

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

El cálculo algebraico de Fermat: una opción didáctica

Edinson Matheus Camacho

**Trabajo de Grado para optar por el título de
Magister en Educación Matemática**

**Director:
Gabriel Yáñez Canal
Doctor en Matemática Educativa**

**Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2019**

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

*Dedico este trabajo al profesor Gabriel Yáñez Canal
por su apoyo y paciencia.*

*Agradezco
a la Universidad Industrial de Santander
por las facilidades otorgadas en mi formación profesional.
a Ana Patricia García Amado, compañera y amiga.*

Tabla de Contenido

Introducción.....	15
Capítulo 1: Problematización y algunos antecedentes.....	18
1.1 Presentación del problema	18
1.2 Antecedentes	20
1.2.1 Trabajos que han usado la historia como componente didáctico	21
1.2.2. Algunas propuestas de enseñanza de la derivada	24
Capítulo 2: Marco teórico y metodológico de la propuesta.....	26
2.0. Fundamento teórico de la propuesta didáctica	26
2.1 Educación matemática realista	26
2.1.1 Matemización.....	28
2.1.2 Niveles de aprendizaje	30
2.1.3 Modelos	31
2.1.4 Reinención guiada	32
2.2. Marco metodológico	32
2.2.1 Tipo de investigación.....	32
2.2.2 Fases de diseño de la propuesta	33
2.2.2.1 Fase 1 - revisión histórica	33
Capítulo 3: Revisión histórica del aporte de fermat (comprendiendo las ideas originales) - fase 1	34
3.1. El problema del segmento	36
3.1.1 En verdad, ¿qué tan cerca estuvo fermat de la noción de derivada?	38

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

3.1.2 ¿Cuáles es el origen del methodus?	39
3.2 El problema de la tangente	48
3.2.1 ¿Cómo se traduce el razonamiento de fermat cuando se utiliza geometría analítica? ..	50
3.2.2 ¿Cuáles es el problema de máximos y mínimos que se resolvió?	53
Capítulo 4: Análisis fenomenológico parte i– fase 2	54
4.1 Fundamento teórico del análisis fenomenológico	54
4.2 Trabajos sobre la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la derivada	56
4.3 Fenómenos, contextos y situaciones del concepto de derivada	60
4.3.1 El concepto de derivada de fermat.....	60
Capítulo 5: Análisis fenomenológico parte ii: diseño de actividades – fase 3	61
5.1 Aspectos generales.....	61
5.1.2 La matematización del concepto de derivada en el proyecto	63
5.2 Descripción de las actividades	67
5.2.1 Unidad 1.....	67
5.2.2 Unidad 2.....	72
5.2.3 Unidad 3.....	74
5.2.4 Unidad 4.....	78
5.3 Mapa del diseño de las actividades.....	82
Capítulo 6: Reflexiones finales.....	83
6.1. La derivada de fermat	84
6.1.1 El álgebra de la derivada de fermat	85
6.2 Las funciones	89

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

6.2.1 ¿Cómo podrían los estudiantes encontrar polinomios que permitan modelar situaciones que usan funciones no polinómicas?.....	90
6.3 Hacia lo infinitesimal.....	98
6.3.2 ¿ dF tiene alguna interpretación geométrica?	99
6.3.3 Otro abordaje a las razones de cambio y la derivada de fermat	103
Referencias bibliográficas	108
Apéndices	112

Lista de Tablas

Tabla 1. Procedimiento de Fermat para el problema del segmento	36
Tabla 2. Procedimiento de Fermat en notación moderna	38
Tabla 3. Demostración de la Proposición VI.27 de los Elementos de Euclides	40
Tabla 4. Comparación entre las versiones del methodus de Fermat.	47
Tabla 5. Fenómenos, contextos y situaciones del aporte de Fermat.....	60
Tabla 6. Categorías de matematización.	66
Tabla 7. Análisis de matematización unidad 1.	69
Tabla 8. Análisis de matematización unidad 2.	72
Tabla 9. Análisis de matematización unidad 3.	76
Tabla 10. Análisis de matematización unidad 4.	81

Lista de Figuras

Figura 1. Niveles de matematización. (Bressan, Zolkower, y Gallego 2004)	31
Figura 2. Segmento b	36
Figura 3. Segmento b ii.....	36
Figura 4. Representación geométrica de Proposición VI.27 de los Elementos de Euclides	40
Figura 5. Particularización rectangular de Proposición VI.27 de los Elementos de Euclides	42
Figura 6. Particularización 2 de la Proposición VI.27 de los Elementos de Euclides	42
Figura 7. Segmento b iii.....	42
Figura 8. Representación geométrica de la syncrisis	44
Figura 9. Representación geométrica de la syncrisis 2	45
Figura 10. Representación geométrica de la adigualdad.	46
Figura 11. Tangente a una parábola en un punto para el razonamiento de Fermat.	48
Figura 12. Tangente a una parábola en un punto en términos actuales.	50
Figura 13. Parábola DPB.	51
Figura 14. Parábola DPB ii	53
Figura 15. La derivada de Fermat.	84
Figura 16. $f(x)$ con dos términos.....	92
Figura 17. $f(x)$ con tres términos.	92
Figura 18. $f(x)$ con treinta términos.	92
Figura 19. $f(x)$ con cinco términos	92
Figura 20. Función $\sin x$ con 20 términos en la serie.	98

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

Figura 21. Función $\cos x$ con 20 términos.	98
Figura 22. Función $\tan x$ con 20 términos.	98
Figura 23. Interpretación geométrica de dF	99
Figura 24. dF como la tangente del ángulo θ con e cada vez más pequeño.	100
Figura 25. La recta tangente de Fermat para el punto $(x, f(x))$ en un momento previo a $e=0$. Con S la subtangente.	101
Figura 26. La recta tangente de Fermat en un máximo.	102
Figura 27. Subtangente.	103
Figura 28. Distancia (kilómetros) vs tiempo (horas) para el ejemplo.	104
Figura 29. Razón de cambio $\Delta d/\Delta t$	105
Figura 30. Ilustración Campesino colombiano, tomado de: https://pixabay.com/es/campesinos-zona-cafetera-filandia-2517476/	114
Figura 31. Caja con tomates.	115
Figura 32. Caja desplegada.	115
Figura 33. Manejo de Excel.	118
Figura 34. Manejo de Excel 2.	118
Figura 35. Manejo de Excel 3.	119
Figura 36. Manejo de Excel 4.	121
Figura 37. Arco de fútbol.	125
Figura 38. Ilustración Campesino colombiano, tomado de: https://pixabay.com/es/campesinos-zona-cafetera-filandia-2517476/	128
Figura 39. Imagen del archivo1.ggb 2.	130
Figura 40. Imagen del archivo1.ggb 2.	131
Figura 41. Imagen del archivo1.ggb 3.	131

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

Figura 42. Manejo de WolframAlpha.....	137
Figura 43. Manejo de WolframAlpha 2.....	137
Figura 44. Manejo de WolframAlpha 3.....	138
Figura 45. Manejo de WolframAlpha 4.....	139
Figura 46. Manejo de archivo2.ggb.....	141
Figura 47. Manejo de archivo2.ggb 2.....	142
Figura 48. Manejo de archivo2.ggb 3.....	142
Figura 49. Manejo de archivo2.ggb 4.....	143
Figura 50. 'Formas' de la curva.....	144
Figura 51. Manejo de archivo2.ggb 5.....	145
Figura 52. Manejo de archivo2.ggb 6.....	146
Figura 53. Manejo de archivo2.ggb 7.....	146
Figura 54. Símbolos.....	150
Figura 55. Una curva y un punto de la curva.....	151
Figura 56. Interpretación geométrica de dF	153
Figura 57. Imagen del archivo3.ggb.....	155
Figura 58. Ejercicio gráfico 1.....	157
Figura 59. Ejercicio gráfico 2.....	158
Figura 60. Ejercicio gráfico 3.....	158
Figura 61. Ejercicio gráfico 4.....	159
Figura 62. Ejercicio gráfico 5.....	160
Figura 63. Ejercicio gráfico 6.....	161
Figura 64. Ejercicio gráfico 7.....	161
Figura 65. Carro.....	162

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

Figura 66. Interpretación de la velocidad.	165
Figura 67. Gráfica distancia vs tiempo t , detalle de la primera hora.	166
Figura 68. Gráfica distancia vs tiempo t	166
Figura 69. Posibles interpretaciones gráficas.	166
Figura 70. Velocímetro.	167
Figura 71. Velocidad media.	170
Figura 72. Radar.	171
Figura 73. Posible interpretación.	174

Lista de Apéndices

Apéndice A: Unidades y Manual docente.....	p.113
--	-------

RESUMEN

TÍTULO: EL CÁLCULO ALGEBRAICO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA*

AUTOR: EDINSON MATHEUS CAMACHO**

PALABRAS CLAVE: DERIVADA, FERMAT, ALTERNATIVA.

DESCRIPCIÓN:

En esta investigación se utilizaron las ideas de Fermat como base del diseño de un curso introductorio de cálculo, rescatando el papel de la matemática como actividad humana relacionada con la necesidad de dar solución a problemas reales. Para ello se planteó la revisión de la matemática de Fermat concerniente al concepto de derivada, seguido de todas las consideraciones didácticas necesarias, apoyadas en la Educación Matemática Realista como fundamento teórico para la enseñanza de la derivada.

Para el diseño de las unidades, se tomó el marco metodológico que propone la Educación Matemática Realista, que precisa realizar un análisis fenomenológico de la derivada, en este caso, utilizando la revisión histórica del concepto identificando contextos, situaciones y fenómenos, estipulando tres fases de investigación. La investigación reconstruye las ideas relevantes de las soluciones de Fermat a los problemas de máximos y mínimos y rectas tangentes a curvas en un punto, involucrando momentos importantes en el desarrollo del cálculo, pero en una versión apropiada para el aula, esto es, utilizando elementos modernos como ejes cartesianos, notaciones, procedimientos algebraicos e, incluso, recursos computacionales, relacionando así, las ventajas que ofrece la historia sin obviar los avances y resultados que han obtenido los investigadores en el problema.

*Trabajo de grado

** Facultad de ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Gabriel Yáñez Canal, Doctor en Matemática Educativa.

ABSTRACT

TITLE: THE ALGEBRAIC CALCULUS OF FERMAT: A
DIDACTIC OPTION *

AUTHOR: EDINSON MATHEUS CAMACHO**

KEYWORDS: DERIVATIVE, FERMAT, ALTERNATIVE.

DESCRIPTION:

In this research, Fermat's ideas were used as the basis for the design of an introductory course of calculus, rescuing the role of mathematics as a human activity related to the need to solve real problems. For this purpose, the revision of Fermat's mathematics regarding the concept of derivative, followed by all the necessary didactic considerations, supported by Realistic Mathematical Education as a theoretical basis for the teaching of the derivative.

For the design of the units, the methodological framework proposed by Realistic Mathematical Education was proposed, which requires a phenomenological analysis of the derivative, in this case, using the historical review of the concept identifying contexts, situations and phenomena, stipulating three phases of investigation. The research reconstructs the relevant ideas of Fermat's solutions to the problems of maximum and minimum and straight tangents to curves at one point, involving important moments in the development of the calculation, but in an appropriate version for the classroom, that is, using elements such as Cartesian axes, notations, algebraic procedures and even computational resources, thus relating the advantages offered by history without obviating the advances and results that researchers have obtained in the problem.

* Bachelor Thesis

** Facultad de ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Gabriel Yáñez Canal, Doctor en Matemática Educativa.

Introducción

Para mejorar la calidad de la educación matemática, debemos aceptar como premisa que el cálculo diferencial es un producto cultural, que ha ocupado a personajes ilustres de la actividad matemática y que, además, las invenciones e ideas que surgieron y se desarrollaron en la comunidad matemática tardaron bastante tiempo en convertirse y dar paso a los conceptos (función, límite, continuidad, derivada, integral...) que conocemos hoy en día. El cálculo es un conocimiento que tiene lugar dentro de las producciones científicas más importantes de la humanidad, y es por ello que la comprensión por parte de los estudiantes es fundamental para su formación académica.

El bajo rendimiento académico que los estudiantes obtienen en las universidades en la asignatura cálculo I es consecuencia de la baja comprensión de los conceptos fundamentales que componen el Cálculo Diferencial. Esta afirmación se sustenta en diferentes y numerosas investigaciones en Didáctica de la Matemática sobre el tema, entre ellas: Tall (1993), Hitt (1996, 2009), Dolores (2000), Eisenberg y Dreyfus (1990), Zimmermann (1990), Ubuz (2001), Ryan (1992), Gil y De Guzmán (1993). En el 2012, la OCDE analizó el rendimiento de 510 mil estudiantes de 15 años (9.073 colombianos), en matemáticas, lenguaje y ciencia en 65 países. Los resultados de estas pruebas fueron publicados en diciembre de 2013 y Colombia ocupó el puesto 62, diez lugares menos con respecto a las pruebas del 2009. En abril de 2014, fueron publicados los resultados del módulo de las pruebas Pisa que evaluaba la capacidad de los estudiantes para resolver de forma creativa problemas de la vida cotidiana, ocupando el país el último lugar. Es consecuencia, se hace necesario crear propuestas que intenten remediar la situación.

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

Esta investigación, concebida para crear una estrategia de enseñanza del cálculo, asume los estudiantes de colegio como su población de interés, con el ánimo de llenar el vacío de un curso de pre-cálculo que muchos docentes pregonan para llenar la brecha existente entre la educación media y la universidad. Se espera que este trabajo presente un aporte significativo a la problemática planteada, para ello la presentación de este trabajo se organizó en 6 capítulos que se describirán a continuación:

Capítulo 1: *Problematización y algunos antecedentes*. En este capítulo se plantea un objetivo de investigación después del abordaje de la problemática, que se justifica en una presentación general de los trabajos que proponen una alternativa de enseñanza y aprendizaje de la derivada.

Capítulo 2: *Marco teórico y metodológico de la propuesta*. Se decidió tomar como referencia teórica la teoría EMR. En este capítulo se describe y se definen los diferentes elementos de la teoría empleados en el trabajo

Capítulo 3: *Revisión histórica del aporte de Fermat (comprendiendo las ideas originales)* - fase 1. El capítulo revisa de manera detallada el aporte de Fermat desde la perspectiva de la solución de los problemas, profundizando en los métodos empleados para la solución comparándolos con los métodos actuales.

Capítulo 4: *Análisis fenomenológico parte i– fase 2*. La teoría recomienda el análisis fenomenológico como el marco metodológico del trabajo, en este capítulo se definen algunos conceptos involucrados en el análisis, se revisa la literatura sobre las dificultades y se analiza el aporte de Fermat en términos de la fenomenología planteada por Freudenthal.

Capítulo 5: *Análisis fenomenológico parte ii: diseño de actividades – fase 3*. En este capítulo se analiza la matematización de cada *unidad* (4) entendida como el compendio de las actividades y el manual docente. Todas conllevan el desarrollo de un objetivo fijo.

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

Capítulo 6: *Reflexiones Finales*. Las reflexiones finales plantean variantes o una posible continuación al diseño de las actividades.

Capítulo 1: Problematicación y algunos antecedentes

1.1 Presentación del problema

La problemática abordada en la investigación es la enseñanza y el aprendizaje de la derivada en los estudiantes que cursan los últimos años de bachillerato, que son los futuros estudiantes universitarios de ingeniería y ciencias que tienen como parte de su currículo de formación inicial la asignatura de cálculo diferencial o *Cálculo I*. El problema de la enseñanza y aprendizaje de la derivada se traduce en que los estudiantes no logran los conocimientos previos que se esperan de ellos al finalizar el bachillerato, y, por tanto, los malos rendimientos académicos en el primer curso de cálculo en las universidades no se hacen esperar.

Al respecto, a nivel nacional en el documento *Deserción Estudiantil en la Educación Superior Colombiana* MEN (2009) se propusieron los programas de apoyo académico como uno de los pilares para el éxito académico y retención de los estudiantes universitarios y se recomendó la introducción e implementación de estrategias que contribuyeran a disminuir el impacto de los cursos iniciales de matemáticas en la deserción temprana de los estudiantes.

La problemática mencionada se evidencia en los resultados de diferentes investigaciones que han encontrado dificultades específicas en la comprensión de la derivada por parte de los estudiantes. Tal vez una de las razones para esto sea el uso de los modelos de clase que conciben a la educación como una simple transmisión de conocimientos acumulados a lo largo de varias generaciones, lo que conlleva a que los docentes limiten su acción educativa a repetir los conceptos matemáticos tal como aparecen en los libros, reduciendo sus clases a una algoritmización de los conceptos del

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

cálculo que los estudiantes contemplan, memorizan y repiten en los exámenes (Moreno y Ríos, 2006).

La propuesta que planteamos, llamada *El cálculo algebraico de Fermat: una opción didáctica*, como aspecto general pretende cambiar, en alguna medida, las prácticas habituales sobre la enseñanza. En cuanto a su diseño e implementación tiene como propósito reconstruir las ideas relevantes de las soluciones de Fermat a los problemas de máximos y mínimos y rectas tangentes a curvas en un punto, que involucraron momentos importantes en el desarrollo del cálculo, pero en una versión apropiada para el aula, esto es, utilizando elementos modernos como ejes cartesianos, notaciones, procedimientos algebraicos e, incluso, recursos computacionales.

Cabe señalar que el presente trabajo aborda exclusivamente el problema de la enseñanza aprendizaje de la derivada, que resume Artigue (1995) afirmando que, aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de manera más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, hay dificultades para que los jóvenes logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento. Es por lo anterior que la propuesta relaciona las ventajas que ofrece la historia sin obviar los avances y resultados que han obtenido los investigadores, desde otros puntos de vista, en el problema, generando una ampliación en el saber didáctico en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

Por las razones expuestas, nosotros, responsables del quehacer docente, nos ocupamos en generar propuestas de innovación curricular con la intención de lograr un aprendizaje que no priorice la repetición. Uno de los caminos es asumir el desarrollo histórico del cálculo como soporte del diseño de las propuestas. La historia del cálculo muestra los

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

problemas, soluciones, ideas y estrategias que usaron los matemáticos, la comprensión de lo mencionado conlleva años de estudio, y si se quiere emparejar la comprensión con el cómo usarlo para enseñar, el esfuerzo y tiempo se duplica (Guzmán, 1992). En esta investigación el marco histórico referente son las ideas de Fermat. Es por lo anterior que nuestra investigación consideró como *base del aprendizaje*, no priorizar en los automatismos sino en la cimentación y confrontación de las reinversiones que se dan en el aula para que cada estudiante construya su propia matemática y la use en su realidad.

Por lo mencionado, la presente investigación aporta información a la comunidad educativa matemática en relación al siguiente objetivo:

Utilizar las ideas de Fermat como base del diseño de un curso introductorio de Cálculo

El objetivo de la investigación planteado, busca utilizar el aporte que hizo Fermat al cálculo diferencial como elemento didáctico en la enseñanza del concepto de derivada en los estudiantes. El estudio de la literatura en torno al papel de la historia de la matemática como recurso didáctico y las investigaciones sobre la comprensión de la derivada por parte de los estudiantes dan sustento al planteamiento del problema de la presente investigación.

1.2 Antecedentes

En este apartado se muestra la información más relevante sobre el problema de investigación. Considerando dos grupos de información: el primero concierne al uso de la Historia como herramienta didáctica del Cálculo y el segundo al problema del aprendizaje de la derivada.

1.2.1 Trabajos que han usado la historia como componente didáctico. En este acápite, se mencionan los trabajos en donde hubo diseño, es decir, propuestas cuya metodología incluía el diseño de actividades e implementación en clase y otras en donde el enfoque era el diseño material como libros de historia o con enfoque histórico. En Holanda es común encontrar trabajos en donde la prioridad es el diseño y elaboración de herramientas didácticas basados en algunas ideas de Freudenthal. Allí se creó la EMR (Educación Matemática Realista), cuya tendencia ha sido generar material para la educación básica. Ejemplo de este empeño es el trabajo de Gravemeijer y Doorman (1999) quienes elaboraron una secuencia de actividades de cálculo para estudiantes de bachillerato enmarcadas en la teoría EMR. Uno de los problemas que propusieron consistía en hallar la relación entre el área de la gráfica y la distancia total recorrida por un móvil en un periodo de tiempo, invirtiendo el tradicionalismo con actividades que en otras condiciones se plantean al final de las sesiones de “explicación”. La propuesta de Gravemeijer y Doorman contempló crear un ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes pudieran relacionar las ideas básicas y reinventar la teoría. Proponen que el desarrollo del cálculo empiece con la elección de la gráfica de la velocidad respecto al tiempo como el *modelo* para los problemas de velocidad y distancia, basados en los aportes del matemático Oresme, quien fue el primero en dibujar gráficas para visualizar el problema del movimiento (previo a la geometría analítica). En su trabajo, no reportaron ningún tipo de experiencia con los estudiantes.

Otro trabajo en donde también se diseñaron algunas actividades, fue el de Farmaki y Paschos (2007) quienes destacan la utilidad de integrar la ‘Historia de la génesis del conocimiento matemático’ para que los estudiantes puedan hacer una transición del conocimiento básico al complejo, haciendo un paralelo con el progreso histórico de la

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

matemática. Estos autores identifican en la historia un momento genético para el concepto de función, su representación gráfica y la integral; se refieren al método para estudiar el movimiento que fue utilizado en el siglo XIV por matemáticos de la Escuela de Merton, Oxford y Oresme en París. Después de diseñar algunas actividades, se aplicaron a 22 estudiantes. Los resultados de la experimentación se pueden resumir en que la mayoría de los estudiantes comprendió que cuando el movimiento es uniforme, la velocidad permanece constante, lo que significa que el movimiento se puede representar por un rectángulo en el que un lado representa la velocidad y el otro el intervalo de tiempo de la movimiento, además que las áreas de los rectángulos en la gráfica de velocidad (por encima o por debajo del eje de tiempo) son positivas y representan la distancia recorrida; algunos estudiantes (12 de 22) utilizaron transformaciones y ‘reconFiguraciones’ de las *Figuras* para resolver los problemas particulares. También entienden que, usando el mismo modelo matemático, pueden resolver una clase de problemas de movimiento equivalentes obtenidos por las transformaciones.

Farmaki y Paschos (2007) consideran el acercamiento didáctico en su trabajo como un aporte para la integración de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza usando elementos modernos como las manipulaciones algebraicas. En conjunto con las ideas del pasado se pueden usar "para infundir un cambio en las actividades de enseñanza con metas específicas que lleven a la esencia del conocimiento matemático" (p. 104).

En la categoría de libros, se pueden encontrar distintos tipos: Los libros de historia de la matemática que, aunque no cumplen con la premisa de sugerir un uso en el aula, son valiosos y de consulta permanente para las investigaciones epistemológicas, históricas, matemáticas y didácticas, tales como *A History of Mathematics* (Boyer, 1991), *Historia de las matemáticas* (Collette, 1986), *El Mundo de las Matemáticas* (Newman, 1980); otro tipo de

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

libro es donde el autor o autores sugieren un uso de la historia, tales como: *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula* (Boyer, 1993), *Applicable problems in the history of mathematics: Practical examples for the classroom* (Savisi, 2007) y, por último, los libros específicos en un área de la matemática con un enfoque histórico como *The Historical Development of the Calculus* (Edwards, 1979), un libro que muestra el panorama histórico del cálculo desde lo geométrico de la antigua Grecia hasta el análisis no estándar; de manera similar el libro *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630 – 1910* (Grattan-Guinness, 1980) muestra el recorrido del cálculo con énfasis en la mecánica de Newton, los límites y la teoría de conjuntos. El libro con enfoque histórico *Elementary Calculus an Infinitesimal Approach* (Keisler, 2000) es muestra del llamado Análisis no Standard, en donde se redefinen los infinitesimales en la Matemática y se pretende que se utilice como libro de texto en los cursos de cálculo en los primeros niveles universitarios. Keisler el autor del libro, es un exponente en Estados Unidos del uso del conjunto de los ‘números infinitesimales’. En términos generales, los contenidos del libro de cálculo están ordenados iniciando con la caracterización del conjunto de los números hiperreales ($\mathbb{R}^*$), los elementos de $\mathbb{R}^*$ son llamados infinitesimales que se definen como: Un número a ($a \in \mathbb{R}^*$) es infinitésimo si $|a| < r$ para todo número real r . En contraposición, un número es infinitamente grande es aquel $b \in \mathbb{R}^*$ tal que $|b| > r$ para todo número real r . El libro, como dicta la historia, está organizado de manera no usual, después de definir los infinitesimales, se empieza por la derivada y problemas de tangente, y a partir de allí se definen las funciones, luego hay un capítulo de funciones continuas, seguido de un capítulo de integración. Todos los problemas y ejercicios usuales se resuelven usando el conjunto caracterizado, hasta que se definen los límites.

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

Finalmente, exponente del último tipo *Calculus: An historical approach* (McGowen, 1979) es un libro de cálculo con enfoque histórico. El primer capítulo es un resumen de los conceptos de variable, función y límite acompañados por un segundo capítulo dedicado a la matemática de la antigua Grecia, para la sección dedicada a las derivadas se proponen problemas y una adaptación del método de Fermat para hallar tangentes. Posteriormente se proponen problemas de optimización.

1.2.2 Algunas propuestas de enseñanza de la derivada. La prioridad de una propuesta algebraica son los algoritmos, la interpretación física y geométrica quedan rezagadas a un segundo plano. En el trabajo de Lozano (2011) se propone, después de hacer una revisión histórica del concepto de derivada, partir de tres definiciones: velocidad, pendiente y cociente incremental, luego se define la derivada desde el cociente incremental; se menciona la interpretación geométrica usando las secantes y finalmente se dan las reglas de derivación para luego proponer problemas de aplicación.

Los libros de cálculo que ordenan sus contenidos generalmente de la siguiente forma: el Conjunto de los Números Reales, la definición de función como relación, la definición del límite en términos de ε y δ , una definición rigurosa de la continuidad por medio del límite. Entre estos libros, considerados propuestas ‘formales’, se destacan por su popularidad: *Cálculo diferencial e integral* (Purcell, Edwin y Varberg, 1993), *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (Stewart, 2008), *Cálculo Trascendentes tempranas* (Zill y Wright 2011) y *Cálculo de una variable* (Leithold, 1998).

Vrancken, Engler y Müller (2010) aplicaron una secuencia de actividades para la introducción del concepto de derivada considerando como hipótesis básica que el desarrollo de ideas variacionales puede propiciar una mejor comprensión de la ‘noción’ de derivada.

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

Para ello desarrollaron el contenido de modo que la derivada no fuera vista como un concepto matemático abstracto sino como un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica. Se tomaron en cuenta ideas previas de los estudiantes sobre velocidad, utilizando las representaciones gráficas. En el trabajo se aclara que la intención es centrar el aprendizaje en los contextos variacionales por lo que la interpretación geométrica pasó a un segundo plano. La secuencia se llevó al aula con alumnos argentinos que cursaban segundo curso de matemática en ingeniería. Se hicieron cuatro sesiones de siete horas en donde la primera parte se basaba en resumir la clase anterior. Se observaron 34 registros diferentes de representación de los estudiantes. Las mayores dificultades se dieron en el registro gráfico y algebraico. Las investigadoras manifiestan que, según lo observado en el desarrollo de las clases, la resolución de las actividades permitió desarrollar una idea correcta de la noción de derivada en un número considerable de alumnos.

A nivel local se implementa una propuesta del tipo ‘tecnológico’. Por lo general, las propuestas ‘tecnológicas’ se complementan con otros tipos de propuesta el uso de los computadores es fundamental en la experimentación en clase y en el diseño por parte de los profesores. Un curso de precálculo, con una duración de tres semanas, se implementa cada semestre en la Universidad Industrial de Santander. Fiallo y Parada (2014) presentan algunos resultados del diseño y experimentación del curso que se propuso como una alternativa para afrontar la problemática de deserción y repitencia en los cursos de Cálculo Diferencial. Es un ejemplo de la relación de una propuesta tecnológica con elementos variacionales, ya que el desarrollo del ‘pensamiento variacional’ es el objetivo de la propuesta. Para tal fin, el trabajo en el aula es orientado al trabajo activo de los estudiantes en un proceso de resolución

de problemas, en el que se involucra la tecnología, específicamente archivos de GeoGebra para cada uno de los 14 talleres que implican un total de 14 sesiones de 4 horas.

Capítulo 2: Marco teórico y metodológico de la propuesta

2.0. Fundamento teórico de la propuesta didáctica

Se toma como referente teórico la *Educación Matemática Realista (EMR)*. De la teoría se toman algunos elementos que consideramos necesarios para el análisis y comunicación dentro de la investigación, priorizando la revisión del aporte de Fermat a la derivada en la metodología que propone la teoría (*análisis fenomenológico*), por lo que el fundamento teórico de la propuesta didáctica se considera una adaptación de la EMR. En las siguientes secciones se abordarán aspectos generales de la EMR definiendo los elementos teóricos para este trabajo, posteriormente, en el marco metodológico se explicará la relación del fundamento teórico con el plan de trabajo.

2.1 Educación Matemática Realista

La Educación Matemática Realista (EMR) es una teoría de instrucción para la educación matemática, esto quiere decir que su objetivo es generar materiales para las aulas (Gravemeijer, 1994). La teoría se originó en Holanda y surgió por la necesidad de reformar la enseñanza de las matemáticas (*matemáticas modernas de 1970*). En 1970, Freudenthal y sus colaboradores organizaron un grupo para investigar sobre esas primeras ideas, IOWO por sus siglas en holandés *Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs* fue el predecesor del actual Instituto Freudenthal que se basa en la idea de Freudenthal (1977) de que las matemáticas si han de tener valor humano deben guardar relación con la realidad, mantenerse cercanas y ser relevantes para la sociedad.

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

En la EMR, los estudiantes deben aprender matemáticas desarrollando y aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria que tengan sentido para ellos. Es necesario explicar que el término *Realista* de la teoría ha creado confusión, Marja van den Heuvel-Panhuizen (2009), aclara:

Por una parte, el adjetivo *realista* concuerda definitivamente con la forma de ver la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas dentro de la EMR, pero por la otra, este término también puede dar lugar a confusión. En holandés, el verbo *zich realiseren* significa “imaginar”. En otras palabras, el término *realista* se refiere más a la intención de ofrecer a los estudiantes situaciones problema que ellos puedan imaginar, sin embargo, esto último no significa que la relación con la vida real no sea importante. Sólo implica que los contextos no están necesariamente restringidos a situaciones de la vida real. El mundo de fantasía de los cuentos de hadas, e incluso el mundo formal de las matemáticas, son contextos idóneos para problemas, siempre y cuando sean “reales” en la mente de los estudiantes (p. 2).

La EMR como teoría global se basa en las siguientes ideas de Freudenthal, según Bressan, Zolkower y Gallego (2004):

- Pensar en la matemática como una actividad humana (matematización), de modo tal que debe existir una matemática para todos.
- Aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles donde los contextos y los modelos poseen un papel relevante y que ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado *reinención* guiada en un ambiente de heterogeneidad cognitiva.
- Desde el punto de vista curricular, la *reinención* guiada de la matemática, en tanto actividad de matematización, requiere de la fenomenología didáctica como metodología de la investigación esto es, la búsqueda de contextos y situaciones

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente, siendo las dos fuentes principales de esta búsqueda la historia de la matemática y las invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes (p. 73).

A partir de lo anterior es importante definir cada uno de los conceptos que, usualmente, son denominados principios de la EMR:

2.1.1 Matemización. Para Freudenthal (1971) las matemáticas deben ser vistas como una actividad humana. Las matemáticas se relacionan con la actividad de resolver y buscar problemas. Freudenthal explica: “No hay matemáticas sin matemización” (Freudenthal, 1973, p. 134). Según su punto de vista, la mejor forma de aprender matemáticas es haciendo, y la matemización es la meta de la educación matemática:

Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible, el de matematizar las matemáticas (Freudenthal, 1968, p.7, citado por Marja van den Heuvel-Panhuizen, 2009).

Matematizar, entonces será la actividad de los estudiantes, que involucra según Freudenthal, recopilado por Bressan, Zolkower, y Gallego (2004):

- Reconocer características esenciales en situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos, formulaciones, simbolizaciones y sistemas axiomáticos.
- Descubrir características comunes, similitudes, analogías e isomorfismos.
- Ejemplificar ideas generales.
- Encarar situaciones problemáticas de manera paradigmática.
- La irrupción repentina de nuevos objetos mentales y operaciones

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

- Buscar atajos y abreviar estrategias y simbolizaciones iniciales con miras a esquematizarlas, algoritmizarlas, simbolizarlas y formalizarlas.
- Reflexionar acerca de la actividad matematizadora, considerando los fenómenos en cuestión desde diferentes perspectivas (Freudenthal, 1991, p. 30).

Se hizo énfasis en “Buscar atajos y abreviar estrategias y simbolizaciones iniciales con miras a esquematizarlas, algoritmizarlas, simbolizarlas y formalizarlas”

Se reconocen dos tipos de matematización: matematización horizontal y matematización vertical, introducidos por Treffers (1985) citado por Freudenthal (1991). La *matematización horizontal* se refiere al proceso de “traducir” situaciones problema desde el “mundo real” al matemático, contribuyendo así a comprender mejores relaciones entre el lenguaje ordinario y el lenguaje matemático. Por otro lado, la *matematización vertical* se refiere al proceso de establecer conexiones cada vez más complejas dentro de las matemáticas, con ciclos que llevan a argumentar y generalizar.

La actividad primordial de los alumnos es *matematizar*, y de manera análoga la de los profesores es *didactizar* (Freudenthal, 1991), que, según Bressan, Zolkower, y Gallego (2004) es entendida como una actividad organizadora que se da tanto a nivel horizontal como a nivel vertical. Horizontalmente, los docentes trabajan en torno a fenómenos de enseñanza-aprendizaje que surgen en el aula y verticalmente, reflexionan y generalizan a partir de estas situaciones hasta reinventar su propia “caja de herramientas didácticas” para facilitar la *matematización*. El papel que debe desempeñar el docente, es, por tanto, proveer de un ambiente de aprendizaje, el conjunto de problemas, actividades y contextos.

2.1.2 Niveles de aprendizaje. Los niveles de aprendizaje de Freudenthal están basados en las ideas de los Van Hiele, especialmente por el hecho de que matematizar en un nivel inferior puede dar paso a un nivel más alto. De lo que se rescata un inicio informal, para luego, como resultado de la reflexión, alcanzar otro nivel más formal. Los niveles resumidos de Freudenthal (1991) son: situacional, referencial, general y formal, y no poseen una jerarquía estrictamente ordenada.

En el *nivel situacional*, los estudiantes se enfocan en el conocimiento de la situación, y las estrategias que utilizan para dar respuesta a los problemas se apoyan en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia.

En el *nivel referencial* aparecen los *modelos* gráficos, las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular.

El *nivel general* se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior encontrando estrategias que superan la referencia al contexto.

El *nivel formal* comprende los conceptos, procedimientos y notaciones convencionales propias de la rama de la matemática con que se está trabajando.

Los estudiantes pasan por los diferentes niveles realizando dos tipos de matematización: *Horizontal* y *Vertical*. Una síntesis de este proceso se observa en la siguiente ilustración

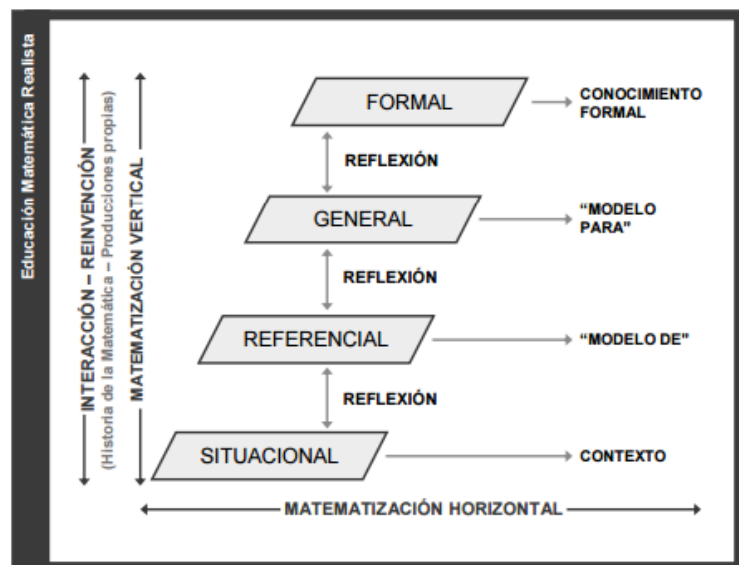


Figura 1. Niveles de matematización. (Bressan, Zolkower, y Gallego 2004)

La *matematización horizontal* se da solo en el nivel situacional cuando los estudiantes de manera intuitiva, a partir de un problema, visualizan, esquematizan, descubren relaciones y regularidades, reconocen analogías con otros problemas, etc. Los restantes niveles corresponden a la *matematización vertical*, caracterizada por la evolución y ‘ajuste’ de *modelos*.

