

ITERACIONES EXPONENCIALES Vs. ITERACIONES FACTORIALES

DANIEL NÚÑEZ ALARCÓN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA

2009

ITERACIONES EXPONENCIALES Vs. ITERACIONES FACTORIALES

AUTOR:

DANIEL NÚÑEZ ALARCÓN

Trabajo de Grado para obtener el título de  
Licenciado en Matemáticas

DIRECTOR:

EDILBERTO JOSÉ REYES GONZALES

Magister en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2009

# *Agradecimientos*

*Al primer matemático de la historia, inventor de los naturales.*

*Sé que tu obra va más allá de ese mero hecho,  
sé que trasciendes de esa hipótesis del continuo.*

*No a nosotros ¡oh YHWH!, si no a tu nombre da gloria.*

*A mis padres, a Inta y mis hermanos. Por su incondicional apoyo.  
Aunque a veces no parezca, a cada uno lo llevo muy adentro en el corazón.*

*Ustedes son el motor que me ayudó a emprender esta travesía.*

*A Jaime Alberto Acevedo. Por nuestra amistad.*

*Sé que de haber estado aún con nosotros,  
hubieras sido el primer interesado en leer este trabajo.*

*Aún no me perdono el no haber estado con vos,  
cuando más necesitabas compañía.*

*A la flía Serrano Rodríguez y a Saúl.*

*Por su generosa ayuda en el momento más útil.*

*La vida se torna más fácil,  
cuando la suerte pone a nuestra vera personas de ese talante.*

*Al profesor Edilberto Reyes. Por su orientación.*

*Por ayudarme y corregirme en mis imprecisiones.*

*A los profesores. A Arnoldo y Carlos Arturo.*

*A ustedes les debo la escritura de este texto.*

*A Velleman, Alexandra y Gilberto, las gráficas de éste.*

*Al en otrora, (Parche de Urra). Aún los quiero y extraño.*

*Hicieron que fuesen amenos mis primeros años en la U.*

*A quien no puede faltar. A Ddiana Serrano. La razón de mi vida.*

*Espero que mis próximos trabajos no coincidan con ninguna fecha especial,  
así puedo concentrarme enteramente en tu felicidad.*

*Gracias por estar junto a mí. Por darle dirección y sentido a mi vida.*

*Es por vos que me esfuerzo en ser cada día mejor.*

*A Númar, Gerson y Jahir. Porque además de reír mi risa han llorado mi llanto.*

*A todos ustedes, de veras gracias.*

*Ddaniel.*

# TABLA DE CONTENIDO

Introducción	I
1. Preliminares.	1
1.1. Sucesión factorial iterada. . . . .	3
1.2. Sucesión exponencial iterada. . . . .	5
1.3. Sucesiones iteradas crecientes y superiormente no acotadas. .	6
2. Exponencial Vs. Factorial.	15
3. Exponencial Vs. Exponencial.	25
4. Visitando nuevamente la pregunta inicial.	43
5. Conclusiones	45
6. Bibliografía.	46

## RESUMEN

### TÍTULO

ITERACIONES EXPONENCIALES Vs. ITERACIONES FACTORIALES\*

### AUTORES:

Núñez Alarcón, Daniel.  
Reyes Gonzales, Edilberto José.\*\*

### PALABRAS CLAVES:

Sucesiones Exponenciales, Sucesiones Factoriales, Iteración, Sucesiones Crecientes, Sucesiones No Acotadas, Comparabilidad.

### DESCRIPCIÓN:

Históricamente, en la mayoría de investigaciones matemáticas realizadas sobre sucesiones, el objeto de estudio ha sido la convergencia de éstas. Contrario a eso, en este trabajo se estudia un artículo científico, en el cual el centro de atención es la rapidez con que algunas sucesiones crecen. ¿Cuál es el mayor número que se puede escribir con cinco caracteres, usando la notación matemática normal? Esta simple e inquietante pregunta, desencadena un artículo de investigación sobre la rapidez de divergencia de las sucesiones exponencial y factorial; titulado: EXPONENTIAL Vs. FACTORIAL.

Daniel Velleman, profesor del Departamento de Matemáticas y Ciencias Computacionales de Amherst College (USA), es quien lleva a cabo dicha investigación. Respondiendo por medio de ésta, no sólo esta inquietante pregunta, sino también otras cuestiones relacionadas; relativas a la rapidez de crecimiento de las sucesiones exponenciales iteradas. Sorprende observar algunos casos de diferentes sucesiones exponenciales iteradas que crecen casi a la misma velocidad.

En este trabajo de grado, se hace una exposición exhaustiva de los resultados matemáticos que Daniel Velleman presenta en su investigación. De tal forma que al leerlo, cualquier estudiante con conocimientos matemáticos básicos de pregrado; pueda asimilar resultados actuales de investigación matemática, presentados por este investigador en su artículo.

---

\* Trabajo de Grado.

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en matemáticas. Director: Mg en Sc. Edilberto José Reyes Gonzales.

## ABSTRACT

### TITLE

EXPONENTIAL ITERATEDS Vs. FACTORIAL ITERATEDS

### AUTHORS:

Núñez Alarcón, Daniel.  
Reyes Gonzales, Edilberto José. \*\*

### KEYWORDS:

Exponential Sequences, Factorial Sequences, Iterated, Increasing Sequences, Sequences without bound, Comparability.

### DESCRIPTION:

Historically, the study objective of most of the mathematical investigations about sequences has been their convergence. These investigations study a scientific article, in which, opposite to most of its kind, the main attention is focused on how fast some successions increase. What is the biggest number that can be written with five characters, using regular mathematical notation?. This simple and disquieting question, initiates a research article about the speed the divergence of the exponential and factorial sequences. Titled: EXPONENTIAL Vs. FACTORIAL.

Daniel Velleman, teacher of Department of Mathematics and Computer Science, Amherst College (USA), he is the one who carries out this investigation. Responding by means of this one, not only this disquieting question, but also other related questions; relative to the rapidity of growth of the iterated exponential sequences. Surprising to observe some cases of different sequences exponential iterative grow almost as fast.

In this grade thesis, there is done an exhaustive exhibition of the mathematical results that Daniel Velleman presents in her research. In such a way that on having read it, any student with mathematical basic knowledge of pre-degree; could assimilate current results of mathematical research, presented by this researcher in her article.

---

\* Degree Project.

\*\* College of Sciences, Scholl of Mathematics. Bachelor's Degree in mathematics. Director: Mg en Sc. Edilberto José Reyes Gonzales.

# Introducción

En matemáticas, existen problemas que son fáciles de formular e interpretar, aunque no sean fáciles de resolver; basta leerlos y aún con poca formación matemática, se puede entender en qué consiste el problema. No obstante, en muchos casos la solución de tales problemas es muy complicada y difícil.

Examinemos el siguiente problema:

¿Cuál es el número más grande que se puede escribir usando solamente cinco símbolos matemáticos básicos?

Quizá estemos de acuerdo en que esta pregunta es muy fácil de asimilar, además resulta atractiva para intentar solucionarla. Pero: ¿será tan trivial su solución como lo es su enunciado?

Podríamos intentar anticiparnos y dar una posible solución al problema. Por ejemplo, observemos los siguientes dos candidatos.

$$9^{9^{9^9}}$$

$$9!!!!$$

¿Cuál es el más grande? ¿Es alguno de ellos la solución del problema? Tal vez estemos de acuerdo en que tratar de calcular estos números directamente, resulta imposible. Bueno, a menos que se disponga de mucho tiempo y de una paciencia y tenacidad enorme.

Mediante el uso de sucesiones iteradas, Daniel Velleman resuelve este problema en su artículo: *EXPONENTIAL Vs. FACTORIAL*, publicado en: *THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA*.

En este trabajo, nos permitiremos hacer una revisión del artículo mencionado, dentro de lo cual aspiramos presentar de manera detallada los resultados que el autor compila en dicho artículo sobre las sucesiones iteradas exponencial y factorial. Además, exponer en forma clara la solución de este interesante problema, a fin de hacer accesibles resultados novedosos, atractivos y actuales de investigación matemática a estudiantes de pregrado de nuestra universidad.

# Capítulo 1

## Preliminares

¿Cuál es el número más grande que se puede escribir, usando solamente cinco símbolos matemáticos básicos?

Ésta, fue la pregunta base de una competencia entre estudiantes en Norteamérica. La misma dio lugar al origen de VELLEMAN [1]. El artículo *EXPONENTIAL Vs FACTORIAL* de Daniel Velleman, publicado en : THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA, el cual analizaremos en este trabajo de grado.

Velleman en su artículo, manifiesta que se motivó a investigar al respecto, debido a que el anfitrión del concurso tenía dificultad al querer determinar el ganador, pues él mismo anfitrión desconocía cuál era la respuesta correcta.

Naturalmente, pudiéramos pensar que la solución a esta pregunta debe ser uno de los siguientes números:

$$9^{9^{9^9}} \qquad 9!!!!$$

¿Cuál de estos dos es más grande? La mayoría de estudiantes a quienes hemos realizado esta pregunta, responden  $9!!!!$ . La respuesta correcta es  $9^{9^{9^9}}$ , pero esta representación no es la solución del problema planteado. Estos resultados se obtendrán en el desarrollo de este trabajo.

Seguiremos la convención habitual de agrupar a la derecha. Así,  $9^{9^9} = 9^{(9^9)}$ , y no,  $(9^9)^9$ . También usaremos signos de admiración repetidos para denotar los usos repetidos de la función factorial.

Para empezar a familiarizarnos un poco con el tamaño de estos números, vamos a hacer una aproximación burda de ellos.

Empecemos por el del factorial:  $9! = 362880$ ,  $9!! = 362880!$ . ¿Cómo calcular este factorial?. Si bien es cierto que no podemos calcularlo, gracias a un resultado de teoría

de números podemos al menos conocer cuántos ceros tiene a la derecha el desarrollo de este factorial.

Este resultado se conoce como la fórmula de Legendre, la cual nos permite conocer cuál es el exponente de los primos que conforman la descomposición de  $n!$  en factores primos. La fórmula dice así.

$$n! = \prod p_i^{k_i}, \text{ con } p_i \text{ primo y } p_i \leq n.$$

El exponente  $k_i$  de cada  $p_i$  se calcula así:

$$k_i = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor.$$

Si calculamos el exponente de 2 y 5, respectivamente, en la descomposición de  $362880!$  en factores primos, el exponente menor nos determina el número de ceros que tiene a la derecha  $362880!$ . Procedamos a calcular los exponentes de 2 y 5 respectivamente.

Para 2:

$$k_i = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{362880}{2^j} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{362880}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{362880}{2^2} \right\rfloor + \dots$$

A partir de  $j = 19$ ,  $\left\lfloor \frac{362880}{2^j} \right\rfloor = 0$ , luego  $k = 362873$ .

Similarmente hacemos para 5, obteniendo  $k = 90717$ . Como se dijo antes, escogemos el menor. Así, el número de ceros a la derecha del desarrollo de  $362880!$  es: 90717.

Tal vez, estemos de acuerdo en que este número es de gran tamaño. Pese a que solo es  $9!!$ . ¿Qué de  $9!!!!?$ .

Procedamos a hacer una aproximación de  $9^{9^{9^9}}$

$$9^9 = 387420489$$

Por lo cual tenemos:

$$\begin{aligned} 9^{9^9} &= 9^{387420489} > 9^{387420488} = (9^2)^{193710244} \\ &= 81^{193710244} \\ &> 10^{193710244} \end{aligned}$$

$$\text{Así, } 9^{9^9} > 10^{193710244}.$$

Sabemos que  $10^{193710244}$  es 1000...,0; un uno con ciento noventa y tres millones setecientos diez mil doscientos cuarenta y cuatro ceros. Recordemos: un uno con seis ceros es un millón; con doce ceros es un billón; con dieciocho es un trillón. ¿Qué es con ciento noventa y tres millones setecientos diez mil doscientos cuarenta y cuatro ceros? Para escribir este número en un documento de Word, sería necesario usar aproximadamente sesenta y nueve mil páginas.

Esto es apenas para un número que es inferior a  $9^{9^9}$ , tal vez ya estemos convencidos que calcular  $9^{9^{9^9}}$  mediante fuerza bruta puede llevarnos quizá toda una vida. Para poder determinar cuál de estos dos números es más grande (pese a desconocerlos), usaremos iteraciones de sucesiones exponenciales y factoriales.

Estamos interesados en la comparación de los usos repetidos de las sucesiones exponencial y factorial. ¿Cuál conduce a valores más grandes?

Para ello debemos clarificar algunos detalles. En las siguientes secciones, definiremos las sucesiones factorial y exponencial iteradas y a la vez resaltaremos algunas particularidades de éstas.

## 1.1. Sucesión factorial iterada.

**Definición 1.1.** Sea  $k$  un entero no negativo, definimos recursivamente una sucesión factorial iterada  $F_n$  así:

$$F_0 = k \quad y \quad F_{n+1} = F_n!, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

**Ejemplo 1.1.1.** Sea  $F_0 = 0$ ; luego  $F_1 = F_0! = 0! = 1$ ;  $F_2 = F_1! = 1! = 1$ . Por lo cual, en este caso:  $\{F_n\} = \{0, 1, 1, \dots, 1, \dots\}$ .

Similarmente ocurre si escogemos  $F_0 = 1$ , obtendremos  $\{F_n\} = \{1, 1, 1, \dots, 1, \dots\}$ . La sucesión constante 1.

**Ejemplo 1.1.2.** Escojamos  $F_0 = 2$ ; luego  $F_1 = F_0! = 2! = 2$ ;  $F_2 = F_1! = 2! = 2$ . Resultando así:  $\{F_n\} = \{2, 2, 2, \dots, 2, \dots\}$ . La sucesión constante 2.

**Ejemplo 1.1.3.** Para el caso  $k = 3$  se torna más complicada.  $F_0 = 3$ ; luego  $F_1 = 3! = 6$ ;  $F_2 = 6! = 720$ ;  $F_3 = 720! \approx 2,6012 \times 10^{1746}$ .

Tenemos entonces:

$$\{F_n\} = \{3, 6, 720, 2,602 \times 10^{1746}, \dots\}.$$

De los ejemplos anteriores inferimos el siguiente lema.

**Lema 1.2.** Para toda  $k, n \in \mathbb{N}$ , si  $k > 2$  entonces  $k! > k + 1$ .

*Demostración.* La prueba es por inducción.

Para  $k = 3$  es bien sabido que  $3! = 6 > 3 + 1 = 4$ .

Para el paso de inducción, si  $k! > k + 1$  debemos probar que:

$$(k + 1)! > k + 2.$$

Recordemos que por hipótesis  $k > 2$ , y sumando 1 a ambos lados de la desigualdad obtenemos  $k + 1 > 3$ , utilizando esto, combinado con la hipótesis de inducción deducimos  $(k + 1)k! > 3(k + 1) = 3k + 3 > k + 2$  y equivalentemente

$$(k + 1)! = (k + 1)k! > k + 2.$$

□

**Lema 1.3.** Si  $k > 2$  entonces  $F_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* La prueba es por inducción.

