

**MODELO ANALÍTICO PARA PREDECIR EL FLUJO BIFÁSICO (AGUA-
ACEITE), PERMEABILIDADES EFECTIVAS Y RELATIVAS EN
FRACTURAS**

**ANDRÉS RAFAEL CHIMÁ MONTENEGRO
EFRÉN ANTONIO CHÁVEZ IRIARTE**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERIA FISICOQUIMICAS
ESCUELA DE INGENIERIA DE PETROLEOS
BUCARAMANGA**

2004

**MODELO ANALÍTICO PARA PREDECIR EL FLUJO BIFÁSICO (AGUA-
ACEITE), PERMEABILIDADES EFECTIVAS Y RELATIVAS EN
FRACTURAS**

**ANDRÉS RAFAEL CHIMÁ MONTENEGRO
EFRÉN ANTONIO CHÁVEZ IRIARTE**

**Trabajo de grado presentado como requisito parcial
para optar el título de Ingeniero de Petróleos**

Director:

**ZULY HIMELDA CALDERÓN
Ingeniera de Petróleos**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERIA FISICOQUIMICAS
ESCUELA DE INGENIERIA DE PETROLEOS
BUCARAMANGA**

2004

A Dios,
a mis padres,
Myriam y Andres
a quienes tanto les debo,
a toda mi familia,
a Jhisell por brindarme cariño
a mis amigos, en especial Leo y Michi
a mi hermano, Enzo
al Junior de Barranquilla,
a mis profesores,
en especial a Zuly y Aristóbulo.

Andrés.

A Dios,
a mis padres Ibeth y Efrén a quienes
les debo todo y me apoyaron en todo
momento,
a Mi abuelita Rafaela quien con su
vejez me mostró la experiencia de los
años,
a mi novia Maria Inés, quién siempre
me dio fuerzas para seguir adelante,
a Andrés, quien me supo entender y
comprender y me aconsejó como un
amigo,
Y a mis amigos, quienes confiaron
en mí y me hicieron más amena la
estancia en la universidad.

Efrén

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer a el Instituto Colombiano del Petróleo ICP-ECOPETROL por brindarnos capacitación en al área de yacimientos fracturados, al profesor Aristóbulo Bejarano por brindarnos una formación tanto técnica como personal.

A la Doctora Zuly por su inmensa colaboración y apoyo en la culminación de este trabajo.

A CHEVRONTEXACO por brindarnos experiencia y por confiar en nosotros, a nuestras madres, por apoyarnos en todos nuestros estudios y en especial a Dios el cual nos dio motivación e inspiración para desarrollar este hermoso proyecto.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCION	15
1. GENERALIDADES DE LOS YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS	17
1.1 ¿QUE ES UNA FRACTURA NATURAL?	17
1.2 ¿QUÉ ES UN YACIMIENTO NATURALMENTE FRACTURADO?	17
1.3 POROSIDAD	18
1.3.1 Porosidad Primaria.	19
1.3.2 Porosidad Secundaria.	19
1.4 ¿COMO SE ORIGINAN LAS FRACTURAS?	20
1.5 CAPACIDADES DE ALMACENAMIENTO Y DE FLUJO	21
1.6. MORFOLOGIA DE LAS FRACTURAS	26
1.6.1 Fracturas Abiertas	26
1.6.2 Fracturas Deformadas.	26
1.6.3 Fracturas Mineralizadas	27
1.6.4 Fracturas Vugulares.	27
1.7 PERMEABILIDAD	27
1.7.1 Permeabilidad de la matriz.	27
1.7.2 Permeabilidad de la fractura.	28
2. VISCOSIDAD Y MECANISMO DEL TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO	32
2.1 LEY DE NEWTON DE LA VISCOSIDAD	32
2.2 FLUIDOS NO-NEWTONIANOS	35
2.2.1 Modelo de Bingham	37
2.2.2 Modelo de Ostwaid-de Waele	37
2.2.3 Modelo de Eyring	38
2.2.4 Modelo de Ellis	38

2.2.5 Modelo de Reiner-Philipkff	39
2.3 INFLUENCIA DE LA PRESIÓN Y LA TEMPERATURA SOBRE LA VISCOSIDAD	40
2.4 TEORÍA DE LA VISCOSIDAD DE LOS GASES A BAJA DENSIDAD	44
2.5 TEORÍA DE LA VISCOSIDAD DE LOS LÍQUIDOS	53
3. DISTRIBUCIONES DE VELOCIDAD EN FLUJO LAMINA	58
3.1 BALANCES ENVOLVENTES DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO:	59
3.2 FLUJO DE UNA PELÍCULA DESCENDENTE	61
3.3 FLUJO A TRAVÉS DE UN TUBO CIRCULAR	69
3.4 FLUJO A TRAVÉS DE UNA SECCIÓN DE CORONA CIRCULAR	77
3.5 FLUJO ADYACENTE DE DOS FLUIDOS INMISCIBLES	82
3.6 FLUJO REPTANTE ALREDEDOR DE UNA ESFERA SÓLIDA	86
3.6.1 Integración de la fuerza normal.	89
3.6.2 Integración de la fuerza tangencial.	89
4. LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA SISTEMAS	92
4.1 LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD	95
4.2 LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO	98
4.3 LA ECUACIÓN DE ENERGÍA MECÁNICA	107
4.4 LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN EN COORDENADAS CURVILÍNEAS	109
4.5 UTILIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA EL	117
5. PERMEABILIDAD RELATIVA EN FRACTURAS: UNA FUNCIÓN LINEAL O NO LINEAL DE LA SATURACIÓN	120
5.1 ANTECEDENTES	121
5.2 APARATOS	123
5.2.1 Diseño de celdas.	123
5.2.2 Equipo de videogradora.	124
5.3 PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL	125
5.4 PROCESAMIENTO DE LA IMAGEN DE LA VIDEOGRADORA	126
5.4.1 Medida de la saturación.	126

5.5 BASE DE CÁLCULO	128
5.6 DISCUSIÓN DE RESULTADOS	130
5.7 POSIBLES ERRORES	131
6. FLUJO BIFASICO (AGUA-ACEITE), PERMEABILIDADES EFECTIVAS Y RELATIVAS EN FRACTURAS	132
6.1 DESARROLLO MATEMATICO	132
6.2 EJEMPLO	140
6.3 DEMOSTRACION MATEMATICA	142
CONCLUSIONES	144
RECOMENDACIONES	145
BIBLIOGRAFIA	146

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Distribución de Porosidad en yacimientos fracturados	23
Figura 2. Curvas Típicas de Permeabilidad Relativa y Presión Capilar para Yacimientos naturalmente fracturados tipo BI y BII.	24
Figura 3. Formación del perfil de velocidad en estado estacionario para un fluido contenido entre dos laminas	33
Figura 4. Resumen de modelos no-newtonianos en estado estacionario (con fines comparativos se indica también el modelo newtoniano).	36
Figura 5. Viscosidad reducida , en función de la temperatura reducida, para distintos valores de la presión reducida .	41
Figura 6. Viscosidad reducida en función de la presión reducida , y la temperatura reducida .	43
Figura 7. Transporte molecular de cantidad de movimiento x desde el plano ($y -a$) al Plano y .	46
Figura 8. Función de energía potencial que describe la interacción de dos moléculas esféricas no polares.	50
Figura 9. Ilustración de un proceso de escape en el flujo de un líquido. La molécula 1 tiene que atravesar un estrecho «pasadizo» para alcanzar el lugar vacante.	55
Figura 10. Diagrama esquemático del experimento de una película descendente, con indicación de los efectos finales. En la región de Longitud L la distribución de velocidad está totalmente desarrollada.	62
Figura 11. Flujo viscoso isotérmico de una película de líquido bajo la influencia de la gravedad, sin formación de ondulaciones. Capa de espesor A x sobre la que se aplica el balance de cantidad	

de movimiento. El eje y es perpendicular al plano del papel.	64
Figura 12. Envoltura cilíndrica de un fluido sobre la cual se aplica el balance de cantidad de movimiento, para obtener el perfil de velocidad y la fórmula de Hagen-Poiseuille para la velocidad volumétrica de flujo.	70
Figura 13. Distribuciones de velocidad y densidad de flujo de cantidad de movimiento para el flujo en tubos cilíndricos.	73
Figura 14. Flujo ascendente a través de dos cilindros concéntricos.	77
Figura 15. Flujo de dos fluidos inmiscibles entre dos láminas planas paralelas debido a un gradiente de presión.	82
Figura 16. Sistema coordinado utilizado para describir el flujo de un fluido alrededor de una esfera rígida.	87
Figura 17. Región de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ fija en el espurio, a través de la cual está circulando un fluido	96
Figura 18. Elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, en el que se señala con flechas la dirección en que se transporta el componente x de la cantidad de movimiento a través de las superficies	100
Figura 19. Curvas experimentales de permeabilidad relativa.	121
Figura 20. Permeabilidades relativas simuladas para drenaje de fase mojante y no mojante.	122
Figura 21. Permeabilidades relativas para la caliza fracturada.	123
Figura 22. Diseño de una celda Hele-Shaw	124
Figura 23. Arreglo experimental para el experimento	125
Figura. 24a y 24b. Imágenes extraídas del experimento en una celda de 1"x 4" (El color negro es agua teñida de azul)	126
Figura 25. Histograma desde la imagen extraída.	127
Figura 26. Comparación con la permeabilidad relativa de Room	130
Figura 27. Caracterización de la fractura utilizada en el modelo.	133
Figura 28 a y b. Curva de Permeabilidades relativas en fracturas.	141

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. La ecuación de continuidad en distintos sistemas coordenados	110
Tabla 2. La ecuación de movimiento en coordenadas rectangulares (x,y,z).	111
Tabla 3. La ecuación de movimiento en coordenadas CILÍNDRICAS (r, θ , z).	112
Tabla 4. La ecuación de movimiento en coordenadas esféricas (r, θ , ϕ)	114
Tabla 5. Componentes del tensor esfuerzo en coordenadas rectangulares (x, y, z)	115
Tabla 6. Componentes del tensor esfuerzo en coordenadas cilíndricas (r, θ , z)	116
Tabla 7. Componentes del tensor esfuerzo en coordenadas esféricas (r, θ , ϕ)	116

RESUMEN

TITULO: MODELO ANALÍTICO PARA PREDECIR EL FLUJO BIFÁSICO (AGUA-ACEITE), PERMEABILIDADES EFECTIVAS Y RELATIVAS EN FRACTURAS. *

AUTORES: CHIMÁ MONTENEGRO, Andres R., CHAVEZ IRIARTE, Efrén A. **

PALABRAS CLAVES: Permeabilidades Relativas, Yacimientos Naturalmente Fracturados, Saturación, Flujo de Fluidos, Fracturas.

DESCRIPCION: Las curvas de permeabilidades relativas en fracturas son una función no lineal de la saturación. Por esta razón, Cuando se va a simular un yacimiento naturalmente fracturado se divide el yacimiento en matriz y fractura, y a cada uno se les determinan sus propiedades individualmente. En esta tesis se centrara al estudio del sistema fracturado y no de la matriz, y en particular al flujo de fluidos y a las curvas de permeabilidades relativas en las fracturas.

E. S. Romm en 1966 propone una ecuación para calcular las curvas de permeabilidades relativas en fracturas. Según él, las curvas de permeabilidades relativas en fracturas son una función lineal de la saturación ($K_{ri} = S_{wi}$). Mas tarde, en 1994, D. A. Pieters y R. M. Graves de la escuela de minas en colorado demuestran desde un punto de vista experimental, que dichas curvas no se comportan linealmente sino contrario a los que todos creen generan curvas no lineales.

En este trabajo se propone una nueva ecuación para calcular las curvas de permeabilidades relativas en fracturas para un sistema bifásico agua-petróleo la cual genera un comportamiento no lineal.

$$K_{rw} = \left[\frac{S_w^5 (\mu_o - \mu_w) + S_w^3 \mu_w (3 - 2S_w)}{S_w (\mu_o - \mu_w) + \mu_w} \right]$$

$$K_{ro} = \left[\frac{S_o^5 (\mu_w - \mu_o) + S_o^3 \mu_o (3 - 2S_o)}{S_o (\mu_w - \mu_o) + \mu_o} \right]$$

Para llegar a dicha ecuación se utilizaran los conceptos de la ley de newton de la viscosidad, los balances de cantidad de movimiento, las ecuaciones de variación para sistemas isotérmicos y el flujo de fluidos en medios porosos.

* Tesis de grado

** Ingenierías fisicoquímicas, Ingeniería de petróleos, CALDERON, Zuly

ABSTRACT

TITLE: ANALYTICAL MODEL TO PREDICT BIPHASIC FLOW (WATER-OIL), EFFECTIVE AND RELATIVE PERMEABILITY OF FRACTURES. *

AUTHORS: CHIMÁ MONTENEGRO, Andres R., CHAVEZ IRIARTE, Efrén A. **

KEYWORDS: Relative Permeability, Naturally Fractured Reservoir, Saturation, Fluid Flow, Fracture.

DESCRIPTION: Relative permeability curves are no a linear function of saturation. Therefore, To simulate a naturally fractured reservoir researcher must divide the reservoir into matrix and fracture, and individually measure or calculate their properties. In this thesis, we studied the fracture system an no the matrix, and particularly the fluid flow and the relative permeability curves of the fracture.

E. S. Romm in 1966 proposed an equation to calculate the relative permeability curves in the fractured system. His research concluded that relative permeability is a linear function of saturation ($K_{ri} = S_{wi}$). Later, in 1994, D. A. Pieters and R. M. Graves demonstrated experimentally that relative permeability curves are no a linear function of saturation.

In this research, we found an equation to calculate relative permeability curves in the fracture system for two-phase flow (water-oil).

$$K_{rw} = \left[\frac{S_w^5 (\mu_o - \mu_w) + S_w^3 \mu_w (3 - 2S_w)}{S_w (\mu_o - \mu_w) + \mu_w} \right]$$

$$K_{ro} = \left[\frac{S_o^5 (\mu_w - \mu_o) + S_o^3 \mu_o (3 - 2S_o)}{S_o (\mu_w - \mu_o) + \mu_o} \right]$$

To found this equation, we use the concept of Newton's law of viscosity, shell momentum balances, the equations of change for isothermal systems and the fluid flow in porous media.

* Thesis

** Physicochemical Engineering, Petroleum Engineering, Calderon, Zuly.

INTRODUCCION

Desde los inicios de la historia humana, el hombre ha intentado por sus propios medios suplir sus necesidades. La energía ha hecho posible que el ser humano supla dichas necesidades. Una de las formas de obtener energía es por medio de el petróleo, por esta razón la humanidad ha volcado sus ojos a la ingeniería de petróleos y nosotros nos centraremos al estudio de una de sus áreas la ingeniería de yacimientos y en particular el flujo de fluidos en los yacimientos naturalmente fracturados.

