

ESTUDIO TEÓRICO Y NUMÉRICO DE UN SISTEMA DIFERENCIAL EN  
MAGNETOHIDRODINÁMICA

LUIS DAVID SALAZAR ANAYA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA

2025

ESTUDIO TEÓRICO Y NUMÉRICO DE UN SISTEMA DIFERENCIAL EN  
MAGNETOHIDRODINÁMICA

LUIS DAVID SALAZAR ANAYA

Trabajo de grado para optar al título de  
Matemático

Director

Diego Armando Rueda Gómez  
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2025

## **DEDICATORIA**

*En memoria de LUIS CARLOS SALAZAR GÓMEZ,  
mi cuchito,  
un matemático en todo el sentido de la palabra...*

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a la vida por este proceso y el haberme rodeado de personas maravillosas. Agradezco a mi familia, en gran medida a mis papás y a mi hermanito, que siempre me brindaron su amor y sus diferentes versiones de este mundo. A mi director, el profesor Diego Armando Rueda Gómez, por su comprensión, paciencia y consejo durante todo este camino. Para el profesor Élder Villamizar, mi más profunda gratitud, por su rectitud y gran entusiasmo en la enseñanza de este bella ciencia.

A mis amigos y segunda familia, a Juan, Nicolás, Samuel, Jimmy, Émerzon, Cata y Lau, por su cariño y la mejor demostración hecha en la carrera, el poder contar con ellos; sin duda alguna, de las mejores cosas que me dejó este recorrido.

## CONTENIDO

	pág.
<b>Introducción</b>	<b>8</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1 Notación . . . . .	13
1.2 Espacios de Funciones . . . . .	14
1.3 Definiciones y resultados del análisis funcional . . . . .	17
<b>2 Estudio teórico</b>	<b>22</b>
2.1 Existencia y unicidad de solución de (3) . . . . .	23
2.2 Comportamiento asintótico . . . . .	30
<b>3 Estudio numérico</b>	<b>36</b>
3.1 Esquema numérico asociado al modelo (1)-(2) . . . . .	36
3.2 Ley de energía discreta y estimaciones uniformes para (3.11) . . . . .	38
3.3 Buen planteamiento del esquema (3.11)-(3.12) . . . . .	39
3.4 Esquema numérico asociado al sistema (3) y comportamiento asintótico . . . . .	44
<b>4 Simulaciones numéricas</b>	<b>51</b>
4.1 Algoritmo iterativo . . . . .	51
4.2 Influencia de los términos $w$ y $h^2$ en la dinámica del sistema . . . . .	52
4.3 Influencia de los parámetros físicos $\nu, \gamma$ y $\mu$ . . . . .	58
<b>Bibliografía</b>	<b>62</b>

## RESUMEN

**TÍTULO:** ESTUDIO TEÓRICO Y NUMÉRICO DE UN SISTEMA DIFERENCIAL EN MAGNETOHIDRODINÁMICA.<sup>1</sup>

**AUTOR:** LUIS DAVID SALAZAR ANAYA<sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVE:** MAGNETOHIDRODINÁMICA, DIFERENCIAS FINITAS, ELEMENTOS FINITOS, LEY DE ENERGÍA, ESTIMACIONES UNIFORMES, COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO.

### **DESCRIPCIÓN:**

Esta tesis presenta el estudio teórico y numérico de un sistema diferencial en magnetohidrodinámica (en sus versiones evolutiva y estacionaria), el cual describe la dinámica del campo de velocidades y del campo magnético de un fluido conductor eléctrico incompresible. Para el diseño de los esquemas de aproximación numérica, se emplean los métodos de Diferencias Finitas y Elementos Finitos; y se prueban algunas propiedades cualitativas tales como el buen planteamiento de los esquemas, la verificación de una ley de energía discreta, estimaciones uniformes, y el comportamiento asintótico de las soluciones numéricas del esquema evolutivo, mostrando convergencia (cuando el número de etapas de tiempo tiende a infinito) hacia estados estacionarios. Finalmente, se muestran los resultados de algunas simulaciones numéricas realizadas que permiten evidenciar el buen comportamiento de los esquemas planteados.

---

<sup>1</sup> Trabajo de grado.

<sup>2</sup> Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Diego Armando Rueda Gómez, Doctor en Matemáticas.

## ABSTRACT

**TITLE:** THEORETICAL AND NUMERICAL STUDY OF A DIFFERENTIAL SYSTEM IN MAGNETOHYDRODYNAMICS.<sup>3</sup>

**AUTHOR:** LUIS DAVID SALAZAR ANAYA<sup>4</sup>

**KEYWORDS:** MAGNETOHYDRODYNAMICS, FINITE DIFFERENCES, FINITE ELEMENTS, ENERGY LAW, UNIFORM ESTIMATES, ASYMPTOTIC BEHAVIOR.

### DESCRIPTION:

This thesis presents the theoretical and numerical study of a differential system in magnetohydrodynamics (in its evolutionary and stationary versions), which describes the dynamics of the velocity field and the magnetic field of an incompressible electrically conductive fluid. For the design of the numerical approximation schemes, the Finite Difference and Finite Element methods are used; and some qualitative properties are tested, such as the good approach of the schemes, the verification of a discrete energy law, uniform estimates, and the asymptotic behavior of the numerical solutions of the evolutionary scheme, showing convergence (when the number of time stages tends to infinity) towards steady states. Finally, the results of some numerical simulations carried out are shown, which allow us to demonstrate the good behavior of the proposed schemes.

---

<sup>3</sup> Bachelor thesis.

<sup>4</sup> Faculty of Sciences. School of Mathematics. Supervisor: Diego Armando Rueda Gómez, PhD in Mathematics.

## Introducción

La magnetohidrodinámica (MHD) es aquella disciplina o rama de la física que se encarga del estudio del comportamiento o interacción de los fluidos a través de un campo magnético, o en presencia de este. Las ecuaciones MHD consisten en un acoplamiento entre las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de Navier-Stokes, un aspecto que resulta muy curioso teniendo en cuenta que ambos modelos provienen de campos de la física que en principio no están relacionados, como lo son el Electromagnetismo y la Mecánica de fluidos. En la MHD se pueden apreciar tres principios físicos diferentes: La ley de Ampere, la ley de Faraday y la fuerza de Lorentz.

Inicialmente, imagine que tiene un fluido conductor en un campo magnético inicial; debido a esto, la ley de Faraday dice que se genera una fuerza electromotriz que a su vez, origina una corriente eléctrica. Luego, la ley de Ampere proporciona un campo magnético inducido por la corriente eléctrica, el cual se une al campo magnético inicial y al interactuar junto con la densidad del fluido conductor, se produce una fuerza de Lorentz. Finalmente, dicha fuerza actúa sobre el fluido conductor, para que vaya en contra del movimiento relativo del campo magnético inicial y el inducido. Se obtiene entonces, como resultado de lo anterior, que el efecto de la MHD es la desaparición o reducción del movimiento relativo del campo magnético inicial y el inducido.

Desde el punto de vista matemático, el siguiente sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) modela la dinámica de un fluido conductor eléctrico incompresible, en el cual, además del movimiento debido al campo eléctrico, se admite el movimiento libre de iones pesados <sup>5</sup>:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{\mu}{\rho} \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla (p + \frac{\mu}{2} \mathbf{h}^2), \\ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - \frac{1}{\mu \sigma} \Delta \mathbf{h} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{h} - \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla w, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

en  $\Omega \times (0, +\infty)$ , donde  $\Omega$  es un dominio acotado de  $R^N$  ( $N = 2, 3$ ), con frontera  $\partial\Omega$ . En (1), las incógnitas son  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{h}$ , denotando el campo de velocidades y el campo magnético, respectivamente; así mismo,  $p$  denota la presión hidrostática y  $w$  es una función relacionada a los iones pesados. En lo que respecta a los

---

<sup>5</sup> E. Notte-Cuello y M. Rojas-Medar J. Boldrini J. Bravo-Olivares. "Asymptotic behavior of weak and strong solutions of the magnetohydrodynamic equations". En: *Electronic Research Archive* 29.1 (2021), págs. 1783-1801

parámetros,  $\rho$  es la densidad de masa del fluido (asumida como constante positiva),  $\mu > 0$  es la constante de permeabilidad magnética del medio y representa la habilidad que tiene el fluido para ser atravesado por un flujo magnético,  $\sigma > 0$  es la constante de conductividad eléctrica y  $\eta > 0$  es la constante de viscosidad del fluido; así mismo,  $\mathbf{f}$  es un campo de fuerza externo dado. El sistema (1) se complementa con las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, & \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \mathbf{h}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{h}_0(\mathbf{x}), & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

En <sup>6</sup> es posible observar una deducción detallada de este modelo, tomando en cuenta todos los aspectos físicos subyacentes.

Debido a sus variadas aplicaciones científicas, el estudio (tanto teórico como numérico) de este tipo de ecuaciones ha sido el foco de interés de diversos investigadores en los últimos años (ver, por ejemplo, <sup>7, 8</sup>,

---

<sup>6</sup> N. Hernandez. "Stabilized Finite Element Approximation of the Incompressible MHD Equations". En: *Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña* (2010)

<sup>7</sup> M. Shqair y A. Hagag A. Al-Hanaya M. Alotaibi. "MHD effects on Casson fluid flow squeezing between parallel plates". En: *AIMS mathematics* 8.12 (2023), págs. 29440-29452

<sup>8</sup> A. Barkaoui y F. Kuznik I. Cherkaoui S. Bettaibi. "Numerical study of pulsatile thermal magnetohydrodynamic blood flow in an artery with aneurysm using lattice Boltzmann method (LBM)". En: *Communications in Nonlinear Science y Numerical Simulation* 123 (2023)

9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y referencias citadas en ellos). Entre estas aplicaciones podría mencionarse el estudio del campo magnético de la tierra, en el que se ve envuelto el núcleo externo y la agitación causada por la rotación de la tierra, originando de esta manera, dicho campo magnético; una más es el fenómeno de la aurora boreal, generado por la interacción entre la magnetósfera y el viento solar.

En su versión estacionaria, el modelo (1)-(2) está dado por

$$\begin{cases} -\frac{\eta}{\rho_1} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{\mu}{\rho} \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla (p + \frac{\mu}{2} \mathbf{h}^2), \\ -\frac{1}{\mu \sigma} \Delta \mathbf{h} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{h} - \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla w, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (3)$$

El presente trabajo, se enfoca en el estudio teórico y numérico de los sistemas (1)-(2) y (3):

- En la primera parte, en lo que respecta al análisis teórico, se disertará acerca de la existencia y unicidad de soluciones débiles del modelo estacionario (el buen planteamiento del sistema evolutivo se omitirá por seguir argumentos análogos con debidas adecuaciones), y se analizará la estabilidad de las soluciones débiles del problema estacionario (en normas débiles); específicamente, se probará bajo qué condiciones, cuando el tiempo tiende a infinito, las soluciones débiles del modelo

- 
- <sup>9</sup> A. Khimchenko y J. Dong H. Farrokhi D. Otuya. "Magnetohydrodynamics in Biomedical Applications". En: *Nanofluid Flow in Porous Media* (2020)
- <sup>10</sup> P. Mininni y P. Dmitruk D. Gómez. "MHD simulations and astrophysical applications". En: *Advances in Space Research: The Official Journal of the Committee on Space Research (COSPAR)* 35.5 (2005), págs. 899-907
- <sup>11</sup> N. Harada. "Application of magnetohydrodynamics (MHD) and recent research trend". En: *IEEJ Transactions on Power and Energy* 127.3 (2007), págs. 447-450
- <sup>12</sup> M. Aslam y J. Zhang M. Junaid. "Applications of solar thermal radiation in a bioconvective EyringPowell hybrid nanofluid flow under the influence of electromagnetohydrodynamics near a stagnation point: An irreversibility study". En: *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik* 104.4 (2024)
- <sup>13</sup> S. Mishra y K. Nisar P. Pattnaik J. Pattnaik. "Variation of the shape of  $Fe_3O_4$ -nanoparticles on the heat transfer phenomenon with the inclusion of thermal radiation". En: *J Therm Anal Calorim* (2021), págs. 1-12
- <sup>14</sup> J. Esfahani y M. Maskaniyan S. Rashidi. "Applications of magnetohydrodynamics in biological systems- a review on the numerical studies". En: *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 439 (2017), págs. 358-372
- <sup>15</sup> R. Cameron y S. Solanki N. Yadav. "Slow magneto-acoustic waves in simulations of a solar plage region carry enough energy to heat the chromosphere". En: *Astronomy & Astrophysics* 652 (2021)

(1)-(2) convergen a las soluciones débiles del sistema (3). Esta parte estará basada mayormente en la referencia <sup>16</sup>.

- En la segunda parte, en lo que respecta al análisis numérico, se presentarán dos esquemas numéricos (uno para aproximar el sistema (1)-(2) y otro asociado al modelo (3)), basados en el método de los elementos finitos. Para estos esquemas de aproximación, se demostrará su buen planteamiento y se estudiará la estabilidad de las soluciones estacionarias discretas (en normas débiles), determinando bajo qué condiciones la solución discreta del esquema evolutivo converge a la solución del esquema estacionario (cuando el número de etapas de tiempo tiende a infinito).
- Finalmente, desde el punto de vista de la simulación numérica, se presentarán algunos resultados computados usando el software FreeFem++.

Este escrito está organizado de la siguiente manera: En el Capítulo 1 se realiza una revisión de algunos conceptos y resultados relevantes que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Se presentan algunos espacios de funciones, y se repasan definiciones y teoremas del área de análisis funcional que serán de gran utilidad en las demostraciones de los capítulos posteriores.

En el Capítulo 2 se realiza el estudio teórico relativo a los sistemas (1)-(2) y (3). Por un lado, se prueba la existencia y unicidad de soluciones del modelo estacionario (el análisis del buen planteamiento del modelo evolutivo se omitirá por usar un razonamiento análogo con las debidas adecuaciones); y por otro lado, se estudia el comportamiento asintótico de las soluciones débiles del modelo (1)-(2), probando bajo qué condiciones, cuando el tiempo tiende a infinito, estas soluciones convergen a la solución débil del sistema estacionario (3).

En el Capítulo 3, se desarrolla el estudio numérico de los sistemas (1)-(2) y (3), usando los métodos de diferencias finitas y elementos finitos. Específicamente, se presentarán dos esquemas numéricos completamente discretos, y se prueban algunas propiedades cualitativas tales como el buen planteamiento de los esquemas, la verificación de una ley de energía discreta, estimaciones uniformes, y el comportamiento asintótico de las soluciones del esquema numérico evolutivo.

Finalmente, en el Capítulo 4, se presentan los resultados de algunos experimentos numéricos realizados usando el esquema numérico evolutivo. Los experimentos están enfocados en dos aspectos: por un lado, se estudiará el efecto de la función  $w$  asociada a los iones pesados y el término cuadrático  $\mathbf{h}^2$  (en la ecuación para  $\mathbf{u}$ ) en el comportamiento del campo magnético y el campo de velocidades; y por otro lado,

---

<sup>16</sup> J. Boldrini, ver n. 5

se verificará la influencia de algunos de los parámetros asociados al sistema (2.1), en la dinámica de las variables involucradas.

## 1. Preliminares

En este capítulo, se llevará a cabo una revisión detallada de los conceptos y resultados fundamentales necesarios para el desarrollo del trabajo. En primer lugar, se realizará una revisión rápida de algunos operadores diferenciales clásicos que serán usados frecuentemente; en segundo lugar, se presentarán los espacios de funciones, destacando principalmente los espacios de Lebesgue, Sobolev y Bochner. Finalmente, se realizará un repaso de algunos conceptos, definiciones y teoremas del área de análisis funcional que serán de gran utilidad en las demostraciones de los capítulos posteriores.

### 1.1. Notación

En el desarrollo de este trabajo,  $\Omega$  denotará un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$  ( $N = 2, 3$ ), esto es, un conjunto no vacío, abierto y conexo cuya frontera será denotada por  $\partial\Omega$ . Un punto de  $\mathbb{R}^N$  es escrito como  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  y su norma euclidiana viene dada por  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^N} = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{1/2}$ . El producto interno de dos vectores  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  en  $\mathbb{R}^N$  es dado por  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{R}^N} = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ .

Si  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  es una  $N$ -tupla de enteros no negativos  $\alpha_i$ , se dice que  $\alpha$  es un multi-índice de longitud  $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$ . Para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  y  $\alpha$  un multi-índice, se define  $\mathbf{x}^\alpha$  como  $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N}$ . Similarmente, si  $D_j = \partial/\partial x_j$ , entonces  $D^\alpha$  definido como

$$D^\alpha := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_N^{\alpha_N} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}, \quad (1.1)$$

denota el operador diferencial de orden  $|\alpha|$ . Note que  $D^{(0,0,\dots,0)}u = u$ .

El símbolo  $\nabla$  representará el operador gradiente, que es definido como:

$$\nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right).$$

Así, para una función escalar  $f$ ,  $\nabla f$  representa el vector con  $i$ -ésima componente  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ . De la misma forma,  $\Delta$  representará el operador Laplaciano, que es definido como:

$$\Delta := \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

esto es, si  $f$  es una función escalar, entonces  $\Delta f = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ . Para  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $p'$  denotará su exponente

conjugado; en el caso  $1 < p < \infty$ ,  $p'$  viene dado por la relación

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

y si  $p = 1$  entonces  $p' = \infty$ , o si  $p = \infty$  entonces  $p' = 1$ . Si  $X$  es un espacio de Hilbert, denotaremos su producto interno como  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  (salvo el caso de  $L^2(\Omega)$  que será denotado por  $(\cdot, \cdot)$ , ver (1.2) abajo).

## 1.2. Espacios de Funciones

En primer lugar, se comenzará definiendo los espacios de Lebesgue. Para  $p \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , el espacio de Banach  $L^p(\Omega)$  es definido como

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible y } \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < \infty \right\},$$

con norma  $\|\cdot\|_{L^p}$  definida por

$$\|u\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En el caso  $p = 2$ , el espacio  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u, v) := (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad (1.2)$$

con norma definida por  $\|u\|_{L^2} = (u, u)^{\frac{1}{2}}$ . Se muestra fácilmente que si  $p \geq q$ , el espacio  $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ . Así mismo, el espacio  $L^\infty(\Omega)$  es definido como

$$L^\infty(\Omega) := \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible y } |u(\mathbf{x})| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega \},$$

con norma definida por

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \text{ess} |u(\mathbf{x})|.$$

Para  $1 < p < \infty$ , el espacio dual de  $L^p(\Omega)$ , denotado por  $(L^p(\Omega))'$ , es dado por

$$(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega), \text{ donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Para espacios  $L^p(\Omega)$  de funciones vectoriales de dimensión  $N$ , se usará la notación  $\mathbf{L}^p(\Omega) = (L^p(\Omega))^N$ , es decir,

$$\mathbf{L}^p(\Omega) := \{ \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N) : u_i \in L^p(\Omega) \text{ para } i = 1, \dots, N \},$$

y su norma asociada está dada por

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p} = \left( \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^p}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Los espacios  $C_0^\infty(\Omega)$  y  $L_{loc}^1(\Omega)$  se definen respectivamente como:

$$C_0^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \in C^\infty(\Omega) \text{ con soporte compacto en } \Omega\},$$

y

$$L_{loc}^1(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \int_K |f| < +\infty, \forall K \subset \Omega, K \text{ compacto} \right\}.$$

Ahora, con el objetivo de definir los espacios de Sobolev, se recordará el concepto de derivada débil.

**Definición 1.2.1. (Derivada débil)** Suponga que  $u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$  y  $\alpha$  es un multi-índice. Diremos que  $v$  es la  $\alpha$ -ésima derivada débil de  $u$ , lo cual será denotado por  $D^\alpha u = v$ , si

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Para  $k \in \mathbb{N}$  y  $p \in \mathbb{R}$  con  $1 \leq p \leq \infty$ , los espacios de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  son definidos por

$$W^{k,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha v \in L^p(\Omega) \text{ para todo } 0 \leq |\alpha| \leq k\},$$

donde  $D^\alpha$  es el operador definido en (1.1). El espacio de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach con la norma

$$\|v\|_{W^{k,p}} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p < \infty,$$

$$\|v\|_{W^{k,\infty}} = \max_{|\alpha| \leq k} \left( \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(\mathbf{x})| \right), \quad p = \infty.$$

En el caso  $p = 2$ , se denotará  $W^{k,2}(\Omega) := H^k(\Omega)$ , el cual es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(\mathbf{x}) D^\alpha v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

y cuya norma es definida por  $\|v\|_{H^m} = \langle u, u \rangle_{H^m(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$ . En particular, el espacio de Sobolev  $H^1(\Omega)$  es definido por

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tal que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i \in \{1, \dots, N\} \right\},$$

donde  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  es la derivada débil de  $u$ . El espacio  $H_0^m(\Omega)$  es definido como la clausura de  $C_0^\infty(\Omega)$  en la norma

$H^m(\Omega)$ . En particular,  $H_0^1(\Omega)$  es caracterizado por

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Para espacios de Sobolev de dimensión  $N$ , se usará la notación  $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) = (W^{k,p}(\Omega))^N$ , y  $\mathbf{H}^m(\Omega) = (H^m(\Omega))^N$ , es decir,

$$\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) := \{\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N) : v_i \in W^{k,p}(\Omega) \text{ para } i = 1, \dots, N\},$$

$$\mathbf{H}^m(\Omega) := \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N) : u_i \in H^m(\Omega) \text{ para } i = 1, \dots, N\},$$

y sus respectivas normas asociadas están dadas por

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{k,p}} = \left( \sum_{i=1}^N \|v_i\|_{W^{k,p}}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^m} = \left( \sum_{i=1}^N \|u_i\|_{H^m}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sea  $\mathcal{V}$  el espacio formado por todos los campos  $\mathbf{u} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$  satisfaciendo  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  en  $\Omega$ . Denotamos por  $\mathbf{H}$  (respectivamente  $\mathbf{V}$ ) la clausura de  $\mathcal{V}$  en  $L^2(\Omega)$  (respectivamente  $H^1(\Omega)$ ).  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{V}$  son espacios de Hilbert bajo las normas de  $L^2(\Omega)$  y  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ , y pueden caracterizarse por la siguiente definición:

$$\mathbf{H} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega \text{ y } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\},$$

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega); \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega\}.$$

**Observación 1.2.2.** *A menos que sea estrictamente necesario para evitar ambigüedades, usaremos (para las normas en espacios de funciones vectoriales) la notación  $\|\mathbf{u}\|_X = \|\mathbf{u}\|_X$ , es decir, omitiremos la negrita en el espacio  $X$ .*

Para terminar esta sección, se presenta la definición de los espacios de Bochner.