Para  $n = 0$  tenemos que  $F_0 = k > 2$ .

Para el paso de inducción, asumimos  $F_n > 2$ , y debemos probar que  $F_{n+1} > 2$ .

Como  $F_n > 2$ , por el lema 1.2, sabemos que:

$$F_{n+1} = F_n! > F_n + 1,$$

pero

$$F_n + 1 > 2 + 1 > 2,$$

y por ley transitiva

$$F_{n+1} > 2.$$

□

## 1.2. Sucesión exponencial iterada.

**Definición 1.4.** Sea  $b$  un real positivo, y sea  $c$  un real. Definimos recursivamente una sucesión exponencial iterada  $E_n$  así:

$$E_0 = c \quad y \quad E_{n+1} = b^{E_n}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

**Ejemplo 1.4.1.** Sean  $b = e^{\frac{1}{e}}$  y  $c = -1$ , luego tenemos:  $E_0 = -1$

$$E_1 = (e^{\frac{1}{e}})^{-1} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}} \approx 0,6922; E_2 = (e^{\frac{1}{e}})^{0,6922} \approx 1,29; E_3 = (e^{\frac{1}{e}})^{1,29} \approx 1,6073$$

Así,  $\{E_n\} = \{-1, 0,6992, 1,29, 1,6073; \dots\}$ .

En este ejemplo podemos notar que no importa si se escoge  $c < 0$ , dado que con  $b > 0$  podemos garantizar que a partir del segundo término de la sucesión,  $E_n > 0$ .

**Ejemplo 1.4.2.** Sean  $b = e$  y  $c = 0$ , por lo cual tenemos:  $E_0 = 0$

$$E_1 = (e)^0 = 1; E_2 = (e^1)^1 = e; E_3 = (e)^e \approx 15,154$$

Así,  $\{E_n\} = \{0, 1, 2,7183, 15,154, \dots\}$ .

**Ejemplo 1.4.3.** Sean  $b = e$  y  $c = 4$ , luego tenemos:  $E_0 = 4$

$$E_1 = (e)^4 \approx 54,598; E_2 = (e)^{54,598} \approx 5,1477 \times 10^{23}$$

Así,  $\{E_n\} = \{4, 54,598, 5,1477 \times 10^{23}, \dots\}$ .

De los ejemplos anteriores podemos inferir que hay combinaciones de  $b$  y  $c$  que producen sucesiones que crecen más rápido que otras. Hablaremos de ello más adelante.

Por el momento, observemos algunas particularidades de las funciones exponenciales.

**Lema 1.5.** Consideremos la función  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ . La función  $f$  satisface las siguientes condiciones:

- i) Es continua en  $(1, \infty)$ .
- ii) Es creciente en  $(1, e]$ .
- iii) Es decreciente en  $[e, \infty)$ .

*Demostración.* Para demostrar las tres partes usaremos resultados concernientes a la derivada de una función.

Para el primer inciso, tenemos que una función es continua en un punto, si la derivada de dicha función está definida en ese punto. Procedamos a hallar la derivada de la función.

Sea  $y = x^{\frac{1}{x}}$ , como estamos asumiendo  $x > 1$ , usando la función logaritmo natural obtenemos

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln x$$

escribiéndola como una función implícita y después derivándola obtenemos

$$\begin{aligned} \ln y - \frac{1}{x} \ln x &= 0 \\ \frac{1}{y} y' + \frac{1}{x^2} \ln x - \frac{1}{x^2} &= 0 \end{aligned}$$

concluyendo así que

$$y' = \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2}\right) x^{\frac{1}{x}}$$

Podemos observar que la función derivada está definida para  $x > 0$ , luego podemos concluir que  $f$  es continua en  $(1, \infty)$ , probando así la primera parte de la proposición.

Para la segunda y tercera parte, hallamos las raíces de la función derivada.

$$\begin{aligned} y' = \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2}\right) x^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} (\ln x - 1) x^{\frac{1}{x}} &= 0 \\ (\ln x - 1) x^{\frac{1}{x}} &= 0 \end{aligned}$$

Pero la función  $x^{\frac{1}{x}}$  nunca es cero, luego la única raíz, de la función derivada, la encontramos cuando  $\ln x - 1 = 0$ , o equivalentemente  $\ln x = 1$ , es decir en  $x = e$ . Esto nos sugiere que la función  $x^{\frac{1}{x}}$  tiene un punto crítico en  $x = e$ , averigüemos más sobre qué ocurre en  $x = e$ . Como  $2 < e < 3$ , calculemos  $f'(2)$  y  $f'(3)$ .

$$\begin{aligned} f'(2) &= \left(-\frac{1}{2^2} \ln 2 + \frac{1}{2^2}\right) 2^{\frac{1}{2}} \approx 0,10849 > 0 \\ f'(3) &= \left(-\frac{1}{3^2} \ln 3 + \frac{1}{3^2}\right) 3^{\frac{1}{3}} \approx -1,5803 \times 10^{-2} < 0 \end{aligned}$$

Concluimos que en  $x = e$  hay un máximo absoluto. Además, si  $x \leq e$ ,  $f$  es creciente. Por último, si  $x \geq e$ ,  $f$  es decreciente.  $\square$

### 1.3. Sucesiones iteradas crecientes y superiormente no acotadas.

Como queremos encontrar cuál sucesión conduce a valores más grandes, no tendría sentido si antes no damos algunas condiciones que nos garanticen que éstas producen valores grandes. Definamos qué condiciones para  $b, c$  y  $k$  nos generan sucesiones crecientes y no acotadas superiormente.

En adelante, escribiremos  $E_n(b, c)$  y  $F_n(k)$  para denotar los términos de las sucesiones respectivamente.

Nos interesan valores para  $b, c$  y  $k$  que conduzcan a sucesiones crecientes y no acotadas superiormente.

¿Cómo debe ser  $k$  para que  $F_n$  sea creciente y no acotada superiormente? La respuesta la resume la siguiente proposición:

**Proposición 1.6.** *Sea  $k \in \mathbb{Z}$ , si  $k > 2$  entonces  $F_n$  es estrictamente creciente y no acotada superiormente.*

*Demostración.* Probemos que  $F_n$  es estrictamente creciente.

Debemos probar que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $F_{n+1} > F_n$ , es decir:  $F_{n+1}! > F_n$ . Como  $F_0 = k > 2$ , usando el lema 1.3, concluimos que  $F_n > 2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . De lo anterior, usando el lema 1.2, concluimos que  $F_{n+1}! > F_n$ .

Probemos ahora que  $F_n$  no es acotada superiormente.

Por contradicción, supongamos que  $F_n$  es acotada superiormente. Como  $\{F_n\}$  es no vacía y acotada superiormente, por el axioma del extremo superior, podemos afirmar que tiene un supremo. Sea  $u = \sup\{F_n\}$ , tenemos así que:  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n \leq u$ , y por la propiedad de aproximación, si escogemos  $\epsilon = 1$ , existe algún  $n_0$  tal que  $u - 1 < F_{n_0}$ , sumando 1 a cada lado de la desigualdad tenemos  $u < F_{n_0} + 1$ . Pero sabemos por el lema 1.2 que  $F_{n_0+1} = F_{n_0}! > F_{n_0} + 1$ , de lo cual obtenemos  $F_{n_0+1} > u$ . Contradicción.  $\square$

Ahora acordemos algunas condiciones para la sucesión exponencial. ¿Cómo debe ser  $b$  y  $c$  para garantizar que  $E_n$  sea creciente y no acotada superiormente? Aquí la situación es un tanto más complicada. Claramente debemos escoger  $b > 1$ , pero esta condición no nos garantiza que la sucesión exponencial crezca sin cota superior.

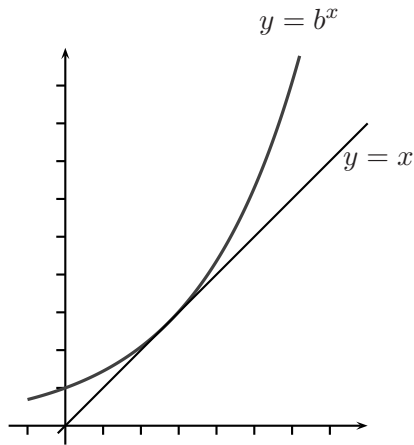
Veamos el gráfico de la curva  $y = b^x$  para  $b = e^{\frac{1}{e}}$ , en la Figura 1.1

Al parecer la recta  $y = x$  es tangente a la curva  $y = (e^{\frac{1}{e}})^x$  en el punto  $(e, e)$ . Verifiquémoslo, para esto hallemos la derivada de la función.

$$y = (e^{\frac{1}{e}})^x = e^{\frac{x}{e}} \text{ luego } y' = e^{\frac{x}{e}} \left(\frac{1}{e}\right),$$

por lo tanto la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto  $(e, e)$  es:

$$y'(e) = e^{\frac{e}{e}} \left(\frac{1}{e}\right) = e \left(\frac{1}{e}\right) = 1,$$

Figura 1.1:  $b = e^{1/e}$ 

La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto  $(e, e)$  es  $m = 1$  y como tenemos un punto de la recta, por la fórmula punto-pendiente podemos encontrar la ecuación de dicha recta. Así:

$$y - e = 1(x - e) = x - e \text{ de lo cual obtenemos } y = x.$$

Esto nos indica el siguiente lema:

**Lema 1.7.** Si  $c \leq e$  y  $b = e^{\frac{1}{e}}$  entonces la sucesión  $E_n$  es acotada superiormente por  $e$ .

*Demostración.* Verifiquémoslo usando el principio de inducción matemática. Para el paso base,  $E_0 = c \leq e$  es inmediato. Para el paso de inducción suponemos que  $E_n \leq e$  y verifiquemos que  $E_{n+1} \leq e$ .

Efectivamente, si  $E_n \leq e$  dividiendo a ambos lados de la inecuación por  $e$  obtenemos

$$\frac{E_n}{e} \leq \frac{e}{e} = 1,$$

y aplicando la función exponencial a ambos lados resulta

$$e^{\frac{E_n}{e}} \leq e^1 = e,$$

la desigualdad se conserva porque la función exponencial es creciente, además, sabemos que

$$e^{\frac{E_n}{e}} = \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^{E_n} = E_{n+1},$$

con lo cual concluimos que  $E_{n+1} \leq e$ . □

¿Qué ocurre con la misma condición para  $b$ , tomando un valor inicial mayor que  $e$ ?

Consideremos el siguiente lema.

**Lema 1.8.** Si  $b \geq e^{\frac{1}{e}}$  y  $c > e$  entonces  $E_n > e$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* La prueba es por inducción.

Para el paso base, debemos probar que  $E_0 > e$ , lo cual es cierto por hipótesis. Para el paso de inducción tenemos  $E_n > e$  y debemos probar que  $E_{n+1} > e$ . Por hipótesis tenemos  $E_n > e$ , por lo tanto  $\frac{E_n}{e} > 1$  y aplicando la función exponencial a ambos lados de la inecuación obtenemos:

$$e^{\frac{E_n}{e}} > e,$$

es decir:  $E_{n+1} = b^{E_n} \geq e^{\frac{E_n}{e}} > e$ . □

**Proposición 1.9.** Si  $b = e^{\frac{1}{e}}$  y  $c > e$  entonces  $E_n$  es estrictamente creciente y no acotada superiormente.

*Demostración.* Por el lema 1.8  $E_n > e$ , además, por el inciso iii) del lema 1.5, la función  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$  es decreciente en  $[e, \infty)$ , luego  $f(E_n) < f(e)$ , por lo tanto

$$E_n^{\frac{1}{E_n}} < e^{\frac{1}{e}},$$

elevando a ambos lados de la desigualdad a la potencia  $E_n$  obtenemos

$$E_n < e^{\frac{E_n}{e}} = E_{n+1}.$$

De lo anterior,  $E_n$  es estrictamente creciente.

Ahora verifiquemos que  $\{E_n\}$  es no acotada superiormente. Por contradicción, supongamos que si lo es, es decir:  $\exists M > 0$  tal que:  $\forall n \in \mathbb{N}$ , se cumple que  $E_n \leq M$

Pero como  $\{E_n\}$  es no vacía y acotada superiormente, por el axioma del extremo superior, podemos afirmar que tiene un supremo. Sea  $u = \sup\{E_n\}$ , por la proposición 1.7,  $u > e$  y por el inciso iii) del lema 1.5  $u^{\frac{1}{u}} < e^{\frac{1}{e}} = b$ , luego  $u < b^u$ , aplicando la función logaritmo natural a ambos lados resulta  $\ln u < \ln b^u$  y por propiedades de los logaritmos  $\ln u < u \ln b$ , concluyendo así que  $\frac{\ln u}{\ln b} < u$ .

Pero,  $u$  es la mínima cota superior, luego por la propiedad de aproximación, sabemos que  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $\frac{\ln u}{\ln b} < E_{n_0}$  de lo cual obtenemos  $\ln u < E_{n_0} \ln b$  y nuevamente usando propiedades de los logaritmos  $\ln u < \ln b^{E_{n_0}}$  y al aplicar la función exponencial a ambos lados resulta  $u < b^{E_{n_0}} = E_{n_0+1}$  o equivalentemente  $u < E_{n_0+1}$ . Claramente una contradicción, con lo cual concluimos que  $\{E_n\}$  es no acotada superiormente. □

Hemos observado a  $E_n$  cuando  $b = e^{\frac{1}{e}}$ . Ahora veamos qué ocurre cuando  $b$  es de otra forma.

Cuando  $1 < b < e^{\frac{1}{e}}$ , la curva  $y = b^x$  interseca la recta  $y = x$  dos veces como lo muestra la siguiente figura:

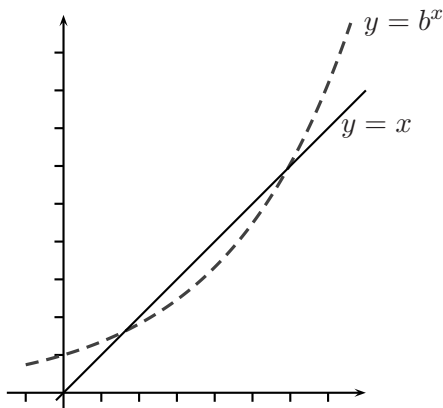


Figura 1.2:  $b < e^{1/e}$

Esto nos indica que la función  $b^x$  tiene dos puntos fijos.

**Afirmación 1.** Si  $1 < b < e^{1/e}$ ,  $E_n$  es creciente y no acotada superiormente, solamente cuando  $c$  es más grande que el mayor de los puntos fijos.

