

VARIANTES DEL TEOREMA DE KURATOWSKI DE LOS 14 CONJUNTOS

JACK FREDDY ANDRES SOLANO GELVEZ

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2026

VARIANTES DEL TEOREMA DE KURATOWSKI DE LOS 14 CONJUNTOS

JACK FREDDY ANDRES SOLANO GELVEZ

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director
Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin
Doctor en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2026

DEDICATORIA

Es para mí un profundo honor dedicar este trabajo a ustedes. Abuelita, porque sin tus incesantes muestras de apoyo a lo largo de mis estudios, no habría estado en capacidad de entregarme plenamente a mi mayor pasión: el estudio de las matemáticas. Siempre llevaré conmigo cada una de las muestras de afecto, cariño y comprensión que me brindaste durante todos estos años, así como la confianza y el aliento que me ofreciste en cada etapa de este camino. Madre, por enseñarme, con tu ejemplo, la disciplina, la perseverancia y la fortaleza necesarias para no desfallecer ante las dificultades. Tu dedicación constante, tu capacidad de sacrificio y tu confianza en mis capacidades han sido una fuente permanente de inspiración, alentándome a continuar incluso en los momentos de mayor incertidumbre. Padre, porque ha sido vuestra generosidad la que me ha permitido liberarme de otras preocupaciones, consagrar largos años a la contemplación y al estudio fructífero, y finalmente brindarme la oportunidad de plasmar en este volumen algunos de los resultados de mis investigaciones.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente a mi abuelita, a mis padres y a mi director de trabajo de grado, por su apoyo constante, su confianza y su acompañamiento durante todo este proceso académico. Extiendo también mi gratitud a los profesores que contribuyeron a mi formación, por sus enseñanzas y orientación.

Finalmente, agradezco a todas las personas que, de una u otra forma, aportaron a mi desarrollo académico y personal, ayudándome a consolidar la formación del matemático que aspiro a ser para la comunidad.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	7
1 PRELIMINARES	9
1.1 Operadores unarios y binarios	9
1.2 Conjuntos ordenados	11
1.3 Estructuras abstractas	12
2 EL TEOREMA DE LOS 14 CONJUNTOS Y SUS VARIANTES	16
2.1 El teorema original	16
2.2 Monoides de Kuratowski	19
2.2.1 El monoide $\langle k, c \rangle$ y sus sub-monoides $\langle k, i \rangle, c\langle k, i \rangle$	19
2.2.2 Otros monoides de interés	23
2.3 Semirretículos y retículos de operadores	24
2.3.1 Los semirretículos $\langle k, i, \vee \rangle$ y $\langle k, i, \wedge \rangle$	24
2.3.2 El retículo $\langle k, i, \wedge, \vee \rangle$	27
2.3.3 El semirretículo $\langle k, c, \wedge \rangle$	29
2.4 Variantes con $n \geq 2$ conjuntos iniciales	31
3 CONCLUSIONES	33
BIBLIOGRAFÍA	34
APÉNDICES	35

LISTA DE APÉNDICES

Apéndice A. Conjuntos testigo	41
Apéndice B. Familias testigo	52
Apéndice C. Ejemplos de espacios Hausdorff	65

RESUMEN

TÍTULO: VARIANTES DEL TEOREMA DE KURATOWSKI DE LOS 14 CONJUNTOS*

AUTOR: JACK FREDDY ANDRÉS SOLANO GELVEZ**

PALABRAS CLAVE: TEOREMA DE KURATOWSKI DE LOS 14 CONJUNTOS, CLAUSURA TOPOLÓGICA, COMPLEMENTO, MONOIDES, SEMIRRETÍCULOS, RETÍCULOS.

DESCRIPCIÓN:

El Teorema de los 14 conjuntos de Kuratowski establece la cota máxima de conjuntos que se pueden obtener aplicando iterativamente clausura topológica y complemento sobre un único conjunto inicial. Estudiaremos diversas variantes del Teorema desde la perspectiva algebraica, tales variantes se obtienen al agregar y/o quitar operaciones sobre los conjuntos tales como: interior topológico, unión e intersección, con las previamente usadas, además de permitir más de un conjunto inicial. La perspectiva algebraica permite enfocarse únicamente en los axiomas mínimos de cada operación independientemente del conjunto espacio X o de su topología.

Se introducen los números de Sherman $s(L)$ y $s_n(L)$, los cuales miden el número máximo de conjuntos distintos que pueden generarse a partir de uno o varios subconjuntos iniciales. Asimismo, se presentan resultados clásicos y recientes de la literatura, y se construyen explícitamente conjuntos testigo que alcanzan las cotas máximas correspondientes en diversas estructuras algebraicas.

Finalmente, se estudian ejemplos en espacios topológicos concretos, con especial énfasis en \mathbb{R} dotado de la topología usual, donde se obtienen configuraciones que alcanzan la máxima complejidad combinatoria permitida por ciertos semirretículos considerados.

* Trabajo de grado.

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: VARIANTS OF KURATOWSKI'S 14-SET THEOREM*

AUTHOR: JACK FREDDY ANDRÉS SOLANO GELVEZ**

KEYWORDS: KURATOWSKI'S 14-SET THEOREM, TOPOLOGICAL CLOSURE, COMPLEMENT, MONOIDS, SEMILATTICES, LATTICES.

ABSTRACT:

Kuratowski's 14-set theorem establishes the maximum number of distinct sets that can be obtained by iteratively applying the operations of topological closure and complement to a single initial set. In this work, we study several variants of the theorem from an algebraic perspective. These variants are obtained by adding and/or removing operations such as topological interior, union, and intersection, together with the classical operations, and by allowing more than one initial set. The algebraic approach makes it possible to focus solely on the minimal axioms satisfied by each operation, independently of the underlying set X and its topology.

We introduce the Sherman numbers $s(L)$ and $s_n(L)$, which measure the maximum number of distinct sets that can be generated from one or several initial subsets. We also present classical and recent results from the literature and explicitly construct witness sets that attain the corresponding maximal bounds in several algebraic structures.

Finally, we study examples in concrete topological spaces, with particular emphasis on \mathbb{R} endowed with its usual topology, where configurations attaining the maximum combinatorial complexity allowed by certain semilattices are obtained.

* Bachelor's thesis.

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Advisor: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Ph.D. in Mathematics.

INTRODUCCIÓN

En la década de 1920, Kuratowski¹ demostró que, dado un espacio topológico X y un subconjunto $A \subseteq X$, al aplicar repetidamente los operadores de cerradura (k) y complemento (c) se obtienen a lo sumo 14 conjuntos distintos. Este resultado, conocido como el **teorema de los 14 conjuntos**, fue posteriormente reformulado en términos algebraicos por McKinsey y Tarski². Exposiciones modernas pueden encontrarse en Gardner³, mientras que diversas variantes han sido estudiadas por Yu⁴ y, de manera sistemática, por Sherman⁵. En esta monografía seguiremos explícitamente el enfoque desarrollado en⁶.

Para ello fijamos X un conjunto tal que $|X| \geq |\mathbb{R}|$ y consideremos $\text{End}(\mathcal{P}(X))$, dotado de la composición y del orden puntual inducido por la inclusión. Fijado un conjunto de operadores $\mathcal{O} \subseteq \text{End}(\mathcal{P}(X))$ (en particular, $\mathcal{O} \subseteq \{I, k, c, i\}$, con $i = ckc$), denotamos por $\langle \mathcal{O} \rangle$ el monoide generado por \mathcal{O} , es decir, su cerradura bajo composición. Sobre $\text{End}(\mathcal{P}(X))$ consideramos además las operaciones binarias \wedge y \vee , definidas puntualmente a partir de la intersección y la unión en $\mathcal{P}(X)$. A partir de estas operaciones, los semirretículos $\langle \mathcal{O}, \wedge \rangle$ y $\langle \mathcal{O}, \vee \rangle$, así como el retículo $\langle \mathcal{O}, \wedge, \vee \rangle$, se obtienen como las cerraduras del monoide $\langle \mathcal{O} \rangle$ bajo \wedge , \vee o ambas operaciones, respectivamente.

Este marco permite estudiar de manera unificada diversas variantes del problema de Kuratowski, ya sea modificando el conjunto de operadores generadores, enriqueciendo la estructura algebraica o considerando múltiples conjuntos iniciales. Para cada una de estas estructuras L , se define el **número de Sherman** $s(L)$ como el máximo número de conjuntos distintos que pueden obtenerse a partir de un único subconjunto inicial,

¹Kazimierz Kuratowski. Sur l'opération \bar{A} de l'analysis situs. En: *Fundamenta Mathematicae* 3 (1922), págs. 182-199. URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/8fece9ba8b020221d48504ace6548a51164fdbd2>.

²J. C. C. McKinsey y Alfred Tarski. The algebra of topology. En: *Annals of Mathematics* 45.2 (1944), págs. 141-191. URL: <https://www.jstor.org/stable/1969080>.

³B. J. Gardner y M. Jackson. The Kuratowski closure-complement theorem. En: *New Zealand Journal of Mathematics* 38 (2008), págs. 9-38. URL: https://figshare.utas.edu.au/articles/journal_contribution/The_Kuratowski_Closure-Complement_Theorem/22870025.

⁴yu1978.

⁵D. Sherman. Variations on Kuratowski's 14-set theorem. En: *The American Mathematical Monthly* 117.2 (2010), págs. 113-123. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0405401>.

⁶Sherman, ver n. 5.

variando la topología. De manera análoga, $s_n(L)$ denota la extensión al caso de $n \geq 2$ conjuntos iniciales.

La Tabla 0.1 resume los valores conocidos de estos invariantes, combinando la información de⁷ en un formato unificado. La primera columna corresponde al caso de monoides (sin operaciones binarias), mientras que las columnas $\{\wedge\}$, $\{\vee\}$ y $\{\wedge, \vee\}$ corresponden a semirretículos de ínfimos, de supremos y retículos, respectivamente. Las filas indican el conjunto de operadores generadores. Se observa que algunos casos que son finitos para $n = 1$ se vuelven infinitos al considerar $n \geq 2$, mientras que en otros casos el crecimiento depende explícitamente de n .

Operadores	Estructura algebraica			
	$\{I\}$	$\{\wedge\}$	$\{\vee\}$	$\{\wedge, \vee\}$
$\{I\}$	1 (n)	1 ($2^n - 1$)	1 ($2^n - 1$)	1 (D_n)
$\{i\}$	2 ($2n$)	2 ($3^n - 1$)	2 (∞)	2 (∞)
$\{k\}$	2 ($2n$)	2 (∞)	2 ($3^n - 1$)	2 (∞)
$\{c\}$	2 ($2n$)	4 (2^{2^n})	4 (2^{2^n})	4 (2^{2^n})
$\{i, k\}$	7 ($7n$)	13 (∞)	13 (∞)	35 (∞)
$\{i, c\} = \{k, c\} = \{i, k, c\}$	14 ($14n$)	∞ (∞)	∞ (∞)	∞ (∞)

Tabla 0.1: Número de Sherman para cada estructura. Para $n = 1$ se muestra $s(L)$; entre paréntesis, la cota superior para $s_n(L)$ cuando $n \geq 2$. D_n denota el número de elementos del retículo libre de orden n (véase⁹).

Un artículo relevante en esta temática es el de Yu¹⁰, publicado en *The American Mathematical Monthly* en 1978, donde se construye un conjunto T que alcanza el número de Sherman para el semirretículo $\langle k, i, \vee \rangle$. Posteriormente, Sherman¹¹ y Gardner y Jackson¹² presentan ejemplos para estructuras con número de Sherman finito.

Por su parte, Shum¹³ construye un conjunto que distingue todos los operadores en ciertos monoides infinitos. En un contexto más general, McKinsey y Tarski¹⁴ ya habían demostrado que en espacios métricos densos en sí mismos existen conjuntos con propiedades de este tipo. En el Apéndice 3 presentamos algunas construcciones inspiradas en estos trabajos.

⁷Sherman, ver n. 5.

¹⁰Yu1978.

¹¹Sherman, ver n. 5.

¹²Gardner y Jackson, ver n. 3.

¹³K. P. Shum. A note on Kuratowski's theorem and its related topics. En: *Advances in Pure Mathematics* 7.8 (2017), págs. 381-404. URL: <https://doi.org/10.4236/apm.2017.78025>.

¹⁴McKinsey y Tarski, ver n. 2.

1. PRELIMINARES

En este capítulo se establecen las definiciones básicas y la notación que se utilizarán de manera consistente a lo largo de toda la monografía. Puesto que el trabajo se sitúa en la intersección de la topología y el álgebra universal, resulta indispensable fijar con precisión el significado de los términos y símbolos que aparecerán frecuentemente.

1.1. Operadores unarios y binarios

Definición 1.1. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P}(X)$ su conjunto potencia. Un **endomorfismo** sobre $\mathcal{P}(X)$ es una función $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Denotamos por $\text{End}(\mathcal{P}(X))$ el conjunto de todos los endomorfismos sobre $\mathcal{P}(X)$.

Definición 1.2. Sean $\varphi, \psi \in \text{End}(\mathcal{P}(X))$. Decimos que φ y ψ son **idénticamente iguales**, y lo denotamos como $\varphi = \psi$, si para todo $A \subseteq X$ se cumple que

$$\varphi(A) = \psi(A).$$

En caso contrario, decimos que φ y ψ son **distintos**, y lo denotamos como $\varphi \neq \psi$, lo que significa que existe al menos un conjunto $A \subseteq X$ tal que $\varphi(A) \neq \psi(A)$.

Definición 1.3. Un endomorfismo sobre $\mathcal{P}(X)$ es un **operador de clausura** k , si cumple con las siguientes propiedades:

1. $k(\emptyset) = \emptyset$ (preserva el vacío),
2. $k(k(A)) = k(A)$ para todo $A \subseteq X$ (idempotencia),
3. $A \subseteq k(A)$ para todo $A \subseteq X$ (extensividad),
4. $k(A \cup B) = k(A) \cup k(B)$ para todo $A, B \subseteq X$ (preserva uniones finitas).

Definición 1.4. El **operador complemento** es el endomorfismo c definido por $c(A) = X \setminus A$ para todo $A \subseteq X$.

Definición 1.5 (Interior). El **operador interior** i asociado a un operador de clausura k se define como $i = c \circ k \circ c$, donde c es el operador complemento.

A continuación se enuncian una serie de lemas elementales cuyas demostraciones se omiten, por cuanto se siguen de manera inmediata a partir de las definiciones correspondientes. En lo que sigue, X denotará un conjunto no vacío y $A, B \subseteq X$ subconjuntos arbitrarios del mismo.

Lema 1.6. Sea k un operador de clausura. Entonces la familia

$$\mathcal{C} = \{F \subseteq X : k(F) = F\}$$

es la familia de cerrados de una topología sobre X .

