

Análisis y optimización de portafolios en la Bolsa de Valores de Colombia con el modelo de Markowitz: un enfoque en el Mercado Global Colombiano.

Portfolios analysis and optimization in Colombian Stock Exchange with Markowitz model: a focus on the Global Colombian Market.

Olga Patricia Chacón-Arias¹, David Santiago Pabón-Serrano², Angélica Valentina Guerrero-Hernandez³

³ Docente de Ingeniería Industrial, PhD en Ciencias Administrativas, Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia. opchacon@uis.edu.co

² Estudiante de Ingeniería Industrial, Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia. david2192174@correo.uis.edu.co

³ Estudiante de Ingeniería Industrial, Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia. Angelica2200378@correo.uis.edu.co

RESUMEN

La Bolsa de Valores de Colombia (BVC) y el Mercado Global Colombiano (MGC) ofrecen oportunidades de inversión en valores nacionales e internacionales, respectivamente. Basándose en la Teoría Moderna de Portafolios de Harry Markowitz, esta investigación analiza la optimización de portafolios en la BVC y el impacto de integrar acciones internacionales del MGC. Utilizando datos históricos de precios de acciones entre 2013 y 2024, se implementó el modelo de Markowitz para evaluar el riesgo y rendimiento de diversas asignaciones, identificando un portafolio óptimo de acciones colombianas con alta diversificación y desempeño, compuesto por ENKA, PROMIGAS, NUTRESA, ISA, GEB, y BANCOLOMBIA. La inclusión de acciones internacionales, en este caso, APPLE y AMAZON mejoró significativamente la relación rendimiento-riesgo del portafolio, por otro lado, la adición de estas dos acciones más BAC, redujo de forma notoria el riesgo asociado al portafolio.

El estudio evidencia que los rendimientos diarios de las acciones presentan distribuciones de colas pesadas, reflejando alta volatilidad y la posibilidad de eventos extremos. Los hallazgos resaltan los beneficios de la diversificación y el potencial de los mercados de capitales colombianos como herramientas accesibles de inversión. Este análisis no solo contribuye al conocimiento práctico sobre la gestión de portafolios en el contexto colombiano, sino que también amplía la comprensión del impacto de la integración de mercados internacionales en la optimización de inversiones.

PALABRAS CLAVE: Riesgo de portafolio, rentabilidad del portafolio, inversiones, Bolsa de Valores, acciones y diversificación.

ABSTRACT

The Colombian Stock Exchange (BVC) and the Colombian Global Market (MGC) provide investment opportunities in both national and international securities. Based on Harry Markowitz's Modern Portfolio Theory, this study examines portfolio optimization within the BVC and the impact of integrating international stocks from the MGC. Using historical stock price data from 2013 to 2024, the Markowitz model was applied to evaluate risk and return across various allocations, identifying an optimal portfolio of Colombian stocks with high diversification and performance, consisting of ENKA, PROMIGAS, NUTRESA, ISA, GEB, and BANCOLOMBIA. The inclusion of international stocks, in this case, APPLE and AMAZON, significantly enhance the portfolio's risk-return ratio.

The findings reveal the daily stock return exhibit heavy-tailed distributions, reflecting high volatility and the potential for extreme events. The study highlights the benefits of diversification and the potential of Colombian capital markets as an accessible investment tools. This analysis not only provides practical insights into the portfolio management in the Colombian context but also expands the understanding of the impact of integrating international markets on investments optimization.

KEYWORDS: Portfolio risk, portfolio return, investments, stock exchange, stocks and diversification.

1. INTRODUCCIÓN

El mercado accionario ha sido históricamente reconocido como una fuente sustancial, relevante y significativa de ingresos, permitiendo a los inversionistas obtener rendimientos variables, los cuales están directamente relacionados con el nivel de riesgo que deciden asumir al momento de realizar sus inversiones. Esta selección de activos, conocida como portafolio, está basada en la premisa de que, a mayor nivel de riesgo asumido, mayor será el rendimiento esperado.

Para llevar a cabo una selección adecuada de las acciones que conformarán el portafolio, es necesario realizar un análisis previo que permita mitigar el riesgo de pérdida de valor, sin comprometer una rentabilidad atractiva que justifique la inversión inicial. En este contexto, Harry Max Markowitz, economista estadounidense galardonado con el Premio Nobel, propuso en 1952 un modelo matemático conocido como la Teoría Moderna de Portafolios (Modern Portfolio Theory, MPT). Este modelo posibilita la cuantificación del riesgo y el rendimiento de un portafolio, y ofrece mecanismos para minimizar el riesgo asociado, permitiendo al inversionista alcanzar el rendimiento esperado con un menor nivel de riesgo. (Markowitz H. M., 1952).

En el ámbito colombiano, el mercado accionario se desarrolla en la Bolsa de Valores de Colombia (BVC), con 33 empresas nacionales y 19 compañías internacionales que cotizan a través del Mercado Global Colombiano (MGC), constituyendo una atractiva fuente de inversión y generación de riqueza.

Dado el potencial del mercado de valores colombiano, el objetivo de este proyecto es construir un portafolio óptimo para un inversionista en la BVC, que logre reducir el riesgo y maximizar el rendimiento, aplicando el principio de diversificación propuesto por Markowitz. Es decir, mediante la inclusión de una combinación de acciones nacionales e internacionales en el portafolio, se busca medir el riesgo y minimizar la exposición a pérdidas significativas, en particular, al incorporar acciones internacionales del MGC. Además, el presente estudio tiene la intención de contribuir al conocimiento sobre los instrumentos financieros que conforman la BVC, así como al funcionamiento general del mercado de valores en Colombia.

El presente artículo se estructura de la siguiente manera: la sección 1, la cual se centra en la metodología de la investigación, es decir, los pasos que se siguieron para el correcto desarrollo del proceso investigativo que permitió la consecución de los objetivos propuestos. La sección 2, donde se presenta el análisis de la literatura. Dicho análisis permite visualizar lo propuesto por diferentes autores en el tema accionario, funcionando como base teórica del proyecto. La sección 3, donde se expresan los resultados obtenidos en la conformación de una cartera de activos nacionales. La sección 4, centrada en la distribución de probabilidades de los rendimientos de las acciones. Posteriormente la sección 5, en la cual se adicionan las acciones del MGC y se realiza la respectiva comparación de parámetros clave para determinar si la adición de estas beneficia al portafolio. Finalmente, la sección 6, donde se concluye y se exponen las limitaciones y recomendaciones del estudio.

1.1. Teoría de Markowitz

Para el correcto entendimiento del presente artículo, es fundamental presentar una breve explicación sobre el modelo propuesto por Harry Markowitz. La Teoría Moderna de Portafolios (1952) es un modelo fundamental en la teoría de carteras, que permite a los inversionistas construir portafolios eficientes que optimicen el rendimiento esperado para un nivel dado de riesgo, o minimicen el riesgo para un rendimiento esperado determinado. El modelo se basa en la diversificación de activos y establece que, al combinar activos con correlaciones no perfectas, es posible reducir el riesgo total sin sacrificar el rendimiento esperado.

El rendimiento esperado de un portafolio se calcula con la ponderación de los rendimientos de los activos individuales. Para un portafolio de n activos:

$$\bar{R} = \sum P_{ij} * R_{ij}$$

Donde:

P_{ij} , es la probabilidad de que suceda el rendimiento, se encuentra dividiendo 1 sobre el número total de rendimientos.

R_{ij} , se refiere al rendimiento de la acción.