2.1.3 Modelos. Dentro de la EMR, los *modelos* son representaciones de situaciones problema que reflejan aspectos fundamentales de conceptos y estructuras matemáticas relevantes para la situación problema, pero que pueden tener diversas manifestaciones (Marja van den Heuvel-Panhuizen, 2009). Materiales de clase, bosquejos, situaciones, esquemas, diagramas y símbolos son *modelos* dentro de la teoría (Treffers y Goffree, 1985). El objetivo de un *modelo* es apoyar el progreso en la *matematización vertical*. Los estudiantes, de esta manera, deben tener siempre la posibilidad de volver a un nivel anterior.

Los *modelos* son “inventados” por los estudiantes y nunca por los profesores y guardan relación con los *niveles* ya que según Gravemeijer (1994) su función es salvar la brecha entre

la comprensión informal conectada con la realidad “real” e imaginada, por una parte, y la comprensión de los sistemas formales por otra.

2.1.4 Reinención guiada. Es el papel que desempeña el docente en el aula, en donde se prioriza la iniciativa de los estudiantes para que los *modelos* y su evolución se logre del modo más natural posible. El proceso de conjugar los roles y responsabilidades del docente como guía del proceso de descubrimiento del alumno a través de una forma de interacción, es lo que Freudenthal denomina “reinención guiada” y la entiende como “un balance sutil entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar” (Freudenthal, 1991, p. 55).

Para orientar adecuadamente el proceso de aprendizaje de los estudiantes es importante la capacidad de anticipación, observación y reflexión del docente acerca de los aprendizajes a corto y largo plazo de sus alumnos. Esto le permitirá conocer las comprensiones y habilidades de los mismos, para organizar la actividad en el aula y dar lugar a esta reinención.

2.2. Marco metodológico

2.2.1 Tipo de investigación. La investigación es de corte fenomenológico, ya que el objetivo de una investigación fenomenológica, según Graveimejer y Terwuel (1999), es “encontrar situaciones problemáticas a partir de las cuales se puedan generalizar enfoques específicos, y encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización vertical” (p. 12).

La fenomenología toma como premisa que el comienzo de cualquier aprendizaje, surge cuando los estudiantes captan los conceptos a partir de actividades con sentido, es decir, situaciones que pueden comprender y abordar. Las actividades con sentido, problemas, a su vez, surgen de los fenómenos. A lo largo de la historia se han abstraído, organizado y estructurado grandes familias de fenómenos dando lugar a los conceptos.

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

La reflexión fenomenológica trata de establecer los diversos significados de los conceptos matemáticos mostrando cuáles son los sentidos en que estos conceptos se manejan cuando abordan distintas tareas y cuestiones, es decir, en el tratamiento de diversas familias de fenómenos (Rico, 2005).

2.2.2 Fases de diseño de la propuesta. Para cumplir el objetivo, se estipulan tres fases de investigación, en particular, la segunda fase corresponde al análisis fenomenológico que propone Freudenthal para la elaboración de las actividades.

2.2.2.1 Fase 1 - Revisión histórica. Se identifican los siguientes aspectos revisando el aporte de Fermat al cálculo: Los problemas iniciales del desarrollo de la derivada y los modelos de solución, con una discusión sobre el origen de esos modelos.

2.2.2.2 Fase 2 - Análisis fenomenológico. Para el diseño de las situaciones, fundamentadas en la EMR, será necesario realizar un análisis fenomenológico de la derivada que utiliza la revisión histórica (Fase 1), relacionando los aspectos identificados en la fase 1 con las, *situaciones y fenómenos* (elementos teóricos de la metodología).

El análisis fenomenológico resultante tiene como principal fuente para el posterior diseño de las actividades, el aporte de Fermat. Con base en las ideas y procedimientos de Fermat y contando con los elementos tecnológicos actuales se construyen un conjunto de actividades que, asumimos, permitirán plantear una correcta *reinención guiada* que conduzca a los estudiantes a reinventar *modelos*, que evolucionen hacia las estrategias usadas por Fermat en primera instancia y que después las rebasen con base en significados diferentes a los asumidos por él.

2.2.2.3 Fase 3 - Diseño de las actividades. Usando como base el análisis fenomenológico, se diseñaron actividades que van a contener: intencionalidades, análisis de la matematización, y una guía para la reinención (Manual para el docente).

Dentro del manual docente se señalan los modelos que se presume los estudiantes crearán y que son los ya previamente citados (Bressan, Zolkower, y Gallego, 2004):

- Modelos asociados a niveles de matematización horizontal que se caracterizan porque están relacionadas cercanamente con la situación-problema y por el uso de estrategias informales ligadas al contexto de la situación; principalmente los estudiantes buscan organizar los datos, generando esquematizaciones y buscando regularidades que pueden ser o no matemáticas.
- Modelos asociados a niveles de matematización vertical. Se caracterizan por tener vínculo menor o estar totalmente desprendidos del contexto.

Capítulo 3: Revisión histórica del aporte de Fermat (comprendiendo las ideas originales) - fase 1

En relación con la elección del enfoque, numerosos investigadores ofrecen una gran cantidad de argumentos a favor del uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas, y la discusión, según Jankvist (2009), se enfoca hacia la necesidad de desarrollar investigaciones empíricas que valoren la eficacia de su uso para consolidar a la historia como una herramienta que ayude al aprendizaje de conceptos o teorías. Estas opiniones son respaldadas por diferentes matemáticos y matemáticos educativos como Guzmán

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

(1992), Kline (1992), Lakatos (1978), y otros. Por ejemplo, sobre las bondades de aprender historia Guzmán (1992) opina que:

La historia nos proporciona una magnífica guía para enmarcar los diferentes temas, los problemas de los que han surgido los conceptos importantes de la materia, nos da luces para entender la razón que ha conducido al hombre para ocuparse de ellos con interés. Si conocemos la evolución de las ideas de las que pretendemos ocuparnos, sabremos perfectamente el lugar que ocupan en las distintas consecuencias, aplicaciones interesantes que de ellas han podido surgir, la situación reciente de las teorías que de ellas han derivado, etc. (p.16).

Además de la identificación, la historia combate en cierta medida el tradicionalismo, como lo muestra en una reflexión (Kline, 1992) en su último libro:

Las cuidadas y ordenadas exposiciones que se hacen en los cursos habituales no muestran en absoluto los conflictos del proceso creativo, las frustraciones, y el largo y arduo camino que los matemáticos han tenido que recorrer para llegar a construir una estructura importante. (...), el conocimiento de cómo han avanzado los matemáticos dando traspiés, a veces en la oscuridad más absoluta, hasta llegar a reunir las piezas individuales de sus resultados (p.16).

Finalmente, el teórico Lakatos (1978) hace una distinción entre la matemática como ciencia deductiva y el papel que desempeña la historia para los profesores:

Las Matemáticas se presentan como un conjunto siempre creciente de verdades eternas e inmutables, en el que no pueden entrar los contraejemplos, las refutaciones o la crítica. El tema de estudio se recubre de un aire autoritario (...)

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

Profesores de formación científica con vocación humanista, se interesan por la historia de la disciplina que imparten y ha empezado una institucionalización de los estudios de Historia de la Matemática. El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura que muestra la historia (p. 206).

3.1. El problema del segmento

Divida un segmento b en dos partes de tal manera que el producto de las longitudes de las dos partes sea máximo

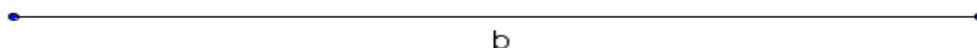


Figura 2. Segmento b

La solución del problema realizada por Fermat entre 1629 y 1636 presenta un algoritmo, bautizado como el *Methodus* (*Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum*) (TH.OF.1.133, TH.OF.III.121) aplicado al problema del segmento.

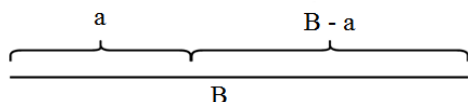


Figura 3. Segmento b ii

Tabla 1.

Procedimiento de Fermat para el problema del segmento

a	Es la incógnita
$a(B - a)$	Es la cantidad a maximizar
$aB - a^2$	La cantidad a maximizar desarrollada en potencias de a

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

$(a + e)[B - (a + e)]$	Sustituyendo a por $a + e$
$aB + Be - 2ae - a^2 - e^2$	Desarrollo en potencias de a y e
$aB + be - 2ae - a^2 - e^2 \sim aB - a^2$	Planteamiento de la <i>adigualdad</i> ($\sim$)
$Be - 2ae - e^2 \sim 0$	Eliminando los términos comunes en la <i>adigualdad</i>
$B - 2a - e \sim 0$	Dividiendo todos los términos por e o potencias mayores si es necesario
$B - 2a \sim 0$	Se suprimen los términos que aún contengan e
$B - 2a = 0$	Las cantidades restantes se hacen iguales
$a = \frac{B}{2}$	Se da respuesta al problema. Se halla la incógnita para que la cantidad sea máxima.

Nota: Adaptación a la simbología moderna algebraica de la solución que plantea Fermat.

La segunda columna muestra el *methodus*, para solucionar el problema se establece la incógnita y la cantidad a maximizar, luego se plantea una *adigualdad* sustituyendo a por $a + e$, se dividen los términos que contienen e , se suprimen los términos que aún contengan e para finalmente convertir la *adigualdad* en igualdad y dar respuesta al problema.

Como era costumbre en Fermat, no mostró inicialmente detalles del fundamento del *Methodus*. Por esta razón es común encontrar interpretaciones anacrónicas que asumen que Fermat estaba proponiendo los fundamentos mismos del análisis infinitesimal que luego fueron desarrollados por Barrow, Newton y Leibniz, entre otros.

Veamos la razón de este anacronismo.

3.1.1 En verdad, ¿qué tan cerca estuvo Fermat de la noción de derivada?

Repasando el *Methodus* y usando notación moderna se tendría lo que se ve en el siguiente cuadro, que es como algunos historiadores de la matemática han pretendido interpretarlo, entre ellos Eves (1969), Edwards (1979), Boyer (1949) y Collette (1985).

Tabla 2.

Procedimiento de Fermat en notación moderna

a	Es la variable
$f(a)$	Es la función que modela el problema
$f(a + e) \sim f(a)$	Se establece la <i>adigualdad</i>
$f(a + e) - f(a) \sim 0$	Se <i>adigualda</i> a cero
$\frac{f(a + e) - f(a)}{e} \sim 0$	Se divide por e
$\left(\frac{f(a + e) - f(a)}{e} \right)_{e=0} \sim 0$	Se eliminan los términos que todavía contienen e, o bien se haría $e=0$, para obtener la siguiente expresión
$\left(\frac{f(a + e) - f(a)}{e} \right)_{e=0} = 0$	Se resuelve la ecuación, transformando la <i>adigualdad</i> en igualdad
$\lim_{e \rightarrow 0} \frac{f(a + e) - f(a)}{e} = 0$	Finalmente, con la mirada de hoy, la expresión anterior equivale a tomar el límite cuando $e \rightarrow 0$. Es prácticamente hallar la derivada e igualar a cero

Nota: Adaptación a la simbología moderna funcional de la solución que plantea Fermat.

Sin embargo, estas equivalencias no son más que coincidencias felices en el sentido de que no reflejan para nada el pensamiento de Fermat, tal como mostraremos basados en las investigaciones de (González Urbaneja, 2008) plasmadas en su libro: *Fermat y los orígenes del cálculo diferencial*.

Fermat, estimulado por las críticas que recibió de algunos matemáticos, principalmente de Descartes, publicó en 1638 el *Ad eandem methodum* y posteriormente *Analityca eisdem methodi investigatio* donde justifica su procedimiento. En estos documentos Fermat explica los “principios” del *Methodus* de los que se puede concluir que la expresión que contiene el concepto de límite (última fila de la Tabla 2) como interpretación de la idea de Fermat es errónea. Para Fermat e no es un incremento infinitesimal ni una pequeña magnitud. El *Methodus* pertenece al dominio de lo algebraico, en la teoría de ecuaciones de Viète y en la asunción de la existencia y unicidad de los valores extremos dada por Pappus (González Urbaneja, 2008).

3.1.2 ¿Cuál es el origen del Methodus? Fermat conocía la geometría de la antigua Grecia y por tanto el trabajo de Euclides, de hecho, en el sexto libro de los elementos se hallaba la solución del problema del segmento. Veámoslo:

Proposición VI.27 de los *Elementos de Euclides*, citado por (González Urbaneja, 2008):

“De todos los paralelogramos aplicados a una misma recta y deficientes en Figuras paralelogramos semejantes y situadas de forma semejante al construido a partir de la mitad de la recta, el paralelogramo mayor es el que es aplicado a la mitad de la recta y es semejante al defecto” (p.134).

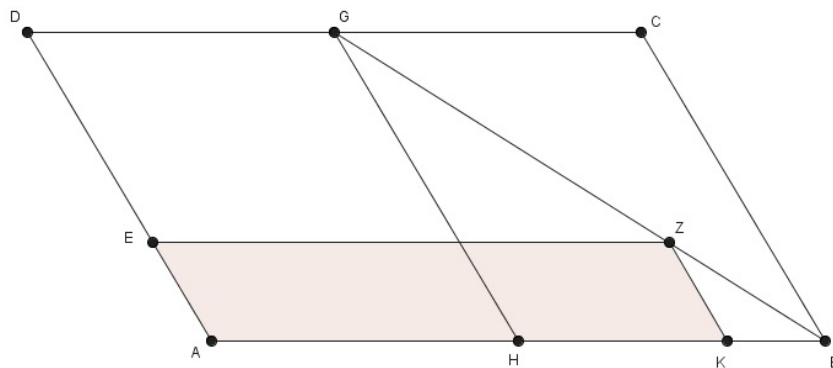


Figura 4. Representación geométrica de Proposición VI.27 de los Elementos de Euclides

Lo que quiere decir es que de todos los paralelogramos AKZE que se obtienen al mover el punto Z sobre GB, el paralelogramo de área mayor se obtiene tomando para el lado de la base el segmento AH, y debe ser la mitad de AB. Es decir, precisamente cuando Z es G.

La demostración de la proposición para cuando ABCD es rectángulo, se puede interpretar del libro de Euclides usando gráficos de apoyo, para un rápido entendimiento, como sigue:

Tabla 3.

Demostración de la Proposición VI.27 de los Elementos de Euclides



Las Figuras en gris son iguales por ser complementos respecto a la diagonal del paralelogramo de la mitad derecha de la recta



Añadiendo a ambas el paralelogramo situado en la parte inferior derecha de la diagonal, se obtiene igualdad de los dos paralelogramos indicados en gris.



Por otra parte, los dos paralelogramos destacados son iguales, puesto que ambos tienen como base la mitad de la recta.



Los dos últimos pasos traen como consecuencia la igualdad de los paralelogramos aquí señalados,



a quienes se le añade la zona común indicada y resulta entonces la igualdad del paralelogramo en consideración con el gnomon construido en el rectángulo de la derecha.

Pero el gnomon es parte del paralelogramo construido sobre la mitad de la recta y por tanto menor que él, lo que demuestra la proposición.

Nota: Demostración apoyada con algunas gráficas. Adaptado de (Jiménez, 2010)

Para el caso particular del rectángulo se tiene la solución del problema del segmento. Se puede reformular la proposición de Euclides, para afirmar que para cuando se mueve el punto Z en el segmento GB.

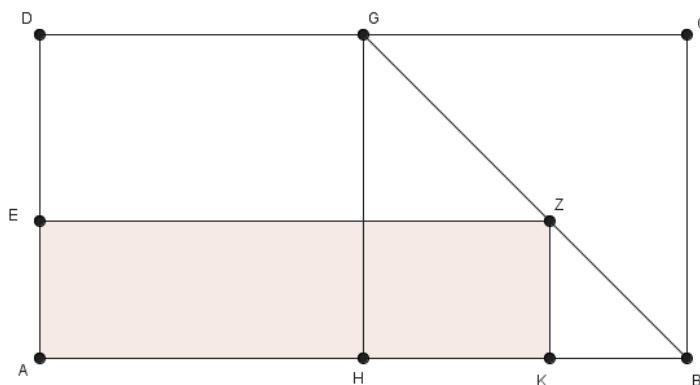


Figura 5. Particularización rectangular de Proposición VI.27 de los Elementos de Euclides

El área del rectángulo AKZE es máxima cuando Z coincide con G, por lo que K coincide con H, y el valor del producto máximo entre los dos segmentos, resultado de dividir en dos partes iguales el segmento AB.

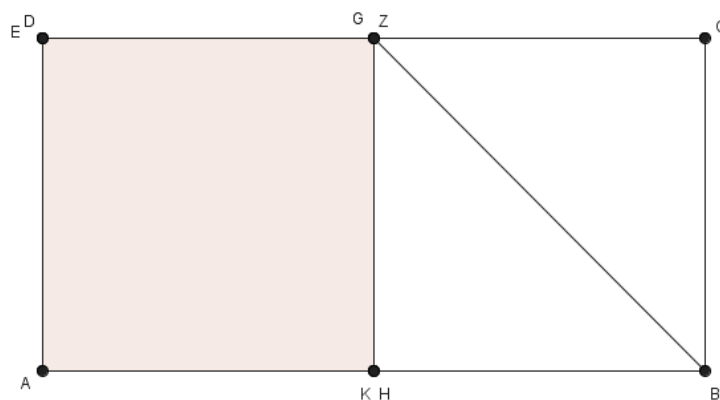


Figura 6. Particularización 2 de la Proposición VI.27 de los Elementos de Euclides

El razonamiento de la prueba de la proposición transcrito al lenguaje algebraico moderno como muestra (González Urbaneja, 2008), facilita la comprensión.

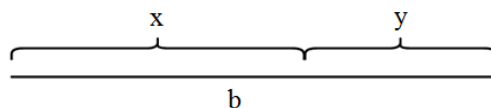


Figura 7. Segmento b iii

Se tiene que el segmento b es la suma de los segmentos en que se divide

$$b = x + y$$

Al elevar al cuadrado b , se obtiene, después de algunas manipulaciones algebraicas, que el área del cuadrado de lado b es mayor o igual que cuatro veces el área del rectángulo xy

$$b^2 = (x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy \geq 4xy$$

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

De allí se puede deducir que el área del rectángulo xy es menor o igual que un cuarto del área del cuadrado de lado b .

$$xy \leq \frac{b^2}{4}$$

Bastaría con agregar que para que el área del rectángulo xy sea igual a un cuarto del área del cuadrado de lado b , se debe tomar a $x = y = b/2$. Se tendría que

$$x^2 = \frac{b^2}{4}$$

O en otras palabras, se afirmaría que el rectángulo de mayor área que se puede formar al dividir un segmento b en dos partes, debe ser el cuadrado que tiene como lado $b/2$.

En la antigua Grecia un grupo de problemas que tenían “condiciones límites” se conocían como *Diorismos*, el razonamiento realizado por Pappus en la proposición 61 del libro VII indicaba que este tipo de problemas en el caso de los “extremos” eran *únicos y singulares*. Los *Diorismos* pueden entenderse como condiciones que se agregan al problema para resolverlo en términos generales (González Urbaneja, 2008). Los problemas de máximos y mínimos estarían en esa categoría.

Fermat aplica el método de la *Syncrisis* de Viète en los *Diorismos*, en este caso, para los valores extremos. El método de Viète, consiste en igualar ecuaciones semejantes para obtener expresiones de los coeficientes de una ecuación en términos de sus raíces. Se podría afirmar que el *Methodus* “original” aplicado al problema del segmento se vería de la siguiente manera:

Se pretende buscar el valor de Z donde el producto de $a(b - a)$ es máximo.

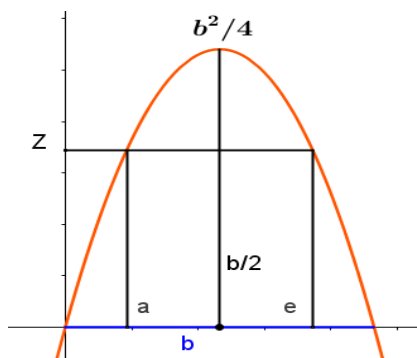


Figura 8. Representación geométrica de la syncrisis

En la gráfica anterior Z es un valor menor que $b^2/4$ (Valor máximo conocido), Fermat observa que para ese valor Z existen a y e tal que

$$a(b - a) = e(b - e) = Z$$

$$ab - a^2 = eb - e^2$$

Al trasladar al mismo lado los términos cuadráticos y luego factorizar $(a - e)$, y dado que a y e son valores distintos, se tiene:

$$ab - eb = a^2 - e^2$$

$$\frac{b(a-e)}{(a-e)} = \frac{(a-e)(a+e)}{(a-e)}$$

$$b = a + e$$

Se observa que si se toma un valor de Z cada vez más grande, la diferencia de a y e se hace menor. Cuando $Z = b^2/4$, $a - e = 0$, por lo que

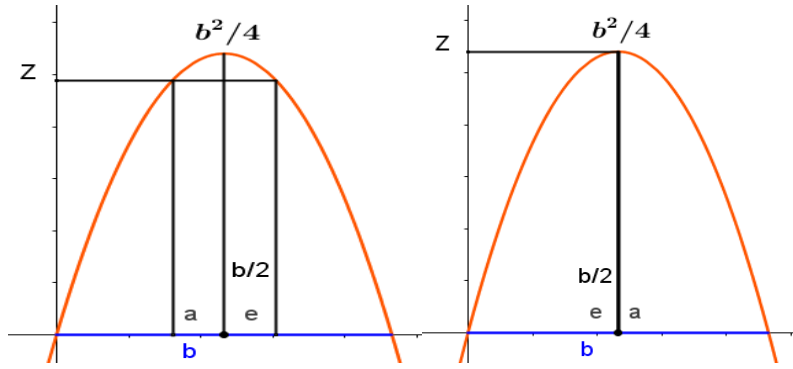


Figura 9. Representación geométrica de la syncrisis 2

$$b = 2a$$

Y el valor de la incógnita a para la cantidad que se quería maximizar es

$$a = \frac{b}{2}$$

Salta a la vista la diferencia con el *Methodus* publicado. Como diferencia notoria, se encuentra que no se plantea la *adigualdad*, y tampoco se divide por el valor e .

3.1.2.4 ¿Por qué no se publicó el *Methodus* de esta manera?

Fermat modificó el razonamiento anterior, usando artilugios algebraicos para facilitar los cálculos, ya que no siempre sería fácil dividir la ecuación (*) por $a - e$.

En 1639 en la carta XXXVIII bis (TH.OF.II.179) citada por Gonzalez Urbaneja (2008) como ejemplo de las dificultades que pueden surgir de la *Syncrisis*, Fermat muestra la siguiente ecuación:

$$a^3 - 9a^2 + 13a = \sqrt{288} - 15$$

De la que se sabía que $3 - \sqrt{2}$ es una raíz.

Si se aplica la *syncrisis* se tiene que

$$a^3 - 9a^2 + 13a = (3 - \sqrt{2})^3 - 9(3 - \sqrt{2})^2 + 13(3 - \sqrt{2})$$

Para luego dividir por $a - (3 - \sqrt{2})$ lo que resulta un cálculo complicado.

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

Fermat soluciona los inconvenientes de cálculo de la *Syncrisis*, llamando a las raíces a y $a + e$ en lugar de a y e , de tal manera que ahora se debe realizar una división por e en vez de $a - e$. El asunto es que ya no puede asumir que las dos expresiones son iguales, sino “casi iguales” o *adiguales*. La igualdad se alcanza, igual que antes, cuando se obtiene el valor único y singular del que hablaba Pappus.

Se tenía que para realizar la *Syncrisis* se establecía

$$ab - a^2 = eb - e^2 \quad (1)$$

Al tomar a como $a + e$, como se muestra en la siguiente *Figura*

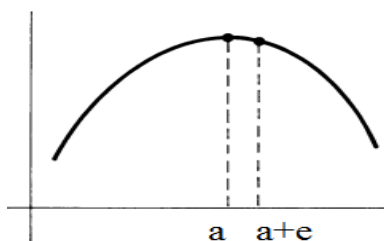


Figura 10. Representación geométrica de la *adigualdad*.

Se obtiene que la ecuación (1) se convierte en

$$ab - a^2 \sim (a + e)b - (a + e)^2$$

Fermat considera intencionalmente que la ecuación tiene dos raíces diferentes, si a es la incógnita, la *adigualdad* ($\sim$) sustituye lo que en la *Syncrisis* sería la igualación de las expresiones $ab - a^2$ y $eb - e^2$ ya que desde este nuevo razonamiento no son iguales.

En “*Ad eandem methodum*” (TH.OF.III.126), Fermat escribe, traducido por (González Urbaneja, 2008):

“...Yo comparo (las dos expresiones), como si fueran iguales, aunque de hecho no lo sean. Es esta comparación lo que llamo “Adigualdad” para hablar como Diofanto, pues se puede traducir así la palabra griega $\pi\alpha\rho\tau\sigma\sigma\eta\zeta$ en la que se basa” (p.140).

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

En el siguiente cuadro se puede ver el problema del segmento solucionado con el *Methodus* en sus dos versiones

Tabla 4.

Comparación entre las versiones del methodus de Fermat.

El <i>Methodus</i> original	El <i>Methodus</i> mejorado
Planteamiento de la ecuación en términos de las raíces a y e	Planteamiento de la <i>adigualdad</i> para a y $a+e$
$ab - a^2 = eb - e^2$ $ab - eb = a^2 - e^2$	$ab - a^2 \sim (a+e)b - (a+e)^2$ $ab - a^2 \sim ab + eb - a^2 - 2ae - e^2$
Manipulaciones algebraicas y división por $a - e$	Manipulaciones algebraicas y división por e
$b(a - e) - (a - e)(a + e) = 0$ $\frac{b(a - e)}{(a - e)} - \frac{(a - e)(a + e)}{(a - e)} = 0$	$e^2 - eb + 2ae \sim 0$ $\frac{e^2 - eb + 2ae}{e} \sim 0$ $e - b + 2a \sim 0$
Finaliza el proceso de la <i>syncrisis</i> . Se obtiene una expresión que relaciona al segmento con las raíces de la expresión inicial	Después de eliminar los términos que aún contengan e . Finaliza el proceso de la “ <i>syncrisis</i> mejorada” Se obtiene una expresión que relaciona al segmento con la incógnita de la expresión inicial
	$-b + 2a \sim 0$
$b = a + e$	
Para dar respuesta al problema se hace $a = e$	La <i>adigualdad</i> pasa a ser una igualdad cuando $a = a + e$. y se encuentra el valor de la incógnita.
$b = 2a$ $a = \frac{b}{2}$	$-b + 2a = 0$ $a = \frac{b}{2}$

Nota: Paralelo entre las dos estrategias de solución del problema del segmento.

Fermat, además, resuelve el problema de hallar la tangente a una curva como un problema de optimización como aplicación directa de su *methodus*. Veamos cómo lo hace.

3.2 El problema de la tangente

Fermat, como una aplicación de su método de máximos y mínimos, determinó en el *Methodus* la tangente a una parábola. La tangente sólo será conocida si se puede encontrar la intersección de la recta tangente con el ‘eje de la parábola’. Para determinar este punto basta con encontrar la proyección sobre el eje x , del segmento de tangente comprendido entre el punto (en la curva) de tangencia y el punto de intersección; esta proyección es llamada la subtangente.

Ilustramos el problema utilizando el razonamiento geométrico de Fermat realizado con base en la definición que como lugar geométrico dio Apolonio de la parábola. Considérese la parábola DB de eje DC , como se ilustra en la *Figura 11*. Fermat aplica el método de máximos y mínimos para hallar la tangente a la parábola en el punto B . Suponiendo que el problema ya está resuelto, y sea BE la recta tangente. Si se toma un punto O sobre BE y se traza el segmento IO paralelo a la ordenada BC , de tal manera que P sea el punto de intersección de este segmento con la parábola.

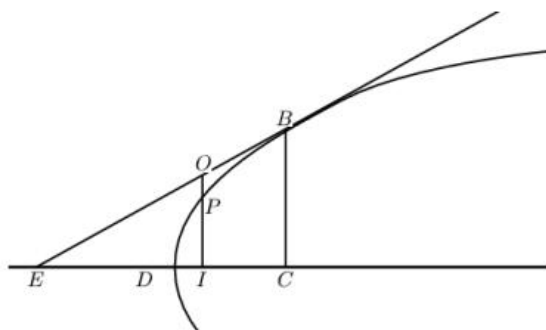


Figura 11. Tangente a una parábola en un punto para el razonamiento de Fermat.

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

El procedimiento seguido por Fermat citado por Smith (1959) es el siguiente: De la desigualdad $IO > IP$ y de la propiedad característica de la parábola (Apolonio) expresada mediante la proporción siguiente:

$$DC : DI = CB^2 : IP^2$$

Se obtiene

$$DC : DI > CB^2 : IO^2.$$

De la semejanza de los triángulos EIO y ECB se tiene:

$$CB^2 : IO^2 = EC^2 : EI^2$$

Por lo tanto,

$$DC : DI > EC^2 : EI^2$$

Se van a usar letras minúsculas para las cantidades como hizo Fermat. Haciendo $EC = a$ (a es la incógnita), $DC = d$ (d es conocida, pues el punto B está dado) e $IC = e$, se tiene

$$d : (d - e) > a^2 : (a - e)^2.$$

De donde se obtiene

$$a^2d + e^2d - 2aed > a^2d - a^2e.$$

Ahora, Fermat sustituye la desigualdad por la adigualdad, que se justifica cuando e se hace menor, obteniendo

$$a^2d + e^2d - 2aed \sim a^2d - a^2e \quad (1)$$

Y, continúa con las etapas 5 - 8 del *método*, de la manera siguiente:

Se eliminan los términos comunes de (1), obteniendo

$$e^2d - 2aed \sim -a^2e.$$

Se dividen todos los términos por e, obteniendo

$$ed - 2ad \sim -a^2 \quad (2)$$

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

En la adigualdad (2) se ignora el término ed , que es el único que tiene e , obteniendo

$$-2ad \sim -a^2. \quad (3)$$

Se reemplaza la adigualdad (3) por la igualdad

$$-2ad = -a^2. \quad (4)$$

Finalmente, se resuelve la ecuación (4) para a , obteniendo $a = 2d$, es decir, $EC = 2DC$ encontrando la subtangente.

3.2.1 ¿Cómo se traduce el razonamiento de Fermat cuando se utiliza geometría analítica? Para responder a la pregunta, primero vamos a observar otra interpretación anacrónica que no inhibe lo interesante ni lo útil que podría ser para los fines prácticos de la educación matemática.

3.2.1.1 “Generalizando” el razonamiento de Fermat

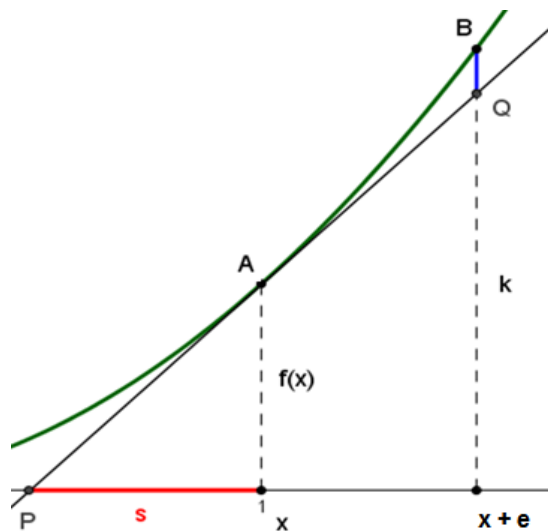


Figura 12. Tangente a una parábola en un punto en términos actuales.

El tratamiento que se encuentra en Edwards (1979) usando notación moderna, señala que dada una curva, si se quiere encontrar la recta tangente en un punto A, basta con encontrar la magnitud de la subtangente s . Para el razonamiento realizado para la parábola, se puede afirmar que:

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

Por triángulos semejantes

$$\frac{s+e}{s} = \frac{k}{f(x)}$$

Dado que $k \sim (<) f(x+e)$ se tiene que al reemplazar k por $f(x+e)$ se puede establecer la *adigualdad*:

$$\frac{s+e}{s} < \frac{f(x+e)}{f(x)}$$

Despejando s .

$$s \sim (>) \frac{ef(x)}{f(x+e) - f(x)}$$

Luego al dividir por e

$$s \sim (>) \frac{\frac{ef(x)}{e}}{\frac{f(x+e) - f(x)}{e}}$$

Se tendría que:

$$s = \frac{f(x)}{\frac{f(x+e) - f(x)}{e}}$$

La subtangente es igual al cociente de la función evaluada en un punto x , sobre $\frac{f(x+e) - f(x)}{e}$ lo que equivaldría a la derivada actual evaluada en ese punto. Retomando la ‘traducción’ para la parábola DPB, como muestra (González Urbaneja, 2008)

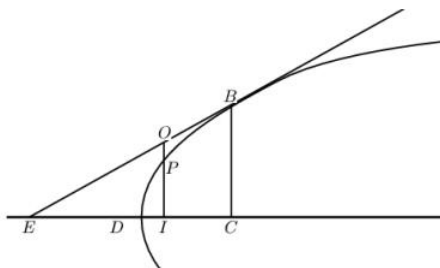


Figura 13. Parábola DPB.

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

Si se toma a D como origen y $x = ID$ como abscisa, $y = IP$ como ordenada, se tendría por la definición de parábola de Apolonio que:

$$\frac{PI^2}{ID} = \frac{BC^2}{CD} = \frac{y^2}{x} = k$$

Por lo que se deduce que k equivale a $2a$ donde a es el parámetro de la definición actual de parábola que equivale a la distancia del foco al vértice.

Determinada la parábola de la forma $y^2 = kx$, asumida como la función

$$f(x) = \sqrt{kx} = (kx)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para hallar la subtangente se calcula el cociente}$$

$$s = \frac{f(x)}{\frac{f(x+e)-f(x)}{e}} \quad (**)$$

En donde $\frac{f(x+e)-f(x)}{e}$ se calcularía siguiendo el *methodus*:

$$(k(x+e))^{\frac{1}{2}} \sim (kx)^{\frac{1}{2}} = (kx + ke)^{\frac{1}{2}} \sim (kx)^{\frac{1}{2}}$$

$$(k(x+e))^{\frac{1}{2}} - (kx)^{\frac{1}{2}} \sim 0 \quad (1)$$

Dado que $\binom{n}{t} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-t+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots t}$ se tiene que

$$(kx + ke)^{\frac{1}{2}} = (kx)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot (kx)^{-\frac{1}{2}} \cdot (ke) - \frac{3}{8} (kx)^{-\frac{1}{2}} \cdot (ke)^2 + \dots$$

Por lo que continuando el proceso en (1)

$$(kx)^{\frac{1}{2}} - (kx)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot (kx)^{-\frac{1}{2}} \cdot (ke) - \frac{3}{8} (kx)^{-\frac{1}{2}} \cdot (ke)^2 + \dots \sim 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot (kx)^{-\frac{1}{2}} \cdot (ke) - \frac{3}{8} (kx)^{-\frac{1}{2}} \cdot (ke)^2 + \dots \sim 0 \quad (2)$$

Se puede apreciar que la expresión (2) es divisible por e ya que todos los términos del desarrollo del binomio, exceptuando el primero son múltiplos de e .

Es por lo anterior, que siguiendo con el *Methodus* se divide por e y se obtiene:

$$\frac{1}{2} \cdot (kx)^{-\frac{1}{2}} \cdot (k) - \frac{3}{8} (kx)^{-\frac{1}{2}} \cdot (k)^2 e + \dots \sim 0$$

Por lo que, salvo el primero, todos los términos se eliminan cuando $e = 0$, obteniéndose así la derivada actual para la función $f(x) = \sqrt{kx} = (kx)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (kx)^{-\frac{1}{2}} \cdot (k)$$

3.2.2 ¿Cuál es el problema de máximos y mínimos que se resolvió? Descartes criticó el *Methodus*, valiéndose del argumento de que Fermat no había resuelto ningún problema de máximos o mínimos cuando halló la tangente a la parábola y, por tanto, el método empleado no era general (Suescún, Alarcón, & de la Torre, 2005). La respuesta de Fermat está contenida en la memoria *Méthode de maximis et minimis expliquée et envoyée par M. Fermat a M. Descartes*, conocida como *Méthode expliquée*. En este texto, Fermat hacía énfasis en la efectividad del *methodus* como procedimiento para dar respuesta al problema de la tangente, reafirmando que era una aplicación de la teoría de máximos y mínimos.