Cuando se simula un yacimiento naturalmente fracturado, el investigador divide este tipo de yacimientos en dos, la matriz y las fracturas, y a cada uno se les mide o les calcula sus propiedades individualmente. En este trabajo se estudiara solo el sistema fracturado y en particular el flujo de fluidos bifásico (agua-aceite) y las curvas de permeabilidades relativas en las fracturas.

En los cursos básicos de yacimientos al estudiante se le enseña que las curvas de permeabilidades relativas en fracturas son una función lineal de la saturación ($K_{ri} = S_{wi}$), según E. S. Romm (1966). Más adelante unos investigadores (A. Pieters y R. M. Graves) (1994) de la escuela de minas en colorado demuestran desde un punto de vista experimental que dichas curvas no experimentan un comportamiento lineal sino, contrario a los que todos creen, generan curvas no lineales.

En este trabajo se demostrara analíticamente que las curvas de permeabilidades relativas en fracturas experimentan un comportamiento no lineal y también se propondrán ecuaciones para calcularlas.

Para llegar a dichas ecuaciones se utilizarán los conceptos de la ley de Newton de la viscosidad, los balances de cantidad de movimiento y las ecuaciones de variación para sistemas isotérmicos. Por esta razón en la tesis se iniciará con algunas generalidades de los yacimientos fracturados (capítulo 1), se darán las bases para utilizar las ecuaciones de variación para sistemas isotérmicos y para realizar balances de cantidad de movimientos (capítulos 2, 3 y 4), se mostrará el análisis experimental de A. Pieters y R. M. Graves (1994) (capítulo 5) y por último se deducirá las ecuaciones para calcular las curvas de permeabilidades relativas (agua-aceite) en las fracturas de los yacimientos naturalmente fracturados (capítulo 6).

1. GENERALIDADES DE LOS YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS

Muchos de los yacimientos naturalmente fracturados que producen hoy día, han sido descubiertos accidentalmente, ya que lo que se intentaba encontrar era otro tipo de yacimientos. Hace algunos años atrás, McNaughton y Garb (1975) estimaron que el recobro último producido por los yacimientos fracturados sobrepasarían los 40 billones de barriles de petróleo (STBO). Aguilera (2003) coloca en tela de juicio esta cantidad. Según el existe un volumen de hidrocarburo aun mayor que ha sido dejado por declarar un campo no-descubierto, o por pozos taponados o abandonados debido a que pozos verticales no interceptan las fracturas verticales. Las definiciones presentadas en este capítulo fueron basadas del libro de Aguilera (2003).

1.1 ¿QUE ES UNA FRACTURA NATURAL?

Una fractura natural es una discontinuidad microscópica planar que resulta de la acción de los esfuerzos que exceden el límite de ruptura de una roca. Otra definición dada por Nelson (1985) es la siguiente:

“Una fractura es una discontinuidad microscópica planar que ocurre naturalmente en la roca debido a la deformación o a la diagénesis física”

1.2 ¿QUÉ ES UN YACIMIENTO NATURALMENTE FRACTURADO?

Un yacimiento naturalmente fracturado es aquel que contiene fracturas creadas por la naturaleza. Estas fracturas naturales pueden tener efectos positivos o negativos en el transporte de fluidos. Las fracturas

completamente abiertas o parcialmente mineralizadas podrían tener, por ejemplo, un efecto positivo en el flujo de petróleo pero a la vez negativo en cuanto al flujo de gas o agua se refiere, ya que podrían ocasionar problemas de conificación. Por otro lado, las fracturas naturales totalmente mineralizadas podrían crear barreras de permeabilidad para cualquier tipo de fluido, que conllevarían a recobros antieconómicos o marginales.

Según Aguilera (2003) todos los yacimientos contienen cierto grado de fracturas naturales. Sin embargo, desde un punto de vista geológico y de ingeniería, se considera un yacimiento naturalmente fracturado aquellos en los cuales las fracturas tienen un efecto, ya sea positivo o negativo, sobre el flujo de fluidos como lo sugería Nelson (1985).

Los yacimientos naturalmente fracturados pueden ser encontrados en cualquier tipo de litología (areniscas, carbonatos, lutitas, rocas de basamento, carbón, etc.), sin embargo, estos yacimientos son más frecuentes y atractivos en carbonatos.

1.3 POROSIDAD

La porosidad en yacimientos está dada en la mayoría de los casos por los espacios intergranulares entre las partículas sedimentarias. Los procesos subsecuentes a la sedimentación (recristalización, solución, fracturamiento, etc.), pueden modificar sustancialmente la proporción y distribución de los espacios vacíos. En ingeniería de yacimientos sólo es de interés la porosidad interconectada o efectiva, ya que ésta es la única capaz de contribuir al flujo. Los espacios porosos inicialmente presentes y posteriormente sellados por distintos efectos diagenéticos no son de interés con respecto al flujo de fluidos. En términos generales, la porosidad puede ser clasificada como primaria y secundaria.

1.3.1 Porosidad Primaria. Se refiere al espacio vacío que queda después del proceso de sedimentación de los gránulos en la matriz, por lo cual es también llamada porosidad de matriz. El valor de la porosidad primaria depende de varios factores, entre los cuales se incluyen: arreglo y distribución de los granos, cementación y grado de interconexión entre espacios vacíos.

1.3.2 Porosidad Secundaria. Es también conocida como porosidad inducida, y es el resultado de procesos geológicos después de la depositación de la roca sedimentaria. En general, la porosidad secundaria es debido a la solución, recristalización, dolomitización y fracturamiento y no tiene una relación directa de la forma de las partículas sedimentarias. En algunos casos, la contribución de la porosidad secundaria a la porosidad total del sistema es pequeña, pero puede conllevar a incrementos significativos de permeabilidad.

La determinación de la porosidad de fractura es una tarea difícil aun cuando se hace a partir de corazones, debido a que estos usualmente se fracturan a lo largo de los planos de las fracturas naturales. Sin embargo, es importante cuantificar la porosidad de fractura con la mayor precisión posible, ya que los sistemas de fracturas proporcionan una capacidad de almacenamiento importante en algunos yacimientos.

El ancho de las fracturas es generalmente bastante pequeño, variando desde el espesor de una hoja de papel hasta seis milímetros y un poco mas.

Se han observado corazones con fracturas parcialmente mineralizadas las cuales muestran espesores de más de una pulgada. La mineralización parcial puede permitir un flujo significativo de fluidos a la vez que actúa como

un agente sostenedor que ayuda a mantener las fracturas abiertas a medida que el yacimiento es depletado.

Un yacimiento que tiene porosidad primaria y secundaria es denominado sistema de doble porosidad. Un yacimiento fracturado es un sistema de doble porosidad consistente en una matriz primaria intergranular entrelazada por una red de canales que componen el sistema de fracturas. Si el sistema de fracturas es extenso y tiene un área de contacto considerable con la matriz, los fluidos son fácilmente transferidos del sistema de fractura hacia los pozos productores con una pequeña pérdida de presión. Por esta razón, un yacimiento fracturado es capaz de desarrollar mejores condiciones de flujo que un yacimiento convencional con porosidad de matriz similar.

1.4 ¿COMO SE ORIGINAN LAS FRACTURAS?

La generación de fracturas es atribuida a diferentes causas entre las que se mencionan:

- El Diastrofismo, como en el caso de plegamientos y fallamientos. El fallamiento tiende a generar grietas a lo largo de la línea de falla, produciendo una zona de dilatación. El efecto de dilatación es el responsable en gran parte de la migración y la acumulación de petróleo en yacimientos fracturados.
- La Erosión profunda debido a la sobrecarga que permite que las zonas superiores se expandan, se levanten y se fracturen a través de planos de debilidad.

- Disminución del volumen de roca, como en el caso de pérdida de agua en lutitas, enfriamiento de rocas ígneas y desecación de rocas sedimentarias.
- Liberación de la presión de fluido, cuando la presión de poro de la formación se aproxima a la presión litostática.
- Tectónica de placas.
- Orogénesis de la cordillera.
- Compactación debido a esfuerzos in situ.

1.5 CAPACIDADES DE ALMACENAMIENTO Y DE FLUJO

En el desarrollo de yacimientos naturalmente fracturados se han cometido numerosas fallas económicas. Las altas tasas iniciales de petróleo han hecho que los ingenieros en muchos casos sobrestimen los pronósticos de producción. Los ingenieros de yacimientos por lo general asumen lo siguiente: (1) las fracturas tienen una capacidad de almacenamiento insignificante y solo los canales de alta permeabilidad contribuyen al flujo de fluidos; y (2) la matriz tiene una capacidad de almacenamiento importante, pero una permeabilidad muy pequeña.

La primera asunción ha conllevado a muchos fracasos en el desarrollo de yacimientos naturalmente fracturados. De hecho, muchos yacimientos que producen a altas tasas iniciales, declinan drásticamente después de un corto periodo de tiempo. Esto ocurre debido a que el petróleo producible ha sido almacenado en el sistema de fracturas. En consecuencia, es importante

estimar el petróleo original in situ con una exactitud razonable dentro del sistema de fracturas.

La segunda asunción debe ser considerada cuidadosamente. Si la permeabilidad de la matriz es muy baja, entonces el petróleo que fluye desde la matriz hacia las fracturas podría ser muy bajo y solamente el petróleo contenido originalmente en las fracturas será producido en un periodo de tiempo razonable. Si la matriz tiene una permeabilidad considerable, entonces la capacidad de almacenamiento de la matriz será de gran importancia.

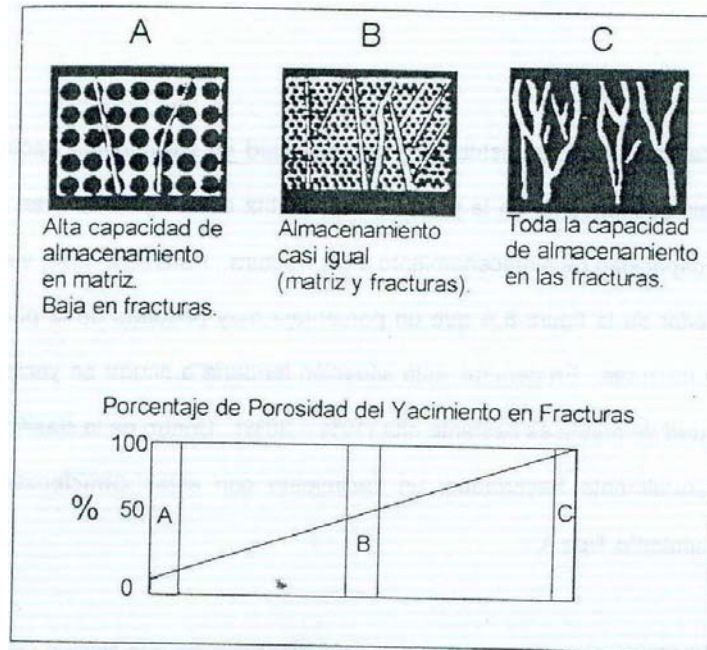
Otros parámetros que juegan un papel importante en cuanto rápido el petróleo se mueve desde la matriz a las fracturas incluyen porosidad de matriz, compresibilidad total de la espaciación entre fracturas y viscosidad del petróleo.

Debido a su baja matriz, viscosidad, el movimiento del gas desde la matriz hacia las fracturas es más rápido que el movimiento del petróleo.

Es importante observar que la capacidad de almacenamiento de los yacimientos naturalmente fracturados varía ampliamente, dependiendo del grado de fracturamiento de la formación y el valor de la porosidad primaria. Entre más grande sea el valor de la porosidad primaria, más grande es la posibilidad de éxito en yacimientos naturalmente fracturados.

La figura 1 muestra esquemas de distribución de porosidad en yacimientos fracturados. La capacidad de almacenamiento en la porosidad de matriz de la figura 1.A es grande comparada con la capacidad de almacenamiento en la fractura. Para este caso, se puede ver en la parte inferior de la figura 1.A que un porcentaje muy pequeño de la porosidad total es atribuida a fracturas.

Figura 1. Distribución de Porosidad en yacimientos fracturados (tomado de Aguilera 2003)



En general, esta situación tendería a ocurrir en yacimientos en donde la porosidad de matriz es bastante alta (10% - 30%). Dentro de la clasificación de yacimientos naturalmente fracturados, un yacimiento con estas características es considerado un yacimiento Tipo A.

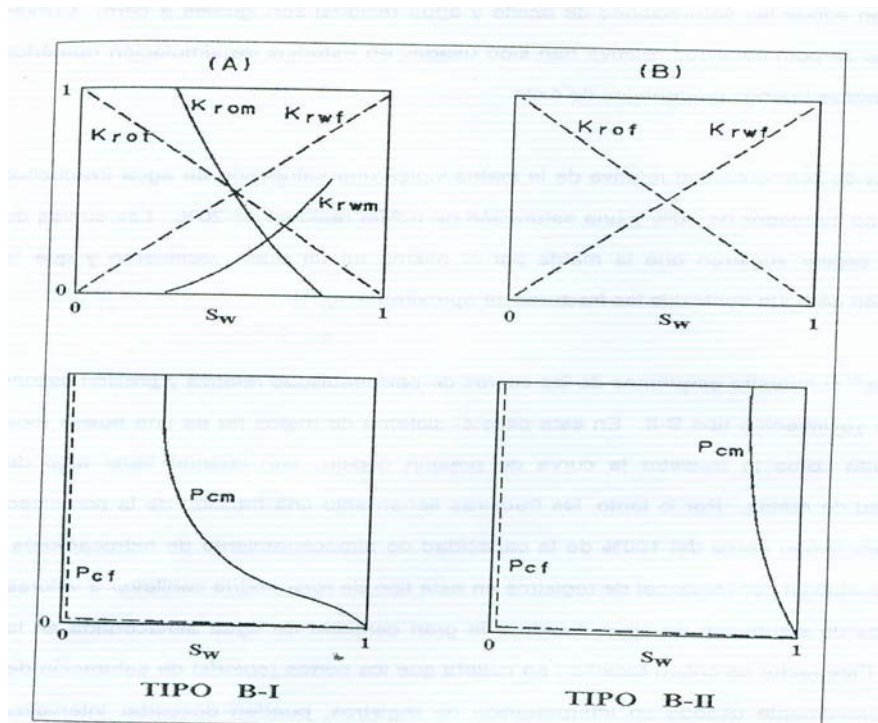
Los yacimientos Tipo A pueden ser considerados equivalentes a los que Nelson (1985) ha llamado "yacimientos con asistencia de permeabilidad de fractura", es decir, yacimientos en los que las fracturas contribuyen a la permeabilidad de un yacimiento ya productor.