El riesgo del portafolio, medido como la desviación estándar de los rendimientos, (sin tomar en cuenta el reparto de dividendos) se calcula considerando la desviación estándar de los activos individuales. La fórmula para el riesgo se define cómo:

$$\sigma = \sqrt{\sum P_{ij}(R_{ij} - \bar{R}_i)}$$

Donde:

P_{ij} , es la probabilidad de ocurrencia de un rendimiento.

R_{ij} , se refiere al rendimiento de la acción.

\bar{R}_i , hace referencia al rendimiento promedio de la acción.

El objetivo principal de la teoría es la optimización del portafolio, que busca una combinación de activos que maximice el rendimiento esperado para un nivel de riesgo determinado o, inversamente, minimice el riesgo para un nivel de rendimiento esperado. Esto se logra a través de la identificación de la frontera eficiente, la cual se define como el conjunto de portafolios que ofrecen el mayor rendimiento esperado para un nivel de riesgo dado, o el menor riesgo para un nivel de rendimiento dado. (Markowitz H. M., 1952).

La optimización del portafolio, por tanto, permite seleccionar la combinación adecuada de activos que minimicen el riesgo para el retorno esperado deseado. Este modelo se utiliza para determinar los pesos óptimos de cada activo en el portafolio, lo que se logra a través de la implementación o enfoque de minimización de riesgo o maximización de índice de desempeño.

2. ANÁLISIS DE LA LITERATURA

Los estudios analizados ofrecen un panorama detallado sobre la implementación práctica del modelo de Markowitz en diversas Bolsas de Valores a nivel internacional, con el objetivo de identificar patrones y elementos comunes que puedan servir como referencia para su adaptación en el contexto de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC). A partir de este análisis, se organizó la literatura revisada en tres categorías principales. La primera corresponde a la **optimización de portafolios**, donde se exploran los enfoques metodológicos y aplicaciones prácticas del modelo de Markowitz para construir portafolios eficientes, maximizando la rentabilidad esperada en relación con un nivel de riesgo específico. En segundo lugar, se aborda la **diversificación como estrategia de mitigación del riesgo**, destacando la importancia de incluir activos variados dentro de una cartera para reducir la exposición tanto a riesgos específicos como sistemáticos, alineándose con los fundamentos del modelo. Finalmente, se estudia la **volatilidad de los activos que componen la cartera**, considerando cómo las fluctuaciones en los rendimientos impactan la evaluación

del riesgo y la correlación entre los activos incluidos en el portafolio. Este enfoque permite estructurar un marco teórico robusto que facilita la contextualización y potencial aplicación del modelo de Markowitz en el mercado financiero colombiano, teniendo en cuenta sus particularidades económicas, regulatorias y las características del comportamiento de los inversionistas en este entorno.

2.1. Optimización de portafolios

Uno de los principales aspectos a tener en cuenta para la correcta aplicación del modelo de Markowitz, es el componente estadístico-matemático propio del modelo, pues esta es la base de la optimización del portafolio permitiendo determinar el peso porcentual ideal a invertir en cada uno de los activos que conformen la cartera.

En este orden de ideas, Palczewski & Palczewski, abordaron en su estudio una conformación de cartera siguiendo el supuesto de normalidad de los datos, sin embargo, concluyeron que los rendimientos de los activos siguen una distribución de colas gruesas y son asimétricos, lo que contradice la normalidad de los datos (Palczewski & Palczewski, 2019). Esto es consecuente con lo propuesto por Mainak et al, que, en su estudio tomando acciones del índice S&P 500, buscó crear un portafolio teniendo en cuenta el índice de riesgo extremo (ERI), y tomando activos de colas gordas, encontrando que, a comparación del modelo media-varianza y del método de ponderación uniforme, el ERI obtuvo un rendimiento de cartera mayor teniendo en cuenta la sensibilidad de los métodos a las distribuciones de colas pesadas.

2.2. Diversificación como estrategia de mitigación del riesgo

En el ámbito de la diversificación, estudios como el de Trabelsi et al, analizan cómo activos de resguardo, como el oro, interactúan con los índices de acciones que cotizan en mercados específicos, como la Bolsa de Valores de Bombay (BSE). En este caso, se concluyó que el oro, al ser considerado un activo refugio, desempeña un papel crucial en la mitigación del riesgo de inversión. Aunque este metal puede influir de manera especulativa en el comportamiento de las acciones, los rendimientos del precio del oro son significativamente independientes de los retornos de los índices sectoriales de la BSE, lo que refuerza su utilidad como herramienta de diversificación. (Trabelsi, Gozgor, Tiwari, & Hammoudeh, 2021)

De manera complementaria Rodríguez Hidalgo plantea una comparación entre un portafolio optimizado mediante el modelo de Markowitz, destinado a minimizar el riesgo y otro conformado por activos de alta y media bursatilidad, junto con Certificados de Tesorería de la Federación (CETES). En su análisis, se concluyó que, en el contexto del mercado mexicano, los portafolios que incluyen activos de alta bursatilidad tienden a generar mayores rendimientos debido a su exposición a una mayor volatilidad. Sin embargo, el principio de diversificación propuesto por Markowitz sigue siendo un elemento clave para mitigar el riesgo asociado a

un portafolio, al permitir una gestión más eficiente de los componentes de la inversión. (Rodríguez Hidalgo, 2019)

Por su parte, Etebari explora el impacto de la diversificación al incorporar una variedad de clases de activos más allá de las acciones tradicionales, como bienes raíces y bonos. Este enfoque subraya que la diversificación no se limita únicamente a valores emitidos por empresas, sino que también abarca instrumentos como bienes raíces y bonos, lo que amplía las posibilidades de construcción de portafolios. Según hallazgos de Etebari, los bienes raíces presentan una rentabilidad relativamente superior en comparación con los bonos y acciones de manera individual. Sin embargo, aquellos portafolios que combinan acciones, bienes raíces y bonos logran una mayor rentabilidad con niveles más bajos de riesgo, demostrando así los beneficios tangibles de la diversificación en la gestión de carteras. (Etebari, 2016)

Estos estudios reflejan, desde diferentes contextos, la relevancia del principio de diversificación y su capacidad de para optimizar el equilibrio entre riesgo y retorno en los portafolios de inversión.

2.3. Volatilidad de las acciones que conforman un portafolio

La especulación es uno de los factores más determinantes en la dinámica de los precios de las acciones, ya que genera una alta volatilidad que incrementa el riesgo asociado a estos activos. Contrarrestar esta volatilidad ha sido objeto de análisis por parte de diversos autores, quienes han propuesto enfoques alternativos para gestionar el riesgo. Un ejemplo es Sikalo et al, que exploraron la construcción de portafolios mediante el modelo de Markowitz, pero introduciendo elementos de la Teoría de Juegos. Este enfoque, incorpora decisiones estratégicas de terceros, que permite considerar eventos externos que puedan influir en la fluctuación del mercado accionario. Los resultados del estudio indicaron que este modelo basado en la Teoría de Juegos logra conformar un portafolio con menor volatilidad en comparación con los métodos tradicionales, como el modelo de media-varianza de Markowitz, ofreciendo una alternativa más robusta frente a la incertidumbre del mercado. (Sikalo, Arnaut-Berilo, & Zaimovic, 2022).

De manera complementaria, Jaber realizó un estudio aplicado a la Bolsa de Valores de Túnez en un contexto marcado por una crisis política en 2021 y los efectos persistentes de la pandemia de COVID-19. En este escenario, múltiples sectores económicos enfrentaron niveles significativos de incertidumbre, lo que se tradujo en comportamientos atípicos de las acciones de las empresas que operaban en dichos sectores. El estudio evidenció que, ante eventos que generan altos niveles de especulación, los mercados bursátiles tienden a responder de maneras no habituales, desafiando los supuestos tradicionales de estabilidad. Esto pone de manifiesto que los modelos de gestión de riesgo convencionales pueden no ser completamente efectivos

bajo condiciones de especulación extrema, ya que no siempre logran mitigar adecuadamente los impactos derivados de la alta volatilidad y la incertidumbre.