Al mayor de los puntos fijos lo llamaremos  $f(b)$ . La función  $f$  está determinada por la relación  $x = b^x$ , o de otro modo  $b = x^{\frac{1}{x}}$ . Para entender mejor esta relación se puede asociar a la función Lambert  $W$  por medio de la ecuación  $f(b) = -W_{-1}(-\ln b)/\ln b$ . Si el lector desea profundizar, puede encontrar detalles de la función Lambert  $W$  en CORLESS [4].

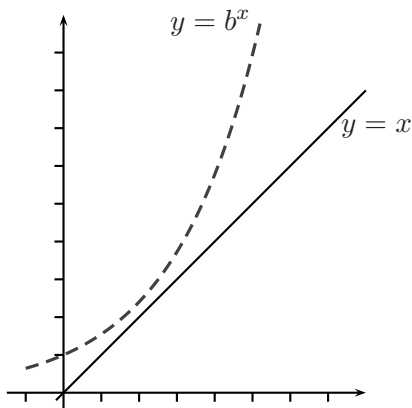
Por último, observemos qué ocurre si  $b > e^{\frac{1}{e}}$  Figura 1.3

Al parecer si  $b > e^{\frac{1}{e}}$ ;  $E_n$  es estrictamente creciente y no acotada superiormente. Por consiguiente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \infty$ . Comprobemos nuestras sospechas.

**Proposición 1.10.** Si  $b > e^{\frac{1}{e}}$ ; entonces para toda  $c$ ,  $E_n$  es estrictamente creciente y no acotada superiormente

*Demostración.* i) Si  $c > e$ , probemos que  $E_n$  es estrictamente creciente y no acotada superiormente. Por el lema 1.8  $E_n > e$ . Además, por el inciso iii) del lema 1.5 la función  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$  es decreciente en  $[e, \infty)$ , luego  $f(E_n) < f(e)$ , por lo tanto

$$E_n^{\frac{1}{E_n}} < e^{\frac{1}{e}} < b.$$

Figura 1.3:  $b > e^{1/e}$ 

Así, obtenemos

$$E_n < b^{E_n} = E_{n+1}$$

De lo anterior,  $E_n$  es estrictamente creciente.

Ahora verifiquemos que  $\{E_n\}$  no es acotada superiormente. Por contradicción, supongamos que si lo es, es decir:  $\exists M > 0$  tal que:  $\forall n \in \mathbb{N}$ , se cumple que  $E_n \leq M$ .

Pero como  $\{E_n\}$  es no vacía y acotada superiormente, por el axioma del extremo superior, podemos afirmar que tiene un supremo. Sea  $u = \sup\{E_n\}$ , por la proposición 1.8,  $u > e$  y por el inciso iii) del lema 1.5  $u^{\frac{1}{u}} < e^{\frac{1}{e}} < b$ , luego  $u < b^u$ , aplicando la función logaritmo natural a ambos lados resulta  $\ln u < \ln b^u$  y por propiedades de los logaritmos  $\ln u < u \ln b$  concluyendo así que  $\frac{\ln u}{\ln b} < u$ .

Pero,  $u$  es la mínima cota superior, luego por la propiedad de aproximación, sabemos que  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $\frac{\ln u}{\ln b} < E_{n_0}$  de lo cual obtenemos  $\ln u < E_{n_0} \ln b$  y nuevamente usando propiedades de los logaritmos  $\ln u < \ln b^{E_{n_0}}$ , al aplicar la función exponencial a ambos lados resulta  $u < b^{E_{n_0}} = E_{n_0+1}$  o equivalentemente  $u < E_{n_0+1}$ . Claramente una contradicción, con lo cual concluimos que  $\{E_n\}$  no es acotada superiormente.

ii)  $c \leq e$ , probemos que  $E_n$  es estrictamente creciente y no acotada superiormente. Para simplificar un poco el trabajo, garanticemos que para algún  $n_1$  se cumple que  $E_{n_1} > e$ , de lo cual, con lo que hemos probado hasta aquí, se puede deducir que  $E_n$  es creciente y no acotada superiormente por lo menos a partir de  $n_1$ .

Probemos que si  $b > e^{\frac{1}{e}}$  y  $c \leq e$ , para algún  $n_1$  se cumple que  $E_{n_1} > e$ . Por contradicción supongamos lo contrario, es decir:  $E_n \leq e$  para toda  $n$ . Esto se traduce en que  $\{E_n\}$  es acotada superiormente por  $e$ , por ello, y el hecho de que  $\{E_n\} \neq \emptyset$ ,

hacemos uso del axioma del extremo superior nuevamente, para garantizar que  $\{E_n\}$  tiene un supremo. Sea  $u = \sup\{E_n\}$ . Como  $u$  es la mínima cota superior tenemos  $u \leq e$ , nuevamente usamos el lema 1.5, pero en esta ocasión el inciso ii) de éste; es decir,  $x^{\frac{1}{x}}$  es creciente en  $(1, e]$ . Luego, como  $u \leq e$  concluimos que  $u^{\frac{1}{u}} \leq e^{\frac{1}{e}} < b$  luego  $u < b^u$ , aplicando la función logaritmo natural a ambos lados resulta  $\ln u < \ln b^u$  y por propiedades de los logaritmos  $\ln u < u \ln b$  concluyendo así que  $\frac{\ln u}{\ln b} < u$ .

Pero,  $u$  es la mínima cota superior, luego por la propiedad de aproximación, sabemos que  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $\frac{\ln u}{\ln b} < E_{n_0}$  de lo cual obtenemos  $\ln u < E_{n_0} \ln b$  y nuevamente usando propiedades de los logaritmos  $\ln u < \ln b^{E_{n_0}}$  y al aplicar la función exponencial a ambos lados resulta  $u < b^{E_{n_0}} = E_{n_0+1}$  o equivalentemente  $u < E_{n_0+1}$ . Claramente una contradicción, por lo tanto concluimos que  $\{E_n\}$  no es acotada superiormente por  $e$ . Con lo cual hemos probado que para algún  $n_1$  se cumple que  $E_{n_1} > e$ . Luego, concluimos que  $E_n$  es creciente y en últimas no acotada superiormente.  $\square$

De lo hecho en los lemas 1.7, 1.8 y en las proposiciones 1.9, 1.10 y por la afirmación 1, podemos introducir la siguiente definición:

**Definición 1.11.** *Definimos el conjunto  $R$ , como el conjunto de parejas  $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ , tales que la sucesión  $E_n(b, c)$  es estrictamente creciente y no acotada superiormente. Es decir:  $R = \{(b, c) \in \mathbb{R}^2 : b > e^{\frac{1}{e}}. \text{ Ó } 1 < b \leq e^{\frac{1}{e}} \text{ y } c > f(b), \text{ donde } f(b) \text{ es el mayor de los puntos fijos.}$*

También nos resultará conveniente establecer algunas propiedades de orden de las sucesiones exponenciales iteradas, las cuales resumiremos en el siguiente teorema.

**Teorema 1.12.** *Una sucesión exponencial iterada, cumple las siguientes propiedades:*

1. Si  $(b, c) \in R$  se tiene:  $E_{n+1}(b, c) > E_n(b, c) \forall n \geq 1$ . Además,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(b, c) = \infty$ .
2.  $\forall b > 1$  y  $n \geq 0$ , entonces  $E_n(b, c_1) > E_n(b, c_2)$  si  $c_1 > c_2$ . Además  $\lim_{c \rightarrow \infty} E_n(b, c) = \infty$ .
3. Si  $b_1 > b_2 > 1$  y  $c > 0$ , entonces  $E_n(b_1, c) > E_n(b_2, c) \forall n \geq 1$ .
4. Si  $b_1 > b_2 > 1$  y  $n \geq 1$  y  $E_n(b_1, c_1) > E_n(b_2, c_2)$ , entonces  $E_m(b_1, c_1) > E_m(b_2, c_2) \forall m > n$ .

*Demostración.* Las cuatro partes se pueden probar por inducción,

1. Esta prueba es inmediata, dado que solamente estamos resumiendo lo que hemos aceptado en la afirmación 1 y probado, en los lemas 1.7, 1.8, y proposiciones 1.9, 1.10. Es decir, hemos probado que con estas condiciones  $E_{n+1}(b, c) > E_n(b, c)$  y además

$\{E_n\}$  no es acotada superiormente, de lo cual concluimos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(b, c) = \infty$ .

2. Para el primer caso, verifiquemos que  $E_1(b, c_1) > E_1(b, c_2)$  se cumple. Tenemos  $E_1(b, c_1) > E_1(b, c_2)$  lo cual es equivalente a tener  $b^{c_1} > b^{c_2}$ , pero esto es cierto, dado que  $c_1 > c_2$  y la función exponencial es creciente para cualquier base  $b$ , con  $b > 1$ .

Para el paso de inducción, tenemos  $E_k(b, c_1) > E_k(b, c_2)$  y debemos verificar que  $E_{k+1}(b, c_1) > E_{k+1}(b, c_2)$  se cumple.

$E_{k+1}(b, c_1) > E_{k+1}(b, c_2)$  equivale a tener  $b^{E_k(b, c_1)} > b^{E_k(b, c_2)}$ . Esto es verdadero por la hipótesis de inducción y el hecho de que la función exponencial es creciente para cualquier base  $b$ , con  $b > 1$ .

Ahora probaremos que  $\lim_{c \rightarrow \infty} E_n(b, c) = \infty$ . Por definición de límite de una función tenemos que verificar que:

$$(\forall M > 0)(\exists \alpha > 0) \text{ tal que: si } c > \alpha \text{ entonces } E_n(b, c) > M.$$

Lo cual se cumple si escogemos  $\alpha = \frac{\ln M}{\ln b}$ . Por lo cual tenemos  $c > \alpha = \frac{\ln M}{\ln b}$ , de lo cual obtenemos  $c \ln b > \ln M$  o equivalentemente  $\ln b^c > \ln M$  y aplicando la función exponencial obtenemos:  $M < b^c = E_1(b, c)$  y como  $E_n$  es creciente, finalmente obtenemos  $E_n(b, c) > M$ .

3. Para el paso base, verifiquemos que  $E_1(b_1, c) > E_1(b_2, c)$  se cumple. Como  $b_1 > b_2 > 1$ ,  $c > 0$  y la función logaritmo natural es creciente, tenemos  $c \ln b_1 > c \ln b_2$ , usando propiedades de los logaritmos y aplicando la función exponencial obtenemos  $b_1^c > b_2^c$ , pues la función exponencial es creciente. Pero esto es equivalente a tener  $E_1(b_1, c) > E_1(b_2, c)$ .

Para el paso de inducción, tenemos  $E_k(b_1, c) > E_k(b_2, c)$  y debemos verificar que  $E_{k+1}(b_1, c) > E_{k+1}(b_2, c)$  se cumple también. Por hipótesis de inducción tenemos  $E_k(b_1, c) > E_k(b_2, c) > 0$ , y como la función logaritmo natural es creciente, tenemos  $E_k(b_1, c) \ln b_1 > E_k(b_2, c) \ln b_2$ , pues  $b_1 > b_2 > 1$ ; usando propiedades de los logaritmos y aplicando la función exponencial obtenemos  $b_1^{E_k(b_1, c)} > b_2^{E_k(b_2, c)}$ , dado que la función exponencial es creciente. Pero esto es  $E_{k+1}(b_1, c) > E_{k+1}(b_2, c)$ , por definición de sucesión exponencial iterada.

4. Haciendo inducción sobre  $m$ . Para el primer caso  $m = n + 1$  verifiquemos que si  $E_n(b_1, c_1) > E_n(b_2, c_2)$  entonces  $E_{n+1}(b_1, c_1) > E_{n+1}(b_2, c_2)$ . Tenemos:

$E_n(b_1, c_1) > E_n(b_2, c_2)$  de lo cual concluimos que

$$b_1^{E_n(b_1, c_1)} > b_1^{E_n(b_2, c_2)},$$

pero como  $b_1 > b_2$  tenemos

$$b_1^{E_n(b_1, c_1)} > b_1^{E_n(b_2, c_2)} > b_2^{E_n(b_2, c_2)},$$

se cumple.

Para el paso de inducción suponemos  $E_{n+k}(b_1, c_1) > E_{n+k}(b_2, c_2)$  y verificamos que  $E_{n+k+1}(b_1, c_1) > E_{n+k+1}(b_2, c_2)$  se cumple también; la prueba es análoga a la del primer caso.  $\square$

## Capítulo 2

# Exponencial Vs. Factorial.

Vamos a comparar las sucesiones exponencial y factorial. En este capítulo se obtienen algunas desigualdades interesantes, las cuales resultaran muy útiles durante el desarrollo de nuestro trabajo.

Si  $n \geq 3$ , entonces usando rectángulos superiores para aproximar una integral nos da:

$$\begin{aligned}\ln n! &= \ln[n(n-1)(n-2)\dots,1] = \ln n + \ln(n-1) + \ln(n-2) + \dots + \ln 1 \\ &= \sum_{i=2}^n \ln i > \int_1^n (\ln x) dx = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - n + 1\end{aligned}$$

Y por consiguiente:

$$n! > e^{n \ln n - n + 1} = \frac{n^n}{e^{n-1}}. \quad \text{Inecuación (1)}$$

Similarmente, usando rectángulos inferiores obtenemos:

$$\begin{aligned}\ln n! &= \ln[n(n-1)(n-2)\dots] = \ln n + \ln(n-1) + \ln(n-2) + \dots + \ln 1 \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} \ln i + \ln n < \int_2^n (\ln x) dx + \ln n = (n+1) \ln n - n - 2 \ln 2 + 2\end{aligned}$$

Luego:

$$n! < \frac{n^{n+1}}{4e^{n-2}}. \quad \text{Inecuación (2)}$$

Pero, como  $e > 1$  concluimos que

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < \frac{n^n}{e^{n-1}} = \left(\frac{n}{e}\right)^n e.$$

Además,  $4e^{n-2} > n, \forall n$ . Luego:

$$n^n > \frac{n^{n+1}}{4e^{n-2}} = n^n \frac{n}{4e^{n-2}}.$$

Por lo cual:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < n^n. \quad \text{Inecuación (3)}$$

Estas inecuaciones las usaremos más adelante. Por ahora veamos el siguiente resultado, el cual nos resultará muy útil.

**Teorema 2.1.**  $\forall n > 2$ , se cumple  $n! \ln n! < n^n$

*Demostración.* Prueba por inducción.

i) Para  $n = 3$

$$3! \ln 3! = 10,751 < 27 = 3^3,$$

se cumple.

ii) Para el paso de inducción debemos probar que:

$$\text{Si } k! \ln k! < k^k \text{ entonces } (k+1)! \ln(k+1)! < (k+1)^{(k+1)}.$$

Por el lema 1.2 tenemos que  $k+1 < k!$  para  $k > 2$  y como la función logaritmo natural es creciente, aplicándola a ambos lados de la inecuación anterior obtenemos:  $\ln(k+1) < \ln k!$ . Multiplicando por  $k!$  nos resulta  $k! \ln(k+1) < k! \ln k!$  y por hipótesis de inducción concluimos  $k! \ln(k+1) < k! \ln k! < k^k$ .