La figura 1.B muestra el esquema de una roca con una capacidad de almacenamiento similar en la porosidad de fractura y en la de matriz. En este caso, la matriz tiene porosidades mas bajas y las fracturas proporcionan la permeabilidad indispensable.

Los yacimientos Tipo B han sido subdivididos en B-I y B-II basados en las características del sistema matriz. Si la matriz tiene porosidad baja, pero efectiva, si muestra permeabilidad al aceite (o al gas), si las presiones capilares indican una buena geometría de poro, entonces la matriz contribuirá efectivamente a la capacidad de almacenamiento del yacimiento.

El Tipo B-I es una combinación ideal de porosidades y permeabilidades las cuales permiten una muy buena producción de hidrocarburos. La figura 2.A muestra las curvas típicas de presión capilar y permeabilidad relativa para este tipo de yacimientos.

Figura 2. Curvas Típicas de Permeabilidad Relativa y Presión Capilar Para Yacimientos naturalmente fracturados tipo BI y BII. (Tomado de Aguilera 2003)



Las curvas de permeabilidad relativa para las fracturas son mostradas como líneas rectas con pendiente de 45° . Es decir, que el sistema de fracturas es equivalente a un arreglo de tubos, en donde las saturaciones de aceite y agua residual son iguales a cero. Curvas similares de permeabilidad relativa han sido usadas en estudios de simulación numérica obteniéndose buenos porcentajes de éxito.

La curva de permeabilidad relativa de la matriz indica una saturación de agua irreducible (S_{wmi}) de alrededor de 30% y una saturación de aceite residual de 20%. Las curvas de presión capilar sugieren que la matriz por si misma es un buen yacimiento y que la saturación de agua dentro de las fracturas se aproxima a 100%.

La figura 2.B muestra esquemas de las curvas de permeabilidad relativa y presión capilar para los yacimientos tipo B-II. En este caso el sistema de matriz no es una buena roca yacimiento como lo muestra la curva de presión capilar, aun cuando tiene algo de porosidad de matriz. Por lo tanto, las fracturas tienen solo una fracción de la porosidad total, pero tienen cerca del 100% de la capacidad de almacenamiento de hidrocarburos. La interpretación convencional de registros en este tipo de roca podría conllevar a valores muy altos de saturación de agua debido a la gran cantidad de agua almacenada en la matriz. Este factor es crítico teniendo en cuenta que los cortes (cutoffs) de saturación de agua normalmente usados en interpretación de registros, pueden descartar intervalos fracturados potencialmente productores.

La figura 1.C muestra el esquema de una roca en donde la porosidad de matriz es cero y toda la capacidad de almacenamiento es debida a las fracturas. En este caso las fracturas proporcionan la porosidad y permeabilidad necesarias. Los yacimientos de este tipo se caracterizan por

tasas de producción inicialmente altas que declinan a límites antieconómicos en un corto período de tiempo.

En resumen, la experiencia en yacimientos naturalmente fracturados alrededor del mundo reúne suficiente evidencia para pensar que no siempre es correcto asumir que la capacidad de almacenamiento en sistemas fracturados es despreciable cuando se compara con la capacidad de almacenamiento de la matriz.

1.6. MORFOLOGIA DE LAS FRACTURAS

1.6.1 Fracturas Abiertas. Estas no son cementadas y no contienen ningún tipo de mineralización secundaria. El ancho de fractura es muy pequeño, probablemente del tamaño de un poro, pero incrementa significativamente la permeabilidad en la dirección paralela a la fractura, pero por otro lado tiene un efecto despreciable en la permeabilidad en sentido perpendicular a la fractura. Por lo general la porosidad de las fracturas abiertas es muy pequeña aunque puede haber excepciones.

1.6.2 Fracturas Deformadas. Aquí se incluyen fracturas estriadas y alisadas. Las estrías son formadas por acumulaciones de material finamente desgastado resultante de la granulación o movimientos de deslizamiento. Las fracturas alisadas son el resultado del deslizamiento friccional a lo largo de una fractura o un plano de falla.

Estas superficies estriadas o pulidas pueden incrementar la permeabilidad en dirección paralela a la fractura pero disminuir drásticamente la permeabilidad perpendicularmente a esta.

1.6.3 Fracturas Mineralizadas. Estas fracturas son cementadas por mineralización secundaria. Los materiales de cementación más comunes son el cuarzo y la calcita. Este tipo de fracturas pueden actuar como barreras de permeabilidad. Por otro lado, la mineralización secundaria parcial puede tener efectos positivos en el recobro de hidrocarburos porque puede actuar como un agente sostenedor natural que elimina o reduce el cierre de fracturas a medida que el yacimiento es depletado.

1.6.4 Fracturas Vugulares. Estas fracturas pueden proporcionar porosidades y permeabilidades significativas. Debido a su forma relativamente redondeada, estas fracturas probablemente no se cierran a medida que el yacimiento es depletado. Las fracturas vugulares son el resultado de la filtración de aguas ácidas a través de las fracturas, las cuales pueden conllevar al desarrollo de yacimientos muy productores.

1.7 PERMEABILIDAD

La permeabilidad es una propiedad del medio poroso y es una medida de la capacidad del medio para transmitir fluidos. Los yacimientos pueden tener permeabilidad primaria o secundaria. La permeabilidad primaria se refiere a la permeabilidad de la matriz mientras que la permeabilidad secundaria esta asociada a las fracturas o a las soluciones vugulares.

1.7.1 Permeabilidad de la matriz. La permeabilidad de la matriz puede ser evaluada con el uso de la ecuación de Darcy:

$$v = -\frac{k}{\mu} \times \frac{dp}{dl} \quad (1.1)$$

Donde: v = velocidad de flujo aparente, cm/seg

μ = viscosidad del fluido, cP

dp/dl = gradiente potencial en la dirección del flujo, atm/cm

k = permeabilidad de la roca, darcy

La ley de Darcy se aplica bajo las siguientes condiciones; (1) Flujo en estado estacionario, (2) Flujo horizontal y lineal, (3) Flujo laminar, (4) condiciones isotérmicas, (5) viscosidad constante, y (6) el espacio poroso 100 % saturado con fluido en movimiento.

Para el caso de un flujo de fluidos incompresible y lineal, la permeabilidad puede ser calculada de la ecuación:

$$k = v \frac{\mu L}{\Delta p} = \frac{q \mu L}{A \Delta p} \quad (1.2)$$

donde: q = flujo, cm^3/seg

A = área, cm^2

Como la unidad Darcy es demasiado grande para la mayoría de los casos, la permeabilidad se expresa generalmente en milidarcy (md).

La ley de Darcy en unidades de campo se expresa como:

$$q = \frac{0.001127 k A \Delta p}{\mu L} \quad (1.3)$$

1.7.2 Permeabilidad de la fractura. La presencia de fracturas abiertas no cementadas, y no selladas, incrementa en sobremanera la permeabilidad de la roca. Es posible estimar la permeabilidad de la fractura y el flujo a través de la misma por medio del siguiente procedimiento.

Asuma que una fractura tiene un ancho igual a w_0 , una longitud L , y una extensión lateral de la fractura igual a h . Para este sistema el área de sección transversal expuesta al flujo es w_0h . La fuerza de conducción del fluido en la fractura es la presión diferencial $(p_1 - p_2)$ la cual actúa sobre el área wh , o $(p_1 - p_2)wh$ dinas. La fuerza viscosa está dada por:

$$F = \mu A \frac{dv}{dw} \quad (1.4)$$

Donde A es el área igual a hL . Si el líquido no está acelerado, la fuerza conductora más la fuerza viscosa debe ser igual a cero, o:

$$(p_1 - p_2)wh + \mu hL \frac{dv}{dw} = 0 \quad (1.5)$$

Separando variables e integrando,

$$(p_1 - p_2) \int w dw = \mu L \int dv \quad (1.6)$$

Y,

$$(p_1 - p_2) \frac{w^2}{2} = -\mu L v + C \quad (1.7)$$

La constante de integración puede ser igualada a $v = 0$ y $w = w_0/2$, o

$$(p_1 - p_2) \frac{(w_0/2)^2}{2} = C \quad (1.8)$$

Y,

$$(p_1 - p_2) \frac{w_o^2}{8} = C \quad (1.9)$$

Insertando la ecuación 1.9 en la ecuación 1.7 tenemos:

$$(p_1 - p_2) \frac{w^2}{2} = -\mu L v + (p_1 - p_2) \frac{w_o^2}{8} \quad (1.10)$$

Y,

$$(p_1 - p_2) \left(\frac{w^2}{2} - \frac{w_o^2}{8} \right) = -\mu L v \quad (1.11)$$

Consecuentemente,

$$\frac{(p_1 - p_2)}{\mu L} \left(\frac{w_o^2}{8} - \frac{w^2}{2} \right) = v \quad (1.12)$$

La rata de flujo (dq) a través de un elemento (dw) igual a vdA, donde el área (dA) esta dado por 2hdw. Consecuentemente,

$$q = \int_0^q dq = \int_0^{w_o} v dA \quad (1.13)$$

Y,

$$q = \int_0^{w_o} \frac{(p_1 - p_2)}{\mu L} \left(\frac{w_o^2}{8} - \frac{w^2}{2} \right) 2hdw \quad (1.14)$$

Integrando,

$$q = \frac{w_o A(p_1 - p_2)}{12\mu L} \quad (1.15)$$

La ecuación anterior puede ser combinada con la ecuación de Darcy para obtener una relación para la permeabilidad de la fractura:

$$k_f = \frac{w_o^2 A(p_1 - p_2)}{12\mu L} \times \frac{\mu L}{9.86 \times 10^{-9} A(p_1 - p_2)} \quad (1.16)$$

Y,

$$k_f = 8.35 \times 10^6 w_o^2 \text{ darcys} \quad (1.17)$$

Donde w_o esta en centímetros. Si el ancho de la fractura (w_o) esta en pulgadas en vez de en centímetros, la permeabilidad esta dada con la siguiente expresión:

$$k_f = 54 \times 10^6 w_o^2 \text{ darcys} \quad (1.18)$$

2. VISCOSIDAD Y MECANISMO DEL TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Esta segunda parte de esta tesis trata del flujo de fluidos viscosos. La propiedad física que caracteriza la resistencia al flujo de los fluidos sencillos es la viscosidad. Cualquiera que haya adquirido aceite lubricante de automóvil sabe que unos aceites son más viscosos que otros, y que, además, la viscosidad varía con la temperatura. Aquí se estudian las viscosidades de gases y líquidos desde un punto de vista cuantitativo. Esta información será necesaria en el capítulo 3, para la solución de problemas de flujo viscoso. Las definiciones y modelos estuvieron basados en Bird 1993.

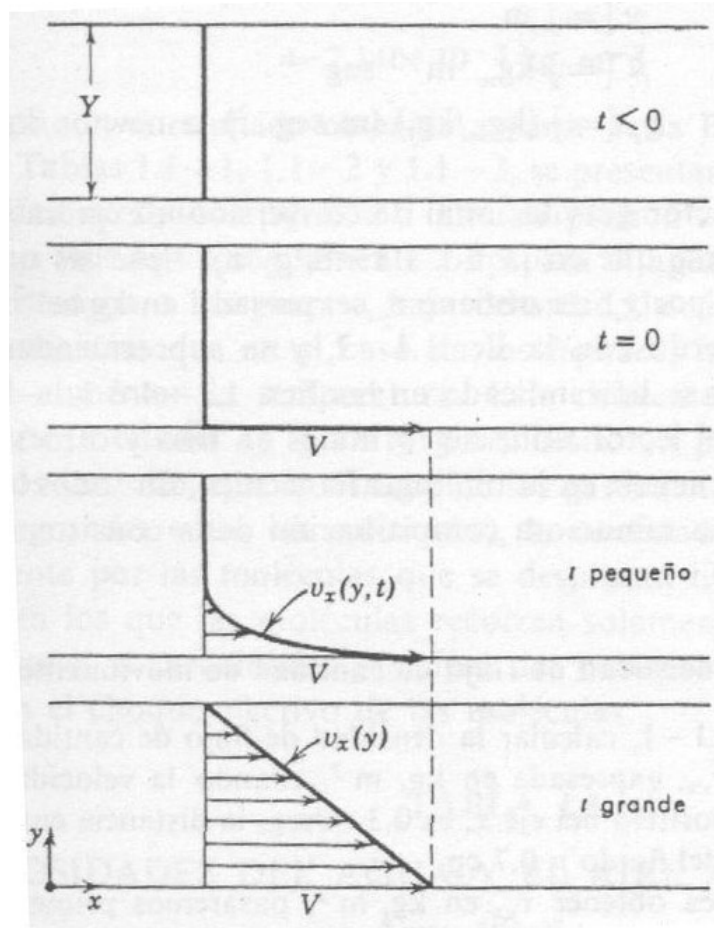
2.1 LEY DE NEWTON DE LA VISCOSIDAD

Consideremos un fluido (líquido o gas) contenido entre dos grandes láminas planas y paralelas, de área, A , separadas entre sí por una distancia muy pequeña Y (vease figura 3). Supongamos que el sistema está inicialmente en reposo, pero que al cabo del tiempo $t = 0$, la lámina inferior se pone en movimiento en la dirección del eje x , con una velocidad constante V . A medida que transcurre el tiempo el fluido gana cantidad de movimiento, y, finalmente se establece el perfil de velocidad en régimen estacionario, que se indica en la figura 3. Una vez alcanzado dicho estado estacionario de movimiento, es preciso aplicar una fuerza constante F para conservar el movimiento de la lámina inferior. Esta fuerza viene dada por la siguiente expresión (suponiendo que el flujo es laminar):

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{V}{Y} \quad (2.0)$$

Es decir, que la fuerza por unidad de área es proporcional a la disminución de la velocidad con la distancia Y . la constante de proporcionalidad μ se denomina viscosidad del fluido.

Figura 3. Formación del perfil de velocidad en estado estacionario para un fluido contenido entre dos láminas. (Tomado de Bird 1993).