**Definición 1.2.3. (Espacios de Bochner)** *Sea  $X$  un espacio de Banach y  $a, b$  tales que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Para  $1 \leq \alpha < +\infty$ , diremos que  $f \in L^\alpha(a, b; X)$  si:  $f$  es medible y*

$$\|f\|_{L^\alpha(a,b;X)} = \left( \int_a^b \|f(t)\|_X^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} < +\infty.$$

En el caso  $\alpha = +\infty$ ,

$$\|f\|_{L^\infty(a,b;X)} = \sup_{t \in [a,b]} \text{ess } \|f(t)\|_X.$$

### 1.3. Definiciones y resultados del análisis funcional

En esta sección, se citarán algunas definiciones y resultados del área de Análisis Funcional que serán utilizados en el desarrollo de los capítulos posteriores. Se comenzará presentando el concepto de inmersión continua, el cual será necesario para enunciar el teorema de las inmersiones de Sobolev (resultado que se usará frecuentemente en la obtención de estimaciones, tanto en el análisis teórico, como en el análisis numérico); y además, se presentará la definición de inmersión compacta de un espacio de Banach en otro (todo tomado de <sup>1</sup>).

**Definición 1.3.1. (Inmersión continua).** Sean  $X$  y  $Y$  espacios de Banach con normas  $\|\cdot\|_X$  y  $\|\cdot\|_Y$  respectivamente, tales que  $X \subseteq Y$ . Diremos que  $X$  está inmerso continuamente en  $Y$ , y lo denotaremos por  $X \hookrightarrow Y$ , si el operador inclusión es continuo, es decir, si existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

**Definición 1.3.2. (Inmersión compacta).** Sean  $X$  y  $Y$  espacios de Banach con normas  $\|\cdot\|_X$  y  $\|\cdot\|_Y$  respectivamente, tales que  $X \subseteq Y$ . Diremos que  $X$  está inmerso de manera compacta en  $Y$ , y lo denotaremos por  $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ , si  $X \hookrightarrow Y$  y además, el operador identidad  $i : X \rightarrow Y$  mapea conjuntos acotados de  $X$  en conjuntos relativamente compactos de  $Y$ .

**Teorema 1.3.3. (Teorema de las inmersiones de Sobolev).** Sea  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^N$ ,  $p \geq 1$  y  $k \geq 0$ . Si  $kp \leq N$ , entonces

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega),$$

para todo  $r \in \left[ p, \frac{Np}{N-kp} \right]$  si  $kp < N$ , y para todo  $r \in [p, \infty)$  si  $kp = N$ . En particular, existen constantes  $C_1, C_2 > 0$  que dependen únicamente de  $k, p, r$  y  $N$  tales que, para todo  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ,

$$\|u\|_{L^r} \leq C_1 \|u\|_{W^{k,p}} \quad \text{para todo } r \in \left[ p, \frac{Np}{N-kp} \right], \text{ si } kp < N,$$

$$\|u\|_{L^r} \leq C_2 \|u\|_{W^{k,p}} \quad \text{para todo } r \in [p, \infty), \text{ si } kp = N.$$

Finalmente, si  $kp > N$ , cada  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  es igual en c.t.p. en  $\Omega$  a una única función en  $C^l(\bar{\Omega})$ , con  $0 \leq l < k - \frac{N}{p}$  y la siguiente desigualdad se tiene

$$\|u\|_{C^l} \leq C_3 \|u\|_{W^{k,p}}.$$

---

<sup>1</sup> G. P. Galdi. "An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations". En: Springer (2011)

para alguna constante  $C_3 > 0$ .

Por otra parte, los siguientes dos teoremas serán utilizados para estudiar el buen planteamiento del sistema estacionario en el Capítulo 2; mientras que el lema que se cita después será útil para obtener el buen planteamiento de los esquemas numéricos en el Capítulo 3 (véase <sup>2</sup>, <sup>3</sup>).

**Teorema 1.3.4. (Teorema de Lax-Milgram).** *Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  un operador bilineal, continuo y coercivo, esto es, existen constantes  $\alpha, \beta > 0$  tales que*

$$|a(u, v)| \leq \alpha \|u\|_H \|v\|_H, \quad \text{para todo } u, v \in H$$

y

$$a(u, u) \geq \beta \|u\|_H^2, \quad \text{para todo } u \in H.$$

Entonces, para cada  $f \in H'$  existe un único elemento  $u \in H$  tales que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \text{para todo } v \in H.$$

**Teorema 1.3.5. (Teorema de punto fijo de Leray-Schauder).** *Sea  $X$  un espacio de Banach y sea  $T : X \rightarrow X$  un operador continuo y compacto. Si todos los posibles puntos fijos del operador  $\lambda T$  ( $\lambda \in [0, 1]$ ) están limitados, entonces existe  $x \in X$  punto fijo de  $T$ .*

**Lema 1.3.6.** *Sea  $X$  un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar  $(\cdot, \cdot)$  y norma  $|\cdot|$ , y sea  $P$  una aplicación continua de  $X$  en sí mismo. Asuma que existe  $\rho > 0$  tal que  $(P(\xi), \xi) > 0$ , para  $|\xi| = \rho > 0$ . Entonces, existe  $\xi \in X$ , con  $|\xi| < \rho$ , tal que  $P(\xi) = 0$ .*

A continuación se enunciarán tres desigualdades que serán usadas frecuentemente, y sus respectivas demostraciones se encuentran en <sup>4</sup>.

**Teorema 1.3.7. (Desigualdad de Young).** *Sean  $a, b, p, q$  números reales positivos tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Entonces se verifica la siguiente desigualdad*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

---

<sup>2</sup> Galdi, ver n. 1

<sup>3</sup> "Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis". En: *North-Holland* (1984)

<sup>4</sup> H. Brézis. "Análisis Funcional Teoría y aplicaciones". En: *Alianza Editorial* (1984)

**Teorema 1.3.8. (Desigualdad de Hölder Generalizada).** Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$  y las funciones  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ , con  $p_i, p \geq 1$  y satisfaciendo  $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k}$ . Entonces, para  $f = f_1 f_2 \cdots f_{k-1} f_k \in L^p(\Omega)$  se tiene

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \|f_2\|_{L^{p_2}} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

**Lema 1.3.9. (Desigualdad de Poincaré).** Sea  $\Sigma$  un subconjunto de  $\partial\Omega$  de medida positiva. Entonces para todo  $u \in W^{1,q}(\Omega)$  (con  $1 \leq q \leq \infty$ ), la siguiente desigualdad se tiene

$$\|u\|_{L^q} \leq C \left( \|\nabla u\|_{L^q} + \int_{\Sigma} |u| \right),$$

donde la constante  $C > 0$  depende de  $N, q, \Omega, \Sigma$ , es decir  $C = C(N, q, \Omega, \Sigma)$ .

*Demostración.* Véase <sup>5</sup>. □

**Observación 1.3.10.** Note que si  $u \in W^{1,q}(\Omega)$  (con  $1 \leq q \leq \infty$ ) es tal que  $u = 0$  sobre  $\Sigma$ , para algún subconjunto  $\Sigma$  de  $\partial\Omega$  con medida positiva, entonces la desigualdad del Lema 1.3.9 se reduce a

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|\nabla u\|_{L^q},$$

con  $C = C(N, q, \Omega, \Sigma) > 0$ . Como consecuencia, se deduce que si  $u \in H^1(\Omega)$  es tal que  $u = 0$  sobre  $\Sigma$ , para algún subconjunto  $\Sigma$  de  $\partial\Omega$  de medida positiva, entonces

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}, \tag{1.3}$$

y por lo tanto,

$$\|u\|_{H^1} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}. \tag{1.4}$$

Teniendo en cuenta la observación anterior, a lo largo de este trabajo se usará la siguiente norma equivalente en  $\mathbf{V}$  (véase <sup>6</sup>):

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 = \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}. \tag{1.5}$$

Así mismo, teniendo en cuenta el Teorema de Inmersiones de Sobolev, usaremos frecuentemente la siguiente estimación

$$\|\mathbf{u}\|_{L^6(\Omega)} \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \tag{1.6}$$

---

<sup>5</sup> Galdi, ver n. 1

<sup>6</sup> J. Nečas. En: *Academia* (1967)

para una constante  $C > 0$ .

Ahora, presentaremos los algunos resultados que serán usados para obtener las formulaciones débiles asociadas a los sistemas (1)-(2) y (3).

**Teorema 1.3.11. (Fórmula de Green).** *Sea  $\Omega$  un conjunto abierto de clase  $C^1$ . Sea  $\omega$  una función  $C^1(\bar{\Omega})$  con soporte acotado en la clausura  $\bar{\Omega}$ . Entonces  $\omega$  satisface la fórmula de Green*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \omega(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) ds,$$

donde  $n_i$  es el  $i$ -ésimo componente de un vector unitario normal hacia afuera de  $\bar{\Omega}$ .

**Corolario 1.3.12. (Integración por partes).** *Sea  $\Omega$  un conjunto abierto de clase  $C^1$ . Sean  $u$  y  $v$  dos funciones  $C^1(\bar{\Omega})$  con soporte acotado en el conjunto cerrado  $\bar{\Omega}$ . Entonces se satisface la fórmula de integración por partes*

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) ds.$$

*Demostración.* Es suficiente tomar  $\omega = uv$  en el Teorema 1.3.11. □

**Corolario 1.3.13.** *Sean  $\Omega$  un conjunto abierto de clase  $C^1$  y  $u$  una función de  $C^2(\bar{\Omega})$  y  $v$  una función de  $C^1(\bar{\Omega})$ , ambas con soporte acotado en el conjunto cerrado  $\bar{\Omega}$ . Entonces se satisface la fórmula de integración por partes*

$$\int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) ds,$$

donde  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$ .

Los siguientes dos resultados proporcionan criterios de convergencia (débil y fuerte) de sucesiones, y serán usados en la demostración de la existencia de solución del sistema estacionario en el Capítulo 2 (tomados de <sup>7</sup>).

**Lema 1.3.14.** *Sea  $X$  un espacio de Banach reflexivo y  $(x_n) \subseteq X$  una sucesión acotada en  $X$ . Entonces, existe una subsucesión  $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$  y  $\bar{x} \in X$  tal que  $x_{n_k}$  converge débilmente a  $\bar{x}$ .*

**Teorema 1.3.15.** *Sean  $X$  y  $Y$  espacios normados y  $T : X \rightarrow Y$  un operador lineal. Entonces  $T$  es compacto si, y solo si,  $T$  mapea toda sucesión acotada  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $X$ , en una sucesión  $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  en  $Y$  que tenga una subsucesión convergente.*

---

<sup>7</sup> Brézis, ver n. 4

Por último, la siguiente proposición (tomado de <sup>8</sup>) será usada en la obtención de estimaciones en el Capítulo 2.

**Proposición 1.3.16.** *El operador trineal definido por*

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, dx,$$

*satisface*

- $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1.$
- $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1.$

---

<sup>8</sup> E. Villamizar D. Rueda. "On the RayleighBénardMarangoni system and a related optimal control problem". En: *Computers and Mathematics With Applications* 74.12 (2017), págs. 2969-2991

## 2. Estudio teórico

Este capítulo tiene como propósito realizar un estudio teórico relativo a los sistemas (1)-(2) y (3). En primer lugar, se probará la existencia y unicidad de soluciones de (3) (el análisis del buen planteamiento de (1)-(2) se omitirá por usar un razonamiento análogo con las debidas adecuaciones; sin embargo, el lector interesado puede consultar la referencia <sup>1</sup>); y en segundo lugar, se estudiará el comportamiento asintótico de las soluciones débiles del modelo (1)-(2), probando bajo qué condiciones, cuando el tiempo tiende a infinito, estas soluciones convergen (en normas débiles) a la solución débil del sistema estacionario (3). Este capítulo está basado en gran parte en la referencia <sup>2</sup>.

Comenzamos recordando la formulación variacional asociada a estos sistemas.

**Definición 2.0.1. (Solución débil de (1)-(2))** Sean  $[u_0, h_0] \in \mathbf{H} \times \mathbf{H}$  y  $f \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{V}')$ . Un par  $[u, h]$  es llamado solución débil de (1)-(2) si

$$u, h \in L^\infty(0, \infty, \mathbf{H}) \cap L^2_{loc}(0, \infty, \mathbf{V}),$$

y satisface la siguiente formulación variacional

$$\begin{cases} \alpha(u_t, \bar{u}) + \nu(\nabla u, \nabla \bar{u}) + \alpha(u \cdot \nabla u, \bar{u}) - (h \cdot \nabla h, \bar{u}) = \alpha(f, \bar{u}), \quad \forall \bar{u} \in \mathbf{V}, \\ (h_t, \bar{h}) + \gamma(\nabla h, \nabla \bar{h}) + (u \cdot \nabla h, \bar{h}) - (h \cdot \nabla u, \bar{h}) = 0, \quad \forall \bar{h} \in \mathbf{V}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Note que, del planteamiento dado en (1), hemos definido los nuevos parámetros  $\alpha = \frac{\rho}{\mu}$ ,  $\nu = \frac{\eta}{\mu}$  y  $\gamma = \frac{1}{\mu\sigma}$ .

**Definición 2.0.2. (Solución débil de (3))** Sea  $f_\infty \in \mathbf{V}'$ . Un par  $[u_\infty, h_\infty] \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$  es llamado solución débil de (3) si satisface la siguiente formulación variacional

$$\begin{cases} \nu(\nabla u_\infty, \nabla v) + \alpha(u_\infty \cdot \nabla u_\infty, v) - (h_\infty \cdot \nabla h_\infty, v) = \alpha(f_\infty, v), \quad \forall v \in \mathbf{V}, \\ \gamma(\nabla h_\infty, \nabla b) + (u_\infty \cdot \nabla h_\infty, b) - (h_\infty \cdot \nabla u_\infty, b) = 0, \quad \forall b \in \mathbf{V}. \end{cases} \quad (2.2)$$

<sup>1</sup> y J. Boldrini M. Rojas-Medar. "The Weak solutions and reproductive property for a system of evolution equations of magnetohydrodynamic type". En: *Proyecciones* 13.2 (1994), págs. 85-97

<sup>2</sup> J. Boldrini, ver n. 5

## 2.1. Existencia y unicidad de solución de (3)

Con el objetivo de probar la existencia y unicidad de solución de (3), primero se verificarán las hipótesis del Teorema del punto fijo de Leray-Schauder (ver Teorema 1.3.5), lo cual permitirá concluir que existe al menos una solución para el problema estacionario, y luego se probará que las soluciones son únicas bajo ciertas condiciones. Resaltamos que la prueba de la existencia de solución que desarrollamos aquí, usa un argumento diferente al usado en <sup>3, 4</sup>.

**Proposición 2.1.1.** *Existe al menos una solución débil  $[\mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty] \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$  de (2.2) en el sentido de la Definición 2.0.2. Además,  $[\mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty]$  satisface la estimación*

$$\frac{\nu}{2} \|\nabla \mathbf{u}_\infty\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla \mathbf{h}_\infty\|_{L^2}^2 \leq \frac{\alpha^2 C}{\nu} \|\mathbf{f}_\infty\|_{\mathbf{V}'}^2. \quad (2.3)$$

*Demostración.* Empezaremos demostrando la existencia de solución, y para esto definimos el siguiente operador

$$\begin{aligned} T : \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega) &\longrightarrow \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega) \\ [\bar{\mathbf{u}}_\infty, \bar{\mathbf{h}}_\infty] &\longmapsto T[\bar{\mathbf{u}}_\infty, \bar{\mathbf{h}}_\infty] = [\mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty], \end{aligned}$$

donde  $[\mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty]$  es solución de

$$\nu(\nabla \mathbf{u}_\infty, \nabla \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{f}_\infty, \mathbf{v}) + \alpha(\bar{\mathbf{u}}_\infty \cdot \nabla \mathbf{v}, \bar{\mathbf{u}}_\infty) - (\bar{\mathbf{h}}_\infty \cdot \nabla \mathbf{v}, \bar{\mathbf{h}}_\infty), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.4)$$

$$\gamma(\nabla \mathbf{h}_\infty, \nabla \mathbf{b}) = -(\bar{\mathbf{h}}_\infty \cdot \nabla \mathbf{b}, \bar{\mathbf{u}}_\infty) + (\bar{\mathbf{u}}_\infty \cdot \nabla \mathbf{b}, \bar{\mathbf{h}}_\infty), \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbf{V}. \quad (2.5)$$

Probaremos que el operador  $T$  satisface las condiciones del Teorema 1.3.5.

1. Primero mostraremos que  $T$  está bien definido, es decir que, para todo  $[\bar{\mathbf{u}}_\infty, \bar{\mathbf{h}}_\infty] \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega)$ , existe un único  $[\mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty] \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega)$  solución de (2.4)-(2.5). Para esto, usaremos el Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema 1.3.4). Con este fin, definimos los operadores  $a_1 : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a_2 : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f_2 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  dados por:

$$a_1(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{v}) = \nu(\nabla \mathbf{u}_\infty, \nabla \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}_\infty, \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

---

<sup>3</sup> J. Boldrini, ver n. 5

<sup>4</sup> E. V. Chizhonkov. "A system of equations of magnetohydrodynamics type". En: *Doklady Akademii Nauk SSSR* 278 (1984), págs. 1074-1077

$$a_2(\mathbf{h}_\infty, \mathbf{b}) = \gamma(\nabla \mathbf{h}_\infty, \nabla \mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{h}_\infty, \mathbf{b} \in \mathbf{V},$$

$$f_1(\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{f}_\infty, \mathbf{v}) + \alpha(\bar{\mathbf{u}}_\infty \cdot \nabla \mathbf{v}, \bar{\mathbf{u}}_\infty) - (\bar{\mathbf{h}}_\infty \cdot \nabla \mathbf{v}, \bar{\mathbf{h}}_\infty), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

$$f_2(\mathbf{b}) = -(\bar{\mathbf{h}}_\infty \cdot \nabla \mathbf{b}, \bar{\mathbf{u}}_\infty) + (\bar{\mathbf{u}}_\infty \cdot \nabla \mathbf{b}, \bar{\mathbf{h}}_\infty), \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbf{V}.$$

A continuación, probaremos que  $a_1$  es un operador bilineal, continuo y coercivo.

- Bilinealidad: Veamos que se cumple la siguiente igualdad:

$$a_1(\mu \mathbf{u} + \psi \mathbf{z}, \mathbf{v}) = \mu a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \psi a_1(\mathbf{z}, \mathbf{v}). \quad (2.6)$$

En efecto, note que de la linealidad de la integral y el operador gradiente, se obtiene

$$\begin{aligned} a_1(\mu \mathbf{u} + \psi \mathbf{z}, \mathbf{v}) &= \nu(\nabla(\mu \mathbf{u} + \psi \mathbf{z}), \nabla \mathbf{v}) \\ &= \nu(\mu \nabla \mathbf{u} + \psi \nabla \mathbf{z}, \nabla \mathbf{v}) \\ &= \nu\mu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + \nu\psi(\nabla \mathbf{z}, \nabla \mathbf{v}) \\ &= \mu a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \psi a_1(\mathbf{z}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

De manera análoga, se puede probar que  $a_1(\mathbf{u}, \mu \mathbf{v} + \psi \mathbf{w}) = \mu a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \psi a_1(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ .

- Continuidad: Observe que, usando la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned} |a_1(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{v})| &\leq \nu \|\nabla \mathbf{u}_\infty\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2} \\ &\leq C \|\mathbf{u}_\infty\|_V \|\mathbf{v}\|_V. \end{aligned}$$

- Coercividad: Note que, usando (1.5), obtenemos

$$a_1(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{u}_\infty) = \nu \|\nabla \mathbf{u}_\infty\|_{L^2}^2 \geq C \|\mathbf{u}_\infty\|_V^2.$$

Continuaremos mostrando que  $f_1$  es un operador lineal y continuo.

- Linealidad: Probaremos que  $f_1(\psi \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \psi f_1(\mathbf{v}) + \mu f_1(\mathbf{w})$ . En efecto, de la linealidad de la integral y el operador gradiente, se deduce

$$\begin{aligned} f_1(\psi \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) &= \alpha(\mathbf{f}_\infty, \psi \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) - (\bar{\mathbf{h}}_\infty \cdot \nabla(\psi \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}), \bar{\mathbf{h}}_\infty) \\ &\quad + \alpha(\bar{\mathbf{u}}_\infty \cdot \nabla(\psi \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}), \bar{\mathbf{u}}_\infty) \\ &= \alpha(\mathbf{f}_\infty, \psi \mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{f}_\infty, \mu \mathbf{w}) - (\bar{\mathbf{h}}_\infty \cdot \nabla(\psi \mathbf{v}), \bar{\mathbf{h}}_\infty) - (\bar{\mathbf{h}}_\infty \cdot \nabla(\mu \mathbf{w}), \bar{\mathbf{h}}_\infty) \\ &\quad + \alpha(\bar{\mathbf{u}}_\infty \cdot \nabla(\psi \mathbf{v}), \bar{\mathbf{u}}_\infty) + \alpha(\bar{\mathbf{u}}_\infty \cdot \nabla(\mu \mathbf{w}), \bar{\mathbf{u}}_\infty) \\ &= \psi f_1(\mathbf{v}) + \mu f_1(\mathbf{w}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha(\bar{\mathbf{u}}_\infty \cdot \nabla(\psi \mathbf{v}), \bar{\mathbf{u}}_\infty) + \alpha(\bar{\mathbf{u}}_\infty \cdot \nabla(\mu \mathbf{w}), \bar{\mathbf{u}}_\infty) \\
& = \alpha\psi(\mathbf{f}_\infty, \mathbf{v}) - \psi(\bar{\mathbf{h}}_\infty \cdot \nabla \mathbf{v}, \bar{\mathbf{h}}_\infty) + \alpha\psi(\bar{\mathbf{u}}_\infty \cdot \nabla \mathbf{v}, \bar{\mathbf{u}}_\infty) \\
& \quad + \alpha\mu(\mathbf{f}_\infty, \mathbf{w}) - \mu(\bar{\mathbf{h}}_\infty \cdot \nabla \mathbf{w}, \bar{\mathbf{h}}_\infty) + \alpha\mu(\bar{\mathbf{u}}_\infty \cdot \nabla \mathbf{w}, \bar{\mathbf{u}}_\infty) \\
& = \psi f_1(\mathbf{v}) + \mu f_1(\mathbf{w}).
\end{aligned}$$

- Continuidad: Note que

$$\begin{aligned}
|f_1(\mathbf{v})| & \leq \alpha C \|\mathbf{f}_\infty\|_{V'} \|\mathbf{v}\|_V + C \|\bar{\mathbf{h}}_\infty\|_{L^4} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2} \|\bar{\mathbf{h}}_\infty\|_{L^4} + \alpha C \|\bar{\mathbf{u}}_\infty\|_{L^4} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2} \|\bar{\mathbf{u}}_\infty\|_{L^4} \\
& \leq C \|\mathbf{v}\|_V + C \|\mathbf{v}\|_V + C \|\mathbf{v}\|_V \\
& \leq C \|\mathbf{v}\|_V.
\end{aligned}$$

De manera análoga a lo desarrollado anteriormente, se puede probar que  $a_2$  es un operador bilinear, continuo y coercivo, y que  $f_2$  es un operador lineal y continuo. Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del Teorema 1.3.4, y concluimos que para cada  $[\bar{\mathbf{u}}_\infty, \bar{\mathbf{h}}_\infty] \in \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega)$ , existe un único  $[\mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty] \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \subseteq \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega)$  solución de (2.4)-(2.5); y así,  $T$  está bien definido.