Lema 1.7. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Defínase $k : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ por

$$k(A) = \bigcap \{F \subseteq X : F \text{ es cerrado en } \mathcal{T} \text{ y } A \subseteq F\}.$$

Entonces k satisface la Definición 1.3 y es el operador de clausura asociado a la topología.

Lema 1.8 (Antimonotonía de c). Si $A \subseteq B$, entonces $c(B) \subseteq c(A)$.

Lema 1.9 (Involución de c). El operador c cumple $c(c(Y)) = Y$ para todo $Y \subseteq X$.

Lema 1.10 (Monotonía de k). Si $A \subseteq B$, entonces $k(A) \subseteq k(B)$.

Lema 1.11 (Idempotencia de i). Para todo $A \subseteq X$, se tiene $i(i(A)) = i(A)$.

Lema 1.12 (Monotonía de i). Si $A \subseteq B$, entonces $i(A) \subseteq i(B)$.

Lema 1.13 (Intensividad de i). Para todo $Y \subseteq X$, se cumple que $i(Y) \subseteq Y$.

Lema 1.14 (Preservación de intersecciones de i). Para todo $Y, Z \subseteq X$,

$$i(Y \cap Z) = i(Y) \cap i(Z).$$

Lema 1.15 (Imagen del vacío bajo i). El operador interior i satisface $i(\emptyset) = \emptyset$.

Una de las variantes del teorema de los 14 conjuntos de Kuratowski incorpora la unión y la intersección como operadores binarios. Esta inclusión no es trivial: transforma el problema clásico (basado en un operador unario) en uno de carácter algebraico más rico, gobernado por una estructura de monoide con dos operaciones asociativas adicionales. Precisamente por ello, resulta indispensable fijar desde los preliminares la notación y las propiedades básicas de estas operaciones binarias, así como su interacción con el orden parcial de inclusión, para evitar ambigüedades en las manipulaciones posteriores.

Definición 1.16 (Operador binario). Un **operador binario** sobre un conjunto A es una función $\star : A \times A \rightarrow A$. Si $a, b \in A$, escribimos $a \star b$ en lugar de $\star(a, b)$.

Definición 1.17. Sean $\phi, \psi \in \text{End}(\mathcal{P}(X))$. Definimos las operaciones binarias \wedge (ínfimo) y \vee (supremo) puntualmente: para todo $A \subseteq X$,

$$(\phi \wedge \psi)(A) := \phi(A) \cap \psi(A), \quad (\phi \vee \psi)(A) := \phi(A) \cup \psi(A).$$

De esta forma, $\wedge, \vee : \text{End}(\mathcal{P}(X)) \times \text{End}(\mathcal{P}(X)) \rightarrow \text{End}(\mathcal{P}(X))$ son operaciones binarias sobre $\text{End}(\mathcal{P}(X))$.

Definición 1.18. Definimos los siguientes operadores constantes en $\text{End}(\mathcal{P}(X))$:

- $\mathbf{v} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dado por $\mathbf{v}(A) = \emptyset$ para todo $A \subseteq X$,
- $\mathbf{T} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dado por $\mathbf{T}(A) = X$ para todo $A \subseteq X$.

Lema 1.19. Los operadores binarios \wedge y \vee definidos sobre $\text{End}(\mathcal{P}(X))$ cumplen, para todo $\phi, \psi, \theta \in \text{End}(\mathcal{P}(X))$, las siguientes propiedades heredadas de \cap y \cup en $\mathcal{P}(X)$ ¹:

- **Conmutatividad:** $\phi \wedge \psi = \psi \wedge \phi$, $\phi \vee \psi = \psi \vee \phi$.
- **Asociatividad:** $\phi \wedge (\psi \wedge \theta) = (\phi \wedge \psi) \wedge \theta$, $\phi \vee (\psi \vee \theta) = (\phi \vee \psi) \vee \theta$.
- **Idempotencia:** $\phi \wedge \phi = \phi$, $\phi \vee \phi = \phi$.
- **Absorción:** $\phi \wedge (\phi \vee \psi) = \phi$, $\phi \vee (\phi \wedge \psi) = \phi$.
- **Distributividad:** $\phi \wedge (\psi \vee \theta) = (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \theta)$, $\phi \vee (\psi \wedge \theta) = (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \theta)$.

Con los operadores constantes \mathbf{v} y \mathbf{T} de la Definición 1.18, se satisfacen las **leyes de identidad**:

$$\phi \wedge \mathbf{T} = \phi, \quad \phi \vee \mathbf{v} = \phi, \quad \phi \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v}, \quad \phi \vee \mathbf{T} = \mathbf{T}.$$

1.2. Conjuntos ordenados

En esta sección, establecemos las nociones básicas de orden en los conjuntos. Particularmente, como ordenar los endomorfismos, lo que es importante para el estudio abstracto de las variantes del Teorema de Kuratowski

Definición 1.20. Sea P un conjunto. Una **relación de orden parcial** sobre P es una relación \preceq que satisface:

- **Reflexividad:** $x \preceq x$ para todo $x \in P$,
- **Anti-simetría:** si $x \preceq y$ e $y \preceq x$ entonces $x = y$,
- **Transitividad:** si $x \preceq y$ e $y \preceq z$ entonces $x \preceq z$.

Definición 1.21. Un **conjunto parcialmente ordenado** (poset) es un par (P, \preceq) donde P es un conjunto y \preceq es una relación de orden parcial sobre P .

¹uzcategui2024.

Para trabajar adecuadamente con las intersecciones y/o uniones entre los operadores previamente definidos (y otros que se puedan construir), es necesario ordenar el universo $\text{End}(\mathcal{P}(X))$ sobre el que trabajaremos.

Definición 1.22. En $\text{End}(\mathcal{P}(X))$ se introduce el **orden puntual** dado por la inclusión en $\mathcal{P}(X)$: para $\phi, \psi \in \text{End}(\mathcal{P}(X))$,

$$\phi \leq \psi \iff \phi(A) \subseteq \psi(A) \text{ para todo } A \subseteq X.$$

Ello confiere a $\text{End}(\mathcal{P}(X))$ la estructura de conjunto parcialmente ordenado.

Sea $\mathcal{O} \subseteq \text{End}(\mathcal{P}(X))$ un subconjunto, al que llamaremos **conjunto de operadores**; habitualmente k, i y c estarán en \mathcal{O} . Entonces podemos heredar el orden puntual sobre \mathcal{O} .

1.3. Estructuras abstractas

Las variantes del Teorema de los 14 conjuntos, al igual que el resultado original, consisten en estudiar si existe o no una cota superior para el número de conjuntos distintos que pueden obtenerse al aplicar repetidamente ciertos operadores a un conjunto inicial. Presentamos las estructuras de **monoide** y **retículo** que serán de utilidad.

Definición 1.23 (Cerradura algebraica). Dado un conjunto X y una operación binaria \star sobre X , definimos la **cerradura algebraica** de un subconjunto $Y \subseteq X$ bajo \star como:

$$C_0 = Y, \quad C_{n+1} = C_n \cup \{\phi \star \psi : \phi, \psi \in C_n\}, \quad \langle Y, \star \rangle = \bigcup_{n \geq 0} C_n.$$

Monoides. Algunas variantes del Teorema de Kuratowski, así como su versión original, solo utilizan algunos operadores de una variable (endomorfismos). Estos operadores forman un monoide (véase la Definición 1.25) cuando se considera la operación binaria \circ composición sobre $\text{End}(\mathcal{P}(X))$.

Definición 1.24. Un **monoide** es una terna (M, \circ, e) donde M es un conjunto no vacío, equipado con una operación binaria asociativa $\circ : M \times M \rightarrow M$ que posee un elemento neutro $e \in M$ tal que $a \circ e = e \circ a = a$ para todo $a \in M$.

Definición 1.25. Sea $\mathcal{O} \subseteq \text{End}(\mathcal{P}(X))$ un conjunto de operadores (por ejemplo k, i, c). El **monoide generado por \mathcal{O}** , denotado $\langle \mathcal{O} \rangle$, es el submonoide de $\text{End}(\mathcal{P}(X))$ con la composición como operación, donde el operador identidad $I(A) = A$ es el elemento neutro. Equivalentemente, $\langle \mathcal{O} \rangle$ es la cerradura de \mathcal{O} bajo composición (véase Definición 1.23).

Retículos. Los retículos son necesarios para las variantes del Teorema de Kuratowski, debido a que precisamente existe un paralelismo entre el ínfimo y el supremo en un retículo, y la intersección y unión en el conjunto $\mathcal{P}(X)$. Esto nos permite estudiar ordenadamente aquellas variantes que introducen intersección y unión.

Lema 1.26. *Para cualquier subconjunto $\mathcal{O} \subseteq \text{End}(\mathcal{P}(X))$, el par $(\langle \mathcal{O} \rangle, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado (poset) con el orden de operadores definido en la Definición 1.22.*

Definición 1.27 (Retículo). Un **retículo** es un conjunto ordenado (L, \leq) (véase Definición 1.21) en el que para todo par de elementos $x, y \in L$ existen:

- el **supremo**, denotado $x \vee y$, que es la menor cota superior de $\{x, y\}$;
- el **ínfimo**, denotado $x \wedge y$, que es la mayor cota inferior de $\{x, y\}$.

Un retículo se llama **distributivo** si se cumplen las siguientes leyes distributivas:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z). \quad \text{para todo } x, y, z \in L$$

Lema 1.28. *Sean $\{\wedge, \vee\}$ operaciones binarias sobre $\text{End}(\mathcal{P}(X))$ (véase la Definición 1.17). Considérese (M, \leq) poset donde $M \subseteq \text{End}(\mathcal{P}(X))$ es un monoide (véase el Lema 1.26), podemos considerar las siguientes cerraduras algebraicas (Definición 1.23):*

- $\langle M, \wedge \rangle$: la cerradura de M bajo \wedge ; es un **semirretículo de ínfimos**.
- $\langle M, \vee \rangle$: la cerradura de M bajo \vee ; es un **semirretículo de supremos**.
- $\langle M, \wedge, \vee \rangle$: la cerradura de M bajo \wedge y \vee ; es un **retículo distributivo de operadores** esto porque $\{\wedge, \vee\}$ cumplen las leyes distributivas (véase 1.19).

Observación 1.1 (Notación). Por abuso de notación escribiremos $\langle \mathcal{O}, \wedge \rangle$ para denotar $\langle \langle \mathcal{O} \rangle, \wedge \rangle$. Análogamente se define $\langle \mathcal{O}, \vee \rangle$ y $\langle \mathcal{O}, \wedge, \vee \rangle$. Si $\mathcal{O} = \{\phi_i\}_{i < n}$, escribiremos $\langle \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \wedge, \vee \rangle$ según corresponda. Esta simplificación evita una notación excesivamente cargada en secciones posteriores.

Definición 1.29. Una **retículo booleano** es un retículo distributivo (B, \wedge, \vee) con:

- un elemento mínimo 0 tal que $0 \wedge x = 0$ y $0 \vee x = x$ para todo $x \in B$;
- un elemento máximo 1 tal que $1 \wedge x = x$ y $1 \vee x = 1$ para todo $x \in B$;
- para cada $x \in B$, un **complemento** $\neg x \in B$ que satisface

$$x \wedge \neg x = 0, \quad x \vee \neg x = 1.$$

Lema 1.30. *Sea $\mathcal{O} \subseteq \text{End}(\mathcal{P}(X))$ un conjunto de operadores tal que $c, \mathbf{v}, \mathbf{T} \in \mathcal{O}$. Entonces $\langle \mathcal{O}, \wedge, \vee \rangle$ es un retículo booleano.*

Demostración. Por el Lema 1.19, $\langle \mathcal{O}, \wedge, \vee \rangle$ es un retículo distributivo con mínimo \mathbf{v} y máximo \mathbf{T} por el orden de los operadores de la Definición 1.22. Para cada $\phi \in \langle \mathcal{O}, \wedge, \vee \rangle$, el operador $c \circ \phi$ pertenece a la estructura pues $c \in \mathcal{O}$ y la cerradura bajo \wedge, \vee contiene al monoide generado. Además, $\phi \wedge (c \circ \phi) = \mathbf{v}$ y $\phi \vee (c \circ \phi) = \mathbf{T}$ por el mismo lema. Luego $\langle \mathcal{O}, \wedge, \vee \rangle$ es un retículo booleano. \square

Los siguientes lemas se presentan con el fin de proporcionar una mejor comprensión de la interacción entre los operadores k e i y las operaciones binarias \wedge y \vee , respectivamente.

Lema 1.31. ² *Sea k el operador de clausura. En el orden puntual de operadores definido en la Definición 1.22, se cumple*

$$k(\phi \wedge \psi) \leq k\phi \wedge k\psi$$

para cualesquiera operadores $\phi, \psi \in \text{End}(\mathcal{P}(X))$.

Demostración. Nótese que $\phi \wedge \psi \leq \phi$ y $\phi \wedge \psi \leq \psi$, por intersección (Definición 1.17), por la monotonía de k (Lema 1.10) se tiene $k(\phi \wedge \psi) \leq k\phi$, $k(\phi \wedge \psi) \leq k\psi$. Por lo tanto, se deduce que :

$$k(\phi \wedge \psi) \leq k\phi \wedge k\psi.$$

\square

Lema 1.32. ³ *En el orden de operadores de la Definición 1.22 se cumple*

$$i(\phi \vee \psi) \geq i\phi \vee i\psi.$$

Demostración. Nótese que, $\phi \leq \phi \vee \psi$, $\psi \leq \phi \vee \psi$ por unión. (Definición 1.17), luego por la monotonía de i (véase el Lema 1.12) se tiene $i\phi \leq i(\phi \vee \psi)$, $i\psi \leq i(\phi \vee \psi)$. Por lo tanto,

$$i\phi \vee i\psi \leq i(\phi \vee \psi).$$

\square

Corolario 1.33 (Propiedades del complemento). *El operador complemento c satisface las siguientes propiedades, como consecuencia directa del Lema 1.19:*

²Sherman, ver n. 5.

³Sherman, ver n. 5.

■ **Leyes de De Morgan:**

$$c(\phi \wedge \psi) = c\phi \vee c\psi, \quad c(\phi \vee \psi) = c\phi \wedge c\psi.$$

■ **Complemento en el retículo:**

$$\phi \wedge c\phi = \mathbf{v}, \quad \phi \vee c\phi = \mathbf{T}.$$

2. EL TEOREMA DE LOS 14 CONJUNTOS Y SUS VARIANTES

En este capítulo presentamos el resultado clásico que da origen a este trabajo: el teorema de Kuratowski de los 14 conjuntos. Primero mostraremos la prueba original; luego, mostraremos cómo este problema puede reformularse en términos de monoides de operadores. Después consideraremos semirretículos y retículos de operadores, para a obtener nuevos resultados como los teoremas de Sherman (13 y 35 operadores) y el caso infinito de $\langle k, c, \wedge \rangle$.