Para la posterior utilización de la ecuación 2.0 es conveniente expresarla en una forma mas explicita. El esfuerzo cortante que se ejerce en la dirección x sobre la superficie de un fluido, situada a una distancia constante y , por el fluido existente en la región donde y es menor, se designa por τ_{yx} , y el componente x del vector de velocidad del fluido, por v_x . Téngase en cuenta

que v_x no es igual a $\partial v / \partial x$. De acuerdo con estos símbolos, la ecuación 2.0 queda de la siguiente forma

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}. \quad (2.1)$$

Es decir, que la fuerza de cizalla por unidad de área es proporcional al gradiente negativo de la velocidad local. Esta es la ley de Newton de la viscosidad, y los fluidos que la cumplen se denominan fluidos newtonianos. Todos los gases y la mayor parte de los líquidos sencillos, se comportan de acuerdo con la ecuación 2.1 los fluidos que no obedecen a esta ley sencilla (esencialmente pastas, suspensiones y polímeros de elevado peso molecular) se estudian en más adelante.

Resulta también conveniente interpretar la ecuación 2.1 en esta otra forma. En las inmediaciones de las superficies que se mueve, donde $y = 0$, el fluido adquiere una determinada cantidad de movimiento en la dirección del eje x . Este fluido comunica, a su vez, parte de su cantidad de movimiento a la <<capa>> adyacente de líquido, dando lugar a que se mantenga en la dirección x . Por lo tanto tiene lugar una transmisión de cantidad de movimientos a través del fluido en la dirección y , y, por consiguiente, τ_{yx} puede interpretarse también como la densidad de flujo viscoso de cantidad de movimiento x en la dirección y . Esta interpretación está en íntima relación con la naturaleza de los procesos de transporte de cantidad de movimiento, y se corresponde con el tratamiento que se da más adelante para el transporte de materia y energía. Por otra parte, la densidad de flujo de cantidad de movimiento resulta más conveniente para considerar el signo de τ_{yx} .

De acuerdo con la ecuación 2.1, se deduce que la densidad de flujo viscoso de cantidad de movimiento sigue la dirección del gradiente negativo de la velocidad; es decir, que sigue la dirección de velocidad decreciente. En otras

palabras, la cantidad de moviendo va <<cuesta abajo>>, en el sentido de que desciende de una región de velocidad alta a otra de baja velocidad, de la misma forma que un trineo se desliza desde un lugar elevado a otro mas bajo, y el calor fluye de una zona caliente hacia otra mas fría. El gradiente de velocidad puede considerarse, por consiguiente, como una <<fuerza impulsora>> del transporte de cantidad de movimiento.

2.2 FLUIDOS NO-NEWTONIANOS

De acuerdo con la ley de la viscosidad de Newton $\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}$ (2.1), al representar gráficamente τ_{yx} frente a $-(dv_x/dy)$ para un fluido determinado, debe de obtenerse una línea recta que pasa por el origen de coordenadas, y cuya pendiente es la viscosidad del fluido a una cierta temperatura y presión (Fig 4). En efecto, la experiencia demuestra que para todos los gases y los líquidos homogéneos no polimerizados τ_{yx} es directamente proporcional a $-(dv_x/dy)$. Sin embargo, existen algunos materiales industrialmente importantes que no se comportan de acuerdo con la Ec. (2.1). Se conoce a estas sustancias con el nombre de fluidos *no-newtonianos*. El tema del flujo no-newtoniano constituye actualmente una parte de otra ciencia más amplia que es la **reología**, es decir, «la ciencia del flujo y la deformación», que estudia las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, plásticos, sustancias asfálticas y materiales cristalinos. Por lo tanto, el campo de la reología se extiende, desde la mecánica de fluidos newtonianos por una parte, hasta la elasticidad de Hooke por otra. La región comprendida entre ellas corresponde a la deformación y flujo de todos los tipos de materiales pastosos y suspensiones.

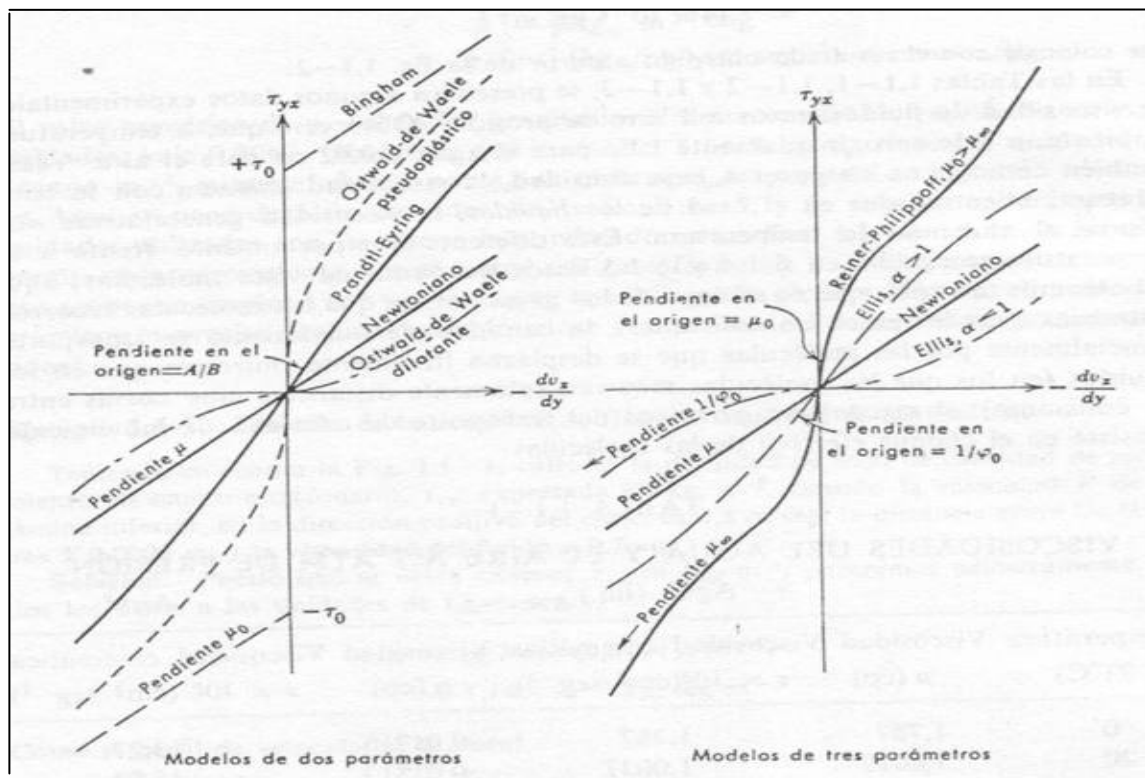
El comportamiento reológico, en estado estacionario, de la mayor parte de los fluidos newtonianos, puede establecerse mediante una forma generalizada de la Ec. (2.1):

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{dv_x}{dy} \quad (2.2)$$

en la que η puede expresarse a su vez en función de dv_x/dy o de τ_{yx} indistintamente.

En las regiones en que η disminuye al aumentar el gradiente de velocidad ($-dv_x/dy$), el comportamiento se denomina **pseudoplástico; y dilatante** en las que η aumenta con dicho gradiente. Si η resulta independiente del gradiente de velocidad, el fluido se comporta como newtoniano, y entonces $\eta = \mu$ (véase Ec. 2.1).

Figura 4. Resumen de modelos no-newtonianos en estado estacionario (con fines comparativos se indica también el modelo newtoniano) (Bird 1993).



Se han propuesto numerosas ecuaciones empíricas o «modelos» para expresar la relación que existe, en estado estacionario, entre τ_{yx} y dv_x/dy . A continuación se presenta un resumen de cinco modelos representativos. Todas las ecuaciones contienen parámetros empíricos positivos, cuyo valor numérico puede determinarse correlacionando los datos experimentales de τ_{yx} frente a dv_x/dy a temperatura y presión constantes.

2.2.1 Modelo de Bingham

$$\tau_{yx} = -\mu_0 \frac{dv_x}{dy} \pm \tau_0 \quad \text{si } |\tau_{yx}| > \tau_0 \quad (2.3a)$$

$$\frac{dv_x}{dy} = 0 \quad \text{si } |\tau_{yx}| < \tau_0 \quad (2.3b)$$

La Ec. 2.3a se utiliza con signo + si τ_{yx} es positivo, y con signo - si es negativo.

Toda sustancia que se comporta de acuerdo con este modelo de dos parámetros se denomina **plástico de Bingham**: permanece rígida mientras el esfuerzo cortante es menor de un determinado valor τ_0 , por encima del cual se comporta de forma semejante a un fluido newtoniano. Este modelo resulta suficientemente exacto para muchas pastas y suspensiones finas.

2.2.2 Modelo de Ostwaid-de Waele

$$\tau_{yx} = -m \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^{n-1} \frac{dv_x}{dy} \quad (2.4)$$

Esta ecuación de dos parámetros se conoce también con el nombre de ley **de la potencia**. Para $n = 1$ se transforma en la ley de la viscosidad de Newton, siendo $m = \mu$; por consiguiente, la desviación del valor de n con respecto a la unidad es una medida del grado de desviación del comportamiento newtoniano. Cuando n es menor que uno el comportamiento es pseudoplástico, mientras que para valores superiores a la unidad es dilatante.

2.2.3 Modelo de Eyring

$$\tau_{yx} = A^* \operatorname{arcsenh} \left(-\frac{1}{B} \frac{dv_x}{dy} \right) \quad (2.5)$$

Este modelo de dos parámetros deriva de la teoría cinética de los líquidos, de Eyring. El modelo de Eyring predice el comportamiento pseudoplástico para valores finitos de τ_{yx} , y tiende asintóticamente a la ley de la viscosidad de Newton cuando τ_{yx} tiende hacia cero, siendo en este caso $\mu = A/B$.

2.2.4 Modelo de Ellis

$$-\frac{dv_x}{dy} = \left(\varphi_0 + \varphi_1 |\tau_{yx}|^{\alpha-1} \right) \tau_{yx} \quad (2.6)$$

Este modelo consta de tres parámetros positivos ajustables: φ_0 , φ_1 y α . Si se toma para α un valor mayor que la unidad, el modelo tiende hacia la ley de Newton para valores bajos de τ_{yx} , mientras que si se elige para α un valor menor que la unidad, la ley de Newton se establece para valores elevados de τ_{yx} . El modelo presenta una gran flexibilidad, y en él están comprendidas, como casos particulares, tanto la ley de Newton (para $\varphi_1 = 0$), como la ley de la potencia (para $\varphi_0 = 0$).

2.2.5 Modelo de Reiner-Philipkff

$$-\frac{dv_x}{dy} = \left[\frac{l}{\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \left(\frac{\tau_{yx}}{\tau_s}\right)^2}} \right] \tau_{yx} \quad (2.7)$$

Este modelo contiene también tres parámetros positivos ajustables: μ_0 , μ_∞ , y τ_s .

Teniendo en cuenta que frecuentemente se ha observado que el comportamiento newtoniano se presenta, tanto para valores muy bajos como muy elevados del gradiente de velocidad, la Ec. (2.7) ha sido planteada con el fin de que se transforme en estos dos casos límite en la ley de Newton de la viscosidad, haciéndose $\mu = \mu_0$ y $\mu = \mu_\infty$ respectivamente. La curva que resulta al representar gráficamente τ_{yx} frente a dv_x/dy muestra dos puntos de inflexión, que corresponden a valores de $\tau_{yx} = \pm \tau_s \sqrt{3\mu_0 / \mu_\infty}$.

Téngase presente que estas ecuaciones no son más que fórmulas empíricas de ajuste de curvas, y por consiguiente, es muy aventurado emplearlas fuera del intervalo de los datos experimentales utilizados en su obtención.

Obsérvese, asimismo, que los parámetros de alguno de estos modelos son funciones de la temperatura, presión, composición, y, generalmente también, del intervalo de dv_x/dy para el que se ha ajustado la ecuación; por tanto, al dar los valores de los parámetros reológicos, es preciso especificar cuidadosamente las condiciones en que han sido determinados.

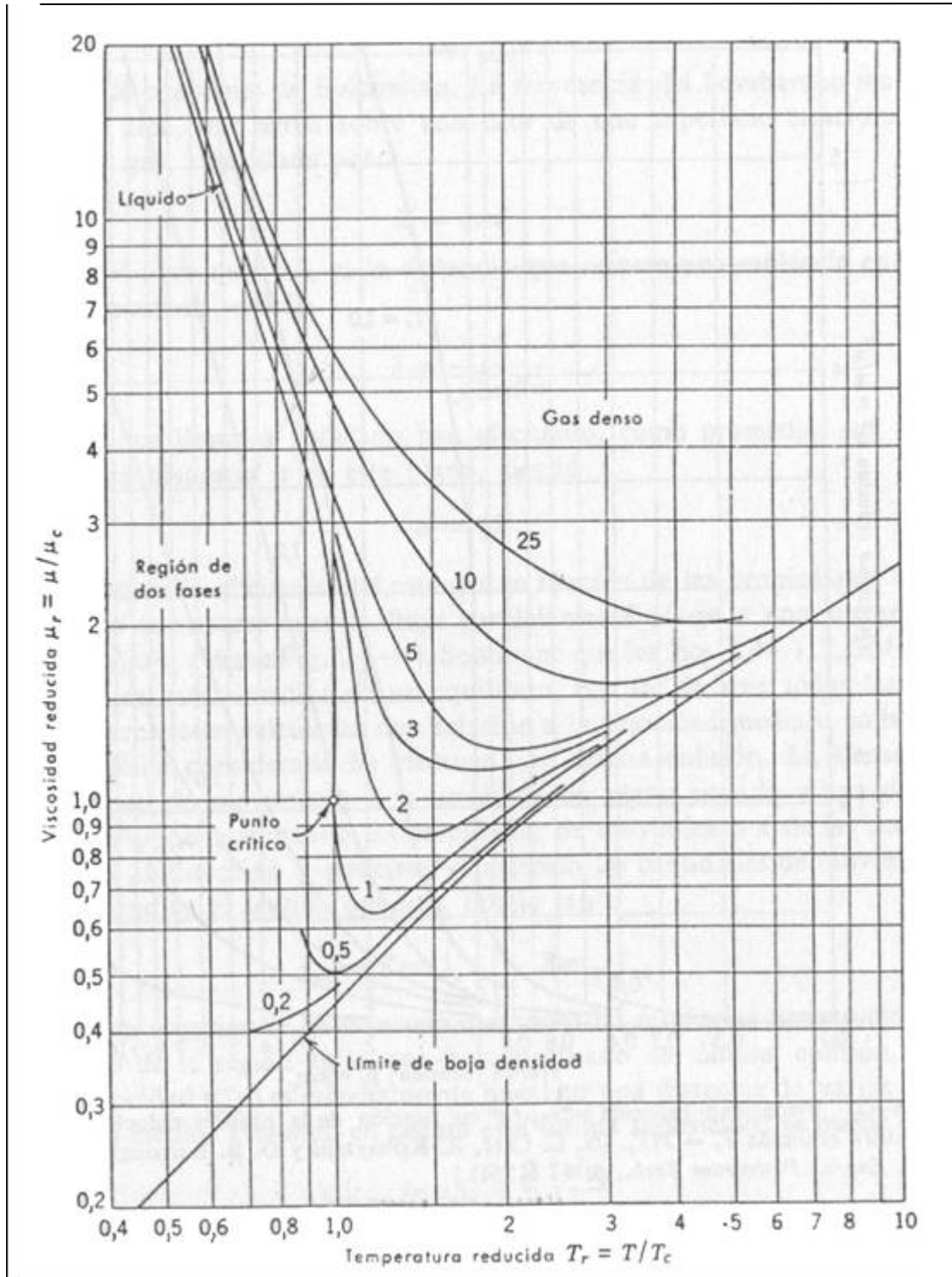
En estado no estacionario pueden existir otras formas de comportamiento no-newtoniano. Por ejemplo, los fluidos que presentan una *disminución* limitada de η (véase Ec. 2.2) con el tiempo, al aplicar repentinamente un esfuerzo cortante τ_{yx} se denominan ***tixotrópicos***, recibiendo el nombre de ***reopécticos*** los que dan lugar a un aumento de η con el tiempo en esas condiciones. Los fluidos que recobran parcialmente la forma original al cesar el esfuerzo cortante se denominan ***viscoelásticos***. El estudio cuantitativo de estos y otros tipos, de comportamientos no-newtonianos dependientes del tiempo, es uno de los importantes campos de la mecánica de fluidos que todavía está muy poco desarrollado.