Tenemos de lo anterior por ley transitiva que  $k! \ln(k+1) < k^k$ , además por hipótesis de inducción  $k! \ln k! < k^k$ . Sumando estas desigualdades resulta:

$$k! \ln(k+1) + k! \ln k! < k^k + k^k. \quad \text{Inecuación (4)}$$

y multiplicando a Inecuación (4) por  $k$

$$k[k! \ln(k+1) + k! \ln k!] < k(k^k + k^k).$$

Si sumamos Inecuación (4) nos da:

$$k[k! \ln(k+1) + k! \ln k!] + [k! \ln(k+1) + k! \ln k!] < k(k^k + k^k) + (k^k + k^k).$$

Factorizando conseguimos:

$$k!(k+1)[\ln(k+1) + \ln k!] < (k+1)(k^k + k^k),$$

por propiedades de logaritmo natural

$$k!(k+1)[\ln(k+1)k!] < (k+1)(k^k + k^k)$$

o equivalentemente por definición de factorial

$$(k+1)! \ln(k+1)! < (k+1)(k^k + k^k). \quad \text{Inecuación (5)}$$

Pero sabemos que el desarrollo del binomio  $(k+1)^k$  es:

$$k^k + k(k)^{k-1} + \dots + 1,$$

como todos sus sumandos son positivos y sabemos que tiene más de dos sumandos, dado que  $k > 2$ , podemos decir que:

$$k^k + k(k)^{k-1} < k^k + k(k)^{k-1} + \dots + 1,$$

de otro modo

$$k^k + k(k)^{k-1} < (k+1)^k,$$

operando

$$k^k + k^k < (k+1)^k,$$

y multiplicando a ambos lados por  $(k+1)$

$$(k+1)(k^k + k^k) < (k+1)(k+1)^k = (k+1)^{(k+1)}.$$

Finalmente por la Inecuación (5) resulta:  $(k+1)! \ln(k+1)! < (k+1)^{(k+1)}$ .

□

Estamos listos ahora para comparar  $E_n(b, c)$  con  $F_n(k)$ , asumamos  $k \geq 3$  para asegurar que  $F_n$  crece sin ser acotada, y para simplificar nuestro razonamiento, al menos en esta sección asumamos  $b \geq e$ . Las siguientes dos proposiciones nos permitirán hacer la comparación.

**Proposición 2.2.** Si  $b \geq e$ ,  $E_n > \frac{F_n \ln F_n}{\ln b}$  entonces  $E_m > \frac{F_m \ln F_m}{\ln b}$ ;  $\forall m \geq n$ .

*Demostración.* Haciendo inducción sobre  $m$ : Para el primer caso se tiene por hipótesis.

Para el caso de inducción, supongamos

$$k > n \text{ y } E_k > \frac{F_k \ln F_k}{\ln b},$$

luego

$$E_k \ln b > F_k \ln F_k,$$

aplicando la función exponencial a ambos lados resulta:

$$e^{E_k \ln b} > e^{F_k \ln F_k}.$$

Por lo tanto

$$E_{k+1} = b^{E_k} = e^{\ln b^{E_k}} = e^{E_k \ln b} > e^{F_k \ln F_k} = e^{\ln F_k^{F_k}} = F_k^{F_k},$$

pero por el teorema 2.1

$$F_k^{F_k} > F_k! \ln F_k! = F_{k+1} \ln F_{k+1},$$

Y como  $b \geq e$ . tenemos  $\ln b \geq 1$ , y por tanto

$$F_k^{F_k} > \frac{F_{k+1} \ln F_{k+1}}{\ln b}.$$

Así,  $E_m > \frac{F_m \ln F_m}{\ln b}; \forall m \geq n$ . □

### Proposición 2.3.

Si  $E_n < \frac{F_n(\ln F_n - 1)}{\ln b}$  y  $F_{n+1} \geq be$  entonces  $E_m < F_m \leq \frac{F_m(\ln F_m - 1)}{\ln b}; \forall m > n$ .

*Demostración.* Haciendo inducción sobre  $m$ . Para el primer caso  $m = n + 1$  tenemos que:

$$E_n \ln b < F_n(\ln F_n - 1),$$

además por la Inecuación (3)

$$E_{n+1} = e^{\ln b^{E_n}} < e^{F_n(\ln F_n - 1)} = e^{F_n \ln F_n - F_n} = \left(\frac{F_n}{e}\right)^{F_n} < F_n! = F_{n+1},$$

de  $F_{n+1} \geq be$  inferimos que:

$$\ln F_{n+1} \geq 1 + \ln b,$$

luego

$$\frac{\ln F_{n+1} - 1}{\ln b} \geq 1,$$

combinando estas conclusiones deducimos:

$$E_{n+1} < F_{n+1} \leq \frac{F_{n+1}(\ln F_{n+1} - 1)}{\ln b}.$$

Para el caso de inducción, supongamos

$$k > n \text{ y } E_k \ln b < F_k(\ln F_k - 1),$$

por Inecuación (3)

$$E_{k+1} = e^{\ln b^{E_k}} < e^{F_k(\ln F_k - 1)} = e^{F_k \ln F_k - F_k} = \left(\frac{F_k}{e}\right)^{F_k} < F_k! = F_{k+1},$$

como  $F_{k+1} \geq be$  hacemos:

$$\ln F_{k+1} \geq 1 + \ln b,$$

por consiguiente

$$\frac{\ln F_{k+1} - 1}{\ln b} \geq 1,$$

combinando estas conclusiones obtenemos:

$$E_{k+1} < F_{k+1} \leq \frac{F_{k+1}(\ln F_{k+1} - 1)}{\ln b}.$$

Luego,  $E_m < F_m \leq \frac{F_m(\ln F_m - 1)}{\ln b}; \forall m > n.$  □

Ahora fijemos  $k$  y  $b$ , pero dejemos a  $c$  variable.

**Definición 2.4.** Definimos conjuntos  $I_1$  e  $I_2$  así:

$$I_1 = \{c \in \mathbb{R} : \text{para algún } n \in \mathbb{N}, E_n(b, c) > \frac{F_n \ln F_n}{\ln b}\}$$

$$I_2 = \{c \in \mathbb{R} : \text{para algún } n \in \mathbb{N}, E_n(b, c) < \frac{F_n(\ln F_n - 1)}{\ln b} \text{ y } F_{n+1} \geq be\}$$

Veamos ciertas características que nos resultarán útiles más adelante.

**Proposición 2.5.**  $E_n(b, c)$  es continua como función de  $c$ .

*Demostración.* Aclaremos que  $E_n(b, c)$ , se puede ver como una composición de funciones así:

Si  $f(x) = b^x$ , entonces:

$$\begin{aligned} E_1(b, c) &= f(c) \\ E_2(b, c) &= (f \circ f)(c) \\ E_3(b, c) &= (f \circ f \circ f)(c) \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ E_n(b, c) &= (f^{\circ n})(c) \end{aligned}$$

Por lo cual, la prueba de esta proposición se tiene por el hecho de que la función exponencial es continua para  $b > 1$ , además la composición de funciones continuas es continua. Por lo cual  $E_n(b, c)$  es continua como función de  $c$ . □

**Proposición 2.6.**  $I_1$  e  $I_2$  son intervalos abiertos.

*Demostración.* i)  $I_1$  es un intervalo abierto. Debemos probar que:

Si  $c \in I_1$  y  $c' > c$  entonces  $c' \in I_1$ . Tenemos  $c \in I_1$  luego para algún  $n_0$ ,

$$E_{n_0}(b, c) > \frac{F_{n_0} \ln F_{n_0}}{\ln b},$$

pero si  $c' > c$ , por el teorema 1.12

$$E_{n_0}(b, c') > E_{n_0}(b, c),$$

por lo tanto

$$E_{n_0}(b, c') > \frac{F_{n_0} \ln F_{n_0}}{\ln b},$$

concluyendo que  $c' \in I_1$ .

ii)  $I_2$  es un intervalo abierto.

Si  $c \in I_2$  y  $c' < c$  entonces  $c' \in I_2$ . Tenemos  $c \in I_2$  luego para alguna  $n_0$ ,

$$E_{n_0}(b, c) < \frac{F_{n_0}(\ln F_{n_0} - 1)}{\ln b} \text{ y } F_{n_0+1} \geq be,$$

pero si  $c' < c$ , por el teorema 1.12

$$E_{n_0}(b, c') < E_{n_0}(b, c) < \frac{F_{n_0}(\ln F_{n_0} - 1)}{\ln b},$$

y  $F_{n_0+1} \geq be$ , concluyendo así que  $c' \in I_2$ . □

**Proposición 2.7.**  $I_1$  e  $I_2$  son disyuntos.

*Demostración.* Supongamos por contradicción que,  $\exists c \in \mathbb{R}$  tal que  $c \in I_1$  y  $c \in I_2$ , luego  $\exists n_0$  tal que

$$E_{n_0}(b, c) > \frac{F_{n_0} \ln F_{n_0}}{\ln b},$$

además,  $\exists n_1$  tal que

$$E_{n_1}(b, c) < \frac{F_{n_1}(\ln F_{n_1} - 1)}{\ln b} \text{ y } F_{n_1+1} \geq be,$$

sea  $n = \max\{n_0, n_1\}$ , por lo cual se cumple por la proposición 2.2 y 2.3:

$$\frac{F_n(\ln F_n - 1)}{\ln b} > E_n(b, c) > \frac{F_n \ln F_n}{\ln b}$$

y por tanto

$$\frac{F_n \ln F_n - F_n}{\ln b} = \frac{F_n(\ln F_n - 1)}{\ln b} > \frac{F_n \ln F_n}{\ln b}.$$

De lo cual se deduce que  $-F_n > 0$ . Claramente una contradicción. Por lo tanto  $I_1$  e  $I_2$  son disyuntos. □

Tratemos de localizar un elemento de  $I_1$ . Escojamos:

$$c = \frac{k \ln k}{\ln b},$$

luego el teorema 2.1

$$E_1 = b^c = e^{k \ln k} = k^k > k! \ln k! = F_1 \ln F_1 \geq \frac{F_1 \ln F_1}{\ln b},$$

por lo tanto  $c$  pertenece a  $I_1$ , esto muestra por la proposición 2.6 que:

$$\left[ \frac{k \ln k}{\ln b}, \infty \right) \subset I_1.$$

Tratemos también de localizar un elemento de  $I_2$ . Tenemos que:

$$\frac{F_1(\ln F_1 - 1)}{\ln b} \geq \frac{6(\ln 6 - 1)}{\ln b} > 0$$

además que:

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} b^c = 0,$$

esto implica que para un  $c$  suficientemente pequeño

$$E_1 < \frac{F_1(\ln F_1 - 1)}{\ln b}$$

Si también suponemos que  $b \leq \frac{k!!}{e}$ , entonces  $F_2 \geq be$ , por lo tanto  $c \in I_2$ .

Combinando todo lo que sabemos de  $I_1$  e  $I_2$ , concluimos que si  $e \leq b \leq \frac{k!!}{e}$ , entonces existen  $c_1$  y  $c_2$ , tales que:

$$I_1 = (c_1, \infty), I_2 = (-\infty, c_2), \text{ y } c_2 \leq c_1 \leq \frac{k \ln k}{\ln b}.$$

Posteriormente probaremos que  $c_2 = c_1$ .

Por ahora observemos qué ocurre con los valores de  $c$  en el intervalo  $[c_2, c_1]$ .

Si  $c_2 \leq c \leq c_1$ , entonces como  $c$  no está, en  $I_1$  ni en  $I_2$ , para cualquier entero positivo tenemos que:

$$\frac{F_n(\ln F_n - 1)}{\ln b} \leq E_n \leq \frac{F_n \ln F_n}{\ln b},$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{\ln b} - \frac{1}{\ln b \ln F_n} \leq \frac{E_n}{F_n \ln F_n} \leq \frac{1}{\ln b}.$$

Luego, cuando  $n \rightarrow \infty$ , por el teorema de compresión vemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{F_n \ln F_n} = \frac{1}{\ln b}.$$

En base a esta conclusión, establecemos la siguiente definición.

**Definición 2.8.** Diremos que dos sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  que son eventualmente distintas de cero, son comparables si y sólo si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}, \text{ está definido, es finito y distinto de cero.}$$

**Proposición 2.9.** La comparabilidad es una relación de equivalencia.

*Demostración.* i) La comparabilidad es reflexiva.

Efectivamente,  $a_n$  es comparable con  $a_n$ , dado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_n} = 1.$$

1 está definido, es finito y distinto de cero.

ii) La comparabilidad es simétrica.

Si  $a_n$  es comparable con  $b_n$ , tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

donde  $L$  está definido, es finito y distinto de cero. Pero, por propiedades de los límites, como  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son eventualmente distintas de cero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{L}$$

El cual también está definido, es finito y distinto de cero.

iii) La comparabilidad es transitiva.

Si  $a_n$  es comparable con  $b_n$  y  $b_n$  es comparable con  $c_n$ , entonces  $a_n$  es comparable con  $c_n$ .

Efectivamente, por definición de comparabilidad tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} = M$$

Donde  $L$  y  $M$ , están definidos, son finitos y distintos de cero. Aquí podemos usar también las propiedades de los límites para concluir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{b_n}}{\frac{b_n}{c_n}} = \frac{L}{M}.$$

El cual también está definido, es finito y distinto de cero.

De i), ii) y iii). La comparabilidad es una relación de equivalencia.  $\square$

La definición de comparabilidad, nos indica que si  $e \leq b \leq \frac{k!!}{e}$ , entonces hay al menos un valor de  $c$  más pequeño que  $\frac{k \ln k}{\ln b}$ , tal que las sucesiones  $\{E_n\}$  y  $\{F_n \ln F_n\}$  son comparables.

**Proposición 2.10.** *Si  $e \leq b \leq \frac{k!!}{e}$ , entonces hay un único  $c$  más pequeño que  $\frac{k \ln k}{\ln b}$ , tal que las sucesiones  $\{E_n\}$  y  $\{F_n \ln F_n\}$  son comparables.*

Esta proposición es equivalente a decir que  $c_2 = c_1$ , por lo cual existe un único  $c$  tal que  $I_1 = (c, \infty)$ ,  $I_2 = (-\infty, c)$ , y  $c \leq \frac{k \ln k}{\ln b}$ . La demostración de la unicidad de  $c$ , será realizada en el siguiente capítulo, dado que nos hace falta probar algunos resultados que nos permitirán realizar dicha demostración.

De la comparabilidad de  $\{E_n\}$  y  $\{F_n \ln F_n\}$ , se sigue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(k, c)}{F_n(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(k, c)}{F_n(k) \ln F_n(k)} \ln F_n(k) = \infty$$

Lo cual indica que para  $n$  grande,  $E_n(k, c)$  es mucho más grande que  $F_n(k)$ .

