumento. Si bien la no respuesta es sí misma es un hallazgo valioso, dentro del estudio se reduce la base disponible para caracterizar el perfil de comprensión del grupo en la tarea de mayor complejidad y limita la posibilidad de hacer comparaciones entre todos los participantes. En una réplica se sugiere considerar ajustes posibles. Incorporar una tarea de transición entre T3 y T4 que permite trabajar con la composición de funciones antes de enfrentarse a la exponencial, también cabría diseñar preguntas que sirvan de andamiaje progresivo de forma escalonada que le permite identificar con mayor precisión en qué paso del razonamiento hay dificultades, en lugar de no recibir respuesta en bloque.

Se considera pertinente incluir una tarea que solicite a los FPM reconocer que dos expresiones describen el mismo fenómeno. Este tipo de tarea permitiría examinar directamente la comprensión en su dimensión del reconocimiento de equivalencia entre registros algebraicos y su justificación mediante identidades trigonométricas. Sus incorporaciones enriquecerían el análisis del perfil de comprensión del grupo.

El análisis del uso de GeoGebra se basa en las construcciones en los textos de respuesta ingresados en el libro interactivo. No se observó el paso a paso del razonamiento que sugiere el proceso de exploración evidente en el producto final, se sugiere incorporar estrategias que permitan analizar las exploraciones, esto daría acceso a una dimensión de la comprensión que el análisis de producciones finales no permite.

6.3.3. Limitaciones en la cobertura del marco teórico

El marco teórico de esta investigación articulando el EOS, el CDM y la teoría de registros de Duval. Sin embargo, la naturaleza del instrumento y la metodología (tareas abiertas resueltas de forma autónoma) permite examinar solo un subconjunto de las dimensiones que pretenden abarcar estas teorías. Las siguientes limitaciones constituyen las fronteras inherentes al diseño y que una réplica podría ampliar.

6.3.3.1. Dimensiones no examinadas del CDM:

El CDM como modelo del EOS, organiza el conocimiento que debe tener el profesional docente en tres dimensiones articuladas. Dentro de los intereses de la investigación, se examinó prioritariamente la dimensión matemática en sus niveles del conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido trigonométrico. La dimensión didáctico-matemática articula las seis facetas del proceso de enseñanza-aprendizaje, donde se examinan de forma atípica las facetas epistémica y cognitiva, los FPM participan como resolutores de problemas, no

como docentes en práctica. Esto implica el uso de ambas facetas respecto a su aplicación descrita en el Marco Teórico.

La faceta epistémica se usa para construir la configuración epistémica de referencia del análisis a priori identificando los objetos primarios que una solución experta de cada tarea debería activar. Pero se aplica desde la perspectiva donde el profesor debe comprender la matemática no como un conjunto de reglas aisladas sino como un sistema de prácticas institucionales.

La faceta cognitiva tiene sus limitaciones en tanto que constituye los conocimientos que debe tener el docente en cuanto a el estudiante y su aprendizaje, cómo asimilan y procesan el contenido matemático. Exige que el profesor pueda anticipar los razonamientos y dificultades en el aula. Es necesario la integración de estas dos facetas para que el docente pueda usar la faceta epistémica para poder descomponer de forma intencionada en partes comprensibles las diferentes implicaciones del comportamiento de las funciones periódicas seno y coseno y usar la fase cognitiva para asegurarse de que esa estructura matemática se adapta a diferentes registros de representación. Esto sugiere una revisión del propio estado de comprensión de los FPM sobre el objeto que enseñarán, no su conocimiento didáctico sobre cómo enseñarlo.

Las cuatro facetas (afectiva, interaccional y ecológica) no son examinables en el diseño por razones estructurales, estas se manifiestan en situaciones de enseñanza que el instrumento no activa

La faceta mediacional se examina de forma complementaria a través del uso de los FPM hacen de GeoGebra como herramienta interactiva que permite verificar, visualizar o mediar entre registros. Este examen es parcial porque no observa como el FPM lo usaría en situación de enseñanza sino como lo usa como herramienta para sí mismo.

La dimensión meta didáctico-matemática (la reflexión del docente sobre su propia práctica y la idoneidad de los procesos de enseñanza) tampoco es examinable en el diseño, ya que requiere experiencias sobre las que reflexionar y que pueda valorar.

6.3.3.2. Categorías no examinadas del EOS:

El EOS establece que tanto los significados personales como los institucionales tienen subcategorías con funciones de análisis diferenciada. Esta investigación examinó el significado personal logrado -el construido por los FPM al término de la formación inicial, evidenciando en sus producciones ante el instrumento diseñado en GeoGebra- y el significado institucional -el construido desde la práctica matemática experta en análisis a priori. Las demás subcategorías quedan fuera del alcance del estudio.

El significado personal inicial (estado de comprensión antes de la formación) no fue examinado, ya que se aplicó exclusivamente a estudiantes de últimos semestres que ya hubiesen culminado lo que les acerca a las funciones trigonométricas, de forma intencional, dentro de la formación inicial de docentes. Esta ausencia impide determinar qué comprensión existía antes y qué se aportó al desarrollo del conocimiento trigonométrico. Un interés más profundo por desarrollar habilidades en los procesos de modelación de los FPM que metodológicamente permita establecer una línea base de investigación en cuantificar el desplazamiento entre el significado de los estudiantes de primer semestre y el logrado al término de la formación.