Ambos estudios resaltan la importancia de desarrollar enfoques de gestión de portafolios que no solo consideren la volatilidad inherente al mercado, sino que también sean capaces de adaptarse a escenarios de incertidumbre y eventos atípicos, proporcionando herramientas más efectivas para enfrentar los desafíos de la especulación en los mercados financieros.

3. CONFORMACIÓN DE CARTERA NACIONAL

Los criterios empleados para la selección de las acciones analizadas, así como el tratamiento aplicado a los precios de cierre de dichos activos fueron fundamentales para la estructuración del portafolio de activos nacionales.

3.1. Análisis individual

Se recopiló información sobre los precios de cierre sin reparto de dividendos de 28 acciones que cotizaban en la Bolsa de Valores de Colombia (BVC), que hubieran operado de manera continua durante el periodo comprendido entre el 1 de enero de 2013 y el 30 de mayo de 2024. Las acciones identificadas son:

Tabla 1. Acciones aptas para el estudio

<i>PFBCOLO CB</i>	<i>CORFICOL CB</i>
<i>ECOPETL CB</i>	<i>GRUPOSUR CB</i>
<i>BCOLO CB</i>	<i>GRUPOBOL CB</i>
<i>ISA CB</i>	<i>PROMIG CB</i>
<i>GEB CB</i>	<i>BOGOTA CB</i>
<i>CEMARGOS CB</i>	<i>MINEROS CB</i>
<i>GRUPOARG CB</i>	<i>TERPEL CB</i>
<i>PFGRUPSU CB</i>	<i>CNEC CB</i>
<i>PFGRUPOA CB</i>	<i>PFCORCOL CB</i>
<i>CELSIA CB</i>	<i>ETB CB</i>
<i>PFDAVND CB</i>	<i>ENKA CB</i>
<i>PFAVAL CB</i>	<i>NUTRESA CB</i>
<i>EXITO CB</i>	<i>AVAL CB</i>
<i>CONCONC CB</i>	<i>PFCEMARG CB</i>

A partir de los activos seleccionados, se procedió a realizar un análisis individual de cada acción, organizándolas en orden descendente según el desempeño en los parámetros evaluados. Los criterios considerados en este análisis fueron el rendimiento esperado, el riesgo asociado y el índice de desempeño. Este último se estableció como una métrica clave para la toma de decisiones, particularmente en el contexto de un perfil de inversor moderado. Dicho perfil se caracteriza por evitar tanto la exposición a altos riesgos en búsqueda de rendimientos máximos como la obtención de rendimientos marginales bajo condiciones de riesgo bajo.

El orden de las acciones para cada uno de los parámetros anteriormente mencionados se encuentra de la Tabla 2. Posiciones según rendimiento de las acciones de la BVC a Tabla 4. Posiciones según ID para acciones de la BVC.

Tabla 2. Posiciones según rendimiento de las acciones de la BVC

Posición	Acción	RENDIMIENTO
1	ENKA CB Equity	0,000506733
2	PROMIG CB Equity	0,000447157
3	NUTRESA CB Equity	0,000410914
4	ISA CB Equity	0,000409281
5	GEB CB Equity	0,000338153
6	BCOLO CB Equity	0,000249459
7	GRUPOBOL CB Equity	0,000229555
8	GRUPOSUR CB Equity	0,000190453
9	PFBCOLO CB Equity	0,000184441
10	GRUPOARG CB Equity	0,000159605

Tabla 3. Posiciones según riesgo para acciones de la BVC

Posición	Acción	RIESGO
1	GEB CB Equity	0,015393793
2	PFCORCOL CB Equity	0,015536391
3	PFAVAL CB Equity	0,015609346
4	CORFICOL CB Equity	0,0157542
5	CELSIA CB Equity	0,01598286
6	TERPEL CB Equity	0,016256104
7	PFDVVND CB Equity	0,016524904
8	PFBCOLO CB Equity	0,016728298
9	BOGOTA CB Equity	0,016829103
10	AVAL CB Equity	0,016848341

Tabla 4. Posiciones según ID para acciones de la BVC

Posición	Acción	ID
1	PROMIG CB Equity	0,025138147
2	ENKA CB Equity	0,023851103
3	GEB CB Equity	0,021966818
4	ISA CB Equity	0,021054834

5	NUTRESA CB Equity	0,019345628
6	GRUPOBOL CB Equity	0,013192125
7	BCOLO CB Equity	0,012608926
8	PFBCOLO CB Equity	0,011025672
9	GRUPOSUR CB Equity	0,008982237
10	PFCEMARG CB Equity	0,007966696

Con base en estas consideraciones, se determinó que el índice de desempeño es la métrica óptima para guiar la conformación de un portafolio nacional compuesto por seis acciones, teniendo en cuenta la complejidad de administrar una cartera, esta cantidad de acciones permite al inversor realizar un seguimiento detallado de la volatilidad de éstas y realizar una correcta administración de su portafolio.

El índice de desempeño permite priorizar aquellas acciones que ofrecen un rendimiento cuyo nivel de riesgo está plenamente justificado, proporcionando un equilibrio adecuado entre rentabilidad y seguridad. En consecuencia, el índice de desempeño se posiciona como un criterio central en la selección de activos para este tipo de portafolio y perfil inversionista, alineándose con los objetivos y la tolerancia al riesgo característicos de los inversores moderados.

De acuerdo a los criterios enunciados, las acciones definidas para ser parte del portafolio nacional son NUTRESA, GEB, ISA, ENKA, GRUPO BOLIVAR y PROMIGAS.

3.2. Análisis conjunto

Una vez preseleccionadas las acciones potenciales para la conformación del portafolio nacional, se continúa con la construcción de una matriz de correlaciones que permita deducir el posible comportamiento entre los pares de las acciones del portafolio.

Este análisis es fundamental para determinar cómo se comportan unas acciones dependiendo de las otras que estén en el portafolio. Según Markowitz, las acciones que componen un portafolio no son independientes de las demás que lo conformen, por ende, el análisis de correlación juega un papel fundamental para determinar la volatilidad de los activos dentro de la cartera y de igual manera buscar la mejor relación rendimiento-riesgo dentro de este.

Se presenta en la Tabla 5 los índices de correlación entre las acciones mencionadas previamente:

Tabla 5. Correlaciones (1)

	<i>ISA CB Equity</i>	<i>GEB CB Equity</i>	<i>GRUPOBOL CB Equity</i>	<i>PROMIG CB Equity</i>	<i>ENKA CB Equity</i>	<i>NUTRESA CB Equity</i>
ISA CB Equity	1,000					
GEB CB Equity	0,227	1,000				
GRUPOBOL CB Equity	0,072	0,128	1,000			
PROMIG CB Equity	0,065	0,106	0,049	1,000		
ENKA CB Equity	0,042	0,038	0,045	0,018	1,000	
NUTRESA CB Equity	0,145	0,122	0,090	0,035	0,033	1,000

Al analizar la acción de GRUPO BOLÍVAR, se identificó que sus correlaciones (r), pese a que cumplen con los criterios establecidos en el estudio, las correlaciones no se consideran deseables dentro en el rango $-0,6 \leq r \leq 0,6$, para un perfil de inversor moderado. Esto implica que GRUPO BOLÍVAR no presenta un comportamiento correlacional suficientemente favorable para cumplir con los objetivos de diversificación y control de riesgo definidos en la investigación.