2.3 INFLUENCIA DE LA PRESIÓN Y LA TEMPERATURA SOBRE LA VISCOSIDAD

Cuando se carece de datos experimentales y no se dispone de tiempo para obtenerlos, la viscosidad puede estimarse por métodos empíricos, utilizando otros datos de la sustancia en cuestión. Aquí se presentan dos correlaciones que permiten efectuar dicha estimación, y que a su vez proporcionan información sobre la variación de la viscosidad de los fluidos ordinarios con la temperatura y la presión. Estas correlaciones se basan en el análisis de un gran número de datos experimentales de diferentes fluidos, mediante la aplicación del principio de los estados correspondientes.

La Figura 5 es una representación gráfica de la viscosidad reducida $\mu_r = \mu/\mu_c$, que es la viscosidad a una determinada temperatura y presión, dividida por la viscosidad correspondiente al punto crítico. En la figura se ha representado la viscosidad reducida frente a la temperatura $T_r = T/T_c$ y la presión $p_r = p/p_c$ reducidas.

Figura 5. Viscosidad reducida $\mu_r = \mu/\mu_c$, en función de la temperatura reducida, para distintos valores de la presión reducida $p_r = p/p_c$. (Bird 1993)



Se observa que la viscosidad de un gas tiende hacia un valor límite definido (el límite de baja densidad en la Fig. 5), cuando la presión tiende hacia cero a una determinada temperatura; para la mayor parte de los gases este límite se alcanza ya prácticamente a la presión de 1 atm. La viscosidad de un gas a baja densidad aumenta con la temperatura, mientras que la de un líquido disminuye al aumentar ésta.

Generalmente no se dispone de valores experimentales de μ_c , pero pueden estimarse siguiendo uno de estos dos procedimientos: (i) si se conoce el valor de la viscosidad para una cierta temperatura y presión reducidas, a ser posible en las condiciones más próximas a las que se desean, puede calcularse μ_c mediante la expresión $\mu_c = \mu/\mu_r$; (ii) si sólo se conocen los valores críticos de p - V - T , μ_c puede estimarse a partir de las ecuaciones.

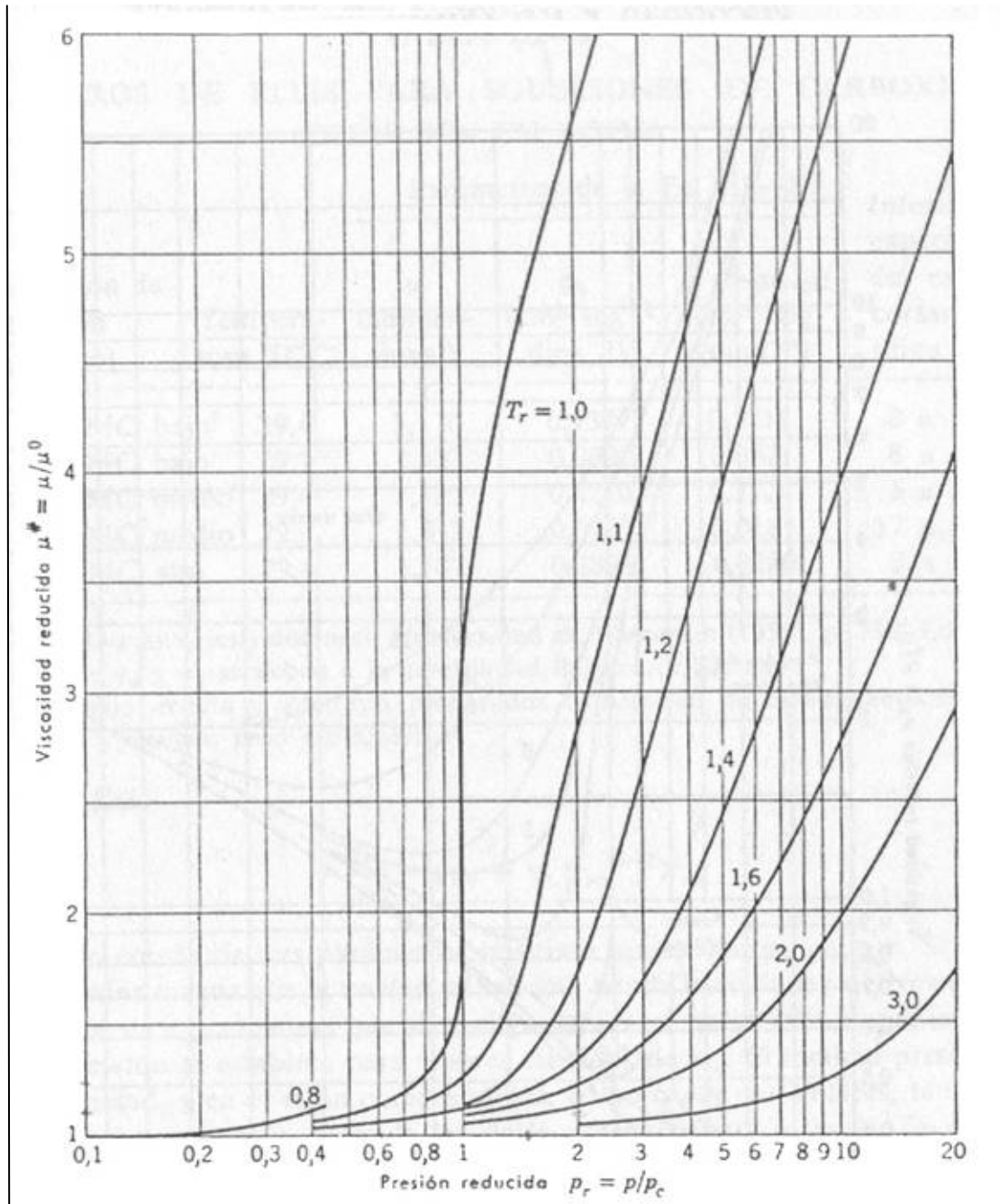
$$\mu_c = 61,6(MT_c)^{1/2}(\tilde{V}_c)^{-2/3} \quad \text{o} \quad \mu_c = 7,70M^{1/2}p_c^{2/3}T_c^{-1/6} \quad (2.8 - .9)$$

en las que μ_c está expresado en micropoises, p_c en atmósferas, T_c en °K y \tilde{V}_c en cc por gramo-mol. Bird (1993) ha publicado una tabla de viscosidades críticas, calculadas por el método (i).

En la Figura 6 se da una representación gráfica de $\mu^\# = \mu/\mu_0$ que es la viscosidad a una determinada temperatura y presión, dividida por la viscosidad a la misma temperatura y a la presión atmosférica. Esta variable se ha representado también en función de la temperatura y presión reducidas. A partir de las constantes críticas se pueden determinar p_r y T_r , y utilizar estos valores para obtener en la gráfica μ/μ_0 . El valor así obtenido se multiplica por μ_0 , que puede ser un dato experimental o un valor calculado a partir de la teoría de los gases diluidos. Los gráficos de las Figuras 5 y 6

concuerdan satisfactoriamente en el intervalo de p_r y T_r que es común a ambos.

Figura 6. Viscosidad reducida $\mu_r = \mu/\mu_c$ en función de la presión reducida $p_r = p/p_c$, y la temperatura reducida $T_r = T/T_c$. (Bird 1993)



La Figura 5 puede utilizarse para calcular de forma aproximada las viscosidades de las mezclas de los gases densos; sin embargo, en el caso de presiones medias es preferible emplear el método de la Ec. 2.31. Para calcular la viscosidad de una mezcla de n componentes mediante la Figura 5, se utilizan las propiedades pseudocríticas definidas empíricamente por las ecuaciones:

$$p'_c = \sum_{i=1}^n x_i p_{c_i} \quad T'_c = \sum_{i=1}^n x_i T_{c_i} \quad \mu'_c = \sum_{i=1}^n x_i \mu_{c_i} \quad (2.10-11-12)$$

Es decir, que, en vez de p_c , T_c y μ_c , se calculan en este caso p'_c , T'_c y μ'_c , procediendo luego de igual forma que si se tratase de un fluido puro. Este método no es muy exacto si las sustancias que forman la mezcla tienen distinta constitución química o sus propiedades críticas difieren notablemente. Mediante el gráfico de la Figura 6 puede seguirse un método análogo, calculando el valor de μ_0 de la mezcla a partir de la Ec. 2.31.

2.4 TEORÍA DE LA VISCOSIDAD DE LOS GASES A BAJA DENSIDAD

Las viscosidades de los gases a baja densidad se han estudiado ampliamente, tanto en el aspecto experimental como en el teórico. Con el fin de ilustrar el mecanismo del transporte de cantidad de movimiento, vamos a comenzar con una deducción simplificada de la viscosidad desde el punto de vista molecular.

Consideremos un gas puro constituido por moléculas esféricas, rígidas y que no se atraen, de diámetro d y masa m , con una concentración de n moléculas por unidad de volumen. Supongamos que n es suficientemente pequeña, de forma que la distancia media entre las moléculas sea mucho

mayor que su diámetro. Al alcanzarse el equilibrio en un gas en estas condiciones, la teoría cinética establece que las velocidades moleculares relativas a la velocidad v , del fluido, siguen direcciones al azar y tienen un valor medio \bar{u} , que viene dado por la expresión

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (2.13)$$

en la que k es la constante de Boltzmann. La frecuencia del bombardeo molecular por unidad de área, que actúa sobre una cara de una superficie estacionaria en contacto con el gas, viene dada por:

$$Z = \frac{1}{4} n \bar{u} \quad (2.14)$$

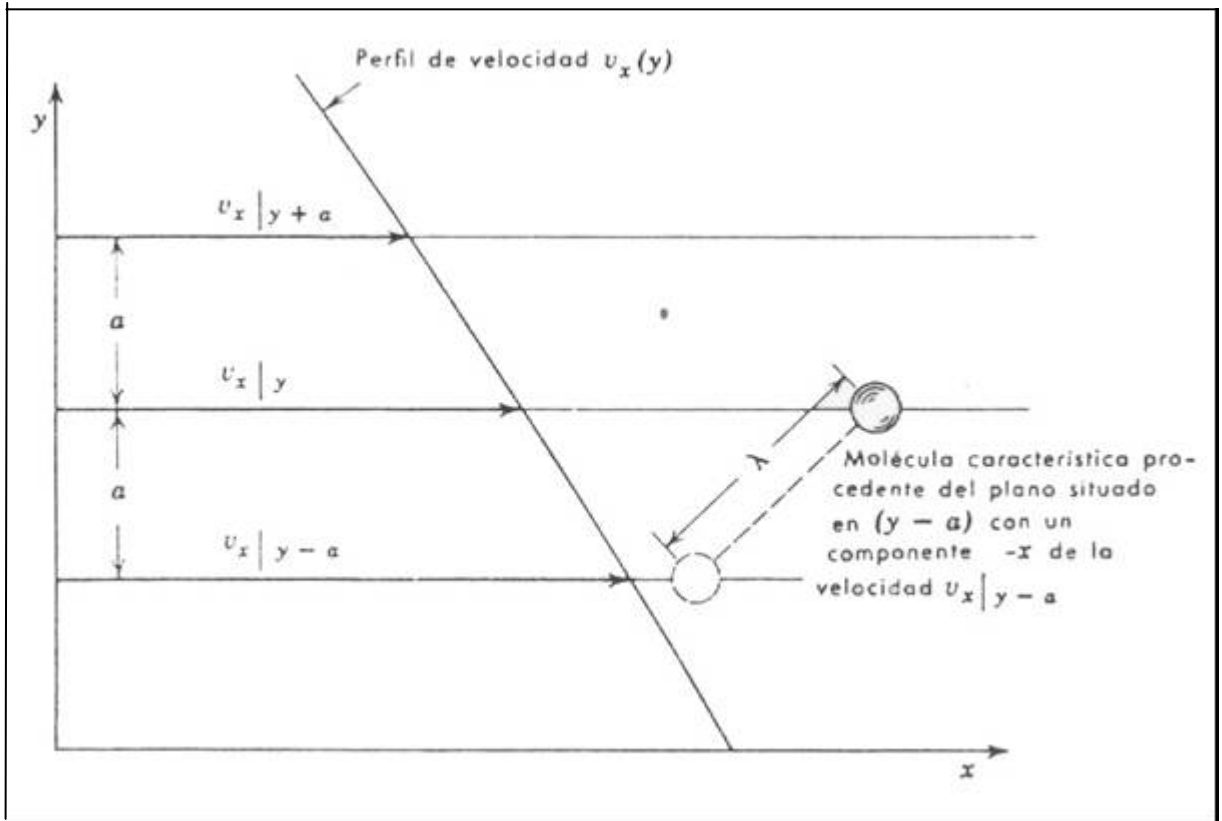
El recorrido libre medio λ , es la distancia que recorre una molécula entre dos colisiones consecutivas, siendo

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} \quad (2.15)$$

Las moléculas que llegan a un plano han efectuado, como promedio, sus últimas colisiones a una distancia a de este plano, siendo

$$a = \frac{2}{3} \lambda \quad (2.16)$$

Figura 7. Transporte molecular de cantidad de movimiento x desde el plano (y -a) al Plano y. Bird 1993.