2. Ahora veremos que los posibles puntos fijos de  $\lambda T$  están limitados (con  $\lambda \in (0, 1]$ ). Para esto, note que si  $[\mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty]$  es un punto fijo de  $\lambda T$ , entonces verifica que

$$\lambda T[\mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty] = [\mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty],$$

o equivalentemente,

$$T[\mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty] = \left[ \frac{\mathbf{u}_\infty}{\lambda}, \frac{\mathbf{h}_\infty}{\lambda} \right],$$

de lo cual, teniendo en cuenta (2.4)-(2.5), deducimos que  $[\mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty] \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$  satisface

$$\begin{aligned}
\frac{\nu}{\lambda} (\nabla \mathbf{u}_\infty, \nabla \mathbf{v}) & = \alpha (\mathbf{f}_\infty, \mathbf{v}) - (\mathbf{h}_\infty \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{h}_\infty) + \alpha (\mathbf{u}_\infty \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{u}_\infty), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\
\frac{\gamma}{\lambda} (\nabla \mathbf{h}_\infty, \nabla \mathbf{b}) & = -(\mathbf{h}_\infty \cdot \nabla \mathbf{b}, \mathbf{u}_\infty) + (\mathbf{u}_\infty \cdot \nabla \mathbf{b}, \mathbf{h}_\infty), \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbf{V}.
\end{aligned}$$

Tomando  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\infty \in \mathbf{V}$  y  $\mathbf{b} = \mathbf{h}_\infty \in \mathbf{V}$ , y teniendo en cuenta la Proposición 1.3.16, tenemos

$$\begin{aligned}
\nu \|\nabla \mathbf{u}_\infty\|_{L^2}^2 & = \alpha \lambda (\mathbf{f}_\infty, \mathbf{u}_\infty) - \lambda (\mathbf{h}_\infty \cdot \nabla \mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty), \\
\gamma \|\nabla \mathbf{h}_\infty\|_{L^2}^2 & = \lambda (\mathbf{h}_\infty \cdot \nabla \mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty),
\end{aligned}$$

y sumando las anteriores igualdades, llegamos a

$$\nu \|\mathbf{u}_\infty\|_V^2 + \gamma \|\mathbf{h}_\infty\|_V^2 = \alpha \lambda(\mathbf{f}_\infty, \mathbf{u}_\infty). \quad (2.7)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \alpha \lambda(\mathbf{f}_\infty, \mathbf{u}_\infty) &\leq \alpha \lambda |(\mathbf{f}_\infty, \mathbf{u}_\infty)| \\ &\leq \alpha \lambda \|\mathbf{f}_\infty\|_{V'} \|\mathbf{u}_\infty\|_V \\ &\leq \frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}_\infty\|_V^2 + \frac{\alpha^2 C}{\nu} \|\mathbf{f}_\infty\|_{V'}^2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

de (2.7), obtenemos

$$\frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}_\infty\|_V^2 + \gamma \|\mathbf{h}_\infty\|_V^2 \leq \frac{\alpha^2 C}{\nu} \|\mathbf{f}_\infty\|_{V'}^2,$$

lo cual implica que

$$\|\mathbf{u}_\infty\|_{L^4}^2 + \|\mathbf{h}_\infty\|_{L^4}^2 \leq C(\|\mathbf{u}_\infty\|_V^2 + \|\mathbf{h}_\infty\|_V^2) \leq C.$$

3. Como siguiente paso, comprobaremos la compacidad del operador  $T$ . Para ello, consideramos una sucesión  $([\bar{\mathbf{u}}_\infty^n, \bar{\mathbf{h}}_\infty^n])_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega)$  acotada. Si denotamos por  $T[\bar{\mathbf{u}}_\infty^n, \bar{\mathbf{h}}_\infty^n] = [\mathbf{u}_\infty^n, \mathbf{h}_\infty^n]$ , tenemos que

$$\nu(\nabla \mathbf{u}_\infty^n, \nabla \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{f}_\infty, \mathbf{v}) + \alpha(\bar{\mathbf{u}}_\infty^n \cdot \nabla \mathbf{v}, \bar{\mathbf{u}}_\infty^n) - (\bar{\mathbf{h}}_\infty^n \cdot \nabla \mathbf{v}, \bar{\mathbf{h}}_\infty^n), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.9)$$

$$\gamma(\nabla \mathbf{h}_\infty^n, \nabla \mathbf{b}) = -(\bar{\mathbf{h}}_\infty^n \cdot \nabla \mathbf{b}, \bar{\mathbf{u}}_\infty^n) + (\bar{\mathbf{u}}_\infty^n \cdot \nabla \mathbf{b}, \bar{\mathbf{h}}_\infty^n), \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbf{V}, \quad (2.10)$$

de lo cual, tomando  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\infty^n$  y  $\mathbf{b} = \mathbf{h}_\infty^n$ , llegamos a

$$\nu \|\nabla \mathbf{u}_\infty^n\|_{L^2}^2 = \alpha(\mathbf{f}_\infty, \mathbf{u}_\infty^n) + \alpha(\bar{\mathbf{u}}_\infty^n \cdot \nabla \mathbf{u}_\infty^n, \bar{\mathbf{u}}_\infty^n) - (\bar{\mathbf{h}}_\infty^n \cdot \nabla \mathbf{u}_\infty^n, \bar{\mathbf{h}}_\infty^n), \quad (2.11)$$

$$\gamma \|\nabla \mathbf{h}_\infty^n\|_{L^2}^2 = -(\bar{\mathbf{h}}_\infty^n \cdot \nabla \mathbf{h}_\infty^n, \bar{\mathbf{u}}_\infty^n) + (\bar{\mathbf{u}}_\infty^n \cdot \nabla \mathbf{h}_\infty^n, \bar{\mathbf{h}}_\infty^n). \quad (2.12)$$

Estimando en (2.11) y (2.12), tenemos que

$$\begin{aligned} \nu \|\mathbf{u}_\infty^n\|_V^2 &\leq \alpha C \|\mathbf{f}_\infty\|_{V'} \|\mathbf{u}_\infty^n\|_V + \alpha C \|\bar{\mathbf{u}}_\infty^n\|_{L^4} \|\nabla \mathbf{u}_\infty^n\|_{L^2} \|\bar{\mathbf{u}}_\infty^n\|_{L^4} + C \|\bar{\mathbf{h}}_\infty^n\|_{L^4} \|\nabla \mathbf{u}_\infty^n\|_{L^2} \|\bar{\mathbf{h}}_\infty^n\|_{L^4} \\ &\leq \frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}_\infty^n\|_V^2 + \frac{C\alpha^2}{\nu} \|\mathbf{f}_\infty\|_{V'}^2 + \frac{C\alpha^2}{\nu} \|\bar{\mathbf{u}}_\infty^n\|_{L^4}^4 + \frac{C}{\nu} \|\bar{\mathbf{h}}_\infty^n\|_{L^4}^4, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \gamma \|\mathbf{h}_\infty^n\|_V^2 &\leq \|\bar{\mathbf{h}}_\infty^n\|_{L^4} \|\nabla \mathbf{h}_\infty^n\|_{L^2} \|\bar{\mathbf{u}}_\infty^n\|_{L^4} + \|\bar{\mathbf{u}}_\infty^n\|_{L^4} \|\nabla \mathbf{h}_\infty^n\|_{L^2} \|\bar{\mathbf{h}}_\infty^n\|_{L^4} \\ &\leq \frac{\gamma}{2} \|\mathbf{h}_\infty^n\|_V^2 + \frac{C}{\gamma} \|\bar{\mathbf{h}}_\infty^n\|_{L^4}^2 \|\bar{\mathbf{u}}_\infty^n\|_{L^4}^2 + \frac{C}{\gamma} \|\bar{\mathbf{h}}_\infty^n\|_{L^4}^2 \|\bar{\mathbf{u}}_\infty^n\|_{L^4}^2, \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}_\infty^n\|_V^2 \leq \frac{C\alpha^2}{\nu} \|\mathbf{f}_\infty\|_V^2 + \frac{C\alpha^2}{\nu} \|\bar{\mathbf{u}}_\infty^n\|_{L^4}^4 + \frac{C}{\nu} \|\bar{\mathbf{h}}_\infty^n\|_{L^4}^4 \leq C, \quad (2.13)$$

$$\frac{\gamma}{2} \|\mathbf{h}_\infty^n\|_V^2 + \frac{C}{\gamma} \|\bar{\mathbf{h}}_\infty^n\|_{L^4}^2 \|\bar{\mathbf{u}}_\infty^n\|_{L^4}^2 \leq C, \quad (2.14)$$

y así, la sucesión  $([\mathbf{u}_\infty^n, \mathbf{h}_\infty^n])_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada en  $\mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ . Por lo anterior, existe una subsucesión  $([\mathbf{u}_\infty^{n_k}, \mathbf{h}_\infty^{n_k}])$  que converge débilmente en  $\mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ ; y de esta manera, como  $\mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega)$ , la convergencia es fuerte en  $\mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega)$ . Por tanto, el operador  $T$  es compacto.

4. Finalmente, probaremos la continuidad del operador  $T$ . Con este fin, consideramos una sucesión  $([\bar{\mathbf{u}}_\infty^n, \bar{\mathbf{h}}_\infty^n])_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega)$  tal que

$$[\bar{\mathbf{u}}_\infty^n, \bar{\mathbf{h}}_\infty^n] \longrightarrow [\bar{\mathbf{u}}_\infty, \bar{\mathbf{h}}_\infty] \text{ en } \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega), \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

Debemos probar que  $T[\bar{\mathbf{u}}_\infty^n, \bar{\mathbf{h}}_\infty^n] \longrightarrow T[\bar{\mathbf{u}}_\infty, \bar{\mathbf{h}}_\infty]$  (denotaremos por simplicidad  $T[\bar{\mathbf{u}}_\infty^n, \bar{\mathbf{h}}_\infty^n] = [\mathbf{u}_\infty^n, \mathbf{h}_\infty^n]$ , es decir, debemos ver que  $[\mathbf{u}_\infty^n, \mathbf{h}_\infty^n]$  converge a  $[\mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty]$ ). Notemos que  $[\bar{\mathbf{u}}_\infty^n, \bar{\mathbf{h}}_\infty^n]$  está acotada en  $\mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega)$ , y por lo tanto, procediendo como en (2.9)-(2.14), deducimos que  $[\mathbf{u}_\infty^n, \mathbf{h}_\infty^n]$  está acotada en  $\mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ . Lo anterior implica que existe una subsucesión de  $([\mathbf{u}_\infty^n, \mathbf{h}_\infty^n])_{n \in \mathbb{N}}$ , que seguiremos denotando por  $([\mathbf{u}'_\infty, \mathbf{h}'_\infty])_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que

$$[\mathbf{u}_\infty^n, \mathbf{h}_\infty^n] \longrightarrow [\mathbf{u}'_\infty, \mathbf{h}'_\infty] \text{ débilmente en } \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (2.16)$$

y

$$[\mathbf{u}_\infty^n, \mathbf{h}_\infty^n] \longrightarrow [\mathbf{u}'_\infty, \mathbf{h}'_\infty] \text{ fuertemente en } \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega). \quad (2.17)$$

Por lo tanto, usando (2.15)-(2.17), podemos tomar el límite en (2.9)-(2.10) cuando  $n \rightarrow \infty$ . A manera de ejemplo, se mostrará el paso al límite en una de las formas trilineales de (2.9)-(2.10):

$$\begin{aligned} |(\bar{\mathbf{u}}_\infty^n \cdot \nabla \mathbf{v}, \bar{\mathbf{u}}_\infty^n) - (\bar{\mathbf{u}}_\infty \cdot \nabla \mathbf{v}, \bar{\mathbf{u}}_\infty)| &= |((\bar{\mathbf{u}}_\infty^n - \bar{\mathbf{u}}_\infty) \cdot \nabla \mathbf{v}, \bar{\mathbf{u}}_\infty^n) + (\bar{\mathbf{u}}_\infty \cdot \nabla \mathbf{v}, (\bar{\mathbf{u}}_\infty^n - \bar{\mathbf{u}}_\infty))| \\ &\leq C \|\bar{\mathbf{u}}_\infty^n - \bar{\mathbf{u}}_\infty\|_{L^4} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2} \|\bar{\mathbf{u}}_\infty^n\|_{L^4} + C \|\bar{\mathbf{u}}_\infty\|_{L^4} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2} \|\bar{\mathbf{u}}_\infty^n - \bar{\mathbf{u}}_\infty\|_{L^4} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

(cuando  $n \rightarrow \infty$ ).

Así, procediendo análogamente, tomamos el límite en (2.9)-(2.10) cuando  $n \rightarrow \infty$ , y concluimos que  $T[\bar{\mathbf{u}}_\infty, \bar{\mathbf{h}}_\infty] = [\mathbf{u}'_\infty, \mathbf{h}'_\infty]$ . Por tanto, cualquier subsucesión convergente de  $(T[\bar{\mathbf{u}}_\infty^n, \bar{\mathbf{h}}_\infty^n])_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $[\mathbf{u}'_\infty, \mathbf{h}'_\infty] = T[\bar{\mathbf{u}}_\infty, \bar{\mathbf{h}}_\infty]$ , y por la unicidad de  $T[\bar{\mathbf{u}}_\infty, \bar{\mathbf{h}}_\infty]$ , se concluye que toda la sucesión  $T[\bar{\mathbf{u}}_\infty^n, \bar{\mathbf{h}}_\infty^n] \rightarrow T[\bar{\mathbf{u}}_\infty, \bar{\mathbf{h}}_\infty]$ ; entonces, el operador  $T$  es continuo.

Por lo tanto, se satisfacen todas las hipótesis del teorema de punto fijo de Leray-Schauder, y se concluye que  $T$  tiene un punto fijo  $[\mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty] \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$  (esto es,  $T[\mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty] = [\mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty]$ ) el cual es solución del sistema (2.2).

Ya demostramos la primera parte de la proposición, ahora veremos que cualquier solución débil satisface la estimación (2.3). Para esto, tomamos  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\infty \in \mathbf{V}$  y  $\mathbf{b} = \mathbf{h}_\infty \in \mathbf{V}$  en (2.2), y teniendo en cuenta la Proposición 1.3.16, llegamos a

$$\begin{aligned}\nu \|\nabla \mathbf{u}_\infty\|_{L^2}^2 &= \alpha(\mathbf{f}_\infty, \mathbf{u}_\infty) - (\mathbf{h}_\infty \cdot \nabla \mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty), \\ \gamma \|\nabla \mathbf{h}_\infty\|_{L^2}^2 &= (\mathbf{h}_\infty \cdot \nabla \mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty),\end{aligned}$$

de esta forma, sumando las anteriores igualdades, obtenemos

$$\nu \|\nabla \mathbf{u}_\infty\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla \mathbf{h}_\infty\|_{L^2}^2 = \alpha(\mathbf{f}_\infty, \mathbf{u}_\infty).$$

Estimando el lado derecho como en (2.8), deducimos que

$$\nu \|\mathbf{u}_\infty\|_{\mathbf{V}}^2 + \gamma \|\mathbf{h}_\infty\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}_\infty\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{C\alpha^2}{\nu} \|\mathbf{f}_\infty\|_{\mathbf{V}'}^2,$$

lo cual implica (2.3). □

Habiendo obtenido la existencia de solución débil para el problema estacionario (2.2), probaremos ahora un resultado de unicidad.

**Proposición 2.1.2. (Unicidad)** *Cualquier solución débil de (2.2) que satisface las condiciones*

$$\frac{C}{\nu} (\alpha \|\mathbf{u}_\infty\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_\infty\|_{L^3}) < 1, \quad (2.18)$$

$$\frac{C}{\gamma} (\|\mathbf{u}_\infty\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_\infty\|_{L^3}) < 1, \quad (2.19)$$

donde  $C > 0$ , es única.

*Demostración.* Sea  $[\mathbf{u}_\infty^1, \mathbf{h}_\infty^1]$  una solución débil de (2.2) que satisface (2.18) y (2.19), y sea  $[\mathbf{u}_\infty^2, \mathbf{h}_\infty^2]$  otra solución débil tentativa de (2.2). Tomando  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\infty^1 - \mathbf{u}_\infty^2$  y  $\mathbf{b} = \mathbf{h}_\infty^1 - \mathbf{h}_\infty^2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_\infty^1, \mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{u}_\infty^2 \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h}_\infty^1, \mathbf{v}) + (\mathbf{h}_\infty^2 \cdot \nabla \mathbf{h}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \gamma(\nabla \mathbf{h}, \nabla \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{h}_\infty^1, \mathbf{b}) + (\mathbf{u}_\infty^2 \cdot \nabla \mathbf{h}, \mathbf{b}) - (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}_\infty^1, \mathbf{b}) - (\mathbf{h}_\infty^2 \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{b}) &= 0, \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Tomando  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  y  $\mathbf{b} = \mathbf{h}$  en las igualdades anteriores, y usando la Proposición 1.3.16, obtenemos

$$\nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 = -\alpha(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_\infty^1, \mathbf{u}) + (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h}_\infty^1, \mathbf{u}) + (\mathbf{h}_\infty^2 \cdot \nabla \mathbf{h}, \mathbf{u}), \quad (2.20)$$

$$\gamma \|\nabla \mathbf{h}\|_{L^2}^2 = (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}_\infty^1, \mathbf{h}) + (\mathbf{h}_\infty^2 \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{h}) - (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{h}_\infty^1, \mathbf{h}). \quad (2.21)$$

Además, usando de nuevo la Proposición 1.3.16 tenemos que  $(\mathbf{h}_\infty^2 \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{h}) = -(\mathbf{h}_\infty^2 \cdot \nabla \mathbf{h}, \mathbf{u})$ ; por lo tanto, suamando (2.20) con (2.21) llegamos a

$$\nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla \mathbf{h}\|_{L^2}^2 = -\alpha(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_\infty^1, \mathbf{u}) + (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h}_\infty^1, \mathbf{u}) + (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}_\infty^1, \mathbf{h}) - (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{h}_\infty^1, \mathbf{h}). \quad (2.22)$$

Ahora, estimamos los términos del lado derecho de (2.22) de la siguiente manera: Usando las desigualdades de Hölder y Young, así como la Proposición 1.3.16, tenemos

$$\begin{aligned} |\alpha(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_\infty^1, \mathbf{u})| &= |\alpha(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}_\infty^1)| \\ &\leq \alpha C \|\mathbf{u}\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \|\mathbf{u}_\infty^1\|_{L^3} \\ &\leq \alpha C \|\mathbf{u}\|_V^2 \|\mathbf{u}_\infty^1\|_{L^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h}_\infty^1, \mathbf{u})| &= |(\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{h}_\infty^1)| \\ &\leq C \|\mathbf{h}\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \|\mathbf{h}_\infty^1\|_{L^3} \\ &\leq C \|\mathbf{h}\|_V \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{h}_\infty^1\|_{L^3} \\ &\leq C (\|\mathbf{h}\|_V^2 + \|\mathbf{u}\|_V^2) \|\mathbf{h}_\infty^1\|_{L^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}_\infty^1, \mathbf{h})| &= |(\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h}, \mathbf{u}_\infty^1)| \\ &\leq C \|\mathbf{h}\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{h}\|_{L^2} \|\mathbf{u}_\infty^1\|_{L^3} \\ &\leq C \|\mathbf{h}\|_V^2 \|\mathbf{u}_\infty^1\|_{L^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{h}_\infty^1, \mathbf{h})| &= |(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{h}, \mathbf{h}_\infty^1)| \\
&\leq C \|\mathbf{u}\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{h}\|_{L^2} \|\mathbf{h}_\infty^1\|_{L^3} \\
&\leq C \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{h}\|_V \|\mathbf{h}_\infty^1\|_{L^3} \\
&\leq C(\|\mathbf{h}\|_V^2 + \|\mathbf{u}\|_V^2) \|\mathbf{h}_\infty^1\|_{L^3}.
\end{aligned}$$

Reemplazando las anteriores estimaciones en (2.22), deducimos que

$$\nu \|\mathbf{u}\|_V^2 + \gamma \|\mathbf{h}\|_V^2 \leq C(\alpha \|\mathbf{u}_\infty^1\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_\infty^1\|_{L^3}) \|\mathbf{u}\|_V^2 + C(\|\mathbf{u}_\infty^1\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_\infty^1\|_{L^3}) \|\mathbf{h}\|_V^2,$$

lo cual, asumiendo las hipótesis (2.18) y (2.19), implica que  $\|\mathbf{u}\|_V = 0$  y  $\|\mathbf{h}\|_V = 0$ ; y así,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ , es decir,  $[\mathbf{u}_\infty^1, \mathbf{h}_\infty^1] = [\mathbf{u}_\infty^2, \mathbf{h}_\infty^2]$ , lo que completa la demostración.  $\square$

**Observación 2.1.3.** *Note que, gracias a la estimación (2.3), las condiciones (2.18)-(2.19) son satisfechas si: (a)  $\|\mathbf{f}^\infty\|_{V'}$  es suficientemente pequeña, o (b) el parámetro  $\alpha$  es suficientemente pequeño, o (c) los parámetros  $\nu, \gamma$  son suficientemente grandes.*