Si analizamos de nuevo el problema

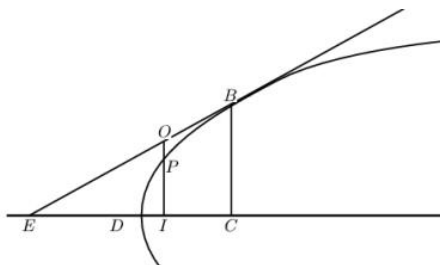


Figura 14. Parábola DPB ii

la parábola, bajo la definición de Apolonio satisface la proporción:

$$\frac{BC^2}{CD} = \frac{PI^2}{DI}$$

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

$\frac{CD}{DI} > \frac{EC^2}{EI^2}$ La cantidad a minimizar es, en este caso, la razón: $\frac{BC^2}{CD}$ ya que si se pone un punto O sobre la recta tangente, y se tiene que la razón $\frac{IO^2}{DI}$ es mayor que $\frac{BC^2}{CD}$, por la definición de parábola, O no pertenecería a la tangente. Luego para aplicar el *Methodus* se establece que la incógnita es la subtangente CE y la *adigualdad* se establece en la desigualdad que se construye aprovechando los triángulos semejantes para ‘redefinir’ la parábola en términos de la incógnita EC ($\frac{BC^2}{IO^2} = \frac{EC^2}{EI^2}$), asumiendo que la distancia $IP < IO$

Capítulo 4: Análisis Fenomenológico parte i– fase 2

La ruta para el desarrollo del análisis fenomenológico contiene varios elementos: En primera instancia, la sección 4.1 aborda algunos apartes teóricos de la metodología, la sección 4.2 revisa en la literatura algunas dificultades en el aprendizaje de la derivada por parte de los estudiantes; seguidamente, un análisis a fondo del aporte de Fermat al cálculo, que por lo extenso correspondió al capítulo anterior (ver Capítulo 3); posteriormente, identificamos los *fenómenos, contextos y situaciones* de nuestro referente matemático. En el Capítulo 5 el análisis fenomenológico termina con el comentario para cada situación creada para el diseño, y muestra un esquema del camino seguido en la propuesta desde el enfoque del análisis fenomenológico que planteamos. A continuación, desarrollamos estas instancias de nuestra investigación.

4.1 Fundamento teórico del análisis fenomenológico

El análisis fenomenológico, según Freudenthal (1983), es el objeto central de una investigación fenomenológica en la que es primordial buscar e investigar *fenómenos* que pueden ser organizadas por *conceptos matemáticos*, por ejemplo, la derivada, a través de un proceso de *matematización*.

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

Freudenthal (1973) distingue entre varios tipos de fenomenologías: fenomenología pura, fenomenología didáctica, fenomenología genética y fenomenología histórica. No obstante, para un trabajo didáctico en el marco de la EMR se recomienda realizar un análisis fenomenológico con respecto a lo didáctico porque, a diferencia de los otros tipos de fenomenologías y como característica fundamental, trata los fenómenos que se proponen e intervienen en el ámbito escolar. Para aclarar las diferencias entre los tipos de fenomenología (Puig, 1997) explica que

En el primer caso se trata de los fenómenos que están organizados en las matemáticas tomadas en su estado en el momento actual y considerando su uso actual. En el caso didáctico intervienen los fenómenos presentes en el mundo de los alumnos y los que se proponen en las secuencias de enseñanza. En el caso genético, los fenómenos se consideran con respecto al desarrollo cognitivo de los aprendices. En el caso histórico se presta especial atención a los fenómenos para cuya organización se creó el concepto en cuestión y cómo se extendió a otros fenómenos (p.65).

Para el caso concreto de nuestra investigación, en el presente análisis fenomenológico del concepto de derivada se mezclan elementos de lo didáctico y lo histórico, la secuencia de enseñanza resultante responde a la revisión del aporte de Fermat. En esencia, el análisis fenomenológico en esta investigación responde a dos preguntas: ¿Cómo podría utilizar la derivada un estudiante de último año de bachillerato? y ¿En qué *situaciones* está presente la derivada? La primera pregunta se responde encontrando los *contextos*, y para responder la segunda se identifican los diferentes tipos de *situaciones* que junto a los *fenómenos* son la base del diseño de las actividades.

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

Un *contexto* es un evento, una proposición o situación derivada de la realidad, la cual es significativa para los alumnos o la pueden imaginar y conduce a usar métodos matemáticos desde su propia experiencia. Provee significado concreto y apoyo para las relaciones y operaciones relevantes de la matemática. Las *situaciones* podrían ser tomadas desde experiencias cotidianas. Además de los contextos derivados de la vida y experiencia diaria, “los *contextos* pueden encontrarse en la matemática misma – por ejemplo, el mundo de problemas con números y las relaciones numéricas, tales como el contexto de los números primos” (van den Heuvel- Panhuizen, 1994, p. 243).

4.2 Trabajos sobre la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la derivada

A continuación, se reportan las dificultades presentadas por los estudiantes en el aprendizaje de la derivada presenten en la literatura. Como ya se mencionó, las dificultades de la enseñanza y el aprendizaje de la derivada están ligadas a dificultades de otros conceptos del cálculo.

Una dificultad compartida con el concepto de función es el problema que tienen los estudiantes, y algunos profesores de enseñanza media, para desarrollar un entendimiento profundo del concepto de función porque “se restringen a una manipulación algebraica relativa al concepto, que produce una limitación en su comprensión” (Hitt, 1996, p.31).

El mismo autor, en un trabajo posterior, señala que “uno de los problemas de la comprensión de la derivada es la falta de un acercamiento visual para el entendimiento de los conceptos del cálculo” (Hitt, 2009, p.12). Desde ese punto de vista, Eisenberg y Dreyfus (1990) mencionan que visualizar situaciones matemáticas no es una tarea simple porque

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

“pensar visualmente demanda procesos cognitivos más profundos que pensar en forma algorítmica”. Con respecto a lo anterior Zimmermann (1990) recomienda que:

Conceptualmente, el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso del cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema. Esto es especialmente verdad si el curso tiene la intención de enfatizar un entendimiento conceptual, el cual es ampliamente reconocido como faltante en la mayoría de los cursos de cálculo como es actualmente enseñado (p. 136).

Ubuz (2001) investigó cómo el uso de computadores podría influir en el aprendizaje del cálculo de estudiantes de ingeniería de primer año. Trabajó en cuatro grupos, con 147 estudiantes matriculados en los cursos de cálculo en cuatro universidades diferentes en Inglaterra. Entre sus resultados con el problema de la tangente, el investigador identificó las siguientes concepciones erróneas:

- *La derivada en un punto da la función en un punto.*
- *La ecuación de la tangente es la función derivada.*
- *La derivada en un punto es la ecuación de la tangente.*
- *La derivada en un punto es el valor de la ecuación de la tangente en ese punto.*

Las concepciones mencionadas coinciden con el trabajo previo de Dolores (2000), quien añade que los estudiantes tienen dificultades para ver a la derivada como una función, pues muchas veces la ven como un número, o como la pendiente de la recta tangente en un punto fijo, sin considerar que es una función que, para cada punto de su dominio, da la pendiente de la recta tangente (en cada uno de dichos puntos), estableciendo así otra función.

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

En cuanto a la simbología, Tall (1993) indica que "la notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ resulta ser casi indispensable en el cálculo" (p.19). Sin embargo, causa serios problemas conceptuales en los estudiantes, ya que no saben si representa una fracción o un símbolo individual" (Tall, 1993, p.19). Tall (1993) agrega que otra dificultad, en relación con la notación, se da en la noción de la regla de la cadena, para los estudiantes existe el dilema de si du puede ser cancelado en la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

Con respecto a las 'reglas de derivación' Ryan (1992) ha descrito al problema como "la prisa por la regla", donde el significado es ignorado u olvidado, y los estudiantes operan a un nivel puramente mecánico, manipulando símbolos. Al respecto Barnes (1995) sugiere que "a los estudiantes no se les debe enseñar reglas para la diferenciación hasta que hayan desarrollado una buena comprensión de la derivada, y encuentren familiar la relación entre una función y su derivada" (p.4).

Otro problema con la comprensión de la derivada es el significado geométrico de la derivada (como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto), el cual descansa sobre el concepto de recta tangente. En los primeros acercamientos a la geometría, la recta tangente se considera como la recta que 'toca' a la circunferencia en un solo punto; en este caso la recta no vuelve a tocarla en otro punto, característica que los estudiantes generalizan a otras curvas. Para enseñar el significado geométrico de la derivada es usual definir a la recta tangente tomando una sucesión de rectas secantes y hacer tender a cero la distancia entre las abscisas, así la recta tangente será el límite de dicha sucesión de secantes. Este proceso es difícil de comprender por los estudiantes. En este sentido, Dolores (2000) encontró que, de 112 estudiantes de bachillerato, que vieron el curso de cálculo

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

diferencial en el estado de Guerrero en México, la mitad creían que la expresión de la derivada como límite de un cociente de diferencias, daba el valor de la derivada en dos puntos pues continuaban con la idea de ‘recta secante’. También encontró que, aunque los estudiantes observaran la gráfica de una función y su recta tangente en un punto, al pedirles el valor de la derivada en un punto, más de la mitad de los estudiantes confundió el valor de la derivada en el punto con el valor de la ordenada.

Como un posible origen de algunas dificultades enlazadas a la enseñanza, se ha cuestionado la importancia que se le ha dado a la forma cómo se organiza usualmente el contenido matemático. Esta estructuración del contenido ligada al modelo tradicional no contribuye sustancialmente a la comprensión de los conceptos matemáticos en los estudiantes y podría ser una de las causas. Es por ello que autores como Gil y De Guzmán (1993), sugieren enfoques menos formales en la enseñanza para priorizar el desarrollo de procesos del pensamiento propios de la matemática por encima de la mera transferencia de contenidos.

Teniendo en cuenta las dificultades mencionadas, los investigadores han elaborado propuestas para la enseñanza de la derivada desde diferentes enfoques y tendencias: algebraica, formal, geométrica, infinitesimal, tecnológica (uso de calculadoras y computadores), y combinaciones de dos o más de ellas (Dolores, 2000).

4.3 Fenómenos, Contextos y Situaciones del concepto de derivada

4.3.1 El concepto de Derivada de Fermat. Ya existían soluciones para casos particulares del problema de hallar la recta tangente a un punto de una curva y otros para los problemas de optimización, soluciones recursivas e interesantes que se pueden catalogar en un *nivel referencial*, pero Fermat fue el primero en asumir que el problema de la recta tangente y los problemas de optimización estaban relacionados en un método. En términos de la EMR Fermat alcanzó un *nivel general* ya que encontró una única estrategia de solución que superaba la referencia de los contextos unificándolos en una solución algebraica, razón suficiente para tomar a Fermat como referente.

A partir de la revisión histórica del aporte de Fermat, identificamos los fenómenos: Problemas de optimización y problemas de la recta tangente, además, los contextos y situaciones, que se pueden emplear en una secuencia, nacen de la reflexión e interpretación de los elementos del aporte de Fermat que vamos a emplear y descartar, en el siguiente cuadro se muestran los fenómenos, contextos y situaciones específicos del aporte de Fermat.

Tabla 5.
Fenómenos, contextos y situaciones del aporte de Fermat

Fenómenos	Contexto	Situaciones resueltas por Fermat
Problema de máximos y mínimos	Fermat abordó el problema puntual: <i>Divida un segmento b en dos partes de tal manera que el producto de las longitudes de las dos partes sea máximo.</i>	1. Divida un segmento b en dos partes de tal manera que el producto de las longitudes de las dos partes sea máximo.
	Para luego deducir que ‘todos’ los problemas de este tipo se podían resolver con lo que denominó el <i>methodus</i> .	2. Divida el segmento b de tal manera que el producto del cuadrado de uno de los segmentos por el otro sea máximo

Problema de la recta tangente	Fermat dedujo y resolvió las situaciones 1. 2. y 3. deduciendo que hallar problemas de rectas tangentes es un problema de máximos y mínimos, para ello abordó inicialmente la situación 1. usando la subtangente y la definición de Apolonio de parábola.	1. Encontrar la recta tangente que pasa por un punto de una parábola.
		2. Encontrar la recta tangente que pasa por un punto de una elipse.
		3. Encontrar la recta tangente que pasa por un punto de una cisoide.

Nota: A partir de la solución de Fermat se analiza, a la luz de la teoría EMR, los fenómenos, situaciones y contextos.

A partir del cuadro anterior y la revisión del aporte de Fermat, se plantea el camino que llevará el diseño de las actividades, separado por unidades en donde se presentan las situaciones y se harán los comentarios pertinentes para cada una.

Capítulo 5: Análisis Fenomenológico parte ii: diseño de actividades – fase 3

En este capítulo se hace una descripción de las actividades de enseñanza desde el punto de vista del marco teórico, sus características metodologías, los objetivos de investigación y los objetivos de aprendizaje. En la sección 5.1 se señalan los aspectos generales de la unidad de enseñanza y en 5.2 se describe cada una de las actividades. El diseño de las actividades para cada unidad con su respectivo manual docente se puede ver como apéndice (ver APÉNDICE 1). Finalmente, la sección 5.3 muestra un mapa del diseño.

5.1 Aspectos generales

El diseño de las actividades está conformado por cuatro unidades que comprenden situaciones (actividades en cada Unidad) o problemas que conllevan al estudio de la derivada de Fermat iniciando con problemas de máximos y mínimos, para finalizar relacionando la

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

interpretación geométrica del ‘método de Fermat’ en un problema que involucra velocidad.

Una característica metodológica del diseño de las actividades es que propone cuatro principios básicos en el momento en que se usan las unidades en el aula:

- 1. No hay indicaciones para que el estudiante resuelva un problema. Un problema deja de serlo si se indica cómo resolverlo.*
- 2. Sólo al abordar un problema un estudiante entra en su mundo racional, no podemos negarle ese derecho.*
- 3. El profesor solo acude al estudiante si éste lo invita a compartir su mundo. En ese momento, el profesor guía la discusión buscando siempre que sea el estudiante por sí solo el que logre la solución.*
- 4. La solución de un problema genera otros problemas.*

Además, para cada actividad que conforma cada unidad, se sigue un esquema no estricto de pasos:

I. Planteamiento del problema: Las unidades de la cartilla empiezan con un problema y finalizan con algunos problemas sugeridos.

II. Labor de indagación del estudiante: Es el tiempo que se le da al estudiante para que intente resolver los problemas. No debe indicar nada, solo responder sus inquietudes, sugiriendo estrategias, pero NUNCA informando la manera de resolver el problema.

III. Presentación de los resultados de un estudiante: Debe elegir a uno, o algunos, que muestren su razonamiento a todos, no importa si el problema está resuelto o no.

IV. Trabajo en grupo de los estudiantes: Sugerir que trabajen en grupo es valioso, deben defender sus razonamientos, la confrontación de argumentos es un proceso que no solamente ratifica lo que hacemos, sino que ayuda a darse cuenta de los errores o vacíos en lo que hacemos.

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

V. Socialización final – Se trata de una discusión final cuya dinámica se genera con la presentación de los resultados obtenidos por algunos de los grupos. La actividad debe terminar con una solución mayoritariamente compartida por los estudiantes. Adicional a la respuesta debe proponerse un esquema, a manera de resumen, de las ideas o conceptos que ayudaron a resolver el problema ordenándolos dentro de un esquema deductivo.

En algunas unidades se suministra un archivo en GeoGebra, su uso se enfocó en las propiedades geométricas de la ‘derivada de Fermat’ especialmente en la unidad 3, 3.5 y 3.75 como una herramienta de visualización, exploración y análisis de relaciones y propiedades del método propuesto al finalizar la unidad 2. Algunas veces se usó Excel y Wolfram. Para cada Unidad corresponde un manual docente detallado en donde queda explícito como usar cada herramienta que se propone y plantea los momentos, mencionados anteriormente, para cada actividad, así como los tiempos y se sugieren aspectos relevantes que contribuyen a la reinención guiada finalizando con problemas propuestos. El detalle de lo mencionado se puede visualizar en el Apéndice 1.

5.1.2 La Matematización del concepto de Derivada en el proyecto. Para finalizar el análisis fenomenológico, se analiza a la luz de la teoría cada unidad desde los conceptos de matematización horizontal y vertical.

Si bien, se puede interpretar o atribuir diversos significados a la idea de matematización. Freudenthal para distinguir su postura contrasta dos tipos, una horizontal y otra vertical, las cuales caracteriza de la siguiente manera: Matematización horizontal, significa ir del mundo de la vida real al mundo de los símbolos matemáticos, en contraparte la Matematización Vertical, consiste en poder moverse entre los símbolos mediante una manipulación, (Freudenthal, 1997). Parece ser que el primer tipo de matematización que define, corresponde

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

con la simbolización matemática de fenómenos, problemas o situaciones de la vida real de un individuo. Por ende, se concluye que el proceso de matematización está compuesto por dos fases. En primer lugar, se han de traducir los problemas desde el mundo real al matemático (matematización horizontal); y, en segundo lugar, una vez traducido el problema, se procede a utilizar conceptos y destrezas matemáticas para su resolución (matematización vertical).

Para el análisis de matematización de cada actividad, decidimos tomar la definición y procesos expuestos en (Rico, 2005), la matematización horizontal incluye los siguientes procesos, que, desde el punto de vista teórico, aplican para cualquier concepto matemático de estudio.

- Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema.
- Representar el problema de modo diferente.
- Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.
- Encontrar regularidades, relaciones y patrones.
- Reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos.
- Traducir el problema a un modelo matemático.
- Utilizar herramientas y recursos (p. 51).

Y la matematización vertical sostiene las siguientes actividades. Aquí nos permitimos añadir una particularización de la derivada de Fermat para cada proceso:

- Utilizar diferentes representaciones: Las representaciones de la derivada de Fermat que se utilizan en nuestro trabajo son: La solución de Fermat, como el primer acercamiento

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

algebraico, la representación geométrica de la solución de Fermat y finalmente la derivada de Fermat como expresión.

- Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones: Inicialmente se permitirá expresar los modelos (ideas) del estudiante en el lenguaje que considere necesario, para luego, acordar usar notaciones modernas de las ecuaciones, funciones, etc.

- Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos: Los modelos mientras avanzan las actividades, entendidos desde la teoría, como todo lo que hace un estudiante para solucionar un problema, al igual que el lenguaje, conllevará a acuerdos con el grupo (que debe funcionar como una comunidad matemática) que se ajustarán y cambiarán. La predicción de los modelos que podrían surgir en cada situación y las sugerencias a partir de esos modelos se pueden ver en el manual docente en el apéndice 1.

- Argumentar y generalizar: Las clases de matemáticas han sido influenciadas por distintas escuelas de pensamiento filosófico, como el platonismo, el positivismo lógico, el estructuralismo y el formalismo, que hasta el día de hoy perduran; esto ha generado, en muchos casos, que el docente, de forma desprevenida, se limite a intentar transmitir verdades matemáticas en un lenguaje axiomatizado y, peor aún, sin mostrar las relaciones que tienen con la realidad (Jiménez, 2010) consecuencia de lo expuesto, en esos casos, al estudiante no se le permite hablar y asumen que el docente es un guardián de verdades, aunque no sepan las razones y el porqué de las cosas. Así, pues, en nuestro trabajo se promueve la comunicación, el estudiante participa y expone sus ideas y argumentos, sometiéndolos a las opiniones y otros argumentos de tal manera que las interacciones y negociaciones entre todos los implicados en el proceso de aprendizaje permita llegar a acuerdos, que en nuestro caso llamaremos generalizaciones. Recordando que, desde el punto de vista teórico, si los

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

estudiantes establecen puentes entre los fenómenos, por ejemplo, usar la derivada de Fermat para resolver un problema de máximos y mínimos y un problema de velocidad, la derivada de Fermat se establece como un modelo para solucionar diferentes tipos de problema, y esto conllevaría a enmarcar al estudiante en un nivel referencial.

A continuación, usamos los procesos mencionados anteriormente, como categorías para ordenar el análisis de cada tipo de matematización. Cabe aclarar que las categorías numeradas no se comportan en ningún orden, ni ascendente ni descendente.

Tabla 6.
Categorías de matematización.

Matematización Horizontal					
1	2	3	4	5	6
Identificar	Representar	Encontrar	Reconocer	Traducir	Utilizar
las	el problema de	regularidades,	isomorfismos	el problema a	herramientas
matemáticas	modo	relaciones y	con otros	un modelo	y recursos
que pueden	diferente	patrones	problemas ya	matemático	adecuados
ser relevantes			conocidos		
respecto al					
problema					
Matematización Vertical	4	Argumentar y generalizar			
	3	Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos			
	2	Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones			

Nota: Cuadro de categorías para analizar la matematización. Adaptado de (Rico, 2005, p.

51)

5.2 Descripción de las actividades

A continuación, se describen las unidades que hacen parte del diseño, cuyos textos completos están incluidos en el apéndice 1. Para cada una de ellas presentamos los objetivos de aprendizaje, una descripción de cada actividad y su respectivo cuadro de análisis de la matematización. Los archivos de GeoGebra y el uso de herramientas como Excel y Wolfram, se explican en el manual docente, junto a las sugerencias de su uso con los estudiantes.

5.2.1 Unidad 1. Objetivo:

A partir del *problema del cercado* introducir el concepto de función y su valor óptimo de acuerdo con el contexto del problema. Es decir, estamos tratando simultáneamente el problema de construir una función que relacione la dependencia de la variable en estudio respecto a otras variables que son las que se pueden controlar directamente, y el problema de su optimización. Es un reto grande abordar las dos cosas simultáneamente, la idea es que los estudiantes vean que para optimizar es necesario hallar la expresión funcional que no es otra cosa que expresar el área en términos de la base y la altura del rectángulo.

5.2.1.1 Descripción de las actividades. Situación 1: Un campesino necesita construir un cercado para cuidar su próxima plantación de tomates, para ello compró 142 metros de cerca, y quiere construir la cerca rectangular más grande (mayor área) que le permita tener un mayor cultivo. ¿Cuál es la cerca más grande que se puede construir?

El problema del cercado es equivalente al problema abordado por Fermat en 1636: *Dado un segmento de longitud dada, dividirlo en dos partes, de tal forma que el producto de las*

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

longitudes de las partes sea máximo. Se optó por el problema del cercado porque el del segmento de Fermat ofrece un contexto netamente matemático, es la reducción del problema a un problema matemático descontextualizado, proceso que debe buscarse en el salón de clase. Precisamente en el destaque de las ideas que permitieron resolver el problema y que debe darse en la socialización con los estudiantes, debe darse este tipo de abstracción para matematizar la situación. Acto seguido, se les debe plantear problemas equivalentes en diferentes contextos que requieran el procedimiento matematizado. La matematización no es en términos funcionales sino con algún contexto particular, tal como es el caso del problema de Fermat para segmentos de recta que tienen que dividirse. Problemas como el de Fermat se proponen al final de la unidad.

Situación 2: *Para empaquetar el tomate cosechado, el campesino debe producir cajas con las siguientes características:*

- 1) Deben estar abiertas por la parte superior*
- 2) Se debe fabricar cada caja a partir de una pieza rectangular de cartón que mide 1 metro de largo por 70 cm de ancho.*
- 3) La caja puede cerrarse al cortar en la línea continua (—) y doblar en las líneas punteadas (---).*

¿Cuáles son las dimensiones de la caja con mayor volumen que se puede construir?

El problema de la caja permite a los estudiantes poner en práctica la estrategia de solución adquirida en la situación 1, al igual que en el tiempo de Fermat se le da relevancia al problema, razón por la cual no se encontrarán en este tipo de situaciones enunciados en donde se pide encontrar la función, dominio, recorrido, los estudiantes pueden usar estos conceptos sin conocer las definiciones bajo la necesidad del problema. Se trata de resolver un problema no de enumerar explícitamente los elementos utilizados y aprovechar para evaluar el

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

conocimiento que de ellos tengan los estudiantes. Se está reconstruyendo la matemática necesaria para resolver el problema, proceso distinto a repetir lo que ya me “enseñaron”.

Algunos comentarios sobre las situaciones secundarias (problemas propuestos *pp*)

pp1 El problema del segmento es un guiño a un problema de la antigüedad, se pensó utilizar como problema inicial de la unidad 1, pero el contexto del *Problema del cercado* ofrecía ciertos elementos como la expresión del área en términos de dos magnitudes y un contexto más ameno para los estudiantes. Básicamente la solución es la misma, este problema ofrece un contexto matemático.

pp2 El problema de otra caja conlleva un gran reto de comprensión para los estudiantes, puesto que la expresión (función) que se obtiene es una racional, los estudiantes de esta manera empiezan a visualizar otro tipo de funciones y a delimitar el dominio sin ahondar en terminología. Es el primer problema que pide minimizar.

pp3 El problema del arco es un problema ameno que podría reemplazar el problema del cercado

5.2.1.2 Categorías de la matematización

Tabla 7.

Análisis de matematización unidad 1.

Matematización Horizontal						
1	2	3	4	5	6	
El problema conduce a que los conceptos matemáticos para abordar el problema se hagan de manera intuitiva, no es prioridad en la unidad definir, estos son:	El “Problema del cercado” es idéntico al problema del segmento de Fermat. El “problema de la caja” es	Dado que el problema trata de un rectángulo en donde el área depende de la variación de la longitud de uno de sus lados, los estudiantes	En el “Problema de la caja” se espera que los estudiantes usen las herramientas adquiridas en el “problema	Con la guía adecuada se espera que los estudiantes encuentren las expresiones: $A = L1 * L2$	Se sugiere usar tablas y la herramienta Excel, herramientas que se consideran adecuadas en el estudio	

EL CÁLCULO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

Construir una función que relacione la dependencia de la variable en estudio respecto a otras variables para resolver el problema de su optimización.	fácilmente modificable. Los ejercicios propuestos permiten usar los modelos alcanzados en esta unidad.	podrían darse del cercado” cuenta del para resolver cambio y la el problema relación con los de otros lados del optimización rectángulo.	$A = 71 L1 - L1^2$	de la variación.
Área y volumen variables.				
Dominio y Recorrido.				

MATEMATIZACIÓN

VERTICAL

4

Es necesario que los estudiantes lleguen al modelo matemático: Las funciones de los problemas. La actividad misma permite que los estudiantes se expresen y que se corrijan, pero es primordial que el profesor enfoque la discusión para cumplir el objetivo de la unidad. Los argumentos, como dicta la teoría deben permitir que haya saltos cognitivos, por lo que el docente debe seleccionarlos adecuadamente para generar las discusiones. Los tiempos de discusión se sugieren en la guía docente.

-
- Entendido el modelo como “lo que hace un estudiante para resolver un problema” los estudiantes intentarán usar las estrategias que adquirirán como el uso de Excel y la gráfica para aproximar, o intentar usar la solución de la Proposición
- 3 VI.27 del libro de Euclides en términos algebraicos (mostrada en el manual docente de la unidad 1). Se insistirá en que usen todo lo que está a su alcance y no se lleguen a conformar con los modelos alcanzados. La insistencia en una respuesta única podría llevarlos a refinar modelos.

-
- La necesidad de hacer una gráfica usando software mostrará a los estudiantes la ventaja de plantear la expresión,
- 2 función, en términos de uno de los lados, es decir una única variable. Aquí se harán los primeros acuerdos de las notaciones, variables, funciones. Etc.

-
- Los estudiantes pasarán por las diferentes representaciones de las funciones: Tablas, gráficas y
- 1 expresiones algebraicas. Dado que es la primera unidad, no hay representación de la derivada.

Nota: Análisis de matematización vertical y horizontal para la actividad planteada en la unidad 1.

De aquí en adelante se comenta exclusivamente sobre la Matematización vertical, asumiendo que la importancia estará en las preguntas, inquietudes y respuestas en el lenguaje matemático. El descubrimiento de la derivada de Fermat, deducida a partir del procedimiento utilizado por él ilustre matemático, es un claro avance en el desarrollo vertical.

5.2.2 Unidad 2. Objetivo: A partir del *problema de la cerca*, usando n metros para generalizar el problema, introducir a los estudiantes a un proceso algebraico de solución a partir de una interpretación geométrica.

5.2.2.1 Descripción de las actividades. *Situación 3:* Si en el problema del cercado el campesino compró n metros de cerca. ¿Cuál es la expresión algebraica para el área en términos de un lado de la cerca?

A partir de esta situación y un trabajo computacional se hace un primer acercamiento geométrico a lo que denominamos la ‘solución de Fermat’ (Se especifica en el manual docente en las unidades del capítulo 5), los estudiantes matematizan verticalmente por primera vez, algebrizando lo que observaron geoméricamente, obteniendo un recurso nuevo para la solución de los problemas de máximos y mínimos.

Situación 4: ¿Cómo se puede resolver el problema de la caja (situación 2) usando la solución de Fermat?

La situación 4 será el primer problema en donde pondrán en práctica la ‘solución de Fermat’ de manera algebraica.

Los problemas y ejercicios propuestos que siguen a la situación 4 tienen como finalidad exponer las ‘debilidades’ de la solución de Fermat en polinomios de mayor grado.

5.2.2.2 Categorías de matematización

Tabla 8.
Análisis de matematización unidad 2.

4	El uso de software dinámico servirá para mostrarles, de manera geométrica la “solución de Fermat” como un modelo más depurado para comprender el problema.
---	--

Es necesario que los estudiantes lleguen al modelo matemático: Las funciones de los problemas. La actividad misma permite que los estudiantes se expresen y que se corrijan, pero es primordial que el profesor enfoque la discusión para cumplir el objetivo de la unidad. Los argumentos, como dicta la teoría deben permitir que haya saltos cognitivos, por lo que el docente debe seleccionarlos adecuadamente para generar las discusiones.

Se espera que los estudiantes puedan proponer la función del problema como sigue:

$A(L) = bL - L^2$, donde $b = n/2$ y n es la cantidad de metros de cerca.

3 Entendido el modelo como “lo que hace un estudiante para resolver un problema” los estudiantes intentarán usar las estrategias que adquirirán como el uso de Excel y la gráfica para aproximar, o intentar usar la solución de la Proposición VI.27 del libro de Euclides en términos algebraicos (mostrada en el manual docente de la unidad 1). Se insistirá en que usen todo lo que está a su alcance y no se lleguen a conformar con los modelos alcanzados. La insistencia en una respuesta única podría llevarlos a refinar modelos.

los estudiantes intentarán usar las herramientas de Excel y se encontrarán con el inconveniente del valor n .

2 En cuanto al lenguaje algebraico de la derivada de Fermat, se trabaja el simbolismo correspondiente a las ecuaciones dando significado a cada línea del desarrollo de $f(a) = f(e)$.

La necesidad de hacer una gráfica usando software mostrará a los estudiantes la ventaja de plantear la expresión,

función, en términos de uno de los lados, es decir una única variable.

Variando los valores de n , los estudiantes pueden concluir que se trata, en este caso, de funciones que comparten características en común, en concreto, siempre serán polinómicas de grado dos y tres.

-
- 1 Después de refinar el modelo de solución usando software, Los estudiantes abordan la primera representación de la derivada de Fermat, en un trabajo analítico, que se denomina “La solución de Fermat”, abordándolo de manera analítica e interpretando la expresión $f(a) = f(e)$ en la exposición de la solución de Fermat son las matemáticas relevantes que corresponden a esta unidad.
-

Nota: Análisis de la matematización vertical para los procesos implicados en la unidad 2.

5.2.3 Unidad 3. Objetivo (3):

Afianzar ‘el método de la solución de Fermat’ como herramienta para solucionar problemas de optimización. Los estudiantes entienden la diferencia del modelo con el polinomio resultante que se obtiene con el método de Fermat, y analizan el problema de optimización restringiendo los valores de x .

Objetivo (3.5):

Desde la gráfica de los polinomios: modelo y resultante, los estudiantes establecerán relaciones entre el grado del polinomio modelo y el número de puntos críticos del polinomio resultante. Se repasará la primera idea del método de Fermat y se hará la reflexión sobre el por qué existen puntos críticos entre x y e , cuando $f(x) = f(e)$ y $x \neq e$.

Objetivo (3.75):

Desde la gráfica de los polinomios: modelo y resultante, los estudiantes establecerán relaciones entre el grado del polinomio modelo y el número de puntos críticos del polinomio resultante. Se

repasará la primera idea del método de Fermat y se hará la reflexión sobre el por qué existen puntos críticos entre x y e , cuando $f(x) = f(e)$ y $x \neq e$.

5.2.3.1 Descripción de las actividades. Situación 5: El modelo de un problema está definido por la siguiente expresión algebraica (para $0 < x < 6.5$):

$$f(x) = -4x^4 + 20x^3 + 144x^2 - 712x + 300$$

1. Encuentre el valor máximo y mínimo
2. Use Wolfram o cualquier programa que le permita graficar la función $f(x) = -4x^4 + 20x^3 + 144x^2 - 712x + 300$ y determine el máximo y mínimo para cada caso:
 - a. $0 \leq x \leq 7$
 - b. $-6 \leq x \leq 8$
 - c. $3 \leq x$
 - d. $-5 \leq x \leq 0$
3. ¿Qué relación puede establecer entre el polinomio que modela la situación y el polinomio resultante de la solución de Fermat? Comparta su respuesta con el profesor y sus compañeros.

La situación 5 pone en práctica la solución de Fermat y termina en un trabajo de matematización vertical, en donde se ‘abandona’ la situación de encontrar máximos y mínimos para establecer relaciones entre la función inicial (llamada modelo) y la obtenida (llamada Resultante en el diseño) después de aplicar el método de Fermat, esta idea se profundiza en la unidad 3.5 con trabajo computacional.

Situación 6:

1. En las anteriores unidades usamos el método de Fermat para optimizar. ¿Cuál de las siguientes opciones resume el procedimiento? Justifique su elección.

$$a) f(x) = f(e)$$

$$b) f(x) = f(e) \quad \text{cuando } x = e$$

$$c) \frac{f(x)-f(e)}{x-e}$$

$$d) \frac{f(x)-f(e)}{x-e} = 0 \quad \text{cuando } x = e$$

$$e) \frac{f(x)-f(e)}{x-e} = 0 \quad \text{cuando } x \neq e \text{ y luego } x = e$$

$$f) f(x) - f(e) \quad \text{cuando } x \neq e$$

- 2 ¿Cuáles son los elementos que componen la derivada de Fermat? ¿Y qué papel desempeñan cada uno de ellos en la búsqueda de los puntos que optimizan una función polinomial?

En la curva que se muestra, interprete gráficamente el valor de la derivada de Fermat en el punto $(a, f(a))$ que se señala.

El método de Fermat se resume en una expresión que denominamos la derivada de Fermat, el objeto dF adquiere una dimensión distinta cuando se pide su interpretación geométrica de los elementos que componen a dF , ya que de algún modo, el problema de máximos y mínimos desaparece, y de forma geométrica con la guía adecuada y apoyados de tecnología, se define la recta tangente, alcanzando de esa manera la relación de dF con los fenómenos: Problemas de Optimización y el Problema de la recta tangente..

5.2.3.2 Categorías de matematización

Tabla 9.
Análisis de matematización unidad 3.

4	Las metas de esta unidad se cumplen cuando los estudiantes, como comunidad matemática, lleguen a ciertos acuerdos bajo el beneplácito del argumento que convenza a todos o a la mayoría.
---	--

	El avance, en cuanto a la generalización, es el resumen del método de Fermat en una expresión algebraica y las relaciones, expresadas de manera verbal, que puedan observar de la función modelo y la resultante. Se define la derivada de Fermat como: $dF(x) = \left. \frac{f(x) - f(e)}{x - e} \right _{x \neq e} \text{ y luego } x = e$ Previo análisis de cada parte que la compone y usando la representación gráfica para su apropiación.
3	Se puede decir que se abandona circunstancialmente la idea de máximos y mínimos para poner en práctica la búsqueda de relaciones entre el modelo y la resultante (función inicial y la función derivada). La invención guiada permite un salto necesario en donde se resume el método de Fermat en una expresión: $\frac{f(x)-f(e)}{x-e} = 0$ cuando $x \neq e$ y luego $x = e$ En la unidad 3.75 en los problemas propuestos debe usarse la expresión algebraica de la solución de Fermat para resolver problemas de máximos y mínimos.
2	Aprender a usar un software como Wolfram exige a los estudiantes escribir en términos precisos la función polinómica que se estudia. En la unidad 3.5 se espera que los estudiantes definan un punto crítico con los elementos que están manejando. El trabajo algebraico que propone la unidad 3.75 afianzará el uso correcto del lenguaje matemático y las soluciones de tipo algebraico de los problemas.
1	La UNIDAD 3, 3.5 y 3.75 Trabaja en conjunto la representación algebraica “solución de Fermat” con su respectiva representación geométrica, esto conlleva a definir elementos como la recta tangente y su relación de la “solución de Fermat”, consolidándola como modelo de solución para

	problemas de máximos y mínimos, vislumbrando que abstrayendo sobre el método se puede conseguir un posible <i>modelo para</i>. A diferencia de las unidades anteriores, la representación funcional que otorga el problema es la expresión algebraica: $f(x) = -4x^4 + 20x^3 + 144x^2 - 712x + 300$, y se pide que se use la representación gráfica de la función generada por software para encontrar los valores máximo y mínimo. En la unidad 3.5 todo el trabajo se hace en la representación gráfica desde un archivo de Geogebra que permite comparar en tiempo real la función modelo y la resultante. En la unidad 3.75 se pide que a partir de la expresión algebraica de la solución de Fermat se interprete dicha expresión en una gráfica
--	--

Nota: Análisis de la matematización vertical para los procesos implicados en la unidad 3.