En consecuencia, se planteó una modificación en la composición del portafolio, sustituyendo la acción de GRUPO BOLÍVAR por la acción de BANCOLOMBIA. Esta decisión se fundamenta en el hecho de que la

diferencia en cuanto a índice de desempeño (ID) no llega alcanza el 5%, es decir, ambas acciones cuentan con un ID muy similar, lo que sugiere que mantiene un nivel de rendimiento competitivo, pero con correlaciones potencialmente más ajustadas al perfil del inversor moderado.

En la

Tabla 6. Correlaciones (2) se presenta la matriz de correlación obtenida tras incluir esta modificación, la cual permite visualizar el comportamiento conjunto de los activos seleccionados en el portafolio.

Tabla 6. Correlaciones (2)

	<i>BCOLO CB Equity</i>	<i>ISA CB Equity</i>	<i>GEB CB Equity</i>	<i>PROMIG CB Equity</i>	<i>ENKA CB Equity</i>	<i>NUTRESA CB Equity</i>
BCOLO CB Equity	1					
ISA CB Equity	0,379898743	1				
GEB CB Equity	0,165724326	0,227183761	1			
PROMIG CB Equity	0,052659913	0,064526525	0,105894628	1		
ENKA CB Equity	0,062468927	0,042006201	0,037805188	0,017564695	1	
NUTRESA CB Equity	0,132519917	0,144625647	0,121809452	0,034545237	0,033144905	1

Se logra deducir que el portafolio óptimo de acciones de emisores nacionales es aquel conformado por: BANCOLOMBIA, ENKA, GEB, NUTRESA, ISA y PROMIGAS, debido a que la modificación presenta valores más favorables en cuanto a los índices de correlación.

3.3. Optimización del portafolio de acciones de la BVC.

Posteriormente teniendo seleccionado los componentes del portafolio, se procede a buscar los pesos porcentuales

ideales que permitan la maximización del ID o la minimización del riesgo (métodos de optimización considerados en el estudio), con valores asociados a los pesos porcentuales de cada acción no menores a 0,1 ni mayores a 0,5.

Los resultados de la optimización por medio del criterio de minimización de riesgo se muestran en la Tabla 7. Pesos porcentuales y resultados (Minimización de riesgo).

Tabla 7. Pesos porcentuales y resultados (Minimización de riesgo)

ACCIÓN	W	Rendimiento	Riesgo	ID
GEB CB Equity	0,2576	0,00039844	0,00935246	0,0426026
PROMIG CB Equity	0,2301			
ENKA CB Equity	0,1686			
NUTRESA CB Equity	0,1318			
BCOLO CB Equity	0,1119			
ISA CB Equity	0,1			

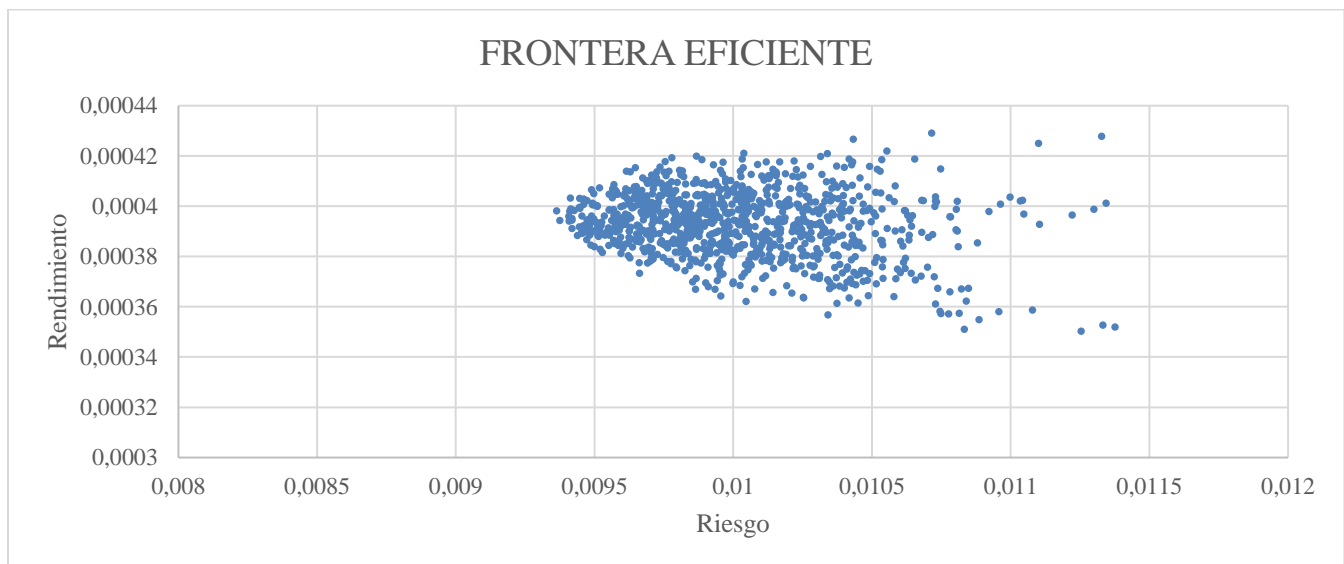
Tabla 8. Pesos porcentuales y resultados (Maximización de ID)

ACCIÓN	W	Rendimiento	Riesgo	ID
PROMIG CB Equity	0,2589	0,00041149	0,00948421	0,04338634
ENKA CB Equity	0,2153			
GEB CB Equity	0,1802			
NUTRESA CB Equity	0,1347			
ISA CB Equity	0,111			
BCOLO CB Equity	0,1			

Con la finalidad de ilustrar de manera gráfica los diferentes portafolios que se conformaron con mil combinaciones, la Figura

1. muestra la frontera eficiente.

Figura 1. Frontera eficiente (BVC)



4. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE LOS RENDIMIENTOS

Al considerar artículos relacionados al tema central de la investigación, surge como necesidad determinar el tipo de distribución que seguían los rendimientos de las acciones con el fin de comprender un poco más acerca de su comportamiento bajo las condiciones específicas del mercado. Para ello, se procede con una prueba de ajuste Jarque-Bera, que permite conocer si los datos muestrales de cada activo siguen una distribución normal.

Dicha prueba se realiza mediante la aplicación de un código que determinó que ningún rendimiento de las acciones estudiadas siguen una tendencia normal, sin embargo, al observar un nivel tan elevado de curtosis, se infiere que posiblemente podrían seguir una distribución de colas pesadas en la que se presenta una posibilidad relativamente alta de ocurrir eventos extremos.

Con el fin de corroborar esta hipótesis planteada se aplica el método gráfico *Log-Log Plot*, donde se define si el índice de Pareto obtenido (α) se encuentra en un intervalo expresado de $0 \leq \alpha \leq 2$, las muestras seguirían una distribución de colas pesadas. En la Tabla 9. Índices de Pareto para acciones de la BVC se encuentran los resultados obtenidos para cada acción:

Tabla 9. Índices de Pareto para acciones de la BVC

ÍNDICE DE PARETO (α) ACCIONES BVC			
PFBCOLO CB Equity	0,014689	GRUPOBOL CB Equity	0,012288
ECOPETL CB Equity	0,019041	PROMIG CB Equity	0,01385
BCOLO CB Equity	0,01736	BOGOTA CB Equity	0,014025
ISA CB Equity	0,017104	MINEROS CB Equity	0,016035
GEB CB Equity	0,013548	TERPEL CB Equity	0,012514
CEMARGOS CB Equity	0,017378	CNEC CB Equity	0,022942
GRUPOARG CB Equity	0,01829	PFCORCOL CB Equity	0,01244
PFGRUPSU CB Equity	0,015929	ETB CB Equity	0,015588
PFGRUPOA CB Equity	0,018205	ENKA CB Equity	0,015312
CELSIA CB Equity	0,014284	NUTRESA CB Equity	0,015225
PFDAVVND CB Equity	0,014565	EXITO CB Equity	0,016474
PFAVAL CB Equity	0,013281	AVAL CB Equity	0,013819
CORFICOL CB Equity	0,013516	CONCONC CB Equity	0,01889