## 2.2. Comportamiento asintótico

El objetivo de esta sección es estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones débiles de (1)-(2). Para esto, se obtendrá una estimación clave en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.1.** *Sean  $\mathbf{f} \in L^\infty(0, \infty; V')$ ,  $\mathbf{f}_\infty \in V'$  y considere  $[\mathbf{u}, \mathbf{h}]$  una solución débil de (1)-(2) tal que*

$$\mathbf{u}_t, \mathbf{h}_t \in L^2(0, +\infty; \mathbf{V}').$$

*Además, asuma que  $[\mathbf{u}_\infty, \mathbf{h}_\infty]$  es una solución débil de (2.2) verificando (2.18) y (2.19). Entonces, existe una constante positiva  $\beta_0 > 0$  tal que, para todo  $\beta \in (0, \beta_0]$ , tenemos la siguiente estimación*

$$\begin{aligned}
\alpha \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}(t) - \mathbf{h}_\infty\|_{L^2}^2 & \tag{2.23} \\
& \leq e^{-2\beta t} (\alpha \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_\infty\|_{L^2}^2) + \frac{\alpha^2 C}{\nu} e^{-2\beta t} \int_0^t e^{2\beta s} \|\mathbf{f}(s) - \mathbf{f}_\infty\|_{V'}^2 ds.
\end{aligned}$$

*Demostración.* Denotemos por

$$\mathbf{w} := \mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty \quad \text{y} \quad \mathbf{z} := \mathbf{h} - \mathbf{h}_\infty.$$

Entonces, restando (2.2) de (2.1) llegamos a

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{w}_t, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v}) &= -\alpha(\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \alpha(\mathbf{u}_\infty \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ &\quad + (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{h}, \mathbf{v}) + (\mathbf{h}_\infty \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{v}) + (\alpha(\mathbf{f} - \mathbf{f}_\infty), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{z}_t, \mathbf{b}) + \gamma(\nabla \mathbf{z}, \nabla \mathbf{b}) &= -(\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{h}, \mathbf{b}) - (\mathbf{u}_\infty \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{b}) \\ &\quad + (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{b}) + (\mathbf{h}_\infty \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Tomando  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$  en (2.24),  $\mathbf{b} = \mathbf{z}$  en (2.25), y usando la Proposición 1.3.16, obtenemos

$$\frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2}^2 = -\alpha(\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{h}, \mathbf{w}) + (\mathbf{h}_\infty \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{w}) + (\alpha(\mathbf{f} - \mathbf{f}_\infty), \mathbf{w}), \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{z}\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla \mathbf{z}\|_{L^2}^2 = -(\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{h}, \mathbf{z}) + (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{z}) + (\mathbf{h}_\infty \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{z}). \quad (2.27)$$

Con el objetivo de estimar algunos términos del lado derecho de (2.26)-(2.27), los reescribimos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -(\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{w}) &= (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{u}) + (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{u}_\infty) - (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{u}_\infty) \\ &= (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty) + (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{u}_\infty) \\ &= (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{w}) + (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{u}_\infty) \\ &= (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{u}_\infty), \end{aligned}$$

y de manera similar,

$$\begin{aligned} (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{h}, \mathbf{w}) &= -(\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{h}) \\ &= -(\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{h}) + (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{h}_\infty) - (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{h}_\infty) \\ &= -(\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{z}) - (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{h}_\infty), \\ -(\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{h}, \mathbf{z}) &= (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{h}) \\ &= (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{h}) - (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{h}_\infty) + (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{h}_\infty) \\ &= (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{z}) + (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{h}_\infty) \\ &= (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{h}_\infty), \\ (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{z}) &= -(\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{u}) \\ &= -(\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{u}) + (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{u}_\infty) - (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{u}_\infty) \end{aligned}$$

$$= -(\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{w}) - (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{u}_\infty).$$

Usando las anteriores igualdades en (2.26) y (2.27), llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2}^2 &= \alpha(\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{u}_\infty) - (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{z}) - (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{h}_\infty) + (\mathbf{h}_\infty \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{w}) + (\alpha(\mathbf{f} - \mathbf{f}_\infty), \mathbf{w}), \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{z}\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla \mathbf{z}\|_{L^2}^2 &= (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{h}_\infty) - (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{w}) - (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{u}_\infty) + (\mathbf{h}_\infty \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{z}), \end{aligned}$$

de lo cual, sumando ambas ecuaciones y cancelando términos (usando la Proposición 1.3.16), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\alpha \|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}\|_{L^2}^2) + \nu \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla \mathbf{z}\|_{L^2}^2 &= \alpha(\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{u}_\infty) \\ &\quad - (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{h}_\infty) + (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{h}_\infty) - (\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{u}_\infty) + (\alpha(\mathbf{f} - \mathbf{f}_\infty), \mathbf{w}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Los términos al lado derecho de (2.28) pueden ser estimados de la manera que se mostrará a continuación:

$$|(\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{u}_\infty)| \leq C \|\mathbf{w}\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2} \|\mathbf{u}_\infty\|_{L^3} \leq C \|\mathbf{w}\|_V^2 \|\mathbf{u}_\infty\|_{L^3}, \quad (2.29)$$

$$|(\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{u}_\infty)| \leq C \|\mathbf{z}\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{z}\|_{L^2} \|\mathbf{u}_\infty\|_{L^3} \leq C \|\mathbf{z}\|_V^2 \|\mathbf{u}_\infty\|_{L^3}, \quad (2.30)$$

$$|(\mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{h}_\infty)| \leq C \|\mathbf{z}\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2} \|\mathbf{h}_\infty\|_{L^3} \leq C \|\mathbf{z}\|_V \|\mathbf{w}\|_V \|\mathbf{h}_\infty\|_{L^3}, \quad (2.31)$$

$$|(\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{z}, \mathbf{h}_\infty)| \leq C \|\mathbf{w}\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{z}\|_{L^2} \|\mathbf{h}_\infty\|_{L^3} \leq C \|\mathbf{w}\|_V \|\mathbf{z}\|_V \|\mathbf{h}_\infty\|_{L^3}. \quad (2.32)$$

Así, usando (2.29)-(2.32) en (2.28), y utilizando la desigualdad de Young, obtenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\alpha \|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}\|_{L^2}^2) + \nu \|\mathbf{w}\|_V^2 + \gamma \|\mathbf{z}\|_V^2 \\ &\leq C\alpha \|\mathbf{w}\|_V^2 \|\mathbf{u}_\infty\|_{L^3} + C \|\mathbf{z}\|_V^2 \|\mathbf{u}_\infty\|_{L^3} + C \|\mathbf{z}\|_V \|\mathbf{w}\|_V \|\mathbf{h}_\infty\|_{L^3} + \alpha C \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\infty\|_{V'} \|\mathbf{w}\|_V \\ &\leq C\alpha \|\mathbf{w}\|_V^2 \|\mathbf{u}_\infty\|_{L^3} + C \|\mathbf{z}\|_V^2 \|\mathbf{u}_\infty\|_{L^3} + C(\|\mathbf{w}\|_V^2 + \|\mathbf{z}\|_V^2) \|\mathbf{h}_\infty\|_{L^3} + \frac{\alpha^2 C}{\nu} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\infty\|_{V'}^2 + \frac{\nu}{2} \|\mathbf{w}\|_V^2 \\ &\leq C(\alpha \|\mathbf{u}_\infty\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_\infty\|_{L^3}) \|\mathbf{w}\|_V^2 + C(\|\mathbf{u}_\infty\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_\infty\|_{L^3}) \|\mathbf{z}\|_V^2 + \frac{\alpha^2 C}{\nu} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\infty\|_{V'}^2 + \frac{\nu}{2} \|\mathbf{w}\|_V^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ahora, observe que (2.18) y (2.19) implican que

$$\begin{aligned} \bar{\nu} &= \nu - C(\alpha \|\mathbf{u}_\infty\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_\infty\|_{L^3}) > 0, \\ \bar{\gamma} &= \gamma - C(\|\mathbf{u}_\infty\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_\infty\|_{L^3}) > 0. \end{aligned}$$

Por tanto, de (2.33) llegamos a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\alpha \|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}\|_{L^2}^2) + \bar{\nu} \|\mathbf{w}\|_V^2 + \bar{\gamma} \|\mathbf{z}\|_V^2 \leq \frac{\alpha^2 C}{\nu} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\infty\|_{V'}^2.$$

Usando (1.3), da como resultado

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\alpha \|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}\|_{L^2}^2) + C\bar{\nu} \|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 + C\bar{\gamma} \|\mathbf{z}\|_{L^2}^2 \leq \frac{\alpha^2 C}{\nu} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\infty\|_{V'}^2,$$

lo cual implica que,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\alpha \|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}\|_{L^2}^2) + \beta \{\alpha \|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}\|_{L^2}^2\} \leq \frac{\alpha^2 C}{\nu} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\infty\|_{V'}^2, \quad (2.34)$$

para todo  $\beta \in (0, \beta_0]$ , donde

$$\beta_0 = \min \left\{ \frac{\bar{\nu}}{\alpha}, \bar{\gamma} \right\} C. \quad (2.35)$$

Ahora, por simplicidad en la notación, tomemos

$$y = \alpha \|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}\|_{L^2}^2,$$

y,

$$y' = \frac{d}{dt} (\alpha \|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}\|_{L^2}^2),$$

de modo que, la desigualdad (2.34) se reescribe como

$$e^{2\beta s} y' + e^{2\beta s} 2\beta y \leq \frac{\alpha^2 C}{\nu} e^{2\beta s} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\infty\|_{V'}^2,$$

o equivalentemente,

$$(e^{2\beta s} y)' \leq \frac{\alpha^2 C}{\nu} e^{2\beta s} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\infty\|_{V'}^2, \quad (2.36)$$

e integrando de 0 a  $t$  en (2.36), deducimos

$$e^{2\beta t} y(t) - y(0) \leq \frac{\alpha^2 C}{\nu} \int_0^t e^{2\beta s} \|\mathbf{f}(s) - \mathbf{f}_\infty\|_{V'}^2 ds,$$

lo cual implica (2.23). □

El siguiente teorema constituye el resultado principal de este capítulo.

**Teorema 2.2.2.** *Asuma las hipótesis del Teorema 2.2.1. Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_\infty\|_{V'} = 0$ , entonces  $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\infty\|_{L^2} \rightarrow 0$  y  $\|\mathbf{h}(t) - \mathbf{h}_\infty\|_{L^2} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .*

*Demostración.* Demostraremos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}(t) - \mathbf{h}_\infty\|_{L^2}^2) = 0$ , esto es, dado  $\epsilon > 0$

(consideraremos, sin pérdida de generalidad,  $\epsilon < 1$ ), probaremos que existe  $T_\epsilon > 0$  tal que

$$\alpha \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}(t) - \mathbf{h}_\infty\|_{L^2}^2 < \epsilon$$

para  $t > T_\epsilon$ .

Para encontrar  $T_\epsilon$ , comenzaremos considerando un  $\delta > 0$  (el cual será escogido más adelante luego en función de  $\epsilon$ ). Como  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_\infty\|_{V'} = 0$ , existe  $T_\delta > 0$  tal que  $\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_\infty\|_{V'} < \delta$  para  $t > T_\delta$ . Ahora, por (2.23) con un  $\beta \in (0, \beta_0]$  fijo, se tiene que

$$\begin{aligned} & \alpha \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}(t) - \mathbf{h}_\infty\|_{L^2}^2 \\ & \leq e^{-2\beta t} (\alpha \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_\infty\|_{L^2}^2) + \frac{\alpha^2 C}{\nu} e^{-2\beta t} \int_0^t e^{2\beta s} \|\mathbf{f}(s) - \mathbf{f}_\infty\|_{V'}^2 ds \\ & \leq e^{-2\beta t} (\alpha \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_\infty\|_{L^2}^2) + \frac{\alpha^2 C}{\nu} e^{-2\beta t} \int_0^{T_\delta} e^{2\beta s} \|\mathbf{f}(s) - \mathbf{f}_\infty\|_{V'}^2 ds \\ & \quad + \frac{\alpha^2 C}{\nu} e^{-2\beta t} \int_{T_\delta}^t e^{2\beta s} \delta^2 ds \\ & \leq e^{-2\beta t} (\alpha \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_\infty\|_{L^2}^2) + \frac{\alpha^2 C}{\nu} e^{-2\beta t} \left( \frac{e^{2\beta T_\delta}}{2\beta} (\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0, \infty; V')} + \|\mathbf{f}_\infty\|_{V'})^2 \right) \\ & \quad - \frac{\alpha^2 C}{\nu} e^{-2\beta t} \left( \frac{1}{2\beta} (\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0, \infty; V')} + \|\mathbf{f}_\infty\|_{V'})^2 \right) + \frac{\alpha^2 C}{\nu} e^{-2\beta t} \left( \frac{e^{2\beta t} \delta^2}{2\beta} - \frac{e^{2\beta T_\delta} \delta^2}{2\beta} \right) \\ & \leq e^{-2\beta t} (\alpha \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_\infty\|_{L^2}^2) \\ & \quad + \frac{\alpha^2 C}{\nu} e^{-2\beta t} \left( \frac{e^{2\beta T_\delta}}{2\beta} (\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0, \infty; V')} + \|\mathbf{f}_\infty\|_{V'})^2 \right) + \frac{\alpha^2 C}{\nu} e^{-2\beta t} \left( \frac{e^{2\beta t} \delta^2}{2\beta} \right) \\ & = e^{-2\beta t} (\alpha \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_\infty\|_{L^2}^2) \\ & \quad + \frac{\alpha^2 C}{\nu} \frac{e^{-2\beta(t-T_\delta)}}{2\beta} (\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0, \infty; V')} + \|\mathbf{f}_\infty\|_{V'})^2 + \frac{\alpha^2 C}{\nu} \frac{\delta^2}{2\beta}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Escogemos  $\delta > 0$  tal que

$$\frac{C\delta^2\alpha^2}{2\beta\nu} < \frac{\epsilon}{3}, \text{ es decir, } \delta < \left( \frac{2\beta\nu\epsilon}{3\alpha^2 C} \right)^{1/2},$$

para el cual consideramos el correspondiente  $T_\delta$ . Entonces, de (2.37) vemos que es suficiente escoger  $T_\epsilon > 0$  suficientemente grande tal que, para todo  $t > T_\epsilon$ , se cumpla

$$e^{-2\beta t} (\alpha \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_\infty\|_{L^2}^2) < \epsilon/3$$

y

$$e^{-2\beta(t-T_\delta)} \frac{\alpha^2 C}{\nu} \frac{(\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0, \infty; V')} + \|\mathbf{f}_\infty\|_{V'})^2}{2\beta} < \epsilon/3.$$

Así, concluimos que

$$\alpha \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}(t) - \mathbf{h}_\infty\|_{L^2}^2 < \epsilon,$$

lo cual finaliza la prueba.



### 3. Estudio numérico

En este capítulo, se desarrollará el estudio numérico de los sistemas (1)-(2) y (3), usando los métodos de diferencias finitas y elementos finitos. Específicamente, se presentarán dos esquemas numéricos completamente discretos (usando aproximaciones de tipo mixto para el esquema asociado al problema evolutivo, usando aproximación por diferencias finitas en tiempo y elementos finitos en espacio), y se probarán algunas propiedades cualitativas tales como el buen planteamiento de los esquemas, la verificación de una ley de energía discreta, estimaciones uniformes en normas débiles, y el comportamiento asintótico de las soluciones del esquema numérico evolutivo.

#### 3.1. Esquema numérico asociado al modelo (1)-(2)

Con el objetivo de obtener el esquema de aproximación numérica asociado al sistema (1)-(2), consideraremos la variable auxiliar

$$q = p + \frac{\mu}{2} \mathbf{h}^2. \quad (3.1)$$

Para la discretización temporal, consideramos el parámetro  $\Delta t$ , y denotaremos  $t_n = n\Delta t$ ; mientras que, para la discretización espacial, consideramos una familia de triangulaciones  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  de  $\bar{\Omega}$  formadas por simplices  $\mathcal{K}$  (triángulos en 2D y tetraedros en 3D), tales que  $\bar{\Omega} = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} h_{\mathcal{K}}$ , con  $h_{\mathcal{K}}$  siendo el diámetro de  $\mathcal{K}$ . Escogemos los siguientes espacios de elementos finitos para  $[\mathbf{u}, \mathbf{h}, p, q, w] : \mathbf{U}_h \times \mathbf{H}_h \times P_h \times Q_h \times W_h \subseteq (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^2 \times (L^2(\Omega))^3$ .

Además, asumimos que  $[\mathbf{U}_h, Q_h]$  y  $[\mathbf{H}_h, W_h]$  satisfacen las siguientes condiciones *inf-sup* discretas: Existen constantes  $\beta_1, \beta_2 > 0$ , independientes de  $h$ , tales que

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{U}_h \setminus \{0\}} \frac{-(g, \nabla \cdot \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{U_h}} \geq \beta_1 \|g\|_{Q_h}, \quad \forall g \in Q_h, \quad (3.2)$$

$$\sup_{\mathbf{s} \in \mathbf{H}_h \setminus \{0\}} \frac{-(r, \nabla \cdot \mathbf{s})}{\|\mathbf{s}\|_{H_h}} \geq \beta_2 \|r\|_{W_h}, \quad \forall r \in W_h. \quad (3.3)$$

Algunas posibilidades para la escogencia de los espacios discretos  $[\mathbf{U}_h, Q_h]$  y  $[\mathbf{H}_h, W_h]$  (de manera que se satisfagan las condiciones (3.2)-(3.3)) son (ver <sup>1</sup>):

---

<sup>1</sup> V. Girault y P.-A. Raviart. "Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms". En: *Springer-Verlag* (1986)

- $[\mathbf{U}_h, Q_h]$  (o  $[\mathbf{H}_h, W_h]$ ) aproximados por  $\mathbb{P}_r \times \mathbb{P}_{r-1}$  (para  $r \geq 2$ ).
- $[\mathbf{U}_h, Q_h]$  (o  $[\mathbf{H}_h, W_h]$ ) aproximados por  $\mathbb{P}_1 - bubble \times \mathbb{P}_1$ .

Así mismo, con el objetivo de controlar los términos trilineales en (2.1), se considerará el operador  $A$  definido por

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{w}) - \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H^1(\Omega). \quad (3.4)$$

**Lema 3.1.1.** *El operador  $A$  definido en (3.4) satisface las siguientes propiedades*

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -A(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad (3.5)$$

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}) - A(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) &= A(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + A(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) \\ &= A(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) + A(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{w}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in H^1(\Omega)$ .

*Demostración.* En primer lugar, note que

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{w}) - \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ &= - \left( -\frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{v}) \right) \\ &= - \left( \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{v}) - \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{w}) \right) \\ &= -A(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

En segundo lugar, observe que

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{v}) - \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + A(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) &= \frac{1}{2}((\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla \mathbf{v}_1, \mathbf{w}) - \frac{1}{2}((\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{v}_1) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \mathbf{w}) - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla \mathbf{w}, (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Teniendo en cuenta la linealidad de la integral y el operador gradiente, el lado derecho de (3.8) se puede reescribir como

$$\frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_1, \mathbf{w}) - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla \mathbf{v}_1, \mathbf{w}) - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{v}_1) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{v}_1) \quad (3.9)$$

$$+\frac{1}{2}(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla \mathbf{v}_1, \mathbf{w}) - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{v}_1) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{v}_2),$$

y restando términos iguales, se llega a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_1, \mathbf{w}) - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{v}_1) - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{v}_2) \\ &= \left[ \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_1, \mathbf{w}) - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{v}_1) \right] - \left[ \frac{1}{2}(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla \mathbf{w}, \mathbf{v}_2) \right] \\ &= A(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}) - A(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por lo tanto, de (3.8)-(3.10), se concluye la primera igualdad de (3.7). La otra igualdad en (3.7) se prueba de manera similar.  $\square$

Teniendo en cuenta lo anterior, consideramos el siguiente esquema numérico de primer orden en tiempo, no lineal y acoplado (donde, en general, se usará la notación  $\delta_t a^n = \frac{a^n - a^{n-1}}{\Delta t}$ ):

- **Inicialización:** Sea  $[\mathbf{u}^0, \mathbf{h}^0] \in \mathbf{U}_h \times \mathbf{H}_h$ .
- **Paso 1:** Dado  $[\mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{h}^{n-1}] \in \mathbf{U}_h \times \mathbf{H}_h$ , encontrar  $[\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, q^n, w^n] \in \mathbf{U}_h \times \mathbf{H}_h \times Q_h \times W_h$  tal que, para todo  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] \in U_h \times H_h \times Q_h \times W_h$ , se verifique

$$\begin{cases} \alpha(\delta_t \mathbf{u}^n, \bar{\mathbf{u}}) + \nu(\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \bar{\mathbf{u}}) + \alpha A(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \bar{\mathbf{u}}) - A(\mathbf{h}^n, \mathbf{h}^n, \bar{\mathbf{u}}) = \alpha(\mathbf{f}^n, \bar{\mathbf{u}}) + \frac{1}{\mu}(q^n, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}), \\ (\delta_t \mathbf{h}^n, \bar{\mathbf{h}}) + \gamma(\nabla \mathbf{h}^n, \nabla \bar{\mathbf{h}}) + A(\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, \bar{\mathbf{h}}) - A(\mathbf{h}^n, \mathbf{u}^n, \bar{\mathbf{h}}) = (w^n, \nabla \cdot \bar{\mathbf{h}}), \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}^n, \bar{q}) = 0, \\ (\nabla \cdot \mathbf{h}^n, \bar{w}) = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

- **Paso 2:** Dado  $[\mathbf{h}^n, q^n] \in \mathbf{H}_h \times Q_h$ , computar  $p^n \in P_h$  usando la igualdad

$$p^n = q^n - \frac{\mu}{2}(\mathbf{h}^n)^2. \quad (3.12)$$

### 3.2. Ley de energía discreta y estimaciones uniformes para (3.11)

En esta sección, probaremos una estimación de energía en normas débiles, la cual implicará algunas estimaciones uniformes para las variables discretas  $\mathbf{u}^n$  y  $\mathbf{h}^n$ .

**Proposición 3.2.1.** *Cualquier solución del esquema numérico (3.11) satisface la siguiente ley de energía discreta*

$$\frac{1}{2}\delta_t \left( \alpha \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( \alpha \|\delta_t \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \|\delta_t \mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 \right) + \frac{\nu}{2} \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 \leq C \frac{\alpha^2}{\nu} \|\mathbf{f}^n\|_{(H^1)'}^2, \quad (3.13)$$

donde la constante  $C > 0$  es independiente de  $[\Delta t, h, n]$ .