El significado institucional pretendido (lo que el currículo de la Licenciatura en matemática planifica enseñar sobre las funciones trigonométricas) y el significado institucional implementado, a lo que efectivamente se accede en los espacios curriculares, no fueron objeto de análisis. El contraste entre lo pretendido, lo implementado y lo logrado, permitiría identificar en qué fase del proceso formativo se producen vacíos conceptuales, sin son del diseño curricular, la

implementación didáctica y pedagógica o del propia de proceso de aprendizaje individual y sus dificultades epistémicas adyacentes.

El EOS distingue entre los objetos primarios en los que el estudio examina de forma sistemática y los procesos que los producen. El instrumento permite inferir algunos de estos procesos ontosemióticos a partir de las producciones, por ejemplo, la generalización incorrecta de la covariación en la T2 o la particularización de forma sistemática como categorías de análisis independientes. Sería pertinente realizar de forma sistemática, no solo qué objetos se activan sino mediante qué procesos los construyen.

Finalmente, es importante señalar que tanto el EOS como el CDM constituyen marcos teóricos diseñados para analizar la actividad matemática y los conocimientos del docente en múltiples niveles y dimensiones. La amplitud en categoría del enfoque implica realizar una selección de las relaciones que se pretenden examinar. En consecuencia, las limitaciones descritas son también inherentes a la operacionalización del marco teórico, cuya pretensión analítica abarca la complejidad global dentro de la actividad matemática, los procesos de enseñanza-aprendizaje y la producción de significados, permitiendo el análisis de conflictos.

En ese sentido, en la tesis se priorizaron aquellas categorías que resultaban más coherentes con el objetivo de caracterizar los significados personales de los FOM sobre las funciones seno y coseno en contexto de modelación de fenómenos físicos periódicos. Sin embargo, permanecen abiertas otras dimensiones que podrían desarrollarse en futuros estudios, sobre todo aquella relacionado con los procesos ontosemióticos de construcción de significado, las interacciones en contextos reales y su enseñanza.

6.4. Implicaciones

Los hallazgos de esta investigación no se agotan en la descripción de lo que los FPM saben o no saben sobre las funciones seno y coseno: apuntan, de manera más precisa, a las condiciones bajo las cuales ese conocimiento fue construido y a las consecuencias que esas condiciones tienen sobre su futura práctica docente. En este apartado se derivan implicaciones concretas para la Licenciatura en Matemáticas de la UIS, organizadas en dos planos articulados: las implicaciones de orden curricular, referidas a la organización y énfasis del plan de estudios, y las implicaciones de orden pedagógico, referidas a las estrategias, recursos y situaciones de aprendizaje que deberían orientar la formación en trigonometría.

6.4.1. Implicaciones curriculares

7.4.1.1. La necesidad de un espacio académico específico para la didáctica de la trigonometría

El análisis de las producciones de los FPM revela que la formación recibida en el plan de estudios ha desarrollado con mayor solidez el conocimiento común del contenido trigonométrico —la capacidad de construir modelos sinusoidales y operar algebraicamente con sus parámetros— que el conocimiento especializado requerido para la enseñanza. Los estándares del MEN (2006) establecen que los estudiantes de educación media deben ser competentes para "describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas", lo que demanda, de quien enseña, no solo dominio procedimental del objeto sino capacidad para diseñar situaciones en las que ese estándar pueda ser alcanzado. El perfil del grupo evidencia que esa capacidad no está consolidada: la comprensión interpretativa —la más directamente vinculada con el estándar del MEN— es la dimensión más débil e inconsistente del grupo.

Esta brecha señala la pertinencia de incorporar en el plan de estudios un espacio académico específicamente orientado a la didáctica de la trigonometría, que no replique el tratamiento procedimental del objeto, sino que problematice su enseñanza desde los obstáculos epistemológicos y cognitivos que los propios estudiantes ya han experimentado. Un curso de esta naturaleza tendría como punto de partida precisamente los conflictos semióticos identificados en esta investigación —confusión entre amplitud y línea media, entre período y frecuencia angular, entre posición y razón de cambio— y los convertiría en objetos de reflexión didáctica y no simplemente en errores a corregir. El perfil del conocimiento profesional docente que propone el CDM (Pino-Fan y Godino, 2015) sugiere que ese curso debería articular la dimensión matemática —profundización del contenido trigonométrico en sus registros geométrico, algebraico y contextual— con la dimensión didáctico-matemática —análisis de tareas, anticipación de dificultades, diseño de situaciones de modelación.

7.4.1.2. El aprovechamiento pedagógico de la complementariedad de perfiles

En cada tarea y en cada pregunta compleja, los componentes de la respuesta esperada se distribuyeron entre participantes distintos: ningún FPM los reunió todos, y la suma de las producciones del grupo aproximó la respuesta completa sin alcanzarla. Carlos produce la argumentación física más precisa; María produce la formalización algebraica más cuidadosa; Brayan construye el sistema de verificación más completo; Celin articula la justificación geométrica más rigurosa. Este patrón de complementariedad no es casual: es la expresión de que los FPM han desarrollado configuraciones personales distintas del mismo objeto matemático, cada una con fortalezas y vacíos específicos.