GRUPOSUR CB Equity	0,01759	PFCEMARG CB Equity	0,016692
--------------------	---------	--------------------	----------

Tabla 10. Índices de Pareto para acciones del MGC

ÍNDICE DE PARETO (α) ACCIONES MGC			
BAC CB Equity	0,0081661	JPM CB Equity	0,0063091
AAPL CB Equity	0,011193	AMZN CB Equity	0,014501
JNJ CB Equity	0,0053912	GE CB Equity	0,0040262
PFE CB Equity	0,0065366	C CB Equity	0,0066889

Como se puede evidenciar en la Tabla 9. Índices de Pareto para acciones de la BVC todos los valores asociados al índice de Pareto se encuentran dentro del rango establecido, lo que permite determinar que efectivamente cada uno de los rendimientos de las acciones siguen una distribución estadística de colas pesadas.

5. ADICIÓN DE ACCIONES DEL MGC

5.1. Portafolios de 7 acciones

Una vez estructurado el portafolio de activos nacionales, se procedió a incorporar activos pertenecientes al Mercado Global Colombiano (MGC). Para esta integración, se emplearon los mismos criterios y procedimientos de selección utilizados en la etapa previa. A partir de un análisis individual y grupal, se identificaron como acciones potenciales para conformar el portafolio diversificado los siguientes activos: APPLE, AMAZON y BAC.

En línea con lo anterior, se procede a evaluar la conformación de distintas combinaciones de portafolios hasta llegar a 7, 8 y 9 activos, con el objetivo de analizar el impacto que la inclusión de valores extranjeros genera sobre el portafolio original compuesto exclusivamente por emisores nacionales.

Por lo tanto, al conformar un portafolio de 7 acciones se presenta las combinaciones óptimas con sus respectivos resultados en las tablas 11 y 12.

Tabla 11. Pesos y resultados (Portafolios de 7 acciones por criterio de minimización de riesgo)

ACCIÓN	W	Rendimiento	Riesgo	ID
ISA CB Equity	0,1	0,000498139	0,008726195	0,057085498
GEB CB Equity	0,229			
BCOLO CB Equity	0,1			
PROMIG CB Equity	0,198			
ENKA CB Equity	0,148			
NUTRESA CB Equity	0,105			
APPL CB Equity	0,12			
ACCIÓN	W	Rendimiento	Riesgo	ID
ISA CB Equity	0,1	0,00051244	0,009328328	0,054933714
GEB CB Equity	0,231			
BCOLO CB Equity	0,1			
PROMIG CB Equity	0,205			
ENKA CB Equity	0,148			
NUTRESA CB Equity	0,116			
AMZN CB Equity	0,1			
ACCIÓN	W	Rendimiento	Riesgo	ID
ISA CB Equity	0,1	0,00045611	0,008595924	0,053061212
GEB CB Equity	0,206			
BCOLO CB Equity	0,1			
PROMIG CB Equity	0,19			
ENKA CB Equity	0,144			
NUTRESA CB Equity	0,1			
BAC CB Equity	0,16			

Tabla 12. Pesos y resultados (portafolios de 7 acciones por criterio de maximización de ID)

ACCIÓN	W	Rendimiento	Riesgo	ID
ISA CB Equity	0,1	0,000630268	0,009810954	0,064241218
GEB CB Equity	0,117			
BCOLO CB Equity	0,1			
PROMIG CB Equity	0,166			
ENKA CB Equity	0,145			
NUTRESA CB Equity	0,1			
APPL CB Equity	0,272			
ACCIÓN	W	Rendimiento	Riesgo	ID
ISA CB Equity	0,1	0,000592655	0,01348157	0,057241588
GEB CB Equity	0,148			
BCOLO CB Equity	0,1			
PROMIG CB Equity	0,211			
ENKA CB Equity	0,172			
NUTRESA CB Equity	0,106			
AMZN CB Equity	0,163			
ACCIÓN	W	Rendimiento	Riesgo	ID
ISA CB Equity	0,1	0,000499956	0,008999608	0,05555531
GEB CB Equity	0,103			
BCOLO CB Equity	0,1			
PROMIG CB Equity	0,179			
ENKA CB Equity	0,156			
NUTRESA CB Equity	0,1			
BAC CB Equity	0,262			

5.2. portafolios de 8 acciones

Siguiendo con la metodología se llevó a cabo la comprobación de la adición de dos activos pertenecientes al MGC al portafolio. Para ello, se usaron las

combinaciones APPLE-AMAZON, APPLE-BAC y AMAZON-BAC. En las tablas 13 y 14, se detallan los pesos porcentuales para cada caso de optimización (minimización de riesgo y maximización de ID), con los resultados obtenidos:

Tabla 13. Pesos porcentuales y resultados (8 acciones)

ACCIÓN	W	Rendimiento	Riesgo	ID
ISA CB Equity	0,1	0,000594077	0,00894701	0,06639953
GEB CB Equity	0,199			
BCOLO CB Equity	0,1			
PROMIG CB Equity	0,173			
ENKA CB Equity	0,127			
NUTRESA CB Equity	0,1			
APPL CB Equity	0,1			
AMZN CB Equity	0,1			
ACCIÓN	W	Rendimiento	Riesgo	ID
ISA CB Equity	0,1	0,000529396	0,008138728	0,06504684
GEB CB Equity	0,176			
BCOLO CB Equity	0,1			
PROMIG CB Equity	0,164			
ENKA CB Equity	0,125			
NUTRESA CB Equity	0,1			
APPL CB Equity	0,1			
BAC CB Equity	0,136			
ACCIÓN	W	Rendimiento	Riesgo	ID
ISA CB Equity	0,1	0,00055963	0,008774156	0,063781668
GEB CB Equity	0,177			
BCOLO CB Equity	0,1			
PROMIG CB Equity	0,166			
ENKA CB Equity	0,122			
NUTRESA CB Equity	0,1			
AMZN CB Equity	0,135			
BAC CB Equity	0,1			

Tabla 14. Pesos y resultados (portafolios de 8 acciones por criterio de maximización de ID)

ACCIÓN	W	Rendimiento	Riesgo	ID
ISA CB Equity	0,1	0,0007146	0,009905281	0,072143383
GEB CB Equity	0,1			
BCOLO CB Equity	0,1			
PROMIG CB Equity	0,141			
ENKA CB Equity	0,122			
NUTRESA CB Equity	0,1			
APPL CB Equity	0,227			
AMZN CB Equity	0,109			
ACCIÓN	W	Rendimiento	Riesgo	ID
ISA CB Equity	0,1	0,000634189	0,008866466	0,071526695
GEB CB Equity	0,1			

BCOLO CB Equity	0,1			
PROMIG CB Equity	0,111			
ENKA CB Equity	0,105			
NUTRESA CB Equity	0,1			
APPL CB Equity	0,208			
BAC CB Equity	0,177			
ACCIÓN	W	Rendimiento	Riesgo	ID
ISA CB Equity	0,1	0,000616035	0,00931168	0,066157227
GEB CB Equity	0,1			
BCOLO CB Equity	0,1			
PROMIG CB Equity	0,111			
ENKA CB Equity	0,105			
NUTRESA CB Equity	0,1			
AMZN CB Equity	0,208			
BAC CB Equity	0,177			

5.3. Portafolio de 9 acciones

Como última posible combinación posible, se decidió evaluar la inclusión de las tres acciones seleccionadas al portafolio inicial compuesto por emisores de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC). Los resultados obtenidos incluyendo los pesos porcentuales asignados a cada activo

y los parámetros clave de rendimiento, riesgo e índice de desempeño, se presentan en la tabla 15.