De hecho podemos ver que la sucesión  $E_n(k, k)$  toma la delantera. Por el teorema 2.1:

$$k^k > k! \ln k! > \frac{k! \ln k!}{\ln k},$$

y por la proposición 2.2

$$E_n(k, k) > \frac{F_n(k) \ln F_n(k)}{\ln k} > F_n(k),$$

para todo entero positivo  $n$ .

Es decir:

$$E_n(k, k) > F_n(k).$$

En particular: Si  $k = 9$  nos resulta para  $n = 1$ :

$$9^9 = E_1(9, 9) > F_1(9) = 9!.$$

para  $n = 2$  conseguimos:

$$9^{9^9} > 9!!..$$

continuando de esta forma hasta  $n = 5$

$$9^{9^{9^{9^9}}} > 9!!!!$$

Lo cual contesta una pregunta de la introducción de este trabajo.

Lamentablemente, ninguno de estos números es la solución de nuestro problema original de encontrar el número más grande que puede ser escrito con cinco símbolos matemáticos básicos.

Sin embargo, hemos descubierto que para  $k \geq 3$ , hay una gama de bases diferentes para sucesiones exponenciales iteradas, las cuales son comparables con  $\{F_n \ln F_n\}$ , pero como la comparabilidad es una relación de equivalencia, se sigue que dichas sucesiones exponenciales iteradas son comparables la una con la otra, para dicha gama de bases.

Exploraremos este fenómeno sorprendente en el siguiente capítulo.

## Capítulo 3

# Exponencial Vs. Exponencial.

Ahora, estamos interesados en averiguar cuándo dos sucesiones exponenciales iteradas son comparables. Para hacerlo primero averigüemos cuándo dos sucesiones exponenciales iteradas no son comparables.

**Lema 3.1.**  $\frac{E_{n+h}(b, c_1)}{E_{n+h}(b, c_2)} \geq 1 + 2^h r$ , para todo  $h$  entero y no negativo.

*Demostración.* La prueba de este lema es por inducción. Escojamos un  $n$  lo suficientemente grande, tal que:

$$E_n(b, c_2) \geq e^2,$$

tomemos

$$r = \frac{E_n(b, c_1)}{E_n(b, c_2)} - 1 \quad (*),$$

y recordemos que por la proposición 1.12,  $r > 0$ .

Para el caso  $h = 0$

$$\frac{E_n(b, c_1)}{E_n(b, c_2)} \geq 1 + r,$$

de ahí que

$$\frac{E_n(b, c_1)}{E_n(b, c_2)} - 1 \geq r,$$

lo cual es cierto por (\*).

Para el paso de inducción suponemos que para algún  $k$

$$\frac{E_{n+k}(b, c_1)}{E_{n+k}(b, c_2)} \geq 1 + 2^k r,$$

y probemos que

$$E_{n+k}(b, c_1) \geq (1 + 2^k r)[E_{n+k}(b, c_2)],$$

así:

$$\begin{aligned} E_{n+k+1}(b, c_1) &= b^{E_{n+k}(b, c_1)} \\ &\geq b^{(1+2^k r)[E_{n+k}(b, c_2)]} \\ &= [E_{n+k+1}(b, c_2)]^{(1+2^k r)} \end{aligned}$$

dividiendo por  $E_{n+k+1}(b, c_2)$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{E_{n+k+1}(b, c_1)}{E_{n+k+1}(b, c_2)} &\geq [E_{n+k+1}(b, c_2)]^{2^k r} \\ &\geq (e^2)^{2^k r} \\ &= e^{2^{k+1} r} \end{aligned}$$

y por la desigualdad de Bernoulli

$$e^{2^{k+1} r} \geq 1 + 2^{k+1} r.$$

□

Dos sucesiones exponenciales iteradas distintas con igual base, no son comparables nunca como lo muestra la proposición siguiente.

**Proposición 3.2.** Si  $c_1 > c_2$  y  $(b, c_2) \in R$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c_1)}{E_n(b, c_2)} = \infty$ .

*Demostración.* Del lema 3.1, tenemos

$$\frac{E_{n+h}(b, c_1)}{E_{n+h}(b, c_2)} \geq 1 + 2^h r, \text{ para todo } h \text{ entero y no negativo,}$$

lo cual prueba la proposición, pues:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} 1 + 2^h r = \infty,$$

luego:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c_1)}{E_n(b, c_2)} = \infty$ .

□

Estamos ahora en capacidad de demostrar la proposición 2.10.

*Demostración.* Por contradicción, supongamos que existen  $c_1$  y  $c_2$ , con  $c_1 \neq c_2$ , tales que las sucesiones  $\{E_n\}$  y  $\{F_n \ln F_n\}$  son comparables.

Como  $\{E_n\}$  y  $\{F_n \ln F_n\}$  son eventualmente distintas de cero, por definición de comparabilidad tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c_1)}{F_n \ln F_n} = L \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c_2)}{F_n \ln F_n} = M$$

Donde  $L$  y  $M$  están definidos, son finitos y distintos de cero.

Como la comparabilidad es una relación de equivalencia y por lo tanto transitiva, tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c_1)}{E_n(b, c_2)} = \frac{L}{M},$$

y  $L/M$  está definido, es finito y distinto de cero. Lo cual a la luz de la proposición 3.2, es falso, dado que  $c_1 \neq c_2$ , y sin pérdida de generalidad, suponiendo  $c_1 > c_2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c_1)}{E_n(b, c_2)} = \infty$$

Claramente una contradicción. De lo cual concluimos que  $c$  es único.  $\square$

La proposición 3.2 sugiere otra definición.

**Definición 3.3.** Diremos que  $a_n$  domina a  $b_n$ , si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty.$$

En otras palabras, según esta definición, la proposición 3.2 dice que si dos sucesiones exponenciales iteradas, que crecen sin ser acotadas, tienen la misma base; entonces la que tenga un valor inicial mayor domina a la otra.

Ahora consideremos dos sucesiones con bases diferentes.

Supongamos que  $(b_0, c_0) \in R$ , de tal modo que  $\{E_n(b_0, c_0)\}$  crece sin ser acotada.

Queremos averiguar la siguiente cuestión: Considerando un número  $b$  arbitrario,  $b > 1$ , ¿existe algún  $c$  tal que  $\{E_n(b, c)\}$  y  $\{E_n(b_0, c_0)\}$  son comparables?

**Proposición 3.4.** Si  $b > 1$ , y existe algún  $c$  tal que  $\{E_n(b, c)\}$  y  $\{E_n(b_0, c_0)\}$  son comparables, entonces  $c$  es único.

*Demostración.* Por contradicción, supongamos que existen  $c_1$  y  $c_2$  con  $c_1 \neq c_2$ , tales que:  $\{E_n(b, c_1)\}$  y  $\{E_n(b_0, c_0)\}$  son comparables y  $\{E_n(b, c_2)\}$  y  $\{E_n(b_0, c_0)\}$  son comparables.

Pero como la comparabilidad es una relación de equivalencia y por lo tanto transitiva, tenemos que  $\{E_n(b, c_1)\}$  y  $\{E_n(b, c_2)\}$  son comparables. Luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c_1)}{E_n(b, c_2)}, \text{ está definido, es finito y distinto de cero.}$$

Pero  $c_1 \neq c_2$ , sin pérdida de generalidad, supongamos  $c_1 > c_2$ , luego por la proposición 3.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c_1)}{E_n(b, c_2)} = \infty,$$

contradiciendo la definición de comparabilidad. Por consiguiente, si existe dicho  $c$ , es único.  $\square$

Definamos ahora  $c_{b_0, c_0}(b)$  como ese  $c$  único, tal que  $\{E_n(b, c)\}$  y  $\{E_n(b_0, c_0)\}$  son comparables. (Si existe tal  $c$ ).

Para determinar cuando  $\{E_n(b, c)\}$  y  $\{E_n(b_0, c_0)\}$  son comparables, primero averigüemos cuándo una de estas sucesiones domina a la otra.

**Proposición 3.5.**  $\forall b > 1 \forall c; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)} = \infty \iff \exists n \in \mathbb{Z}^+$  tal que las siguientes desigualdades se cumplen:

$$\frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)} > \frac{2 \ln b_0}{\ln b} ; E_n(b_0, c_0) > \frac{2 \ln b_0}{\ln b}.$$

*Demostración.* i)  $\forall b > 1 \forall c; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)} = \infty \implies \exists n \in \mathbb{Z}^+$  tal que las siguientes desigualdades se cumplen:

$$\frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)} > \frac{2 \ln b_0}{\ln b} ; E_n(b_0, c_0) > \frac{2 \ln b_0}{\ln b}.$$

Escogiendo  $(b_0, c_0) \in R$  se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(b_0, c_0) = \infty$ , luego podemos escoger  $n$  de tal forma que las desigualdades se cumplan.

ii) Si  $\exists n \in \mathbb{Z}^+$  tal que las desigualdades  $\frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)} > \frac{2 \ln b_0}{\ln b} ; E_n(b_0, c_0) > \frac{2 \ln b_0}{\ln b}$  se cumplen. Entonces  $\forall b > 1 \forall c; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)} = \infty$ .

Supongamos que las desigualdades se cumplen para algún  $n$ . Por la primera desigualdad  $E_n(b, c) \ln b > 2E_n(b_0, c_0) \ln b_0$ .

Aplicando la función exponencial a ambos lados de la desigualdad obtenemos:

$$\begin{aligned} E_{n+1}(b, c) &= b^{E_n(b, c)} \\ &> b_0^{2E_n(b_0, c_0)} \\ &= [E_{n+1}(b_0, c_0)]^2. \end{aligned}$$

Dividiendo por  $E_{n+1}(b_0, c_0)$  obtenemos:

$$\frac{E_{n+1}(b, c)}{E_{n+1}(b_0, c_0)} > E_{n+1}(b_0, c_0).$$

Usando la segunda desigualdad y la proposición 1.12

$$E_{n+1}(b_0, c_0) > E_n(b_0, c_0) > \frac{2 \ln b_0}{\ln b}.$$

Podemos repetir este razonamiento para  $n + 1$  en lugar de  $n$ . Se sigue así por inducción que si  $m > n$  :

$$\frac{E_m(b,c)}{E_m(b_0,c_0)} > E_m(b_0, c_0).$$

Pero, sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(b_0, c_0) = \infty,$$

inferimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b,c)}{E_n(b_0,c_0)} = \infty,$$

también. □

**Proposición 3.6.**  $\forall b > 1$  y  $\forall c$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b,c)}{E_n(b_0,c_0)} = 0 \iff (b,c) \notin R$  ó  $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ , tal que las siguientes desigualdades se cumplen:

$$\frac{E_n(b,c)}{E_n(b_0,c_0)} < \frac{\ln b_0}{2 \ln b} ; E_n(b,c) > \frac{2 \ln b}{\ln b_0}.$$

*Demostración.* i)  $\forall b > 1$  y  $\forall c$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b,c)}{E_n(b_0,c_0)} = 0 \implies (b,c) \notin R$  ó  $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ , tal que las siguientes desigualdades se cumplen:

$$\frac{E_n(b,c)}{E_n(b_0,c_0)} < \frac{\ln b_0}{2 \ln b} ; E_n(b,c) > \frac{2 \ln b}{\ln b_0}.$$

Teniendo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b,c)}{E_n(b_0,c_0)} = 0$ , es claro que para algún  $n$ ,  $\frac{E_n(b,c)}{E_n(b_0,c_0)} < \frac{\ln b_0}{2 \ln b}$ , y teniendo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(b,c) = \infty$ ;  $E_n(b,c) > \frac{2 \ln b}{\ln b_0}$ , se cumple también.

ii) Si  $(b,c) \notin R$  ó  $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ , tal que las desigualdades  $\frac{E_n(b,c)}{E_n(b_0,c_0)} < \frac{\ln b_0}{2 \ln b}$ ;  $E_n(b,c) > \frac{2 \ln b}{\ln b_0}$  se cumplen.  $\implies \forall b > 1$  y  $\forall c$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b,c)}{E_n(b_0,c_0)} = 0$ .

Si  $(b,c) \notin R$ , entonces  $\{E_n(b,c)\}$  es acotada. Como  $\{E_n(b_0, c_0)\}$  crece sin ser acotada, esto implica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b,c)}{E_n(b_0,c_0)} = 0.$$

Si  $(b,c) \in R$ , por la proposición 3.5  $\exists n \in \mathbb{Z}^+$  tal que se cumple

$$\frac{E_n(b_0,c_0)}{E_n(b,c)} > \frac{2 \ln b}{\ln b_0} ; E_n(b,c) > \frac{2 \ln b}{\ln b_0},$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b_0,c_0)}{E_n(b,c)} = \infty,$$

y como

$$\frac{E_n(b_0, c_0)}{E_n(b, c)} > \frac{2 \ln b}{\ln b_0} > 0,$$

concluimos que:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)} = 0$ . □

Las proposiciones 3.5 y 3.6 nos dicen cómo determinar para cualquier  $b > 1$  y cualquier  $c$ . Si el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)}$  es infinito o cero.

Resulta que sólo hay otro valor posible para este límite. Vamos a ver cuál es.

Supongamos que este límite no es infinito ni cero. Cuando  $(b, c) \in R$ , podemos escoger  $n_0$  lo suficientemente grande tal que:

$$E_{n_0}(b, c) > \frac{2 \ln b}{\ln b_0} \text{ y } E_{n_0}(b_0, c_0) > \frac{2 \ln b_0}{\ln b}.$$

Por las proposiciones 3.5 y 3.6 tenemos, si  $n \geq n_0$ :

$$\frac{\ln b_0}{2 \ln b} \leq \frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)} \leq \frac{2 \ln b_0}{\ln b},$$

luego se cumple también que:

$$\frac{\ln b_0}{2 \ln b} \leq \frac{E_{n+1}(b, c)}{E_{n+1}(b_0, c_0)} \leq \frac{2 \ln b_0}{\ln b},$$

tomando el logaritmo natural obtenemos

$$\ln \ln b_0 - \ln \ln b - \ln 2 \leq \ln E_{n+1}(b, c) - \ln E_{n+1}(b_0, c_0) \leq \ln \ln b_0 - \ln \ln b + \ln 2.$$

Ahora, por la definición de sucesión exponencial iterada

$$\begin{aligned} \ln E_{n+1}(b, c) &= \ln b^{E_n(b, c)} \\ &= E_n(b, c) \ln b \end{aligned}$$

y similarmente

$$\ln E_{n+1}(b_0, c_0) = E_n(b_0, c_0) \ln b_0,$$

de lo dicho anteriormente tenemos:

$$\ln \ln b_0 - \ln \ln b - \ln 2 \leq E_n(b, c) \ln b - E_n(b_0, c_0) \ln b_0 \leq \ln \ln b_0 - \ln \ln b + \ln 2,$$

finalmente dividimos por  $E_n(b_0, c_0) \ln b$  para obtener:

$$\frac{\ln \ln b_0 - \ln \ln b - \ln 2}{E_n(b_0, c_0) \ln b} \leq \frac{E_n(b, c) \ln b - E_n(b_0, c_0) \ln b_0}{E_n(b_0, c_0) \ln b} \leq \frac{\ln \ln b_0 - \ln \ln b + \ln 2}{E_n(b_0, c_0) \ln b},$$

luego:

$$\frac{\ln \ln b_0 - \ln \ln b - \ln 2}{E_n(b_0, c_0) \ln b} \leq \frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)} - \frac{\ln b_0}{\ln b} \leq \frac{\ln \ln b_0 - \ln \ln b + \ln 2}{E_n(b_0, c_0) \ln b},$$

y por el teorema de compresión, cuando  $n \rightarrow \infty$ , la primera y última funciones convergen a cero, tenemos entonces que:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)} = \frac{\ln b_0}{\ln b}$ .