Desde una perspectiva pedagógica, esta complementariedad constituye un recurso formativo de primer orden. El diseño de situaciones de aprendizaje colaborativo —en las que los

estudiantes deban negociar representaciones, justificar elecciones y validar mutuamente sus modelos— crearía las condiciones para que esas complementariedades se vuelvan visibles y productivas. Una situación en la que Carlos deba formalizar algebraicamente su argumento para que Brayan lo implemente en GeoGebra, o en la que María deba explicarle a Carlos por qué eligió el signo negativo en el coseno, activaría exactamente los procesos de conversión entre registros que el instrumento identificó como la dimensión más débil del grupo. Este tipo de diseño está respaldado por la dimensión interaccional del CDM, que señala que los patrones de interacción didáctica son un componente esencial del conocimiento profesional docente: los FPM que hayan experimentado el aprendizaje matemático en situaciones de negociación de significados estarán mejor preparados para promover esos patrones en sus propias aulas.

7.4.2.3. El uso de tecnología como herramienta de verificación y no solo de visualización

Los resultados muestran una diferencia cualitativa significativa en el modo en que los participantes emplean GeoGebra a lo largo del instrumento. La mayoría lo utiliza como herramienta de entrada y visualización: ingresan la expresión algebraica, observan la gráfica producida y continúan sin contrastar lo que el software muestra con las restricciones físicas del problema. Solo Brayan, y solo en algunas preguntas, utiliza el entorno dinámico como mediador semiótico en sentido pleno: construye puntos, tangentes e intersecciones que coordinan el registro gráfico con el algebraico y el contextual-físico, usando la herramienta como instrumento de exploración y verificación simultáneas.

Esta diferencia no es resultado de mayor competencia técnica con el software, sino de una concepción distinta del papel que la tecnología puede cumplir en la resolución de tareas de modelación. Promover ese uso más sofisticado requiere diseñar situaciones en las que el software

no sea la herramienta para producir la respuesta, sino la herramienta para cuestionarla: proponer a los estudiantes que construyan en GeoGebra un sistema que les permita verificar si su modelo es coherente con todas las condiciones del fenómeno, y no solo con algunas. El error mediacional de Carlos —cuya confusión con el separador decimal generó una gráfica físicamente imposible que no fue detectada— ilustra que el uso no crítico de la tecnología puede encubrir contradicciones en lugar de revelarlas, y que enseñar a usar GeoGebra como herramienta de verificación es, en sí mismo, un objetivo formativo que requiere atención explícita en el diseño de los espacios académicos.

7.4.2.4. La comprensión interpretativa como meta formativa explícita

Los hallazgos muestran que la comprensión interpretativa —la capacidad de leer el modelo matemático como descripción del fenómeno, de asignar significado físico a los parámetros y de evaluar la validez del modelo contra la realidad que describe— es la dimensión más variable entre participantes y la que más directamente conecta el conocimiento matemático con el tipo de enseñanza que los estándares curriculares demandan. Su ausencia en algunos participantes y su carácter emergente o inconsistente en otros no puede atribuirse exclusivamente a limitaciones individuales: es también el reflejo de una formación que ha privilegiado la construcción procedimental del modelo sobre su lectura en clave física.

Hacer de la comprensión interpretativa una meta formativa explícita supone transformar las preguntas que se hacen en las situaciones de aprendizaje: no solo "construye el modelo que describe esta situación", sino "¿qué dice este modelo sobre el comportamiento del sistema?", "¿en qué instantes la función describe el fenómeno de forma más fiel?", "¿qué sucedería con el fenómeno si este parámetro cambiara?". Son preguntas que exigen transitar desde el registro algebraico al registro contextual-verbal, y que constituyen exactamente el tipo de conversión que

el instrumento identificó como la más difícil y la más ausente en las producciones del grupo. Incorporarlas de forma sistemática en los espacios académicos donde se estudian las funciones trigonométricas —no solo en un curso de didáctica, sino en los cursos de contenido matemático— sería uno de los cambios pedagógicos de mayor impacto sobre la formación inicial de los futuros docentes de la UIS.

7. Conclusiones

El estudio tuvo como propósito principal caracterizar los significados personales movilizados por los futuros profesores de matemáticas al resolver tareas sobre las funciones seno y coseno en contextos de modelación periódica, a partir del análisis de sus producciones frente a un instrumento diseñado en el software de geometría dinámica GeoGebra y fundamentado en fenómenos físicos. Para ellos, se articuló el EOS y el modelo CDM, la teoría de representación semiótica y la clasificación de tipos de comprensión matemática en dimensiones algorítmica, representativa e interpretativa.

El análisis a priori permitió construir una configuración epistémica de referencia para con cada tarea, identificando los objetos, procesos, prácticas, normas y significados que una resolución experta movilizaría. Posteriormente, el análisis a posteriori de las producciones de los seis FPM hizo posible contrastar dichos significados con los personales activados efectivamente por los participantes. Este contraste evidenció que la comprensión de las funciones seno y coseno no emergen de manera homogénea, sino a través de configuraciones parciales, fragmentadas.