Tabla 15. Pesos y resultados (Portafolios de 9 acciones)

MINIMIZACIÓN DE RIESGO	ACCIÓN	W	Rendimiento	Riesgo	ID
	ISA CB Equity	0,1	0,000435687	0,00759496	0,05736244
	GEB CB Equity	0,1			
	BCOLO CB Equity	0,1			
	PROMIG CB Equity	0,1			
	ENKA CB Equity	0,1			
	NUTRESA CB Equity	0,1			
	AAPL CB Equity	0,1			
	BAC CB Equity	0,1			
AMZN CB Equity	0,2				
MAXIMIZACIÓN DE ID	ACCIÓN	W	Rendimiento	Riesgo	ID
	ISA CB Equity	0,1	0,00055922	0,00881965	0,06340592
	GEB CB Equity	0,1			
	BCOLO CB Equity	0,1			
	PROMIG CB Equity	0,1			
	ENKA CB Equity	0,1			
	NUTRESA CB Equity	0,1			
	AAPL CB Equity	0,2			
	BAC CB Equity	0,1			
AMZN CB Equity	0,1				

6. COMPARACIÓN ENTRE PORTAFOLIOS

Teniendo en cuenta los principios de un inversor moderado, se llevó a cabo la comparación entre los diferentes portafolios armados en la sección anterior, encontrando que, el portafolio que mejor se adapta a la relación rendimiento-riesgo es aquel en el que se adicionan APPLE y AMAZON. En dicho caso por medio de la optimización por medio de la maximización de ID, se observó un aumento significativo en los indicadores de rendimiento e índice de desempeño, con incrementos aproximados del 73,66% y 66,28% respectivamente. En cuanto al riesgo, aunque también se presenta un aumento, este es menor en cuanto a la proporción, presentando un incremento de aproximadamente 4,44%. Estos resultados sugieren que la incorporación de estas dos acciones al portafolio original provoca un incremento sustancial en los indicadores clave para un inversor de perfil moderado, al mismo tiempo que introduce un nivel de riesgo adicional que es relativamente aceptable. De

igual manera, considerando el manejo de varios activos volátiles, se considera que, este portafolio ya que cuenta con 8 acciones, es lo suficientemente manejable y administrable para el inversor.

Por otro lado, centrándose en la minimización de riesgo, se pudo determinar que la opción más beneficiosa es aquella que adiciona las 3 acciones del MGC. Pues siguiendo el principio de diversificación de Markowitz, este portafolio presenta una reducción del riesgo de aproximadamente 18,79%, sin embargo, el incremento en el rendimiento es moderado, alcanzando un 9,35% lo que traduce una mejora total del 34,65% en el ID.

Se evidencia que, en cada uno de los casos, adicionar acciones del MGC al portafolio conformado por emisores nacionales, mejora los parámetros asociados al portafolio, dejando entrever que, las acciones extranjeras proporcionan una fuente muy eficiente para mejorar el portafolio, permitiéndole al inversor alcanzar niveles más altos de rendimiento y permitiendo una gestión más eficiente del riesgo. Esto se puede apreciar en la *Tabla 16. Diferencias de parámetros (criterio de minimización de riesgo)* y en la *Tabla 17. Diferencias de parámetros (criterio de maximización de ID)*.

Tabla 16. Diferencias de parámetros (criterio de minimización de riesgo)

MINIMIZACIÓN DE RIESGO			
PORTAFOLIO	RENDIMIENTO	RIESGO	ID
Nacional	0,00039844	0,00935246	0,042602695
Nacional + Apple	0,000498139	0,008726195	0,057085498
Nacional + Amazon	0,00051244	0,009328328	0,05493714
Nacional + BAC	0,00045611	0,008595924	0,053061212
Nacional + Apple y Amazon	0,000594077	0,00894701	0,06639953
Nacional + Apple y BAC	0,000529396	0,008138728	0,065046484
Nacional + Amazon y BAC	0,00055963	0,008774156	0,063781668
Nacional + Apple, Amazon y BAC	0,000435687	0,00759496	0,07365244

Tabla 17. Diferencias de parámetros (criterio de maximización de ID)

MAXIMIZACIÓN DE ID			
PORTAFOLIO	RENDIMIENTO	RIESGO	ID
Nacional	0,00041149	0,00948421	0,04338634
Nacional + Apple	0,000630268	0,009810954	0,064241218
Nacional + Amazon	0,000592655	0,010348157	0,05271588
Nacional + BAC	0,000499956	0,008999608	0,055553102
Nacional + Apple y Amazon	0,0007146	0,009905281	0,072143383
Nacional + Apple y BAC	0,000634189	0,008866466	0,071526695
Nacional + Amazon y BAC	0,00066035	0,00931168	0,066157227
Nacional + Apple, Amazon y BAC	0,00055922	0,00881965	0,06340592

7. CONCLUSIONES

- A partir de la revisión bibliográfica, se concluye que, aunque las Bolsas de Valores se presentan como un instrumento crucial para la generación de utilidades para los inversionistas, el número de estudios enfocados en América Latina ha sido relativamente limitado. Sin embargo, desde el año 2021, se ha observado un incremento significativo en la producción de investigaciones, artículos académicos y literatura gris centrada en este tema. Este aumento ha facilitado la generación y difusión de conocimiento sobre el funcionamiento, los beneficios y las estrategias de inversión en valores, evidenciando un creciente interés de la comunidad investigativa en profundizar en este ámbito.
- Debido a que el mercado financiero no presenta un comportamiento lineal, sino que está influenciado por interacciones complejas entre múltiples actores, se generan eventos de alta volatilidad que incrementan la probabilidad de ocurrencia de eventos extremos, superando lo esperado bajo una distribución normal. En esta investigación, se demuestra mediante el análisis gráfico Log-Log Plot que las distribuciones de los rendimientos diarios de las acciones consideradas de la BVC y del MGC están asociadas a distribuciones de colas pesadas. Estas distribuciones reflejan la incidencia de eventos extremos registrados dentro de la ventana temporal evaluada en el estudio. Esta información no impidió el desarrollo de la investigación, sino que, proporcionó un panorama mucho más claro de la ventana de tiempo.
- A través del análisis individual efectuado a cada una de las acciones de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC), enfocado en las métricas de rendimiento, riesgo e índice de desempeño, se determina que este último es el parámetro más adecuado para un inversor de perfil moderado. Este indicador cuantifica la relación entre el rendimiento obtenido y el riesgo adicional asumido, integrando de manera efectiva los criterios de rentabilidad y riesgo. Dado que los inversores con un perfil moderado buscan un enfoque balanceado que combine estabilidad y crecimiento sostenido del capital, el índice de desempeño se posiciona como una herramienta clave al priorizar la optimización de beneficios sin comprometer la exposición excesiva a la volatilidad del mercado. Esto permite al inversor tomar decisiones fundamentadas que maximizan la eficiencia del portafolio, alineándose con sus objetivos financieros y tolerancia al riesgo.
- Por medio del análisis en conjunto de las acciones preseleccionadas se permite definir el marco de valores que consideran tanto el índice de portafolio como las correlaciones entre estas mismas, lo cual resulta fundamental para la conformación de un portafolio eficiente. Las correlaciones entre las acciones desempeñan un papel clave, ya que permiten medir la relación entre sus movimientos y, de este modo, identificar combinaciones de activos que optimicen la diversificación, reduciendo el riesgo total del portafolio o concediendo una relación rendimiento-riesgo más favorable. Este análisis correlacional no solo facilita la reducción del impacto de la volatilidad al identificar las correlaciones de los activos entre sí, sino que también permite mejorar el índice de desempeño del portafolio. Durante el proceso, se identifica que sustituir una acción preseleccionada (Grupo Bolívar) inicialmente mediante el análisis individual, por otra, (Bancolombia), genera un incremento en la relación