Con lo anterior hemos demostrado la siguiente proposición:

**Proposición 3.7.**  $\forall b > 1$  y  $\forall c$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)}$  es  $\infty$  ó cero ó  $\frac{\ln b_0}{\ln b}$ .

En otras palabras,  $\{E_n(b, c)\}$  y  $\{E_n(b_0, c_0)\}$  son comparables ó la una domina a la otra. Imitando el razonamiento del capítulo anterior, ahora fijamos  $b_0, c_0$  y  $b$ , pero permitimos a  $c$  variar. Tenemos entonces la siguiente definición:

**Definición 3.8.** Definimos los siguientes conjuntos así:

$$I_\infty = \{c \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)} = \infty\}$$

$$I_0 = \{c \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)} = 0\}.$$

Es fácil ver, que si  $c \in I_\infty$  y  $\bar{c} > c$ , entonces  $\bar{c} \in I_\infty$ . Esto se puede concluir por el hecho que  $E_n(b, \bar{c})$  domina a  $E_n(b, c)$ . Análogamente, si  $c \in I_0$  y  $\bar{c} < c$ , entonces  $\bar{c} \in I_0$ . Por la proposición 3.2 y la proposición 3.7, hay a lo sumo un número que no está contenido en  $I_0$  ó no está contenido en  $I_\infty$ . Una conclusión importante de las proposiciones 3.5 y 3.6, es que ambos son abiertos.

**Proposición 3.9.** Los conjuntos  $I_\infty$  e  $I_0$ , son abiertos.

*Demostración.* Supongamos que  $c \in I_\infty$ , por la proposición 3.5, nosotros podemos encontrar un  $n \in \mathbb{Z}^+$ , tal que las siguientes desigualdades se cumplen.

$$\frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)} > \frac{2 \ln b_0}{\ln b}; E_n(b_0, c_0) > \frac{2 \ln b_0}{\ln b}.$$

Como  $\frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)} > \frac{2 \ln b_0}{\ln b}$ , operamos para obtener  $E_n(b, c) > \frac{2E_n(b_0, c_0) \ln b_0}{\ln b}$ , por lo cual, sabemos que existe  $\epsilon_1 > 0$ , tal que la desigualdad  $E_n(b, c) - \epsilon_1 > \frac{2E_n(b_0, c_0) \ln b_0}{\ln b}$  se cumple. Como  $E_n(b, c)$  es continua como función de  $c$ , se tiene que:  $\exists \delta > 0$ , tal que: Si  $c - \delta < c' < c + \delta$ , entonces:  $E_n(b, c) - \epsilon < E_n(b, c') < E_n(b, c) + \epsilon$ , para todo  $\epsilon > 0$ . En particular, para  $\epsilon_1$ , tenemos que  $E_n(b, c') > E_n(b, c) - \epsilon_1$ , por lo cual:

$$E_n(b, c') > \frac{2E_n(b_0, c_0) \ln b_0}{\ln b}.$$

De lo cual tenemos que:

$$\frac{E_n(b, c')}{E_n(b_0, c_0)} > \frac{2 \ln b_0}{\ln b}.$$

Luego, por la proposición 3.5 concluimos que,  $(c - \delta, c + \delta) \subseteq I_\infty$ , con lo cual probamos que  $I_\infty$  es abierto.

Ahora supongamos que  $c \in I_0$ . Si  $(b, c) \in R$ , podemos hacer un razonamiento similar al anterior, usando la proposición 3.6 en lugar de la 3.5, para encontrar una vecindad de  $c$ , que está contenida en  $I_0$ .

Por último, supongamos que  $(b, c) \notin R$ , esto significa que  $1 < b < e^{\frac{1}{e}}$  y  $c \leq f(b)$ , escogemos un  $x$  lo suficientemente grande tal que:

$$x > \frac{2 \ln b}{\ln b_0} \text{ y } x > f(b).$$

Escogemos  $n \in \mathbb{Z}^+$  lo suficientemente grande tal que:

$$\frac{x}{E_n(b_0, c_0)} < \frac{\ln b_0}{2 \ln b},$$

como  $E_n(b, f(b)) = f(b) < x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(b, c) = \infty$  y  $E_n(b, c)$  es continua como función de  $c$ , podemos encontrar algún  $c'$  talque:  $c' > f(b)$  y  $E_n(b, c') = x$ . Obteniendo así:

$$\frac{E_n(b, c')}{E_n(b_0, c_0)} = \frac{x}{E_n(b_0, c_0)} < \frac{\ln b_0}{2 \ln b}; E_n(b, c') = x > \frac{2 \ln b}{\ln b_0},$$

de este modo, la proposición 3.6 implica que:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c')}{E_n(b_0, c_0)} = 0$ .

En otras palabras  $c' \in I_0$ . Pero  $I_0$  es un intervalo infinito, de este modo se tiene que  $c \in (-\infty, c') \subseteq I_0$ , así hemos encontrado una vecindad de  $c$  que está contenida en  $I_0$ , que es lo que queríamos.  $\square$

Tenemos las siguientes posibilidades:  $I_0 = \mathbb{R}$  y  $I_\infty = \emptyset$ , ó  $I_0 = \emptyset$  y  $I_\infty = \mathbb{R}$ , ó hay algún  $c$  tal que:  $I_0 = (-\infty, c)$  y  $I_\infty = (c, \infty)$ .

Sin embargo, la primera de estas posibilidades puede ser excluida. Para esto escogemos un  $n \in \mathbb{Z}^+$  lo suficientemente grande tal que:  $E_n(b_0, c_0) > 2 \ln b_0 / \ln b$ , luego:  $\lim_{c \rightarrow \infty} E_n(b, c) = \infty$ , esto indica que existe  $c$  tal que:  $E_n(b, c') / E_n(b_0, c_0) > 2 \ln b_0 / \ln b$ , por la proposición 3.5,  $c \in I_\infty$ . De este modo  $I_\infty \neq \emptyset$ .

Así:  $I_0 = \emptyset$  y  $I_\infty = \mathbb{R}$ , ó hay algún  $c$  tal que:  $I_0 = (-\infty, c)$  y  $I_\infty = (c, \infty)$ .

En el primer caso todas las sucesiones exponenciales iteradas con base  $b$  dominan a  $\{E_n(b_0, c_0)\}$  y  $c_{b_0, c_0}(b)$  es indefinida.

En el segundo caso,  $c_{b_0, c_0}(b) = c$ . Así, hemos demostrado la siguiente proposición.

**Proposición 3.10.**  $\forall (b_0, c_0) \in R$  y  $b > 1$ ,  $c_{b_0, c_0}(b)$  está definida, sí y sólo sí existe algún  $c$  tal que  $\{E_n(b, c)\}$  no domina a  $\{E_n(b_0, c_0)\}$ .

Nótese, que si  $c_{b_0, c_0}(b)$  está definida entonces para todo  $c$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)} = \begin{cases} \frac{\ln b_0}{\ln b} & \text{si } c = c_{b_0, c_0}(b) \\ \infty & \text{si } c > c_{b_0, c_0}(b) \\ 0 & \text{si } c < c_{b_0, c_0}(b). \end{cases}$$

Esto significa que podemos usar las proposiciones 3.5 y 3.6 para calcular  $c_{b_0, c_0}(b)$ , para cualquier rango deseado de precisión.

Por ejemplo consideremos el caso  $b_0 = c_0 = 2$  y calculemos  $c$  para  $b = 3, 2, 5, 4$  respectivamente. Aquí están los primeros (5) términos de la sucesión  $\{E_n(2, 2)\}$ :

$$2, 2^2 = 4, 2^4 = 16, 2^{16} = 65536, 2^{65536} \approx 2,00353 \times 10^{19728}, \dots$$

Para  $c_{2,2}(3)$  calculamos para obtener:  $\frac{E_4(3,c)}{E_4(2,2)} \approx \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63093$ . y resolviendo para  $c$  nos lleva a la aproximación  $c \approx 0,660434$ .

Si escogemos  $c = 0,66043$ , los primeros términos de la sucesión  $\{E_n(3, c)\}$  son aproximadamente:  $0,66043, 2,06588, 9,67555, 4,13436 \times 10^4, 8,44817 \times 10^{19725}, \dots$ ,

De este modo tenemos:

$$\frac{E_4(3,c)}{E_4(2,2)} \approx 0,0042 < \frac{\ln 2}{2 \ln 3}; E_4(3, c) \approx 8,44817 \times 10^{19725} > \frac{2 \ln 3}{\ln 2}.$$

Por la proposición 3.6 se concluye que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(3,c)}{E_n(2,2)} = 0.$$

De otro modo, si  $c = 0,66044$ , los primeros términos de la sucesión  $\{E_n(3, c)\}$  son aproximadamente:  $0,66044, 2,0659, 9,67579, 4,13546 \times 10^4, 1,43113 \times 10^{19731}, \dots$ ,

Podemos utilizar la proposición 3.5 para concluir que:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(3,c)}{E_n(2,2)} = \infty$ ; luego:

$$0,66043 < c_{2,2}(3) < 0,66044.$$

Para  $c_{2,2}(2,5)$  calculamos para obtener:  $\frac{E_4(2,5,c)}{E_4(2,2)} \approx \frac{\ln 2}{\ln 2,5} \approx 0,75647$ . y resolviendo para  $c$  nos lleva a la aproximación  $c \approx 1,081352$ .

Si escogemos  $c = 1,08135$ , los primeros términos de la sucesión  $\{E_n(2,5, c)\}$  son aproximadamente:  $1,08135, 2,69347, 11,79886, 4,95723 \times 10^4, 6,891176 \times 10^{19726}, \dots$ ,

Así, tenemos:

$$\frac{E_4(2,5,c)}{E_4(2,2)} \approx 0,0344 < \frac{\ln 2}{2 \ln 2,5} \approx 0,37823; E_4(2,5, c) > \frac{2 \ln 2,5}{\ln 2}.$$

Por la proposición 3.6 se concluye que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(2,5,c)}{E_n(2,2)} = 0.$$

De otra forma, si  $c = 1,08136$ , los primeros términos de la sucesión  $\{E_n(2,5,c)\}$  son aproximadamente:  $1,08136, 2,69349, 11,79913, 4,95845 \times 10^4, 4,59069 \times 10^{19731}, \dots$ ,

Luego tenemos:

$$\frac{E_4(2,5,c)}{E_4(2,2)} \approx 2291 > \frac{2 \ln 2}{\ln 2,5}; E_4(2,2) > \frac{2 \ln 2}{\ln 2,5}.$$

Podemos utilizar la proposición 3.5 para concluir que:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(2,5,c)}{E_n(2,2)} = \infty$ ; luego:

$$1,08135 < c_{2,2}(2,5) < 1,08136.$$

Para  $c_{2,2}(4)$  calculamos para obtener:  $\frac{E_4(4,c)}{E_4(2,2)} \approx \frac{\ln 2}{\ln 4} = 0,5$ . Resolviendo para  $c$  nos lleva a la aproximación  $c \approx 0,269737$ .

Si escogemos  $c = 0,26973$ , los primeros términos de la sucesión  $\{E_n(4,c)\}$  son aproximadamente:  $0,26973, 1,45342, 7,49982, 3,27600 \times 10^4, 3,13966 \times 10^{19723}, \dots$ ,

De este modo tenemos:

$$\frac{E_4(4,c)}{E_4(2,2)} \approx 0,000015 < \frac{\ln 2}{2 \ln 4} = 0,25; E_4(4,c) > \frac{2 \ln 4}{\ln 2}.$$

Por la proposición 3.6 se concluye que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(4,c)}{E_n(2,2)} = 0.$$

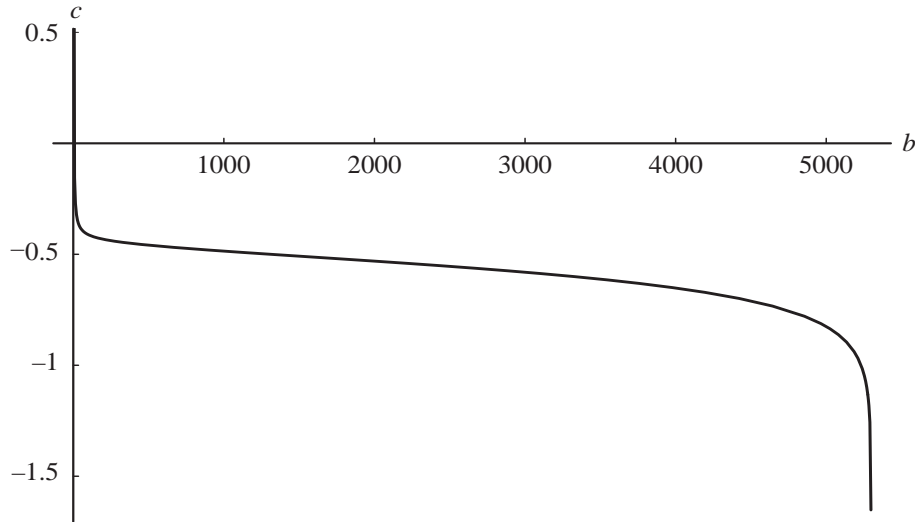
De otro modo, si  $c = 0,26974$ , los primeros términos de la sucesión  $\{E_n(4,c)\}$  son aproximadamente:  $0,26974, 1,45345, 7,50003, 3,27695 \times 10^4, 1,68162 \times 10^{19729}, \dots$ ,

Al igual que en el caso anterior, podemos utilizar la proposición 3.5 para concluir que:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(4,c)}{E_n(2,2)} = \infty$ ; luego:

$$0,26973 < c_{2,2}(4) < 0,26974$$

Podemos construir una tabla de la función  $c_{2,2}$  imitando los cálculos anteriores para calcular valores de  $c_{2,2}(b)$  para muchos valores de  $b$ . La tabla que se muestra a continuación, es para  $b = 1000, 2000, 3000, 4000, 5000$ .

b	1000	2000	3000	4000	5000
$c_{2,2}(b)$	-0,485721	-0,530760	-0,580776	-0,652020	-0,825523

Figura 3.1:  $c_{2,2}(b)$ 

La gráfica de la Figura 3.1. resulta de la anterior tabla y de otros calculos semejantes a los realizados.