Los hallazgos muestran que los participantes movilizan distintos tipos de comprensión matemática según la naturaleza de la tarea y el tipo de exigencia implicada. En general, las producciones evidencian mayor estabilidad en las prácticas algorítmicas asociadas a la

manipulación de modelos algebraicos, mientras que las mayores dificultades se presentan en los procesos de argumentación, validación, coordinación entre registros e interpretación de los parámetros y comportamientos de las funciones periódicas.

Asimismo, el estudio permitió identificar diversos conflictos semióticos relacionados con la interpretación de los parámetros, la coordinación entre representaciones y la validación. Desde el EOS, estos conflictos evidencian tensiones entre los significados personales y el institucional de referencia, así como las configuraciones parciales que no logran articular distintos objetos y procesos involucrados en la modelación matemática.

Las conclusiones se organizan en cuatro secciones, los perfiles individuales de comprensión de cada participante, los patrones transversales que emergen del análisis de grupo en conjuntos, la síntesis de la respuesta de investigaciones y los posibles alcances del estudio en la academia.

8.1 Perfiles individuales de comprensión

Los perfiles que se presentan a continuación sintetizan el tipo de comprensión predominante en las producciones de cada FPM a lo largo de las cuatro tareas del instrumento, identificando sus fortalezas, los vacíos conceptuales y los conflictos más característicos de su práctica matemática.

Brayan- Comprensión funcional integrada según el grupo

Presenta el perfil de comprensión más integrado del grupo. Sus producciones evidencian una comprensión algorítmica sólida, que le permite movilizar procesos como la construcción de modelos sinusoidales, el cálculo adecuado de parámetros y el uso de GeoGebra como

herramienta de exploración matemática. Igualmente, muestra una comprensión representativa alta al coordinar distintos registros de representación y usar el software más allá de lo visual.

La comprensión interpretativa también alcanza altos niveles al justificar elecciones matemáticas en algunas tareas. Sin embargo, esta fortaleza no es persistente cuando se exige utilizar el modelo previamente construido como herramienta de análisis en la interpretación del fenómeno físico. En este caso las respuestas tienden a simplificarse u omitirse.

El conflicto semiótico más característico del perfil es que, aunque construye modelos con alto nivel de elaboración y validación, no siempre moviliza esos objetos matemáticos para fundamentar respuestas. Además, se presentan dificultades puntuales en la relación de período y frecuencia angular en terminología.

Desde el EOS, el perfil de comprensión muestra la configuración más cercana al institucional, particularmente en aspectos de procesos. No obstante, la articulación entre interpretación y argumentación están parcialmente fragmentadas, plantear correctamente el modelo no garantiza la movilización de la interpretación del mismo.

Carlos

Presenta un perfil asimétrico. A lo largo de las cuatro tareas se evidencia una comprensión interpretativa consistente, caracterizada por la capacidad de asignar significado físico a los parámetros del modelo y justificar sus decisiones desde las condiciones del fenómeno. Sus respuestas muestran comprensión del comportamiento en el fenómeno incluso cuando no logra expresarlo formalmente mediante lenguaje algebraico.

Esta fortaleza interpretativa que contrasta con la comprensión algorítmica limitada. Identifica las relaciones, en varias tareas logra explicar sin construir el modelo correspondiente, evidenciando una brecha entre la comprensión interpretativa y la comprensión algorítmica.

El conflicto semiótico más característica de este perfil es precisamente esta separación. Carlos comprende el significado de los objetos matemático involucrados, pero presenta dificultades para representarlos de forma algebraica y utilizarlos como herramienta. Otro conflicto presente aparece en la confusión entre altura y velocidad de cambio.

Desde el EOS, Carlos moviliza significados asociadas a la interpretación de fenómenos, pero dichos significados no logran articularse con los objetos algebraicos presentes en la configuración de referencia.

María

Su perfil a lo largo del instrumento evidencia un crecimiento progresivo de la comprensión interpretativa, pasa de respuestas centradas en valores aislados y con escasa vinculación con el fenómeno físico T1 a interpretar físicamente, su comprensión interpretativa es progresiva para T2 y T3.

En T1, donde el modelo propuesta confunde la línea media con la amplitud, generando un modelo inválido que permite al nivel de agua llegar hasta 0; en T2, donde a pesar del error en la inversión de las coordenadas identifica correctamente que los extremos de seno y coseno no coinciden y enuncia los valores notables; y en T3 donde produce el modelo algebraico con justificación y concluye interpretando de forma precisa lo que representa $h(5)$ en términos de recorrida.

Su comprensión algorítmica, en contraste, es débil con respecto al grupo. Los errores a lo largo de las tareas, a pesar de que mejora en la comprensión interpretativo, revela que ambas dimensiones podrían evolucionar de forma independiente.

Sus conflictos semióticos más característicos son la inversión de coordenadas en T2 y confundir amplitud con línea media en T1. En ambos casos el error es conceptual y GeoGebra hubiese sido una herramienta de validación que hubiera rebelado el error.

Desde el EOS, el perfil de María evidencia una configuración personal donde los significados asociados a los fenómenos físicos se enriquecieron de forma progresiva, pero algunos objetos matemáticos fundamentales permanecieron desarticulados. La trayectoria muestra que la construcción de significados dentro de un contexto puede avanzar más que ciertas relaciones matemáticas, acercando el perfil al institucional en términos interpretativos, aunque aún con conflictos conceptuales significativos.