Para determinar la viscosidad de este gas en función de las propiedades moleculares, veamos lo que ocurre cuando fluye paralelamente al eje x con un gradiente de velocidad dv_x/dy . (Véase Figura 7). Se supone que las Ecs. 2.13-2.14-2.15-2.16, siguen siendo válidas en esta situación de no-equilibrio, con tal de que todas las velocidades moleculares estén calculadas con relación a la velocidad media v , en la región donde la molécula considerada ha efectuado su última colisión. La densidad de flujo de cantidad de movimiento- x a través de un plano situado a una distancia constante y , se obtiene sumando las cantidades de movimiento- x de las moléculas que cruzan en la dirección y positiva, y restando las cantidades de movimiento- x de las que cruzan en el sentido opuesto. Por lo tanto

$$\tau_{xy} = Zmv_x|_{y-a} - Zmv_x|_{y+a} \quad (2.17)$$

Al expresar esta ecuación se ha supuesto que todas las moléculas tienen velocidades representativas de la región en la que han, efectuado su última colisión, y que el perfil de velocidad $v_x(y)$ es esencialmente lineal en una distancia de varias veces el recorrido libre medio. Teniendo en cuenta esta última suposición, se puede escribir,

$$\begin{aligned} v_x|_{y-a} &= v_x|_y - \frac{2}{3}\lambda \frac{dv_x}{dy} \\ v_x|_{y+a} &= v_x|_y + \frac{2}{3}\lambda \frac{dv_x}{dy} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Combinando las Ecs. 2.14, 2.17 y 2.18, tendremos

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{3}nm\bar{u}\lambda \frac{dv_x}{dy} \quad (2.19)$$

Esta ecuación corresponde a la ley de la viscosidad de Newton (Ec. 2.1), siendo la viscosidad

$$\mu = \frac{1}{3}nm\bar{u}\lambda = \frac{1}{3}\rho\bar{u}\lambda \quad (2.20)$$

La Ec. 2.20 fue obtenida por Maxwell en 1860 según Bird 1993.

Combinando las Ecs. 2.13, .15 y .20, se obtiene

$$\mu = \frac{2}{3\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{mkT}}{d^2} \quad (2.21)$$

que corresponde a la viscosidad de un gas a baja densidad, constituido por esferas rígidas. Obsérvese que es preciso conocer un valor experimental de

μ para determinar el diámetro de colisión d , a partir del cual se puede predecir μ en otras condiciones.

La deducción anterior proporciona una descripción cualitativamente correcta de la transferencia de cantidad de movimiento en un gas a baja densidad. La predicción de la Ec. 2.21 de que μ es independiente de la presión esta en buena concordancia con los resultados experimentales para presiones de hasta unas 10 atm (véanse Figs. 5 y 6). En cambio, la dependencia con respecto a la temperatura es menos satisfactoria; los datos experimentales de varios gases indican que μ varía más rápidamente de lo que corresponde a $T^{0.5}$, y que además, esta variación no puede representarse exactamente mediante una función potencial de T (véase Fig. 5). Para predecir con exactitud la variación de μ con la temperatura hay que sustituir el modelo de la esfera rígida por un campo de fuerzas moleculares más realista, y además, analizar más cuidadosamente la desviación respecto del comportamiento de equilibrio. A continuación se presentan los resultados de un análisis detallado del problema.

Antes de la primera Guerra Mundial, Chapman en Inglaterra y Enskog en Suecia (1951) desarrollaron, independientemente, una teoría cinética rigurosa de los gases monoatómicos a baja densidad. La teoría de Chapman-Enskog da expresiones para los coeficientes de transporte en función de la *energía potencial de interacción* entre dos moléculas del gas. La energía potencial φ está relacionada con la fuerza de interacción F mediante la ecuación $F = -d\varphi/dr$, en la que r es la distancia entre las moléculas. Si se conociese exactamente cómo varían las fuerzas entre las moléculas, en función de la distancia entre ellas, se podría sustituir en las ecuaciones de Chapman-Enskog y calcular los coeficientes de transporte.

La forma exacta de la función $\varphi(r)$ no se conoce, pero afortunadamente, se ha comprobado, mediante una investigación copiosa, que una función empírica muy satisfactoria de la energía potencial es el **potencial (6-12) de Lennard-Jones:**

$$\varphi(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] \quad (2.22)$$

donde σ es un diámetro característico de la molécula (el «diámetro de colisión») y ε una energía característica de interacción entre las moléculas (la energía de atracción máxima entre dos moléculas). Esta función se representa en la Fig. 8, que pone de manifiesto los caracteres típicos de las interacciones moleculares: débil atracción para grandes separaciones (prácticamente proporcional a r^{-6}), y fuerte repulsión para separaciones pequeñas (aproximadamente proporcional a r^{-12}). La Ec. 2.22 resulta muy satisfactoria para numerosas moléculas no polares. Los valores de σ y ε se conocen para muchas sustancias. Si no se conocen los valores de σ y ε , pueden calcularse a partir de las propiedades del fluido en el punto crítico (c), de la temperatura normal de ebullición del líquido (b), o del punto de fusión del sólido (m), mediante las siguientes ecuaciones empíricas

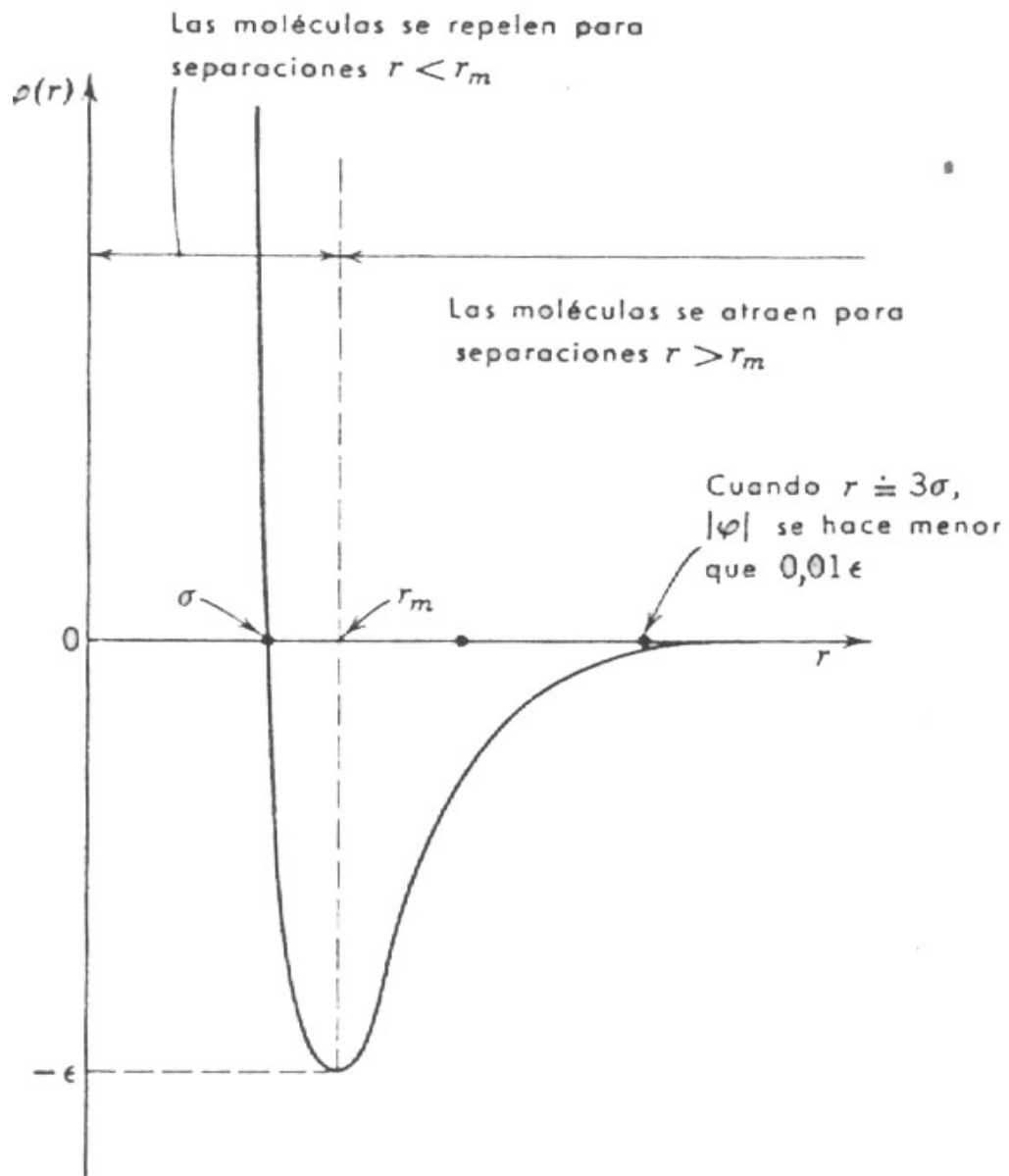
$$\frac{\varepsilon}{k} = 0,77T_c \quad \sigma = 0,841\tilde{V}_c^{1/3} \quad \text{o} \quad 2,44 \left(\frac{T_c}{p_c} \right)^{1/3} \quad (2.23-24-25)$$

$$\frac{\varepsilon}{k} = 1,15T_b \quad \sigma = 1,166\tilde{V}_{b,liq}^{1/3} \quad (2.26-27)$$

$$\frac{\varepsilon}{k} = 1,92T_b \quad \sigma = 1,222\tilde{V}_{m,sol}^{1/3} \quad (2.28-29)$$

en las que ϵ/k y T están en $^{\circ}\text{K}$, σ en unidades Angström, \tilde{V} en $\text{cm}^3 \text{g-mol}^{-1}$, y ρ_c en atm.

Figura 8. Función de energía potencial que describe la interacción de dos moléculas esféricas no polares. Bird 1993.



El coeficiente de viscosidad de un gas monoatómico puro de peso molecular M , a la temperatura T , viene dado en función de los parámetros σ y ε por la siguiente ecuación

$$\mu = 2,6693 * 10^{-5} \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_{\mu}} \quad (2.30)$$

en la que μ [=] g cm⁻¹seg⁻¹, T [=] °K, σ [=] Å, y Ω_{μ} es una función ligeramente decreciente del número adimensional $\kappa T/\varepsilon$, cuyos valores se dan en la Tabla **B-2** del libro de Bird 1993.

Aunque esta fórmula se ha deducido para los gases monoatómicos, se ha encontrado que resulta también muy adecuada para los gases poliatómicos. La variación de μ con la temperatura que predice esta ecuación concuerda satisfactoriamente con la línea de baja densidad en la gráfica de viscosidad reducida de la Fig. 3. Obsérvese de nuevo que la *viscosidad de los gases a baja densidad aumenta con la temperatura*, aproximadamente con la potencia 0,6 a 1,0 de dicha variable. Recuérdese también que para el intervalo de baja densidad, la viscosidad es independiente de la presión.

Si el gas estuviese constituido por esferas rígidas de diámetro σ (en vez de moléculas reales con fuerzas atractivas y repulsivas), Ω_{μ} valdría la unidad. Por lo tanto, la función Ω_{μ} , puede interpretarse como la desviación respecto del comportamiento de la esfera' rígida.

La teoría de Chapman-Enskog (1951) ha sido ampliada por Curtiss y Hirschfelder (1949), para incluir las mezclas gaseosas de varios componentes. En la mayor parte de los casos resulta muy adecuada la ecuación empírica de Wilke (1950):

$$\mu_{mezcl.} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \mu_i}{\sum_{j=1}^n x_j \Phi_{ij}} \quad (2.31)$$

en la que

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{M_i}{M_j} \right)^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{1/2} \left(\frac{M_j}{M_i} \right)^{1/4} \right]^2 \quad (2.32)$$

En estas ecuaciones, n es el número de especies químicas existentes en la mezcla; x_i y x_j son las fracciones molares de las especies i y j ; μ_i y μ_j son las viscosidades de i y j a la temperatura y presión del sistema; y M_i y M_j son los pesos moleculares correspondientes. Obsérvese que Φ_{ij} es un número adimensional, y que $\Phi_{ij} = 1$ cuando $i = j$. Se ha comprobado que la Ec. 2.31 reproduce los valores experimentales de $\mu_{mezcl.}$ con una desviación media del orden del 2 % . La variación de $\mu_{mezcl.}$ con la composición es extraordinariamente no lineal para algunas mezclas, especialmente las de gases ligeros y pesados.

En resumen, las Ecs. 2.30, .31, .32 son fórmulas útiles para el cálculo de viscosidades de gases no polares y mezclas gaseosas a baja densidad, a partir de valores tabulados de los parámetros de fuerza intermolecular σ y ε . Sin embargo, no pueden aplicarse con seguridad en el caso de gases constituidos por moléculas polares o muy alargadas, debido a que los campos de fuerza que existen entre estas moléculas dependen extraordinariamente del ángulo. Una modificación de la Ec. 2.22, teniendo en cuenta la influencia angular, ha dado buenos resultados para vapores polares tales como H_2O , NH_3 , CH_3OH , y $NOCl$. Por último, una limitación, generalmente sin importancia, consiste en que estas ecuaciones han de modificarse en el intervalo de temperatura inferior a $100^\circ K$ para tener en

cuenta los efectos cuánticos. Para gases más pesados que el H₂ y el He, los efectos cuánticos sobre la viscosidad pueden despreciarse, aun para temperaturas inferiores.

2.5 TEORÍA DE LA VISCOSIDAD DE LOS LÍQUIDOS

El conocimiento que tenemos de la viscosidad de los líquidos es fundamentalmente empírico, ya que la teoría cinética de los líquidos se ha desarrollado tan sólo de forma parcial. No obstante, tiene interés la teoría aproximada desarrollada por Eyring y colaboradores (1941), porque explica el mecanismo que tiene lugar, y permite estimar aproximadamente la viscosidad a partir de otras propiedades físicas.

En un líquido puro en reposo, las moléculas están constantemente en movimiento, pero debido al compacto empaquetamiento, el movimiento queda reducido prácticamente a la vibración de cada molécula dentro de una «jaula» formada por las moléculas más próximas. Esta jaula está representada por la barrera de energía potencial de altura $\Delta\tilde{G}_0 / \tilde{N}$, como se indica en la Figura 9. Eyring (1941) sugirió que un líquido en reposo sufre reordenaciones continuas, durante las cuales una molécula escapa desde una «jaula» a un «hueco» adyacente, tal como se indica en la Fig. 9, y que de esta forma, las moléculas se mueven en cada una de las direcciones de las coordenadas cartesianas, dando saltos de longitud a y frecuencia por molécula k , estando k dada por la ecuación de velocidad

$$k = \frac{\kappa T}{h} e^{-\Delta\tilde{G}_0 / RT} \quad (2.33)$$

En esta ecuación, κ y h son las constantes de Boltzmann y Planck, R es la constante molar de los gases, $\Delta\tilde{G}_0$ es la «energía libre de activación» molar del fluido estacionario.