5.2.4 Unidad 4. Objetivo (Parte I):

Abordar la problemática de la razón de cambio cuando la razón de cambio es constante en un problema típico de velocidad y establecer una relación en la interpretación de la velocidad como cociente con dF .

Objetivo (Parte II):

Abordar la problemática de la razón de cambio cuando la razón de cambio no es constante en un problema típico de velocidad.

Objetivo (Parte III):

Usar de manera intuitiva el Teorema del Valor Medio y establecer una relación entre la interpretación gráfica de la derivada de Fermat y el Teorema del valor medio.

5.2.4.1 Descripción de las actividades. Situación 7: Una familia hizo un viaje en carro para visitar al tío Gabriel, en la primera parte del recorrido transitaron 12 kilómetros por una carretera recta (autopista), pararon al recorrer los 12 kilómetros y visitaron al primo Cristian, el automóvil transitó a una velocidad constante de 120 kilómetros por hora.

1. *¿Cuál es la distancia que ha recorrido el automóvil después de 2 minutos?*
2. *¿Cuál es la distancia que ha recorrido el automóvil después de t minutos? Grafique la situación*

Silvia que iba manejando, recordó que antes de empezar el recorrido en la autopista, recorrió 500 metros como muestra la siguiente Figura (no está a escala)

3. *Encuentre una expresión que permita calcular la distancia recorrida del automóvil, si se empieza a tomar el tiempo en un punto A situado a 250 metros a la derecha de un punto de referencia L (casa de Silvia).*

Analice el problema desde el punto de vista de la meta. Es decir, las distancias se toman ahora, respecto al punto C (casa de Cristian) que se encuentra a la derecha a d metros del lugar de donde se empieza a contar el tiempo.

4. *¿Cómo se expresa ahora la distancia en función del tiempo transcurrido?*

Se trata, desde un problema de velocidad constante, de establecer relaciones de la interpretación geométrica de dF con la velocidad interpretada como un cociente.

Situación 8:

Después de visitar a Cristian, el viaje hacia la casa del tío Gabriel fue de 105 kilómetros y se realizó en 1.5 horas. Silvia manejó sin hacer paradas. Su hija Ana, escuchó cuando Silvia le comentaba a Gabriel lo siguiente: “al principio había congestión vehicular, pero no hubo inconvenientes, nos vinimos a una velocidad de 70 kilómetros por hora”. Ana había observado el

velocímetro del carro tres veces distintas durante el recorrido, este marcó 64 kilómetros por hora cuando llevaban veinte minutos de recorrido, 90 kilómetros por hora cuando llevaban cuarenta minutos, y 88 kilómetros por hora cuando llevaban 1.2 horas de viaje. Ana no entiende por qué su mamá dice que 70 km/h.

5. ¿Tiene sentido lo que le dijo Silvia a Gabriel? ¿En qué se basó Silvia para afirmar que viajaron a 70 kilómetros por hora?

6. ¿Qué significado tiene el valor indicado por el velocímetro del carro (64 kilómetros por hora) cuando llevaban 20 minutos de viaje?

7. ¿Alguna vez el velocímetro marcó 70 kilómetros por hora tal como Silvia le dijo a Gabriel? Si es afirmativa su respuesta, explique su razonamiento.

El Teorema del Valor Intermedio para funciones polinómicas será enunciado de manera intuitiva por parte de los estudiantes para dar respuesta a las preguntas planteadas en la situación, las velocidades promedio, de nuevo, se interpretan como un cociente.

Situación 9:

Dos radares de control de velocidad se encontraban en un trayecto de 52 kilómetros de distancia sobre la carretera por donde pasó el automóvil.

Cuando pasó el auto al lado del primer radar, su velocidad era de 90 kilómetros por hora. Treinta minutos después, cuando pasó por el segundo radar, su velocidad era 80 kilómetros por hora.

Si el límite de velocidad es de 100 km por hora. ¿Excedió el límite de velocidad el automóvil en algún momento en los 52 kilómetros? Justifique

Finalmente, la situación 9 permite establecer un vínculo entre la interpretación geométrica de dF y el uso de manera intuitiva del Teorema del Valor Medio, es la primera vez en el trabajo que

el significado de evaluar la derivada de Fermat en un punto no corresponde a la obtención de un máximo o un mínimo, esto abre el camino para crear una nueva situación que permita establecer el puente entre los significados que le hemos dado a dF con la velocidad instantánea.

5.2.4.2 Categorías de matematización

Tabla 10.

Análisis de matematización unidad 4.

4	La cúspide en términos de matematización vertical es que los estudiantes lleguen a establecer una relación entre la interpretación gráfica de la derivada de Fermat y el Teorema del valor medio. Logrando así un objetivo fundamental del trabajo: Ubicar a los estudiantes en un nivel general de matematización vertical.
3	El <i>Teorema del Valor Intermedio</i> para funciones polinómicas será enunciado de manera intuitiva por parte de los estudiantes para dar respuesta a las preguntas planteadas en la parte dos de la unidad 4, las velocidades promedio, de nuevo, se interpretan como un cociente, intentando siempre que los estudiantes encuentren las relaciones entre lo aprendido con el nuevo fenómeno.
2	Los estudiantes establecerán un vínculo inicial de la interpretación geométrica de dF trabajada en la unidad anterior que no corresponde al fenómeno de los problemas de máximos y mínimos, sino con un nuevo fenómeno: El problema de la velocidad instantánea.
1	En la primera parte de la unidad se enfatiza en interpretar la velocidad como un cociente gráficamente. En la parte dos se plantea un juego gráfico relacionado con el <i>Teorema del valor intermedio</i>

Nota: Análisis de matematización vertical y horizontal para la actividad planteada en la unidad 4.

5.3 Mapa del diseño de las actividades

Para concluir el análisis fenomenológico se muestra un mapa que muestra un panorama del diseño, resaltando objetivos en cada unidad y las relaciones entre las unidades y dichos objetivos. Las unidades en color gris comprenden una posible continuación del diseño, en el último capítulo (ver Capítulo 6) se proponen algunos lineamientos para continuar el trabajo.

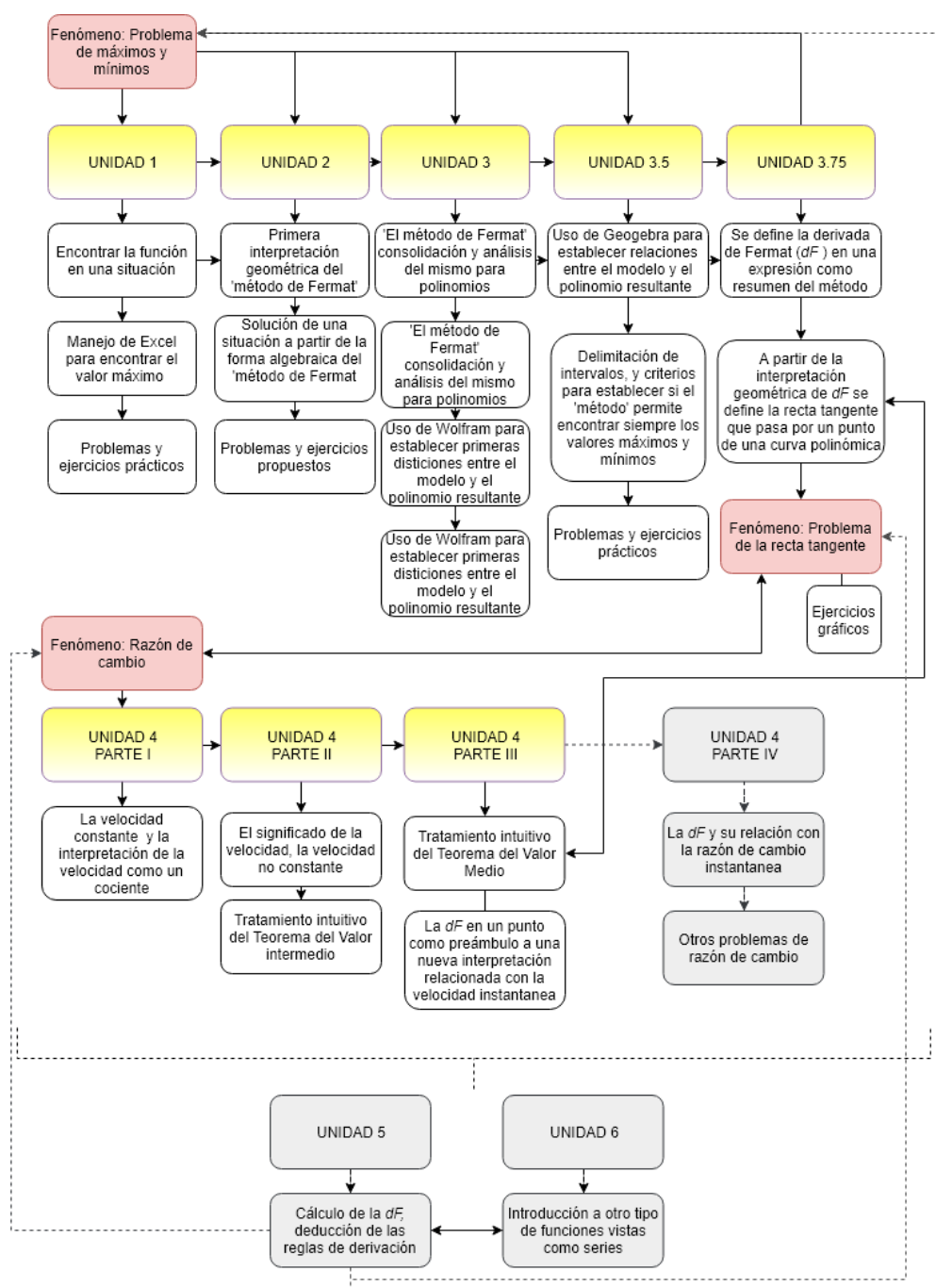


Figura 1. Mapa del diseño.

Capítulo 6: Reflexiones finales

Para cerrar nuestro trabajo, las reflexiones aquí expuestas permiten ver el trabajo desde otra perspectiva o continuación del mismo.

6.1. La derivada de Fermat

Como primera reflexión, planteamos que los problemas de máximos y mínimos y el problema de la tangente se facilitaría si lográbamos ver que en los dos casos se trataba simplemente de hallar la derivada de Fermat. Véase en el siguiente recuadro la definición y notación:

$$\frac{f(a+e)-f(a)}{e} = dF(a)$$

y

$e=0$

Figura 15. La derivada de Fermat.

La derivada de Fermat

La derivada de una función en un punto a es igual al cociente incremental que debe simplificarse previamente de tal forma que se quite la indeterminación, y luego se hace $e=0$. El valor resultante es la derivada de Fermat en el punto a .

Aclaración: Fermat no consideraba a las funciones como lo hacemos hoy. De hecho, consideraba “cantidades” como se vio en el capítulo 3. Las preguntas lógicas que nos podemos hacer es: ¿Qué tipo de funciones podría admitir la derivada de Fermat? ¿Definida la derivada de

Fermat se tendría alguna desventaja en el cálculo con respecto a la derivada como la conocemos actualmente?

Abordemos la segunda pregunta. Se sabe que el cálculo de la derivada es ‘sencillo’ cuando se utilizan las llamadas “reglas para la derivada”. En la siguiente sección veremos cómo y cuáles “reglas” se cumplen para la derivada de Fermat.

6.1.1 El álgebra de la derivada de Fermat. Después de cada recuadro se justifica el resultado a modo de demostración usando la definición de la derivada de Fermat.

LA CONSTANTE

Si $f(x) = k$, donde k es una constante, entonces $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{f(x+e)-f(x)}{e} = \frac{f(x)-f(x)}{e} = 0$$

LA IDENTIDAD

Si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{f(x+e)-f(x)}{e} = \frac{x+e-x}{e} = 1$$

LA POTENCIA

Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$

$$f'(x) = \frac{f(x+e)-f(x)}{e} = \frac{(x+e)^n - x^n}{e}, \text{ Aplicando el cociente incremental.}$$

$$= \frac{(x^n + nx^{n-1}e + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}e^2 + \dots + nxe^{n-1} + e^n) - x^n}{e}, \text{ el primer y último se elimina en el numerador}$$

$$= \frac{e(n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}e + \dots + nxe^{n-2} + e^{n-1})}{e}, \text{ Se factoriza } e$$

$nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}e + \dots + nxe^{n-2} + e^{n-1}$, e se cancela ya que está como factor en el numerador y también está en el denominador, luego se hace $e=0$. El único término que no contenía e era el primero, por tanto la solución es nx^{n-1}

MULTIPLICACIÓN POR UNA CONSTANTE

Si K es una constante y f una función entonces $(kf)'x = kf'(x)$

$$g(x) = kf(x)$$

$$g'(x) = \frac{g(x+e) - g(x)}{e} = \frac{kf(x+e) - kf(x)}{e} = k \frac{f(x+e) - f(x)}{e} = kf'(x)$$

LA SUMA Y DIFERENCIA

Si f y g son funciones, entonces $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

$$F'(x) = \frac{[f(x+e)+g(x+e)] - [f(x)+g(x)]}{e}, \text{ Aplicando el cociente incremental}$$

$$= \frac{f(x+e)-f(x)}{e} + \frac{g(x+e)-g(x)}{e}, \text{ Se separa el cociente y se reordena el numerador}$$

$$F'(x) = f'(x) + g'(x)$$

EL PRODUCTO

Si f y g son funciones, entonces $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

Para demostrar el producto, primero se deduce la derivada para una función F

$$F(x) = f^2(x)$$

$$F'(x) = \frac{f^2(x+e)-f^2(x)}{e} = \frac{(f(x+e)-f(x))(f(x+e)+f(x))}{e} = f'(x)2f(x)$$

$$F'(x) = 2f(x)f'(x) \quad ** \text{ Derivada de la función } F$$

Se considera el cuadrado de la suma de dos funciones, con el objetivo de usar el resultado anterior y encontrar la derivada del producto.

$$(f+g)^2(x) = f^2(x) + g^2(x) + 2f(x)g(x)$$

$$2f(x)g(x) = (f+g)^2(x) - f^2(x) - g^2(x), \text{ Despejando el producto de las funciones } f \text{ y } g.$$

$$(2fg)'(x) = 2(f+g)(x)(f+g)'(x) - 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x), \text{ Aplicando } **$$

$$2(fg)'(x) = 2(f+g)(x)(f+g)'(x) - 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x),$$

$$(fg)'(x) = [(f+g)(x)(f+g)'(x)] - f(x)f'(x) - g(x)g'(x), \text{ Resolviendo el producto}$$

$$(f+g)(x)(f+g)'(x) \text{ y aplicando "LA SUMA"}$$

$$(fg)'(x) = [ff'(x) + fg'(x) + gf'(x) + gg'(x)] - ff'(x) - gg'(x), \text{ Sumando algunos}$$

términos se obtiene finalmente

$$(fg)'(x) = fg'(x) + gf'(x)$$

EL COCIENTE

Sean f y g funciones, y $g(x) \neq 0$, entonces $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(x)} * f(x)$$

Primero se calcula la derivada de Fermat para $\frac{1}{g(x)}$

$$\frac{\frac{1}{g(x+e)} - \frac{1}{g(x)}}{e} = \frac{\frac{g(x) - g(x+e)}{g(x+e)g(x)}}{e} = \frac{-(g(x+e) - g(x))}{e} * \frac{1}{g(x+e)g(x)} = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

Aplicando EL PRODUCTO se tiene que para

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(x)} * f(x)$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{g(x)} * f'(x) + f(x) * \frac{-g'(x)}{g^2(x)} = \frac{g^2(x)f'(x) - g(x)f(x)g'(x)}{g(x)g^2(x)} \\ &= \frac{g(x)(g(x)f'(x) - f(x)g'(x))}{g(x)g^2(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

Otra manera de probarlo:

$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, Se considera la función F como el cociente entre f y g con $g(x) \neq 0$,

$$F'(x) = \frac{\frac{f(x+e)}{g(x+e)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{e}, \text{ Aplicando el cociente incremental}$$

$$F'(x) = \frac{\frac{g(x)f(x+e) - f(x)g(x+e)}{g(x)g(x+e)}}{e} * \frac{1}{g(x)g(x+e)}, \text{ Sumando los términos en el numerador}$$

$$F'(x) = \frac{\frac{g(x)f(x+e) - g(x)f(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+e)}{g(x)g(x+e)}}{e} * \frac{1}{g(x)g(x+e)}, \text{ sumando y restando } f(x)g(x)$$

$$F'(x) = \left[g(x) \frac{f(x+e) - f(x)}{e} - f(x) \frac{g(x+e) - g(x)}{e} \right] * \frac{1}{g(x)g(x+e)}, \text{ Factorizando } g(x) \text{ y } f(x)$$

$$F'(x) = [g(x)f'(x) - f(x)g'(x)] * \frac{1}{g^2(x)}$$

Las reglas se pueden ver como un elemento procedimental que no hizo parte del diseño actual, pero que se podría plantear en una posible UNIDAD 5 en donde se haga énfasis en el cálculo de la derivada de Fermat.

6.2 Las funciones

Como se había mencionado, Fermat no usó funciones en términos actuales, las pruebas en el “álgebra de la derivada” funcionan en la función polinomial, como se conocen actualmente:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

donde n es un entero no negativo, pero cabe destacar que no son las únicas funciones que podríamos trabajar. De hecho, la derivada del cociente indica que se pueden trabajar funciones racionales

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Donde p y q son funciones polinomiales. No obstante, no hay ningún inconveniente si se consideran potencias de la forma x^n con n real como funciones, ya que para la derivada de Fermat se calcularía la resta $(x + e)^n - x^n$, desarrollando el binomio extendido de Newton $(x + e)^n$ se y se tendría que

$$(x + e)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} e + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} e^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} e^3 + \dots$$

Por lo que al restar x^n

$$(x + e)^n - x^n = \frac{n}{1} x^{n-1} e + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} e^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} e^3 + \dots$$

todos los términos de la expresión resultante contienen e , condición necesaria para la derivada de Fermat. Al dividir por e , siempre se tendrá que el primer término en la serie será el único que no tendrá a e como factor, por lo que al hacer $e = 0$ se tendrá que para $f(x) = x^n$ con n racional

la derivada $dF(x) = nx^{n-1}$. De esta manera las funciones que se pueden trabajar son series polinómicas, y estas nos permiten empalmar con el trabajo de otros matemáticos como Euler o Newton, ampliando el espectro de funciones que se pueden derivar como aquí proponemos. Si se adopta esta postura la propuesta se encamina a un manejo algebraico del cálculo.

6.2.1 ¿Cómo podrían los estudiantes encontrar polinomios que permitan modelar situaciones que usan funciones no polinómicas? Desconocemos que algún libro de cálculo recomiende el uso de series o aproximaciones polinómicas para la modelización en un curso inicial de cálculo. Debido a la limitación, aparente y falsa, de la derivada de Fermat con respecto a las funciones. Se sugieren, a continuación, alternativas para que los estudiantes trabajen con estos polinomios (La elección de alguno (s) o ninguno depende de la continuación de este trabajo).

6.2.1.1 Tratamiento histórico de algunas series. Euler consideraba, como nosotros, las series infinitas como funciones. Grattan-Guinness (1980) destaca la obra de Euler Introducción al análisis de los infinitos (1748) como una demostración magistral de cómo introducir el análisis sin usar diferenciación ni integración. Euler usó procedimientos infinitesimales, desarrollos binomiales y un tratamiento particular de los números infinitamente grandes o infinitamente pequeños. Veamos cómo obtenía el desarrollo en series para la función exponencial a^x .

Considerando a $a > 1$ y x cualquier número positivo finito, Euler parte de elevar a a un número infinitamente pequeño ω distinto de cero y propone la siguiente igualdad

$$a^\omega = 1 + \gamma$$

Que se justifica porque el resultado es un número mayor que 1, pero no mucho más, esto es 1 más un número infinitamente pequeño γ , además este número se puede escribir como

$$\gamma = k\omega$$

Dependiendo k de a . Reemplazando en la primera expresión, se tiene que

$$a^\omega = 1 + k\omega \quad (0)$$

Para todo real i

$$(a^\omega)^i = a^{\omega i} = (1 + k\omega)^i \quad (1)$$

Si x es cualquier número positivo finito, $i = x/\omega$, es infinitamente grande. Sustituyendo $w = x/i$ en (1) y desarrollando el binomio se obtiene que

$$a^x = a^{\omega i} = 1 + \frac{1}{1}kx + \frac{1(i-1)}{1 \cdot 2i}k^2x^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i}k^3x^3 + \dots \quad (2)$$

Y puesto que i es infinitamente grande, los valores para $\frac{(i-1)}{2i}$, $\frac{(i-2)}{3i}$, $\frac{(i-3)}{4i}$, ... corresponden a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... respectivamente, que al reemplazarlos en la expresión (2) se obtiene la serie

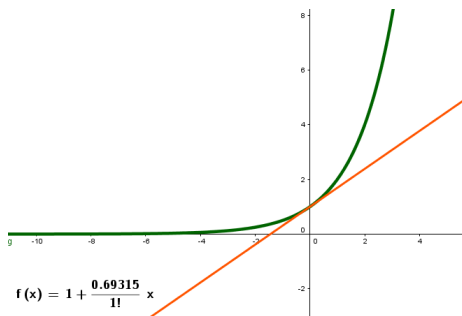
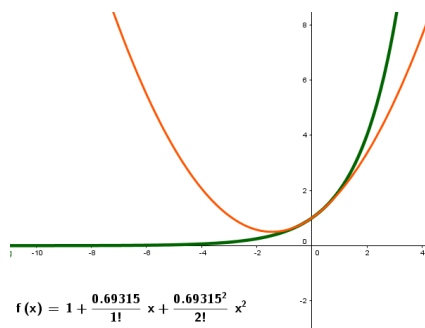
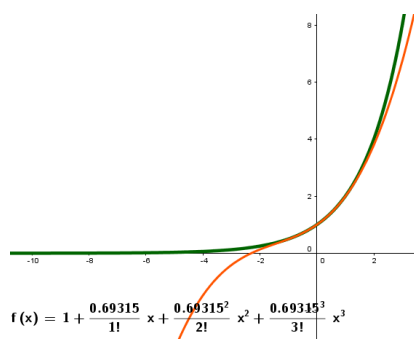
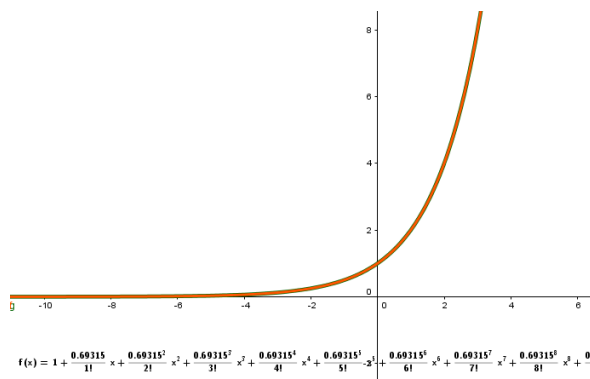
$$a^x = 1 + \frac{kx}{1} + \frac{k^2x^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (3)$$

Veamos como hallar, por ejemplo, el desarrollo en serie para 2^x . Aplicando el logaritmo en base a , a la expresión (0), se obtiene $\omega = \log_a(1 + k\omega)$, expresión que nos permite calcular k . Puesto que $k\omega$ es un número infinitamente pequeño podemos hallar un k aproximado, asumiendo a $k\omega = 0,0001$ y $a = 2$ que será la base del logaritmo por lo que

$$\omega = \log_2(1 + 0,0001) = 0,0001442622911, \text{ de donde } k = \frac{0,0001}{0,0001442622911} = 0,69318183$$

$$\text{Y por ende } 2^x = 1 + \frac{0,69318183x}{1} + \frac{0,69318183^2x^2}{1 \cdot 2} + \frac{0,69318183^3x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Veamos gráficamente como se va ‘ajustando’ la función cada vez que aumentan los términos en la serie. La curva verde representa a la función $g(x) = 2^x$ y la curva naranja representa a la función $f(x)$ como desarrollo en serie.

Figura 16. $f(x)$ con dos términos.Figura 17. $f(x)$ con tres términos.Figura 19. $f(x)$ con cinco términosFigura 18. $f(x)$ con treinta términos.

¿Cómo se podría introducir la función e^x ?

Se hace necesario introducir primero el número e . En algunos libros de cálculo presentan la función e^x como un caso particular de la función a^x , y se limitan a decir que “ e es un número más importante que π ” (Zill & S, 2011), y otros autores como (Purcell, 2007) definen directamente $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, pensamos que a partir de un problema de interés compuesto los estudiantes pueden reconocer de manera más amena la naturaleza del “límite” involucrado.

Para introducir la función e^x , podríamos plantear, primer deducir el número e calculando su valor, y luego hallar la expresión en serie de potencias de la función e^x , para finalmente deducir algunas propiedades a partir de la serie (siempre positiva, siempre creciente, la derivada de Fermat es igual a ella misma...) A continuación, mostramos una posible introducción al número e , que pertenecería a la UNIDAD 6:

Un administrador recién egresado es nombrado gerente de un banco de la ciudad y se le impone como objetivo aumentar el número de clientes que depositan dinero en el banco. Para lograr su objetivo el gerente diseña el siguiente plan:

Plan 1.

Se ofrece una tasa del 10% anual liquidada trimestralmente, de tal forma que si no se liquidan los intereses, estos pasan a formar parte del capital cada 3 meses y por lo tanto a generar intereses. Los clientes se hacen la siguiente pregunta si se retiran los intereses solo al final del año, a cuánto equivalen el interés recibido.

Para ayudar a los clientes consideremos que se deposita un capital C en el banco. Sigamos paso a paso cada liquidación trimestral de intereses:

Primer trimestre

Interés devengado $C: \frac{0.1}{4}$

Capital final $C + C \left(\frac{0.1}{4} \right) = C \left(1 + \frac{0.1}{4} \right)$

Segundo trimestre

Interés devengado $C \left(1 + \frac{0.1}{4} \right) \left(\frac{0.1}{4} \right)$

Capital final $C \left(1 + \frac{0.1}{4} \right) + C \left(1 + \frac{0.1}{4} \right) \left(\frac{0.1}{4} \right) = C \left(1 + \frac{0.1}{4} \right)^2$

Siguiendo los pasos realizados en los dos primeros trimestres, se infiere el capital acumulado después del tercer trimestre e incluso hasta llegar a la siguiente expresión que da el capital final al terminar el año. $C_f = C \left(1 + \frac{0.1}{4} \right)^4$

Para obtener la tasa de interés efectiva anual calculamos $\left(1 + \frac{0.1}{4} \right)^4 = 1.1038$ y le restamos 1 para obtener un interés de 10.38% ligeramente superior al 10% ofrecido por el banco.

Pues bien, como el plan 1 no permitió captar el dinero que se requería el joven gerente decidió aplicar el plan 2.

Plan 2

Se reconocerá la misma tasa del 10% pero ahora la liquidación se hará mensualmente. La pregunta sigue siendo la misma: ¿Cuál es el interés efectivo anual?

Utilizando el análisis anterior podemos inferir que ahora la expresión para el capital final tiene la forma:

$$C_f = C \left(1 + \frac{0.1}{12} \right)^{12}$$

De igual manera calculamos el valor de $\left(1 + \frac{0.1}{12} \right)^{12} = 1.1047$, lo que nos indica que el interés es 10.47% superior al 0.47% al interés nominal anual y superior en 0.09% al interés efectivo con liquidaciones trimestrales.

El gerente inquieto porque su nueva política no le atraía todos los clientes que deseaba, resuelve ser más agresivo y ofrece el plan 3, el cual causa un poco de nerviosismo en la junta directiva del banco, porque es la primera vez que una entidad bancaria ofrece un plan semejante.

Plan 3

Se reconocerá la misma tasa del 10%, pero ahora la liquidación se hará diaria. ¿Cuál es ahora el nuevo interés efectivo anual?

Con toda la experiencia ganada con los planes anteriores sabemos que el capital anual se calcula con la expresión:

$$C_f = C \left(1 + \frac{0.1}{12} \right)^{365}$$

Y que el valor $C \left(1 + \frac{0.1}{12}\right)^{365}$ nos permite decir que el interés es 10.52% por lo tanto la junta directiva no tienen por qué estar nerviosa.

A pesar de lo novedoso el plan 3 no logra captar el interés del público, por lo que el gerente después de poner el plan 4 con liquidaciones cada hora, el plan 5 con liquidaciones cada segundo y obtener los mismos resultados negativos, resuelve acabar de una vez con la competencia con lo que él bautiza como el “superplan”.

Superplan: liquidación en cada instante de tiempo.

Antes de que el superplan sea conocido por los clientes el gerente es citado por la junta directiva del banco para que explique las razones de su nueva locura.

¿Cómo argumentó el gerente?

“señores, primero que todo, permítanme preguntarles si ustedes estarían de acuerdo en reconocer un interés del 10.6% anual en una sola liquidación al final del año.”

Como la respuesta fue un generalizado sí, el gerente continuó: “Pues bien, este superplan ofrece una tasa efectiva anual, menor que el 10.6% lo que aunado al efecto psicológico que se produce entre la gente ante la perspectiva de ver supermultiplicado su dinero, nos va a permitir aumentar significativamente el número de nuestros clientes. Y digo que es menor que el 10.6% por la sencilla razón de que...”

¿Cuál es la sencilla razón que esgrimió el gerente?

Con lo que hemos aprendido y siguiendo de cerca los diferentes planes del noble gerente podemos plantear la siguiente expresión que nos da el capital final que se obtiene al depositaron capital C a una tasa de interés R (tomando el valor decimal correspondiente) cuando el número de liquidaciones es n :

$$C_f = C \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Y más específicamente el factor que nos permite calcular el interés efectivo anual

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Pues bien, se trata finalmente de saber si la expresión crece indefinidamente como están pensando los miembros de la junta directiva del banco.

Con ayuda de las técnicas de límites se puede ver que el valor del límite de la expresión anterior que corresponde a las liquidaciones instantáneas, donde e es un número muy importante en matemáticas y tiene un valor parecido al siguiente $\approx 2.718281828459045$. Es así que para nuestro caso el interés efectivo anual con liquidación instantáneamente tiene un valor de $(e^{0.1} - 1)100\%$, que sólo se diferencia de la liquidación diaria, en 0.001%.

De esa manera, podemos retomar el tratamiento de Euler, si tomamos $k = 1$ en (3), se tiene que el valor para a es el número e , Euler calcula 23 decimales de e y nos regala la representación actual. Además, escribe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Series para el Seno y el Coseno

Euler parte de la igualdad fundamental

¿Cómo define Euler las funciones trigonométricas?

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$$

si se escribe en la forma

$$\operatorname{sen}^2 z - (\sqrt{-1} \cos z)^2 = 1$$

se obtiene $(\cos z + \sqrt{-1} \operatorname{senz}) \cdot (\cos z - \sqrt{-1} \operatorname{senz}) = 1$, a pesar de los factores imaginarios, como los denominaba Euler, para luego deducir que

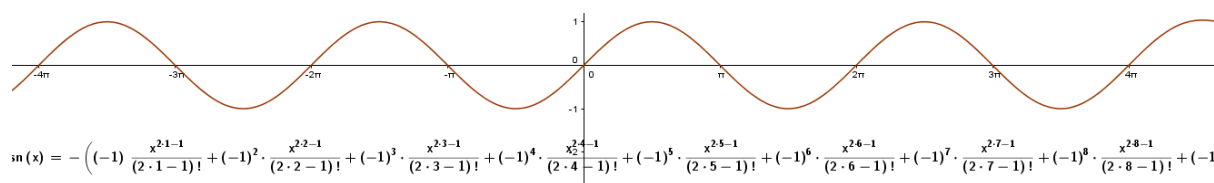
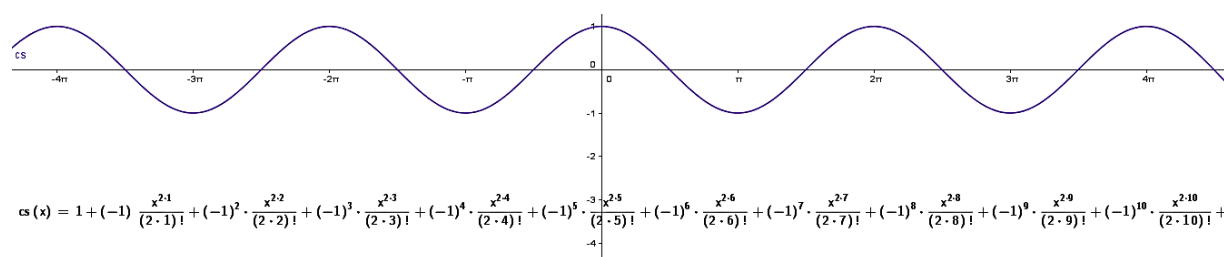
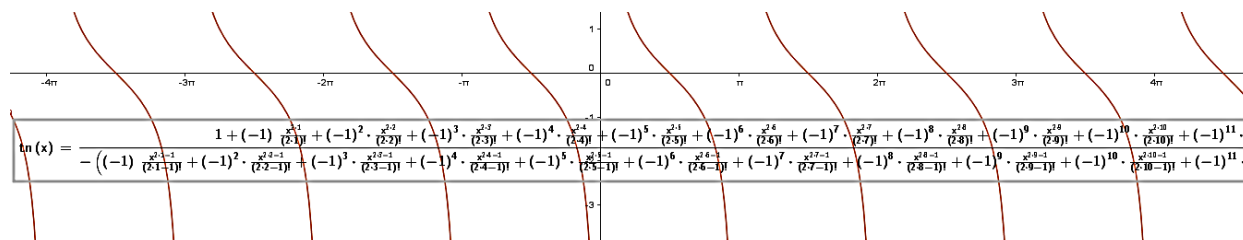
$$(\cos z + \sqrt{-1} \operatorname{senz}) \cdot (\cos z - \sqrt{-1} \operatorname{senz}) = \cos(y + z) \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen}(y + z)$$

Después de corregir la expresión de la izquierda en la igualdad anterior, demuestre las expresiones para el coseno y el seno de la suma de dos ángulos.

Y por tanto $(\cos z \pm \sqrt{-1} \operatorname{senz})^n = \cos(nz) + \sqrt{-1} \operatorname{sen}(nz)$ (Fórmula de Moivre). Del desarrollo de la fórmula, Euler obtiene expresiones para el $\operatorname{sen}(nz)$ y $\cos(nz)$, tomando z infinitamente pequeño, si $x = nz$ es finito, n es infinitamente grande.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

Figura 20. Función $\sin x$ con 20 términos en la serie.Figura 21. Función $\cos x$ con 20 términos.Figura 22. Función $\tan x$ con 20 términos.

Es fácil darse cuenta que la derivada de Fermat de la función seno vista como un polinomio extendido, derivando término a término se obtiene la función coseno.

6.3 Hacia lo infinitesimal

La derivada de Fermat, $dF, \frac{f(x+e)-f(x)}{e}$ y $e=0$, es una herramienta que permite solucionar los problemas de máximos y mínimos, razón suficiente para que Fermat figure en la historia de la matemática. Pero en este trabajo, como es lógico, se deseaba estudiar el objeto: dF , por lo que una de las preguntas naturales en las que se reflexionó fue la siguiente:

6.3.1 ¿ dF tiene alguna interpretación geométrica? En el siguiente gráfico se aprecia los elementos que componen a dF , en verde, e la distancia en x de los puntos $(x, f(x))$ y $(x + e, f(x + e))$ y la diferencia $f(x + e) - f(x)$.

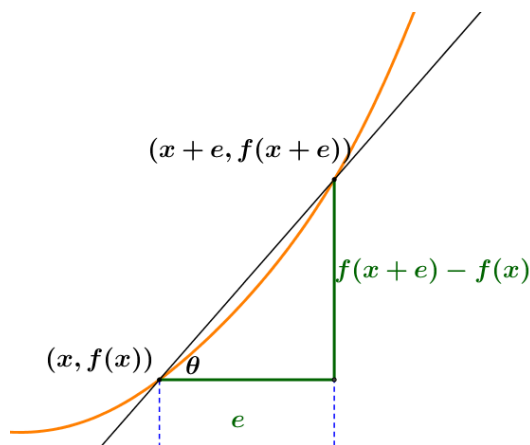


Figura 23. Interpretación geométrica de dF .