Finalmente, las variantes con 2 o más conjuntos iniciales enriquecen el caso cuando tenemos una familia finita de tamaño n de subconjuntos y solo consideramos uniones e intersecciones (sin incluir operadores), determinar una fórmula cerrada para el número de subconjuntos generados es no trivial¹.

2.1. El teorema original

Este teorema fue formulado por primera vez por Kazimierz Kuratowski en 1922, en su artículo *Sur l'opération A de l'Analysis Situs*². Dicho trabajo constituye la primera parte de su tesis doctoral. En este artículo, Kuratowski propone una axiomatización abstracta de la topología basada en un operador de clausura (Vease definición 1.3)

Teorema 2.1 (Kuratowski, 1922).³ *Sea X un espacio topológico y sea $E \subseteq X$. Entonces, el número máximo de conjuntos distintos que pueden obtenerse a partir de E mediante la aplicación sucesiva de los operadores de clausura k y complemento c es 14.*

Además, existe un subconjunto de \mathbb{R} para el cual este máximo se alcanza.

Demostración. Sea X un espacio topológico y sean k y c los operadores de clausura y complemento, respectivamente (véanse las Definiciones 1.3 y 1.4). Fijado $A \subseteq X$, consideramos los subconjuntos que se obtienen a partir de A mediante composiciones finitas de k y c .

¹Richard Dedekind. *Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler*. Braunschweig, 1897. URL: https://rcin.org.pl/Content/140714/PDF/WA35_171681_15883-2_Art9.pdf.

²Kuratowski, ver n. 1.

³Kuratowski, ver n. 1.

Como k es idempotente y c es involutivo (Lema 1.9), basta considerar composiciones alternadas. Estas quedan determinadas por el operador inicial y se estabilizan tras un número finito de pasos; comenzamos con la secuencia de composiciones que inicia con k .

Primeras inclusiones. Comenzamos con las siguientes relaciones:

- $ck(A) \subseteq kck(A)$: por la extensividad de k (Definición 1.3) aplicada a $ck(A)$.
- $ckck(A) \subseteq k(A)$: dado que c es anti monótono e involutivo (Lema 1.8 y 1.9).
- $kckck(A) \subseteq k(A)$: por monotonía de k (Lema 1.10) sobre $ckck(A) \subseteq k(A)$.
- $ck(A) \subseteq ckckck(A)$: por anti monotonía de c (Lema 1.8) sobre $kck(A) \subseteq k(A)$.
- $kck(A) \subseteq kckckck(A)$: por monotonía de k (Lema 1.10) sobre $ck(A) \subseteq ckckck(A)$.

Segundas inclusiones. De manera similar, obtenemos:

- $ckck(A) \subseteq kckck(A)$: por extensividad de k (Definición 1.3) sobre $ckck(A)$.
- $ckckck(A) \subseteq kck(A)$: por ser c anti monótono e involutivo (Lema 1.8 y 1.9).
- $kckckck(A) \subseteq kck(A)$: por monotonía de k (Lema 1.10) sobre lo anterior.

De las inclusiones anteriores se deduce la igualdad

$$kckckck(A) = kck(A). \quad (1)$$

Por lo tanto, las composiciones que comienzan con k generan a lo sumo los siguientes siete conjuntos:

$$A, k(A), ck(A), kck(A), ckck(A), kckck(A), ckckck(A).$$

Las composiciones que comienzan con c generan otros siete:

$$c(A), kc(A), ckc(A), kckc(A), ckckc(A), kckckc(A), ckckckc(A).$$

Ambas sucesiones se estabilizan por la igualdad (1), totalizando a lo sumo 14 conjuntos. □

Consideremos el espacio topológico \mathbb{R} con la topología usual. Si tomamos el sub-

conjunto $E = \left((0, 2) \setminus \{1\} \right) \cup \{3\} \cup \left([4, 5] \cap \mathbb{Q} \right)$ alcanzamos los 14 conjuntos (véase Apéndice 3).

En honor a Gardner⁴ y a Sherman⁵, introducimos la siguiente definición con el fin de sistematizar la notación y facilitar el estudio de estos conceptos.

Definición 2.2. Sea X un conjunto fijo de cardinalidad al menos la del continuo. Cada topología τ sobre X induce operadores concretos de clausura k e interior i (véase el Lema 1.7 y la Definición 1.5). Sea $\emptyset \neq \mathcal{O} \subseteq \{I, k, i, c\}$ y sea L una de las siguientes estructuras: un monoide $\langle \mathcal{O} \rangle$, un semirretículo $\langle \mathcal{O}, \wedge \rangle$ o $\langle \mathcal{O}, \vee \rangle$, o un retículo $\langle \mathcal{O}, \wedge, \vee \rangle$ (véanse 1.25 y 1.30). Entonces definimos ciertos números asociados a L y a τ , manteniendo fijo el conjunto X .

Número de Gardner de un conjunto: dado $A \subseteq X$, se define

$$g(L, \tau, A) = |\text{Orb}_L(A)| = |\{\varphi(A) : \varphi \in L\}|.$$

Número de Gardner del espacio topológico: se define

$$g(L, \tau) = \begin{cases} \text{máx}\{g(L, \tau, A) : A \subseteq X\}, & \text{si el máximo existe,} \\ \infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Número de Sherman de L : se define

$$s(L) = \sup\{g(L, \tau) : \tau \text{ es una topología sobre } X\}.$$

Nótese que $s(L)$ está bien definido, pues $\{\tau : \tau \text{ es una topología sobre } X\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. La condición sobre la cardinalidad de X , sirve para considerar sobre un mismo conjunto topologías orden isomorfas con los números naturales, y topologías mas ricas en detalles, como la usual sobre los reales.

La siguiente definición identifica aquellos subconjuntos del espacio X que logran alcanzar la cota superior y, en el caso infinito, distinguir todos los operadores.

Definición 2.3 (Conjunto testigo). Sea X un conjunto fijo de cardinalidad al menos la del

⁴Gardner y Jackson, ver n. 3.

⁵Sherman, ver n. 5.

continuo y sea L una estructura de operadores como en la Definición 2.2. Un subconjunto $T \subseteq X$ se dice un **conjunto testigo** para L si existe una topología τ^* sobre X tal que

$$g(L, \tau^*, T) = s(L),$$

y además, para cualesquiera $\varphi, \psi \in L$,

$$\varphi(T) = \psi(T) \implies \varphi = \psi$$

idénticamente iguales como operadores según la definición 1.22.

2.2. Monoides de Kuratowski

La demostración anterior revela que el problema de Kuratowski es un problema sobre el cardinal del monoide generado por los operadores de clausura y complemento. Gardner y Jackson⁶ se refieren al monoide $\langle k, c \rangle$ como el **Monoide de Kuratowski** y así mismo, a sus elementos como **operadores de Kuratowski**.

2.2.1 El monoide $\langle k, c \rangle$ y sus sub-monoides $\langle k, i \rangle, c\langle k, i \rangle$. Con estos submonoides veremos la primera variante del Teorema original, ¿Cuántos subconjuntos diferentes se alcanzan solo aplicando clausura e interior, sin el complemento?

Lema 2.4.⁷ *El monoide $\langle k, i \rangle$ tiene numero de Sherman 7:*

$$\langle k, i \rangle = \{I, i, k, ik, ki, iki, kik\}.$$

Demostración. Por la Definición 1.3, k es idempotente ($k^2 = k$) y se tiene que i también es idempotente por el Lema 1.11. Además, $k \geq I$ y $i \leq I$ (véase Definición 1.3 y Lema 1.13) Multiplicando $k \geq I$ por la izquierda y la derecha con i obtenemos $iki \geq i$ y de igual forma con $i \leq I$ obtenemos $kik \leq k$. Usamos ambas relaciones para calcular:

$$(i)k \leq (iki)k = i(kik) \leq i(k) \implies ik = ikik,$$

$$k(i) \leq k(iki) = (kik)i \leq (k)i \implies ki = kiki.$$

De las igualdades $ik = ikik$ y $ki = kiki$ se deduce que ik y ki son idempotentes. Por lo

⁶Gardner y Jackson, ver n. 3.

⁷Sherman, ver n. 5.

tanto, la cerradura de $\langle k, i \rangle$ bajo composición (Definición 1.23) genera exactamente los siete elementos listados, pues las idempotencias impiden la aparición de nuevos operadores. \square

Para mostrar que la cota máxima es alcanzable, consideramos el espacio \mathbb{R} con la topología usual, y el mismo conjunto testigo T dado en el Teorema 2.1, veremos que el número de Gardner de T coincide con el número de Sherman de $\langle k, i \rangle$ (véase Apéndice 3)

Definición 2.5 (Monoide dual). Dado un monoide de operadores M , definimos su **dual** como $cM = \{c\phi : \phi \in M\}$, donde $c\phi$ denota la composición del complemento con ϕ .

Lema 2.6. ⁸ *El dual del monoide $\langle k, i \rangle$ es:*

$$c\langle k, i \rangle = \{cI, ci, ck, cik, cki, ciki, ckik\}.$$

El siguiente teorema, enunciado y demostrado por Sherman en⁹, es equivalente al teorema original de los 14 conjuntos de Kuratowski¹⁰. Este resultado pone de manifiesto que la incorporación de estos nuevos conceptos no solo preserva la esencia del problema clásico, sino que también amplía su alcance y ofrece una perspectiva más general.

Teorema 2.7. ¹¹ *El monoide de Kuratowski $\langle k, c \rangle = \langle k, i \rangle \sqcup c\langle k, i \rangle$,*

Demostración. Definimos la longitud de un elemento $\phi \in \langle k, c \rangle$ como el número de generadores k y c que aparecen en su expresión como producto. Por ejemplo, kck tiene longitud 3, mientras que la identidad I tiene longitud 0. Demostraremos entonces la inclusión \subseteq por inducción sobre dicha longitud n de ϕ .

Caso base: ($n = 0$) El operador I tiene longitud 0, según la Definición 1.25 e $I \in \langle k, i \rangle$

Hipótesis inductiva: Todo operador $\phi \in \langle k, c \rangle$ de longitud $m \leq n$ está en $\langle k, i \rangle \cup c\langle k, i \rangle$.

Paso inductivo: Sea $\phi \in \langle k, c \rangle$ de longitud $n + 1$. Entonces $\phi = k\psi$ o $\phi = c\psi$ para algún operador ψ de longitud n . Por hipótesis, $\psi \in \langle k, i \rangle \cup c\langle k, i \rangle$.

Si $\phi = k\psi$, entonces $\phi \in \langle k, i \rangle$ cuando $\psi \in \langle k, i \rangle$, y $\phi = k(cw) = c(iw) \in c\langle k, i \rangle$ cuando $\psi = cw \in c\langle k, i \rangle$. Si $\phi = c\psi$, entonces $\phi \in c\langle k, i \rangle$ cuando $\psi \in \langle k, i \rangle$, y $\phi = c(cw) =$

⁸Sherman, ver n. 5.

⁹Sherman, ver n. 5.

¹⁰Kuratowski, ver n. 1.

¹¹Sherman, ver n. 5.

$w \in \langle k, i \rangle$ cuando $\psi = cw \in c\langle k, i \rangle$. En todos los casos, ϕ pertenece a $\langle k, i \rangle \cup c\langle k, i \rangle$. Esto completa la inducción, probando que $\langle k, c \rangle \subseteq \langle k, i \rangle \cup c\langle k, i \rangle$.

Las inclusiones $\langle k, i \rangle \subseteq \langle k, c \rangle$ y $c\langle k, i \rangle \subseteq \langle k, c \rangle$ son inmediatas, pues $i = ckc$ por la Definición 1.5. Además, ambos submonoides son disjuntos: si existiera un operador $\phi \in \langle k, c \rangle$ se sigue $i \leq \phi \leq ci$, esto es una contradicción, ya que un conjunto y su complemento no son comparables. Por otra parte, de los Lemas 2.4 y 2.6 se sigue que

$$s(\langle k, c \rangle) = 7 + 7 = 14.$$

Esto constituye una demostración adicional del Teorema 2.1. □

Una pregunta interesante es: Dado un conjunto fijo X de cardinalidad a lo menos la del continuo y una estructura L (como el monoide de Kuratowski), ¿qué propiedades debe cumplir la topología τ sobre X para que el número de Gardner cumpla: $g(L, \tau) < s(L)$,?

La respuesta a la pregunta fue dada por Gardner y Jackson¹², quienes realizaron un estudio detallado del monoide de Kuratowski $L = \langle k, c \rangle$ para distintos espacios topológicos, caracterizando cuándo $g(L, \tau)$ es igual a 2, 4, 8, 10 o 14. Primero definimos algunos espacios.

Definición 2.8. Sea (X, k) un espacio con un operador de clausura k . Un conjunto $A \subseteq X$ se dice **denso** si $k(A) = X$.

Definición 2.9. Un espacio es **extremadamente disconexo** si la cerradura de cualquier conjunto abierto es abierta.

Definición 2.10. Un espacio es **resoluble** si contiene un conjunto denso con interior vacío.

Definición 2.11. Un espacio es un **espacio abiertamente irresoluble** (OU) si ningún subespacio abierto es resoluble.

Definición 2.12. Un espacio es un **espacio de partición** si sus conjuntos abiertos forman un retículo booleano (véase Definición 1.29).

Definición 2.13. Un espacio es un **espacio puerta** si todo $Y \subseteq X$ es abierto o cerrado.

Ejemplo 2.2.1.1. Sea $X = \{a, b, c\}$ con la topología

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}.$$

Este espacio es:

¹²Gardner y Jackson, ver n. 3.

- **Extremadamente desconexo**, porque la cerradura de cualquier abierto es abierta: $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset$, $\text{cl}(\{a\}) = \{a\}$, $\text{cl}(\{b, c\}) = \{b, c\}$, $\text{cl}(X) = X$.
- **Espacio de partición**, ya que sus abiertos $\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X$ forman un retículo booleano (todos son cerrados a la vez).
- **Abiertamente irresoluble (OU)**, pues el único subespacio abierto propio es $\{a\}$ y $\{b, c\}$, y en cada uno el único denso es el total, que tiene interior no vacío.
- No es **resoluble** porque el único denso en X es X . Ni es **espacio puerta**, ya que $\{b\}$ no es abierto ni cerrado.

Ejemplo 2.2.1.2 (Espacio de Sierpiński). El espacio $X = \{0, 1\}$ con la topología de Sierpiński es un **espacio puerta**.