Si el fluido circula en la dirección- x con un gradiente de velocidad dv_x/dy , la frecuencia de las reordenaciones moleculares aumenta. Este efecto puede explicarse teniendo en cuenta que la barrera de energía potencial se distorsiona a causa del esfuerzo aplicado τ_{xy} (véase Fig. 9), de forma que

$$-\Delta\tilde{G} = -\Delta\tilde{G}_0 \pm \left(\frac{a}{\delta}\right) \left(\frac{\tau_{xy}\tilde{V}}{2}\right) \quad (2.34)$$

donde \tilde{V} es el volumen de un mol de líquido y $\pm\left(\frac{a}{\delta}\right)\tau_{xy}\tilde{V}/2$ corresponde, aproximadamente, al trabajo comunicado a las moléculas que se mueven hacia la cima de las barreras de energía, según que se muevan a favor del esfuerzo cortante aplicado (signo más) o en contra de él (signo menos). Llamando k_f , a la frecuencia de los saltos hacia adelante y k_b a la de los saltos hacia atrás, a partir de las Ecs. 2.33 y 2.34 se encuentra que

$$k_f = \frac{\kappa T}{h} e^{-\Delta\tilde{G}_0/RT} e^{a\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT} \quad (2.35)$$

$$k_b = \frac{\kappa T}{h} e^{-\Delta\tilde{G}_0/RT} e^{-a\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT} \quad (2.36)$$

La velocidad neta con que las moléculas de la capa A (Fig. 9) se ponen delante de las de la capa B, es exactamente el camino recorrido en un salto

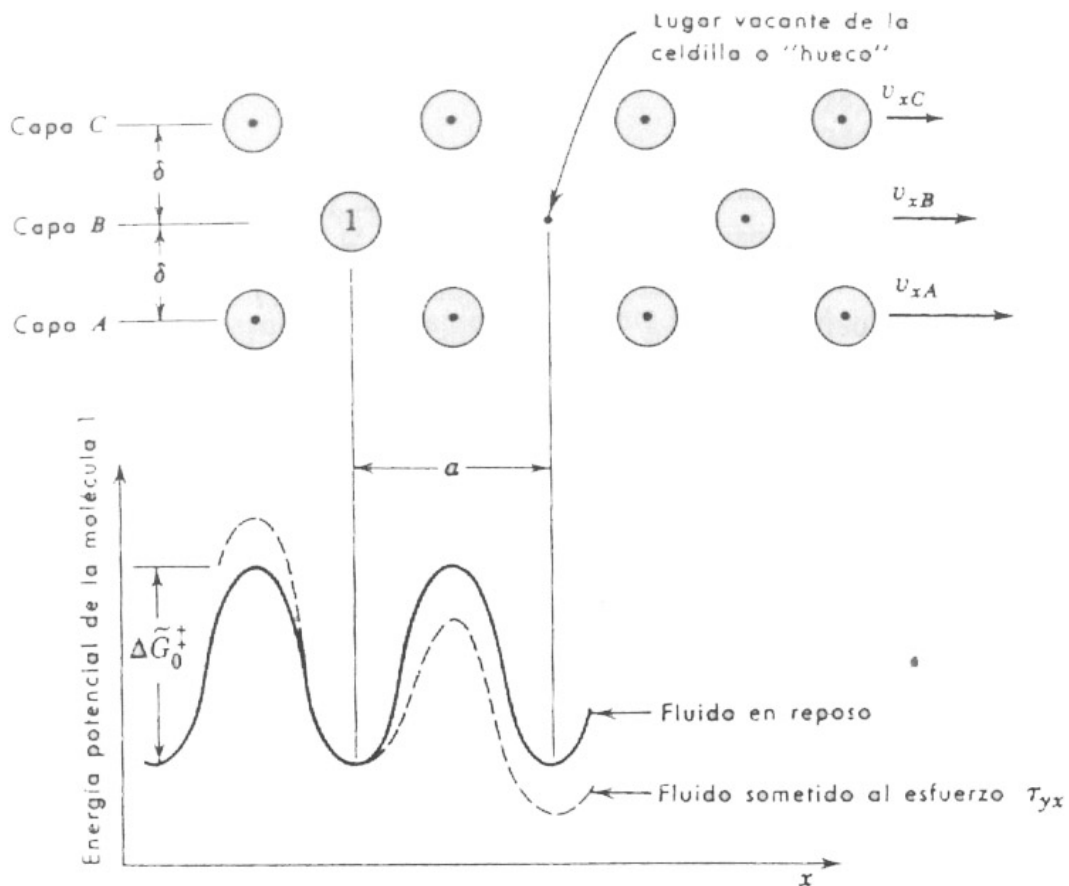
(a) multiplicado por la frecuencia neta de los saltos hacia adelante ($k_f - k_b$); por tanto

$$v_{xA} - v_{xB} = a(k_f - k_b) \quad (2.37)$$

Teniendo en cuenta que el perfil de velocidad es lineal en la pequeñísima distancia δ comprendida entre las capas A y B, se llega a

$$-\frac{dv_x}{dy} = \frac{a}{\delta}(k_f - k_b) \quad (2.38)$$

Figura 9. Ilustración de un proceso de escape en el flujo de un líquido. La molécula 1 tiene que atravesar un estrecho «pasadizo» para alcanzar el lugar vacante. (Bird 1993)



Combinando las Ecs. 2.35, .36 y .38, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} -\frac{dv_x}{dy} &= \frac{a}{\delta} \left(\frac{\kappa T}{h} e^{-\Delta\tilde{G}_0/RT} \right) \left(e^{a\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT} - e^{-a\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT} \right) \\ &= \frac{a}{\delta} \left(\frac{\kappa T}{h} e^{-\Delta\tilde{G}_0/RT} \right) \left(2\sinh \frac{a\tau_{yx}\tilde{V}}{2\delta RT} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Es interesante hacer notar que la Ec. 2.39 predice el flujo no-newtoniano de los líquidos en general; de hecho, esta ecuación tiene la misma forma general que el modelo de Eyring, correspondiente a la Ec. 2.5. Pero si $\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT$ es pequeño comparado con la unidad, la Ec. 2.39 concuerda con la ley de Newton de la viscosidad, siendo

$$\mu = \frac{\delta \tilde{N}h}{a \tilde{V}} e^{\Delta\tilde{G}_0/RT} \quad (2.40)$$

en la que \tilde{N} es el número de Avogadro. En la mayor parte de las aplicaciones se toma δ/a igual a la unidad, pero esta simplificación no supone una disminución de la exactitud, puesto que $\Delta\tilde{G}_0$ se ha determinado empíricamente para conseguir que la ecuación concuerde con los datos experimentales.

Se ha encontrado que las energías libres de activación $\Delta\tilde{G}_0$, determinadas ajustando la Ec. 2.39 para los datos experimentales de la viscosidad frente a la temperatura, son casi constantes para un fluido dado, y pueden correlacionarse fácilmente con la energía interna de vaporización a la temperatura normal de ebullición

$$\Delta\tilde{G}_0 = 0,408\Delta\tilde{U}_{vap} \quad (2.41)$$

Utilizando esta información empírica, y tomando $\delta/a = 1$ (lo que está de acuerdo con los cálculos que conducen a la Ec. 2.41), la Ec. 2.40 se transforma en,

$$\mu = \frac{\tilde{N}h}{\tilde{V}} e^{0,408\Delta\tilde{U}_{vap} / RT} \quad (2.42)$$

La energía de vaporización a la temperatura normal de ebullición puede calcularse aproximadamente mediante la regla de Trouton

$$\Delta\tilde{U}_{vap} = \Delta\tilde{H}_{vap} - RT = 9,4rT_b \quad (2.43)$$

Con esta última aproximación, la Ec. 2.42 queda

$$\mu = \frac{\tilde{N}h}{\tilde{V}} e^{3,8T_b/T} \quad (2.44)$$

Las Ecs. 2.42 y 2.44 indican que la viscosidad *disminuye* exponencialmente con la temperatura, lo que está de acuerdo con el comportamiento observado para la mayor parte de los líquidos. Estas dos ecuaciones no son muy exactas, dando frecuentemente errores de hasta un 30%; son útiles especialmente para una estimación aproximada, y sirven de guía para la interpolación y extrapolación de datos incompletos de viscosidad. No deberán utilizarse, sobre todo para moléculas lineales muy largas, como, por ejemplo, n-C₂₀H₄₂, que se desvían notablemente de la Ec. 2.41. Otras fórmulas empíricas pueden encontrarse en la obra de Partington (1949).

3. DISTRIBUCIONES DE VELOCIDAD EN FLUJO LAMINA

Ahora se estudiara como se pueden calcular los perfiles de velocidad laminar en algunos sistemas geoméricamente sencillos. Para estos cálculos se hace uso de la definición de viscosidad y del concepto de un balance de cantidad de movimiento. En realidad, para los problemas de ingeniería no se necesita generalmente un conocimiento completo de las distribuciones de velocidad. Por el contrario, es preciso conocer la velocidad máxima, la velocidad media, y el esfuerzo cortante en una superficie. Estas magnitudes pueden deducirse fácilmente una vez que se conocen los perfiles de velocidad.

En la primera sección se hacen algunas observaciones generales acerca de los balances diferenciales de cantidad de movimiento. En las secciones que siguen después se exponen con detalle algunos ejemplos clásicos de los tipos de flujo viscoso. Estos ejemplos deberán de entenderse perfectamente, puesto que con frecuencia nos referiremos a ellos en capítulos posteriores, El estudiante se dará cuenta de que estos sistemas son demasiado sencillos para tener de por sí interés en ingeniería. Si bien es cierto que representan casos muy idealizados, los resultados que se obtienen encuentran grandes aplicaciones en el estudio de numerosas cuestiones de mecánica de fluidos.

Los sistemas que se estudian en este capítulo están ordenados de forma que el lector entra a considerar gradualmente los distintos factores que intervienen en la solución de los tipos de flujo viscoso. El problema de la película descendente, que se estudia en 3.2, proporciona información sobre el papel que juegan las fuerzas de gravedad y sobre la utilización de las coordenadas cartesianas; se indica también cómo puede llegarse a la solución en el caso de que la viscosidad sea una función de la posición. En

3.3 se considera el flujo en un tubo circular, que ilustra sobre el papel de la presión y las fuerzas de gravedad, a la vez que se indica el uso de coordenadas cilíndricas; se expone asimismo cómo se tratan los problemas de flujo no-newtoniano. El flujo en un anillo cilíndrico, que se estudia en 3.4, pone de manifiesto cómo intervienen las condiciones límite en la obtención de la solución final. En 3.5 nos adentrarnos más en la cuestión de las condiciones límite, al discutir el flujo de dos fluidos adyacentes inmiscibles. Finalmente, en 3.6 se considera brevemente el flujo alrededor de una esfera, con el fin de presentar un problema en coordenadas esféricas e indicar al mismo tiempo como se opera con fuerzas normales y tangenciales.

Los métodos y problemas que aparecen en este capítulo se aplican solamente al flujo en estado estacionario. Por «estado estacionario» se entiende que las condiciones en cada uno de los puntos de la corriente no varían con el tiempo. Es decir, que una fotografía del sistema de flujo en el tiempo t sería exactamente igual a otra tomada algún tiempo después, $t + \Delta t$. La teoría aquí descrita fue basa en el libro de Bird 1993.

3.1 BALANCES ENVOLVENTES DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO: CONDICIONES LÍMITE

Los problemas que se pueden aplica en los capítulos 3.2 a 3.5 se estudian aplicando balances de cantidad de movimiento a una delgada «envoltura» de fluido. Para el flujo rectilíneo en *estado estacionario*, el balance de cantidad de movimiento es:

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{Velocidad de} \\ \text{entrada de cantidad} \\ \text{de movimiento} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \text{Velocidad de} \\ \text{salida de cantidad} \\ \text{de movimiento} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{Suma de las} \\ \text{fuerzas que actúan} \\ \text{sobre el sistema} \\ \hline \end{array} = 0$$

(3.1)

Al sistema puede entrar cantidad de movimiento por transporte, de acuerdo con la expresión newtoniana (o no-newtoniana), de densidad de flujo de cantidad de movimiento. También puede entrar cantidad de movimiento debido al movimiento global del fluido. Las fuerzas que nos interesan son las fuerzas de presión (actuando sobre *superficies*) y las fuerzas de gravedad (que actúan sobre todo el *volumen*).

El balance de cantidad de movimiento de la Ec. 3.1 puede aplicarse *solamente cuando las líneas de corriente del sistema son líneas rectas* (es decir, para el flujo rectilíneo). En general, el procedimiento a seguir para plantear y resolver problemas de flujo viscoso es el siguiente: primeramente se escribe un balance de cantidad de movimiento, de la forma de la Ec. 3.1 para una envoltura de espesor finito; después se hace tender hacia cero este espesor, utilizando la definición matemática de la primera derivada con el fin de obtener la correspondiente ecuación diferencial que describe la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento. Se introduce entonces la adecuada expresión newtoniana de la densidad de flujo de cantidad de movimiento, con el fin de obtener una ecuación diferencial para la distribución de velocidad. Mediante la integración de estas dos ecuaciones diferenciales se obtienen, respectivamente, las distribuciones de densidad de flujo de cantidad de movimiento y de velocidad en el sistema. Esta información puede utilizarse después para calcular muchas otras magnitudes, tales como velocidad media, velocidad máxima, velocidad volumétrica de flujo, pérdida de presión, y fuerzas que actúan sobre las superficies límite.

En las integraciones que hemos mencionado aparecen varias constantes de integración que se evalúan utilizando las «condiciones límite», es decir, determinaciones de hechos físicos para valores concretos de la variable

independiente. La mayor parte de las condiciones límite utilizadas son las siguientes:

a. En las interfases sólido-fluido, la velocidad del fluido es igual a la velocidad con que se mueve la superficie misma; es decir, que se supone que el fluido está adherido a la superficie sólida con la que se halla en contacto.

b. En las interfases líquido-gas, la densidad de flujo de cantidad de movimiento, y por consiguiente, el gradiente de velocidad en la fase líquida, es extraordinariamente pequeño, y en la mayor parte de los cálculos puede suponerse igual a cero.

c. En las interfases líquido-líquido, tanto la densidad de flujo de cantidad de movimiento como la velocidad son continuas a través de la interfase; es decir, que son iguales a ambos lados de la interfase.