*Demostración.* Tomando  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] = [\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, \frac{1}{\mu}q^n, w^n]$  en (3.11) y usando la igualdad  $(a - b)a = \frac{1}{2}(a^2 - b^2) + \frac{1}{2}(a - b)^2$ , obtenemos

$$\frac{\alpha}{2}\delta_t\|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha\Delta t}{2}\|\delta_t\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \alpha A(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n) - A(\mathbf{h}^n, \mathbf{h}^n, \mathbf{u}^n) = \alpha(\mathbf{f}^n, \mathbf{u}^n) + \frac{1}{\mu}(q^n, \nabla \cdot \mathbf{u}^n), \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{2}\delta_t\|\mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2}\|\delta_t\mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 + \gamma\|\nabla\mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 + A(\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, \mathbf{h}^n) - A(\mathbf{h}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n) = (w^n, \nabla \cdot \mathbf{h}^n), \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{\mu}(\nabla \cdot \mathbf{u}^n, q^n) = 0, \quad (3.16)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{h}^n, w^n) = 0. \quad (3.17)$$

Sumando (3.14)-(3.17), y usando las propiedades (3.5)-(3.6), así como la desigualdad de Young (ver Teorema 1.3.7), llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2}\delta_t\|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha\Delta t}{2}\|\delta_t\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\delta_t\|\mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 \\ + \frac{\Delta t}{2}\|\delta_t\mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 + \gamma\|\nabla\mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 \leq \frac{\nu}{2}\|\nabla\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + C\frac{\alpha^2}{\nu}\|\mathbf{f}^n\|_{(H^1)'}^2, \end{aligned}$$

lo cual implica (3.13). □

**Corolario 3.2.2.** *Cualquier solución  $[\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n]$  del esquema (3.11) está acotada en  $l^\infty(L^2) \cap l^2(H^1)$ .*

*Demostración.* Multiplicando (3.13) por  $\Delta t$  y sumando desde  $n = 1$  hasta  $n = m$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\alpha\|\mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}^m\|_{L^2}^2\right) + \Delta t \sum_{n=1}^m \left(\frac{\nu}{2}\|\nabla\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \gamma\|\nabla\mathbf{h}^n\|_{L^2}^2\right) \\ \leq \frac{1}{2}\left(\alpha\|\mathbf{u}^0\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}^0\|_{L^2}^2\right) + C\Delta t \sum_{n=1}^m \|\mathbf{f}^n\|_{(H^1)'}^2, \end{aligned}$$

lo cual, si  $\mathbf{f} \in l^2((\mathbf{H}^1)'),$  implica que  $[\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n]$  está acotada en  $l^\infty(\mathbf{L}^2) \cap l^2(\mathbf{H}^1)$ . □

### 3.3. Buen planteamiento del esquema (3.11)-(3.12)

Con el objetivo de probar el buen planteamiento del esquema numérico (3.11)-(3.12), en primer lugar se probará la existencia de, por lo menos, una solución usando el Lema 1.3.6; y posteriormente, se establecerá qué condiciones deben cumplirse para que la solución sea única.

**Teorema 3.3.1.** *Existe por lo menos una solución  $[\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, q^n, w^n, p^n] \in \mathbf{U}_h \times \mathbf{H}_h \times Q_h \times W_h \times P_h$  del esquema numérico (3.11)-(3.12). Además, si se satisfacen las siguientes condiciones*

$$\frac{C}{\nu}(\alpha\|\mathbf{u}^n\|_{L^3} + \|\mathbf{h}^n\|_{L^3}) < 1, \quad \forall n \geq 1, \quad (3.18)$$

$$\frac{C}{\gamma}(\|\mathbf{u}^n\|_{L^3} + \|\mathbf{h}^n\|_{L^3}) < 1, \quad \forall n \geq 1, \quad (3.19)$$

donde  $C > 0$  es una constante independiente de  $[\Delta t, h, n]$ , entonces la solución es única.

*Demostración.* Como se mencionó anteriormente, por medio del Lema 1.3.6 demostraremos la existencia de solución del esquema numérico (3.11); mientras que la existencia y unicidad de solución  $p^n \in P_h$  de (3.12), será una consecuencia inmediata de lo anterior. Para ello, denotamos por

$$\mathbf{X} := \mathbf{U}_h \times \mathbf{H}_h \times Q_h \times W_h,$$

y

$$\langle [\mathbf{u}, \mathbf{h}, q, w], [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] \rangle_{\mathbf{X}} = \langle \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}} \rangle_{U_h} + \langle \mathbf{h}, \bar{\mathbf{h}} \rangle_{H_h} + \langle q, \bar{q} \rangle_{Q_h} + \langle w, \bar{w} \rangle_{W_h}.$$

Así mismo, consideramos  $R : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  definido de la siguiente manera: a cada  $[\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, q^n, w^n] \in \mathbf{X}$ , le asigna  $R([\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, q^n, w^n]) \in \mathbf{X}$  tal que

$$\begin{aligned} \langle R[\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, q^n, w^n], [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] \rangle_{\mathbf{X}} = & \\ \alpha(\delta_t \mathbf{u}^n, \bar{\mathbf{u}}) + \nu(\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \bar{\mathbf{u}}) + \alpha A(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \bar{\mathbf{u}}) - A(\mathbf{h}^n, \mathbf{h}^n, \bar{\mathbf{u}}) - \alpha(\mathbf{f}^n, \bar{\mathbf{u}}) & \\ - \frac{1}{\mu}(q^n, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) + (\delta_t \mathbf{h}^n, \bar{\mathbf{h}}) + \gamma(\nabla \mathbf{h}^n, \nabla \bar{\mathbf{h}}) + A(\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, \bar{\mathbf{h}}) & \\ - A(\mathbf{h}^n, \mathbf{u}^n, \bar{\mathbf{h}}) - (\bar{w}^n, \nabla \cdot \bar{\mathbf{h}}) + \frac{1}{\mu}(\nabla \cdot \mathbf{u}^n, \bar{q}) + (\nabla \cdot \mathbf{h}^n, \bar{w}), & \end{aligned}$$

para todo  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] \in \mathbf{X}$ . Tomando  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] = [\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, q^n, w^n] \in \mathbf{X}$  y usando la propiedad (3.5), llegamos a

$$\begin{aligned} \langle R[\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, q^n, w^n], [\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, q^n, w^n] \rangle_{\mathbf{X}} = & \\ \alpha(\delta_t \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n) + \nu(\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \mathbf{u}^n) + \alpha A(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n) - \cancel{A(\mathbf{h}^n, \mathbf{h}^n, \mathbf{u}^n)} - \alpha(\mathbf{f}^n, \mathbf{u}^n) & \\ - \cancel{\frac{1}{\mu}(q^n, \nabla \cdot \mathbf{u}^n)} + (\delta_t \mathbf{h}^n, \mathbf{h}^n) + \gamma(\nabla \mathbf{h}^n, \nabla \mathbf{h}^n) + A(\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, \mathbf{h}^n) & \\ - \cancel{A(\mathbf{h}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n)} - \cancel{(w^n, \nabla \cdot \mathbf{h}^n)} + \frac{1}{\mu}(\nabla \cdot \mathbf{u}^n, q^n) + \cancel{(\nabla \cdot \mathbf{h}^n, w^n)}. & \end{aligned}$$

Además, recordando que  $A(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n) = 0$  y  $A(\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, \mathbf{h}^n) = 0$  (gracias a la propiedad (3.6)), y teniendo

en cuenta la igualdad  $(a - b)a = \frac{1}{2}(a^2 - b^2) + \frac{1}{2}(a - b)^2$ , deducimos que

$$\begin{aligned} & \langle R[\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, q^n, w^n], [\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, q^n, w^n] \rangle_X = \\ & \frac{\alpha}{2} \delta_t \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \alpha \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{H^1}^2 - \alpha(\mathbf{f}^n, \mathbf{u}^n) + \frac{1}{2} \delta_t \|\mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 + \gamma \|\mathbf{h}^n\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Note que como  $\alpha(\mathbf{f}, \mathbf{u}^n) \leq \alpha \|f\|_{(H^1)'} \|\mathbf{u}^n\|_{H^1}$ , entonces  $-\alpha(\mathbf{f}, \mathbf{u}^n) \geq -\alpha \|f\|_{(H^1)'} \|\mathbf{u}^n\|_{H^1}$ ; y así,

$$\begin{aligned} & \langle R[\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, q^n, w^n], [\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, q^n, w^n] \rangle_X \geq \\ & \frac{\alpha}{2\Delta t} \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 - \frac{\alpha}{2\Delta t} \|\mathbf{u}^{n-1}\|_{L^2}^2 + \alpha \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{H^1}^2 - \alpha \|\mathbf{f}^n\|_{(H^1)'} \|\mathbf{u}^n\|_{H^1} \\ & + \frac{1}{2\Delta t} \|\mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2\Delta t} \|\mathbf{h}^{n-1}\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 + \gamma \|\mathbf{h}^n\|_{H^1}^2, \end{aligned}$$

de lo cual se cumple la hipótesis del Lema 1.3.6 para  $\rho > 0$  suficientemente grande (puesto que  $\mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{h}^{n-1}, \mathbf{f}$  son datos fijos, y sus normas se pueden dominar por las de  $\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n$  para  $\rho$  grande). Finalmente, la continuidad del operador  $R$  puede ser demostrada siguiendo argumentos análogos a los presentados en el capítulo anterior, por lo cual omitiremos la demostración. Así, como consecuencia del Lema 1.3.6, deducimos que existe  $[\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, q^n, w^n] \in \mathbf{U}_h \times \mathbf{H}_h \times Q_h \times W_h$  tal que

$$\begin{aligned} & \alpha(\delta_t \mathbf{u}^n, \bar{\mathbf{u}}) + \nu(\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \bar{\mathbf{u}}) + \alpha A(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \bar{\mathbf{u}}) - A(\mathbf{h}^n, \mathbf{h}^n, \bar{\mathbf{u}}) - \alpha(\mathbf{f}^n, \bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{\mu}(q^n, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) + (\delta_t \mathbf{h}^n, \bar{\mathbf{h}}) \\ & + \gamma(\nabla \mathbf{h}^n, \nabla \bar{\mathbf{h}}) + A(\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, \bar{\mathbf{h}}) - A(\mathbf{h}^n, \mathbf{u}^n, \bar{\mathbf{h}}) - (\bar{w}^n, \nabla \cdot \bar{\mathbf{h}}) + \frac{1}{\mu}(\nabla \cdot \mathbf{u}^n, \bar{q}) + (\nabla \cdot \mathbf{h}^n, \bar{w}) = 0, \end{aligned}$$

para todo  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] \in \mathbf{X}$ . Finalmente, tomando primero  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] = [\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{0}, 0, 0]$ , luego  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] = [\mathbf{0}, \bar{\mathbf{h}}, 0, 0]$ , después  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \bar{q}, 0]$ , y por último  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, \bar{w}]$ , se concluye que  $[\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, q^n, w^n] \in \mathbf{U}_h \times \mathbf{H}_h \times Q_h \times W_h$  es solución del esquema (3.11).

Ahora, con el objetivo de probar la unicidad, considere  $[\mathbf{u}_1^n, \mathbf{h}_1^n, q_1^n, w_1^n]$  una solución de (3.11) que satisfice (3.18) y (3.19), y sea  $[\mathbf{u}_2^n, \mathbf{h}_2^n, q_2^n, w_2^n]$  otra solución de (3.11). Como  $[\mathbf{u}_1^n, \mathbf{h}_1^n, q_1^n, w_1^n]$  y  $[\mathbf{u}_2^n, \mathbf{h}_2^n, q_2^n, w_2^n]$  son soluciones de (3.11), entonces satisfacen las siguientes igualdades

$$\begin{cases} \alpha(\delta_t \mathbf{u}_1^n, \bar{\mathbf{u}}) + \nu(\nabla \mathbf{u}_1^n, \nabla \bar{\mathbf{u}}) + \alpha A(\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_1^n, \bar{\mathbf{u}}) - A(\mathbf{h}_1^n, \mathbf{h}_1^n, \bar{\mathbf{u}}) = \alpha(\mathbf{f}^n, \bar{\mathbf{u}}) + \frac{1}{\mu}(q_1^n, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}), \\ (\delta_t \mathbf{h}_1^n, \bar{\mathbf{h}}) + \gamma(\nabla \mathbf{h}_1^n, \nabla \bar{\mathbf{h}}) + A(\mathbf{u}_1^n, \mathbf{h}_1^n, \bar{\mathbf{h}}) - A(\mathbf{h}_1^n, \mathbf{u}_1^n, \bar{\mathbf{h}}) = (w_1^n, \nabla \cdot \bar{\mathbf{h}}), \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_1^n, \bar{q}) = 0, \\ (\nabla \cdot \mathbf{h}_1^n, \bar{w}) = 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

y

$$\begin{cases} \alpha(\delta_t \mathbf{u}_2^n, \bar{\mathbf{u}}) + \nu(\nabla \mathbf{u}_2^n, \nabla \bar{\mathbf{u}}) + \alpha A(\mathbf{u}_2^n, \mathbf{u}_2^n, \bar{\mathbf{u}}) - A(\mathbf{h}_2^n, \mathbf{h}_2^n, \bar{\mathbf{u}}) = \alpha(\mathbf{f}^n, \bar{\mathbf{u}}) + \frac{1}{\mu}(q_2^n, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}), \\ (\delta_t \mathbf{h}_2^n, \bar{\mathbf{h}}) + \gamma(\nabla \mathbf{h}_2^n, \nabla \bar{\mathbf{h}}) + A(\mathbf{u}_2^n, \mathbf{h}_2^n, \bar{\mathbf{h}}) - A(\mathbf{h}_2^n, \mathbf{u}_2^n, \bar{\mathbf{h}}) = (w_2^n, \nabla \cdot \bar{\mathbf{h}}), \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_2^n, \bar{q}) = 0, \\ (\nabla \cdot \mathbf{h}_2^n, \bar{w}) = 0, \end{cases} \quad (3.21)$$

para todo  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] \in \mathbf{X}$ . Restando (3.21) de (3.20), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\Delta t}(\mathbf{u}_1^n, \bar{\mathbf{u}}) - \frac{\alpha}{\Delta t}(\mathbf{u}_1^{n-1}, \bar{\mathbf{u}}) + \nu(\nabla \mathbf{u}_1^n, \nabla \bar{\mathbf{u}}) + \alpha A(\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_1^n, \bar{\mathbf{u}}) - A(\mathbf{h}_1^n, \mathbf{h}_1^n, \bar{\mathbf{u}}) - \frac{\alpha}{\Delta t}(\mathbf{u}_2^n, \bar{\mathbf{u}}) + \frac{\alpha}{\Delta t}(\mathbf{u}_2^{n-1}, \bar{\mathbf{u}}) \\ - \nu(\nabla \mathbf{u}_2^n, \nabla \bar{\mathbf{u}}) - \alpha A(\mathbf{u}_2^n, \mathbf{u}_2^n, \bar{\mathbf{u}}) + A(\mathbf{h}_2^n, \mathbf{h}_2^n, \bar{\mathbf{u}}) = \alpha(\mathbf{f}^n, \bar{\mathbf{u}}) + \frac{1}{\mu}(q_1^n, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) - \alpha(\mathbf{f}^n, \bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{\mu}(q_2^n, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{h}_1^n, \bar{\mathbf{h}}) - \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{h}_1^{n-1}, \bar{\mathbf{h}}) + \gamma(\nabla \mathbf{h}_1^n, \nabla \bar{\mathbf{h}}) + A(\mathbf{u}_1^n, \mathbf{h}_1^n, \bar{\mathbf{h}}) - A(\mathbf{h}_1^n, \mathbf{u}_1^n, \bar{\mathbf{h}}) - \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{h}_2^n, \bar{\mathbf{h}}) + \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{h}_2^{n-1}, \bar{\mathbf{h}}) \\ - \gamma(\nabla \mathbf{h}_2^n, \nabla \bar{\mathbf{h}}) - A(\mathbf{u}_2^n, \mathbf{h}_2^n, \bar{\mathbf{h}}) + A(\mathbf{h}_2^n, \mathbf{u}_2^n, \bar{\mathbf{h}}) = (w_1^n, \nabla \cdot \bar{\mathbf{h}}) - (w_2^n, \nabla \cdot \bar{\mathbf{h}}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_1^n, \bar{q}) - (\nabla \cdot \mathbf{u}_2^n, \bar{q}) = 0, \quad (3.24)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{h}_1^n, \bar{w}) - (\nabla \cdot \mathbf{h}_2^n, \bar{w}) = 0, \quad (3.25)$$

para todo  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] \in \mathbf{X}$ . Ahora, usando la propiedad (3.7), agrupando términos y reorganizándolos, de (3.22)-(3.25) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\Delta t}((\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n), \bar{\mathbf{u}}) + \nu(\nabla(\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n), \nabla \bar{\mathbf{u}}) + \alpha A(\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n, \mathbf{u}_1^n, \bar{\mathbf{u}}) + \alpha A(\mathbf{u}_2^n, \mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n, \bar{\mathbf{u}}) \\ - A(\mathbf{h}_1^n - \mathbf{h}_2^n, \mathbf{h}_1^n, \bar{\mathbf{u}}) - A(\mathbf{h}_2^n, \mathbf{h}_1^n - \mathbf{h}_2^n, \bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{\mu}((q_1^n - q_2^n), \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta}((\mathbf{h}_1^n - \mathbf{h}_2^n), \bar{\mathbf{h}}) + \gamma(\nabla(\mathbf{h}_1^n - \mathbf{h}_2^n), \nabla \bar{\mathbf{h}}) + A(\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n, \mathbf{h}_1^n, \bar{\mathbf{h}}) + A(\mathbf{u}_2^n, \mathbf{h}_1^n - \mathbf{h}_2^n, \bar{\mathbf{h}}) \\ - A(\mathbf{h}_1^n - \mathbf{h}_2^n, \mathbf{u}_1^n, \bar{\mathbf{h}}) - A(\mathbf{h}_2^n, \mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n, \bar{\mathbf{h}}) = ((w_1^n - w_2^n), \nabla \cdot \bar{\mathbf{h}}), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$(\nabla \cdot (\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n), \bar{q}) = 0, \quad (3.28)$$

$$(\nabla \cdot (\mathbf{h}_1^n - \mathbf{h}_2^n), \bar{w}) = 0, \quad (3.29)$$

para todo  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] \in \mathbf{X}$ . Denotando  $\mathbf{u}^n := \mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_2^n$ ,  $\mathbf{h}^n := \mathbf{h}_1^n - \mathbf{h}_2^n$ ,  $q^n := q_1^n - q_2^n$  y  $w^n := w_1^n - w_2^n$ , tomando  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] = [\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, \frac{1}{\mu}q^n, w^n]$  y usando la propiedad (3.6), tenemos que

$$\frac{\alpha}{\Delta t} \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 = -\alpha A(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}^n) + A(\mathbf{h}^n, \mathbf{h}_1^n, \mathbf{u}^n) + A(\mathbf{h}_2^n, \mathbf{h}^n, \mathbf{u}^n) + \frac{1}{\mu}(q^n, \nabla \cdot \mathbf{u}^n), \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \|\mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 = A(\mathbf{h}^n, \mathbf{u}_1^n, \mathbf{h}^n) + A(\mathbf{h}_2^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n) - A(\mathbf{u}^n, \mathbf{h}_1^n, \mathbf{h}^n) + (w^n, \nabla \cdot \mathbf{h}^n), \quad (3.31)$$

$$\frac{1}{\mu} (\nabla \cdot \mathbf{u}^n, q^n) = 0, \quad (3.32)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{h}^n, w^n) = 0. \quad (3.33)$$

Sumando (3.30)-(3.33) y usando la propiedad (3.5), llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\Delta t} \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\Delta t} \|\mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 \\ = A(\mathbf{h}^n, \mathbf{h}_1^n, \mathbf{u}^n) - \alpha A(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}^n) + A(\mathbf{h}^n, \mathbf{u}_1^n, \mathbf{h}^n) - A(\mathbf{u}^n, \mathbf{h}_1^n, \mathbf{h}^n). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Usando las desigualdades de Hölder y Young (ver Teoremas 1.3.7-1.3.8), estimamos los términos del lado derecho de (3.34) de la siguiente manera:

$$|\alpha A(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}^n)| \leq C\alpha \|\mathbf{u}^n\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2} \|\mathbf{u}_1^n\|_{L^3} \leq C\alpha \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}_1^n\|_{L^3}, \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} |A(\mathbf{h}^n, \mathbf{h}_1^n, \mathbf{u}^n)| &\leq C \|\mathbf{h}^n\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2} \|\mathbf{h}_1^n\|_{L^3} + C \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2} \|\mathbf{u}^n\|_{L^6} \|\mathbf{h}_1^n\|_{L^3} \\ &\leq C \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2} \|\mathbf{h}_1^n\|_{L^3} + C \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2} \|\mathbf{h}_1^n\|_{L^3}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$|A(\mathbf{h}^n, \mathbf{u}_1^n, \mathbf{h}^n)| \leq C \|\mathbf{h}^n\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2} \|\mathbf{u}_1^n\|_{L^3} \leq C \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}_1^n\|_{L^3}, \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} |A(\mathbf{u}^n, \mathbf{h}_1^n, \mathbf{h}^n)| &\leq C \|\mathbf{u}^n\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2} \|\mathbf{h}_1^n\|_{L^3} + C \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2} \|\mathbf{h}^n\|_{L^6} \|\mathbf{h}_1^n\|_{L^3} \\ &\leq C \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2} \|\mathbf{h}_1^n\|_{L^3} + C \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2} \|\mathbf{h}_1^n\|_{L^3}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Entonces, sumando (3.34)-(3.38) y usando la desigualdad de Young en algunos términos, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\Delta t} \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\Delta t} \|\mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 \\ \leq C\alpha \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}_1^n\|_{L^3} + C \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2} \|\mathbf{h}_1^n\|_{L^3} + C \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}_1^n\|_{L^3} \\ \leq C\alpha \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}_1^n\|_{L^3} + C \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}_1^n\|_{L^3} + C \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 \|\mathbf{h}_1^n\|_{L^3} + C \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 \|\mathbf{h}_1^n\|_{L^3}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Así, de (3.39), llegamos a

$$\nu \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2}^2 \leq C(\alpha \|\mathbf{u}_1^n\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_1^n\|_{L^3}) \|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + C(\|\mathbf{u}_1^n\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_1^n\|_{L^3}) \|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2}^2, \quad (3.40)$$

lo cual, junto con las hipótesis (3.18) y (3.19), implican que  $\|\nabla \mathbf{u}^n\|_{L^2} = 0$  y  $\|\nabla \mathbf{h}^n\|_{L^2} = 0$ . Dado que  $[\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n] \in \mathbf{U}_h \times \mathbf{H}_h \subseteq \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , obtenemos que  $\mathbf{u}^n = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{h}^n = \mathbf{0}$ , es decir,  $[\mathbf{u}_1^n, \mathbf{h}_1^n] = [\mathbf{u}_2^n, \mathbf{h}_2^n]$ .