Ejemplo 2.2.1.3. Cualquier conjunto X con la topología indiscreta (grosera) $\tau = \{\emptyset, X\}$ que tenga **más de un punto** es un **espacio resoluble**.

Para que el número de Gardner $g(L, \tau)$ sea menor que el número de Sherman $s(L)$, algunos operadores de L deben ser idénticamente iguales según la Definición 1.2. Los siguientes teoremas caracterizan las topologías sobre X donde algunos operadores coinciden.

Teorema 2.14 (Teorema 2.6 y Teorema 2.3,¹³). Sea X un conjunto fijo de cardinalidad al menos la del continuo y sea $L = \langle k, c \rangle$ el monoide de Kuratowski. Para cada topología τ sobre X tal que (X, τ) sea al menos Hausdorff, sea $n = g(L, \tau)$ el número de Gardner asociado a L y τ . Entonces se cumplen las siguientes condiciones, donde las igualdades entre operadores se refieren a los operadores interior $i = ckc$ y clausura k :

- (i) $n = 2$ si y solo si (X, τ) es discreto. En este caso $i = k$.
- (ii) $n = 4$ si y solo si (X, τ) es un espacio puerta no discreto. En un espacio puerta no discreto se verifican $k = I$ e $i \neq I$, ó $i = I$ y $k \neq I$
- (iii) $n = 8$ si (X, τ) es un espacio-OU extremadamente desconexo, pero no espacio puerta. Se cumplen $iki = ki$, $iki = ik$ e $ik = ki$.
- (iv) $n = 10$ solo si (X, τ) es extremadamente desconexo o espacio-OU, pero no ambas.
 - Si (X, τ) es extremadamente desconexo (sin ser OU), entonces $iki = ki$ y $iki \neq ik$.
 - Si (X, τ) es OU (sin ser extremadamente desconexo), entonces $iki = ik$ y $iki \neq ki$.

En ningún caso se tiene $ik = ki$.

¹³Gardner y Jackson, ver n. 3.

- (v) $n = 14$ si y solo si (X, τ) no es ni extremadamente desconexo ni espacio-OU. Entonces $iki \neq ki$, $iki \neq ik$, e $ik \neq ki$.
- (vi) $n \neq 6, 12$.

Para revisar ejemplos concretos de estos espacios Hausdorff veasé Apéndice 3

El trabajo de Gardner y Jackson¹⁴ caracteriza, mediante condiciones necesarias y suficientes sobre la topología τ de X , los posibles valores del número de Gardner $g(L, \tau)$ para $L = \langle k, c \rangle$ el monoide de Kuratowski. Además, se distingue entre la existencia de un conjunto testigo T (que distingue todos los operadores del monoide) y la existencia de un conjunto E tal que se cumple $g(L, \tau, E) = g(L, \tau)$. Esta distinción se analiza con mayor detalle cuando el número de Sherman es infinito (véase Sección 2.3.3).

2.2.2 Otros monoides de interés. Si consideramos las operaciones binarias \wedge (intersección) y \vee (unión), es posible construir nuevos operadores unarios en términos de los operadores previamente definidos (véase definiciones 1.3, 1.4, 1.5), tales como:

Definición 2.15. Sea X un conjunto y $A \subseteq X$. Se definen los siguientes operadores:

- **Operador side** (s): $s(A) = k(A) \cap c(A)$
- **Operador rim** (r): $r(A) = A \cap k(c(A))$
- **Operador frontera** (∂): $\partial(A) = k(A) \cap k(c(A)) = k(A) \cap kc(A)$

Observación 2.1. Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología usual y $A = (0, 1]$. Entonces los operadores definidos en la Definición 2.15 toman los siguientes valores:

$$s(A) = \{0\}, \quad r(A) = \{1\}, \quad \partial(A) = \{0, 1\}.$$

Por lo tanto, los operadores s, r, ∂ son distintos según la Definición 1.2.

En su artículo, Shum¹⁵ define estos operadores y estudia precisamente los monoides $\langle k, c, \partial \rangle$ y $\langle s \rangle$. Más adelante retomaremos el operador *side* y su relación con la existencia de infinitos operadores en el semirretículo $\langle k, c, \wedge \rangle$ (véase Sección 2.3.3).

¹⁴Gardner y Jackson, ver n. 3.

¹⁵Shum, ver n. 13.

2.3. Semirretículos y retículos de operadores

Para responder a la pregunta: ¿cuántos conjuntos pueden obtenerse aplicando repetidamente los operadores de clausura, interior, unión y/o intersección? Veremos además qué sucede al añadir el operador complemento c a las estructuras anteriores. Para ello, utilizaremos los semirretículos y retículos de operadores (véase Lema 1.28). La estructura de conjunto ordenado será de gran utilidad, ya que nos proporcionará una guía clara para generar nuevos elementos al operar entre operadores no comparables.

2.3.1 Los semirretículos $\langle k, i, \vee \rangle$ y $\langle k, i, \wedge \rangle$. Estos semirretículos corresponden a las variantes del Teorema de los 14 conjuntos donde cambiamos complemento por interior, y añadimos uniones ó intersecciones.

Teorema 2.16 (Yu¹⁶, 1978). *Sea $M = \langle k, i \rangle$ submonoide de Kuratowski, si $\langle M, \vee \rangle$ es semirretículo de supremos (véase el Lema 1.28), entonces su numero de Sherman es 13.*

Demostración. Sea $M = \langle k, i \rangle = \{I, i, k, ik, ki, iki, kik\}$ y definimos

$$N = \{I \vee ik, I \vee ki, I \vee iki, I \vee kik, ik \vee ki, (I \vee ik) \vee ki\}.$$

Nótese que en N están las uniones entre elementos de M que no son comparables según el orden puntual (véase Definición 1.22) y que $M \cup N$ es cerrado bajo \vee (véase Definición 1.23). Es claro que $M \cup N \subseteq \langle k, i, \vee \rangle$. Para demostrar la igualdad, basta probar que $M \cup N$ es cerrado bajo los operadores k e i .

Caso $k\phi$: Distinguimos dos situaciones:

- Si ϕ contiene a I como componente, por la distributividad de k sobre \vee (véase Definición 1.3) tenemos que $k\phi = k$.
- Si $\phi = ik \vee ki$, entonces $k\phi = k(ik \vee ki) = k(ik) \vee k(ki) = kik \vee ki = kik$, donde la última igualdad se debe a que $kik \geq ki$ en el orden de operadores.

Caso $i\phi$: Analizamos según la forma de ϕ :

- Sea $\phi \in \{ik \vee ki, I \vee kik, I \vee ik, I \vee ik \vee ki\}$, notese que $\phi \leq k$ por la monotonia de i (vease Lema 1.12) $i\phi \leq ik$. Además por el Lema 1.32 tenemos que $i(\phi \vee \psi) \geq i\phi \vee i\psi$ entonces para todo ϕ se cumple que $i\phi \geq ik$. Por lo tanto $i\phi = ik$.

¹⁶yu1978.

- Si $\phi = I \vee ki$. Probaremos que $i\phi = iki$: Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces se genera un operador clausura k (véase Lema 1.7) y podemos definir un operador interior i (véase Definición 1.5) fijemos $A \subseteq X$ arbitrario. Debemos probar que

$$i(A \cup k(i(A))) = i(k(i(A))).$$

Inclusión \subseteq : Sea $x \in i(A \cup k(i(A)))$. Existe un entorno abierto $U \subseteq X$ de x tal que $U \subseteq A \cup k(i(A))$. Si $x \notin k(i(A))$, entonces existe otro entorno abierto V de x con $V \cap i(A) = \emptyset$. Tomando $W = U \cap V$, obtenemos un entorno abierto de x que cumple $W \subseteq A$ y $W \cap i(A) = \emptyset$. Esto implica $W \subseteq A \setminus i(A)$, lo cual es imposible porque $A \setminus i(A)$ no tiene puntos interiores. Por tanto, $x \in k(i(A))$. Como x es interior a $A \cup k(i(A))$ y $k(i(A))$ es cerrado, concluimos que x es interior a $k(i(A))$; es decir, $x \in i(k(i(A)))$.

Inclusión \supseteq : Es trivial pues, $ki \leq I \vee ki$ y el interior es i monótono (véase Lema 1.12). Por tanto se tiene la igualdad $i(I \vee ki) = iki$ (véase Definición 1.2).

- Si $\phi = I \vee iki$. Veamos que $i\phi = iki$:
Por la propiedad de sobraditividad de i tenemos que $i(I \vee iki) \leq iki$. Por otro lado, como $I \vee iki \leq I \vee ki$, la monotonía de i da $i(I \vee iki) \leq i(I \vee ki) = iki$, donde la última igualdad se probó anteriormente. Combinando ambas inclusiones, se obtiene la igualdad $i(I \vee iki) = iki$.

En todos los casos, $i\phi, k\phi \in M \cup N$. Hemos demostrado que $M \cup N$ es cerrado bajo k e i . Luego $\langle k, i, \vee \rangle = M \cup N$. Por lo tanto, tenemos que si $L = \langle k, i, \vee \rangle$ entonces $s(L) = 13$, en efecto considérese \mathbb{R} con la topología usual:

$$T = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup (\mathbb{I} \cap (2, 3)) \cup ((3, 5) \setminus \{4\})$$

es claro que T es conjunto testigo para $\langle k, i, \vee \rangle$ (véase apéndice 3).

□

Teorema 2.17. (Sherman¹⁷, 2010) Sea $M = \langle k, i \rangle$ submonoide de Kuratowski. Si $\langle M, \wedge \rangle$ es semirretículo de infimos (véase Lema 1.28) entonces su número de Sherman es 13.

Demostración. Sea $L = \{ ik \wedge ki, I \wedge ik, I \wedge ki, I \wedge iki, I \wedge kik, I \wedge (ik \wedge ki) \}$ las intersecciones entre elementos no comparables de M , por lo anterior $M \cup L$ es cerrado bajo la operación binaria \wedge (véase Definición 1.23). Claramente $M \cup L \subseteq \langle k, i, \wedge \rangle$. Para demostrar la igualdad basta ver que $M \cup L$ es cerrado bajo los operadores k e i .

¹⁷Sherman, ver n. 5.

Caso $i\phi$: Si $\phi \in L$ contiene a I como una componente, entonces por distributividad de i sobre \wedge se tiene $i\phi = i$ (pues i es el mínimo del poset). Si $\phi = ik \wedge ki$, entonces $i(ik \wedge ki) = i(ik) \wedge i(ki) = ik \wedge iki = iki \in M$.

Caso $k\phi$: Por sub-casos: (1) $\phi \in P = \{ik \wedge ki, I \wedge iki, I \wedge (ik \wedge ki), I \wedge ki\}$ ó (2) $\phi = I \wedge ik$ ó (3) $\phi = I \wedge kik$

1. Se cumple $\phi \geq i$, luego $k\phi \geq ki$, por monotonía de k (véase 1.10). Luego para cada $\psi \in P$ por $k(\phi \wedge \psi) \leq k\phi \wedge k\psi$ (véase 1.31), se obtiene $k\phi \leq ki$. Luego $k\phi = ki \in P$
2. Veamos que $k(I \wedge ik) = kik$. Primero, por $k(\psi_1 \wedge \psi_2) \leq k\psi_1 \wedge k\psi_2$, [véase 1.31] tenemos $k(I \wedge ik) \leq kI \wedge k(ik) = k \wedge kik = kik$ por el orden de los operadores [véase 1.22].

$$(2.1) \quad k(I \wedge ik) \leq kik$$

Para la desigualdad contraria, usamos el siguiente cálculo algebraico (véase¹⁸).

$$\begin{aligned} ik &= ik \wedge k(I) = ik \wedge k[(I \wedge ik) \vee (I \wedge cik)] \\ &= ik \wedge [k(I \wedge ik) \vee k(I \wedge cik)] = [ik \wedge k(I \wedge ik)] \vee [ik \wedge k(I \wedge cik)]. \end{aligned}$$

El segundo término satisface $ik \wedge k(I \wedge cik) \leq ik \wedge k(cik) = ik \wedge cik = \mathbf{v}$, donde \mathbf{v} denota el operador vacío. Por tanto, $ik = ik \wedge k(I \wedge ik)$, lo que implica $ik \leq k(I \wedge ik)$. Aplicando k a ambos lados y usando la idempotencia $kik = k(ik)$, obtenemos

$$(2.2) \quad kik \leq k(I \wedge ik).$$

Juntado **2.1** y **2.2** concluimos $k(I \wedge ik) = kik \in M$.

3. Veamos que $k(I \wedge kik) = kik$. Primero, por la desigualdad $k(\psi_1 \wedge \psi_2) \leq k\psi_1 \wedge k\psi_2$, tenemos

$$(3.1) \quad k(I \wedge kik) \leq kik.$$

Para la desigualdad contraria, observamos que $ik \leq kik$, luego $I \wedge ik \leq I \wedge kik$. Aplicando el operador monótono k obtenemos $k(I \wedge ik) \leq k(I \wedge kik)$. Pero ya probamos que $k(I \wedge ik) = kik$, por tanto

$$(3.2) \quad kik \leq k(I \wedge kik).$$

Juntado **3.1** y **3.2** se tiene, $k(I \wedge kik) = kik \in M$.

¹⁸Sherman, ver n. 5, pág. 118.

En todos los casos, $i\phi, k\phi \in M \cup L$. Hemos demostrado que $M \cup L$ es cerrado bajo k e i . Luego $\langle k, i, \wedge \rangle = M \cup L$. Por lo tanto, tenemos que $s(\langle k, i, \wedge \rangle) = 13$, en efecto considérese \mathbb{R} con la topología usual, entonces tómesese

$$T = (-\infty, 0] \cup E_1 \cup (1, 2] \cup E_2 \cup E_3 \cup [5, \infty), \text{ donde:}$$

$$E_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right), \quad E_2 = \mathbb{Q} \cap (2, 3), \quad E_3 = \{3, 4\}.$$

es claro que T es conjunto testigo para $\langle k, i, \wedge \rangle$ (véase apéndice 3). □

2.3.2 El retículo $\langle k, i, \wedge, \vee \rangle$. Este retículo constituye una variante del Teorema de los 14 conjuntos de Kuratowski. Esta variante, reemplaza el operador de complemento por el operador de interior i , y permite la combinación de conjuntos mediante las operaciones de unión (\vee) e intersección (\wedge).