rendimiento-riesgo del portafolio nacional, puesto que, aunque ambas acciones presentan correlaciones dentro del rango establecido (entre -0,6 y 0,6), Bancolombia experimenta índices de correlación que tienden más hacia el extremo positivo del intervalo considerado, y además la diferencia en cuanto al ID no llega al 5%, lo que justifica el intercambio de las acciones dentro de la conformación del Portafolio. De esta manera, el análisis no solo optimizó la composición del portafolio al mejorar el ID, sino que lo alineó con los objetivos de diversificación y balance retorno-riesgo inherentes a un perfil de inversor moderado. Se concluye entonces que el mejor portafolio de acciones nacionales está conformado por ENKA, NUTRESA, BANCOLOMBIA, ISA, Grupo Energía Bogotá (GEB), y PROMIGAS.

- Para el análisis de las acciones del MGC, se empleó el mismo procedimiento utilizado para las acciones nacionales, evaluando individualmente el rendimiento, el riesgo y el índice de desempeño de cada acción. Este análisis tuvo como objetivo identificar un conjunto de acciones potenciales para complementar el portafolio de acciones nacionales. El grupo de acciones seleccionadas incluyó a Apple, Amazon y Banco de América (BAC). Posteriormente, se realizó un análisis grupal que abarcó el cálculo de correlaciones y la evaluación de diversas combinaciones de portafolios (*de 7, 8 y 9 acciones*). A partir de este análisis, se determinaron los parámetros asociados a cada cartera. Se concluyó que, para un inversor con perfil moderado que priorice la mejora en el índice de desempeño, la mejor alternativa es la adición de Apple y Amazon, ya que esta combinación ofrece una relación óptima entre rendimiento y riesgo. Por otro lado, para un inversor con perfil moderado con un nivel más alto de aversión al riesgo, la opción más adecuada es la adición de Apple, Amazon y BAC, dado que, siguiendo el principio de diversificación, esta cartera logra mitigar el riesgo de manera más eficiente.
- En línea con los postulados de Harry Markowitz en su teoría de la optimización de portafolios (1952), se concluye que, aunque la adición progresiva de acciones a un portafolio contribuye a mejorar sus parámetros generales, como la diversificación y la reducción del riesgo no sistemático, estos beneficios tienden a decrecer marginalmente a medida que el número de activos incluidos aumenta. En otras palabras, una vez alcanzado un nivel óptimo de diversificación, la incorporación de nuevas acciones genera un impacto limitado en la mejora del perfil rendimiento-riesgo del portafolio. Por lo tanto, el objetivo principal no reside en maximizar indiscriminadamente la cantidad de activos, sino en identificar la combinación y número óptimos de acciones que ofrezcan el mayor porcentaje de variación positiva en términos de rendimiento ajustado al riesgo. Este enfoque busca maximizar la eficiencia del portafolio, garantizando que su gestión permanezca administrable para el inversor, tanto en términos operativos como de monitoreo, alineándose con las limitaciones y capacidades del perfil inversionista en cuestión. Así, la selección estratégica de activos se convierte en un proceso clave para lograr un balance óptimo entre diversificación y practicidad, asegurando que el portafolio sea eficiente y alineado con los objetivos financieros del inversor.
- El análisis realizado demuestra que, en todos los escenarios evaluados, la inclusión de acciones del Mercado Global Colombiano (MGC) en un portafolio compuesto por acciones nacionales mejora de manera consistente los principales parámetros de desempeño financiero. En particular, se observa un aumento en el rendimiento esperado, una reducción del riesgo total del portafolio y

una mejora en el índice de desempeño ajustado por riesgo. Estos resultados evidencian los beneficios de diversificación que ofrece el MGC, permitiendo una asignación de activos más eficiente y optimizada en términos de retorno y volatilidad.

8. BIBLIOGRAFÍA

- Álvarez, L., & Estupiñán, J. (2023). *Estudio para la predicción de insolvencia financiera en las empresas que componen el índice COLCAP*. Obtenido de <https://noesis.uis.edu.co/items/6f2e2884-5489-4ecf-ad71-0a685fc9a02a>
- Atta, E., Yu, B., & Yu, J. (2017). Scaled and stable mean-variance-EVaR portfolio selection strategy with proportional transaction costs. *Journal of Business Economics and Management*.
- Babanic, M., & Stefanovic, N. (2023). AN OBTAINABLE AND EFFICIENT SET IN THE STANDARD MEAN-VARIANCE SMALL PORTFOLIO SELECTION MODEL: A NON-MARKOWITZ APPROACH. *International Journal for Quality Research*.
- Bányai, A., Tatay, T., Thalmeiner, G., & Pataki, L. (2024). Optimising Portfolio Risk by Involving Crypto Assets in a Volatile Macroeconomic Environment. *Multidisciplinary Digital Publishing Institute*.
- Bartkus, E. V., & Bartkute, A. P. (2013). The optimization and evaluation of investment portfolio. *Engineering Economics*.
- BBVA. (8 de Abril de 2024). Obtenido de Qué son las acciones, cómo funcionan y cuál es su origen histórico: <https://www.bbva.com/es/salud-financiera/que-son-las-stock-options-opciones-sobre-acciones-y-como-funcionan/>
- Binmore, K. (1994). *La teoría de juegos, una breve introducción*. McGraw-Hill.
- (2023). *Bolsa de Valores de Colombia*. Obtenido de <https://www.utadeo.edu.co/es/proyecto/cuarto-congreso-latinoamericano-de-historia-economica/7516/bolsa-de-valores-de-colombia-0>
- Bolsa de Valores de Colombia. (2024). *Mercado Global Colombiano*. Obtenido de <https://www.bvc.com.co/mercado-global-colombiano>
- Chen, Y.-T., & Kuan, C.-M. (2016). A Generalized Jarque-Bera Test of Conditional Normality. Obtenido de <https://homepage.ntu.edu.tw/~ckuan/pdf/jb01.pdf>
- Corficolombiana. (2024). Proyecciones económicas 2024-2025: En riesgo la semilla del crecimiento. *Macroeconomía y mercados Corficolombiana*. Obtenido de https://investigaciones.corfi.com/macroeconomia-y-mercados/informe-semanal/proyecciones-economicas-2024-2025-en-riesgo-la-semilla-del-crecimiento/informe_1528253
- Cuart, T. (2022). ¿Qué empresas del mundo lideran el Ranking de crecimiento por capitalización de mercado? *Forbes Argentina*.
- DANE. (2024). *Variación anual y mensual del IPC*. DANE. Obtenido de <https://www.dane.gov.co/files/operaciones/IPC/cp-IPC-dic2023.pdf>
- Domínguez, L. (23 de Septiembre de 2023). La empresa pretende expandirse a más lugares del país, especialmente en Antioquia. *El Tiempo*. Obtenido de <https://www.eltiempo.com/economia/empresas/tiendas-ara-se-viene-con-toda-con-ambicioso-plan-de-mas-locales-y-nuevos-productos-807050#:~:text=En%20el%20pa%C3%ADs%20hay%20alrededor%20de%201.227%20tiendas%20en%20varios%20departamentos>
- El País. (21 de Junio de 2022). Tras triunfo de Gustavo Petro, reportan fuerte caída de la Bolsa de Valores de Colombia. *Periódico El País*.
- Etebari, A. (2016). Real estate as a portfolio risk diversifier. *Investment Management and Financial Innovations*.