El cociente $\frac{f(x+e)-f(x)}{e}$ resulta ser la tangente del ángulo θ del triángulo que está conformado por los segmentos e , $f(x + e) - f(x)$ y la recta que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x + e, f(x + e))$.

Si bien esta es la representación para cualquier e , la pregunta es ¿qué significado se tiene cuando $e = 0$?

Para poder visualizar el significado en este valor, se consideran valores diferentes de e con la condición de que estén cada vez más cercanos a 0. Las rectas secantes que se van formando se muestran en la Gráfica 2.

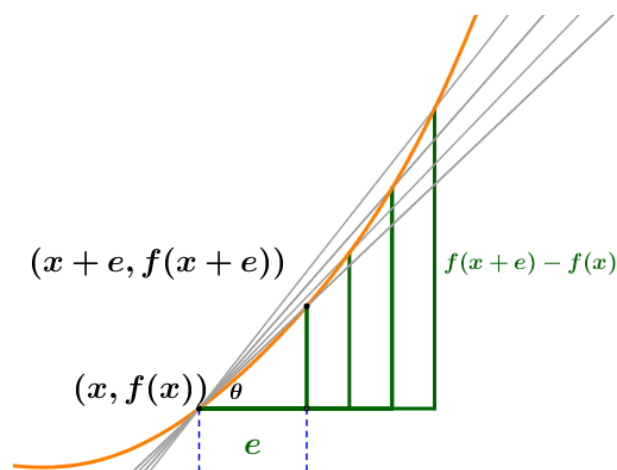


Figura 24. dF como la tangente del ángulo θ con e cada vez más pequeño.

Se aprecia que los puntos $(x, f(x))$ y $(x + e, f(x + e))$ se acercan cada vez más a una única recta que pasa por $(x, f(x))$.

La diferencia del razonamiento que se plantea en los libros con la interpretación geométrica de dF , es la idea de la tendencia $h \rightarrow 0$, esto se debe al tipo de funciones. Al definirse la derivada dF para las funciones continuas y en series polinómicas, dado que no hay indeterminación no hay ningún inconveniente en hacer $e = 0$, ya que en la definición actual de derivada como límite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Indica que para f una función polinómica, y por tanto continua, al resolver el límite al final se hace $h = 0$, por lo que hay una coincidencia total con el procedimiento de acercamiento $h \rightarrow 0$ del límite. Finalmente la dF termina siendo la pendiente de una única recta, que llamaremos la recta tangente de Fermat, que pasa por el punto $(x, f(x))$, deducción que se hace sin la necesidad del concepto de límite.

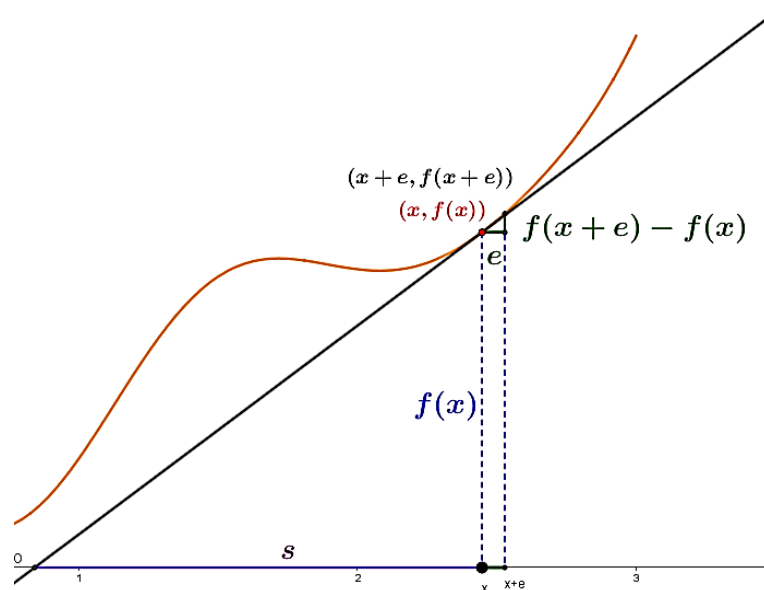


Figura 25. La recta tangente de Fermat para el punto $(x, f(x))$ en un momento previo a $e=0$. Con S la subtangente.

Cuando se usa dF , desde lo algebraico no se necesita observar ninguna tendencia, pero cuando $e = 0$ gráficamente no se sabe que sucede al obtenerse $0/0$, es por ello que se necesita un punto que sea diferente a $e = 0$ que oriente y sea cambiante, es bajo este argumento que aparece la idea de ‘acercarse’, por lo que cuando e se hace cada vez más pequeño nos permite observar la tendencia de la pendiente y de la recta secante que se forma del cociente incremental, indicando cuál es la dirección que toma, permitiéndonos deducir que dF finalmente es la pendiente de la recta tangente que pasa por un punto de la función.

6.3.2.1 ¿Otra manera de interpretar geométricamente el aporte de Fermat?

Otro camino: Desde el problema de la tangente, encontrar que dF es la pendiente de la recta tangente sería una alternativa al diseño de la propuesta, en donde se podría utilizar la interpretación de (Edwards, 1979) de la subtangente.

$$s = \frac{f(x)}{dF}$$

La interpretación geométrica de dF por sí misma, es un problema de contexto geométrico que se convierte en un problema de interés cuando ayuda a resolver o se relaciona con otro grupo de problemas como los máximos y mínimos.

¿Tiene alguna utilidad la interpretación geométrica de dF para los problemas de máximos y mínimos? Puede que existan dificultades para comprender que dF es la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera de una función f , pero cuando se habla de máximos o mínimos no hay problema en afirmar que la pendiente de la recta tangente en ese punto es cero, ya que al estar el punto máximo por encima de los demás puntos en la función, no hay forma de que la recta tangente que pasa por ese punto corte a la curva en un punto distinto, en términos de tangencia clásica.

Esto genera una conexión entre los dos problemas y podría ser otra forma de presentar el problema de la recta tangente, empezando con encontrar la recta tangente en un máximo o mínimo ¿Existe otra utilidad para la interpretación gráfica de dF ?

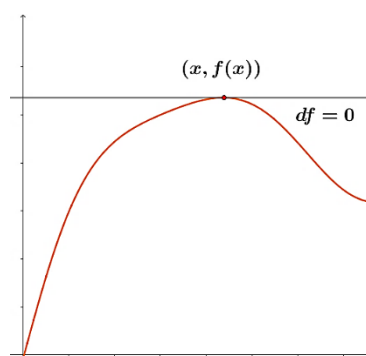


Figura 26. La recta tangente de Fermat en un máximo.

Finalmente, para generalizar el razonamiento de Fermat en el problema de hallar la recta tangente en un punto de una parábola, comparar a $f(x + e)$ con k .

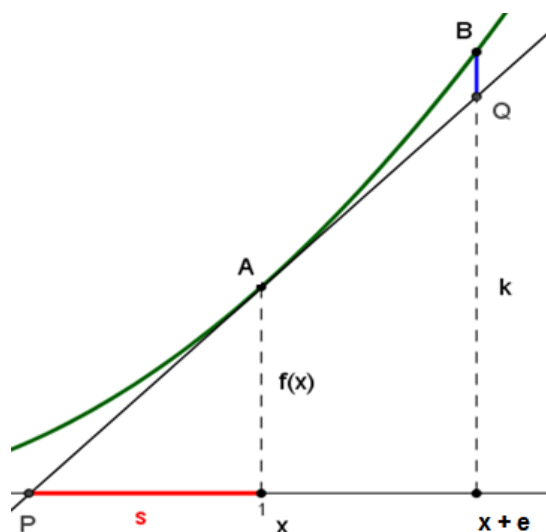


Figura 27. Subtangente.

Este fue un primer acercamiento a lo infinitesimal, tomado como una diferencia mínima. Después el hecho de interpretar dF geométricamente nos dio elementos para abordar los problemas de razones de cambio, usando las aproximaciones. Abordar esta licencia desde lo algebraico conllevaría a definir unas reglas de manejo de los infinitesimales.

Así se plantea una alternativa y una posible continuación para la propuesta, la reflexión y mención de ellos enriquece el trabajo porque obedece a los elementos metodológicos adoptados.

6.3.2 Otro abordaje a las razones de cambio y la derivada de Fermat. Una razón de cambio se refiere a la medida en la cual una variable se modifica con relación a otra. La razón de cambio más frecuente es la velocidad, que se entiende a partir del vínculo que se establece entre el cociente de un trayecto de la distancia y el tiempo.

$$v(t) = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

Suponiendo que un auto recorre 150 kilómetros en tres horas, se tiene que $v(t) = \frac{150}{3} = 50$

La razón de cambio existente entre ambas variables, en este caso la velocidad, es 50 kilómetros por hora. Para este ejemplo los 50 kilómetros por hora determinan una variación que no necesariamente existe en la realidad, en otras palabras, no sabemos si el auto ha mantenido esta velocidad a lo largo de las tres horas, lo que se quiere decir es que si se asumiera esa velocidad de forma constante se lograría recorrer la misma distancia.

Es posible entonces distinguir entre dos tipos de razón de cambio: la promedio, comentada anteriormente, y la instantánea. La razón de cambio instantánea resulta útil para conocer la velocidad en un instante específico.

Si la gráfica a continuación representa la función que relaciona los kilómetros recorridos por el auto en el transcurso de las tres horas, y se quiere saber la velocidad en el instante t .

¿La función puede decrecer en alguna parte de su recorrido?

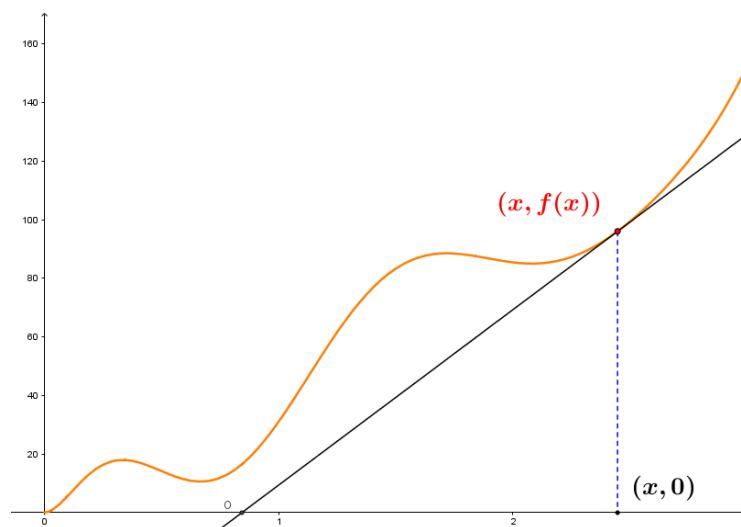


Figura 28. Distancia (kilómetros) vs tiempo (horas) para el ejemplo.

Cualquier otro punto $t + e$ distinto a t , señalaría una razón de cambio $\Delta d / \Delta t$. Que gráficamente se vería como sigue:

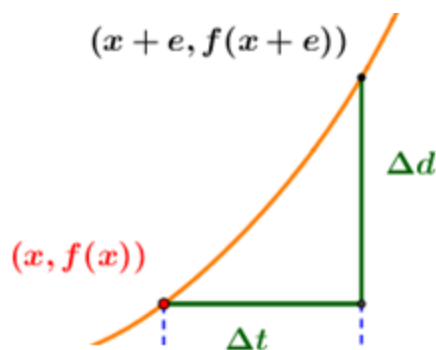


Figura 29. Razón de cambio $\Delta d/\Delta t$.

La velocidad instantánea en el instante x implica acercar el punto $(x + e, f(x + e))$ al punto $(x, f(x))$ por lo que Δt se hace cada vez más pequeño, por lo tanto hallar la razón instantánea utiliza el mismo razonamiento utilizado para hallar la interpretación geométrica que se dio a dF .

¿Cuál sería el razonamiento de Fermat para encontrar la velocidad instantánea?

Desde lo algebraico se plantea:

$f(x + e) - f(x) \sim 0$, con $\sim$ como pseudoigualdad ya que buscamos la velocidad instantánea.

Luego la expresión $f(x + e) - f(x)$ será factorizable dado que estamos tratando con funciones polinómicas y tendrá la forma $e * (\text{polinomio}) \sim 0$, por lo que $e \sim 0$, se da cuando $e = 0$, la pseudoigualdad se convierte en igualdad y la velocidad instantánea es precisamente la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto t o el instante t en el tiempo que buscábamos.

Si bien, tanto la tangente como la razón de cambio instantánea se vislumbran como los valores resultantes cuando se asume el valor $e=0$ en el cociente que los define, el problema está en que si se asume este valor desde un comienzo se obtiene una cantidad indeterminada de la forma $0/0$. Este hecho, hace necesario estudiar la tendencia de ese cociente cuando el valor de e no es cero. Como es claro, la tendencia que interesa es en las cercanías del valor $e = 0$. Este proceso de acercamiento en el caso de los polinomios se facilita, en el sentido de que la indeterminación se

elimina por el hecho de que el numerador siempre tiene a e como factor común y se cancela con el e del denominador. Al no existir indeterminación, la tendencia que se estudia coincide con el valor del cociente cuando $e = 0$.

Una posible continuación del diseño para trabajar los elementos mencionados anteriormente podría plantearse como sigue:

UNIDAD 4

PARTE IV

“EL MODELO”

Un modelo aproximado que indica el espacio recorrido del auto con respecto al tiempo desde la casa de Cristian hasta la casa de Gabriel es el siguiente:

$$d(t) = -58t^6 + 230t^5 - 375t^4 + 274t^3 - 10t^2 + 8t$$

1. *¿Se puede encontrar una forma para calcular la velocidad del auto en cualquier instante de tiempo? Explique.*
2. *Calcule la velocidad máxima que alcanzó el automóvil de María en el recorrido.*

Con el objetivo de que los estudiantes comprendan que dF de la función d , es la función velocidad y que dicha función nos da información de la velocidad en cada instante.

Nota. Tal vez haya que formalizar un poco esta idea de la “tendencia” que no es otra cosa que la idea de límite. Esto se haría comparando los valores de la expresión en estudio con los valores cuando $e = 0$ y observar que las diferencias son cada vez más chicas. Esta idea es la que después se transforma en el procedimiento simple de asumir el valor 0 para el incremento e .

Este capítulo final enmarca, grosso modo, unos lineamientos que se tomaron en el diseño y plantea algunas alternativas y continuaciones para la propuesta, la reflexión y mención de ellos enriquece el trabajo porque obedece a los elementos metodológicos adoptados.

Referencias Bibliográficas

- Alarcon, F., Suescún, C., de la Torre, A. (2005). El método de las tangentes de Fermat. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, vol. XIII, núm. 2, pp. 101-123. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=46800208>
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gomez, P. (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Mexico: Grupo Editorial Iberoamericano. 97-140.
- Barnes, M. (1995). An intuitive approach to calculus. Recuperado de http://hsc.csu.edu.au/math/teacher_resources/2384/barnes.htm.
- Boyer, C. (1949). *The History of Calculus and its Conceptual Development (the Concepts of the Calculus)*. New York: Dover.
- Boyer, Carl B. (1991) "A History of Mathematics". John Wiley & Sons, Inc. USA.
- Boyer, C. B. (1993). Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Cálculo (H. H. Domingues, Trans. Vol. 6). Sao Paulo: Atual Editora Ltda.
- Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. F. (2004). La educación matemática realista. *I PARTE: La educación matemática realista. principios que se sustenta.*, (pág. 10). Chiapas. Obtenido de http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/articulo_escuela_invierno2.pdf
- Collette, J. (1985). *Historia de las matemáticas* (Vol. II). Madrid: Siglo XXI.
- Dolores, C. (2000). El futuro del cálculo infinitesimal. ICME-8 (pp. 155-181). México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Edwards, C. H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer- Verlag.
- Eisenberg T. & Dreyfus T. (1990). On the Reluctance to Visualize in Mathematics. In ZimmermannW. & Cunningham S. (Eds), *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 25-37), MAA Series. USA.
- Eves, H. (1969). *An introduction to the History of Mathematics*. New York: Rinehart and Winston.
- Farmaki, V. & Paschos, T. (2007). *Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities*.
- Fermat, P. (1891-1912). *Oeuvres de Fermat*. París.
- Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht, Reidel Publishing Co.
- Freudenthal, H. (1977), 'Antwoord door Prof. Dr H. Freudenthal na het verlenen van heteredocoraat' *Euclides* 52, 336–338.
- Freudenthal, H.(1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Riedel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*, Kluwer, Dordrecht, Reidel Publishing Co.
- Gil, D. y De Guzmán, O. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática Tendencias e*

- Innovaciones. *Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura*. Recuperado el 28 de julio de 2011 de <http://www.oei.es/oeivirt/ciencias.htm>
- González Urbaneja, P. M. (2008). *Fermat y los orígenes del cálculo diferencial* (Primera ed.). España: NIVOLA libros y ediciones, S. L.
- Grattan-Guinness, I. (1980). *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910. An introductory History*. Madrid: Alianza Editorial.
- Gravemeijer, K. (1994), *Developing Realistic Mathematics Education*, CD-β Press / Freudenthal Institute, Utrecht, The Netherlands.
- Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). *Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example*. *Educational Studies in Mathematics* 39, 111-129.
- Guzmán, M. (1992). Tendències innovadores en educació matemàtica. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*(7), 7-33.
- Hitt F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Editor), *Investigaciones en Educación Matemática Vol. I* (pp. 245-264). Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- Hitt, F. (2009). "Dificultades En El Aprendizaje Matemático," 1–10. Recuperado de https://www.academia.edu/807014/Dificultades_en_elaprendizaje_del_cálculo?autodownload
- Jankvist, T. (July de 2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 235-261. doi:10.1007/s10649-008-9174-9
- Jiménez, D. (2010). El problema del área en los Elementos de. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, XVII(2), 179-207. Obtenido de https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol17/BAMV_XVII-2_p179-207.pdf
- Jimenez, a. suárez, n. y Galindo, s. (2010). La comunicación: eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber*, 1(2), 173-202.
- Keisler, J. (2007). *Elementary Calculus, and infinitesimal approach*, second Edition, University of Wisconsin.
- Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (Vols. I,II,III). Madrid: Alianza Editorial.
- Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad.
- Leithold L. (1998). *El cálculo*. 7ma. Edición. Oxford University Press. Thomas/ Finney (1998) *Cálculo de una variable*. 9ª. Edición Addison Wesley.
- Lozano, Y. (2011). Desarrollo del concepto de la derivada sin la noción del límite. Trabajo de grado. Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Bogotá
- McGowen, W. (1998). *Calculus: A Liberal Art* (2nd ed.). New York, NY: Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1658-2>

- Moreno, C., & Rios, P. (Diciembre de 2006). Concepciones en la enseñanza del cálculo. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, 7(2), 50-62. Obtenido de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=41070203>
- Newman, James R. (1980) “El Mundo de las Matemáticas”. Enciclopedia Sigma, Tomo 4. Ediciones Grijalbo, México.
- OECD. (2014). Resultados de PISA 2012 en foco Overview. *Pisa*, 44. Recuperado de [HYPERLINK "http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA2012_Overview_ESP-FINAL.pdf"](http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA2012_Overview_ESP-FINAL.pdf)
- Puig, L. (1997). *Análisis fenomenológico*. Universidad de Valencia, Didáctica de las Matemáticas, Barcelona. Obtenido de <https://cursa.ihmc.us/rid=1HW6T604L-1TJY5R0-1RNJ/Ensayo%20acerca%20del%20Análisis%20Fenomenologico.pdf>
- Purcell, E (2007) *Cálculo diferencial e integral*. Serie AWLL Pearson Educación
- Rico, L. (2005). La competencia matemática en PISA. En Fundación Santillana (Ed.), *La Enseñanza de las matemáticas y el Informe PISA* (pp. 21-40). Madrid: Editor.
- Ryan, J. (1992). Integrating computers into the teaching of calculus: differentiating student needs. In B Southwell, B Perry, & K Owens (Eds.), *Proceedings of the 13 th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 478–487). Richmond: University of Western Sydney. 4–8 July.
- Savizi, B. (2007). Applicable problems in the history of mathematics: Practical examples for the classroom. *Teaching Mathematics and its Applications*, 26(1), 45-50.
- Smith, D. (1959). *A source book in mathematics*. New York: Dover publication inc.
- Stewart J. (2008). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (6ta ed). CENGAGE Learning.
- Suescún, C. M., Alarcón, S. A., & de la Torre, A. (2005). El método de las tangentes de Fermat. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, XIII, 101-123. Obtenido de <http://4www.redalyc.org/articulo.oa?id=46800208>
- Tall, D. (1993). Students’ Proceedings of working group on students’ difficulties in calculus. (págs. 13-28). Quebec, Canada: ICME-7. Obtenido de <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html>.
- Treffers, A. and Goffree, F.: 1985, ‘Rational analysis of realistic mathematics education– the Wiskobas program’, in L. Streefland (ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, OW&OC, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands*, Vol. II, pp. 97–121.
- Ubuz, B. (2001). “First year engineering students’ learning of point tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers”. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, Vol.20, 113-137.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1995). ‘A representational model in a long term learning process– the didactical use of models in Realistic Mathematics Education’ paper presented at the AERA conference, San Francisco, CA.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2002). ‘Realistic Mathematics Education as work in progress’, F.L.

- Lin (ed.), Common Sense in Mathematics Education. Proceedings of 2001
- Vrancken, S., Engler, A. y Müller, D. (2010). Una secuencia didáctica para la introducción del concepto de derivada. Resultados de su implementación. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23, 379-388. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Zill, D. G., & S, W. W. (2011). *Cálculo Trascendentes tempranas* (Vol. IV). McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A.
- Zimmermann W. (1990). Visual Thinking in Calculus. In Zimmermann W. & Cunningham S. (Eds), *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 127-138), MAA Series. USA.

Apéndice A: Unidades y Manual docente

Introducción

(PARA LA LECTURA DEL MANUAL DOCENTE)

Estimado profesor, bienvenido a compartir con nosotros este proyecto de hacer algo distinto pensando en que nuestros estudiantes logren mejores aprendizajes. Este proyecto se apoya en cuatro principios básicos:

- *No hay indicaciones para que el estudiante resuelva un problema. Un problema deja de serlo si se indica cómo resolverlo.*
- *Sólo al abordar un problema un estudiante entra en su mundo racional, no podemos negarle ese derecho.*
- *El profesor solo acude al estudiante si éste lo invita a compartir su mundo. En ese momento, el profesor guía la discusión buscando siempre que sea el estudiante por sí solo el que logre la solución.*
- *La solución de un problema genera otros problemas.*

Cada actividad sigue un esquema no estricto de pasos:

I. Planteamiento del problema: Las unidades de la cartilla empiezan con un problema y finalizan con algunos problemas sugeridos.

II. Labor de indagación del estudiante: Es el tiempo que se le da al estudiante para que intente resolver los problemas. No debe indicar nada, solo responder sus inquietudes, sugiriendo estrategias, pero NUNCA informando la manera de resolver el problema.

III. Presentación de los resultados de un estudiante: Debe elegir a uno, o algunos, que muestren su razonamiento a todos, no importa si el problema está resuelto o no.

IV. Trabajo en grupo de los estudiantes: Sugerir que trabajen en grupo es valioso, deben defender sus razonamientos, la confrontación de argumentos es un proceso que no solamente ratifica lo que hacemos, sino que ayuda a darse cuenta de los errores o vacíos en lo que hacemos.

V. Socialización final – Se trata de una discusión final cuya dinámica se genera con la presentación de los resultados obtenidos por algunos de los grupos. La actividad debe terminar con una solución mayoritariamente compartida por los estudiantes. Adicional a la respuesta debe proponerse un esquema, a manera de resumen, de las ideas o conceptos que ayudaron a resolver el problema ordenándolos dentro de un esquema deductivo.

Su preparación de la clase implica abordar los problemas que se plantean a los estudiantes, antes de la lectura del manual docente y resolverlos plenamente. Esta solución está restringida a los presaberes de los estudiantes, por lo que debe resolverlos haciendo uso de ellos. Al final del manual docente para cada unidad encontrará los problemas propuestos. A continuación, en los recuadros, se presentan las actividades, manual docente, y problemas propuestos en ese orden, y por cada unidad.

Unidad 1

BIENVENIDO QUERIDO ESTUDIANTE

EL PROBLEMA DEL CERCADO



*Figura 30. Ilustración Campesino colombiano, tomado de:
<https://pixabay.com/es/campesinos-zona-cafetera-filandia-2517476/>*

Un campesino necesita construir un cercado para cuidar su próxima plantación de tomates, para ello compró 142 metros de cerca, y quiere construir la cerca rectangular más grande (mayor área) que le permita tener un mayor cultivo.

¿Cuál es la cerca más grande que se puede construir?
Justifique.

¿EL PROBLEMA DEL CERCADO EN EL COMPUTADOR?



Abre un archivo nuevo en Excel (o cualquier hoja de cálculo) y genera valores de acuerdo a lo que explique el profesor.

EL PROBLEMA DE LA CAJA

Para empacar el tomate cosechado, el campesino debe



producir cajas, con las siguientes características:

- 1) Debe estar abierta por la parte superior
- 2) Se debe fabricar cada caja a partir de una pieza rectangular de cartón que mide 1 metro de largo por 70 cm de ancho.
- 3) La caja puede cerrarse al cortar en la línea continua (—) y doblar en las líneas punteadas (---).

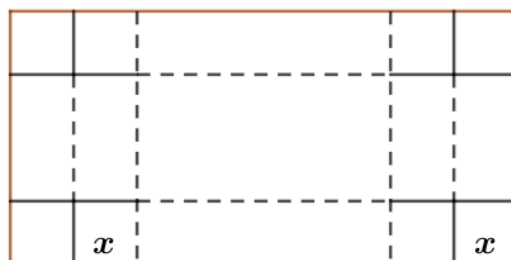


Figura 32. Caja desplegada.

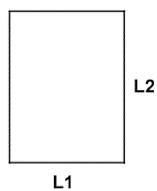
En el siguiente enlace puede verse un video de cómo se construye la caja:

<https://bit.ly/2xjRlwl>

Objetivo de la unidad 1: A partir del *problema del cercado* introducir el concepto de función y su valor óptimo de acuerdo con el contexto del problema. Es decir, estamos tratando simultáneamente el problema de construir una función que relacione la dependencia de la variable en estudio respecto a otras variables que son las que se pueden controlar directamente, y el problema de su optimización. Es un reto grande abordar las dos cosas simultáneamente, la idea es que los estudiantes vean que para optimizar es necesario hallar la expresión funcional que no es otra cosa que expresar el área en términos de la base y la altura del rectángulo.

Comentario 1: No nos interesa definir función, aquí prima resolver el problema, lo que buscamos es que los estudiantes encuentren la expresión siempre y cuando sea de valor para abordar el problema.

I. y II. Al plantear el *problema del cercado*, se limita el tiempo para que los estudiantes trabajen en él. Se sugieren 20 minutos, durante los cuales usted debe revisar lo que hacen los estudiantes, preguntarles e ir agrupando sus respuestas. Por ejemplo: Algunos estudiantes puede que sólo usen números enteros en sus raciocinios, esos pueden ser el primer grupo que hable en la socialización.



Otro grupo puede usar números no enteros, dando lugar al hallazgo de la respuesta, aunque es poco probable, no hay inconveniente por eso. Si el hallazgo es el producto de un golpe de suerte (y usted lo sabe, porque conoce la forma en que llegaron a él) cambie los datos del problema para hacerlo más complicado de ser resuelto por puro ensayo y error. Tenga en cuenta, que la estrategia de ensayo y error razonada dirigida a acotar el intervalo donde se encuentra la solución esconde ideas interesantes que merecen atención.

A partir del gráfico anterior, puede preguntar ¿Cómo se calcula y expresa algebraicamente el área de un rectángulo?

$$A = L1 * L2$$

Es este punto, la expresión anterior será una función para nosotros. No es necesario denominarla así y mucho menos definirla y entrar en tecnicismos. Llegar a esta expresión es el primer objetivo.

III. Se pedirá a distintos estudiantes, en la primera socialización que escriban en el tablero los valores que sugieren.

IV. Puede sugerirles una tabla como la siguiente:

L1 (metros)	L2 (metros)	A (¿Cuál es la unidad de medida? Puede preguntar)

Para pensar: ¿Para qué hicimos la tabla anterior?

En la tabla podemos sugerir ordenar L1 de manera creciente, por tanto, los valores de L2 estarán en forma decreciente. En este punto a los estudiantes se les puede preguntar entre cuáles valores de L1 puede encontrarse el valor máximo de A.

Aquí vamos a pedir a los estudiantes que generen muchos valores de A para el intervalo de los valores de L1 que proponen usando una hoja de cálculo, por ejemplo, Excel.

Comentario 2: ¿Por qué Excel? Cuando se generan los valores en Excel los estudiantes están haciendo matemática, la fórmula que se necesita y que depende de los valores de otra columna, es una clara relación funcional, en donde se puede identificar lo que varía.

Puede preguntar cuántas columnas debe usar en Excel. Esto da pie para hablar de las dos funciones dentro del problema. ¿Cuáles son las variables que debemos poner en las columnas? Podemos, a modo de explicación del uso del software, crear una hoja de cálculo con la columnas L1 y L2 de tal forma que sólo deba escribir los valores de L1, esto se logra ubicándonos en la casilla B1 en Excel y escribiendo en la barra de fórmulas: $= 71 - A1$ como se muestra en la *Figura* que se muestra a continuación:

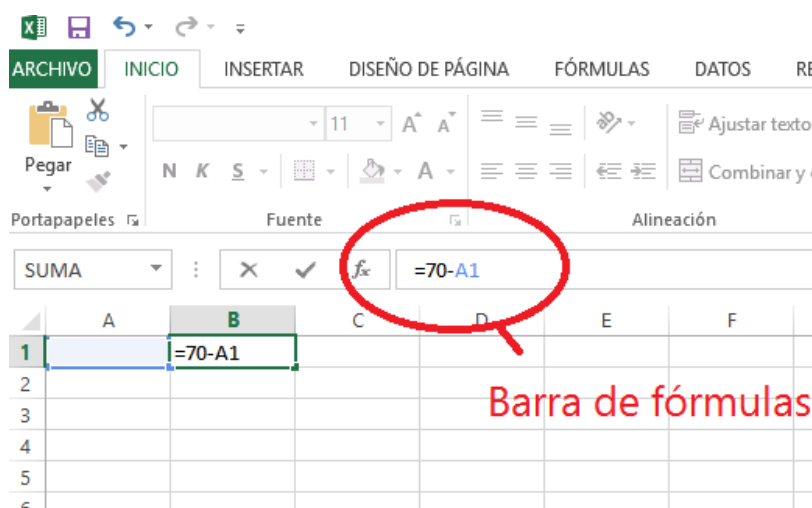


Figura 33. Manejo de Excel.

A	B
1	30
2	30,02
3	30,04
4	30,06
5	30,08
6	30,1
7	30,12
8	30,14
9	30,16
10	30,18
11	30,2
12	30,22
13	30,24

Figura 34. Manejo de Excel 2.

Si el intervalo es por ejemplo los valores entre 30 y 40 metros, para conseguir los 100 valores escribimos en la celda A1 30 y en la celda A2 30,1 y seleccionamos las dos celdas A1 y A2 con la tecla  y arrastramos haciendo clic izquierdo en el cuadro que se forma en la esquina inferior derecha de la celda A2, arrastramos, sin soltar el clic izquierdo hasta llegar al valor de 40. De la misma manera seleccionamos B1 y arrastramos hasta llegar al valor de 40 en la celda de la columna A.

De manera similar se propone a los estudiantes que generen en Excel los valores de A en términos de uno de los lados.

V. A partir de la tabla que generaron los estudiantes, se puede preguntar cuál es el valor más grande que encontraron para A, se puede cambiar la parte decimal y volver a explorar.

Debe preguntarse ¿Podemos delimitar más los valores de L1 para encontrar el valor mayor de A? Es posible que aquí los estudiantes estén conformes con alguna respuesta.

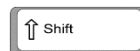
Después de acordar un intervalo pequeño y generar valores de A, debe preguntarse sobre alguna propiedad que puedan observar en la tabla, se espera que encuentren productos que se repiten como 32×41 y 41×32 . Algún estudiante puede encontrar que siempre se da esa condición, excepto en el valor máximo si es que aparece en la tabla. Ahora vamos a graficar la función para

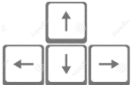
profundizar en la propiedad observada. Podemos hacerlo de dos maneras, la primera consiste en socializar y obtener la expresión de A a partir de la tabla que generaron en Excel:

$$A = L1 * (71 - L1) = 71 L1 - L1^2,$$

y usar una graficadora. La segunda es graficar desde la hoja de Excel, ya que la expresión anterior está presente en la hoja de Excel. Para ello, lo que se debe hacer es:

Seleccionar las dos columnas en la hoja de Excel, oprimiendo la tecla



y sin soltar usar las  teclas del teclado.

Después de seleccionar las columnas, vamos a la barra de tareas, en *INSERTAR* seleccionamos: *insertar gráfico de dispersión* y entre las opciones que se despliegan podemos elegir *Dispersión*. Seleccionamos esta opción para que se genere la discusión sobre la no continuidad de la curva, como se muestra a continuación.

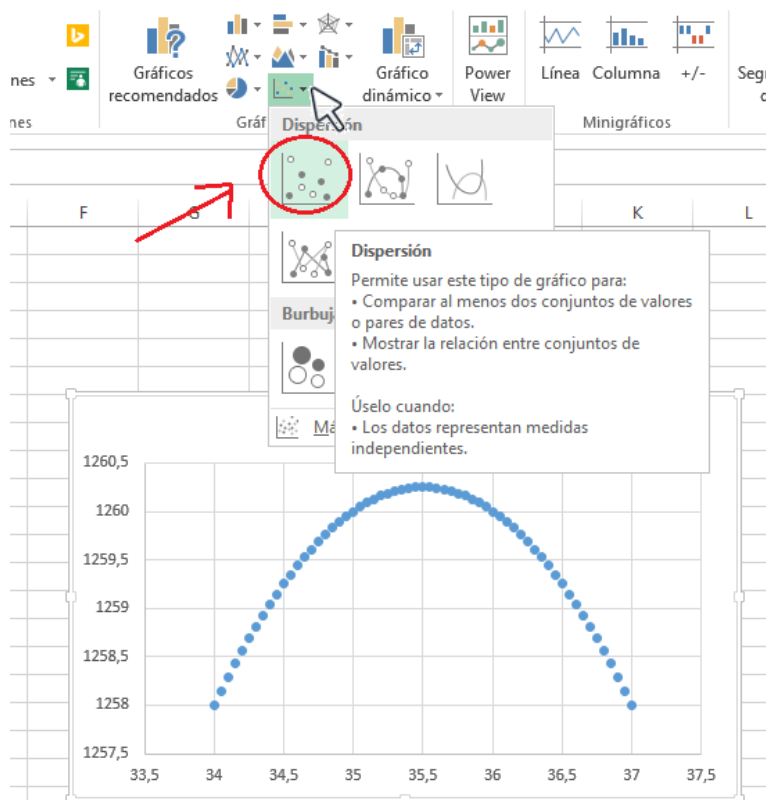


Figura 35. Manejo de Excel 3.

Puede proponerse cambiar la parte decimal de los primeros valores en la primera columna a 0.001, por ejemplo, para generar más valores para el intervalo que eligieron para L1, en la gráfica anterior se tomó valores de L1 entre 34 y 37. Al hacer de nuevo la gráfica, los estudiantes encontrarán que el gráfico de dispersión se acerca cada vez más a una curva.

La opción  en Excel permite crear una gráfica con los puntos y la curva a la vez. Mientras que la opción  genera una curva 'continua'.