Ahora, usando el hecho de que  $\mathbf{u}^n = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{h}^n = \mathbf{0}$ , las condiciones *inf-sup* (3.2)-(3.3) y (3.26)-(3.27), se llega a

$$\beta_1 \|q^n\|_{Q_h} \leq 0 \quad \text{y} \quad \beta_2 \|w^n\|_{W_h} \leq 0,$$

y se concluye que  $[q_1^n, w_1^n] = [q_2^n, w_2^n]$ . Finalmente, teniendo la existencia y unicidad de  $\mathbf{h}^n$  y  $q^n$ , la existencia y unicidad de  $p^n$  solución de (3.12) es inmediata, lo cual finaliza la demostración.  $\square$

### 3.4. Esquema numérico asociado al sistema (3) y comportamiento asintótico

El objetivo de esta sección es probar que la solución del esquema numérico (3.11) satisface una estimación discreta análoga a la obtenida en (2.23) para la solución del problema continuo. Para esto, consideramos el siguiente esquema numérico asociado al problema estacionario (2.2): Computar  $[\mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{h}_h^\infty, q_h^\infty, w_h^\infty] \in \mathbf{U}_h \times \mathbf{H}_h \times Q_h \times W_h$  verificando

$$\begin{cases} \nu(\nabla \mathbf{u}_h^\infty, \nabla \bar{\mathbf{u}}) + \alpha A(\mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{u}_h^\infty, \bar{\mathbf{u}}) - A(\mathbf{h}_h^\infty, \mathbf{h}_h^\infty, \bar{\mathbf{u}}) = \alpha(\mathbf{f}^\infty, \bar{\mathbf{u}}) + \frac{1}{\mu}(q_h^\infty, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}), \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}_h, \\ \gamma(\nabla \mathbf{h}_h^\infty, \nabla \bar{\mathbf{h}}) + A(\mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{h}_h^\infty, \bar{\mathbf{h}}) - A(\mathbf{h}_h^\infty, \mathbf{u}_h^\infty, \bar{\mathbf{h}}) = (w_h^\infty, \nabla \cdot \bar{\mathbf{h}}), \quad \forall \bar{\mathbf{h}} \in \mathbf{H}_h, \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^\infty, \bar{q}) = 0, \quad \forall \bar{q} \in Q_h, \\ (\nabla \cdot \mathbf{h}_h^\infty, \bar{w}) = 0, \quad \forall \bar{w} \in W_h. \end{cases} \quad (3.41)$$

Una vez computados  $\mathbf{h}_h^\infty$  y  $q_h^\infty$ , se encuentra  $p_h^\infty$  mediante

$$p_h^\infty = q_h^\infty - \frac{\mu}{2}(\mathbf{h}_h^\infty)^2. \quad (3.42)$$

Procediendo como en la Proposición 3.2.1 y el Teorema 3.3.1, es posible probar los siguientes resultados; por lo tanto, omitiremos las demostraciones.

**Proposición 3.4.1.** *Cualquier solución del esquema numérico (3.41) verifica la siguiente estimación*

$$\frac{\nu}{2} \|\nabla \mathbf{u}_h^\infty\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla \mathbf{h}_h^\infty\|_{L^2}^2 \leq C \frac{\alpha^2}{\nu} \|\mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'}^2, \quad (3.43)$$

donde la constante  $C > 0$  es independiente del parámetro discreto  $h$ .

**Teorema 3.4.2.** *Existe por lo menos una solución  $[\mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{h}_h^\infty, q_h^\infty, w_h^\infty, p_h^\infty] \in \mathbf{U}_h \times \mathbf{H}_h \times Q_h \times W_h \times P_h$  del esquema numérico (3.41)-(3.42). Además, si se satisfacen las siguientes condiciones*

$$\frac{C}{\nu} (\alpha \|\mathbf{u}_h^\infty\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3}) < 1, \quad (3.44)$$

$$\frac{C}{\gamma} (\|\mathbf{u}_h^\infty\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3}) < 1, \quad (3.45)$$

donde  $C > 0$  es una constante independiente del parámetro discreto  $h$ , entonces la solución es única.

**Observación 3.4.3.** Note que, gracias a la estimación (3.43), las condiciones (3.44)-(3.45) son satisfechas si: (a)  $\|\mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'}$  es suficientemente pequeña, o (b) el parámetro  $\alpha$  es suficientemente pequeño, o (c) los parámetros  $\nu, \gamma$  son suficientemente grandes.

Ahora, presentamos los resultados principales de esta sección.

**Teorema 3.4.4.** Sea  $\mathbf{f} \in L^\infty(0, \infty; (\mathbf{H}_0^1(\Omega))')$ ,  $\mathbf{f}_\infty \in (\mathbf{H}_0^1(\Omega))'$  y sea  $[\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n, q^n, w^n]$  solución del esquema numérico (3.11). Además, asuma que  $[\mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{h}_h^\infty, q_h^\infty, w_h^\infty]$  es solución del esquema numérico (3.41) satisfaciendo (3.44)-(3.44). Entonces, existe una constante positiva  $\beta_0 > 0$  tal que, para todo  $\beta \in (0, \beta_0]$ , tenemos

$$\begin{aligned} & \alpha \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}^n - \mathbf{h}_h^\infty\|_{L^2}^2 \\ & \leq C(1 + 2\beta\Delta t)^{-n} (\alpha \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_h^\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}^0 - \mathbf{h}_h^\infty\|_{L^2}^2) \\ & \quad + \frac{C\alpha^2}{\nu} (1 + 2\beta\Delta t)^{-n} \Delta t \sum_{m=1}^n (1 + 2\beta\Delta t)^{m-1} \|\mathbf{f}^m - \mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)' }^2, \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde  $C > 0$  es una constante independiente de  $[\Delta t, h, n]$ .

*Demostración.* Restando (3.41)<sub>1</sub> a (3.11)<sub>1</sub>, tenemos que

$$\begin{aligned} & \alpha(\delta_t \mathbf{u}^n, \bar{\mathbf{u}}) + \nu(\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \bar{\mathbf{u}}) + \alpha A(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \bar{\mathbf{u}}) - A(\mathbf{h}^n, \mathbf{h}^n, \bar{\mathbf{u}}) - \nu(\nabla \mathbf{u}_h^\infty, \nabla \bar{\mathbf{u}}) \\ & - \alpha A(\mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{u}_h^\infty, \bar{\mathbf{u}}) + A(\mathbf{h}_h^\infty, \mathbf{h}_h^\infty, \bar{\mathbf{u}}) = \alpha(\mathbf{f}^n, \bar{\mathbf{u}}) - \alpha(\mathbf{f}^\infty, \bar{\mathbf{u}}) + \frac{1}{\mu}(q^n, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{\mu}(q_h^\infty, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}), \end{aligned} \quad (3.47)$$

para todo  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}_h$ . Note, que usando (3.7), obtenemos que

$$\alpha A(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \bar{\mathbf{u}}) - \alpha A(\mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{u}_h^\infty, \bar{\mathbf{u}}) = \alpha A(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{u}_h^\infty, \bar{\mathbf{u}}) + \alpha A(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^\infty, \bar{\mathbf{u}})$$

y

$$-(A(\mathbf{h}^n, \mathbf{h}^n, \bar{\mathbf{u}}) - A(\mathbf{h}_h^\infty, \mathbf{h}_h^\infty, \bar{\mathbf{u}})) = -(A(\mathbf{h}^n - \mathbf{h}_h^\infty, \mathbf{h}_h^\infty, \bar{\mathbf{u}}) + A(\mathbf{h}^n, \mathbf{h}^n - \mathbf{h}_h^\infty, \bar{\mathbf{u}})),$$

y reemplazando en (3.47), deducimos

$$\begin{aligned} & \alpha(\delta_t \mathbf{u}^n, \bar{\mathbf{u}}) + \nu(\nabla(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^\infty), \nabla \bar{\mathbf{u}}) + \alpha A(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{u}_h^\infty, \bar{\mathbf{u}}) + \alpha A(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^\infty, \bar{\mathbf{u}}) \\ & - A(\mathbf{h}^n - \mathbf{h}_h^\infty, \mathbf{h}_h^\infty, \bar{\mathbf{u}}) - A(\mathbf{h}^n, \mathbf{h}^n - \mathbf{h}_h^\infty, \bar{\mathbf{u}}) = \alpha(\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty, \bar{\mathbf{u}}) + \frac{1}{\mu}(q^n - q_h^\infty, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}), \end{aligned} \quad (3.48)$$

para todo  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}_h$ . Procediendo análogamente, restando (3.41)<sub>2-4</sub> a (3.11)<sub>2-4</sub>, llegamos a

$$\begin{aligned}
& (\delta_t \mathbf{h}^n, \bar{\mathbf{h}}) + \gamma(\nabla(\mathbf{h}^n - \mathbf{h}_h^\infty), \nabla \bar{\mathbf{h}}) + A(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{h}_h^\infty, \bar{\mathbf{h}}) + A(\mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n - \mathbf{h}_h^\infty, \bar{\mathbf{h}}) \\
& - A(\mathbf{h}^n - \mathbf{h}_h^\infty, \mathbf{u}_h^\infty, \bar{\mathbf{h}}) - A(\mathbf{h}^n, \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^\infty, \bar{\mathbf{h}}) = (w^n - w_h^\infty, \nabla \cdot \bar{\mathbf{h}}), \tag{3.49}
\end{aligned}$$

$$(\nabla \cdot (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^\infty), \bar{q}) = 0, \tag{3.50}$$

$$(\nabla \cdot (\mathbf{h}^n - \mathbf{h}_h^\infty), \bar{w}) = 0, \tag{3.51}$$

para todo  $[\bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] \in \mathbf{H}_h \times Q_h \times W_h$ . Ahora, denotando  $\mathbf{v}^n := \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^\infty$ ,  $\mathbf{z}^n := \mathbf{h}^n - \mathbf{h}_h^\infty$ ,  $r^n := q^n - q_h^\infty$ , y  $s^n := w^n - w_h^\infty$ , y considerando la siguiente igualdad

$$\delta_t \mathbf{u}^n = \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^\infty - (\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}_h^\infty)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1}}{\Delta t},$$

de (3.48)-(3.51), obtenemos

$$\begin{aligned}
& \alpha(\delta_t \mathbf{v}^n, \bar{\mathbf{u}}) + \nu(\nabla \mathbf{v}^n, \nabla \bar{\mathbf{u}}) + \alpha A(\mathbf{v}^n, \mathbf{u}_h^\infty, \bar{\mathbf{u}}) + \alpha A(\mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n, \bar{\mathbf{u}}) \\
& - A(\mathbf{z}^n, \mathbf{h}_h^\infty, \bar{\mathbf{u}}) - A(\mathbf{h}^n, \mathbf{z}^n, \bar{\mathbf{u}}) = \alpha(\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty, \bar{\mathbf{u}}) + \frac{1}{\mu}(r^n, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}), \tag{3.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta_t \mathbf{z}^n, \bar{\mathbf{h}}) + \gamma(\nabla \mathbf{z}^n, \nabla \bar{\mathbf{h}}) + A(\mathbf{v}^n, \mathbf{h}_h^\infty, \bar{\mathbf{h}}) \\
& + A(\mathbf{u}^n, \mathbf{z}^n, \bar{\mathbf{h}}) - A(\mathbf{z}^n, \mathbf{u}_h^\infty, \bar{\mathbf{h}}) - A(\mathbf{h}^n, \mathbf{v}^n, \bar{\mathbf{h}}) = (s^n, \nabla \cdot \bar{\mathbf{h}}), \tag{3.53}
\end{aligned}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}^n, \bar{q}) = 0, \tag{3.54}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{z}^n, \bar{w}) = 0, \tag{3.55}$$

para todo  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] \in \mathbf{U}_h \times \mathbf{H}_h \times Q_h \times W_h$ . Ahora, tomando  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] = [\mathbf{v}^n, \mathbf{z}^n, \frac{1}{\mu} r^n, s^n]$  en (3.52)-(3.55) y sumando las expresiones resultantes, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \alpha(\delta_t \mathbf{v}^n, \mathbf{v}^n) + (\delta_t \mathbf{z}^n, \mathbf{z}^n) + \nu(\nabla \mathbf{v}^n, \nabla \mathbf{v}^n) + \gamma(\nabla \mathbf{z}^n, \nabla \mathbf{z}^n) + \alpha A(\mathbf{v}^n, \mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{v}^n) \\
& + \alpha A(\mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n, \mathbf{v}^n) - A(\mathbf{z}^n, \mathbf{h}_h^\infty, \mathbf{v}^n) - A(\mathbf{h}^n, \mathbf{z}^n, \mathbf{v}^n) + A(\mathbf{v}^n, \mathbf{h}_h^\infty, \mathbf{z}^n) + A(\mathbf{u}^n, \mathbf{z}^n, \mathbf{z}^n) \\
& - A(\mathbf{z}^n, \mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{z}^n) - A(\mathbf{h}^n, \mathbf{v}^n, \mathbf{z}^n) = \alpha(\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty, \mathbf{v}^n). \tag{3.56}
\end{aligned}$$

Usando la igualdad  $(a - b)a = \frac{1}{2}(a^2 - b^2) + \frac{1}{2}(a - b)^2$ , así como las propiedades (3.5)-(3.6), llegamos a

$$\frac{\alpha}{2} \delta_t \|\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha \Delta t}{2} \|\delta_t \mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \delta_t \|\mathbf{z}^n\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \mathbf{z}^n\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2}^2$$

$$= -\alpha A(\mathbf{v}^n, \mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{v}^n) + A(\mathbf{z}^n, \mathbf{h}_h^\infty, \mathbf{v}^n) - A(\mathbf{v}^n, \mathbf{h}_h^\infty, \mathbf{z}^n) + A(\mathbf{z}^n, \mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{z}^n) = \alpha(\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty, \mathbf{v}^n). \quad (3.57)$$

El paso a seguir será estimar los términos a la derecha de (3.57); para esto, primero recuerde que

$$A(\mathbf{u}, v, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{w}) - \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}, v),$$

entonces, usando la desigualdad de Hölder y (1.6), obtenemos

$$|\alpha A(\mathbf{v}^n, \mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{v}^n)| \leq C\alpha \|\mathbf{v}^n\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2} \|\mathbf{u}_h^\infty\|_{L^3} \leq C\alpha \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}_h^\infty\|_{L^3}, \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} |A(\mathbf{z}^n, \mathbf{h}_h^\infty, \mathbf{v}^n)| &\leq C\|\mathbf{z}^n\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2} \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3} + C\|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2} \|\mathbf{v}^n\|_{L^6} \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3} \\ &\leq C\|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2} \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3} + C\|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2} \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$|A(\mathbf{z}^n, \mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{z}^n)| \leq C\|\mathbf{z}^n\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2} \|\mathbf{u}_h^\infty\|_{L^3} \leq C\|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}_h^\infty\|_{L^3}, \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} |A(\mathbf{v}^n, \mathbf{h}_h^\infty, \mathbf{z}^n)| &\leq C\|\mathbf{v}^n\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2} \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3} + C\|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2} \|\mathbf{z}^n\|_{L^6} \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3} \\ &\leq C\|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2} \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3} + C\|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2} \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Reemplazando (3.58)-(3.61) en (3.57), llegamos a la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha}{2} \delta_t \|\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha \Delta t}{2} \|\delta_t \mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \delta_t \|\mathbf{z}^n\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \mathbf{z}^n\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2}^2 \\ &\leq C\alpha \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}_h^\infty\|_{L^3} + C\|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2} \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3} + C\|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}_h^\infty\|_{L^3} \\ &\quad + \alpha C \|\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'} \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2}, \end{aligned}$$

de lo cual, usando la desigualdad de Young en algunos términos y reorganizando, deducimos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \delta_t \left( \alpha \|\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}^n\|_{L^2}^2 \right) + \nu \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2}^2 \\ &\leq C\alpha \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}_h^\infty\|_{L^3} + C(\|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2}^2) \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3} + C\|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}_h^\infty\|_{L^3} \\ &\quad + \frac{\nu}{2} \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha^2 C}{\nu} \|\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'}^2, \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\frac{1}{2} \delta_t \left( \alpha \|\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}^n\|_{L^2}^2 \right) + \frac{\nu}{2} \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \gamma \|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2}^2$$

$$\leq C(\alpha \|\mathbf{u}_h^\infty\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3}) \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + C(\|\mathbf{u}_h^\infty\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3}) \|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha^2 C}{\nu} \|\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'}^2.$$

Despejando, tenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \delta_t (\alpha \|\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}^n\|_{L^2}^2) + \left( \frac{\nu}{2} - C(\alpha \|\mathbf{u}_h^\infty\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3}) \right) \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 \\ & + \left( \gamma - C(\|\mathbf{u}_h^\infty\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3}) \right) \|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2}^2 \leq \frac{\alpha^2 C}{\nu} \|\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'}^2. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Note que si  $[\mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{h}_h^\infty]$  satisface (3.44)-(3.45), entonces

$$\bar{\nu} = \left( \frac{\nu}{2} - C(\alpha \|\mathbf{u}_h^\infty\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3}) \right) > 0$$

y

$$\bar{\gamma} = \left( \gamma - C(\|\mathbf{u}_h^\infty\|_{L^3} + \|\mathbf{h}_h^\infty\|_{L^3}) \right) > 0,$$

y así, de (3.62) llegamos a

$$\frac{1}{2} \delta_t (\alpha \|\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}^n\|_{L^2}^2) + \bar{\nu} \|\nabla \mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \bar{\gamma} \|\nabla \mathbf{z}^n\|_{L^2}^2 \leq \frac{C\alpha^2}{\nu} \|\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'}^2.$$

Ahora, usando (1.3), deducimos

$$\frac{1}{2} \delta_t (\alpha \|\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}^n\|_{L^2}^2) + \beta (\alpha \|\mathbf{v}^n\|^2 + \|\mathbf{z}^n\|^2) \leq \frac{C\alpha^2}{\nu} \|\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'}^2, \quad (3.63)$$

para todo  $\beta \in (0, \beta_0]$ , donde

$$\beta_0 = \min \left\{ \frac{\bar{\nu}}{\alpha}, \bar{\gamma} \right\} C.$$

Observe que la desigualdad (3.63) se transforma en

$$(\alpha \|\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}^n\|_{L^2}^2) - (\alpha \|\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}^{n-1}\|_{L^2}^2) + 2\beta \Delta t (\alpha \|\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}^n\|_{L^2}^2) \leq \frac{C\alpha^2}{\nu} \Delta t \|\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'}^2,$$

o equivalentemente,

$$(1 + 2\beta \Delta t) (\alpha \|\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}^n\|_{L^2}^2) - (\alpha \|\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}^{n-1}\|_{L^2}^2) \leq \Delta t \frac{C\alpha^2}{\nu} \|\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'}^2. \quad (3.64)$$

Entonces, multiplicando (3.64) por  $(1 + 2\beta \Delta t)^{n-1}$  tenemos

$$(1 + 2\beta \Delta t)^n (\alpha \|\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}^n\|_{L^2}^2)$$

$$-(1 + 2\beta\Delta t)^{n-1}(\alpha\|\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}^{n-1}\|_{L^2}^2) \leq (1 + 2\beta\Delta t)^{n-1} \frac{C\alpha^2}{\nu} \Delta t \|\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'}^2,$$

y sumando desde  $n = 1$  hasta  $m$ , obtenemos

$$(1 + 2\beta\Delta t)^m(\alpha\|\mathbf{v}^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}^m\|_{L^2}^2) - (\alpha\|\mathbf{v}^0\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}^0\|_{L^2}^2) \leq \Delta t \frac{C\alpha^2}{\nu} \sum_{n=1}^m (1 + 2\beta\Delta t)^{n-1} \|\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'}^2,$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} (\alpha\|\mathbf{v}^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}^m\|_{L^2}^2) &\leq (1 + 2\beta\Delta t)^{-m}(\alpha\|\mathbf{v}^0\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{z}^0\|_{L^2}^2) \\ &\quad + \frac{C\alpha^2}{\nu} \Delta t (1 + 2\beta\Delta t)^{-m} \sum_{n=1}^m (1 + 2\beta\Delta t)^{n-1} \|\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'}^2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

□

**Teorema 3.4.5.** *Asuma las hipótesis del Teorema 3.4.4. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'} = 0$ , entonces se tiene que  $\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^\infty\|_{L^2} \rightarrow 0$  y  $\|\mathbf{h}^n - \mathbf{h}_h^\infty\|_{L^2} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ .*

*Demostración.* Demostraremos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}^n - \mathbf{h}_h^\infty\|_{L^2}^2) = 0$ , esto es, dado  $\epsilon > 0$  (consideraremos, sin pérdida de generalidad,  $\epsilon < 1$ ), probaremos que existe  $N_\epsilon > 0$  tal que

$$\alpha\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}^n - \mathbf{h}_h^\infty\|_{L^2}^2 < \epsilon$$

para todo  $n > N_\epsilon$ .

Para encontrar  $N_\epsilon$ , comenzaremos considerando un  $\delta > 0$  (el cual será escogido más adelante luego en función de  $\epsilon$ ). Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'} = 0$ , existe  $N_\delta > 0$  tal que  $\|\mathbf{f}^n - \mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'} < \delta$  para todo  $n > N_\delta$ .