- Eterovic, N. A., & Eterovic, D. S. (2013). Separating the wheat from the chaff: Understanding portfolio returns in an emerging market. *Emerging Markets Review*.
- Faster Capital. (2019). *Faster capital*. Obtenido de <https://fastercapital.com/es/palabra-clave/colagruesa.html#:~:text=%C2%BFQu%C3%A9%20son%20as%20colas%20gordas,los%20eventos%20extremos%20son%20raros>
- Ferrero, R. (18 de Julio de 2022). *Máxima Formación*. Obtenido de <https://www.maximaformacion.es/blog-dat/que-es-la-correlacion-estadistica-y-como-interpretarla/>
- Frahm, G. (2010). Linear statistical inference for global and local minimum variance portfolios. *Springer Nature*.
- GNB Academy. (16 de Noviembre de 2022). *Principales Bolsas de Valores del Mundo*. Obtenido de <https://gbm.com/academy/principales-bolsas-de-valores-del-mundo/>
- Jaber, Y. (2023). Impact of Tunisian Political and COVID-19 Crisis on Asset Allocation: Traditional Theory of Portfolio Selection Versus Behavioral Theory. *WSEAS Transactions on Business and Economics*.
- Kitchenham, B. (2004). *Procedures for Performing Systematic Reviews*. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/228756057_Procedures_for_Performing_Systematic_Reviews
- Kolb, R. W. (1999). *INVERSIONES* (Cuarta ed.). Limusa S.A.
- Mainik, G., Mitov, G., & Rüschenhoff, L. (2013). Portfolio optimization for heavy-tailed assets: Extreme Risk Index vs. Markowitz. *Journal of Empirical Finance*.
- Mancera, A. C. (Agosto de 2003). Algunas precisiones sobre el mercado cambiario, el bursatil y la Banca en México. *XIX(120)*, 1-19. Obtenido de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=32512011>
- Markowitz, H. (Marzo de 1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, VII(1), 77-91. Obtenido de <http://links.jstor.org/sici?sici=0022-1082%28195203%297%3A1%3C77%3APS%3E2.0.CO%3B2-1>
- Markowitz, H. M. (1952). *Portfolio Selection*. Yale University Press. Obtenido de <https://ebookcentral.proquest.com/lib/bibliouis-ebooks/reader.action?docID=3421285&ppg=21>
- Moreno, C. (24 de Octubre de 2023). Grupo Éxito sigue siendo la empresa más valorada del sector retail, pero la lucha se ha venido acortando ante el crecimiento de D1. *El País*. Obtenido de <https://www.larepublica.co/empresas/numero-de-tiendas-y-participacion-de-mercado-de-d1-3735029>
- Nasdaq Inc. (2023). Obtenido de Nasdaq Inc. About us: <https://www.nasdaq.com/about>
- Osorio Gómez, Á., Pereira López, J., & Negrete Rodríguez, A. (2023). *IMPACTO DEL VIRUS COVID-19 EN EL RIESGO, RENTABILIDAD Y PORTAFOLIOS ÓPTIMOS DE LAS ACCIONES QUE CONFORMAN EL ÍNDICE COLCAP*. Obtenido de <https://www.proquest.com/docview/3039987250/BB5173CFB1847DAPQ/1?accountid=29068&sourcecetype=Scholarly%20Journals>
- Pahade, J. K., & Jha, M. (August de 2021). Credibilistic Variance and Skewness of trapezoidal fuzzy variable and mean-variance-skewness model for portfolio selection. *Results in Applied Mathematics*, XI.
- Palczewski, A., & Palczewski, J. (2019). Black-Litterman model for continuous distributions. *European Journal of Operational Research*, 708-720.
- REPÚBLICA, L. (2023). *BVC logró ganancias por \$16.222 millones en el primer trimestre con un alza de 27%*. Obtenido de <https://www.larepublica.co/finanzas/la-bolsa-de-valores-de-colombia-genero-ganancias-por-16-222-millones-hasta-marzo-3617232>
- Rodó, M. (Diciembre de 2010). ¿Qué es un cluster? Geografías y prácticas de la escena de música experimental en Santiago, Chile. *Eure*, 161-187. Obtenido de <https://www.eure.cl/index.php/eure/article/view/10/748>
- Rodríguez Hidalgo, D. (2019). *APLICACIÓN DE LA TEORÍA MODERNA DEL PORTAFOLIO PARA LA VALUACIÓN DE ACCIONES QUE COTIZAN EN LA BOLSA MEXICANA DE VALORES 2013-2018*. Obtenido de <http://hdl.handle.net/20.500.11799/105283>
- Rojas, D. (2022). *Análisis de rentabilidad y riesgo de un portafolio de inversión, aplicando el modelo de Markowitz*. Bogotá. Obtenido de <https://repositorio.unicolmayor.edu.co/handle/unicolmayor/6781>
- Rutterford, J., & Sotiropoulos, D. (2016). Financial diversification before modern portfolio theory: UK financial advice documents in the late nineteenth and the beginning of the twentieth century. *European Journal of the History of Economic Thought*.
- Semana. (2024). Diez predicciones para la economía colombiana en 2025. Esto prevén los analistas. *Economía Revista Semana*. Obtenido de <https://www.semana.com/economia/macroeconomia/articulo/diez-predicciones-para-la-economia-colombiana-en-2025-esto-preven-los-analistas/202450/>
- Sikaló, M., Arnaut-Berilo, A., & Zaimovic, A. (2022). Efficient Asset Allocation: Application of Game Theory-Based Model for Superior Performance. *International Journal of Financial Studies*, 10-20.
- Sikaló, M., Arnaut-Berilo, A., & Zaimovic, A. (2022). Efficient Asset Allocation: Application of Game Theory-Based Model for Superior Performance. *International Journal of Financial Studies*.
- Skilling. (26 de Marzo de 2024). Obtenido de Skilling Corporation Blog Web Site: <https://skilling.com/row/es/blog/trading-strategies/what-are-shares/>
- Torres, L. (2016). *CONFORMACIÓN DE UN PORTAFOLIO EFICIENTE SEGÚN LA TEORÍA DE MARKOWITZ A PARTIR DEL ANÁLISIS DE LAS ACCIONES MÁS REPRESENTATIVAS QUE COTIZAN EN LA BOLSA DE VALORES DE COLOMBIA, SEGÚN ÍNDICE COLCAP DE LOS ÚLTIMOS 3 AÑOS*. Sogamoso. Obtenido de repositorio.uptc.edu.co
- Trabelsi, N., Gozgor, G., Tiwari, A. K., & Hammoudeh, S. (2021). Effects of Price of Gold on Bombay Stock Exchange Sectoral Indices: New Evidence for Portfolio Risk Management. *Research in International Business and Finance*.
- Universitat de Valencia. (2020). *Covarianza*. Valencia. Obtenido de <https://www.uv.es/ceaces/base/descriptiva/covarianza.htm>
- Zapata, S. (2022). *Para el 2022 Colombia se valoriza frente a la Bolsa de Valores*. Medellín. Obtenido de https://www.udea.edu.co/wps/portal/udea/web/generales/interna!/ut/p/z/1/VbLctowFP2VZMFSSJb87M4xnoB5mgQsvMlc2zK49YPYhrb5-soJM21ogHbAnak38tV96Mw5V3eEPfyIvQy28RKqOM8gEfbCU590w6KSKZPB7dSxiKlapq3dzQdUp_jhfQDpSwoxX Xsyuh9bk45DsSfcI1exJWqJfGdqEVdm8zkxjJ5us10-OfCZ