Celín

Presenta un perfil sólido con disonancias entre la comprensión algorítmica e interpretativa. Su comprensión algorítmica es la más sólida con respecto del grupo en los procedimientos. Construye modelos algebraicos correctos en la mayoría de las tareas. Sin embargo, ninguno de estos procedimientos produce una interpretación física del fenómeno modelado en ninguna de las tareas. Los parámetros calcular no reciben significado en términos del sistema físico, los resultados obtenidos no reciben significado como descriptores y los objetos matemáticos son tratados exclusivamente como objetos de cálculo.

En la T1, construye el modelo correcto, pero sin verificar que la fase satisface la condición inicial, y en las preguntas de análisis y modificación responde verbalmente correcta sin traducirla al registro algorítmico algebraicas. En T2, produce la asignación correcta de coordenadas, pero con una justificación que mezcla la definición de seno como razón trigonométrica en triángulos rectángulos con su interpretación en el círculo unitario “cuántas veces cabe el radio en la ordenada” evidenciando que los dos contextos de definición del seno no

han sido suficientemente diferenciados como objetos distintos. En T3, calcula correctamente los tres parámetros con interpretaciones parciales, el período recibe interpretación física completa, la amplitud se interpreta en su dimensión geométrica, y la línea media no alcanza el significado de altura del eje de la noria, y en la cuarta pregunta muestra su comprensión interpretativa más sólida del instrumento al reconocer que el dominio es una decisión condicionada por la operación del parque. En la T4, produce la derivación más rigurosa del grupo para los ceros, pero sin asignarles el significado de instantes de retorno al equilibrio.

El conflicto semiótico más persistente de Celin es la solidez algorítmica sin conversión al registro contextual, el modelo opera como objeto formal pero no como descripción del fenómeno. No emerge en tareas específicas, sino que atraviesa las cuatro tareas como rasgo estructural del perfil. Desde la perspectiva del CDM, esto señala una limitación específica en la faceta epistémica del conocimiento profesional: Celin puede enseñar los procedimientos de la trigonometría, pero podría encontrar dificultades para facilitar en sus estudiantes la construcción de los significados físicos que los estándares curriculares demandan.

Desde el EOS, Celín moviliza una configuración personal cercana a la institucional en términos procedimentales, ya que activa gran parte de los objetos y procesos requeridos para articular y construir los modelos. Sin embargo, las funciones que vinculan dichos objetos con los fenómenos modelados presentan mayor limitación, ya no como registro algebraico, sino como representación de un fenómeno físico. Esta tensión entre la formalización e interpretación constituye un rasgo característico del perfil.

Camilo

Presenta una asimetría marcada dentro de los datos del grupo entre su comprensión algorítmica e interpretativa. En T1 calcula correctamente los parámetros del modelo con proceso

explícito en el papel y produce un dibujo matemáticamente correcto, pero sin que ningún objeto matemático reciba alguna interpretación física ni se vincule con las condiciones del fenómeno. En las preguntas de análisis y modificación de parámetros abandona los procedimientos algebraicos y recorre al registro verbal sin soporte matemático, evidenciando que tiene la noción de más frecuencia implica ciclos más cortos. Este patrón se produce nuevamente en T3 donde calcula los parámetros con conflictos poco más significativos, confunde la amplitud y línea media al asignarles a ambas el radio de la noria y presentando confusiones también al reportar el período.

Los conflictos en T3 contrastan con el desempeño de T1, lo que revela que la consolidación paramétrica depende del contexto que se plantea. En la T2 introduce una notación con el factor f en las coordenadas del punto P , evidenciando que no distingue la definición del seno y coseno en la circunferencia unitaria. En las preguntas de análisis se nota la confusión entre el valor cero y el extremo de la otra función. A lo largo del instrumento la justificación verbal es escasa y el modelo construido no se moviliza como herramienta para analizar y describir, sino como un resultado. Desde la perspectiva del EOS, Camilo moviliza configuraciones personales donde predominan los procedimientos y expresiones algebraicas, pero estas no se terminan de integrar plenamente con los argumentos y significado que conforman la configuración epistémica de referencia.

Andrey

Presenta el perfil con mayor fragmentación dentro del instrumento. En T1, calcula correctamente la frecuencia angular en el papel, pero ingresa un resultado incorrecto en GeoGebra sin detectar la contradicción en el ajuste del seno realizado por el software. Aquí la herramienta produce un resultado que oculta una contradicción en los procedimientos realizados, privando al

participante la oportunidad de detectarlo dentro del fenómeno y corregir el error. En la pregunta identifica el $t=4$ como instante de mayor velocidad hablando de la derivada, aunque en la descripción de los mínimos es imprecisa y se limita al tramo de llenado, no analiza el periodo completo.

En T2 produce una asignación correcta, comporta con Camilo la generalización incorrecta de la covariación y la confusión entre el valor cero y los extremos de la otra función. En T3 calcula correctamente los tres parámetros con interpretaciones parciales, la mitad del tiempo la cabina está arriba de esa altura, lo que revela que el parámetro de línea media no ha sido vinculado al significado de altura del eje de la noria sobre el suelo.