La gráfica en este momento podría delimitar aún más los valores que puede tomar L1, los estudiantes pueden establecer aproximaciones al resultado, creando un punto haciendo clic

izquierdo sobre la curva generada con la herramienta , el punto puede moverse sobre la curva y además muestra sus coordenadas poniendo el cursor sobre el punto (sin hacer clic)

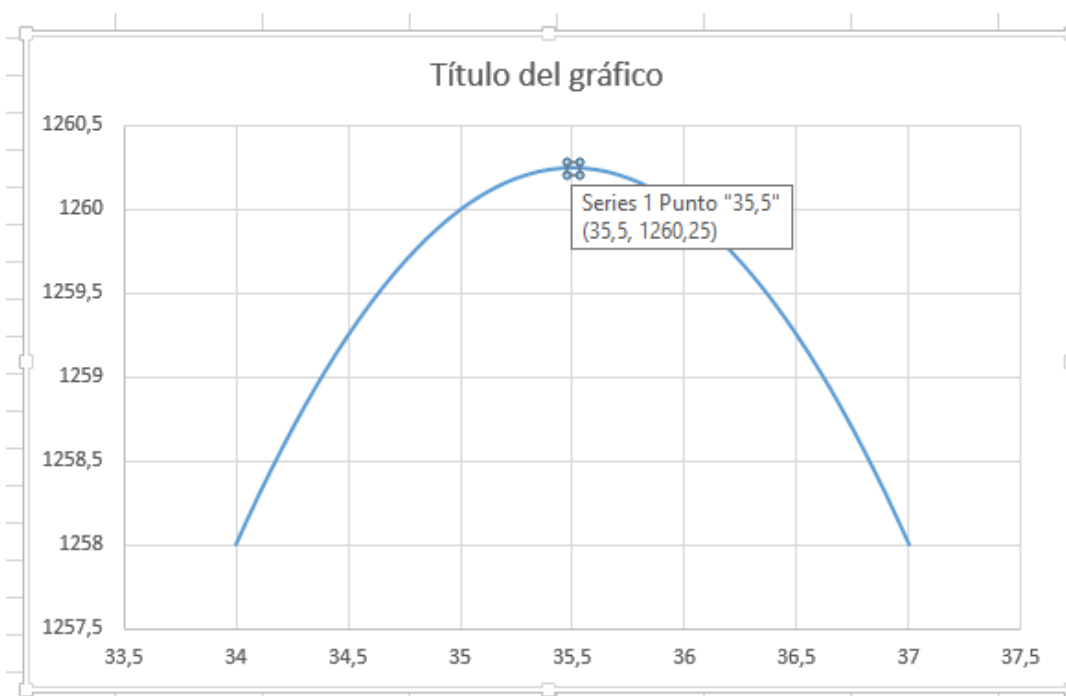


Figura 36. Manejo de Excel 4.

Algún estudiante puede recordar lo aprendido en curso previo de geometría analítica y argumentar que, en este caso, el vértice de la parábola es el máximo.

Cuando estén conformes con la solución, puede mostrarles una solución alternativa (solución de la Proposición VI.27 del libro de Euclides en términos algebraicos):

Elevando al cuadrado la ecuación para el semiperímetro: $L1 + L2 = 71$, se tiene que:

$$71^2 = (L1 + L2)^2 = (L1 - L2)^2 + 4 L1 L2 (*)$$

Se puede plantear que $(L1 - L2)^2 + 4 L1 L2 \geq 4 L1 L2$, porque $(L1 - L2)^2$ siempre es positivo.

Entonces se plantea la desigualdad:

$$71^2 \geq 4 L1 L2$$

Por lo que el producto $L1 L2$, el área del rectángulo siempre será: $L1 L2 \leq 71^2/4$.

Y sólo cuando $L1 = L2$, al reemplazar en (*) se tiene que: $71^2 = (L1 - L1)^2 + 4 L1 L1$, es decir $L1^2 = 71^2/4$, entonces, se puede afirmar que el producto es máximo.

EL PROBLEMA DE LA CAJA

Para este problema, los estudiantes deben traer cartulina o cualquier papel que tenga las magnitudes que se piden, tijeras, regla para medir, cinta o pegante. Inicialmente se les dará 10 minutos para que en una hoja intenten resolver el problema de manera individual, luego para fomentar el trabajo en grupo, se formarán grupos (tres o cuatro, o como considere mejor) y para no desperdiciar papel se les pedirá que en un tiempo de 20 minutos construyan la caja con mayor volumen apelando exclusivamente a su intuición (ya no puede usarse ningún papel para hacer cálculos) y comunicación con el grupo, el trabajo puede convertirse en una ‘competencia’ y la recompensa al grupo ganador puede acordarse con todo el grupo previamente (puede ser una nota, un dulce, el orgullo de ganar), además puede haber penitencia para controlar a algún perezoso.

Pasados los 20 minutos se les pide a los estudiantes que escriban en su caja un nombre para el grupo y tomen las magnitudes, largo, ancho y alto de la caja, dado que puede haber confusión, se puede acordar que largo es el lado más largo de la caja que no es el alto. Mientras los estudiantes toman medidas, en el tablero se resume el trabajo realizado por los grupos haciendo uso de un cuadro semejante al que abajo se presenta.

Nombre de la caja	Largo	Ancho	Alto	Volumen
1.				
2.				
3.				

Previa pregunta de cómo se halla el volumen de la caja, se procede a llenar la columna de volumen y después de la ‘premiación’ se pregunta:

- I. *¿Se puede construir una caja con mayor volumen que la ganadora, respetando las condiciones?*
4. *¿Existe una única caja con el mayor volumen? ¿Es decir, las medidas de la caja de mayor volumen, son únicas?*
- 5.

II. *En los mismos grupos, pueden darse 20 minutos para que aborden la preguntas, pidiéndoles que argumenten bien su respuesta porque al final debe haber un representante que explique a los demás.*

6.

III. *En esos veinte minutos de trabajo, se espera que los estudiantes planteen una función de volumen, puede que usen Excel, de no ser así puede sugerirles que lo usen, es importante que vayan asumiendo la continuidad de la función (a propósito, pueden plantearse preguntas alrededor de este asunto de la continuidad de la función subyacente al problema) y la idea del límite o de tendencia cuando se toman valores muy cercanos los unos a los otros.*

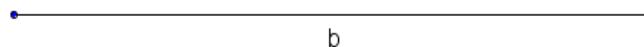
IV y V En la socialización final, cada representante debe llenar el cuadro anterior con las nuevas magnitudes que encontraron y explicar sus cálculos, las diferencias pueden ser décimas o centésimas lo que abrirá el debate de una única solución, se les puede preguntar: ¿Qué valores puede tomar la magnitud alto, ancho y largo? ¿Qué valores puede tomar x en el problema?

Comentario final: Nos podemos dar por servidos si los estudiantes encuentran la función para el volumen así estén frustrados por no encontrar la respuesta única. Se hizo, un buen trabajo. Es ahora relevante proveer de una herramienta más poderosa para abordar y resolver los problemas propuestos, pero antes es necesario practicar, sabemos que encontrar las expresiones que modelan un problema es de los mayores retos en el aprendizaje del cálculo. Los problemas propuestos en esta unidad se enfocan en ello a través del problema de encontrar valores máximos y mínimos.

PROBLEMAS PROPUESTOS

EL PROBLEMA DEL SEGMENTO

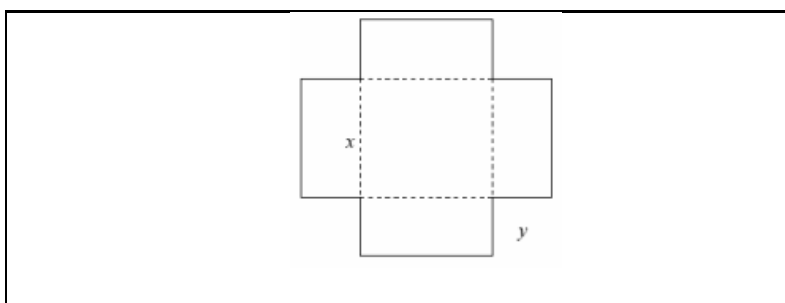
Divida un segmento de magnitud b en dos partes de tal manera que el producto de las longitudes de las dos partes sea máximo



EL PROBLEMA DE OTRA CAJA

A una empresa le pidieron construir cajas de cartón sin tapa de base cuadrada, de 2 m^3 de volumen. Como es natural la empresa quiere construir las cajas utilizando la menor cantidad de material.

Halle las dimensiones de la caja que, cumpliendo las especificaciones dadas, utilice la menor cantidad de cartón.



7. EL PROBLEMA DEL ARCO DE FÚTBOL

1. *En cierto colegio, los estudiantes amantes del fútbol cuentan con dos barras de hierro de 9 metros para construir dos arcos de fútbol para su cancha y quieren que los arcos abarquen la mayor superficie interior posible.*
8. *Las dimensiones reglamentarias del arco de fútbol profesional son de 7,4 metros de ancho por 2,5 metros de alto. Como no es posible, surge la idea de construir el que tenga mayor área, para que el nivel de dificultad de hacer un gol sea lo más cercano al de la portería oficial.*



Figura 37. Arco de fútbol.

¿Qué longitud deben tener los postes y el larguero? ¿Qué tan distinto es del arco oficial?

¿Qué tan fácil es meter un gol en esta portería en términos relativos respecto a la portería oficial?

ALGUNOS EJERCICIOS Y PREGUNTAS

Encuentre el máximo y el mínimo de las siguientes expresiones.

$$m(x) = x^3 - 2x + 6, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$n(a) = \sqrt{a - 2}$$

$$o(x) = x^4 - 3, \quad 0 \leq x \leq 6$$

$$p(n) = \frac{1}{x}, \quad 0 < x \leq 3$$

Para EL PROBLEMA DEL CERCADO. ¿Cuál es la cerca que delimita un área mínima?

UN PROBLEMA NUMÉRICO

El primer número más el doble del segundo más el triple del tercero suman 100. Si la suma de los tres números positivos es 50. Halle los números que verifican estas condiciones cuyo producto es máximo.

Unidad 2

OTRA VEZ

Presentando la solución de Fermat

OTRA VEZ LA CERCA



Figura 38. Ilustración Campesino colombiano, tomado de:
<https://pixabay.com/es/campesinos-zona-cafetera-filandia-2517476/>.

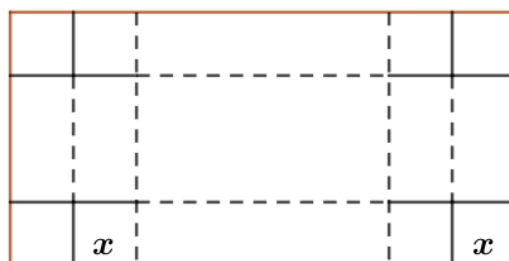
Si en *EL PROBLEMA DEL CERCADO* el campesino compró n metros de cerca. ¿Cuál es la expresión algebraica para el área en términos de un lado de la cerca?



Abra el *archivo1.ggb* y atienda a las instrucciones del profesor

¿Cuál es la cerca más grande que se puede construir?
 Justifique.

OTRA VEZ EL PROBLEMA DE LA CAJA



¿Cómo se puede resolver el *PROBLEMA DE LA CAJA* usando la solución de Fermat?

Si no recuerda, en el siguiente enlace puede verse (otra vez) el video de cómo se construye la caja:

<https://bit.ly/2xjRlwl>

MANUAL PARA EL DOCENTE

UNIDAD 2

Objetivo de la unidad 2: A partir del *problema de la cerca*, usando n metros para generalizar el problema, introducir a los estudiantes a un proceso algebraico de solución a partir de una interpretación geométrica.

El *archivo1.ggb* es un archivo creado en GeoGebra (software gratis) que tiene como intención la visualización del razonamiento geométrico de Fermat. Se les pedirá a los estudiantes que apliquen el razonamiento (que llamaremos *Solución de Fermat*) para resolver el problema de la caja. La solución de Fermat es un razonamiento previo y es la base de lo que denominaremos más adelante como la *derivada de Fermat*.

I. Después de algunos minutos de trabajo individual, y dado que ya se había trabajado el problema, se espera que los estudiantes puedan proponer la función del problema como sigue:

$A(L) = bL - L^2$, donde $b = n/2$ y n es la cantidad de metros de cerca

II. Seguramente los estudiantes intentarán usar las herramientas de Excel y se encontrarán con el inconveniente del valor n , por lo que la pregunta ¿Qué valor tomo para n profesor? se repetirá, podría responderles para ayudarlos: ¿Qué valores no puede tomar n ? Si n puede tomar muchos valores ¿Cuántas respuestas puedo encontrar? ¿Tienen alguna relación? No se debe forzar la respuesta, aquí podrían ellos tomarse su tiempo variando los valores de n .

III. Se elige a uno, o algunos, que muestren sus razonamientos, puede que el elegido o elegidos se hallan percatado que la respuesta siempre estará relacionada con una función cuadrática, la gráfica mostrando su máximo, siempre tendrá la forma:

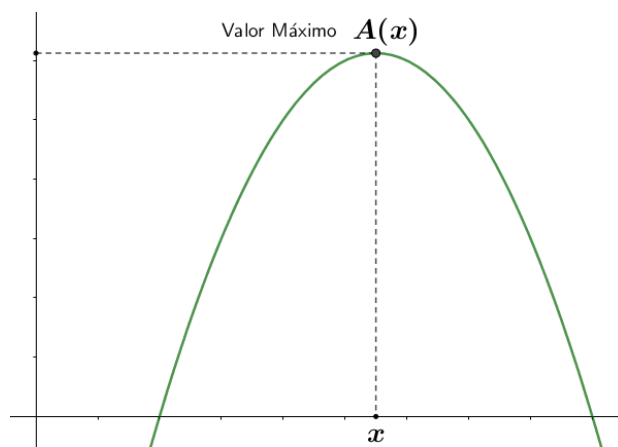


Figura 39. Imagen del archivo1.ggb

A partir de ahora, es un buen momento para reunirlos en pares e indicarles que abran el *archivo1.ggb*

IV. El *archivo1.ggb* muestra paso a paso, la interpretación geométrica inicial de Fermat para el problema del cercado.

El archivo muestra la función como $f(x) = b x - x^2$, con $b = n/2$ por lo que debe aclararse que A corresponde a F y x a L o la letra que hubiesen elegido para el lado base.

El archivo muestra inicialmente la pantalla en blanco con casillas de entrada numeradas de 1 a 6. Debe dar clic izquierdo en los recuadros uno por uno en el orden numérico, al dar clic en el recuadro 1 aparece la expresión algebraica, al dar clic en el recuadro 2 aparece la gráfica de la función y se muestra el valor máximo como se ve a continuación:

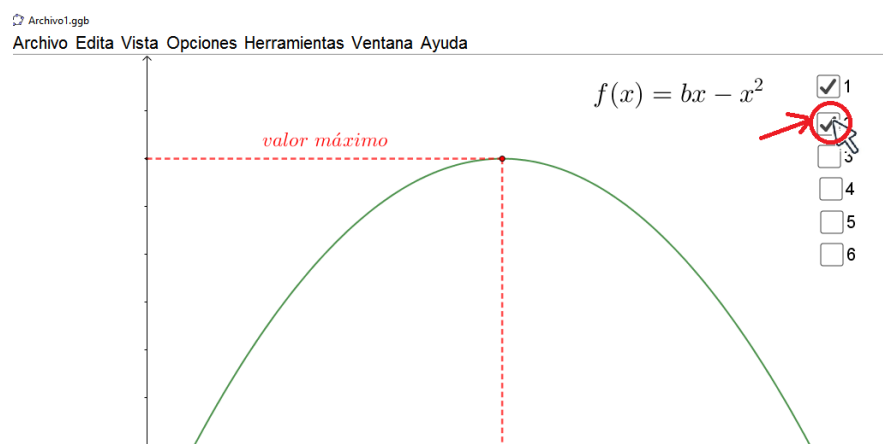


Figura 40. Imagen del archivo1.ggb 2.

Si tomamos un valor cualquiera a sobre el eje x (recuadro 3 en el archivo), diferente al valor de x que corresponde al valor máximo, existirá otro valor e tal que $f(a) = f(e)$ (recuadro 4 y 5).

Cuando se muestre la igualdad $f(a) = f(e)$ en el recuadro 4, se les preguntará a los estudiantes si esto se cumple siempre, antes de seleccionar el recuadro 5.

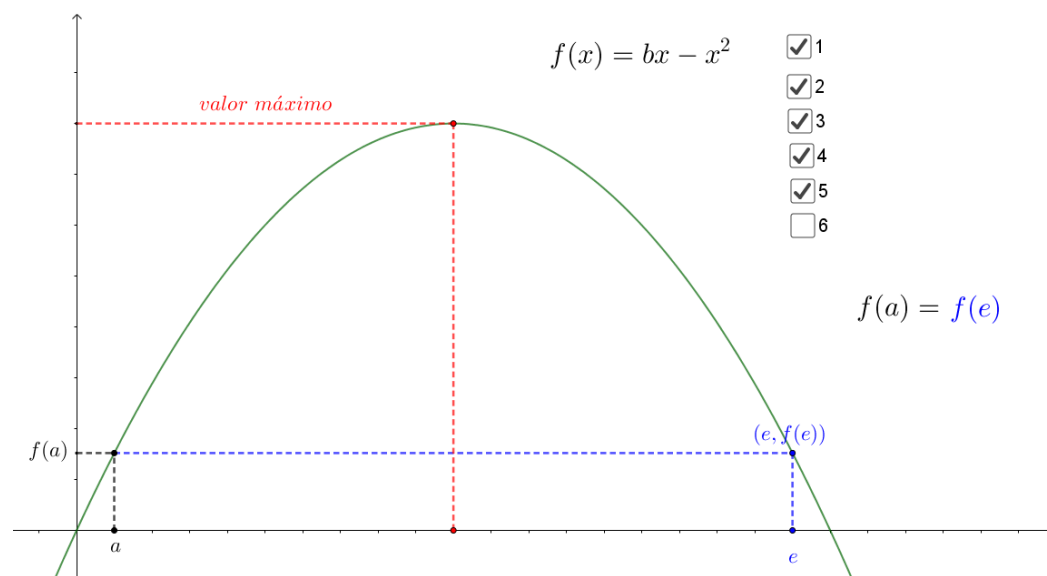


Figura 41. Imagen del archivo1.ggb 3.

Aquí se les pide a los estudiantes que den clic sobre el punto a y utilicen las teclas



de su computador, sólo derecha e izquierda, para hacer mover a a sobre el eje x , al hacer esto, el punto e también se moverá sobre el eje x , así se puede visualizar el hecho de que, en este problema, siempre existe el valor e tal que $f(a) = f(e)$

Es crucial en este momento, pedirles que abordemos esa expresión de manera algebraica, es decir, se les pide a los estudiantes que interpreten $f(a) = f(e)$

$$b * a - a^2 = b * e - e^2$$

Pídales que despejen el valor de b , ya que es el único valor desconocido, al trasladar al mismo lado los términos cuadráticos y luego factorizar $(a - e)$, y dado que a y e son valores distintos, se tiene:

$$\begin{aligned} ab - eb &= a^2 - e^2 \\ \frac{b(a-e)}{(a-e)} &= \frac{(a-e)(a+e)}{(a-e)} \quad (*) \\ b &= a + e \end{aligned}$$

La siguiente pregunta debe estar relacionada con lo que encontraron, ¿Se cumple siempre que $b = a + e$? ¿Qué sucede cuando al mover a , $f(a)$ coincide con el valor máximo?

Para hallar el valor máximo, el valor de a y e debe coincidir, es decir $a - e = 0$, es allí cuando hay solución al problema, por lo que $b = 2a$, es decir $a = b/2$ es el valor de x para que el área sea máxima.

Para reflexionar: ¿Cuál es la dificultad?

Nota: Cabe notar que el profesor algunas veces debe forzar avances en el proceso, puesto que razonamientos como el anterior pueden no resultar naturales para los estudiantes.

Aplicar el razonamiento y encontrar dificultades en el cálculo es la intención del problema que sigue. Puede que surja la necesidad de mejorar el algoritmo cuando se comprenda.

Se pide a los estudiantes que resuelvan el *PROBLEMA DE LA CAJA* usando el razonamiento anterior. Recuerde seguir los pasos I, II, III, IV, y V. cada vez que se propone un nuevo problema, este ejercicio de aplicación de la *solución de Fermat* servirá para identificar a los estudiantes que tienen problemas para manipular ecuaciones, el apoyo de compañeros en la fase de trabajo grupal,

sugerencias de repaso, sumado a la socialización final con la respuesta que algún estudiante logrará, le permitirá avanzar. A continuación, se muestra la solución:

La función que modela el *PROBLEMA DE LA CAJA* es $f(x) = 8x^3 - \frac{24}{5}x^2 + 0.7x$.

Sean a y e dos valores tal que $f(a) = f(e)$, entonces se puede plantear la ecuación:

$$8a^3 - \frac{24}{5}a^2 + 0.7a = 8e^3 - \frac{24}{5}e^2 + 0.7e$$

Reordenando la ecuación, se obtiene:

$$8a^3 - 8e^3 - \frac{24}{5}a^2 + \frac{24}{5}e^2 + 0.7a - 0.7e = 0$$

Tomando como factor común los valores numéricos

$$8(a^3 - e^3) - \frac{24}{5}(a^2 - e^2) + 0.7(a - e) = 0$$

Factorizando

$$8(a - e)(a^2 + ae + e^2) - \frac{24}{5}(a - e)(a + e) + 0.7(a - e) = 0$$

Al dividir por $(a - e)$:

$$8(a^2 + ae + e^2) - \frac{24}{5}(a + e) + 0.7 = 0$$

Finalmente para resolver el problema se hace $a = e$

$$8(a^2 + aa + a^2) - \frac{24}{5}(a + a) + 0.7 = 0$$

$$8(a^2 + aa + a^2) - \frac{24}{5}(a + a) + 0.7 = 0$$

$$8(3a^2) - \frac{24}{5}(2a) + 0.7 = 0$$

Al resolver la ecuación cuadrática se obtiene el valor de $a = \frac{12 - \sqrt{39}}{60} \cong 0,095916$ para hallar el máximo.

Algunos de los problemas propuestos en esta unidad corresponden a funciones que muestran la dificultad de la *Syncrisis* como un método ‘general’ para resolver *El problema de la caja* usando este procedimiento, muestra cómo el grado de un polinomio puede dificultar los procedimientos.

Unidad 3

EL MÉTODO DE FERMAT

REFLEXIONANDO



*Figura 2 Ilustración tomada de
<https://pixabay.com/es/notas-papel-bola-de-papel-memo-514998/>*

El modelo de un problema está definido por la siguiente expresión algebraica (para $0 < x < 6.5$):

$$f(x) = -4x^4 + 20x^3 + 144x^2 - 712x + 300$$

1. Encuentre el valor máximo y mínimo
2. Use Wolfram o cualquier programa que le permita graficar la función $f(x) = -4x^4 + 20x^3 + 144x^2 - 712x + 300$ y determine el máximo y mínimo para cada caso:
 - a. $0 \leq x \leq 7$
 - b. $-6 \leq x \leq 8$
 - c. $3 \leq x$
 - d. $-5 \leq x \leq 0$

3. *¿Qué relación puede establecer entre el polinomio que modela la situación y el polinomio resultante de la solución de Fermat? Comparta su respuesta con el profesor y sus compañeros.*

Sugerencia: Verifique la relación encontrada en los polinomios de los problemas que ha resuelto.

MANUAL PARA EL DOCENTE

UNIDAD 3

Objetivo de la unidad 3: En esta unidad se afianza ‘el método de la solución de Fermat’ como herramienta para solucionar problemas de optimización. Los estudiantes entienden la diferencia del modelo con el polinomio resultante que se obtiene con el método de Fermat, y analizan el problema de optimización restringiendo los valores de x .

I. *Se les pide a los estudiantes que encuentren el valor máximo y mínimo para un polinomio de grado cuatro, usando el método de Fermat. Parte de la solución se muestra a continuación:*

$$f(x) = -4x^4 + 20x^3 + 144x^2 - 712x + 300$$

Se iguala $f(x) = f(e)$, con $x \neq e$

$$-4x^4 + 20x^3 + 144x^2 - 712x + 300 = -4e^4 + 20e^3 + 144e^2 - 712e + 300$$

Se factoriza y se obtiene:

$$-4(x^4 - e^4) + 20(x^3 - e^3) + 144(-x^2 + e^2) - 712(x - e) = 0$$

$$-4(x - e)(x + e)(x^2 + e^2) + 20(x - e)(x^2 + xe + e^2) + 144(x - e)(x + e) - 712(x - e) = 0$$

Se divide por $(x - e)$

$$-4(x + e)(x^2 + e^2) + 20(x^2 + xe + e^2) + 144(x + e) - 712 = 0$$

Se hace $x = e$

$$-4(2x)(2x^2) + 20(x^2 + xx + x^2) + 144(x + x) - 712 = 0$$

$-16x^3 + 60x^2 + 288x - 712 = 0$

Lo anterior, es ni más ni menos que la derivada del polinomio dado igualada a cero.

Para dar solución a la ecuación nos apoyarnos en la tecnología.

- II.** *Seleccione a uno o dos estudiantes para que muestren sus cálculos. En el tiempo de la socialización podemos ayudarlos a corregir los procedimientos erróneos.*
- III.** *Se sugiere que, en algún momento, los estudiantes trabajen en parejas para que ellos evalúen el procedimiento de sus compañeros.*
- IV.** *Cuando lleguen a la expresión: $-16x^3 + 60x^2 + 288x - 712 = 0$ y ante la dificultad de un desarrollo algebraico, usted puede sugerir el uso de alguna herramienta computacional para encontrar los valores de x que dan respuesta a la ecuación*

Veamos, por ejemplo, la siguiente herramienta online que funciona de manera gratuita en internet: <https://www.wolframalpha.com/>

Comentario: el uso de la herramienta es sugerido, puede usar alguna de las que tengan acceso los estudiantes en las instituciones.

En la barra de entrada se escribe la ecuación →

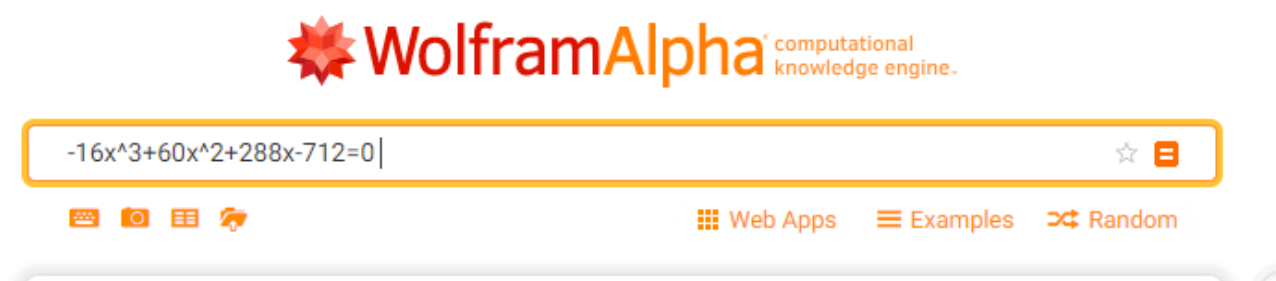


Figura 42. Manejo de WolframAlpha.

Después de dar clic al botón igual, ubicado a la derecha de la barra de entrada, el software calcula los valores de x que buscamos con algunas cifras decimales:

Real solutions:

$$x \approx -3.8706$$

$$x \approx 2.0720$$

$$x \approx 5.5486$$

Figura 43. Manejo de WolframAlpha 2.

Pídales que terminen el problema y encuentren el valor máximo y mínimo, ellos deben encontrar un criterio para determinar cuál es el valor máximo o mínimo. Se espera que comparen los valores de las tres imágenes $f(x)$, correspondientes a los valores que hallamos, entre sí y con el resto de las imágenes en el intervalo dado..

Los estudiantes pueden haberse percatado u olvidado que se pide hallar el máximo y mínimo cuando $0 < x < 6.5$, por lo que la raíz negativa no ayuda a encontrar la solución.

Para graficar, en *Wolfram*, con la restricción de x del problema, se escribe en la barra de entrada: $\text{Plot}[\{-4x^4 + 20x^3 + 144x^2 - 712x + 30=0\}, \{x, 0, 6.5\}]$ y se obtiene lo que se muestra en la siguiente *Figura*.

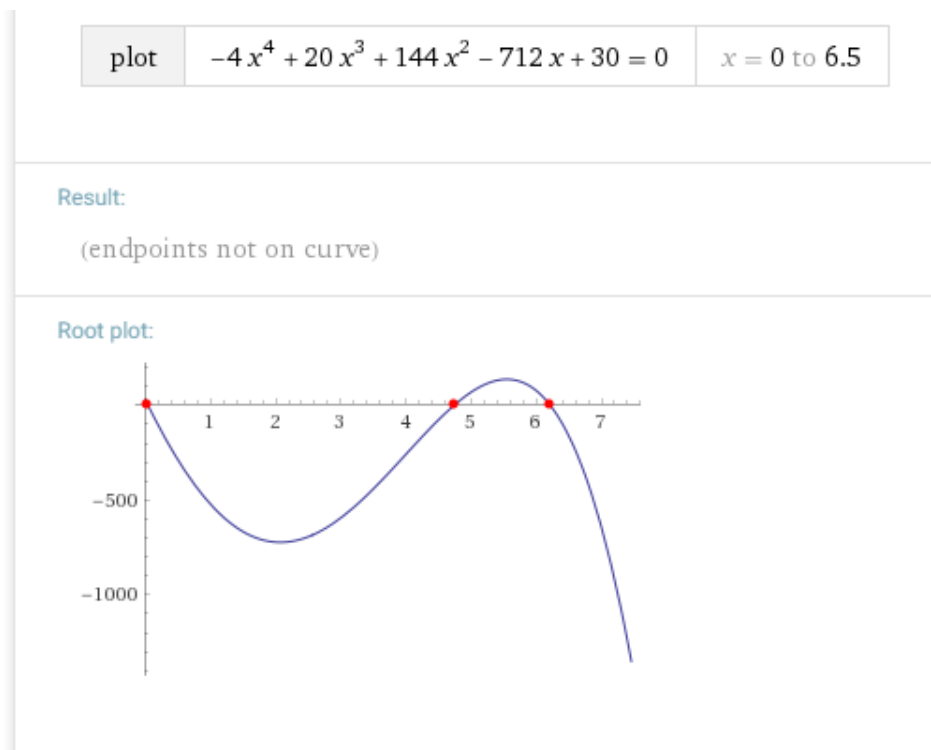


Figura 44. Manejo de WolframAlpha 3.

Después de discutir el resultado, les pedimos pasar al numeral 2 del problema *REFLEXIONANDO*, realmente, es un ejercicio en donde se les pide a los estudiantes que encuentren el máximo y mínimo variando los valores que puede tomar x , esto se hace con la intención de que los estudiantes definan un criterio de comparación de las imágenes $f(x)$ para los x encontrados con el método de Fermat.

- V. *Puede que los estudiantes se confundan con los polinomios con los que estamos trabajando: el primero es el modelo del problema, y el segundo es el polinomio resultante de aplicar la solución de Fermat, para evitarlo podemos aprovechar el software y pedirles que en dos pestañas diferentes del explorador que están usando grafiquen los dos polinomios para hacer la aclaración. Indíqueles que en dos*

pestañas distintas del explorador de internet que estén usando, abran la página: <https://www.wolframalpha.com/> y grafiquen los dos polinomios respectivamente, escribiéndolos en las barras de entrada como: $\text{Plot}[-4x^4 + 20x^3 + 144x^2 - 712x + 30=0\{x, 0, 6.5\}]$ para el polinomio inicial y $\text{Plot}[-16x^3 + 60x^2 + 288x - 712=0\{x, 0, 6.5\}]$ para el polinomio resultante.

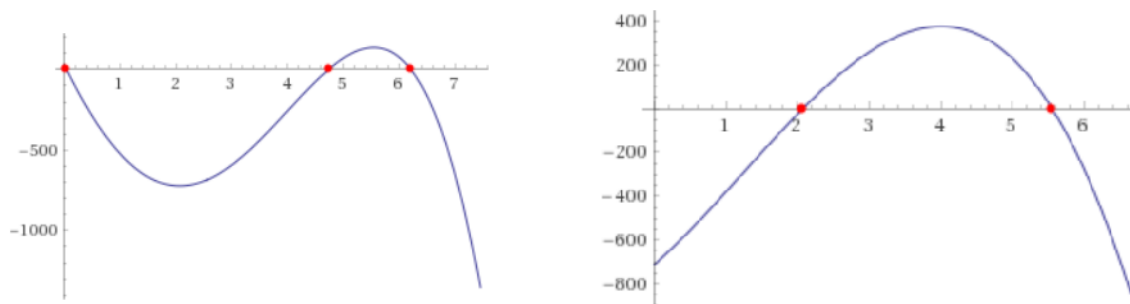


Figura 45. Manejo de WolframAlpha 4.

Después de graficar los polinomios, la discusión se debe orientar hacia la interpretación que los estudiantes les dan a los polinomios para dar respuesta al problema. Con el ánimo de tener más gráficas para encontrar relaciones entre los polinomios, podemos pedirles que generen en *wolfram* las gráficas de los modelos y polinomios resultantes de un par de problemas anteriores.

Algunas preguntas para generar la discusión podrían ser: ¿Qué información proporciona el polinomio resultante? Para aclarar que el polinomio inicial es el modelo y ¿encuentra alguna relación entre el polinomio inicial y el resultante? Aquí los estudiantes podrían hablar de los máximos y mínimos vistos como raíces (o algún nombre como corte si no conocen ese término) del polinomio resultante, puede que alguno se percate de la disminución del grado del polinomio. Si los estudiantes pueden llegar a estas conclusiones, de nuevo, se hizo un buen trabajo, no obstante, existen varios elementos que se deben profundizar y repasar antes de continuar, por lo que la siguiente unidad tendrá ese enfoque.

Unidad 3.5

LA REFLEXIÓN GRÁFICA DE LA OPTIMIZACIÓN

UN POCO DE TRABAJO COMPUTACIONAL

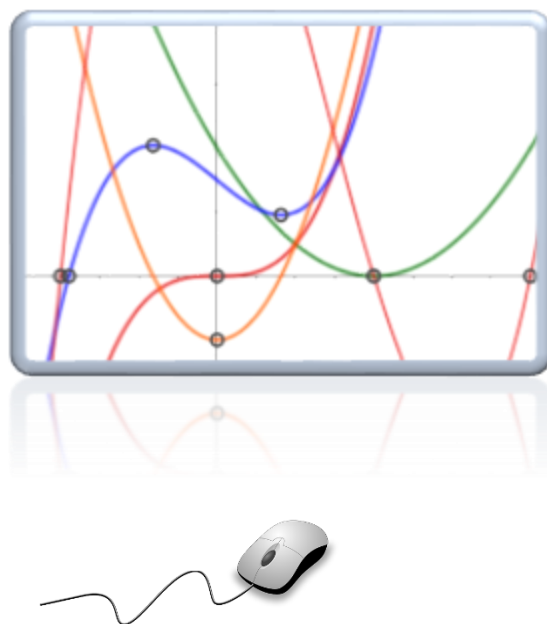


Figura 3 Polinomios, raíces, máximos y mínimos.

Abra el *archivo2.ggb* cuando el profesor le indique y atienda a las instrucciones.

MANUAL PARA EL DOCENTE

UNIDAD 3.5

Objetivo: Desde la gráfica de los polinomios: modelo y resultante, los estudiantes establecerán relaciones entre el grado del polinomio modelo y el número de puntos críticos del polinomio resultante. Se repasará la primera idea del método de Fermat y se hará la reflexión sobre el por qué existen puntos críticos entre x y e , cuando $f(x) = f(e)$ y $x \neq e$.