Ahora, por (3.46) con un  $\beta \in (0, \beta_0]$  fijo, se tiene que

$$\begin{aligned} &\alpha\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}^n - \mathbf{h}_h^\infty\|_{L^2}^2 \\ &\leq C(1 + 2\beta\Delta t)^{-n}(\alpha\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_h^\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}^0 - \mathbf{h}_h^\infty\|_{L^2}^2) \\ &\quad + \frac{C\alpha^2}{\nu} (1 + 2\beta\Delta t)^{-n} \Delta t \sum_{m=1}^n (1 + 2\beta\Delta t)^{m-1} \|\mathbf{f}^m - \mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'}^2 \\ &\leq C(1 + 2\beta\Delta t)^{-n}(\alpha\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_h^\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}^0 - \mathbf{h}_h^\infty\|_{L^2}^2) \\ &\quad + \frac{C\alpha^2}{\nu} (1 + 2\beta\Delta t)^{-n} \Delta t \sum_{m=1}^{N_\delta} (1 + 2\beta\Delta t)^{m-1} \|\mathbf{f}^m - \mathbf{f}^\infty\|_{(H^1)'}^2 \\ &\quad + \frac{C\alpha^2}{\nu} (1 + 2\beta\Delta t)^{-n} \Delta t \sum_{m=N_\delta+1}^n (1 + 2\beta\Delta t)^{m-1} \delta^2 \\ &\leq C(1 + 2\beta\Delta t)^{-n}(\alpha\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_h^\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}^0 - \mathbf{h}_h^\infty\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C\alpha^2}{\nu} (1 + 2\beta\Delta t)^{-n} \Delta t \left( \frac{(1 + 2\beta\Delta t)^{N_\delta} - 1}{2\beta\Delta t} \right) (\|\mathbf{f}\|_{l^\infty((H^1)')} + \|\mathbf{f}_\infty\|_{(H^1)'})^2 \\
& + \frac{C\alpha^2}{\nu} (1 + 2\beta\Delta t)^{-n} \Delta t \left( \frac{(1 + 2\beta\Delta t)^n - (1 + 2\beta\Delta t)^{N_\delta}}{2\beta\Delta t} \right) \delta^2 \\
& \leq C(1 + 2\beta\Delta t)^{-n} (\alpha \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_h^\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}^0 - \mathbf{h}_h^\infty\|_{L^2}^2) \\
& + \frac{C\alpha^2}{\nu} (1 + 2\beta\Delta t)^{-n} \left( \frac{(1 + 2\beta\Delta t)^{N_\delta}}{2\beta} \right) (\|\mathbf{f}\|_{l^\infty((H^1)')} + \|\mathbf{f}_\infty\|_{(H^1)'})^2 \\
& + \frac{C\alpha^2}{\nu} (1 + 2\beta\Delta t)^{-n} \left( \frac{(1 + 2\beta\Delta t)^n}{2\beta} \right) \delta^2 \\
& \leq C(1 + 2\beta\Delta t)^{-n} (\alpha \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_h^\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}^0 - \mathbf{h}_h^\infty\|_{L^2}^2) \\
& + \frac{C\alpha^2}{2\beta\nu} (1 + 2\beta\Delta t)^{-(n-N_\delta)} (\|\mathbf{f}\|_{l^\infty((H^1)')} + \|\mathbf{f}_\infty\|_{(H^1)'})^2 + \frac{C\alpha^2}{2\beta\nu} \delta^2. \tag{3.66}
\end{aligned}$$

Escogemos  $\delta > 0$  tal que

$$\frac{C\delta^2\alpha^2}{2\beta\nu} < \frac{\epsilon}{3}, \text{ es decir, } \delta < \left( \frac{2\beta\nu\epsilon}{3\alpha^2 C} \right)^{1/2},$$

para el cual consideramos el correspondiente  $N_\delta$ . Entonces, de (3.66) vemos que es suficiente escoger  $N_\epsilon > 0$  suficientemente grande tal que, para todo  $n > N_\epsilon$ , se cumpla

$$C(1 + 2\beta\Delta t)^{-n} (\alpha \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_h^\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}^0 - \mathbf{h}_h^\infty\|_{L^2}^2) < \epsilon/3$$

y

$$\frac{C\alpha^2}{2\beta\nu} (1 + 2\beta\Delta t)^{-(n-N_\delta)} (\|\mathbf{f}\|_{l^\infty((H^1)')} + \|\mathbf{f}_\infty\|_{(H^1)'})^2 < \epsilon/3.$$

Así, concluimos que

$$\alpha \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^\infty\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{h}^n - \mathbf{h}_h^\infty\|_{L^2}^2 < \epsilon,$$

lo cual finaliza la prueba. □

## 4. Simulaciones numéricas

En este capítulo, presentamos resultados de algunos experimentos numéricos realizados usando el esquema (3.11)-(3.12). Todas las simulaciones se han ejecutado en dominios 2D utilizando el software *FreeFEM++*. Los experimentos estarán enfocados en dos aspectos: por un lado, se estudiará el efecto de la función  $w$  asociada a los iones pesados y el término cuadrático  $\mathbf{h}^2$  (en la ecuación para  $\mathbf{u}$ ) en el comportamiento del campo magnético y el campo de velocidades; y por otro lado, se verificará la influencia de algunos de los parámetros asociados al sistema (2.1), en la dinámica de las variables involucradas.

### 4.1. Algoritmo iterativo

Teniendo en cuenta que el esquema (3.11) es un sistema algebraico no lineal, debemos considerar un algoritmo iterativo para aproximarlo. A continuación detallamos el algoritmo que hemos considerado, el cual se basa en un método tipo punto fijo:

- **Inicialización** ( $l = 0$ ): Sea  $[\mathbf{u}^{0,n}, \mathbf{h}^{0,n}] = [\mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{h}^{n-1}] \in \mathbf{U}_h \times \mathbf{H}_h$ .
- **Algoritmo:** Dado  $[\mathbf{u}^{l,n}, \mathbf{h}^{l,n}] \in \mathbf{U}_h \times \mathbf{H}_h$ , calcular  $[\mathbf{u}^{l+1,n}, \mathbf{h}^{l+1,n}, q^{l+1,n}, w^{l+1,n}] \in \mathbf{U}_h \times \mathbf{H}_h \times Q_h \times W_h$  tal que, para todo  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{h}}, \bar{q}, \bar{w}] \in \mathbf{U}_h \times \mathbf{H}_h \times Q_h \times W_h$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{\Delta t} (\mathbf{u}^{l+1,n} - \mathbf{u}^{n-1}, \bar{\mathbf{u}}) + \nu (\nabla \mathbf{u}^{l+1,n}, \nabla \bar{\mathbf{u}}) \\ \quad + \alpha A(\mathbf{u}^{l,n}, \mathbf{u}^{l+1,n}, \bar{\mathbf{u}}) - A(\mathbf{h}^{l,n}, \mathbf{h}^{l+1,n}, \bar{\mathbf{u}}) = \alpha(\mathbf{f}^n, \bar{\mathbf{u}}) + \frac{1}{\mu} (q^{l+1,n}, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}), \\ \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{h}^{l+1,n} - \mathbf{h}^{n-1}, \bar{\mathbf{h}}) + \gamma (\nabla \mathbf{h}^{l+1,n}, \nabla \bar{\mathbf{h}}) \\ \quad + A(\mathbf{u}^{l,n}, \mathbf{h}^{l+1,n}, \bar{\mathbf{h}}) - A(\mathbf{h}^{l,n}, \mathbf{u}^{l+1,n}, \bar{\mathbf{h}}) = (w^{l+1,n}, \nabla \cdot \bar{\mathbf{h}}), \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}^{l+1,n}, \bar{q}) = 0, \\ (\nabla \cdot \mathbf{h}^{l+1,n}, \bar{w}) = 0. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Se realizan las iteraciones hasta que

$$\max(\|\mathbf{u}^{l+1,n} - \mathbf{u}^{l,n}\|_{L^2}, \|\mathbf{h}^{l+1,n} - \mathbf{h}^{l,n}\|_{L^2}, \|q^{l+1,n} - q^{l,n}\|_{L^2}, \|w^{l+1,n} - w^{l,n}\|_{L^2}) \leq tol,$$

donde  $tol > 0$  es una tolerancia dada.

## 4.2. Influencia de los términos $w$ y $h^2$ en la dinámica del sistema

El interés de esta subsección está enfocado en estudiar el comportamiento del campo magnético y el campo de velocidades dependiendo de la inclusión o eliminación de la función  $w$  asociada a los iones pesados y del término cuadrático  $h^2$  en la ecuación (1). En todos los casos, se consideró la fuerza externa  $f = 0$ , y se tomaron los parámetros físicos y discretos mostrados en el Cuadro 4.1 (tomados de <sup>1</sup>).

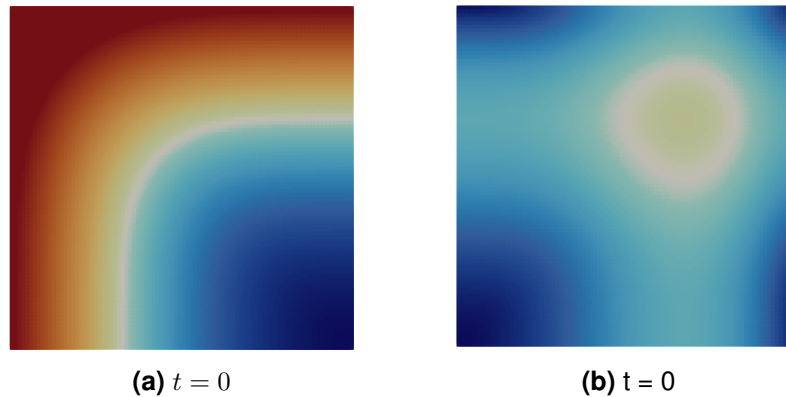
$\Omega$	$[0, T]$	$h$	$\Delta t$	$\alpha$	$\nu$	$\gamma$	$\mu$	$tol$
$[0, 1]^2$	$[0, 5]$	1/90	0,1	1	$10^{-3}$	0,017	0,07	$10^{-3}$

**Cuadro 4.1** – Parámetros tomados en cuenta para los diferentes casos.

Para el campo magnético y el campo de velocidades iniciales (ver Figura 4.1), se usan las siguientes expresiones explícitas (tomadas de <sup>2</sup>):

$$\mathbf{u}_0(x, y) = (y^2(1 - y), x^2(1 - x)), \quad (4.2)$$

$$\mathbf{h}_0(x, y) = (y^2, (1 - x)^2). \quad (4.3)$$

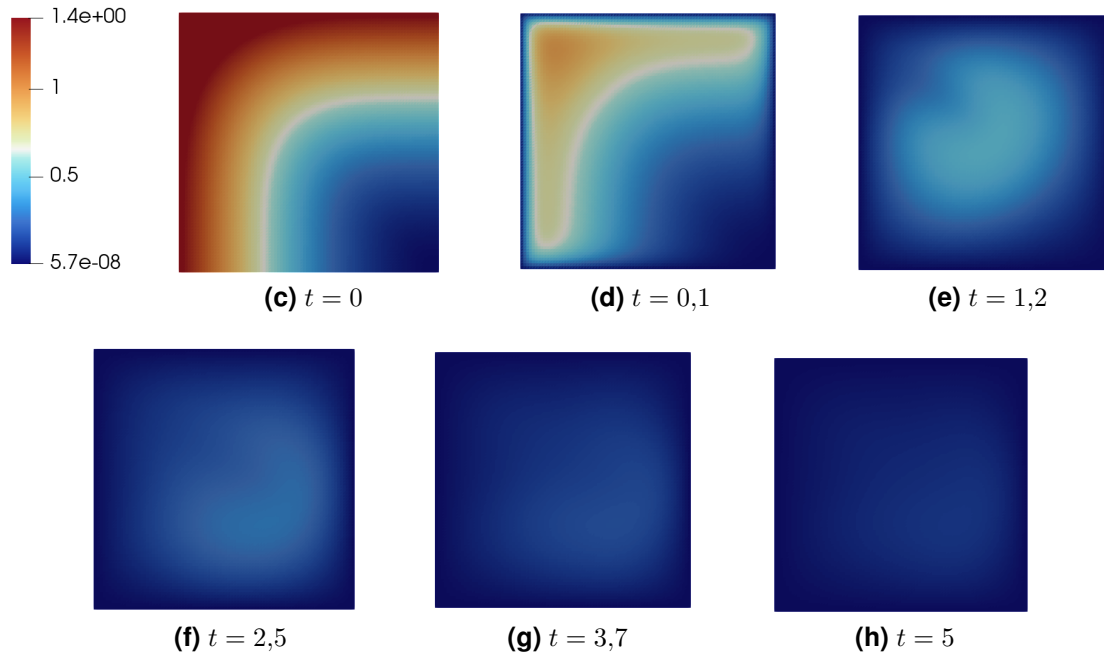


**Figura 4.1** – Condiciones iniciales para el campo magnético  $h_0$  y el campo de velocidades  $u_0$ , respectivamente.

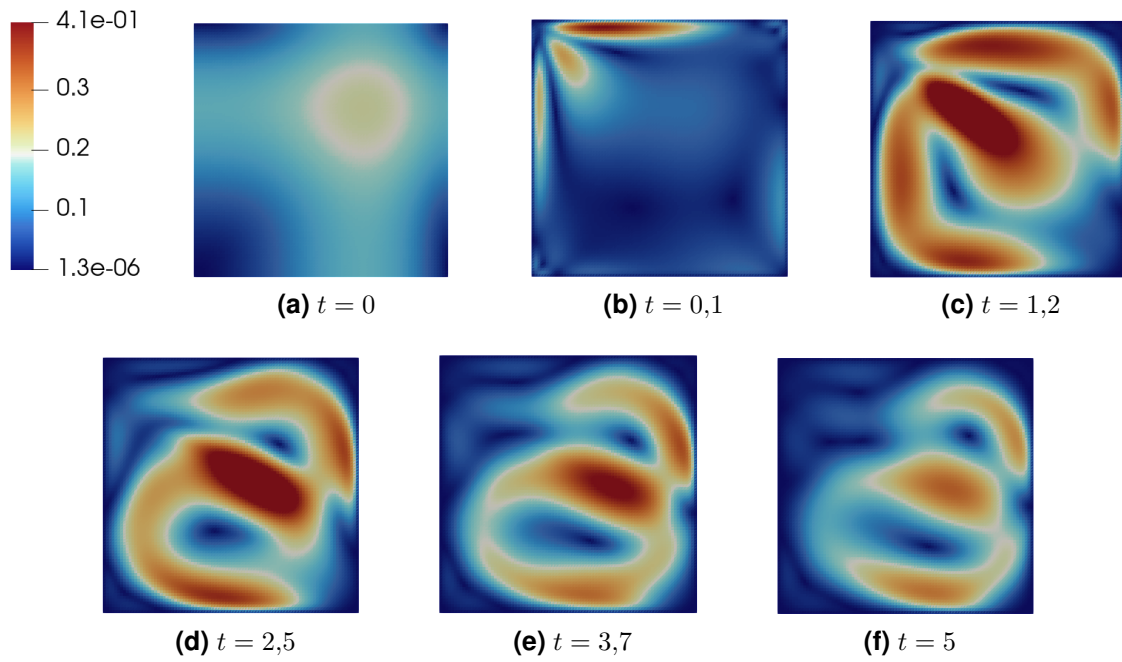
<sup>1</sup> Y. He G. Zhang. “Unconditional convergence of the Euler semi-implicit scheme for the 3D incompressible MHD equations: Numerical implementation”. En: *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow* 25.8 (2015), págs. 1912-1923

<sup>2</sup> G. Zhang, ver n. 1

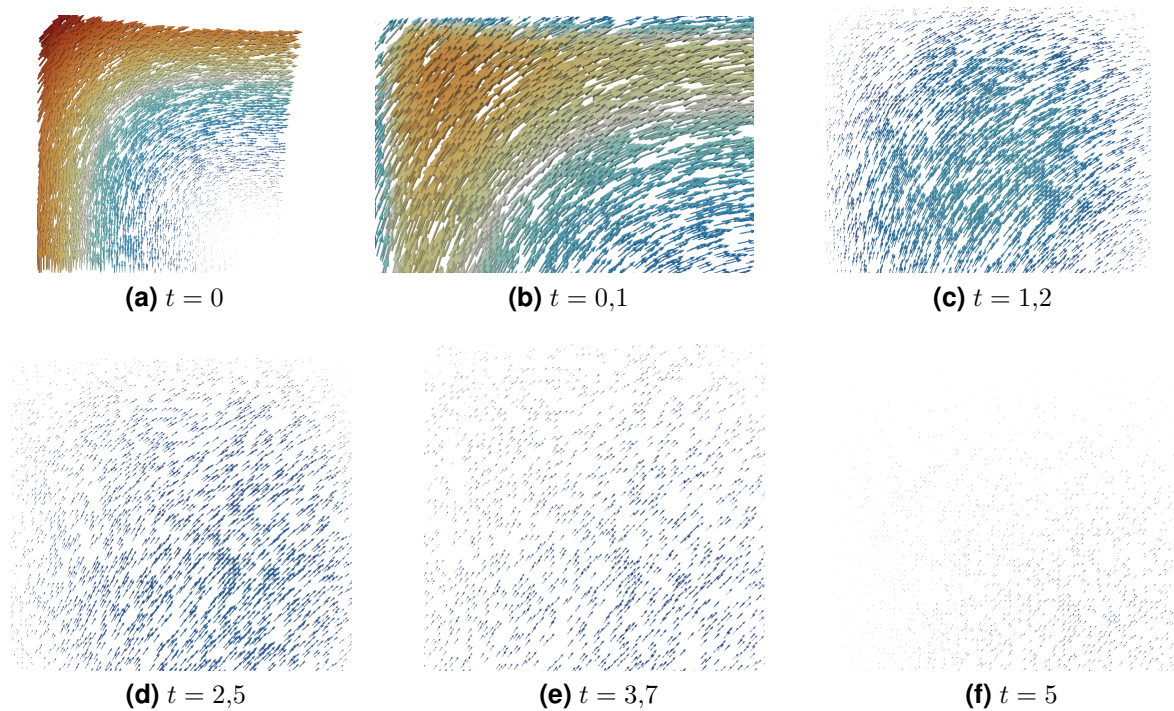
En la Figuras 4.2 y 4.3, se observa la dinámica en tiempo de los campos magnético y de velocidades, respectivamente, sin considerar la acción de la función  $w$  asociada a los iones pesados y del término cuadrático  $\mathbf{h}^2$  en (1). Se puede apreciar un decaimiento en la magnitud de estas variables a lo largo del tiempo, lo cual está acorde con la ley de energía discreta probada en la Proposición 3.2.1; así mismo, el cambio abrupto del campo de velocidades de  $t = 0$  a  $t = 0,1$  se debe a la acción del campo magnético, debido a la región de mayor magnitud que se tenía de este en un inicio.



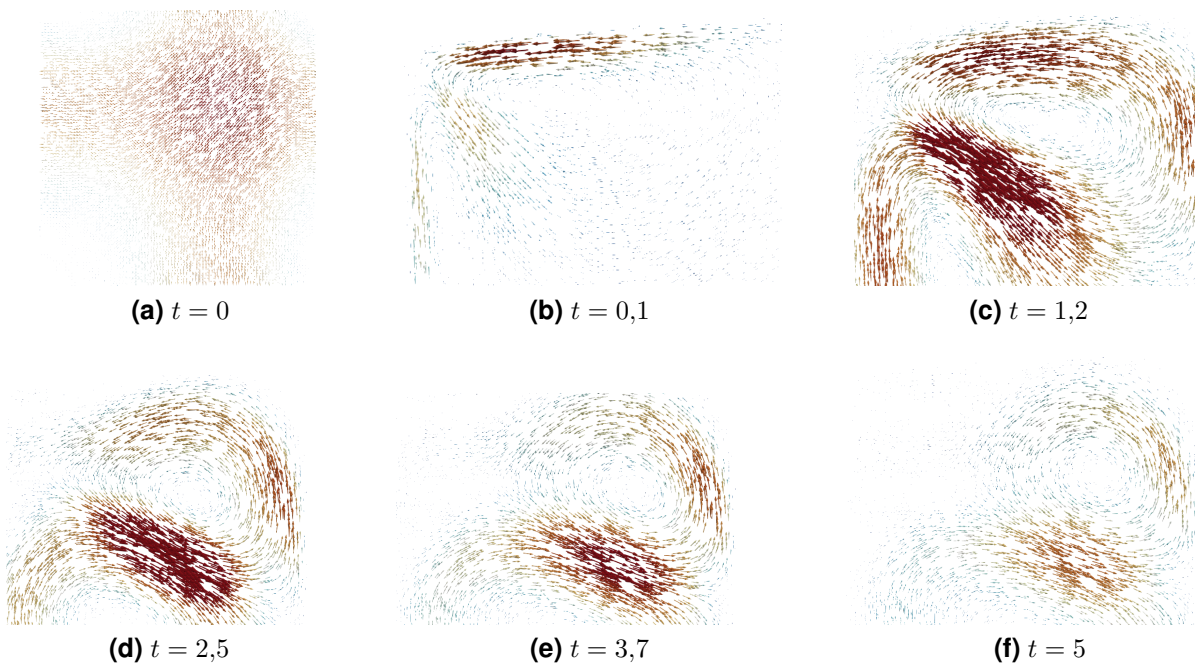
**Figura 4.2** – Dinámica en el tiempo del campo magnético  $\mathbf{h}$ , sin considerar la acción de la función  $w$  asociada a los iones pesados y del término cuadrático  $\mathbf{h}^2$  en (1).



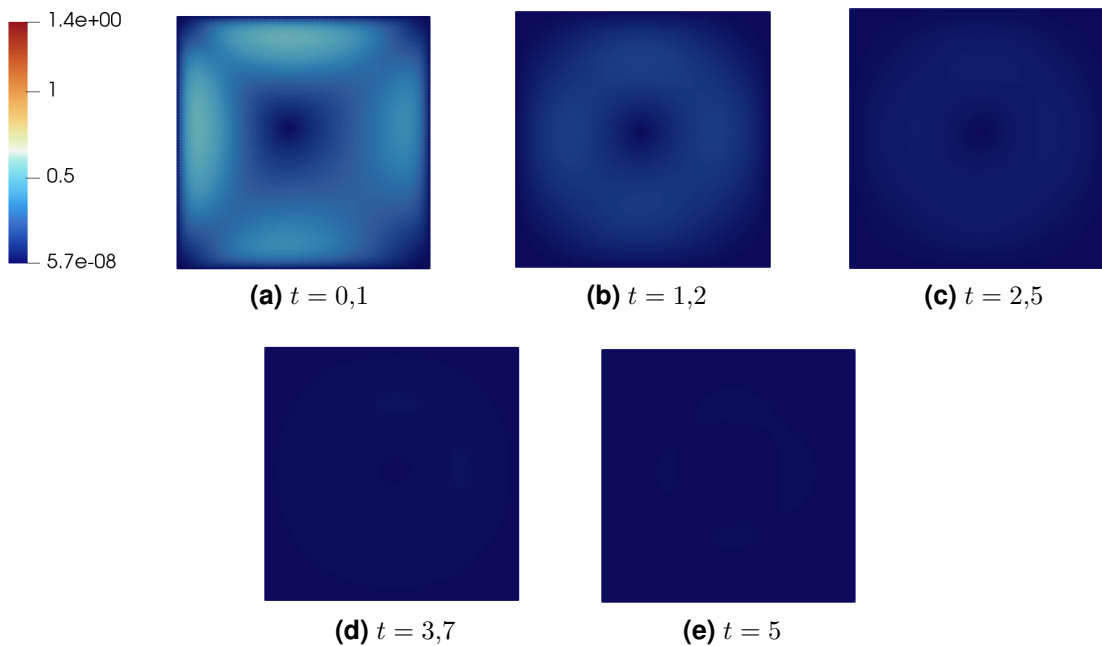
**Figura 4.3** – Dinámica en el tiempo del campo de velocidades  $u$ , sin considerar la acción de la función  $w$  asociada a los iones pesados y del término cuadrático  $h^2$  en (1).