El conflicto más relevante en las producciones de Andrey es la fragmentación entre los registros, el cálculo de la frecuencia no fue vinculado con su registro grafico al ser ingresado de forma incorrecta en GeoGebra, esta fragmentación podría tener implicaciones directas para la práctica futura docente, donde no se verifica la coherencia entre las producciones, abandonando el uso del software como herramienta de validación y verificación. Desde el EOS, Andrey activa diversos objetos de la configuración epistémica de referencia, pero permanecen aislados y con escasas conexiones entre sí, lo cual no permite una comprensión articulada dentro de la práctica matemática que integra múltiples representaciones del mismo objeto.

8.2 Patrones transversales del grupo

El análisis de las producciones en conjuntos de los seis futuros profesores de matemáticas permitió identificar regularidades que podrían trascender las particularidades de cada perfil individuales. Aunque las trayectorias personales fueron diferentes y variantes entre sí,

emergieron patrones comunes respecto a la manera en que los participantes movilizaron los significados asociados a las funciones seno y coseno en contextos de modelación periódica.

El hallazgo transversal más relevante es que ningún participante activó de forma individual la totalidad de los objetos y procesos que conforman la configuración epistémica construida en el análisis a priori. Sin embargo, la suma de las producciones se aproxima a esta configuración. Los distintos componentes emergieron distribuidos entre los participantes en alguna de las tareas, por ejemplo, en T1 ninguno activó la identidad pitagórica como argumento que describe la variación de las funciones seno y coseno. Algunos de los FPM se destacaron por la manipulación de modelos algebraicos, otros por la interpretación que emergió en sus respuestas y otros por el uso de herramienta de verificación. Esto sugiere que los significados personales no constituyen sistemas integrados y completos.

Otro aspecto transversal es la existencia de una asimetría entre la construcción de modelos y su uso como herramienta para analizar los fenómenos físicos para los que se construyeron. En la mayoría de las tareas, los FPM lograban producir expresiones algebraicas adecuados o cercanas, pero no movilizaron esos mismos modelos para analizar, justificar, describir o interpretar el comportamiento de los fenómenos representados. Así, el modelo aparece como producto de las tareas en la actividad matemática, no como una herramienta para argumentar. Fue notorio en algunas de las tareas incluso de quienes mostraron mayor solidez conceptual, y también en al menos una de quienes mostraron mayores fortalezas interpretativas. No fue una comprensión consistente en todo el instrumento.

Igualmente, se identificó la ausencia de procesos explícitos de verificación y restricción. Los modelos construido rara vez fueron contrastados de forma explícita con las condiciones iniciales del fenómeno, o con las representaciones disponibles en GeoGebra. Incluso en tareas

donde la gráfica o software disponibles le podían servir como mecanismos de validación. La verificación no apareció como una práctica dentro de la modelación matemática, sino como una acción generalmente implícita.

Otra de las regularidades está vinculada con la dificultad de coordinar entre los registros matemáticos con el significado físico de los fenómenos. Traducir las condiciones físicas a restricciones algebraicas, justificar el origen de un parámetro desde el fenómeno que fueron exigidas y generaron mayores dificultades. Esta situación fue evidente en la interpretación de parámetros como fase inicial, amplitud y línea media, que frecuentemente fueron tratados como valores sin explicitar su significado físico.

En consecuencia, la interpretación física emerge como una de las principales fronteras de comprensión que se identifican en el estudio. Aunque varios participantes lograron construir modelos correctos y operarlos adecuadamente, las justificaciones y argumentaciones que conectaban dichos modelos con los fenómenos modelados fueron escasas o incompletas. Se debe observar que esta dificultad se manifestó de forma variable dentro de los perfiles, pero en todo caso se evidencia una fragmentación entre los distintos objetos y procesos que conforman el significado institucional de las funciones seno y coseno en contextos de modelación de fenómenos físicos.

Finalmente, los resultados evidencian que la argumentación constituye el objeto primario menos consolidado dentro de los significados personales de los participantes. Las respuestas suelen centrarse en resultados, procedimientos o descripciones, pero es raro que desarrollen justificaciones que articulen explícitamente las relaciones entre los objetos matemáticos involucrados y las características del fenómeno representado. Este resultado permite explicar por qué participantes capaces de construir modelos adecuados no necesariamente lograron defender

sus elecciones matemáticas, mientras que otros, aun comprendiendo el fenómeno encontraban dificultades para formalizar estos razonamientos. Desde el EOS, esta fragmentación evidencia que la proximidad al significado institucional no depende únicamente de la activación de objetos aislados sino la capacidad de establecer funciones que articulen los argumentos, procedimientos, conceptos, lenguajes, proposiciones en determinada actividad matemática dentro de una práctica matemática especializada.

8.3 Respuesta a la pregunta de investigación

Los hallazgos del estudio permiten responder la pregunta de investigación de manera articulada en torno a tres ejes: los tipos de comprensión movilizados, los conflictos semióticos identificados y las configuraciones parciales que caracterizan al grupo.