A continuación proporcionamos una tabla de  $c_{2,2}(b)$ , para  $b = 3, 4, 5, 6, \dots, 20$ .

b	3	4	5	6	7	8
$c_{2,2}(b)$	0,660433	0,269737	0,086952	-0,018497	-0,087066	-0,135250
b	9	10	11	12	13	14
$c_{2,2}(b)$	-0,171002	-0,198617	-0,220618	-0,238581	-0,253542	-0,266210
b	15	16	17	18	19	20
$c_{2,2}(b)$	-0,277085	-0,286532	-0,294823	-0,302164	-0,308715	-0,314602

De la anterior tabla, y usando las proposiciones 3.5, 3.6, para aproximar valores de  $c_{2,2}(b)$ ; con  $2 < b \leq 20$ , se puede construir la gráfica de la Figura 3.2.

La gráfica de la Figura 3.3, es de  $c_{2,c_0}(b)$ , tomando distintos valores de  $c_0$ . Nótese que hemos usado una escala logarítmica sobre el eje  $b$ , porque los dominios de algunas funciones se extienden bastante lejos.

Los puntos  $(b, c)$  en las figuras 3.1 y 3.2, representan las sucesiones exponenciales iteradas  $\{E_n(b, c)\}$  que pertenecen a una única clase de equivalencia bajo la relación de comparabilidad.

Cada curva en la figura 3.3 representa una clase de equivalencia bajo la comparabilidad.

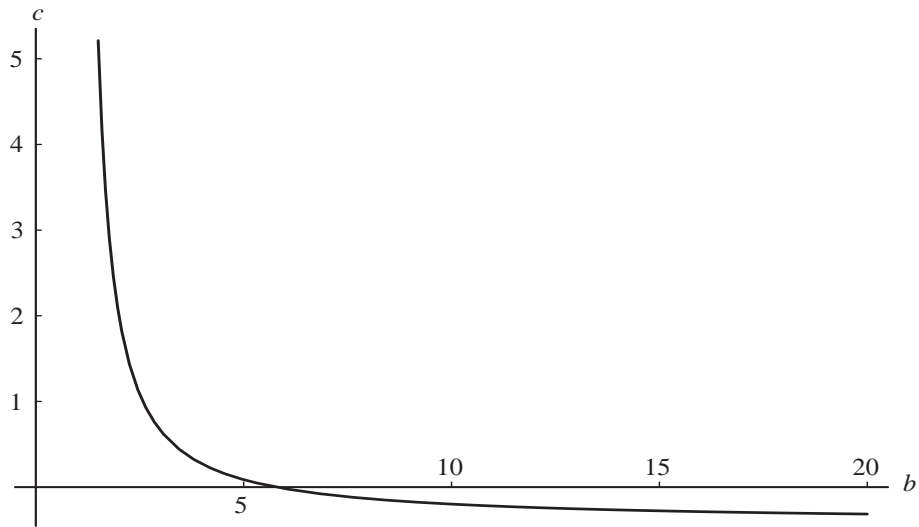


Figura 3.2:  $c_{2,2}(b)$  Para  $b \leq 20$

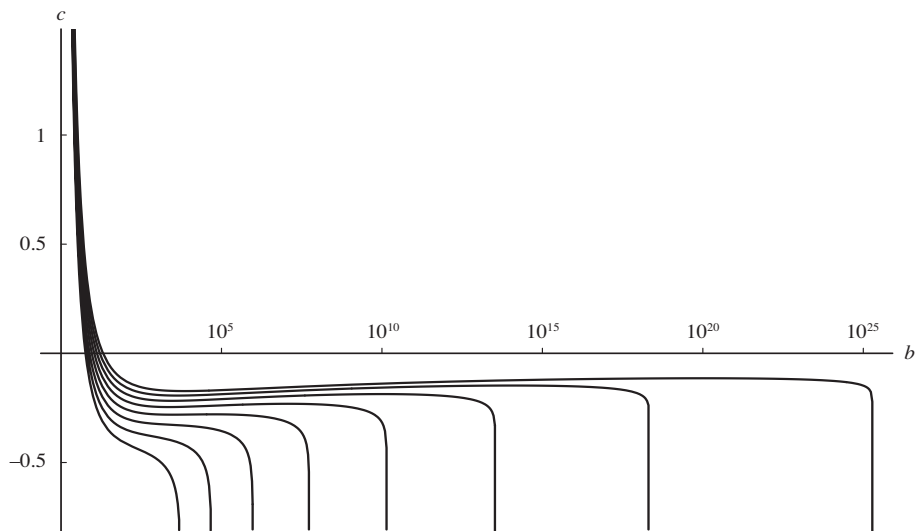


Figura 3.3:  $c_{2,c_0}(b)$  para  $c_0 = 2; 2,1; 2,2; \dots; 2,7$

Uno de los rasgos más asombrosos de estas gráficas, es que algunas de las funciones no son monótonas, y por lo tanto hay pares de sucesiones exponenciales iteradas comparables con el mismo valor  $c$  para valores de  $b$  diferentes.

Por ejemplo  $\{E_n(100, -0,1)\}$  y  $\{E_n(b, -0,1)\}$  son comparables para  $b \approx 3,913 \times 10^{17}$ .

Aquí están los primeros términos de ambas sucesiones.

$$\begin{aligned}\{E_n(100, -0,1)\} &= -0,1, 0,63096, 18,2774, 3,58776 \times 10^{36}, \dots, \\ \{E_n(b, -0,1)\} &= -0,1, 0,017408, 2,02419, 4,07868 \times 10^{35}, \dots,\end{aligned}$$

Tomando las proporciones de los términos correspondientes encontramos que:

$$\frac{E_3(100, -0,1)}{E_3(b, -0,1)} \approx 8,796 \approx \frac{\ln b}{\ln 100},$$

exactamente como esperábamos.

Nuestros ejemplos anteriores sugieren algunas propiedades de la función  $c_{b_0, c_0}$ . Éstas son resumidas en el siguiente teorema.

**Teorema 3.11.** *Hay un número  $\bar{b}$  tal que el dominio de  $c_{b_0, c_0}$ , es el intervalo abierto  $(1, \bar{b})$ ,  $c_{b_0, c_0}$  es continua en este intervalo,  $\lim_{b \rightarrow 1^+} c_{b_0, c_0}(b) = \infty$  y  $\lim_{b \rightarrow \bar{b}^-} c_{b_0, c_0}(b) = -\infty$ .*

*Demostración.* Suponga que  $1 < b_1 < b_2$  y  $b_2$  está en el dominio de  $c_{b_0, c_0}$ . Hagamos  $c_2 = c_{b_0, c_0}(b_2)$  y escojamos  $c_1$  suficientemente pequeño tal que:  $b_1^{c_1} < b_2^{c_2}$ , entonces:

$$E_n(b_1, c_1) < E_n(b_2, c_2),$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

Se sigue entonces que  $\{E_n(b_1, c_1)\}$  no domina a  $\{E_n(b_2, c_2)\}$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$  y ya que  $\{E_n(b_2, c_2)\}$  es comparable con  $\{E_n(b_0, c_0)\}$ ,  $\{E_n(b_1, c_1)\}$  no domina a  $\{E_n(b_0, c_0)\}$  tampoco. Luego, por la proposición 3.7,  $b_1$  está en el dominio de  $c_{b_0, c_0}(b)$ . Esto muestra que el dominio es un intervalo abierto con punto final izquierdo 1.

Ahora verifiquemos que el dominio es abierto y que  $c_{b_0, c_0}$  es continua.

Supongamos que  $b$  está en el dominio de  $c_{b_0, c_0}$  y hagamos  $c = c_{b_0, c_0}(b)$ . Para  $\epsilon > 0$  arbitrario, ya que  $(b, c) \in R$  y  $R$  es abierto, podemos escoger  $c'$  tal que  $c - \epsilon < c' < c$  y  $(b, c') \in R$ . Como  $c' < c_{b_0, c_0}(b)$ , tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c')}{E_n(b_0, c_0)} = 0,$$

y por la proposición 3.6 se sigue que hay alguna  $n$  tal que:

$$\frac{E_n(b, c')}{E_n(b_0, c_0)} < \frac{\ln b_0}{2 \ln b}; E_n(b, c') > \frac{2 \ln b}{\ln b_0},$$

ahora, ya que  $E_n(b, c')$  y  $\ln b$  son funciones continuas de  $b$ , hay un  $\delta > 0$  tal que: si  $b - \delta < b' < b + \delta$ , entonces

$$\frac{E_n(b', c')}{E_n(b_0, c_0)} < \frac{\ln b_0}{2 \ln b'}; E_n(b', c') > \frac{2 \ln b'}{\ln b_0},$$

de esto se sigue que para todo  $b' \in (b - \delta, b + \delta)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b', c')}{E_n(b_0, c_0)} = 0,$$

y por lo tanto  $c_{b_0, c_0}(b')$  está definida y  $c_{b_0, c_0}(b') > c' \geq c - \epsilon$ .

Razonando similarmente y usando la proposición 3.5 en lugar de la 3.6, se puede también asegurar (escogiendo  $\delta$  lo suficientemente pequeño) que  $c_{b_0, c_0}(b') < c + \epsilon$  siempre que  $b' \in (b - \delta, b + \delta)$ .

Esto implica que el dominio de  $c_{b_0, c_0}$  es un intervalo abierto y  $c_{b_0, c_0}$  es continua en este intervalo.

Miremos que el dominio es acotado: Primero notemos que para cualquier  $b$  y  $c$  con  $b > 1$ ,

$$E_3(b, c) = b^{b^c} > b^{b^0} = b.$$

Ahora hagamos  $b = E_3(b_0, c_0) > b_0$ , supongamos por contradicción que  $b$  está en el dominio de  $c_{b_0, c_0}$  y hagamos  $c = c_{b_0, c_0}(b)$ .

Entonces  $E_3(b, c) > b = E_3(b_0, c_0)$  y de esto se sigue que:

$$E_n(b, c) > E_n(b_0, c_0); \forall n \geq 3,$$

Pero esto contradice el hecho que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b, c)}{E_n(b_0, c_0)} = \frac{\ln b_0}{\ln b} < 1$$

Por lo tanto  $E_3(b_0, c_0)$  no está en el dominio de  $c_{b_0, c_0}$ . Así, hay un número  $\bar{b} < E_3(b_0, c_0)$  tal que el dominio de  $c_{b_0, c_0}$ , es el intervalo  $(1, \bar{b})$ .

Por otro lado, si  $1 < b \leq e^{\frac{1}{e}}$ , entonces  $\{E_n(b_0, c_0)\}$  domina a  $\{E_n(b, f(b))\}$ . De esto se sigue que:

$$c_{b_0, c_0}(b) > f(b)$$

y ya que:  $\lim_{b \rightarrow 1^+} f(b) = \infty$ , inferimos que:

$$\lim_{b \rightarrow 1^+} c_{b_0, c_0}(b) = \infty.$$

Para evaluar el  $\lim_{b \rightarrow \bar{b}^-} c_{b_0, c_0}(b)$ , consideremos un número real  $c$  arbitrario. Como  $c_{b_0, c_0}(\bar{b})$  es indefinido, la proposición 3.10 implica que  $\{E_n(\bar{b}, c)\}$  domina a  $\{E_n(b_0, c_0)\}$ , usando la proposición 3.5 podemos encontrar un  $\delta > 0$  tal que para todo  $b \in (b_0 - \delta, \bar{b})$ ,  $\{E_n(b, c)\}$  domina a  $\{E_n(b_0, c_0)\}$ , por lo tanto  $c_{b_0, c_0}(b) < c$  y ya que  $c$  es arbitrario se sigue que:

$$\lim_{b \rightarrow \bar{b}^-} c_{b_0, c_0}(b) = -\infty.$$

□

Del  $\bar{b}$  del teorema anterior, podemos deducir la siguiente proposición.

**Proposición 3.12.** *Hay un número  $b^*$  tal que  $1 < b^* < \bar{b}$ ,  $c_{b_0, c_0}(b^*) = 0$ ,  $c_{b_0, c_0}$  es estrictamente decreciente en el intervalo  $(1, b^*]$  y  $c_{b_0, c_0} < 0$  para todo  $b$  en el intervalo  $(b^*, \bar{b})$ .*

*Demostración.* Del anterior teorema y por el teorema de Bolzano, es claro que  $\exists! b^*$  tal que  $c_{b_0, c_0}(b^*) = 0$ .

Para establecer los resultados faltantes de  $b^*$ , supongamos por contradicción que  $1 < b_1 < b_2$ , y además, supongamos  $c_2 = c_{b_0, c_0}(b_2) \geq 0$  y  $c_1 = c_{b_0, c_0}(b_1) \leq c_2$ , entonces:

$$E_1(b_1, c_1) \leq E_1(b_1, c_2) \leq E_1(b_2, c_2),$$

donde la segunda desigualdad se cumple porque  $c_2 \geq 0$ , por lo tanto, por el teorema 1.12,  $E_n(b_1, c_1) < E_n(b_2, c_2)$ , cuando  $n > 1$ , pero  $\{E_n(b_1, c_1)\}$  y  $\{E_n(b_2, c_2)\}$  son comparables dado que cada una es comparable con  $\{E_n(b_0, c_0)\}$  y por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(b_1, c_1)}{E_n(b_2, c_2)} = \frac{\ln b_2}{\ln b_1} > 1.$$

Logrando así una contradicción. □

Una consecuencia de nuestro análisis de la gráfica de  $c_{b_0, c_0}$  es que hay un único número  $b$  tal que  $c_{b_0, c_0}(b) = b$ . En otras palabras, hay un único número  $b$  tal que  $\{E_n(b_0, c_0)\}$  es comparable con  $\{E_n(b, b)\}$ .

Así, entre las sucesiones exponenciales iteradas que crecen sin ser acotadas, cada clase de equivalencia, bajo la relación de comparabilidad, contiene exactamente una sucesión de la forma  $b, b^b, b^{b^b}, \dots$ ,

Podemos usar estas observaciones para dar otra solución al problema planteado por DEVANEY et al.[2] y ACOSTA [3].

En dicho problema, se supone que se tienen dos animales que hacen el mismo número de saltos por minuto, pero uno de ellos hace saltos más grandes que el otro. Si el salto del animal más pequeño (la presa) tiene longitud  $a$ , y el salto del animal más grande (el depredador) tiene longitud  $b$ , es evidente que un depredador persistente siempre será capaz de alcanzar a su presa. Si se asume que la presa arranca un paso adelante del depredador, después de  $n$  pasos la distancia entre los dos será:

$$nb - (n + 1)a = n(b - a) - a.$$

Esto es claro porque  $nb - (n + 1)a = nb - na - a = n(b - a) - a$ , y en consecuencia, si  $n > a/(b - a)$  entonces el depredador habrá sobrepasado a su presa.