Pídales que abran el archivo: *archivo 2.ggb*. Podemos trabajar inicialmente con el polinomio que está escrito allí. A la derecha de la pantalla aparecen unos recuadros (casillas de control) al seleccionar el número 1, grafica el polinomio que esté escrito. Al seleccionar el número 2, aparece

el polinomio restringido gráficamente, de la forma $a < x < b$, los valores de a y b se pueden cambiar dando clic en los valores en rojo o moviendo los deslizadores

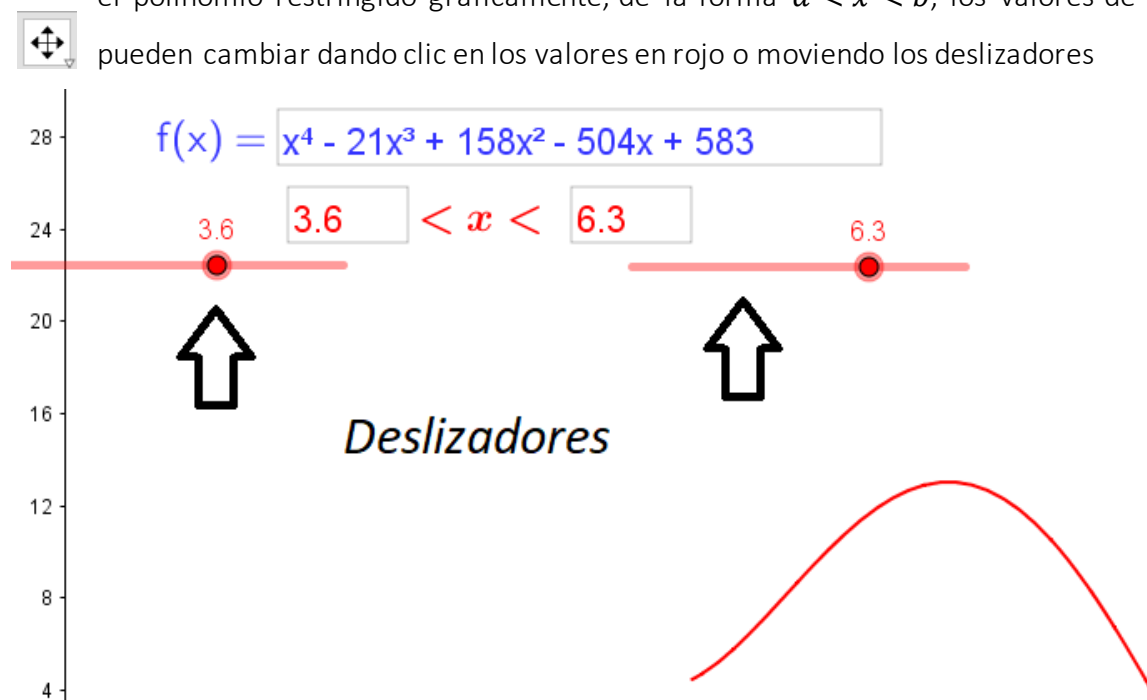


Figura 46. Manejo de *archivo2.ggb*

Se recomienda dar clic a la casilla 1 para que no aparezca la gráfica sin restricciones junto a la que se muestra en la gráfica anterior. Cuando le damos clic a la casilla 3 aparece un punto x sobre el eje x que se puede deslizar sobre el eje haciendo clic sostenido con el ratón. Al dar clic en la casilla 4 aparece una recta horizontal punteada que indica el valor de $f(x)$ y aparece la igualdad $f(x) =$

$f(e)$ indicando que el siguiente paso: marcar la casilla 5, mostrará los puntos e que satisfacen la igualdad. Si se dejan los valores de a y b ya definidos, aparecerá la siguiente gráfica:

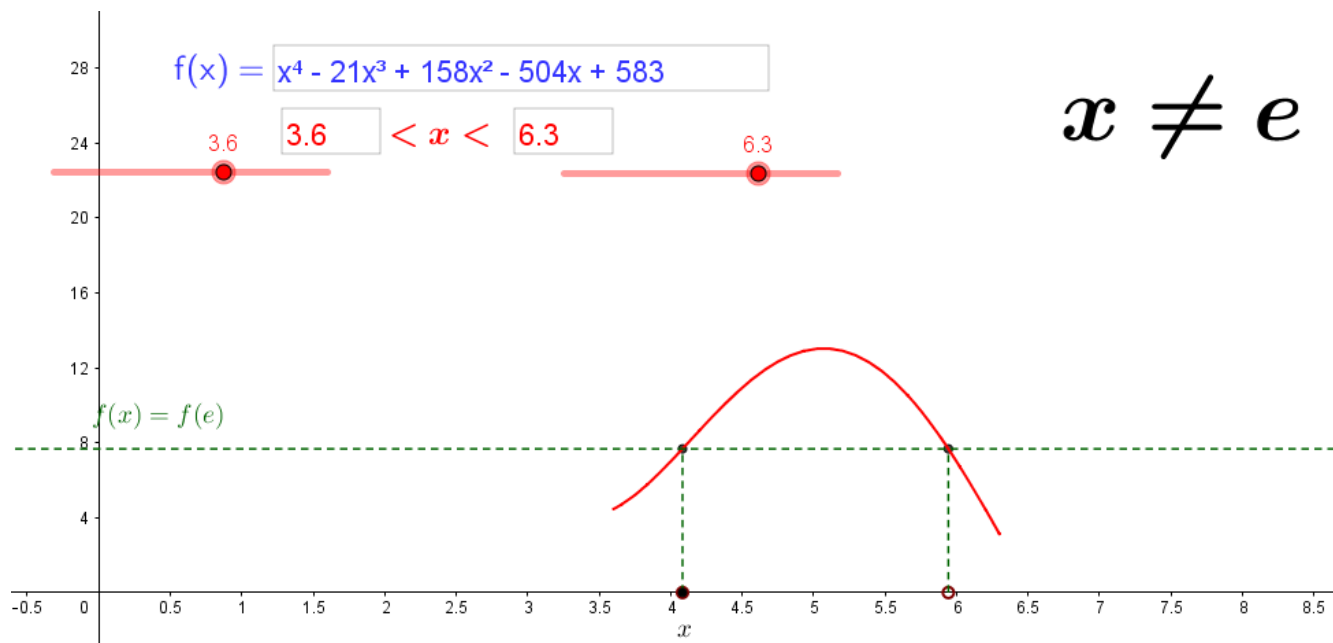


Figura 47. Manejo de archivo2.ggb 2.

Antes de dar clic a la casilla de control ($x=e$) que muestra lo que ya conocíamos

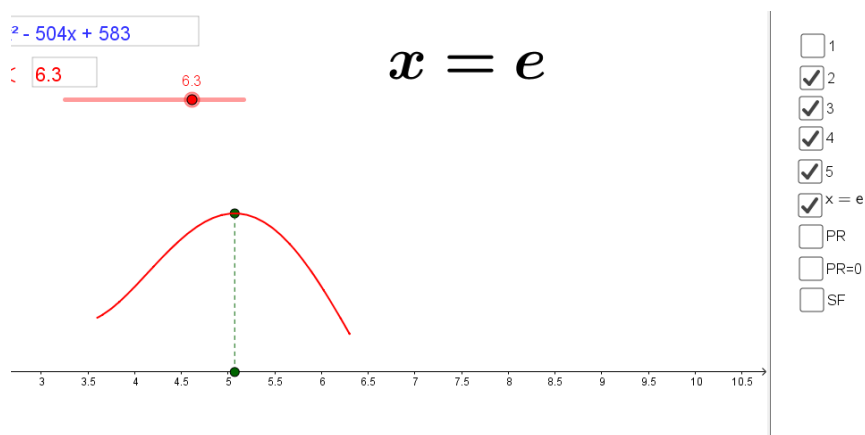


Figura 48. Manejo de archivo2.ggb 3.

Vamos a dar clic a la casilla de control PR que muestra el polinomio resultante restringido para los valores de x que elegimos.

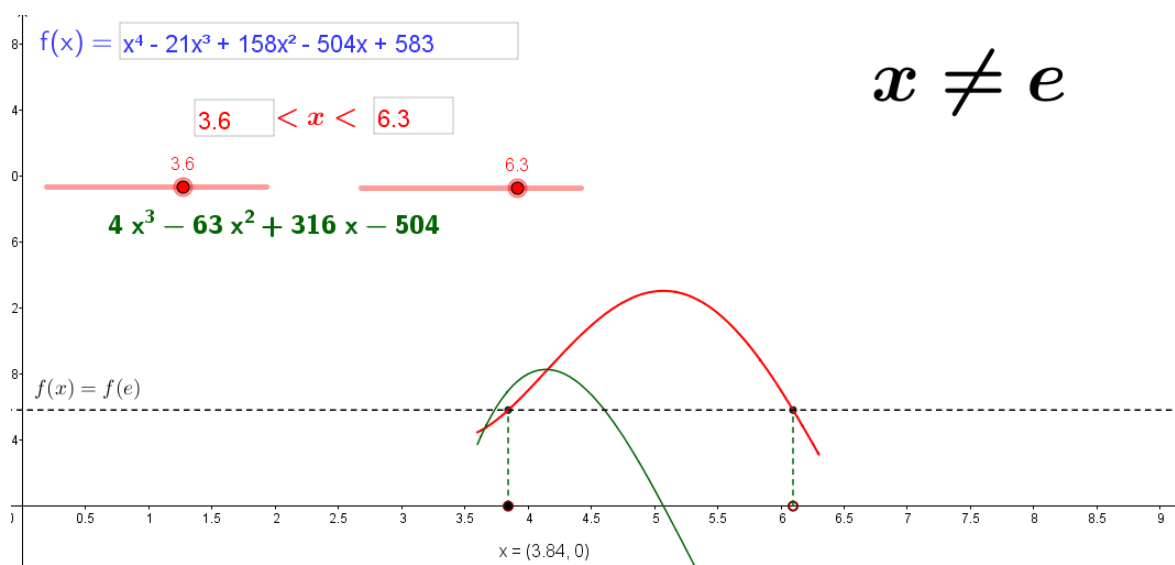


Figura 49. Manejo de archivo2.ggb 4.

A partir de ahora la parte guiada de la manipulación del archivo termina, en esta sección de la unidad, la metodología de los pasos se recomienda para cada una de las siguientes preguntas, en las cuales se sugieren puntos de discusión. No está de más, recordarles a los estudiantes que pueden deslizar el punto x en el archivo para responder:

1. ¿Cuál es el valor máximo y mínimo? Explique por qué es efectivo su procedimiento.
¿Por qué esos valores son el máximo y mínimo?

Respetando los tiempos de trabajo individual por parte de los estudiantes, en la socialización se recomienda enfocar la discusión en los siguientes aspectos:

- El valor máximo y mínimo no es un valor x . El valor máximo y mínimo se encuentra en $f(x)$
- Efectivamente el valor máximo se encuentra cuando $x = e$, se puede guiar la discusión a partir de otra pregunta: ¿Qué sucede con la gráfica del polinomio cuando $x \neq e$ y $f(x) = f(e)$? La pregunta tiene la intención de que los estudiantes indiquen que la curva puede tomar solo dos 'formas'

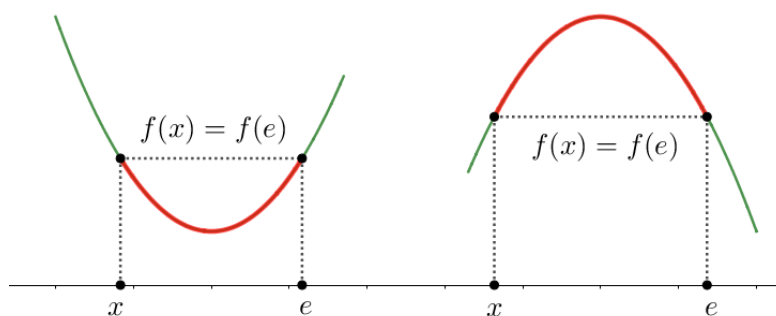


Figura 50. 'Formas' de la curva.

De esta manera se podría interpretar gráficamente que cuando $x = e$ la curva sólo puede pasar de 'subir' a 'bajar' o de 'bajar' a 'subir' y es una razón para afirmar que allí se encuentra un máximo o un mínimo.

- No siempre el máximo y mínimo se encuentran con el método de Fermat, dependiendo de la restricción y para x en el caso que estamos viendo, el mínimo se encuentra en uno de los extremos, concretamente para el valor $f(x)$ en $x = 6.3$.

2. ¿Qué relación encuentra entre el modelo con el polinomio resultante? Justifique.

De nuevo los aspectos relevantes después de las reflexiones individuales.

- Ante la afirmación de que el valor del máximo corresponde al corte de la curva del polinomio resultante con el eje x , sigue la pregunta de por qué ocurre esto. Un comentario orientador podría indicar el repaso del método de Fermat, que en esencia empieza con la igualdad $f(x) = f(e)$ con $x \neq e$, al hacer las manipulaciones algebraicas pertinentes, cancelando $x - e$ sin inconvenientes por la condición $x \neq e$, obtendremos otro polinomio en términos de x y e , sabemos que el siguiente paso es hacer $x = e$ de lo que resulta un nuevo polinomio que llamamos aquí resultante, y este, por el proceso mismo queda igualado a cero, $PR = 0$, sabemos que las soluciones de este polinomio resultante nos indica los valores de x para encontrar los valores máximos y mínimos y es por eso que los cortes (raíces) del PR se relacionan con encontrar máximos y mínimos.

-

Aclaradas las preguntas para el caso del polinomio $3.6 \leq x \leq 6.3$, vamos a pedirles a los estudiantes que muevan los deslizadores o escriban los números en las casillas de números rojos para que se muestre el polinomio en $2.5 < x < 9$, de nuevo vamos a pedir que para el nuevo intervalo se respondan las preguntas 1. y 2.

1. *¿Cuál es el valor máximo y mínimo? Explique por qué es efectivo su procedimiento.*
¿Por qué esos valores son el máximo y mínimo?

La 'ganancia' con el nuevo intervalo es que ahora aparecen distintos candidatos para el máximo y mínimo, vamos a pedir que definan un criterio para encontrar el valor máximo y mínimo en general para un polinomio en un intervalo dado. El criterio debe incluir los valores frontera del intervalo y las raíces del polinomio resultante, que, por convenio, junto a los estudiantes, denominaremos desde ahora punto crítico.

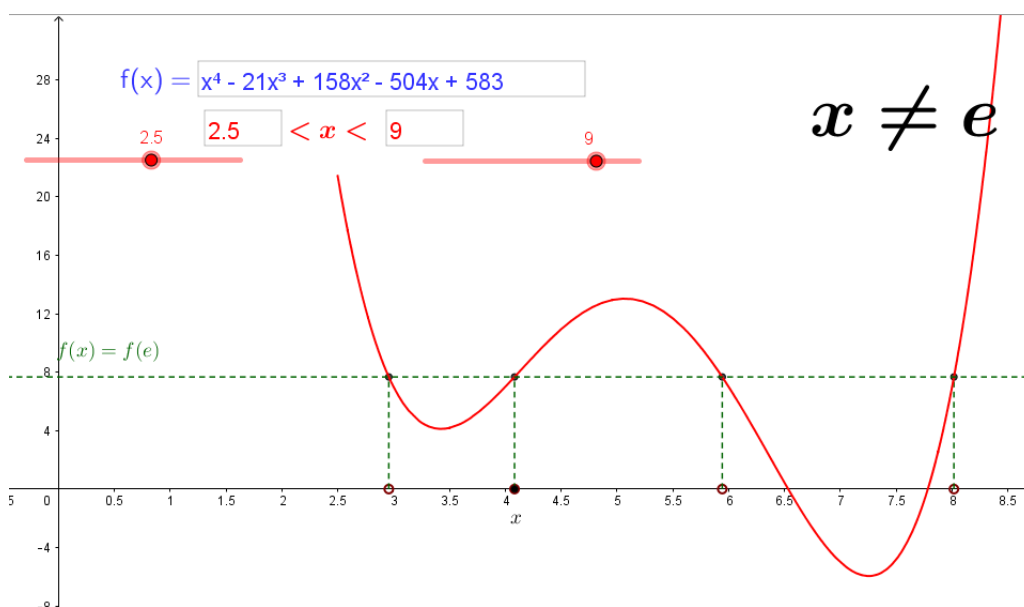


Figura 51. Manejo de archivo2.ggb 5.

Para reflexionar: En vista de que hay más de un valor de e , tres en este caso ¿Cuál es el valor que debo 'tomar' de e para hallar el máximo o mínimo?

El archivo permite mover el punto x , y los estudiantes podrían hacer la pregunta de cómo saber cuál debe ser el valor de e . El método de Fermat arrojará, en este caso, tres valores para x , cuando

se iguala $PR = 0$ sumado a las reflexiones previas, sabremos que el polinomio resultante cortará el eje x en tres partes distintas.

Algo que podría pasar es que un estudiante mueva el punto x a un punto crítico y aparezcan ‘otros’ punto e como se muestra en la siguiente *Figura*

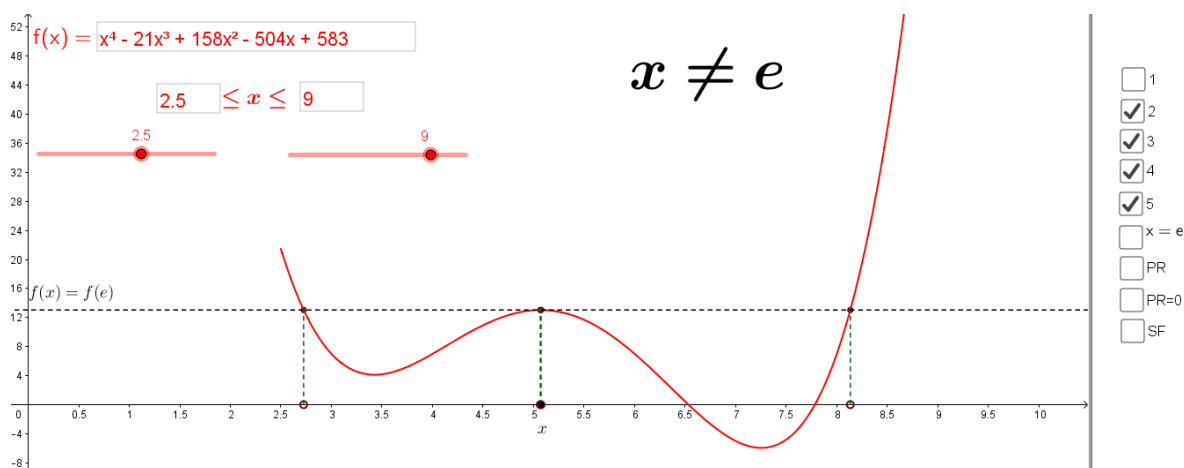


Figura 52. Manejo de archivo2.ggb 6.

Debe aclararse entonces que en la interpretación gráfica no es importante el ‘movimiento’ de x , ya que cuando hacemos $x = e$ encontramos todos los cortes del PR y no uno por uno.

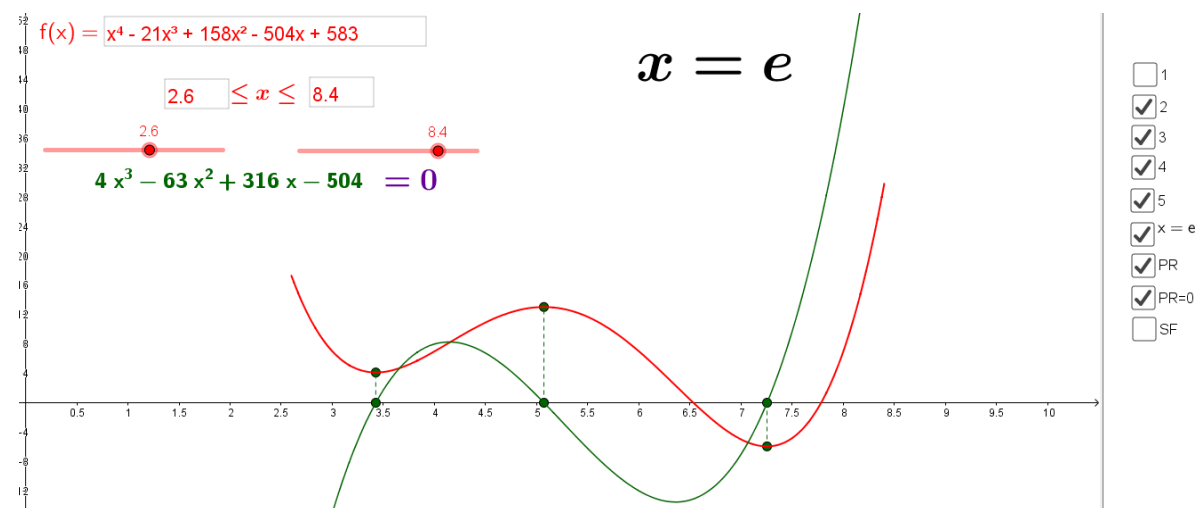


Figura 53. Manejo de archivo2.ggb 7.

Vamos a modificar la pregunta 2. con la intención de que los estudiantes, a partir de la experimentación en el mismo archivo, establezcan la relación entre el grado del polinomio modelo y el número de puntos críticos.

2. *¿Qué relación puede establecer entre el grado del polinomio modelo y el número de puntos críticos?*

En parejas, por ejemplo, vamos a pedir que los estudiantes cambien el polinomio en el archivo, se puede sugerir completar la siguiente tabla

Grado del polinomio	Polinomio	Puntos críticos

Hasta que los estudiantes puedan establecer el criterio que buscamos: El número de puntos críticos de un polinomio es a lo más el grado del polinomio menos uno.

Nota técnica: El polinomio puede cambiarse dando clic sobre la celda donde está escrito el polinomio y escribiendo otro usando el símbolo (^) del teclado para los exponentes. Aparecen además los ejes de un plano cartesiano. Si se cambia el polinomio seguramente se necesite cambiar las escalas de los ejes. La forma más práctica de hacerlo es hacer clic en la barra de herramientas y luego acercarse al eje al que queremos cambiarle la escala. Cuando aparezca el

símbolo  oprimimos clic izquierdo sostenido y movemos el ratón a izquierda o derecha en el eje x, arriba o abajo en el eje y.

EJERCICIOS DE REFUERZO

PENSEMOS EN 'RESULTADOS GENERALES'

2. *¿Cuál o cuáles de los siguientes resultados son falsos? Si son falsos muestre que son falsos con un ejemplo. Si son verdaderos justifique.*

Para un modelo f , existe al menos un punto crítico entre x y e , cuando $f(x) = f(e)$ y $x \neq e$.

Todo modelo f tiene máximo y mínimo.

El grado del polinomio resultante es igual que el grado del modelo f .

El valor máximo y mínimo de un modelo son las raíces del polinomio resultante.

El método de Fermat consiste en igualar inicialmente $f(x) = f(e)$ con $x \neq e$

DE AQUÍ PARA ALLÁ Y DE ALLÁ PARA ACÁ

3. *Dados los siguientes modelos, encuentre para cada uno su polinomio resultante.*

a. $A = x^3 + 6x^2 + 1$

$$b. \quad B = x^2 - 7x$$

$$c. \quad C = 6x^2$$

$$d. \quad D = 7x^8$$

$$e. \quad E = -4x^4$$

4. *Dados los siguientes polinomios resultantes, encuentre para cada uno su modelo.*

$$a. \quad A' = x^3$$

$$b. \quad B' = 2x^2$$

$$c. \quad C' = 3x^5 - 6x + 2$$

$$d. \quad D' = 8x^3 - x$$

$$e. \quad E' = -5x^2$$

Deduzca un criterio para encontrar el polinomio resultante dado el modelo y otro para encontrar el modelo dado el polinomio resultante. Explique por qué funciona.

Unidad 3.75

LA DERIVADA DE FERMAT

“LA EXPRESIÓN”

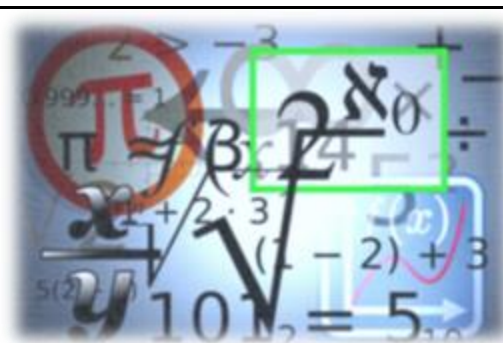


Figura 54. Símbolos.

2. En las anteriores unidades usamos el método de Fermat para optimizar. ¿Cuál de las siguientes opciones resume el procedimiento? Justifique su elección.

g) $f(x) = f(e)$

h) $f(x) = f(e)$ cuando $x = e$

i) $\frac{f(x)-f(e)}{x-e}$

j) $\frac{f(x)-f(e)}{x-e} = 0$ cuando $x = e$

k) $\frac{f(x)-f(e)}{x-e} = 0$ cuando $x \neq e$ y luego $x = e$

l) $f(x) - f(e)$ cuando $x \neq e$

3. ¿Cuáles son los elementos que componen la derivada de Fermat? ¿Y qué papel desempeñan cada uno de ellos en la búsqueda de los puntos que optimizan una función polinomial?

4. En la curva que se muestra a continuación, interprete gráficamente el valor de la derivada de Fermat en el punto $(a, f(a))$ que se señala.

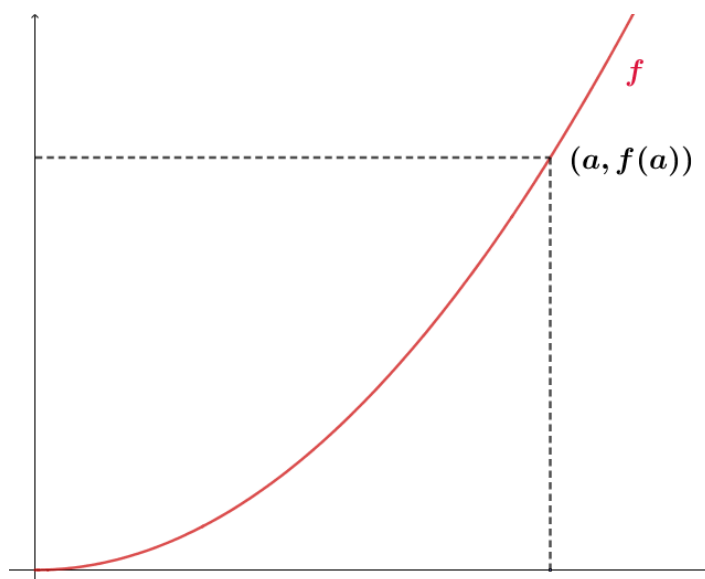


Figura 55. Una curva y un punto de la curva.

4.



Abra el *archivo3.ggb* cuando el profesor le indique.

Objetivo de la unidad: Los estudiantes sintetizan el método de Fermat en la expresión $\left. \frac{f(x)-f(e)}{x-e} \right|_{x \neq e}$ y luego $x = e$. Además, la interpretan geoméricamente, es decir, la asumen como la tangente a la curva en un punto y en términos de velocidad instantánea o, en forma equivalente, como la razón de cambio instantánea entre dos variables relacionadas funcionalmente.

La primera pregunta ‘empuja’, en un buen sentido, a que los estudiantes reconozcan a la derivada como una expresión matemática; su naturaleza conceptual se verá reflejada en la relación que se establecerá posteriormente con los problemas de razones de cambio y la interpretación geométrica que permite definir la recta tangente a la curva. Reforzaré la importancia de su manejo algebraico con las reglas de derivación.

4.

- I. *Se les pide a los estudiantes que aborden la pregunta 1. y se les da un tiempo (12 a 15 minutos) para responderla, explicitando, como es natural, las razones de sus respuestas.*
- II. *Acto seguido, y previo a la socialización con todo el curso, es recomendable pedirles que trabajen con un compañero cercano y elaboren en forma conjunta su respuesta. Consideramos que un tiempo de 10 minutos es suficiente para esta actividad de parejas.*
- III. *Para la primera socialización, puede abrirse el espacio preguntando quién eligió la a), b), c), d) e) o f) y de esa manera tomar algunos exponentes de cada respuesta para que expongan las razones de su elección.*
- IV. *La respuesta es la e) (Ellos deben llegar a un consenso, jamás hay que darles la respuesta) Si la discusión se desvía, puede pedirles que resuelvan uno de los*

problemas y observen paso a paso lo que se hacía, puede proponer un polinomio corto y pedirle a alguno de los estudiantes que proceda a aplicar el método de Fermat.

V. Se aclara que la expresión en e) es la respuesta y desde ahora, con esta notación:

$$dF(x) = \left. \frac{f(x) - f(e)}{x - e} \right|_{x \neq e} \quad \text{y luego } x = e$$

La denominaremos la *derivada de Fermat* en un punto x

Las preguntas 2. y 3. cierran esta unidad, la interpretación geométrica de la derivada de Fermat aplicada a las curvas asociadas a polinomios, explica la razón de por qué el método de Fermat permite resolver problemas de optimización de problemas que se modelan con funciones polinómicas. Se espera en la pregunta 2. que los estudiantes desglosen los elementos que la componen: $x, e, f(x), f(e), x - e, f(x) - f(e), x \neq e$ y $x = e$ para posteriormente graficar.

En la pregunta 3, se tomó media parábola con la intención de no retomar interpretaciones geométricas previas de máximos y mínimos.

Después de unos minutos, puede indicarles a los estudiantes que realmente son dos gráficas porque en la derivada de Fermat se puede pensar en dos momentos. Pídales que se concentren inicialmente en dibujar el momento $x \neq e$.

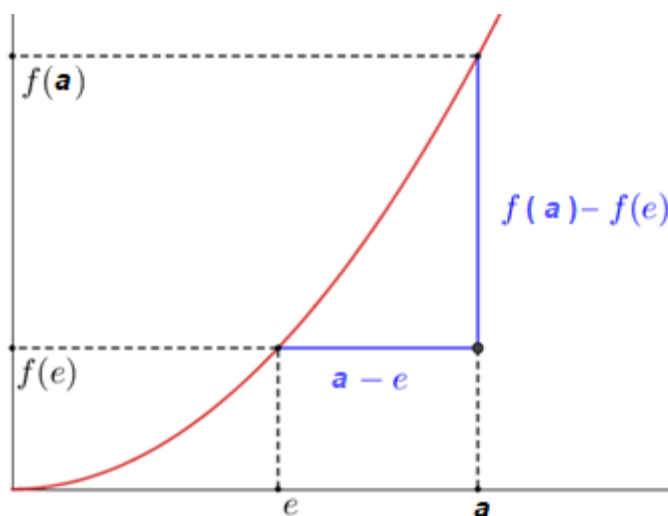


Figura 56. Interpretación geométrica de dF .

Puede que haya inconvenientes en entender inicialmente los elementos $f(a) - f(e)$ y $a - e$ como segmentos (no son segmentos son longitudes de segmentos), pero el ‘asunto delicado’ realmente se encuentra en interpretar el momento $a = e$. Cuando logren obtener la gráfica anterior, pídales que cambien el valor de e a discreción y acercándose al valor de a . Pregúnteles lo que sucede cuando $a = e$. Y aproveche para discutir sobre las distintas respuestas que puedan presentarse. Si hay alguna respuesta feliz, es decir, alguien que la asocie con la pendiente de la recta tangente, pídale a los demás estudiantes que den su opinión sobre esta respuesta.

Volviendo a la expresión de la derivada de Fermat, podemos preguntarles ¿qué sucede con el cociente $\frac{f(x)-f(e)}{x-e}$? Algunos notarán que el cociente se convierte en una indeterminación de la forma $0/0$, otros dirán que no se pueden igualar x y e . Precisamente para evitar la indeterminación.

Pídales que con base a lo observado con distintos valores de e , imaginen la forma de la recta que une los dos puntos cuando e está cada vez más cercano al valor a . (Se recomienda utilizar para esta interpretación geométrica un valor constante a para evitar la interpretación de x como una variable).

Podemos observar que tenemos dos representaciones para el mismo acercamiento: la numérica y la geométrica y hasta ahora solo se ha usado la geométrica. Podemos sugerir que se les pida a los estudiantes que le den valores a e , para un valor de a determinado por anticipado, y que calculen el valor de los respectivos cocientes y que los coloquen en una tabla.

Sabiendo que estamos trabajando con una parábola, les pedimos que llenen la siguiente tabla para diferentes valores de a , por ejemplo $a = 2, 3, 4$ y 5

$a = 2$	e	$\frac{f(2) - f(e)}{2 - e}$

Observando la tabla de valores pídales que conjeturen un valor hacia el cual se están acercando las razones calculadas. Después de realizar este análisis numérico y a sabiendas de que el cociente de incrementos es la pendiente de la recta secante que pasa por los dos puntos (aspecto que se puede plantear como pregunta de interpretación) pídales la interpretación para el cociente cuando $a = e$. Después de hacer esto a mano, se puede pasar a lo computacional que trata a las dos representaciones en forma simultánea.

Se les puede dar un tiempo para que lo discutan con los compañeros. Si alguien menciona “un acercamiento de un punto a otro” podemos aferrarnos a esa idea y expresirla, podemos ahora abrir el *archivo3.ggb*.

El archivo contiene el dibujo de dF y una casilla de control que al activarla muestra la recta secante que pasa por $(e, f(e))$ y $(x, f(x))$, además se muestra el valor numérico del cociente $\frac{f(x)-f(e)}{x-e}$ para la función $f(x) = x^2$

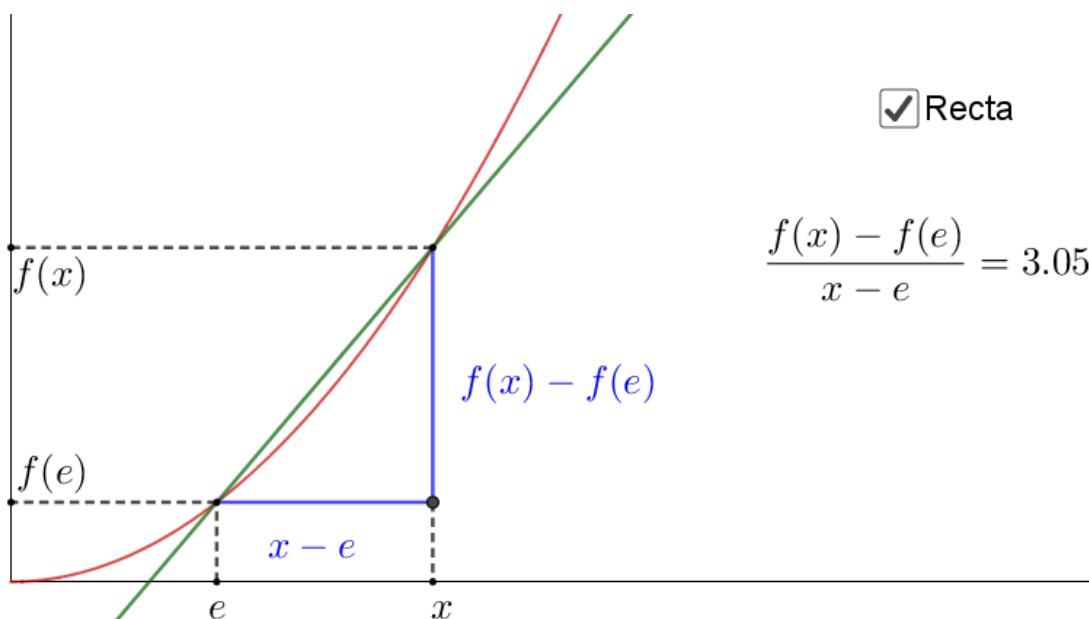


Figura 57. Imagen del archivo3.ggb.

¿Qué sucede con la pendiente y con la recta cuando se mueve el punto e hacia x ?

De la socialización debemos llegar a concluir que cuando $x \neq e$ las rectas son secantes y el cociente es la pendiente de las secantes, y cuando x se acerca cada vez más a e , los puntos

$(e, f(e))$ y $(x, f(x))$ también se acercan, es por ello que podemos intuir que para $x = e$, el cociente sigue siendo la pendiente de la recta, pero esta vez, como $(e, f(e))$ y $(x, f(x))$ coinciden, podemos asumir que el cociente es la pendiente de la recta tangente a la curva. Esta sería una buena definición de la recta tangente a la curva en un punto. Valdría la pena aclarar esto: la tangente no es un concepto absoluto, se está definiendo utilizando el proceso de acercamiento entre los dos puntos ya que geométricamente cuando los puntos secantes se convierten en uno solo se gana el derecho de asumir a esa recta como la tangente a la curva en ese punto.

Pregunta. ¿Cómo se define la tangente a una curva polinomial en un punto cualquiera?

Nota: Es la primera vez en la propuesta que se recurre a la idea de aproximación. Cabe recordar que, en un curso usual de cálculo, la expresión $0/0$ es una indeterminación que aparecen cuando se calcula el límite de un cociente y se opera algebraicamente o utilizando el teorema de L'Hopital para superarla. Si bien el respaldo matemático se basa en el hecho de que las funciones hasta ahora estudiadas son polinomios que, como usted sabe, son derivables en cualquier punto, el tratamiento aquí es completamente intuitivo, en principio no existe razón suficiente para no creer que si en todos los puntos cercanos a a las razones son cercanas a $2a$, no pasará lo mismo en el caso en que e sea igual a a .

Observe que “pasar lo mismo” lo decimos en el sentido de que los distintos valores de e hacen que el cociente sea cada vez más cercano a $2a$, en particular, cuando e es igual a a , el resultado es exactamente igual a $2a$.

Sobre los ejercicios propuestos: Es necesario reforzar aquí con una serie de ejercicios, que reafirmen la idea expuesta en los párrafos anteriores. Incluso, se pueden plantear análisis gráficos donde no se conozca la función. Naturalmente también son necesarios los ejercicios gráficos donde se rompa la continuidad y otras donde se rompa la derivabilidad.

EJERCICIOS DE REFUERZO

EJERCICIOS DE TIPO GRÁFICO

- 1 Analice la gráfica y determine el valor del cociente $\frac{f(a)-f(e)}{a-e}$ cuando $a = e$, para cada función en el punto a indicado.