Sobre los conocimientos algorítmicos. Los FPM manifiestan un dominio procedimental funcional en la construcción de modelos sinusoidales: identifican el período, calculan la frecuencia angular, estiman la amplitud y la línea media, y ensamblan correctamente la expresión algebraica de la forma $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + D$ a partir de las condiciones del fenómeno. Este conocimiento es el más homogéneo del grupo y el más estable entre tareas. Sin embargo, su alcance es limitado: los participantes ejecutan procedimientos sin verificar que el modelo satisfaga todas las condiciones físicas del problema, y varios conflictos paramétricos — confusión entre amplitud y línea media, entre período y frecuencia angular— emergen de forma específica según el contexto geométrico de cada situación, lo que revela que estos objetos matemáticos no están completamente consolidados como proposiciones operativas estables.

Sobre los conocimientos representativos. Los FPM manifiestan un dominio preferentemente unirregistrar: operan con mayor fluidez dentro del registro algebraico-simbólico y emplean GeoGebra principalmente como herramienta de visualización, no como mediador semiótico entre registros. Los procesos de conversión —especialmente la traducción del registro contextual-físico al algebraico y en sentido inverso— son los que generan mayor dificultad en el grupo. La coordinación plena entre los cuatro registros relevantes (algebraico, gráfico, numérico-tabular y contextual-verbal) no se observa en ningún participante de forma consistente a lo largo del instrumento, lo que constituye la dimensión más débil y homogéneamente distribuida del grupo.

Sobre los conocimientos interpretativos. Los FPM manifiestan comprensión interpretativa de manera fragmentada, variable entre participantes y entre tareas. Reconocen verbalmente el significado físico de algunos parámetros —el período como duración de un ciclo, la amplitud como desplazamiento máximo— pero encuentran dificultades para traducir ese reconocimiento en argumentos matemáticamente formulados o para leer el modelo construido como descripción comprometida con el fenómeno. En las tareas de mayor complejidad estructural, como el movimiento subamortiguado, la interpretación de la envolvente exponencial como representación del decaimiento energético o de los ceros de la función como instantes de retorno al equilibrio está prácticamente ausente en las producciones del grupo.

Sobre los conflictos semióticos. Los FPM manifiestan conflictos semióticos recurrentes que señalan tensiones específicas entre sus significados personales y el significado institucional de referencia: la confusión posición-velocidad al analizar la razón de cambio, la generalización incorrecta de la covariación seno-coseno al primer cuadrante, la ausencia sistemática de

verificación del modelo y el uso no crítico del software dinámico como sustituto del razonamiento analítico.

En síntesis, los FPM de la UIS manifiestan un conocimiento sobre las funciones seno y coseno en aplicaciones del mundo real que es algorítmicamente funcional pero interpretativamente parcial. Dominan la construcción procedimental del modelo sinusoidal, pero no han consolidado la práctica de usarlo como herramienta de análisis, predicción y validación del fenómeno que describe. Esta asimetría entre el modelo como objeto construido y el modelo como instrumento de razonamiento físico constituye la limitación más relevante del perfil del grupo y el desafío formativo más directo que la Licenciatura en Matemáticas de la UIS deberá atender si pretende que sus egresados cumplan con lo que los Estándares Básicos de Competencias del MEN (2006) exigen: que sus futuros estudiantes sean capaces de *describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas*.

8.4 Alcances del estudio

Los alcances se proyectan en tres planos articulados: el plano teórico-metodológico, el plano de la formación inicial docente y el plano curricular-institucional.

En el plano teórico-metodológico, el estudio aporta evidencia empírica sobre la pertinencia y complementariedad del EOS, el CDM y la teoría de registros de representación semiótica de Duval para analizar de forma integrada los significados personales de futuros profesores de matemáticas sobre las funciones trigonométricas en contextos de modelación. La articulación de estos tres marcos no es meramente declarativa en esta investigación: se operacionaliza a través de categorías analíticas concretas —los seis objetos primarios del EOS,

las dimensiones epistémica y cognitiva del CDM, y los tipos de tratamiento y conversión entre registros— que permiten describir con precisión tanto lo que los FPM saben como lo que les resulta difícil articular. Esta operacionalización constituye en sí misma un aporte metodológico que puede ser retomado y refinado en investigaciones similares sobre otros objetos matemáticos en la formación inicial docente.

Asimismo, el instrumento diseñado —un libro interactivo de GeoGebra con tareas abiertas contextualizadas en fenómenos físicos periódicos— demuestra su potencia diagnóstica al revelar perfiles de comprensión diferenciados que un cuestionario procedimental convencional no habría podido capturar. La combinación del entorno dinámico con el formato de lápiz y papel resultó especialmente productiva para hacer visibles las conversiones entre registros y los conflictos semióticos que en un formato exclusivamente algebraico permanecerían ocultos. Este diseño puede ser adaptado para el estudio de otros objetos matemáticos cuya comprensión exija la coordinación entre múltiples sistemas de representación.

En el plano de la formación inicial docente, el alcance más inmediato del estudio es la generación de un diagnóstico fundamentado y localizado sobre el estado de comprensión de los FPM de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS respecto a las funciones seno y coseno. Este diagnóstico no describe deficiencias abstractas, sino configuraciones personales específicas con fortalezas y vacíos identificados: sabe qué tipo de comprensión predomina en el grupo, qué conflictos semióticos son sistemáticos, qué registros de representación son más accesibles y cuáles presentan mayor dificultad de coordinación. Esta especificidad convierte los hallazgos en insumo directamente utilizable para el diseño de situaciones de aprendizaje que atiendan las necesidades concretas del grupo.