Teorema 2.18 (Sherman¹⁹, 2010). *Sea $M = \langle k, i \rangle$ submonoide de Kuratowski. Si $\langle M, \wedge, \vee \rangle$ es un retículo (véase Lema 1.30). Entonces su número de Sherman es 35.*

Demostración. Sea $H = \langle k, i, \wedge \rangle = M \cup L$ el semirretículo de infimos, donde

$$M = \{I, i, k, ik, ki, iki, kik\}, \quad L = \{ik \wedge ki, I \wedge ik, I \wedge ki, I \wedge iki, I \wedge kik, I \wedge (ik \wedge ki)\}.$$

Por el Teorema 2.17, sabemos que $s(H) = 13$. Añadimos a H los dos operadores obtenidos por uniones irredundantes que no estaban previamente: $ik \vee ki$ y $(I \wedge ki) \vee (I \wedge ik)$.

$$J = H \cup \{ik \vee ki, (I \wedge ki) \vee (I \wedge ik)\},$$

Para organizar el análisis, particionamos J en cuatro clases:

- (1) i, k ;
- (2) I ;
- (3) $iki, ki \wedge ik, ik, ki, \boxed{ki \vee ik}, kik$;
- (4) $I \wedge iki, I \wedge ki \wedge ik, I \wedge ik, I \wedge ki, \boxed{(I \wedge ki) \vee (I \wedge ik)}, I \wedge kik$.

Los elementos de la clase (1) son los extremos del retículo (i es el mínimo, k es el máximo) y no participan en la generación de nuevos operadores mediante uniones. La identidad

¹⁹Sherman, ver n. 5.

I (clase 2) puede unirse de manera no trivial con los elementos de la clase (3), lo que produce 6 nuevos operadores:

$$I \vee iki, \quad I \vee (ki \wedge ik), \quad I \vee ik, \\ I \vee ki, \quad I \vee (ki \vee ik), \quad I \vee kik.$$

Finalmente, consideramos todas las uniones posibles entre un elemento de la clase (3) y uno de la clase (4) obtenemos exactamente 14 operadores nuevos:

$$(I \wedge kik) \vee ki \vee ik \quad (I \wedge ki) \vee (I \wedge ik) \vee iki \quad (I \wedge kik) \vee ik \\ (I \wedge ki) \vee (ki \wedge ik) \quad (I \wedge kik) \vee iki \quad (I \wedge ki) \vee (I \wedge ik) \vee (ki \wedge ik) \\ (I \wedge kik) \vee ki \quad (I \wedge ik) \vee ki \quad (I \wedge kik) \vee (ki \wedge ik) \\ (I \wedge ik) \vee iki \quad (I \wedge ki) \vee ik \quad (I \wedge ik) \vee (ki \wedge ik) \\ (I \wedge ki) \vee iki \quad (I \wedge ki \wedge ik) \vee iki$$

La cerradura del retículo $\langle k, i, \wedge, \vee \rangle$ bajo las operaciones binarias \wedge y \vee es consecuencia de haber incluido todas las uniones e intersecciones posibles a partir de las cuatro clases.

La cerradura del retículo $\langle k, i, \wedge, \vee \rangle$ bajo el operador clausura k , se debe a que H es cerrado bajo k y además k distribuye respecto a \vee (véase Definición 1.3). La cerradura bajo el operador interior i se puede probar iniciando la construcción con un $H^* = \langle k, i, \vee \rangle$ esto hará que solo debamos añadir intersecciones entre elementos no triviales, debido a que el operador interior i , distribuye sobre el operador ínfimo \wedge . Dado que los operadores ínfimo y supremo son distributivos, la construcción del retículo $\langle k, i, \vee, \wedge \rangle$ es la misma independientemente del semirretículo de inicio.

$$s(\langle k, i, \wedge, \vee \rangle) = \underbrace{13}_{s(H)} + \underbrace{2}_{\text{uniones añadidas}} + \underbrace{6}_{I \vee (\text{clase 3})} + \underbrace{14}_{\text{uniones clases 3-4}} = 35.$$

□

El teorema anterior asegura que el numero de Sherman para el retículo completo generado por clausura e interior es 35. Pero hace falta exhibir un espacio topológico y un conjunto que alcance la cota, en efecto considérese \mathbb{R} con la topología usual y el conjunto

$$T = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4, \text{ donde}$$

$$F_1 = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}, \quad F_2 = [2, 4] \setminus \{3 + 1/n : n \in \mathbb{N}\},$$

$$F_3 = (5, 7] \cap \mathbb{Q}, \quad F_4 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi}\right].$$

El conjunto T , presentado por Sherman en²⁰, constituye un conjunto testigo para el retículo $\langle k, i, \wedge, \vee \rangle$ (véase Apéndice 3).

2.3.3 El semirretículo $\langle k, c, \wedge \rangle$. En particular, la variante $L = \langle k, c, \wedge \rangle$ muestra la diferencia entre un conjunto $E \subseteq X$ que alcanza $g(L, \tau, E) = s(L)$ y un conjunto testigo T , que además distingue todos los operadores $\varphi, \psi \in L$ (véase Definición 2.3). Para ilustrar esta diferencia, usaremos el operador *side* s definido en la Definición 2.15 y estudiado por Shum, que permite ver que, de hecho, el monoide generado por s es infinito.

Teorema 2.19.²¹ *El monoide $\langle s \rangle$ tiene, numero de Sherman infinito y un conjunto testigo.*

Demostración. Sea $X = \mathbb{N}^*$, definase el operador de clausura k como sigue :

$$k(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset, \\ [\text{mín } A, \infty) & \text{si } A \neq \emptyset, \end{cases}$$

Entonces k genera sobre X una *topología* τ (véase Lema 1.6), esta topología es llamada *Topología de Alexandroff*. Consideremos el operador *side* (s) de la Definición 2.15 construyase $\langle s \rangle$ el monoide generado por s (véase Definición 1.25) entonces un conjunto testigo para el monoide es: $T = \{2, 4, 6, 8, \dots\} \subset X$. (véase Apéndice 3)

□

El teorema es relevante porque muestra que el monoide generado por el operador *side* s tiene número de Sherman infinito y admite un conjunto testigo, mientras que en el retículo $L = \langle k, c, \wedge \rangle$ no es trivial dar un conjunto testigo.

Teorema 2.20.²² *Sea $M = \langle k, c \rangle$ el monoide de Kuratowski entonces el semirretículo $\langle M, \wedge \rangle$ tiene numero de Sherman infinito.*

²⁰Sherman, ver n. 5.

²¹Shum, ver n. 13.

²²Sherman, ver n. 5.

Demostración. Nótese que el operador *side* s puede expresarse en términos de los operadores de clausura k , complemento c y la operación binaria \wedge . En consecuencia, se tiene que $\langle s \rangle \subseteq \langle M, \wedge \rangle$. Dado que las iteraciones de s generan una familia infinita de operadores distintos, se concluye que $\langle M, \wedge \rangle$ posee número de Sherman infinito. \square

Nótese que en el espacio \mathbb{N}^* con la topología de Alexandroff, definida en la prueba del Teorema 2.19, el conjunto T es testigo para $\langle s \rangle$, pero no lo es para $\langle k, c, \wedge \rangle$. En efecto, se tiene que $i(T) = ik(T) = \emptyset$, mientras que $i(\{1\}) = \{1\} \neq ik(\{1\}) = \mathbb{N}$.

Lema 2.21. *Se cumple que : $\langle k, c, \wedge \rangle = \langle i, c, \wedge \rangle = \langle k, c, \vee \rangle = \langle i, c, \vee \rangle = \langle k, c, \wedge, \vee \rangle$.*

Demostración. Se tiene que $k = cic$, $i = ckc$, $a \vee b = c(ca \wedge cb)$ y $a \wedge b = c(ca \vee cb)$ (véase Definición 1.5 y Lema 1.33). \square

La Tabla 2.1 resume los números de Sherman para las distintas estructuras algebraicas que se generan a partir de los operadores indicados en las filas y las operaciones binarias especificadas en las columnas.

Operaciones	$\{I\}$	$\{\wedge\}$	$\{\vee\}$	$\{\wedge, \vee\}$
$\{I\}$	1	1	1	1
$\{i\}$	2	2	2	2
$\{k\}$	2	2	2	2
$\{c\}$	2	4	4	4
$\{i, k\}$	7	13	13	35
$\{k, c\}$	14	∞	∞	∞

Tabla 2.1: Número de Sherman para diferentes variantes, según Sherman²³.

En particular, la columna $\{I\}$ corresponde a los monoides de operadores (esto es, estructuras cerradas únicamente bajo composición), mientras que las columnas $\{\wedge\}$, $\{\vee\}$ y $\{\wedge, \vee\}$ representan, respectivamente, los semirretículos de ínfimos, de supremos y los retículos generados por dichos operadores. Por el Lema 2.21 no es necesario revisar las variantes correspondientes a las siguientes estructuras $\langle i, c, \wedge \rangle = \langle k, c, \vee \rangle = \langle i, c, \vee \rangle = \langle k, c, \wedge, \vee \rangle$. En el presente trabajo no fue posible encontrar un conjunto testigo para estructuras que tengan número de Sherman infinito, además del presentado por Shum²⁴ para el monoide *side*. Sin embargo, el **Teorema 5.10** de McKinsey y Tarski²⁵ establece que, para todo espacio topológico X normal, denso en sí mismo y con una base σ -numerable, existe un conjunto testigo $T \subseteq X$ para el retículo $\langle k, c, \wedge, \vee \rangle$.

²⁴Shum, ver n. 13.

²⁵McKinsey y Tarski, ver n. 2.

2.4. Variantes con $n \geq 2$ conjuntos iniciales

En esta sección extendemos el problema de Kuratowski al caso en que se parte de una **familia finita de conjuntos iniciales** de tamaño $n \geq 2$. Esta generalización permite estudiar cómo crece el número de subconjuntos distintos generados cuando no se parte de un único conjunto, sino de varios, y cómo se comportan las estructuras algebraicas bajo composiciones de operadores y operaciones binarias. Las variantes presentadas en la sección anterior corresponden al caso particular $n = 1$. La siguiente definición extiende la definición 2.2, esto para caracterizar las cotas superiores para el caso de varios conjuntos iniciales.

Definición 2.22 (Números de Gardner y Sherman para familias). Sea (X, τ) un espacio topológico fijo, que induce operadores de clausura k e interior i . Sea además $\emptyset \neq \mathcal{O} \subseteq \{I, k, i, c\}$ y sea L una de las estructuras generadas por \mathcal{O} : un monoide $\langle \mathcal{O} \rangle$, un semirretículo $\langle \mathcal{O}, \wedge \rangle$ o $\langle \mathcal{O}, \vee \rangle$, o un retículo $\langle \mathcal{O}, \wedge, \vee \rangle$.

Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia finita de subconjuntos de tamaño $n \geq 1$. Definimos:

Número de Gardner de la familia:

$$g(L, \tau, \mathcal{E}) = |\text{Orb}_L(\mathcal{E})| = |\{\varphi(A) : \varphi \in L, A \in \mathcal{E}\}|.$$

Número de Gardner para familias de tamaño n :

$$g_n(L, \tau) = \text{máx}\{g(L, \tau, \mathcal{E}) : |\mathcal{E}| = n\}.$$

Número de Sherman para familias de tamaño n :

$$s_n(L) = \sup\{g_n(L, \tau) : \tau \text{ es una topología sobre } X\}.$$

La Tabla 2.2 resume el máximo número $s_n(L)$ de subconjuntos distintos que se obtienen al partir de una familia de n conjuntos, aplicar los operadores de la primera columna y cerrar bajo las operaciones binarias de la primera fila. Las columnas $\{I\}$, $\{\wedge\}$, $\{\vee\}$ y $\{\wedge, \vee\}$ corresponden respectivamente a monoides, semirretículos de ínfimos, semirretículos de supremos y retículos completos. En particular, para el operador trivial $\{I\}$ y operaciones $\{\wedge, \vee\}$ el valor es D_n , el n -ésimo número de Dedekind²⁶, que cuenta funciones booleanas monótonas de n variables, anticadenas del conjunto potencia o elementos

²⁶Dedekind1897.

del retículo distributivo libre con n generadores. Esta conexión generaliza directamente el problema clásico de Kuratowski y muestra cómo la complejidad combinatoria crece abismalmente al añadir uniones e intersecciones.

Operaciones	$\{I\}$	$\{\wedge\}$	$\{\vee\}$	$\{\wedge, \vee\}$
$\{I\}$	n	$2^n - 1$	$2^n - 1$	D_n
$\{i\}$	$2n$	$3^n - 1$	∞	∞
$\{k\}$	$2n$	∞	$3^n - 1$	∞
$\{c\}$	$2n$	2^{2^n}	2^{2^n}	2^{2^n}
$\{i, k\}$	$7n$	∞	∞	∞
$\{i, c\} = \{k, c\} = \{i, k, c\}$	$14n$	∞	∞	∞

Tabla 2.2: Número de Sherman $s_n(L)$ para familias de tamaño $n \geq 2$, según operadores y operaciones binarias.

Las construcciones explícitas que alcanzan estas cotas se detallan en el Apéndice 3. Además construimos para el caso del semirretículo de clausura e ínfimo, una familia de dos conjuntos que generan infinitos conjuntos, dado que el operador interior y supremos son duales a los anteriores respectivamente este semirretículo de ínfimo y supremo también genera infinitos conjuntos y por lo tanto toda estructura que tenga a alguna de estas como sub-estructura generara infinitos conjuntos, para una familia finita de tamaño $n \geq 2$.

3. CONCLUSIONES

El teorema de Kuratowski de los 14 conjuntos se pregunta por la cantidad máxima de conjuntos distintos que pueden obtenerse al aplicar las operaciones de clausura y complemento a un mismo conjunto inicial en un espacio topológico dado.

En este trabajo hemos estudiado distintas variantes de este problema. Por un lado, consideramos variaciones en los operadores empleados: clausura, interior, complemento, así como las operaciones binarias de unión e intersección. Por otro lado, analizamos también variantes en función del número de conjuntos iniciales.

Operadores	Estructura algebraica			
	$\{I\}$	$\{\wedge\}$	$\{\vee\}$	$\{\wedge, \vee\}$
$\{I\}$	1 (n)	1 ($2^n - 1$)	1 ($2^n - 1$)	1 (D_n)
$\{i\}$	2 ($2n$)	2 ($3^n - 1$)	2 (∞)	2 (∞)
$\{k\}$	2 ($2n$)	2 (∞)	2 ($3^n - 1$)	2 (∞)
$\{c\}$	2 ($2n$)	4 (2^{2^n})	4 (2^{2^n})	4 (2^{2^n})
$\{i, k\}$	7 ($7n$)	13 (∞)	13 (∞)	35 (∞)
$\{i, c\} = \{k, c\} = \{i, k, c\}$	14 ($14n$)	∞ (∞)	∞ (∞)	∞ (∞)

Tabla 3.1: Tabla de operadores y estructuras algebraicas

La tabla 3.1 presenta un resumen de las variantes estudiadas y puede interpretarse como la combinación de las tablas 2.1 y 2.2.