1.1 $a = 2$, se muestra el cociente para $e = 2.4$

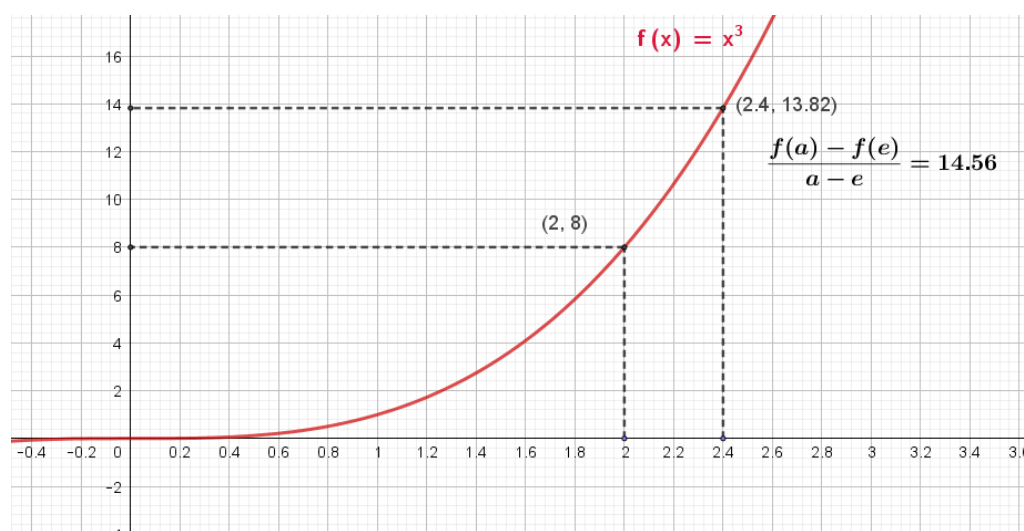


Figura 58. Ejercicio gráfico 1.

$a = 3$, se muestra el cociente para $e = 3.5$

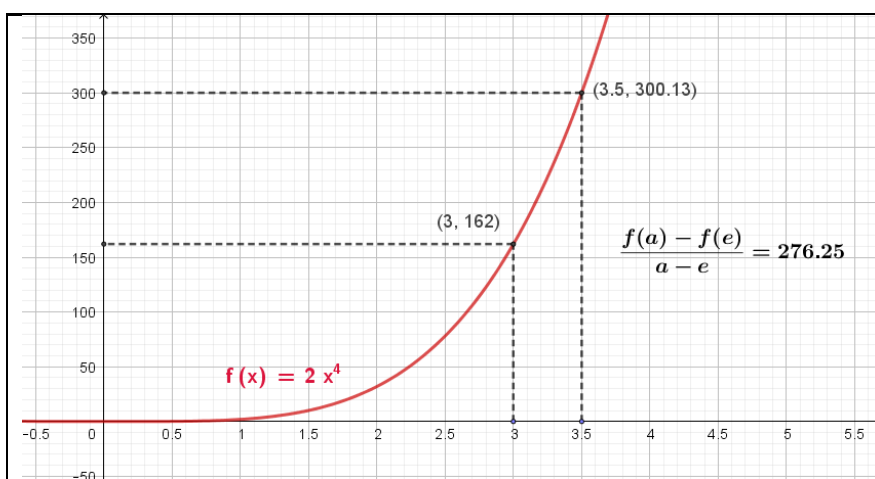


Figura 59. Ejercicio gráfico 2.

$a = 2$, se muestra el cociente para $e = 3.5$

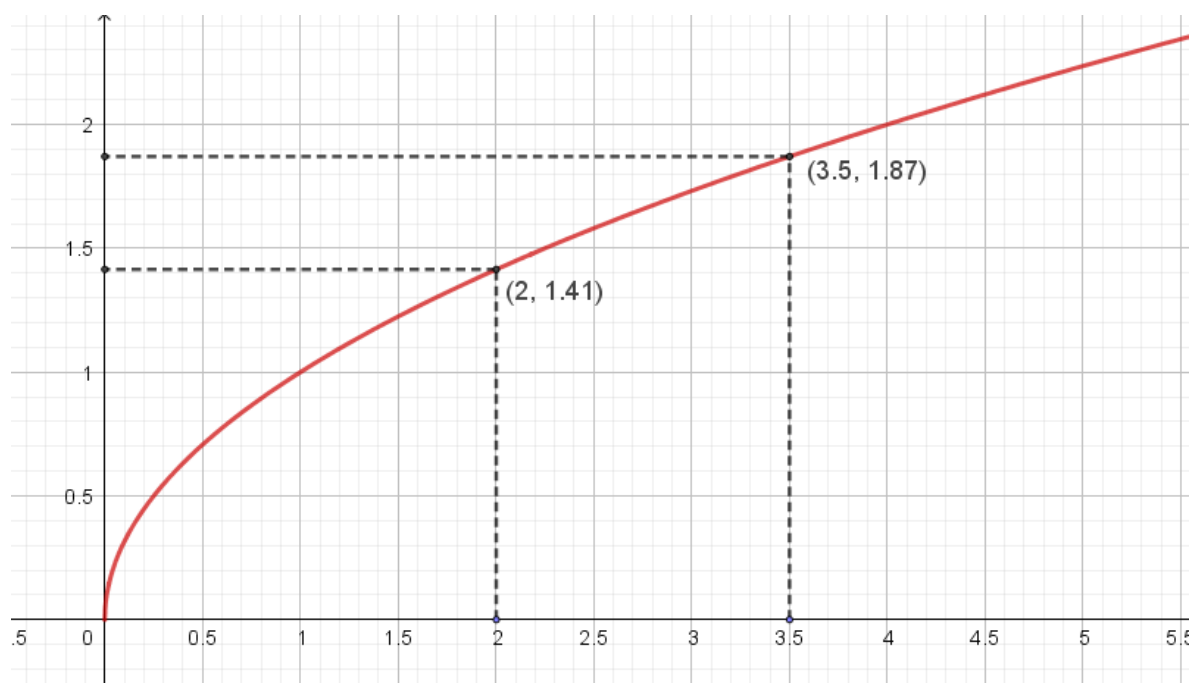


Figura 60. Ejercicio gráfico 3.

1.4 $a = 2$, se muestra el cociente para $e = 3.5$

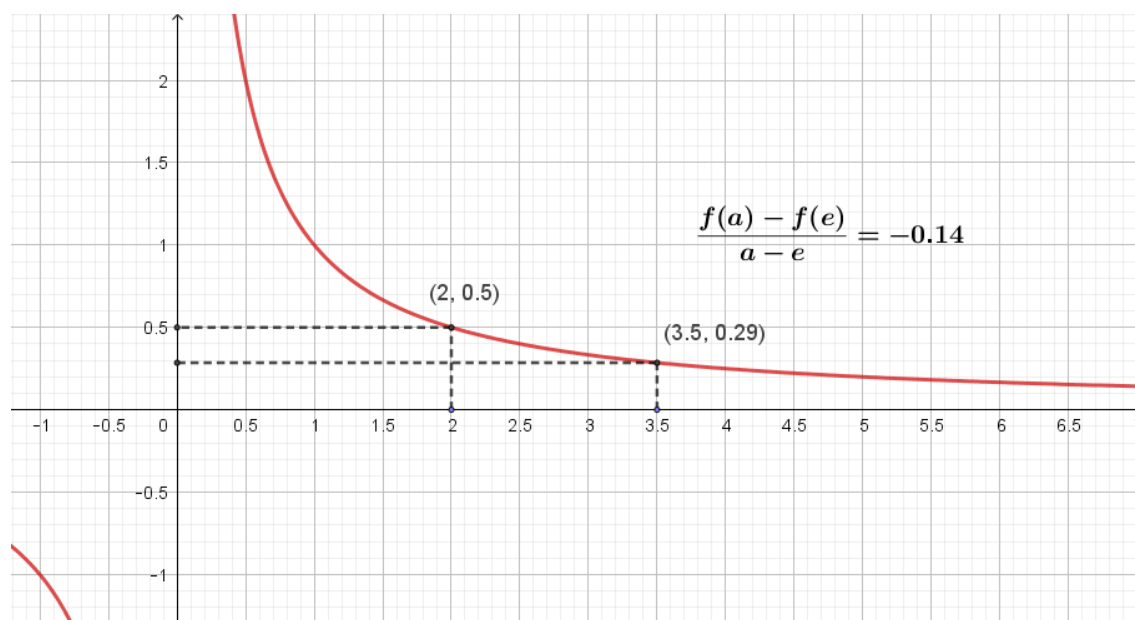


Figura 61. Ejercicio gráfico 4.

1.5 $a = 1$, se muestra el cociente para $e = 1.5$

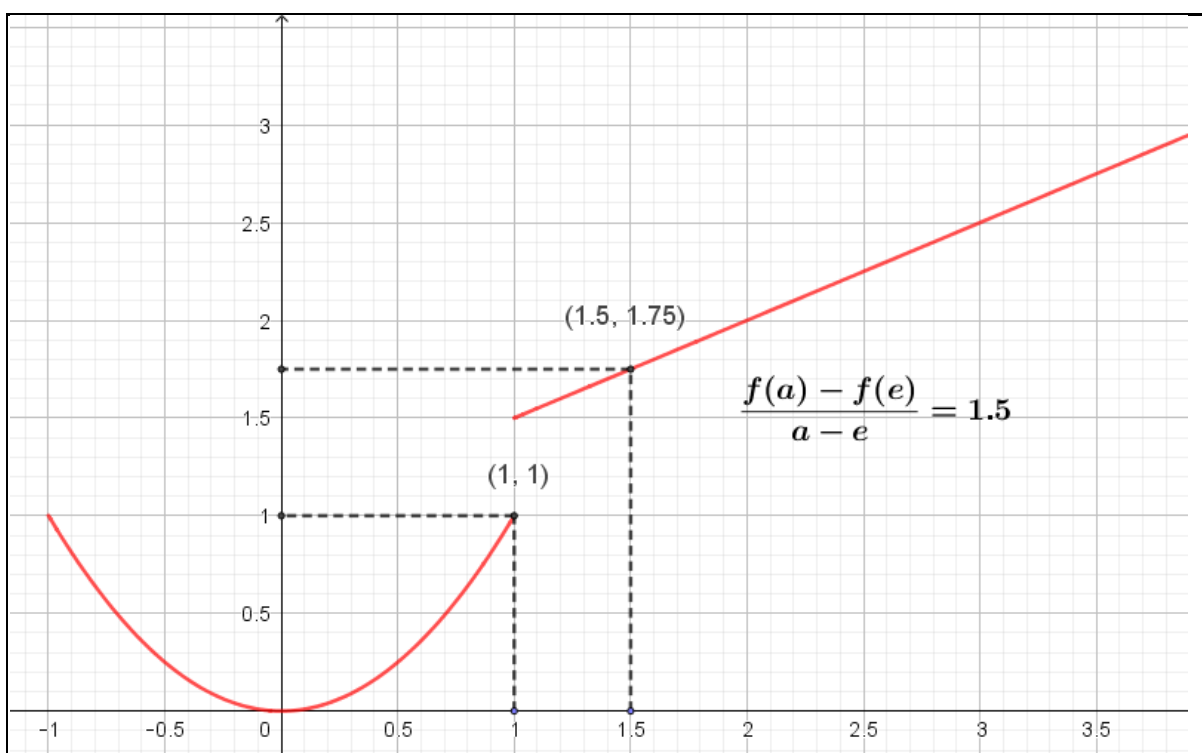


Figura 62. Ejercicio gráfico 5.

1.6 $a = 2$, se muestra el cociente para $e = 2.5$

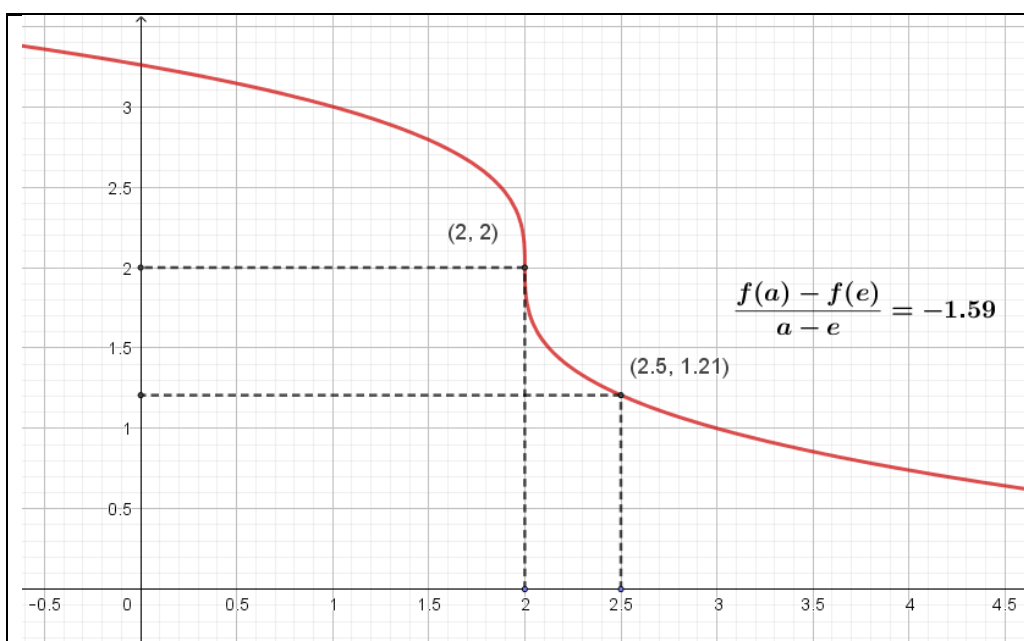


Figura 63. Ejercicio gráfico 6.

1.7 $a = 4$, se muestra el cociente para $e = 3.5$

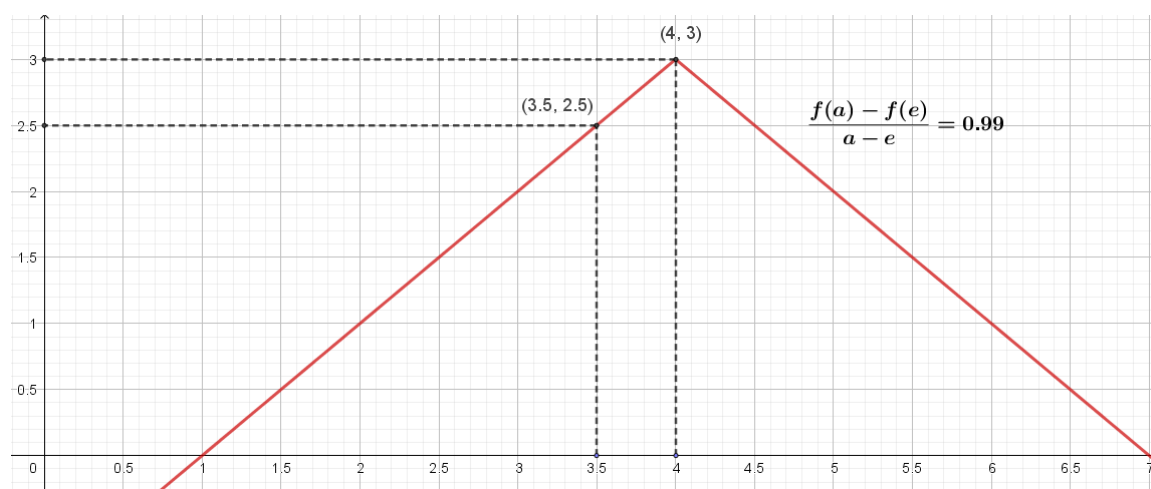


Figura 64. Ejercicio gráfico 7.

Unidad 4 - parte i

POR LA AUTOPISTA
“VAMOS A VISITAR AL PRIMO CRISTIAN”



Figura 65. Carro.

Una familia hizo un viaje en carro para visitar al tío Gabriel, en la primera parte del recorrido transitaron 12 kilómetros por una carretera recta (autopista), pararon al recorrer los 12 kilómetros y visitaron al primo Cristian, el automóvil transitó a una velocidad constante de 120 kilómetros por hora.

1. *¿Cuál es la distancia que ha recorrido el automóvil después de 2 minutos?*
 2. *¿Cuál es la distancia que ha recorrido el automóvil después de t minutos?*
- Grafique la situación*
-

María que iba manejando, recordó que antes de empezar el recorrido en la autopista, recorrió 500 metros como muestra la siguiente *Figura* (no está a escala)



Figura 4 carro 2

3. Encuentre una expresión que permita calcular la distancia recorrida del automóvil, si se empieza a tomar el tiempo en un punto A situado a 250 metros a la derecha de un punto de referencia L (casa de María).

Analice el problema desde el punto de vista de la meta. Es decir, las distancias se toman ahora, respecto al punto C (casa de Cristian) que se encuentra a la derecha a d metros del lugar de donde se empieza a contar el tiempo.

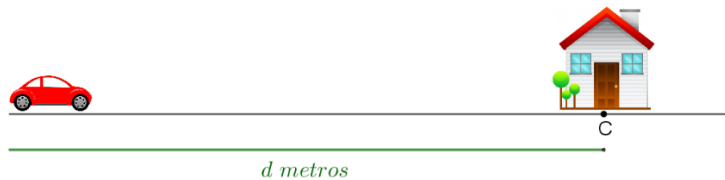


Figura 5 Carro 3

4. ¿Cómo se expresa ahora la distancia en función del tiempo transcurrido?

Objetivo: Abordar la problemática de la razón de cambio cuando la razón de cambio es constante en un problema típico de velocidad y establecer una relación en la interpretación de la velocidad como cociente con dF .

Como es usual, se propone:

- I. Asegurarse de que los estudiantes comprendan las preguntas.*
- II. Para las preguntas 1. y 2. 3. y 4. 30 minutos de trabajo individual.*
 - 1. ¿Cuál es la distancia que ha recorrido el automóvil después de 2 minutos?*
 - 2. ¿Cuál es la distancia que ha recorrido el automóvil después de t minutos? Grafique la situación*

Las preguntas 1. y 2. tienen como fin que los estudiantes modelen la situación encontrando la función lineal, para esto, se puede sugerir a los estudiantes apoyarse en una tabla de datos para que hagan un análisis y encuentren algunas propiedades y regularidades desde la tabla, una gráfica puede ser el paso siguiente. Cabe aclarar que los estudiantes pueden asumir el tiempo como horas, la situación puede resultar demasiado sencilla para algunos.

- III. Previa clasificación de las respuestas, seleccione algunos estudiantes para que compartan sus respuestas y argumenten su elección.*
- IV. Encontrada la función como expresión $d(t) = 120t$ y su respectiva gráfica, pasamos a repetir el paso III*
 - 3. Encuentre una expresión que permita calcular la distancia recorrida del automóvil, si se empieza a tomar el tiempo en un punto situado a 500 metros a la derecha de un punto de referencia C (casa de María).*

Se les pide modelar de nuevo la función lineal, esta vez transformada ya que la función no parte del origen.

4. *¿Cómo se expresa la distancia en función del tiempo cuando habían recorrido 700 metros de la autopista?*

De manera similar a la pregunta anterior se pide modelar la situación, pero ésta vez en la transformación de la función lo que cambia es el signo puesto que la referencia es el punto de llegada.

V. *Para iniciar la socialización podemos preguntar ¿qué “comparten” o en qué se parecen las funciones que encontraron?*

Con estas preguntas se espera que los estudiantes, usando sus presaberes, hablen de la velocidad como el cociente (*distancia/tiempo*) y/o utilicen el modelo $d(t) = 120t$ para dar respuesta: 0.1 horas o 6 minutos tardaron.

¿Qué significado tiene el valor indicado de 120 kilómetros por hora? Si sólo tardaron 6 minutos en ese trayecto, ¿por qué hablamos de 120 kilómetros en una hora?

El significado de los 120 kilómetros por hora, no es más que una forma de decir que si el automóvil se mantiene a esa velocidad por una hora recorre 120 kilómetros. Pero, *¿Cómo puedo visualizar los 120 kilómetros por hora en el gráfico de los 6 minutos?*

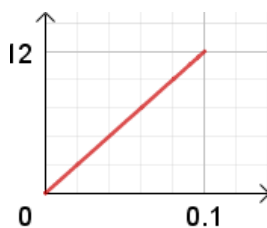


Figura 66. Interpretación de la velocidad.

Decir que la velocidad se mantiene es otra forma de hablar de velocidad constante. *¿Qué implica que la velocidad sea constante?*

Se les puede pedir a los estudiantes que dibujen la velocidad 120 kilómetros por hora como un cociente, recordando unidades de trabajo anteriores, en la gráfica que había realizado para la pregunta 2 en donde se pedía la gráfica para cualquier tiempo t .

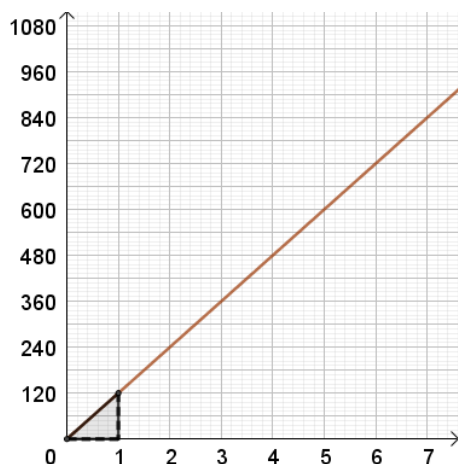


Figura 68. Gráfica distancia vs tiempo t .

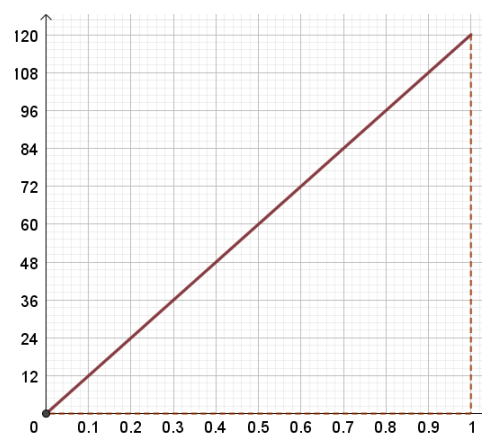


Figura 67. Gráfica distancia vs tiempo t , detalle de la primera hora.

Cuando los estudiantes obtengan las gráficas anteriores, se les pedirá que interpreten gráficamente la razón de cambio en la primera gráfica, este proceso terminará cuando afirmen que la razón $\frac{12}{0.1}$ es la misma $\frac{120}{1}$ inicial.

Seguidamente podemos preguntar: *¿Qué sucedería con la gráfica en la segunda pregunta si el automóvil no transita a una velocidad constante?*

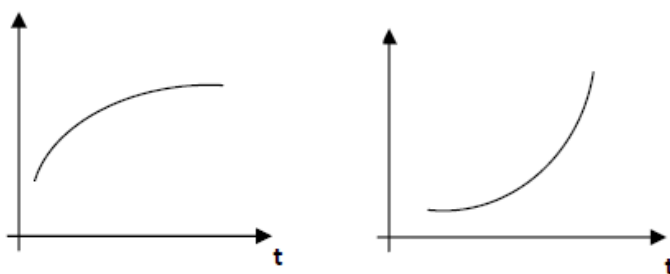


Figura 69. Posibles interpretaciones gráficas.

Si se obtiene una gráfica como las anteriores, u otra, podemos pedir que interpreten gráficamente la velocidad en algunos intervalos de tiempo. Es factible que los estudiantes empiecen a encontrar relaciones con la interpretación gráfica de la derivada de Fermat de la unidad 3.75

En la siguiente parte, continuaremos con el contexto del problema, pero vamos a abandonar momentáneamente las interpretaciones gráficas para reflexionar sobre los datos en velocidades no constantes.

Unidad 4 -parte ii

LA DERIVADA DE FERMAT

“VAMOS A VISITAR AL TÍO GABRIEL”



Figura 70. Velocímetro.

Después de visitar a Cristian, el viaje hacia la casa del tío Gabriel fue de 105 kilómetros y se realizó en 1.5 horas. María manejó sin hacer paradas. Su hija Ana, escuchó cuando María le comentaba a Gabriel lo siguiente: *“al principio había congestión vehicular, pero no hubo inconvenientes, nos vinimos a una velocidad de 70 kilómetros por hora”*. Ana había observado el velocímetro del carro tres veces distintas durante el recorrido, este marcó 64 kilómetros por hora cuando llevaban veinte minutos de recorrido, 90 kilómetros por hora cuando llevaban cuarenta minutos, y 88 kilómetros por hora

cuando llevaban 1.2 horas de viaje. Ana no entiende por qué su mamá dice que 70 km/h.

5. *¿Tiene sentido lo que le dijo María a Gabriel? ¿En qué se basó María para afirmar que viajaron a 70 kilómetros por hora?*
6. *¿Qué significado tiene el valor indicado por el velocímetro del carro (64 kilómetros por hora) cuando llevaban 20 minutos de viaje?*
7. *¿Alguna vez el velocímetro marcó 70 kilómetros por hora tal como María le dijo a Gabriel? Si es afirmativa su respuesta, explique su razonamiento.*

MANUAL PARA EL DOCENTE

UNIDAD 4

PARTE II

Objetivo: Abordar la problemática de la razón de cambio cuando la razón de cambio no es constante en un problema típico de velocidad.

Se propone:

- I. *Asegurarse de que los estudiantes comprendan la situación. Se abordan inicialmente las preguntas 5. Y 6.*
 - II. *Para las preguntas 5. y 6. Se proponen veinte minutos de trabajo individual.*
5. *¿En qué se basó María para afirmar que viajaron a 70 kilómetros por hora?*

Buscamos con esta pregunta que los estudiantes se refieran a la velocidad como el cociente

$(\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}})$ para indicar que María hizo un cálculo estimado de $\frac{105}{1.5} = 70$ kilómetros por hora. Aquí se puede comentar que ese cálculo se conoce como velocidad media que corresponde, en este caso a la comparación de la distancia recorrida.

y el tiempo recorrido. $V_m = \frac{d_f - d_i}{t_f - t_i}$ en donde d_f y d_i son la distancia final e inicial y t_f y t_i son los tiempos que corresponden a esas distancias.

6. *¿Qué significado tiene el valor indicado por el velocímetro del carro (64 kilómetros por hora) cuando llevaban 20 minutos de viaje?*

Al igual que en la discusión en la parte 1. se espera que respondan que cuando llevaban 20 minutos de viaje si se mantenía esa velocidad una hora, se recorrerían 64 kilómetros.

5. *III, IV. & V. Naturalmente si algún o algunos razonan así, serán los últimos expositores en esta parte de la socialización, primero se recomienda identificar y dejar exponer a los estudiantes que tomaron valores para d_f, d_i, t_f, t_i incorrectos porque al hacer el cálculo encontremos una velocidad distinta a 64, también es importante preguntar si esa velocidad es constante, se descartará que sea constante cuando argumenten, por ejemplo, que en distintos tiempos el velocímetro marcó otras velocidades.*

Nota: Debemos recordar que los estudiantes descubren, no debemos precipitarnos, pueden tardar más de lo que queremos, pero ellos deben ser los protagonistas a la hora de afrontar las preguntas.

7. *¿Alguna vez el velocímetro marcó 70 kilómetros por hora tal como María le dijo a Gabriel? Si es afirmativa su respuesta, explique su razonamiento.*

Después de 8 minutos de trabajo individual, los estudiantes, muy probablemente, no tardarán en decir que si pasó de 64 a 90 kilómetros por hora es porque tuvo que pasar por 70. Es una concepción intuitiva válida de la continuidad de la función velocidad.

Nota 3: Esta afirmación permite a los estudiantes particularizar, para la situación, el conocido Teorema del valor intermedio, enunciado en los libros de cálculo como:

Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ para el cual $f(a) \neq f(b)$, y si n es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe c entre a y b tal que $f(c) = n$

Podemos preguntarles ahora en qué instante se alcanzó la velocidad de 70 kilómetros por hora, cuya respuesta exacta es imposible de determinar a menos de que se conozca la función, esperamos que indiquen un intervalo, de hecho la respuesta esperada es que ese valor de t debe estar entre 20 y 40 minutos. Se propone a los estudiantes que generalicen lo que está pasando a modo de conjetura para luego preguntarles: *¿Podemos afirmar que si se tiene una velocidad media v entonces en algún momento del recorrido el velocímetro marcará esa velocidad?*

Aquí podemos plantear un juego gráfico ante la duda, les pediremos que dibujen la curva que representa la velocidad en función del tiempo en un plano cartesiano que tiene una recta paralela al eje x que indica la velocidad media, se les pedirá que se apoyen de los datos que provee Ana en el problema. De lo que resultará sin trazar la curva:

Nota: Existen infinitas soluciones.

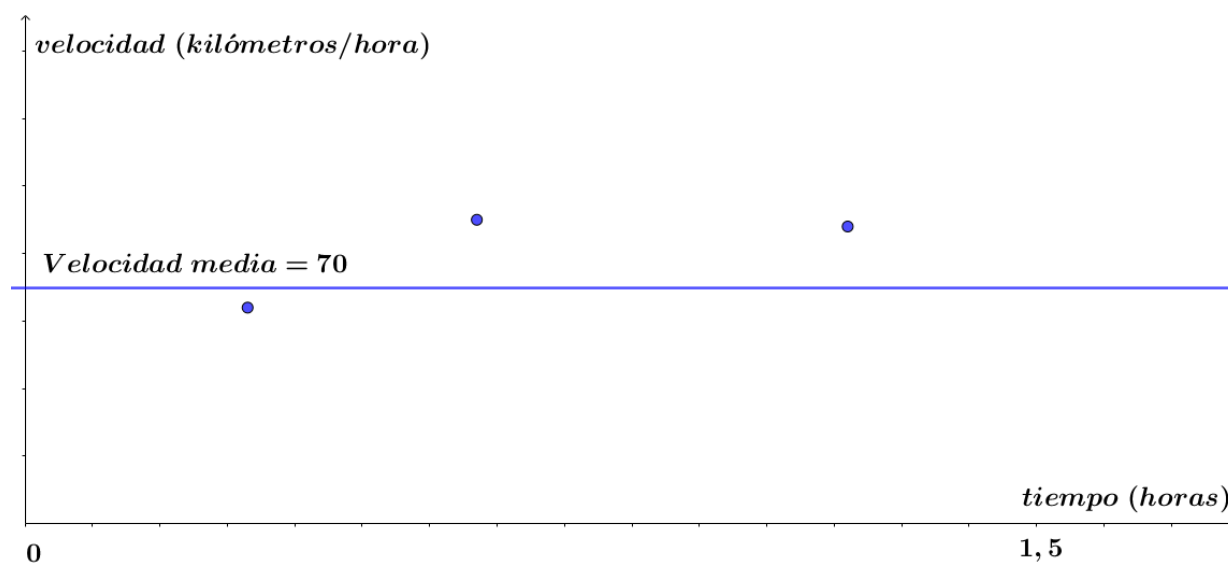


Figura 71. Velocidad media.

Como es costumbre, aquí se clasifican las soluciones, se pone a juicio del grupo y se descartan las curvas que no tienen sentido en el contexto del problema. Dado que sólo hemos trabajado con polinomios y por la situación misma, los estudiantes pueden optar por trazar curvas continuas, les preguntaremos después de adoptar algunas posibles curvas, si la conjetura se cumple para el valor 70 (velocidad media)

Unidad 4 - parte iii

“LA MULTA”

Dos radares de control de velocidad se encontraban en un trayecto de 52 kilómetros de distancia sobre la carretera por donde pasó el automóvil.



Figura 72. Radar.

Cuando pasó el auto al lado del primer radar, su velocidad era de 90 kilómetros por hora. Treinta minutos después, cuando pasó por el segundo radar, su velocidad era 80 kilómetros por hora.

8. Si el límite de velocidad es de 100 km por hora.
¿Excedió el límite de velocidad el automóvil en

*algún momento en los 52 kilómetros?
Justifique.*

MANUAL PARA EL DOCENTE

UNIDAD 4

PARTE III

Objetivo: Usar de manera intuitiva el Teorema del Valor Medio y establecer una relación entre la interpretación gráfica de la derivada de Fermat y el Teorema del valor medio.

- I. *Debemos asegurarnos que los estudiantes entiendan el enunciado 8. si existe dificultad en entender, se le puede pedir a un estudiante que les explique a sus compañeros la situación.*
- II. *Para la pregunta 8, se les pide a los estudiantes que trabajen de manera individual por 10 minutos y justifiquen su elección de manera escrita.*
- III. *Como es costumbre, debe elegir a uno, o algunos, que muestren su razonamiento, podemos plantear que existen dos 'bandos' en el salón, los partidarios del "sí" y los partidarios del "no".*
- IV. *Podemos enumerar los argumentos de cada bando dividiendo el tablero en dos partes con la intención de tener una única respuesta al final de la exposición de los argumentos.*
- V. *Los estudiantes deben descartar los argumentos que consideren 'débiles'. Argumentos del tipo: "así el carro tuviera una velocidad de 100km/h todo el tiempo no podría recorrer 52 kilómetros en 30 minutos" o "para poder recorrer esa*

distancia en ese tiempo tuvo que llevar una velocidad de 104 km/h todo el tiempo” son muy valiosos, ya que podemos insistir en saber qué tipo de cálculo está haciendo, probablemente los estudiantes asuman la idea lineal de la velocidad argumentando que si recorre todo el camino a 100 km/h quiere decir que sólo podría recorrer 50 km en 30 minutos, por lo que debe haber excedido el límite de velocidad. En el argumento donde se menciona la velocidad de 104 km/h algún o algunos indicarán que ese valor se obtiene simplemente de dividir 52 km/ 0.5 h, aquí podemos intervenir e indicar que esa división se puede interpretar como el cociente de dos diferencias tomando los radares 1 y 2 como dos momentos, es decir $104 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{52 - 0}{0.5 - 0}$, donde x es la posición y t el tiempo. Cuando el grupo esté de acuerdo en que excedió el límite de velocidad, les pediremos que hagan un posible gráfico del espacio recorrido contra el tiempo de la situación. Les pediremos que interpreten gráficamente el cociente $\frac{52 - 0}{0.5 - 0}$, seguramente, por unidades previas los estudiantes trazarán la recta que pasa por los puntos (0,0) y (0.5,52)

Si ese cociente lo interpretan como la pendiente de una recta secante, la pregunta de tipo gráfico es: ¿existe una recta tangente en un punto de la curva que tenga esa pendiente?

Una posible gráfica se muestra a continuación:

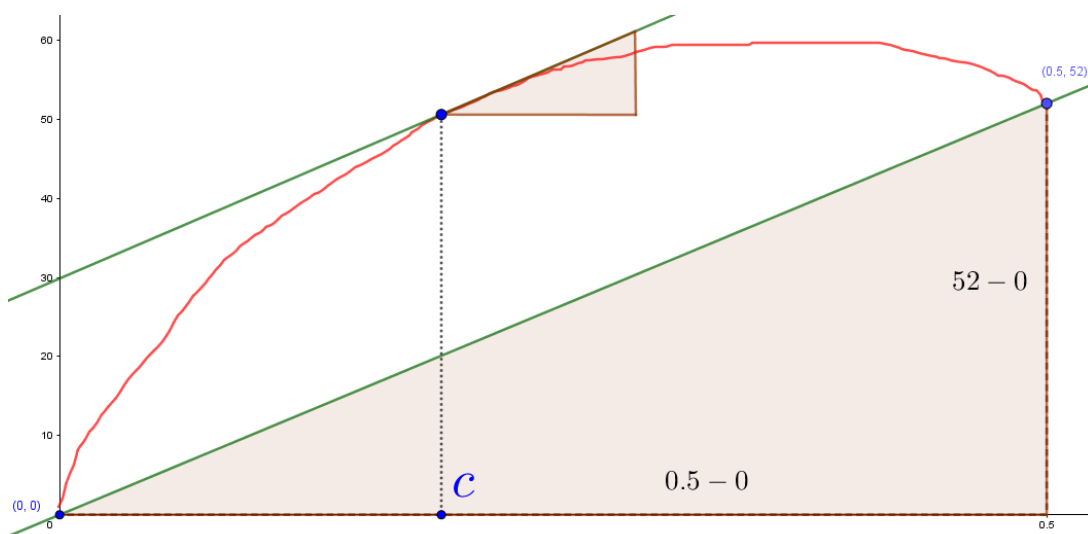


Figura 73. Posible interpretación.

Para toda gráfica de los estudiantes siempre existirá el valor c ya que las curvas son continuas, observarán que en el punto $(c, f(c))$ hay una recta tangente a la curva que tiene la misma pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(0.5, 5.2)$, puede que algunos estudiantes encuentren la conexión con dF , si no es así, debemos guiar la clase para recordar que la pendiente de la recta tangente vista como cociente para la función distancia es precisamente la derivada de Fermat para el punto c , $dF(c)$. En otras palabras, los estudiantes resolverán el problema aplicando el Teorema del valor medio, que en nuestro caso se puede enunciar así:

Sea f una función en el intervalo $[a, b]$, entonces existe un número c en ese intervalo,

$$\text{tal que: } dF(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