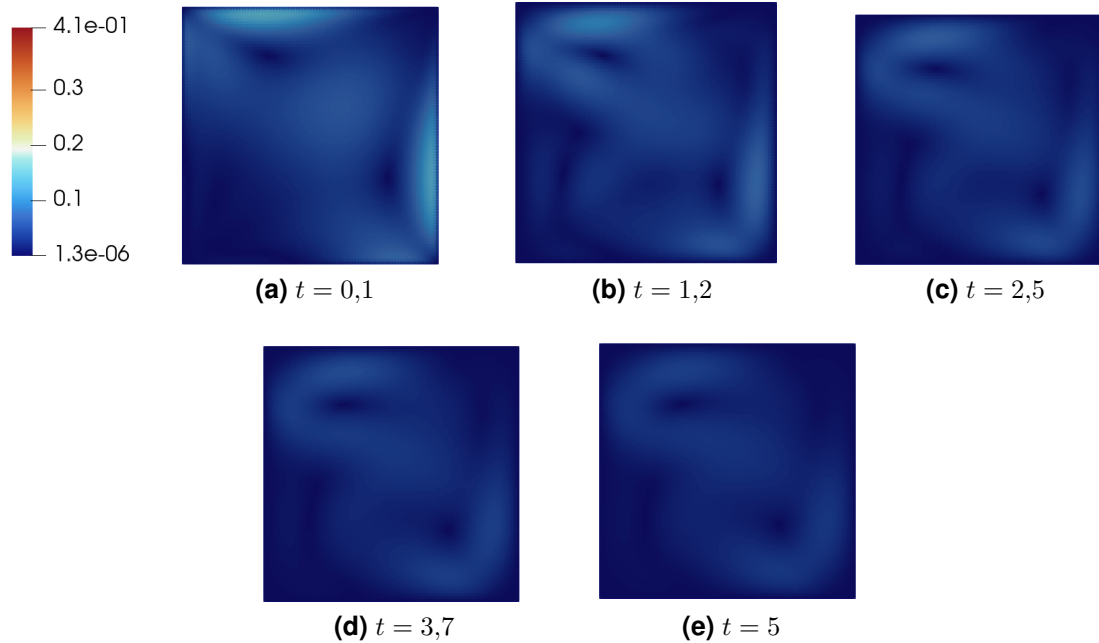
**Figura 4.4** – Dinámica vectorial en el tiempo de  $\mathbf{h}$ , sin considerar la acción de la función  $w$  asociada a los iones pesados y del término cuadrático  $\mathbf{h}^2$  en (1). En la gráfica (a) se muestra la distribución vectorial del campo magnético inicial en todo el dominio; mientras que, en las gráficas (b)-(f) se muestra la dinámica en la esquina superior izquierda del dominio.



**Figura 4.5** – Dinámica vectorial en el tiempo de  $\mathbf{u}$ , sin considerar la acción de la función  $w$  asociada a los iones pesados y del término cuadrático  $\mathbf{h}^2$  en (1).



**Figura 4.6** – Dinámica en el tiempo del campo magnético  $\mathbf{h}$ , considerando la acción de la función  $w$  asociada a los iones pesados y del término cuadrático  $\mathbf{h}^2$  en (1).



**Figura 4.7** – Dinámica en el tiempo del campo de velocidades  $\mathbf{u}$ , considerando la acción de la función  $w$  asociada a los iones pesados y del término cuadrático  $\mathbf{h}^2$  en (1).

Al analizar en detalle las simulaciones del campo de velocidades en la Figura 4.3, se observa la formación progresiva de vórtices a lo largo del tiempo. Este comportamiento puede atribuirse a la intensidad del campo magnético inducido y, en consecuencia, de la fuerza de Lorentz, cuyo efecto depende directamente de los valores de la conductividad eléctrica  $\sigma$  y de la permeabilidad magnética  $\mu$ . Dicho acoplamiento electromagnético modifica la distribución de la velocidad del fluido, generando las estructuras rotacionales apreciadas en las simulaciones.

Ahora, tenemos que la función  $w$  funciona como una fuente de amortiguamiento; esto puede entenderse como que, cuando se considera  $w = 0$ , hay menos fricción o resistencia adicional al movimiento del fluido y, por tal motivo, es natural que en las Figuras 4.3 y 4.5, el campo de velocidades tarde en desaparecer un poco más que en la Figura 4.7. Por otro lado, podemos notar que el término con  $\mathbf{h}^2$  también funciona como un tipo de amortiguador, para ser más exactos, al término  $\frac{1}{2}\nabla\mathbf{h}^2$  se le conoce como el gradiente de la presión magnética, el cual limita la aceleración de la velocidad. En adición, en el sistema hay una pérdida de energía a medida que pasa el tiempo (ver Proposición 3.2.1, lo cual está acorde con <sup>3</sup>); por tal motivo, el campo magnético se va desvaneciendo cuando el tiempo avanza (ver Figuras 4.2,

---

<sup>3</sup> G. Zhang, ver n. 1

4.4 y 4.6). Por otro lado, la función  $w$  brinda un ajuste al campo magnético, en el sentido de que lo regulariza; y el término con  $h^2$  es un control de la concentración y estabilidad espacial del campo magnético, "empujando" parte del flujo magnético de lugares de alta acumulación, como se observa en la Figura 4.6.

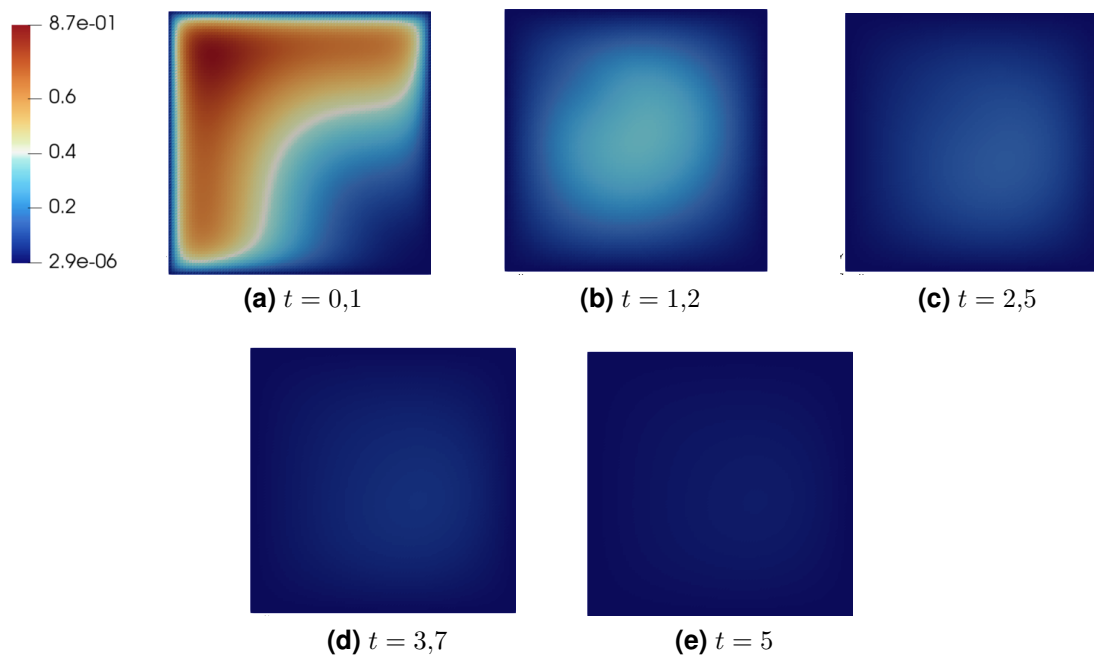
Finalmente, en las Figuras 4.4 y 4.5 se observa la influencia del campo magnético en el cambio de dirección y la disminución de la magnitud del campo de velocidades a medida que avanza el tiempo.

### 4.3. Influencia de los parámetros físicos $\nu$ , $\gamma$ y $\mu$

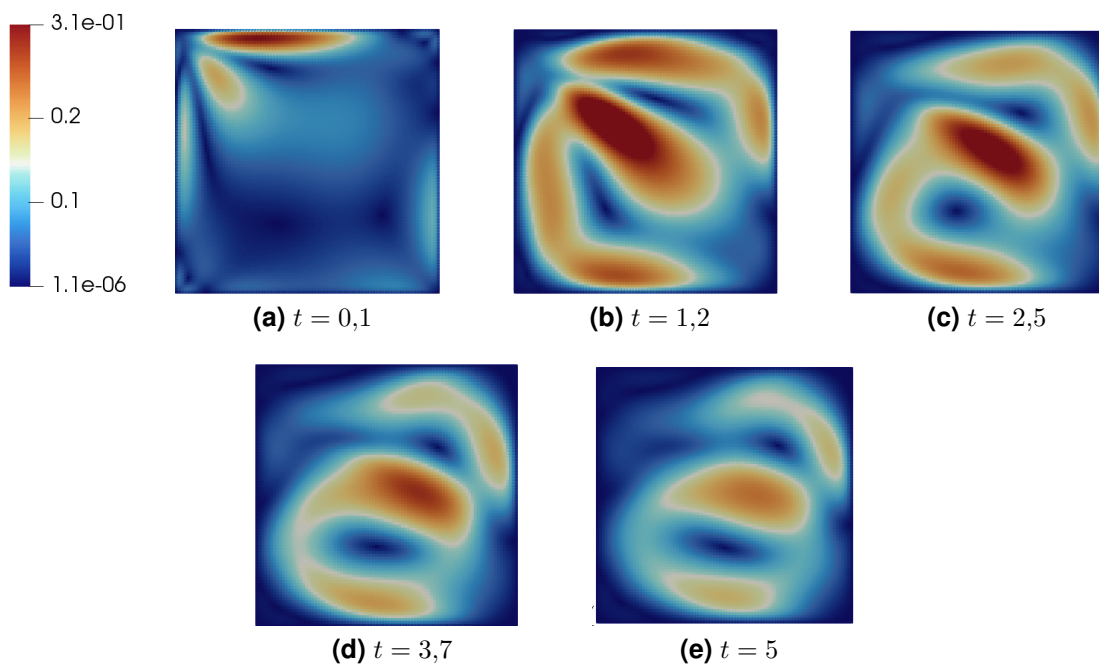
Por último, presentaremos diferentes simulaciones para analizar la dinámica del sistema (sin considerar el efecto de la función  $w$  y sin el término con  $h^2$ ), variando en este caso los parámetros físicos  $\nu$ ,  $\gamma$  y  $\mu$ . Con este fin, se consideran las mismas condiciones iniciales dadas en (4.2)-(4.3), y en el Cuadro 4.2, se presentan los datos de los parámetros escogidos en los diferentes experimentos.

Test	$\Omega$	$[0, T]$	$h$	$\Delta t$	$\alpha$	$\nu$	$\gamma$	$\mu$	$tol$
1	$[0, 1]^2$	$[0, 5]$	1/90	0,1	1	$10^{-3}$	0,017	0,07	$10^{-3}$
2	$[0, 1]^2$	$[0, 5]$	1/90	0,1	1	$10^{-3}$	0,033	3	$10^{-3}$
3	$[0, 1]^2$	$[0, 5]$	1/90	0,1	1	1	0,033	3	$10^{-3}$

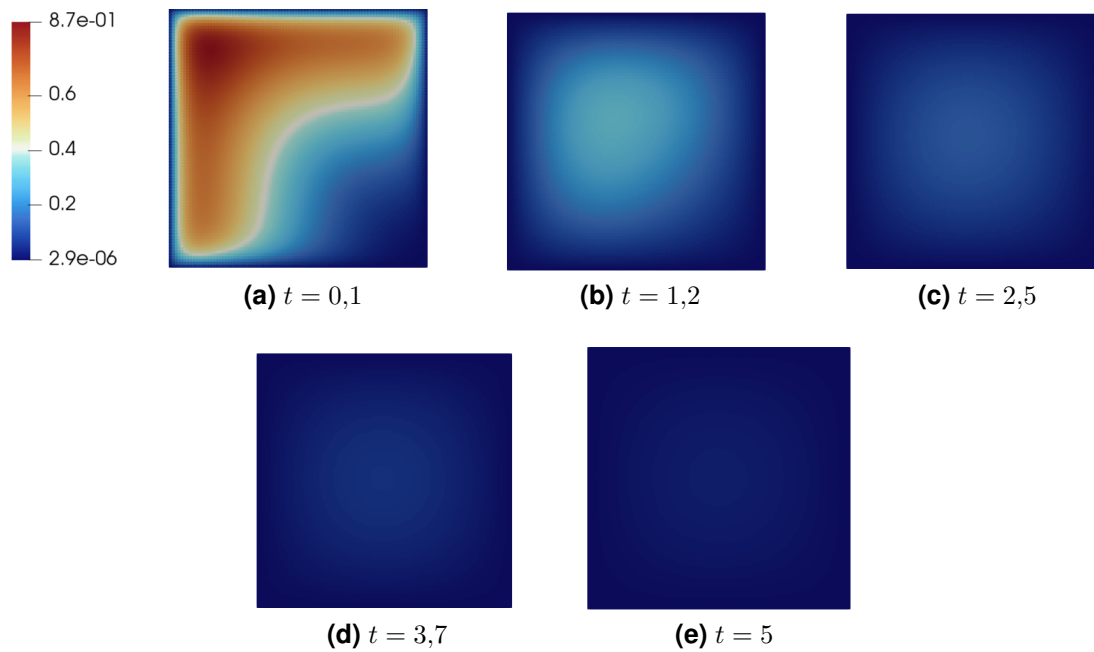
**Cuadro 4.2** – Parámetros escogidos en tres experimentos (aquí varían  $\nu$ ,  $\gamma$  y  $\mu$ ).



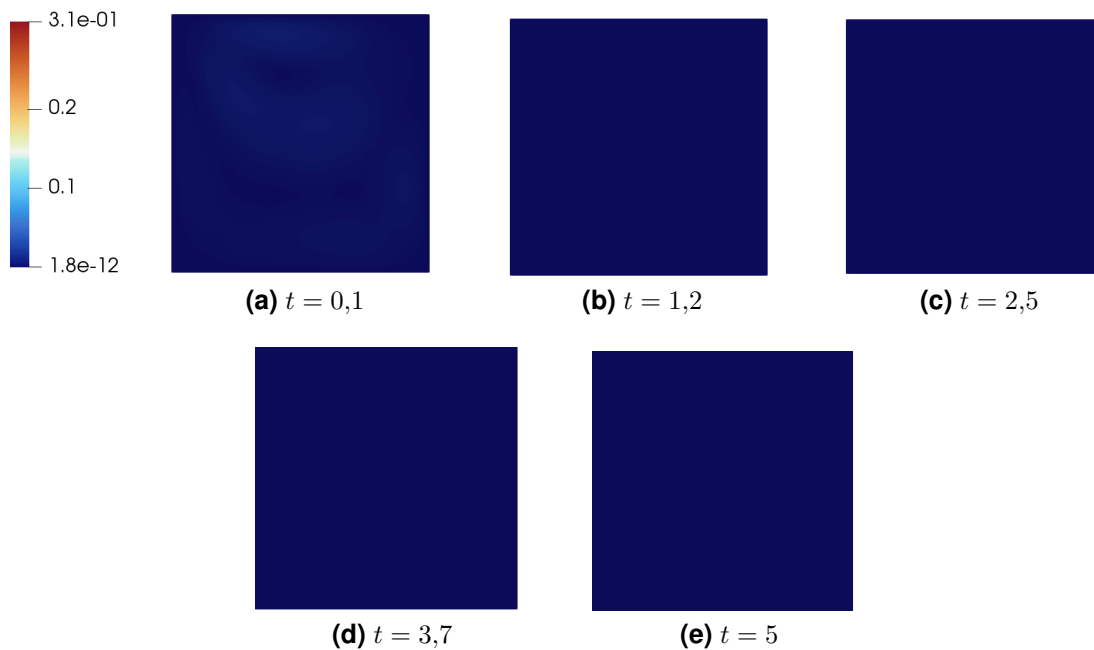
**Figura 4.8** – Dinámica en el tiempo del campo magnético  $h$  en el Experimento 2.



**Figura 4.9** – Dinámica en el tiempo del campo de velocidades  $u$  en el Experimento 2.



**Figura 4.10** – Dinámica en el tiempo del campo magnético  $h$  en el Experimento 3.



**Figura 4.11** – Dinámica en el tiempo del campo de velocidades  $u$  en el Experimento 3.

Observe que los valores para los parámetros en el Test 1 (ver Cuadro 4.2) son exactamente los mismos que veníamos trabajando en la sección anterior; por lo tanto, la dinámica de los campos magnético y de

velocidades para este primer experimento se puede visualizar en las Figuras 4.2 y 4.3, respectivamente. Recuerde que  $\nu$  representa el cociente de la constante de viscosidad del fluido  $\eta$  entre la permeabilidad magnética del medio  $\mu$ , entonces al relacionar estos tres parámetros tenemos que la viscosidad del fluido en este caso es bastante baja, razón por la que el sistema presenta una velocidad alta y que se llega a mantener a lo largo del tiempo. Por otro lado, el campo magnético llega a verse afectado por  $\gamma$  que también representa un cociente de 1 entre  $\mu\sigma$ , de modo que al hacer esa relación, obtenemos que con una permeabilidad pequeña ( $\mu = 0,07$ ) y una conductividad alta ( $\sigma = 840$ ), el campo magnético tenderá a disminuir progresivamente en intensidad con el tiempo, aunque no desaparecerá de inmediato (persiste un poco en el tiempo).

En el Experimento 2, se variaron los parámetros  $\gamma$  y  $\mu$ , y por tanto,  $\sigma$  (ver Cuadro 4.2). En lo que respecta al campo magnético, aunque se aumentó la permeabilidad, se disminuyó considerablemente la conductividad, con lo cual se reduce notablemente su intensidad en el tiempo (persiste menos en el tiempo que en el Experimento 1). Por otro lado, para el campo de velocidades, al aumentar  $\mu$ , aumenta el parámetro  $\eta$  que denota la viscosidad del fluido, y por tanto, la intensidad de la velocidad se ve reducida a lo largo del tiempo respecto a lo observado en el Experimento 1. Finalmente, en el Experimento 3 se aumenta el valor de  $\nu$ , con lo cual la viscosidad del fluido es aún mayor, y así, la intensidad del campo de velocidades disminuye rápidamente, a tal punto de casi llegar a desaparecer en poco tiempo.

## Bibliografía

- A. Al-Hanaya M. Alotaibi, M. Shqair y A. Hagag. “MHD effects on Casson fluid flow squeezing between parallel plates”. En: *AIMS mathematics* 8.12 (2023), págs. 29440-29452 (vid. pág. 9).
- Brézis, H. “Análisis Funcional Teoría y aplicaciones”. En: *Alianza Editorial* (1984) (vid. págs. 18, 20).
- Chizhonkov, E. V. “A system of equations of magnetohydrodynamics type”. En: *Doklady Akademii Nauk SSSR* 278 (1984), págs. 1074-1077 (vid. pág. 23).
- D. Gómez, P. Mininni y P. Dmitruk. “MHD simulations and astrophysical applications”. En: *Advances in Space Research: The Official Journal of the Committee on Space Research (COSPAR)* 35.5 (2005), págs. 899-907 (vid. pág. 10).
- D. Rueda, E. Villamizar. “On the RayleighBénardMarangoni system and a related optimal control problem”. En: *Computers and Mathematics With Applications* 74.12 (2017), págs. 2969-2991 (vid. pág. 21).
- G. Zhang, Y. He. “Unconditional convergence of the Euler semi-implicit scheme for the 3D incompressible MHD equations: Numerical implementation”. En: *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow* 25.8 (2015), págs. 1912-1923 (vid. págs. 52, 57).
- Galdi, G. P. “An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations”. En: *Springer* (2011) (vid. págs. 17-19).
- Girault, V. y P.-A. Raviart. “Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms”. En: *Springer-Verlag* (1986) (vid. pág. 36).

- H. Farrokhi D. Otuya, A. Khimchenko y J. Dong. "Magnetohydrodynamics in Biomedical Applications". En: *Nanofluid Flow in Porous Media* (2020) (vid. pág. 10).
- Harada, N. "Application of magnetohydrodynamics (MHD) and recent research trend". En: *IEEJ Transactions on Power and Energy* 127.3 (2007), págs. 447-450 (vid. pág. 10).
- Hernandez, N. "Stabilized Finite Element Approximation of the Incompressible MHD Equations". En: *Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña* (2010) (vid. pág. 9).
- I. Cherkaoui S. Bettaibi, A. Barkaoui y F. Kuznik. "Numerical study of pulsatile thermal magnetohydrodynamic blood flow in an artery with aneurysm using lattice Boltzmann method (LBM)". En: *Communications in Nonlinear Science y Numerical Simulation* 123 (2023) (vid. pág. 9).
- J. Boldrini J. Bravo-Olivares, E. Notte-Cuello y M. Rojas-Medar. "Asymptotic behavior of weak and strong solutions of the magnetohydrodynamic equations". En: *Electronic Research Archive* 29.1 (2021), págs. 1783-1801 (vid. págs. 8, 11, 22, 23).
- M. Junaid, M. Aslam y J. Zhang. "Applications of solar thermal radiation in a bioconvective EyringPowell hybrid nanofluid flow under the influence of electromagnetohydrodynamics near a stagnation point: An irreversibility study". En: *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik* 104.4 (2024) (vid. pág. 10).
- M. Rojas-Medar, y J. Boldrini. "The Weak solutions and reproductive property for a system of evolution equations of magnetohydrodynamic type". En: *Proyecciones* 13.2 (1994), págs. 85-97 (vid. pág. 22).
- N. Yadav, R. Cameron y S. Solanki. "Slow magneto-acoustic waves in simulations of a solar plage region carry enough energy to heat the chromosphere". En: *Astronomy & Astrophysics* 652 (2021) (vid. pág. 10).

“Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis”. En: *North-Holland* (1984) (vid. pág. 18).

Nečas, J. En: *Academia* (1967) (vid. pág. 19).

P. Pattnaik J. Pattnaik, S. Mishra y K. Nisar. “Variation of the shape of  $Fe_3O_4$ -nanoparticles on the heat transfer phenomenon with the inclusion of thermal radiation”. En: *J Therm Anal Calorim* (2021), págs. 1-12 (vid. pág. 10).

S. Rashidi, J. Esfahani y M. Maskaniyan. “Applications of magnetohydrodynamics in biological systems-a review on the numerical studies”. En: *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 439 (2017), págs. 358-372 (vid. pág. 10).