En la parte superior se muestran las operaciones binarias consideradas (unión, intersección, ambas o ninguna), mientras que en la primera columna se listan los operadores empleados (clausura, interior, complemento, identidad o combinaciones de estos).

BIBLIOGRAFÍA

- Dedekind, Richard. *Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler*. Braunschweig, 1897. URL: https://rcin.org.pl/Content/140714/PDF/WA35_171681_15883-2_Art9.pdf.
- Gardner, B. J. y M. Jackson. The Kuratowski closure-complement theorem. En: *New Zealand Journal of Mathematics* 38 (2008), págs. 9-38. URL: https://figshare.utas.edu.au/articles/journal_contribution/The_Kuratowski_Closure-Complement_Theorem/22870025.
- Gleason, A. M. Projective topological spaces. En: *Illinois Journal of Mathematics* 2.4 (1958), págs. 482-489. URL: <https://projecteuclid.org/journals/illinois-journal-of-mathematics>.
- Kuratowski, Kazimierz. Sur l'opération \bar{A} de l'analysis situs. En: *Fundamenta Mathematicae* 3 (1922), págs. 182-199. URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/8fece9ba8b020221d48504ace6548a51164fdbd2>.
- McKinsey, J. C. C. y Alfred Tarski. The algebra of topology. En: *Annals of Mathematics* 45.2 (1944), págs. 141-191. URL: <https://www.jstor.org/stable/1969080>.
- Sherman, D. Variations on Kuratowski's 14-set theorem. En: *The American Mathematical Monthly* 117.2 (2010), págs. 113-123. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0405401>.
- Shum, K. P. A note on Kuratowski's theorem and its related topics. En: *Advances in Pure Mathematics* 7.8 (2017), págs. 381-404. URL: <https://doi.org/10.4236/apm.2017.78025>.

CONJUNTOS TESTIGO

Presentaremos los conjuntos testigos para algunos monoides, semirretículos y retículos. A menos que se diga lo contrario, el espacio es \mathbb{R} con la topología usual.

Del teorema original de Kuratowski

El conjunto testigo para el monoide de Kuratowski es: $A = ((0, 2) \setminus \{1\}) \cup \{3\} \cup ([4, 5] \cap \mathbb{Q})$

Secuencia iniciada con k

1. $A = (0, 2) \setminus \{1\} \cup \{3\} \cup ([4, 5] \cap \mathbb{Q})$
2. $kA = [0, 2] \cup \{3\} \cup [4, 5]$
3. $ckA = (-\infty, 0) \cup (2, 4) \setminus \{3\} \cup (5, \infty)$
4. $kckA = (-\infty, 0] \cup [2, 4] \cup [5, \infty)$
5. $ckckA = (0, 2) \cup (4, 5)$
6. $kckckA = [0, 2] \cup [4, 5]$
7. $ckckckA = (-\infty, 0) \cup (2, 4) \cup (5, \infty)$

Secuencia iniciada con c

8. $cA = (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, 4) \setminus \{3\} \cup ((4, 5) \setminus \mathbb{Q}) \cup (5, \infty)$
9. $kcA = (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, \infty)$
10. $ckcA = (0, 2) \setminus \{1\}$
11. $kckcA = [0, 2]$
12. $ckckcA = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
13. $kckckcA = (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$
14. $ckckckcA = (0, 2)$

Del submonoide $\langle k, i \rangle$ y su dual $c\langle k, i \rangle$

El conjunto testigo es : $A = ((0, 2) \setminus \{1\}) \cup \{3\} \cup ([4, 5] \cap \mathbb{Q})$

Operadores en $\langle k, i \rangle$

1. $I(A) = A$
2. $k(A) = kA$
3. $i(A) = ck(A)$
4. $ik(A) = ckck(A)$
5. $ki(A) = kckc(A)$
6. $kik(A) = kckck(A)$
7. $iki(A) = ckckck(A)$

Operadores en $c\langle k, i \rangle$

8. $cI(A) = cA$
9. $ck(A) = ckA$
10. $ci(A) = kc(A)$
11. $cik(A) = kck(A)$
12. $cki(A) = ckckc(A)$
13. $ckik(A) = ckckck(A)$
14. $ciki(A) = kckckc(A)$

Del semirretículo de supremos $\langle k, i, \vee \rangle$

El conjunto testigo tomado de Yu¹ es

$$T = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup ((2, 3) \setminus \mathbb{Q}) \cup ((3, 5) \setminus \{4\})$$

Submonoide $\langle k, i \rangle$ y uniones no triviales

1. $I(T) = T$
2. $i(T) = (3, 4) \cup (4, 5)$
3. $k(T) = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup [2, 5]$
4. $ik(T) = (2, 5)$
5. $ki(T) = [3, 5]$
6. $iki(T) = (3, 5)$
7. $kik(T) = [2, 5]$
8. $I \vee ik = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup (2, 5)$
9. $I \vee ki = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup ((2, 3) \setminus \mathbb{Q}) \cup [3, 5]$
10. $I \vee iki = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup ((2, 3) \setminus \mathbb{Q}) \cup (3, 5)$
11. $I \vee kik = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup [2, 5]$
12. $ik \vee ki = (2, 5]$
13. $(I \vee ik) \vee ki = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup (2, 5]$

¹yu1978.

Del semirretículo de ínfimos $\langle k, i, \wedge \rangle$

El conjunto testigo es:

$$T = (-\infty, 0] \cup E_1 \cup (1, 2] \cup E_2 \cup \{4\} \cup [5, \infty),$$

donde

$$E_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right), \quad E_2 = \mathbb{Q} \cap (2, 3].$$

Submonoide $\langle k, i \rangle$ (7 elementos)

1. $I(T) = (-\infty, 0] \cup E_1 \cup (1, 2] \cup E_2 \cup \{4\} \cup [5, \infty)$
2. $i(T) = (-\infty, 0] \cup E_1 \cup (1, 2] \cup (5, \infty)$
3. $k(T) = (-\infty, 3] \cup \{4\} \cup [5, \infty)$
4. $ik(T) = (-\infty, 3] \cup (5, \infty)$
5. $ki(T) = (-\infty, 2] \cup [5, \infty)$
6. $kik(T) = (-\infty, 3] \cup [5, \infty)$
7. $iki(T) = (-\infty, 2] \cup (5, \infty)$

Intersecciones no triviales \wedge (6 operaciones)

8. $I \wedge ki = (-\infty, 0] \cup E_1 \cup (1, 2] \cup [5, \infty)$
9. $I \wedge ik = (-\infty, 0] \cup E_1 \cup (1, 2] \cup (\mathbb{Q} \cap (2, 3)) \cup (5, \infty)$
10. $I \wedge kik = (-\infty, 0] \cup E_1 \cup (1, 2] \cup E_2 \cup [5, \infty)$
11. $I \wedge iki = (-\infty, 0] \cup E_1 \cup (1, 2] \cup (5, \infty)$
12. $ki \wedge ik = (-\infty, 2] \cup (5, \infty)$
13. $I \wedge ki \wedge ik = (-\infty, 0] \cup E_1 \cup (1, 2] \cup (5, \infty)$

Observación .1. El conjunto testigo para el semirretículo de ínfimos $\langle k, i, \wedge \rangle$ es el complemento del conjunto testigo para el semirretículo de supremos $\langle k, i, \vee \rangle$. Esto se debe a que la operación binaria \wedge es dual respecto de \vee , mediante la relación

$$a \wedge b = c(ca \vee cb),$$

(véase corolario 1.33).

Del retículo $\langle k, i, \wedge, \vee \rangle$

El Conjunto testigo es: $T = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$, donde:

$$F_1 = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}, \quad F_2 = [2, 4] \setminus \{3 + 1/n : n \in \mathbb{N}\},$$

$$F_3 = (5, 7] \cap \mathbb{Q}, \quad F_4 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi}\right).$$

Empezaremos listando los elementos del semirretículo $\langle k, i, \wedge \rangle$

1.

$$I = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$$

2.

$$k = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \cup [2, 4] \cup [5, 7]$$

3.

$$i = (2, 4) \setminus \left(\{3\} \cup \left\{ 3 + \frac{1}{n} : n > 1 \right\} \right) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right)$$

4.

$$ki = [2, 4] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right] \cup \{6\}$$

5.

$$iki = (2, 4) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right)$$

6.

$$ik = (2, 4) \cup (5, 7)$$

7.

$$kik = [2, 4] \cup [5, 7]$$

Listaremos la uniones entre elementos no comparables en el semirretículo $\langle k, i, \vee \rangle$

8.

$$ik \vee ki = (2, 4) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right] \cup \{6\}$$

9.

$$I \wedge ik = ((2, 4) \setminus \{3 + 1/n : n \in \mathbb{N}\}) \cup ((5, 7) \cap \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi}\right]$$

10.

$$I \wedge ki = ([2, 4] \setminus \{3 + 1/n : n \in \mathbb{N}\}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi}\right] \cup \{6\}$$

11.

$$I \wedge iki = (2, 4) \setminus \left\{3 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi}\right)$$

12.

$$I \wedge kik = ([2, 4] \setminus \{3 + 1/n : n \in \mathbb{N}\}) \cup ((5, 7] \cap \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi}\right]$$

13.

$$I \wedge (ik \wedge ki) = (2, 4) \setminus \{3 + 1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi}\right] \cup \{6\}$$

Ahora listaremos las uniones añadidas $\{ik \vee ki, (I \wedge ki) \vee (I \wedge ik)\}$:

14.

$$ik \vee ki = [2, 4] \cup (5, 7)$$

15.

$$(I \wedge ki) \vee (I \wedge ik) = [2, 4] \setminus \{3 + 1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup ((5, 7) \cap \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi}\right]$$

Listaremos las uniones de I con la clase 3)

16.

$$I \vee iki = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup [2, 4] \cup ((5, 7) \cap \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi}\right]$$

17.

$$I \vee (ki \wedge ik) = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup [2, 4] \cup ((5, 7] \cap \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi}\right]$$

18.

$$I \vee ki = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup [2, 4] \cup ((5, 7] \cap \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right]$$

19.

$$I \vee ik = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup [2, 4] \cup (5, 7)$$

20.

$$I \vee (ki \vee ik) = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup [2, 4] \cup (5, 7)$$

21.

$$I \vee kik = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup [2, 4] \cup [5, 7]$$

Listaremos las uniones entre las clases 3) y 4)

22.

$$(I \wedge kik) \vee ki \vee ik = [2, 4] \cup (5, 7]$$

23.

$$(I \wedge kik) \vee ik = (2, 4) \cup (5, 7]$$

24.

$$(I \wedge kik) \vee iki = [2, 4] \cup ((5, 7] \cap \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right)$$

25.

$$(I \wedge kik) \vee ki = [2, 4] \cup ((5, 7] \cap \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right]$$

26.

$$(I \wedge kik) \vee (ki \wedge ik) = [2, 4] \cup ((5, 7] \cap \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right]$$

27.

$$(I \wedge ki) \vee ik = [2, 4] \cup (5, 7)$$

28.

$$(I \wedge ki) \vee iki = [2, 4] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right) \cup \{6\}$$

29.

$$(I \wedge ki) \vee (I \wedge ik) \vee iki = [2, 4] \cup ((5, 7) \cap \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right]$$

30.

$$(I \wedge ki) \vee (ki \wedge ik) = [2, 4] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right] \cup \{6\}$$

31.

$$(I \wedge ki) \vee (I \wedge ik) \vee (ki \wedge ik) = [2, 4] \cup ((5, 7) \cap \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right]$$

32.

$$(I \wedge ik) \vee ki = [2, 4] \cup ((5, 7) \cap \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right]$$

33.

$$(I \wedge ik) \vee iki = (2, 4) \cup ((5, 7) \cap \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right]$$

34.

$$(I \wedge ik) \vee (ki \wedge ik) = (2, 4) \cup ((5, 7) \cap \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right]$$

35.

$$(I \wedge ki \wedge ik) \vee iki = [2, 4] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(6 + \frac{1}{2n\pi}, 6 + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right] \cup \{6\}$$

Observación .2. El conjunto testigo del retículo $\langle k, i, \wedge, \vee \rangle$, también es conjunto testigo para los semiretículos; de ínfimos $\langle k, i, \wedge \rangle$, de supremos $\langle k, i, \vee \rangle$.

Del monoide *side* $\langle s \rangle$.

El operador *side* introducido en la Definición 2.15 se define por

$$s = k \wedge c,$$

donde k es un operador de clausura sobre el conjunto base X .

En el caso particular considerado, sea $X = \mathbb{N}^*$. Se define el operador de clausura k sobre $\mathcal{P}(X)$ por

$$k(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset, \\ [\text{mín } A, \infty) & \text{si } A \neq \emptyset, \end{cases}$$

donde $[\text{mín } A, \infty) = \{x \in \mathbb{N}^* : x \geq \text{mín } A\}$.

Nota. La construcción anterior no depende esencialmente de trabajar en \mathbb{N}^* . En efecto, si X es un conjunto fijo de cardinalidad al menos la del continuo, entonces puede dotarse de un buen orden tal que contenga un subconjunto ordenado isomorfo a \mathbb{N}^* . En consecuencia, es posible definir un operador de clausura análogo restringiéndose a dicho subconjunto, lo que permite extender esta construcción sin pérdida de las propiedades relevantes.

Aplicando reiteradamente el operador s al conjunto inicial T , donde

$$T = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

es el conjunto de los números naturales pares, se obtiene:

$$s(T) = k(T) \cap c(T) = [2, \infty) \cap \{1, 3, 5, \dots\} = \{3, 5, 7, \dots\},$$

$$s^2(T) = k(s(T)) \cap c(s(T)) = [3, \infty) \cap \{1, 2, 4, 6, 8, \dots\} = \{4, 6, 8, 10, \dots\},$$

$$s^3(T) = k(s^2(T)) \cap c(s^2(T)) = [4, \infty) \cap \{1, 2, 3, 5, 7, 9, \dots\} = \{5, 7, 9, 11, \dots\}.$$

A partir de estos primeros casos se observa un patrón claro: en cada iteración, el conjunto resultante está formado por números naturales mayores o iguales que un cierto umbral, y cuya paridad alterna en cada paso. Más precisamente, se obtiene por inducción que

$$s^n(T) = \{x \in \mathbb{N} : x \geq n + 2 \text{ y } x \equiv n \pmod{2}\}.$$

Esta expresión describe completamente la estructura de las iteraciones: el umbral

mínimo crece linealmente con n , mientras que la condición de paridad depende de si n es par o impar.