Un alcance adicional en este plano es la identificación del patrón de complementariedad entre perfiles como recurso pedagógico. El hecho de que distintos participantes hayan desarrollado dimensiones distintas del mismo objeto matemático —algorítmica, representativa e interpretativa— abre la posibilidad concreta de diseñar situaciones de aprendizaje colaborativo en las que esas complementariedades se vuelvan productivas. Este hallazgo tiene valor formativo directo: sugiere que el problema no es solo de conocimiento individual sino de condiciones pedagógicas que permitan la integración y negociación de significados entre los participantes.

En el plano curricular-institucional, el estudio ofrece argumentos empíricos para sostener dos discusiones que el campo de la formación docente en matemáticas ha planteado en términos generales, pero que aquí adquieren respaldo localizado. La primera es la necesidad de incorporar en el plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS un espacio académico específico para la didáctica de la trigonometría, que no replique el tratamiento procedimental del objeto, sino que problematice su enseñanza desde los obstáculos identificados en los propios egresados. La segunda es la pertinencia de repensar el lugar de los modelos compuestos —como el movimiento subamortiguado— en la secuencia curricular, dado que la no respuesta de tres participantes ante esa tarea no es un dato aislado sino un indicador sobre el umbral de competencia que la formación inicial actualmente alcanza.

Finalmente, y en un plano más amplio, los resultados de esta investigación contribuyen a la discusión latinoamericana sobre la formación docente en trigonometría. La convergencia entre los hallazgos de este estudio y los de Uribe y Retamal (2021) en el contexto chileno —ambos identificando la comprensión algorítmica como la más activada, la representativa como la más débil y la interpretativa como la más variable— sugiere que las dificultades observadas no son exclusivas del contexto de la UIS, sino que podrían tener un carácter estructural asociado a la

manera en que la trigonometría se aborda en la formación inicial de docentes en la región. Confirmar o matizar esta hipótesis requeriría estudios comparativos en otros contextos institucionales, lo que constituye una de las líneas de investigación futura que este trabajo abre.

Referencias bibliográficas

- Anda López, G. (2009). Propuesta para el aprendizaje significativo de las funciones trigonométricas para el Bachillerato del Colegio Ciencias y Humanidades [Tesis]. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
<https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Barrantes, M., & Blanco, L. J. (2006). A study of prospective primary teachers' conceptions of teaching and learning school geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), 27–60. <https://doi.org/10.1007/s10857-006-9002-8>
- Brendefur, J. L., Thiede, K., Strother, S., & Carney, M. (2021). Investigating the transformation of a secondary teacher's knowledge of trigonometric functions. *Teaching and Teacher Education*, 105, 103429. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2021.103429>
- Brijlall, D., & Maharaj, A. (2014). Manifesting of pedagogical content knowledge on trigonometry in teachers' practice. *International Journal of Educational Sciences*, 6(3), 541–550.
- Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37–65.

- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103–131.
<https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Fernández, S., & Figueiras, L. (2010). El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 291–301). SEIEM.
- Fiallo Leal, J. E. (2011). Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica [Tesis doctoral]. Universitat de València.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13–31.
- Godino, J. D. (2024). Enfoque ontosemiótico en educación matemática: Fundamentos, herramientas y aplicaciones. Editorial Aula Magna / McGraw-Hill Interamericana.
<https://doi.org/10.36435/9788410458567>
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 39(1-2), 127–135.
<https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90–113.
<https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>

- Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A., & Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 91–110.
- Gutiérrez, Á. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. *Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*, 7–10.
- Gutiérrez, J. (2019). La historia y la epistemología en la formación de un ciudadano matemáticamente competente: Un acercamiento desde el estudio de la trigonometría [Tesis de maestría]. Universidad Industrial de Santander.
- Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 151–161.
<https://doi.org/10.1023/A:1012793121648>
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. MEN. ISBN: 978-958-691-290-7.
- Montiel, G. (2005). Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica [Tesis doctoral]. Instituto Politécnico Nacional.
- Olguín, G. (2016). Una propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones seno y coseno [Tesis de Magíster]. Universidad de Los Lagos.
- Pino-Fan y Parra-Urrea (2018)
- Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87–109.

- Rodríguez, J. (2016). Coordinación de registros semióticos en el estudio de las funciones seno y coseno [Trabajo de grado]. Universidad del Valle.
- Sánchez Vásquez, H. J. (2014). Las funciones trigonométricas seno y coseno a partir de sus aplicaciones [Tesis de maestría]. Universidad Nacional de Colombia.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Uribe, M., & Retamal, P. (2021). Tipos de conocimientos desplegados por futuros profesores de matemática al resolver problemas sobre funciones trigonométricas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35(71), 1478–1505. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a19>

Apéndice

Configuración de las funciones trigonométricas seno y coseno en tareas de modelación en fenómenos físicos periódicos. Enlace: <https://canva.link/o2est460xy6a97s>