Si se imagina un planeta en el cual las criaturas se mueven por saltos de longitud que se incrementa geoméricamente, una criatura en dicho planeta está a una distancia  $a$  de donde empezó después de un salto, y a una distancia  $a^n$  después de  $n$  saltos. Se supone  $a > 1$ , para indicar que las criaturas se alejan de su punto de partida. Se puede nuevamente hacer la pregunta de si una pequeña criatura que arranca un paso adelante de su depredador, puede escapar de él. Si se supone que el paso inicial del depredador es de tamaño  $b$ , donde  $b > a > 1$ , debemos escoger  $n$  tal que  $b^n > a^{n+1}$ , entonces podremos afirmar que la criatura más pequeña es atrapada por el depredador.

En este caso debemos escoger  $n > \ln a (\ln \frac{b}{a})^{-1}$ . Verifiquémoslo:

$n > \ln a (\ln \frac{b}{a})^{-1} = \frac{\ln a}{\ln(b/a)}$ , podemos ver que  $\frac{1}{n} < \frac{\ln(b/a)}{\ln a} = \frac{\ln b - \ln a}{\ln a} = \frac{\ln b}{\ln a} - 1$ , entonces

$$\frac{\ln b}{\ln a} > 1 + \frac{1}{n} = \frac{n + 1}{n}.$$

Por consiguiente  $n \ln b > (n + 1) \ln a$ , lo cual indica que  $\ln b^n > \ln a^{(n+1)}$  y aplicando la función exponencial  $b^n > a^{(n+1)}$ . El depredador habrá alcanzado a su presa.

Por supuesto, se puede imaginar un planeta aún más extraño en el cual una criatura da un salto inicial de tamaño  $a$  seguido por un salto que lo mueve a una distancia  $a^a$  de su punto de partida, y otro que lo lleva a una distancia  $a^{a^a}$ , y así sucesivamente.

Sorprendentemente, la presa puede escapar de su depredador, por persistente que éste sea, siempre que se tengan algunas condiciones.

Para garantizar que la criatura se aleja de su punto de partida debemos escoger  $a > e^{1/e}$ . Además, la distancia a la cual la criatura está después de  $n + 1$  saltos es  $E_{n+1}(a, a)$ . Como siempre suponemos que la presa arranca un paso adelantada y

además  $b > a > e^{1/e}$ , esto implica la comparación de  $E_{n+1}(a, a)$  con  $E_n(b, b)$ , o equivalentemente la comparación de  $E_n(a, a^a)$  con  $E_n(b, b)$ .

Pero sabemos que para cada  $a$  que satisface  $a > e^{1/e}$ ;  $\exists! b$  tal que:  $E_n(b, b)$  es comparable con  $E_n(a, a^a)$ .

Pero si  $E_n(b, b)$  es comparable con  $E_n(a, a^a)$ , tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(a, a^a)}{E_n(b, b)} = \frac{\ln b}{\ln a} > 1.$$

Ahora, si  $a < b' < b$  entonces  $E_n(a, a^a) > E_n(b', b')$  para todo  $n$ . De otro modo, si  $b' > b$  entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(a, a^a)}{E_n(b', b')} = 0,$$

y por lo tanto para algún  $n$  lo suficientemente grande,  $E_n(a, a^a) < E_n(b', b')$ .

Este  $b$  es el que DEVANEY[2] y ACOSTA[3] llaman  $\gamma(a)$ .

También podemos usar lo que hemos descubierto sobre la comparabilidad de sucesiones exponenciales iteradas, para aprender más sobre cómo comparar las sucesiones exponenciales iteradas y las sucesiones factoriales iteradas.

Mostramos en la sección exponencial contra factorial, que para toda  $k \geq 3$  hay alguna  $c < k$  tal que  $\{E_n(k, c)\}$  y  $\{F_n(k) \ln F_n(k)\}$  son comparables. Por la proposición 2.10, sabemos que  $c$  es único. De hecho, sabemos que para cada  $b$ , en algún lugar del intervalo  $(1, k]$ ,  $\exists! c$  tal que  $\{E_n(b, c)\}$  es comparable con  $\{F_n \ln F_n\}$ .

¿Qué hay acerca de la sucesión factorial iterada inicial? Hagamos a  $c_0$  el único número real tal que:  $\{E_n(k, c_0)\}$  y  $\{F_n \ln F_n\}$  son comparables. Como observamos en la ecuación (4), se sigue que  $\{E_n(k, c_0)\}$  domina a  $\{F_n\}$ . Ahora consideremos cualquier  $(b, c) \in R$ . Nosotros hemos probado que  $\{E_n(b, b)\}$  y  $\{E_n(k, c_0)\}$  son comparables o una domina a la otra. Si,  $\{E_n(b, c)\}$  y  $\{E_n(k, c_0)\}$  son comparables, entonces  $\{E_n(b, c)\}$  domina a  $\{F_n\}$ . De otra forma, si  $\{E_n(b, c)\}$  domina a  $\{E_n(k, c_0)\}$  entonces  $\{E_n(b, c)\}$  domina a  $\{F_n\}$ . Supongamos que  $\{E_n(k, c_0)\}$  domina a  $\{E_n(b, c)\}$ , aplicando las proposiciones 3.2 y 3.9, podemos encontrar  $c'$ , con  $c' < c_0$  tal que:  $\{E_n(k, c_0)\}$  domina a  $\{E_n(k, c')\}$  y  $\{E_n(k, c')\}$  domina a  $\{E_n(b, c)\}$ .

Es fácil ver que  $\{F_n(\ln F_n - 1)\}$  es comparable con  $\{F_n \ln F_n\}$ , dado que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n(\ln F_n - 1)}{F_n \ln F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n \ln F_n}{F_n \ln F_n} - \frac{F_n}{F_n \ln F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{\ln F_n} = 1 - 0 = 1.$$

Luego  $\{F_n(\ln F_n - 1)\}$  es comparable con  $\{E_n(k, c_0)\}$  también. De lo cual, podemos concluir que:  $\{F_n(\ln F_n - 1)\}$  domina a  $\{E_n(k, c')\}$ . Así, para  $n$  suficientemente grande:

$E_n(k, c') < F_n(\ln F_n - 1) / \ln k$ , y por la proposición 3.6, se sigue que  $E_n(k, c') < F_n$  para algún  $n$  grande. Luego nosotros podemos concluir que si  $E_n(k, c')$  domina a  $\{E_n(b, c)\}$ , entonces  $\{F_n\}$  también domina a  $\{E_n(b, c)\}$ .

Resumiendo, las sucesiones factoriales iteradas  $\{F_n\}$ , son no comparables con cualquier sucesión exponencial iterada. Más bien, las sucesiones factoriales iteradas  $\{F_n\}$  ocupan un lugar entre las sucesiones exponenciales iteradas que son dominadas por  $\{E_n(k, c_0)\}$  y aquellas que dominan o son comparables con  $\{E_n(k, c_0)\}$ .

Por ejemplo, consideremos el caso  $k = 9$ , los primeros términos de la sucesión  $\{F_n(9)\}$  son:

$$9, 9! = 362880, 9!! \approx 1,60971 \times 10^{1859933}, \dots,$$

Usando la proposición 3.5 y 3.6 podemos mostrar que  $\{F_n \ln F_n\}$  es comparable con  $\{E_n(9, c_0)\}$ , para  $c_0 \approx 6,59145$ . Los primeros términos de la sucesión  $\{E_n(9, c_0)\}$  son:

$$c_0 = 6,59145, 9^{c_0} \approx 1,94913 \times 10^6, 9^{9^{c_0}} \approx 3,13753 \times 10^{1859939}, \dots,$$

La sucesión  $\{E_n(9, c_0)\}$  domina a  $\{F_n\}$ , pero  $\{F_n\}$  domina a  $\{E_n(9, c)\}$  siempre que  $c < c_0$ .

## Capítulo 4

# Visitando nuevamente la pregunta inicial.

Volvemos al problema de cuál es el número más grande que puede ser escrito, usando cinco símbolos matemáticos básicos.

Para cada  $n$ , hagamos  $I_n$  el conjunto de todos los  $n$  dígitos enteros positivos, es decir  $I_n$  es el conjunto de todos los enteros positivos estrictamente menores que  $10^n$ . En otras palabras,  $I_n$  es el conjunto de los enteros positivos cuyo número de dígitos es menor o igual que  $n$

**Definición 4.1.** *Definimos conjuntos  $T_n$  así:*

$$T_1 = I_1 = \{1, 2, 3, \dots, 9\};$$

para  $n > 1$

$$T_n = I_n \cup \{p^q: \text{tal que para algún } i, j, p \in T_i, q \in T_j, \text{ y } j + i = n\} \cup \{p!, p \in T_{n-1}\}$$

Claramente cada número que puede ser escrito con  $n$  símbolos, usando enteros positivos, exponenciación y la función factorial, es un elemento de  $T_n$ . (Sin embargo, algunos elementos pueden requerir más de  $n$  símbolos, porque los paréntesis pueden ser necesarios). Ahora encontremos el elemento más grande de  $T_n$ .

Sea  $M_n$  el elemento más grande de  $T_n$ . Claramente  $M_1 = 9$  y listando los elementos de  $T_2$  no es difícil comprobar que  $M_2 = 9^9 = 387,420,489$ . Pues, al calcular cada elemento se puede ver que los elementos más grandes de cada subconjunto que conforma  $T_n$ , son respectivamente  $99$ ,  $9!$  y  $9^9$ , siendo el mayor de estos  $9^9$ . El resto de valores de  $M_n$ , para cada  $n \geq 2$ , son determinados por la siguiente proposición:

**Proposición 4.2.** *Para  $n \geq 2$ ;  $M_{n+1} = M_n!$*

*Demostración.* Si  $M_{n+1}$  es el elemento más grande de  $T_{n+1}$ ,  $M_{n+1}$  es el mayor de los elementos, respectivamente, más grandes de cada uno de los tres conjuntos que conforman  $T_{n+1}$ . Es claro que estos tres elementos son:  $10^{n+1} - 1$ ; un número de la forma  $M_i^{M_j}$ , donde  $i + j = n + 1$ ; o el número  $M_n!$ .

Así, debemos mostrar que  $M_n!$  es el más grande de estos números.

Consideremos primero el número  $10^{n+1} - 1$ . Sabemos que:  $M_n > M_2 > 10e$ .

Así,  $\frac{M_n}{e} > 10$  y también  $M_n \geq 10^n - 1 > n + 1$ , luego tenemos que:

$$10^{n+1} < \left(\frac{M_n}{e}\right)^{M_n}$$

luego

$$10^{n+1} - 1 < 10^{n+1} < \left(\frac{M_n}{e}\right)^{M_n}$$

Pero, por Inecuación (3) sabemos que:

$$\left(\frac{M_n}{e}\right)^{M_n} < M_n!$$

Ahora consideremos el número de la forma  $M_i^{M_j}$ , donde  $i + j = n + 1$ . Si  $i < n$  entonces notemos que  $M_n \geq M_{i+1} \geq M_i! > M_i e$ , de lo cual concluimos que  $\frac{M_n}{e} > M_i$ , luego:

$$M_i^{M_j} < \left(\frac{M_n}{e}\right)^{M_n} < M_n!$$

Si  $i = n$ , entonces  $j = 1$ . Usamos aquí el hecho que  $e^{10} \approx 22026,5 < M_2 < M_n$ , lo cual implica que  $\frac{M_n}{e} > e^9$ , y de esta manera:

$$M_i^{M_j} = M_n^9 = (e^9)^{\ln M_n} < \left(\frac{M_n}{e}\right)^{M_n} < M_n!$$

Concluimos así, que entre todos los candidatos para  $M_{n+1}$ , el más grande es  $M_n!$ .  $\square$

En particular, la proposición 4.2 nos dice que  $M_3 = M_2!$ , de la misma forma  $M_4 = M_3! = M_2!!$ .

Finalmente, podemos decir que  $M_5 = M_4! = M_3!! = M_2!!!$ . Y como sabemos que  $M_2 = 9^9$ .

Concluimos que el número más grande que puede ser escrito con cinco símbolos matemáticos básicos, usando enteros positivos, exponenciación y la función factorial es:

$$9^9!!!.$$

## Capítulo 5

# Conclusiones

En esta monografía, hemos expuesto en forma detallada los resultados, sobre sucesiones exponenciales y factoriales iteradas, que Velleman presentó en su artículo *EXPONENTIAL Vs. FACTORIAL*, publicado en: *THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA*.

Nos pareció muy interesante el hecho que a partir de una pregunta fácil de enunciar, comprensible casi para cualquier estudiante de pregrado y atractiva como para animarse a resolverla; haya resultado este artículo científico, cuyo nivel le mereció ser publicado en una de las revistas más prestigiosas de investigación matemática de América.

En nuestro intento por comprender y exponer los resultados de este artículo, hemos tenido que hacer un estudio y remembranza en temas importantes de materias como el cálculo, análisis matemático, entre otras. Lo cual creemos pertinente para nuestra formación académica.

Tocante a una de nuestras pretensiones, mencionada en la introducción de este trabajo; esperamos haber expuesto en forma clara la solución del problema, así como los resultados matemáticos que fueron usados para dar esta solución. A modo que los estudiantes de pregrado de matemática, o de programas afines; tengan fácil acceso a un resultado actual de investigación matemática.

## Capítulo 6

# Bibliografía.

- [1] Velleman, Daniel J.; Exponential vs. Factorial. *Amer. Math. Monthly* **Vol 113** (2006), no. 8, 689-704.
- [2] Devaney, R. L.; Josi, K.; Moreno Rocha, M.; Seal, P.; Shapiro, Y. and Frumosu A. T.; Playing catch-up with iterated exponentials. *Amer. Math. Monthly* **Vol 111** (2004), no. 8, 704-709.  
<http://www.math.uh.edu/~josic/myweb/research/papers/catchup/torres.pdf>
- [3] Acosta, Primitivo B.; Un modelo de captura con las torres y la exponencial iterada. *Revista INTEGRACIÓN* **Vol 19** (2001), no. 2, 37-69.  
[http://matematicas.uis.edu.co/integracion/rint-html/volumen/vol19\(2\)2001.html](http://matematicas.uis.edu.co/integracion/rint-html/volumen/vol19(2)2001.html)
- [4] Corless, R. M.; Gonnet, G. H.; Hare, D. E. G.; Jeffrey, D. J.; Knuth, D. E.; On the Lambert W Function; *Advances in Computational Mathematics* **Vol 5** (1996), 329-359.  
<http://www.cs.uwaterloo.ca/research/tr/1993/03/W.pdf>
- [5] Apostol, T. M.; Análisis Matemático. *Ed, Reverté S.A.* (2006), México, Segunda Edición.
- [6] Bartle, Robert. G.; Introducción al Análisis Matemático. *Ed, Limusa.* (1987), México, Segunda Edición.
- [7] Reyes, Edilberto. J.; Introducción a la Teoría de Números. *Universidad Industrial De Santander* (2000), Colombia, Notas de Clase.