De esta caracterización se deduce que las iteraciones se organizan en dos cadenas estrictamente descendentes respecto a la inclusión:

$$s(T) \supset s^3(T) \supset s^5(T) \supset \dots,$$

$$s^2(T) \supset s^4(T) \supset s^6(T) \supset \dots.$$

En efecto, si n es fijo, entonces todos los conjuntos $s^{n+2k}(T)$ (con $k \geq 0$) tienen la misma paridad, pero su cota inferior aumenta estrictamente.

Sea ahora $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$s^n(T) \supset s^{n+2}(T),$$

ya que ambos conjuntos contienen elementos de la misma paridad, pero el segundo exige la condición más restrictiva $x \geq n + 4$.

Además, la inclusión es estricta. En efecto, el elemento $n + 2$ pertenece a $s^n(T)$, pues

$$n + 2 \geq n + 2 \quad \text{y} \quad n + 2 \equiv n \pmod{2},$$

mientras que $n + 2 \notin s^{n+2}(T)$, ya que no satisface $x \geq n + 4$. Por lo tanto,

$$s^n(T) \supsetneq s^{n+2}(T).$$

Como consecuencia, para todo $m \neq n$ se tiene

$$s^n(T) \neq s^m(T).$$

En efecto, si m y n tienen la misma paridad, pertenecen a la misma cadena estrictamente descendente; si tienen distinta paridad, los conjuntos contienen números de distinta paridad y no pueden coincidir.

En conclusión, todos los operadores s^n son distintos entre sí (véase la definición 1.2). Además, dado que T distingue las imágenes de cualquier par de operadores distintos del monoide $\langle s \rangle$, se sigue que T es un conjunto testigo (véase definición 2.3).

FAMILIAS TESTIGO

Monoides generados por un solo operador

Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología usual y $n \geq 1$. Consideremos una familia $\mathcal{E} = \{E_j : 1 \leq j \leq n\}$ de intervalos dos a dos disjuntos. Para cada operador $f \in \{i, k, c\}$, definimos:

$$E_j = \begin{cases} [j, j+1) & \text{si } f = i, \\ (j, j+1] & \text{si } f = k, \\ (j, j+1) & \text{si } f = c. \end{cases}$$

Entonces, en cada caso,

$$f(E_j) \neq E_j \quad \text{y} \quad f(E_j) \neq f(E_{j'}) \quad \text{si } j \neq j'.$$

Además, los E_j son distintos entre sí por construcción. Por lo tanto, todos los conjuntos

$$E_1, \dots, E_n, f(E_1), \dots, f(E_n)$$

son distintos, y se obtiene

$$g(\mathcal{E}) = 2n.$$

La construcción es claramente extensible por inducción en n , añadiendo en cada paso un nuevo intervalo disjunto, lo que incrementa en dos el número de conjuntos distintos.

Semirretículo ínfimo–interior

Teorema .1. Sea $L = \langle i, \wedge \rangle$ el semirretículo generado por un operador interior i y la operación ínfimo \wedge . Para todo $n \geq 1$ se cumple

$$s_n(L) = 3^n - 1.$$

Demostración. Procedemos a demostrar que la cota superior es alcanzable. Para ello fijamos el conjunto base

$$X = \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}.$$

Para cada $n \geq 1$ consideramos sobre X la topología τ_n generada por la subbase

$$\mathcal{S}_n = \{ \{x \in X : x_k = 2\} : 1 \leq k \leq n \}.$$

Definimos la familia $\mathcal{E}_n = \{E_1, \dots, E_n\}$ mediante

$$E_k = \{x \in X : x_k \in \{1, 2\}\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

De acuerdo con la Definición de la topología, el interior de cada conjunto es precisamente

$$i(E_k) = \{x \in X : x_k = 2\}.$$

A continuación describimos la órbita generada por \mathcal{E}_n bajo las operaciones del semirretículo. Para cada vector $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1, 2\}^n$ formamos el conjunto

$$F_\varepsilon = \bigcap_{k=1}^n A_k(\varepsilon_k), \text{ donde } A_k(0) = i(E_k), \quad A_k(1) = E_k, \quad A_k(2) = X.$$

No vacuidad de F_ε . Para cada ε construimos explícitamente un punto $x^{(\varepsilon)} \in X$ definiendo sus coordenadas como sigue:

$$x_k^{(\varepsilon)} = \begin{cases} 2, & \text{si } \varepsilon_k = 0, \\ 1, & \text{si } \varepsilon_k = 1, \\ 0, & \text{si } \varepsilon_k = 2. \end{cases}$$

Se verifica inmediatamente que $x^{(\varepsilon)}$ satisface todas las restricciones impuestas por los factores $A_k(\varepsilon_k)$:

- Si $\varepsilon_k = 0$, $x_k^{(\varepsilon)} = 2 \in i(E_k) = A_k(0)$.
- Si $\varepsilon_k = 1$, $x_k^{(\varepsilon)} = 1 \in E_k = A_k(1)$.
- Si $\varepsilon_k = 2$, no hay restricción alguna, pues $A_k(2) = X$.

Por tanto, $x^{(\varepsilon)} \in F_\varepsilon$ y $F_\varepsilon \neq \emptyset$.

Distinción de los conjuntos. Sean $\varepsilon, \delta \in \{0, 1, 2\}^n$ con $\varepsilon \neq \delta$. Existe al menos un índice k tal que $\varepsilon_k \neq \delta_k$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\varepsilon_k = 0$ y $\delta_k = 1$ (los restantes casos son análogos). Todo elemento de F_ε debe tener su k -ésima coordenada igual a 2 porque $\varepsilon_k = 0$ exige pertenencia a $i(E_k)$. Por otro lado, los elementos de F_δ solo requieren que la coordenada k esté en $\{1, 2\}$, ya que $\delta_k = 1$ impone la restricción E_k . El punto $x^{(\delta)}$ construido anteriormente (véase **No vacuidad de F_ε**) cumple $x_k^{(\delta)} = 1$, por lo que pertenece a F_δ pero no a F_ε . En consecuencia, $F_\varepsilon \neq F_\delta$.

De lo anterior se deduce que los 3^n conjuntos F_ε son no vacíos y dos a dos distintos. Nótese que el caso particular $\varepsilon = (2, \dots, 2)$ produce $F_\varepsilon = X$, el cual no se considera dentro de la órbita estricta generada por \mathcal{E}_n . Por consiguiente tenemos que:

$$|\text{Orb}_L(\mathcal{E}_n)| = 3^n - 1.$$

De esto se sigue que

$$g(L, \tau_n, \mathcal{E}_n) = 3^n - 1,$$

y, por Definición de $s_n(L)$, concluimos que

$$s_n(L) = 3^n - 1.$$

Comentario. En esta construcción el conjunto base X permanece fijo, mientras que la maximización de $g(L, \tau, \mathcal{E}_n)$ se logra variando únicamente la topología τ_n . La riqueza combinatoria de la órbita proviene de la elección de la subbase, que permite codificar de manera independiente las decisiones en cada coordenada. \square

A continuación crearemos, para cada $n \geq 1$, una familia finita $\mathcal{E}_n = \{E_1, \dots, E_n\}$ de subconjuntos de \mathbb{R} con la topología usual que satisface dicha igualdad. La construcción se mantiene íntegramente dentro del compacto $[-1/9, 1]$ y no requiere modificar la topología.

Teorema .2. *Para todo $n \geq 1$ existe una familia $\mathcal{E}_n = \{E_1, \dots, E_n\}$ de subconjuntos de \mathbb{R} tal que*

$$g(\langle i, \wedge \rangle, \tau_{\text{usual}}, \mathcal{E}_n) = 3^n - 1.$$

Construcción de \mathcal{E}_n . Para cada nivel $m \in \{1, \dots, n\}$ consideremos el conjunto de Cantor de nivel m , dado por la unión disjunta de 2^m intervalos cerrados de longitud 3^{-m} :

$$C_m = \bigcup_{k=0}^{2^m-1} [a_k^{(m)}, b_k^{(m)}] \subseteq [0, 1].$$

Fijemos una sucesión estrictamente decreciente $(r_m)_{m \geq 1}$ de números reales positivos y menores que $1/9$; por ejemplo,

$$r_m = \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{10^m}\right).$$

Definimos entonces, para cada $j = 1, \dots, n$,

$$E_j = \bigcup_{k=0}^{2^j-1} [a_k^{(j)} - r_j, b_k^{(j)} - r_j], \quad \text{int}(E_j) = \bigcup_{k=0}^{2^j-1} (a_k^{(j)} - r_j, b_k^{(j)} - r_j)$$

Todos los intervalos involucrados están contenidos en $[-1/9, 1]$.

Para $i > j$ los 2^i intervalos de E_i se agrupan en 2^j bloques de 2^{i-j} intervalos. En cada bloque, el primer intervalo *no* está contenido en el intervalo correspondiente de E_j ; los $2^{i-j} - 1$ restantes *sí* lo están.

Comentario. Este resultado pone de manifiesto que, si bien la cota $3^n - 1$ se obtiene en abstracto variando la topología sobre un conjunto fijo, también puede alcanzarse en un espacio clásico como \mathbb{R} con su topología usual. En consecuencia, la complejidad combinatoria del semirretículo $\langle i, \wedge \rangle$ no es un mero artefacto de construcciones abstractas, sino que está presente de manera natural en contextos topológicos estándar. Para una exposición detallada del cálculo del interior y el ínfimo en estas construcciones, véase [este enlace](#).

Semirretículo supremo-clausura

Según la definición del operador interior, tenemos que $i = ckc$, debido a la definición del operador complemento podemos obtener $cic = k$ multiplicando a ambos lados por c . De esta manera por el Teorema .1 el semirretículo generado por el operador clausura y la operación binaria supremo, $\langle k, \vee \rangle$ tiene la misma cota que el semirretículo ínfimo-interior para una familia finita de tamaño n .

Teorema .3. Sea $L = \langle k, \vee \rangle$ el semirretículo generado por un operador clausura k y la operación supremo \vee . Para todo $n \geq 1$ se cumple : $s_n(L) = 3^n - 1$.

Teorema .4. Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología usual τ . Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\mathcal{F} = \{F_0, F_1, \dots, F_{n-1}\}, \quad F_i = \left(\frac{1}{2^{2i+1}}, \frac{1}{2^{2i}} \right].$$

Entonces

$$g(L, \tau, \mathcal{F}) = 3^n - 1.$$

Demostración. El homeomorfismo $\varphi(x) = -\log_2 x$ transforma \mathcal{F} en

$$B_i = [2i, 2i + 1), \quad k(B_i) = [2i, 2i + 1] \quad (0 \leq i \leq n - 1).$$

Estos generadores satisfacen dos propiedades clave:

- (i) Los B_i son disjuntos dos a dos.
- (ii) $k(B_i) \cap k(B_j) = \emptyset$ para $i \neq j$ (pues $k(B_i) \subseteq [2i, 2i + 1]$ y $2i + 1 < 2j$ si $i < j$).

Para cada par disjunto (U, V) con $U, V \subseteq \{0, \dots, n - 1\}$ definimos

$$y(U, V) = \bigcup_{i \in U} k(B_i) \cup \bigcup_{i \in V} B_i.$$

Hay 3^n tales pares (cada índice va a U , a V o a ninguno). Probamos que y es inyectiva.

Sean $(U, V) \neq (U', V')$. Supongamos $j \in U$ y $j \notin U'$ (los otros casos son análogos). Consideremos $p_j = 2j + 1 \in k(B_j) \setminus B_j$. Por (ii), $p_j \notin k(B_i)$ para $i \neq j$, y por (i) $p_j \notin B_i$ para todo i . Luego:

- $p_j \in k(B_j) \subseteq y(U, V)$.
- $p_j \notin y(U', V')$, pues $j \notin U'$ y ningún otro generador ni su clausura contiene a p_j .

Por tanto $y(U, V) \neq y(U', V')$. Así y es inyectiva y $|\text{Im}(y)| = 3^n$. El vacío corresponde a (\emptyset, \emptyset) , luego hay $3^n - 1$ conjuntos no vacíos. \square

Comentario. Nótese que los complementos de la familia testigo \mathcal{E} del semirretículo ínfimo interior, es familia testigo del semirretículo supremo clausura. Viceversa mente igual el complemento de la familia \mathcal{F} Para una construcción explícita de todos los conjuntos generados en la recta real, incluyendo el cálculo detallado de cada operación de clausura y supremo, consúltese **este enlace**

Retículo complemento

Sea $X = \{0, 1\}^n$ con la topología producto. Para todo $i \in \mathbb{N}^*$ tal que $1 \leq i \leq n$, definimos

el conjunto $E_i := \{x \in X : x_i = 1\}$, la familia $\mathcal{E} := \{E_i : 1 \leq i \leq n\}$.

Para todo $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, definimos

$$A_\varepsilon := \bigcap_{1 \leq i \leq n} E_i^{\varepsilon_i}, \quad \text{donde } E_i^1 = E_i, E_i^0 = X \setminus E_i.$$

Entonces $A_\varepsilon = \{(1 - \varepsilon_1, \dots, 1 - \varepsilon_n)\}$, por lo que $\{A_\varepsilon : \varepsilon \in \{0, 1\}^n\}$ es la familia de todos los subconjuntos unitarios de X . Además, para todo $S \subseteq X$,

$$S = \bigcup_{\varepsilon \in T} A_\varepsilon, \quad \text{donde } T = \{\varepsilon \in \{0, 1\}^n : (1 - \varepsilon_1, \dots, 1 - \varepsilon_n) \in S\}.$$

Por tanto, el retículo $(\langle c \rangle(\mathcal{E}), \cup, \cap)$ coincide con el retículo $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$ que tiene por cardinal $2^{|X|}$, siendo $X = \{0, 1\}^n$ tenemos el cardinal es 2^{2^n} .

Retículo de Dedekind

El retículo generado por la familia de conjuntos \mathcal{E} y las operaciones union e intersección, corresponden al numero de funciones booleanas monótonas de n variables, donde n es el tamaño de la familia \mathcal{E} . A continuación se listan algunos casos.

Caso $n = 2$ Las funciones booleanas monótonas en dos variables x_1, x_2 son:

$$f_1 = 0$$

$$f_2 = x_1 \wedge x_2$$

$$f_3 = x_1$$

$$f_4 = x_2$$

$$f_5 = x_1 \vee x_2$$

$$f_6 = 1$$

Por lo tanto, $D_2 = 6$.

Caso $n = 3$ Las funciones booleanas monótonas en tres variables x_1, x_2, x_3 son:

$$f_1 = 0$$

$$f_2 = 1$$

$$f_3 = x_1$$

$$f_4 = x_2$$

$$f_5 = x_3$$

$$f_6 = x_1 \wedge x_2$$

$$f_7 = x_1 \wedge x_3$$

$$f_8 = x_2 \wedge x_3$$

$$f_9 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$$

$$f_{10} = x_1 \vee x_2$$

$$f_{11} = x_1 \vee x_3$$

$$f_{12} = x_2 \vee x_3$$

$$f_{13} = x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)$$

$$f_{14} = x_2 \vee (x_1 \wedge x_3)$$

$$f_{15} = x_3 \vee (x_1 \wedge x_2)$$

$$f_{16} = (x_1 \vee x_2) \wedge x_3$$

$$f_{17} = (x_1 \vee x_3) \wedge x_2$$

$$f_{18} = (x_2 \vee x_3) \wedge x_1$$

$$f_{19} = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)$$

$$f_{20} = x_1 \vee x_2 \vee x_3$$

Por lo tanto, $D_3 = 20$.

Comentario. Los números de Dedekind $D(n)$ cuentan las funciones booleanas monótonas de n variables. Para $n = 1$ hasta $n = 5$ se tiene $D(1) = 3$, $D(2) = 6$, $D(3) = 20$, $D(4) = 168$ y $D(5) = 7581$. Una enumeración completa para $n \leq 5$ puede consultarse en [este enlace](#).

Semirretículo clausura-ínfimo

Consideremos el monoide generado por las operaciones de clausura k (respecto de una topología τ) e intersección \wedge . Dado un espacio topológico (X, τ) y una familia finita $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, denotamos por $g(\langle k, \wedge \rangle, \tau, \mathcal{F})$ el cardinal del conjunto de todos los subconjuntos de X que pueden obtenerse a partir de \mathcal{F} mediante aplicaciones sucesivas de k e \wedge .

Proposición. Para todo $n \geq 2$ no existe una cota superior finita para $g(\langle k, \wedge \rangle, \tau, \mathcal{F})$ cuando \mathcal{F} recorre todas las familias de n subconjuntos en espacios topológicos adecuados.

Justificación mediante un ejemplo con dos conjuntos. Basta exhibir un espacio topológico y una familia de exactamente dos conjuntos que genere infinitos elementos. Sea $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ dotado de la topología cuyos cerrados son los conjuntos k -cerrados para el operador de clausura

$$k(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset, \\ [\text{mín } A, \infty) & \text{si } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Sean

$$E_0 = \{2, 4, 6, \dots\} \quad (\text{números pares}), \quad O = \{1, 3, 5, \dots\} \quad (\text{números impares}).$$

Definimos recursivamente para $j \geq 1$: $E_j = E_{j-1} \cap k(k(E_{j-1}) \cap O)$ Una inducción directa muestra que

$$E_j = E_0 \cap [2j + 2, \infty) = \{2j + 2, 2j + 4, 2j + 6, \dots\},$$

y por tanto todos los E_j son distintos. En consecuencia

$$g(\langle k, \wedge \rangle, \tau, \{E_0, O\}) = \infty.$$

Si $n \geq 2$, podemos añadir $n - 2$ conjuntos arbitrarios a la familia sin reducir el número de combinaciones generadas (por ejemplo, réplicas de E_0 u O). Así, para cada $n \geq 2$ existe una familia de tamaño n que produce infinitos conjuntos.

Nota. Si un espacio topológico (Y, τ') contiene un subespacio homeomorfo a (\mathbb{N}^*, τ) , entonces la construcción anterior puede trasladarse a Y . Basta tomar dos subconjuntos de Y que bajo el homeomorfismo se correspondan con E_0 y O , y definir inductivamente los análogos de los E_j usando el operador clausura de Y . Por tanto, cualquier familia \mathcal{F} que contenga dos conjuntos con una disposición homeomorfa a $\{E_0, O\}$ generará también infinitos elementos distintos bajo $\langle k, \wedge \rangle$.

EJEMPLOS DE ESPACIOS HAUSDORFF

Espacio puerta no discreto

Definición .5. Un espacio topológico (X, τ) es un **espacio puerta** (door space) si todo subconjunto $Y \subseteq X$ es abierto o cerrado.

Ejemplo. Sea $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con la topología

$$\tau = \{U \subseteq X : \text{si } \infty \in U \text{ entonces } X \setminus U \text{ es finito}\}.$$

Equivalentemente, los abiertos son:

- cualquier subconjunto de \mathbb{N} (cada natural es aislado),
- cualquier conjunto que contenga a ∞ y cuyo complemento (en \mathbb{N}) sea finito.

Este espacio tiene las siguientes propiedades:

- **Hausdorff:** \mathbb{N} es discreto; para separar $n \in \mathbb{N}$ y ∞ tomamos los abiertos $\{n\}$ y $X \setminus \{n\}$ (este último contiene a ∞ y su complemento es $\{n\}$, finito).
- **Compacto:** es la compactificación de Alexandroff de \mathbb{N} discreto.
- **No discreto:** $\{\infty\}$ no es abierto porque todo abierto que contiene a ∞ debe contener infinitos naturales.
- **Espacio puerta:** Dado $A \subseteq X$:
 - Si $\infty \notin A$, entonces $A \subseteq \mathbb{N}$ es abierto (todo subconjunto de \mathbb{N} es abierto).
 - Si $\infty \in A$ y $X \setminus A$ es finito, entonces A es abierto por definición.
 - Si $\infty \in A$ y $X \setminus A$ es infinito, entonces $X \setminus A \subseteq \mathbb{N}$ es abierto, luego A es cerrado.

En cualquier caso, A es abierto o cerrado.

Por tanto, (X, τ) es un espacio puerta Hausdorff, compacto, infinito y no discreto.

Espacios extremadamente desconexos (ED) y abiertamente irresolubles (OU) que no son espacios puerta

Definiciones.

- **Espacio extremadamente desconexo (ED):** Un espacio topológico (X, τ) es **extremadamente desconexo** si la clausura de todo conjunto abierto es abierta; es decir, para todo abierto $U \subseteq X$, \overline{U} es abierto.
- **Espacio irresoluble:** Un espacio topológico (X, τ) se dice **irresoluble** si no puede expresarse como unión de dos subconjuntos densos disjuntos.
- **Espacio abiertamente irresoluble (OU):** Un espacio X es **abiertamente irresoluble** (OU) si todo subconjunto abierto no vacío es irresoluble (como subespacio). Equivalentemente, ningún abierto no vacío puede escribirse como unión de dos subconjuntos densos disjuntos.

Una relación clave: espacios maximales. En topología, un espacio X es **maximal** si su topología es maximal entre todas las topologías T_1 sobre X sin puntos aislados. Una caracterización clásica, que aparece en el artículo de Todorčević y Uzcátegui, es la siguiente: “**Un espacio es maximal si, y solo si, es extremadamente desconexo, nodec y todo conjunto abierto es irresoluble**”²

Por lo tanto, un espacio maximal es a la vez:

- **ED:** Extremadamente desconexo (por definición).
- **OU:** Abiertamente irresoluble (pues todo abierto es irresoluble).

Observación sobre $\beta\mathbb{N}$. Cabe señalar que la compactificación de Stone–Čech $\beta\mathbb{N}$ es ED y también OU (ya que \mathbb{N} es abierto y discreto en $\beta\mathbb{N}$; todo abierto no vacío contiene un punto aislado y, por tanto, es irresoluble). Así, $\beta\mathbb{N}$ constituye otro ejemplo de un espacio ED y OU que no es espacio puerta, pero con la diferencia de que no es maximal (pues $\beta\mathbb{N}$ no es numerable y tiene muchos puntos de acumulación). Además, \mathbb{N} es un espacio de Hausdorff, lo cual se preserva en su compactificación de Stone–Čech.

²todorcevic_uzcategui_2014.

Espacio abiertamente irresoluble no extremadamente desconexo

Definiciones previas.

- **Espacio irresoluble:** Un espacio topológico (X, τ) se dice **irresoluble** si no puede expresarse como unión de dos subconjuntos densos disjuntos.
- **Espacio abiertamente irresoluble (OU):** Un espacio X es **abiertamente irresoluble** (OU) si todo subconjunto abierto no vacío es irresoluble (como subespacio). Equivalentemente, ningún abierto no vacío puede escribirse como unión de dos subconjuntos densos disjuntos.
- **Espacio submaximal:** (X, τ) es **submaximal** si todo subconjunto denso es abierto.

Todo espacio submaximal es *hereditariamente irresoluble* (todo subespacio es irresoluble) y, en particular, abiertamente irresoluble.

- **Espacio extremadamente desconexo (ED):** Un espacio topológico (X, τ) es **extremadamente desconexo** si la clausura de todo conjunto abierto es abierta; es decir, para todo abierto $U \subseteq X$, \overline{U} es abierto.

Ejemplo. Construimos un espacio X como sigue:

$$X = \{p\} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N}),$$

donde p es un punto que no pertenece al producto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Los puntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son aislados. Para el punto p , una base local de entornos abiertos viene dada por

$$B_n = \{p\} \cup \{(k, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es decir, B_n contiene a p y a todos los pares cuya primera coordenada sea al menos n .

Propiedades.

1. X es submaximal (y por tanto abiertamente irresoluble). Determinemos los subconjuntos densos de X . Como cada punto $(k, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es aislado, si un conjunto $D \subseteq X$ no contiene a algún (k, ℓ) , entonces (k, ℓ) no pertenece a la clausura de D (pues el propio $\{(k, \ell)\}$ es un abierto que no intersecta a D). Por tanto, para que D sea denso, debe

contener **todos** los puntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Así, las únicas opciones son:

$$D = X \quad \text{o} \quad D = X \setminus \{p\} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Ambos conjuntos son abiertos en X : X es todo el espacio y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es abierto por ser unión de los abiertos aislados. Luego todo subconjunto denso es abierto; X es submaximal. En consecuencia, X es hereditaria y abiertamente irresoluble.

2. X no es extremadamente desconexo. Considérese el conjunto abierto

$$G = \mathbb{N} \times \{0\} = \{(n, 0) : n \in \mathbb{N}\}.$$

G es abierto porque consiste únicamente de puntos aislados. Su clausura es

$$\text{cl}(G) = G \cup \{p\},$$

ya que p es punto límite de G (cada entorno básico B_n contiene a $(n, 0) \in G$) y ningún otro punto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es punto límite de G (pues son aislados). Sin embargo, $\text{cl}(G)$ no es abierto: ningún B_n está contenido en $G \cup \{p\}$, porque B_n contiene, por ejemplo, el punto $(n, 1)$, que no pertenece a $G \cup \{p\}$. Por tanto, X no es extremadamente desconexo.

3. X es Hausdorff. Veamos que dos puntos distintos cualesquiera de X pueden separarse por abiertos disjuntos.

- **Dos puntos aislados.** Si $(k, \ell), (k', \ell') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $(k, \ell) \neq (k', \ell')$, entonces $\{(k, \ell)\}$ y $\{(k', \ell')\}$ son abiertos (por ser puntos aislados) y son disjuntos.
- **El punto p y un aislado.** Dados p y $(k, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, elegimos un entorno básico de p con índice $n > k$, es decir,

$$B_n = \{p\} \cup \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i \geq n\}.$$

Como $n > k$, ningún punto de B_n tiene primera coordenada igual a k ; en particular $(k, \ell) \notin B_n$. Por lo tanto,

$$B_n \cap \{(k, \ell)\} = \emptyset,$$

y ambos son abiertos: $\{(k, \ell)\}$ es abierto por ser aislado, y B_n es abierto por definición de la base local de p .

Extremadamente desconexo pero no abiertamente irresoluble

Definiciones.

- **Espacio extremadamente desconexo (ED):** Un espacio topológico (X, τ) es **extremadamente desconexo** si la clausura de todo conjunto abierto es abierta; es decir, para todo abierto $U \subseteq X$, \bar{U} es abierto.
- **Espacio irresoluble:** Un espacio topológico (X, τ) se dice **irresoluble** si no puede expresarse como unión de dos subconjuntos densos disjuntos.
- **Espacio abiertamente irresoluble (OU):** Un espacio X es **abiertamente irresoluble** (OU) si todo subconjunto abierto no vacío es irresoluble (como subespacio). Equivalentemente, ningún abierto no vacío puede escribirse como unión de dos subconjuntos densos disjuntos.

Definición .6 (Álgebra booleana completa). Una **álgebra booleana** es una estructura $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ que satisface las leyes del álgebra de proposiciones (asociatividad, conmutatividad, absorción, distributividad, complemento). Es **completa** si todo subconjunto $S \subseteq B$ posee un supremo $\bigvee S$ y un ínfimo $\bigwedge S$ con respecto al orden parcial definido por $a \leq b \iff a \wedge b = a$.

Definición .7 (Abierto regular). Sea X un espacio topológico. Un conjunto abierto $U \subseteq X$ es **regular** si coincide con el interior de su clausura:

$$U = \text{int}(\text{cl}(U)).$$

La familia de todos los abiertos regulares de X forma un álgebra booleana completa, denotada $\text{RO}(X)$, con las operaciones:

$$U \wedge V = U \cap V, \quad U \vee V = \text{int}(\text{cl}(U \cup V)), \quad \neg U = \text{int}(X \setminus U).$$

Definición .8 (Espacio de Stone). Dada un álgebra booleana B , su **espacio de Stone** $\text{Ult}(B)$ es el conjunto de todos los ultrafiltros de B dotado de la topología generada por los conjuntos

$$\{\mathcal{U} \in \text{Ult}(B) : b \in \mathcal{U}\}, \quad b \in B.$$

Este espacio es compacto, Hausdorff y totalmente desconexo; los conjuntos de la base son exactamente los clopen de $\text{Ult}(B)$.

Ejemplo (Cubierta de Gleason³ de $[0, 1]$). Sea \mathbb{B} el álgebra booleana completa de los

³A. M. Gleason. Projective topological spaces. En: *Illinois Journal of Mathematics* 2.4 (1958),

abiertos regulares de $[0, 1]$ y $E = \text{Ult}(\mathbb{B})$ su espacio de Stone, la **cubierta de Gleason** de $[0, 1]$. Este espacio satisface:

- **Extremadamente desconexo:** según Gleason, el absoluto de un compacto Hausdorff es extremadamente desconexo.
- **No OU:** El espacio $[0, 1]$ es resoluble ($A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ es denso con interior vacío). La proyección natural $\pi : E \rightarrow [0, 1]$ es continua, perfecta e irreducible; $\pi^{-1}[A]$ es denso en E con interior vacío, luego E es resoluble (y por tanto no puede ser abiertamente irresoluble).
- **No es espacio puerta:** E es infinito y no tiene puntos aislados (el álgebra \mathbb{B} carece de átomos), mientras que un compacto Hausdorff puerta infinito posee exactamente un punto no aislado.

Así, la cubierta de Gleason de $[0, 1]$ es un espacio extremadamente desconexo, no abiertamente irresoluble y no puerta.