En las secciones que siguen encontraremos estos tres tipos de condiciones límite.

En esta sección hemos presentado algunas reglas generales para la resolución de problemas elementales de flujo viscoso. A continuación se aclara la aplicación de estas reglas para algunos sistemas sencillos de flujo.

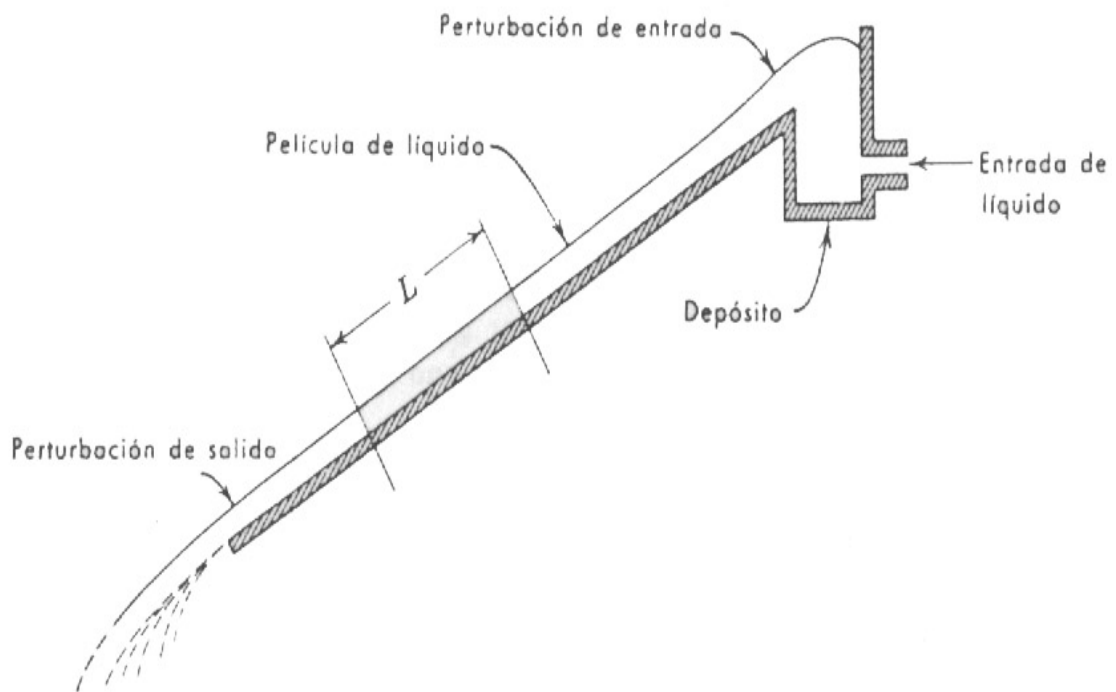
3.2 FLUJO DE UNA PELÍCULA DESCENDENTE

Como primer ejemplo, consideremos una superficie plana inclinada, tal como se indica en la Figura 10. Estas películas se han estudiado en relación con torres de pared mojada, experiencias de evaporación y absorción de gases y aplicación de capas de pintura a rollos de papel. Se supone que la viscosidad y densidad del fluido son constantes y se considera una región de longitud L , suficientemente alejada de los extremos de la pared, de forma que las

perturbaciones de la entrada y la salida no están incluidas en L ; es decir, que en esta región el componente v_z , de la velocidad es independiente de z .

Comenzamos aplicando un balance de cantidad de movimiento z sobre un sistema de espesor Δx , limitado por los planos $z = 0$ y $z = L$, y que se extiende hasta una distancia W en la dirección y . (Véase Fig. 11) Los distintos componentes del balance de cantidad de movimiento son por tanto:

Figura 10. Diagrama esquemático del experimento de una película descendente, con indicación de los efectos finales. En la región de Longitud L la distribución de velocidad está totalmente desarrollada. (Bird 1993).



Velocidad de entrada de cantidad de movimiento z a través de la superficie situada en x

$$(LW)(\tau_{xz})|_x \quad (3.2)$$

Velocidad de salida de cantidad de movimiento z a través de la superficie situada en $x + \Delta x$

$$(LW)(\tau_{xz})|_{x+\Delta x} \quad (3.3)$$

Velocidad de entrada de cantidad de movimiento z a través de la superficie situada en $z = 0$

$$(W\Delta x v_z)(\rho v_z)|_{z=0} \quad (3.4)$$

Velocidad de salida de cantidad de movimiento z a través de la superficie situada en $z = L$

$$(W\Delta x v_z)(\rho v_z)|_{z=L} \quad (3.5)$$

Fuerza de gravedad que actúa sobre el fluido

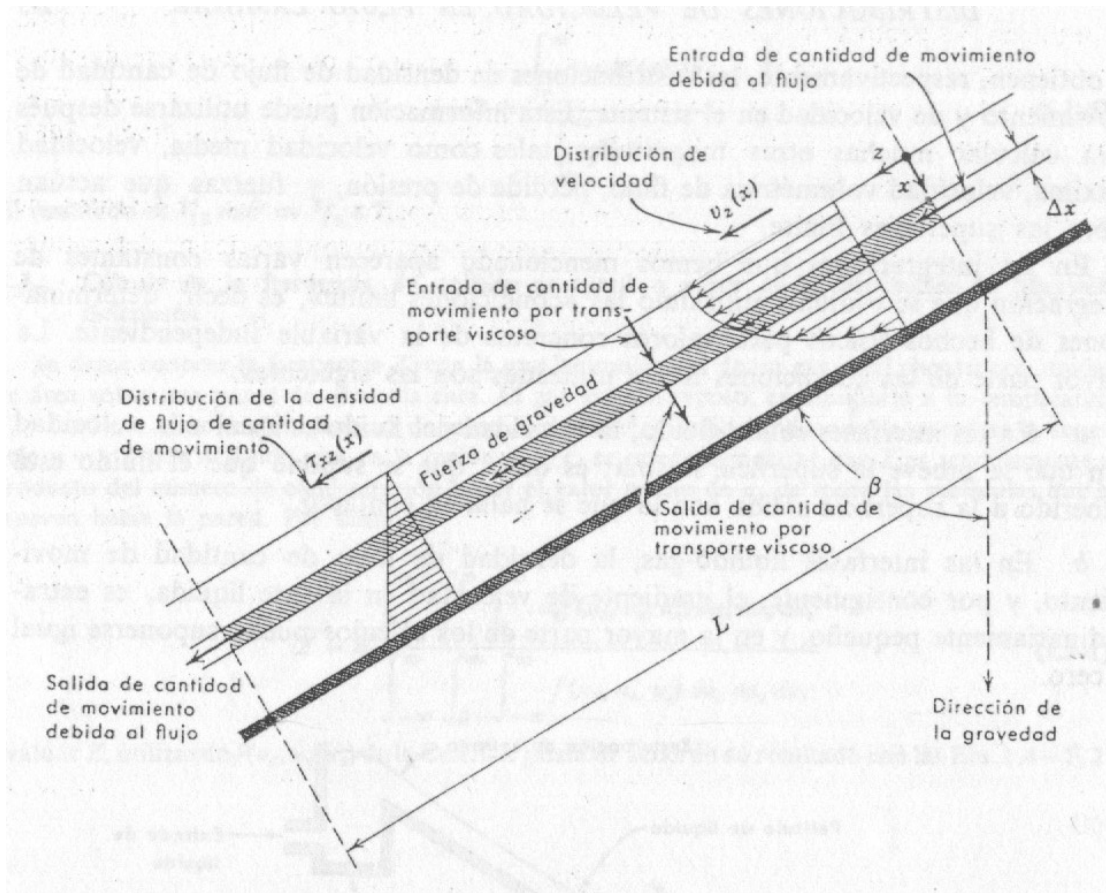
$$(LW\Delta x)(\rho g \cos \beta) \quad (3.6)$$

Téngase en cuenta una vez más que la «entrada» y «salida» se toma en la dirección positiva de los ejes x, y z. La notación $|x + \Delta x|$ quiere decir «evaluado para $x + \Delta x$ ».

Substituyendo estos términos en el balance de cantidad de movimiento de la Ec. 3.2 se obtiene

$$LW\tau_{xz}|_x - LW\tau_{xz}|_{x+\Delta x} + W\Delta x\rho v_z^2|_{z=0} - W\Delta x\rho v_z^2|_{z=L} + LW\Delta x\rho g \cos \beta = 0 \quad (3.7)$$

Figura 11. Flujo viscoso isotérmico de una película de líquido bajo la influencia de la gravedad, sin formación de ondulaciones. Capa de espesor A x sobre la que se aplica el balance de cantidad de movimiento. El eje y es perpendicular al plano del papel. (Bird 1993).



Como v_z vale lo mismo para $z = 0$ y $z = L$, para cada valor de x , los términos tercero y cuarto se anulan entre sí. Dividiendo la Ec. 3.7 por $LW\Delta x$ y tomando el límite cuando Δx tiende hacia cero:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\tau_{xz}|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}|_x}{\Delta x} \right) = \rho g \cos \beta \quad (3.8)$$

El primer miembro de esta ecuación es por definición la derivada primera de τ_{xz} con respecto a x . Por tanto, la Ec. 3.8 puede escribirse así

$$\frac{d}{dx} \tau_{xz} = \rho g \cos \beta \quad (3.9)$$

que es la ecuación diferencial para la densidad de flujo de cantidad de movimiento τ_{xz} . Al integrarla se obtiene

$$\tau_{xz} = \rho g x \cos \beta + C_1 \quad (3.10)$$

La constante de integración puede evaluarse aplicando la condición, límite correspondiente a la interfase líquido-gas

$$\text{C.L. 1:} \quad \text{para } x = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad (3.11)$$

cuya substitución en la Ec. 3.10 conduce a $C_1 = 0$.

Por lo tanto, la, distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento es

$$\tau_{xz} = \rho g x \cos \beta \quad (3.12)$$

tal como se indica en la Figura 11.

Si el fluido es newtoniano, ya sabemos que la densidad de flujo de cantidad de movimiento está relacionada con el gradiente de velocidad mediante la expresión,

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} \quad (3.13)$$

Substituyendo este valor de τ_{xz} en la Ec. 3.12 se obtiene la siguiente ecuación diferencial para la distribución de velocidad

$$\frac{dv}{dx} = -\left(\frac{\rho g \cos \beta}{\mu}\right)x \quad (3.14)$$

que puede integrarse fácilmente para obtener

$$v_z = -\left(\frac{\rho g \cos \beta}{2\mu}\right)x^2 + C_2 \quad (3.15)$$

La constante de integración se evalúa a partir de la condición límite correspondiente

C.L. 2: para $x = \delta$ $v_z = 0$ (3.16)

Substituyendo esta condición límite en la Ec. 3.15 se obtiene que $C_2 = (\rho g \cos \beta / 2\mu)\delta^2$. Por consiguiente, la distribución de velocidad es

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2 \right] \quad (3.17)$$

Resulta, por tanto, que el perfil de velocidad es parabólico. (Véase Fig. 11). Una vez que se ha obtenido el perfil de velocidad, pueden calcularse las siguientes magnitudes:

(i) La **velocidad máxima** $v_{z,m\acute{a}x}$ es evidentemente la velocidad para $x = 0$; por tanto

$$v_{z,m\acute{a}x} = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \quad (3.18)$$

(ii) La **velocidad media** $\langle v_z \rangle$ en una sección transversal de la película, se obtiene mediante el cálculo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle v_z \rangle &= \frac{\int_0^W \int_0^\delta v_z dx dy}{\int_0^W \int_0^\delta dx dy} \\ &= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta v_z dx \\ &= \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \int_0^1 \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] d \left(\frac{x}{\delta} \right) \\ &= \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{3\mu} \end{aligned} \quad (3.19)$$

(iii) La **velocidad volumétrica de flujo** Q se obtiene a partir de la velocidad media, o por integración de la distribución de velocidad:

$$Q = \int_0^W \int_0^\delta v_z dx dy = W \delta \langle v_z \rangle = \frac{\rho g W \delta^3 \cos \beta}{3\mu} \quad (3.20)$$

(iv) **El espesor de la película** δ puede expresarse en función de la velocidad media, de la velocidad volumétrica de flujo, o la velocidad de flujo de masa por unidad de anchura de pared ($T = \rho \delta \langle v_z \rangle$):

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3\mu \langle v_z \rangle}{\rho g \cos \beta}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu Q}{\rho g W \cos \beta}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu T}{\rho^2 g \cos \beta}} \quad (3.21)$$

(v) El componente-z de la *fuerza F del fluido sobre la superficie* se obtiene integrando la densidad de flujo de cantidad de movimiento sobre la interfase fluido-sólido:

$$\begin{aligned}
 F_z &= \int_0^L \int_0^W \tau_{xz} \Big|_{x=\delta} dydz \\
 &= \int_0^L \int_0^W -\mu \frac{dv_z}{dx} \Big|_{x=\delta} dydz \\
 &= (LW) \left(-\mu \left(-\frac{\rho g \delta \cos \beta}{\mu} \right) \right) \\
 &= \rho g \delta L W \cos \beta \qquad (3.22)
 \end{aligned}$$

Es evidente que esto corresponde exactamente al componente-z del peso de todo el fluido, contenido en la película.

Los anteriores resultados analíticos son solo validos cuando la película desciende en flujo laminar con líneas de corriente rectas. Estas condiciones se cumplen para el flujo lento de películas viscosas delgadas. Experimentalmente se ha encontrado que al aumentar la velocidad $\langle v_z \rangle$ de la película; al aumentar su espesor δ , y al disminuir la viscosidad cinemática $\nu = \mu/\rho$, varía gradualmente la naturaleza del flujo. Durante este cambio gradual se pueden observar tres tipos distintos de flujo, más o menos estables: (a) flujo laminar con líneas de corriente rectas, (b), flujo laminar con ondulaciones, y (c) flujo turbulento. La información cuantitativa respecto del tipo de flujo que puede esperarse para una serie determinada de condiciones físicas es solo fragmentaria. Para paredes verticales se puede dar la siguiente información:

Flujo laminar sin ondulaciones	$R_e < 4$ a 25
Flujo laminar con ondulaciones	$4a25 < R_e < 1000$ a 2000
Flujo turbulento	$R_e > 1000$ a 2000

siendo $R_e = 4\delta\langle v_z \rangle \rho / \mu = 4T / \mu$ el número de Reynolds para este sistema.

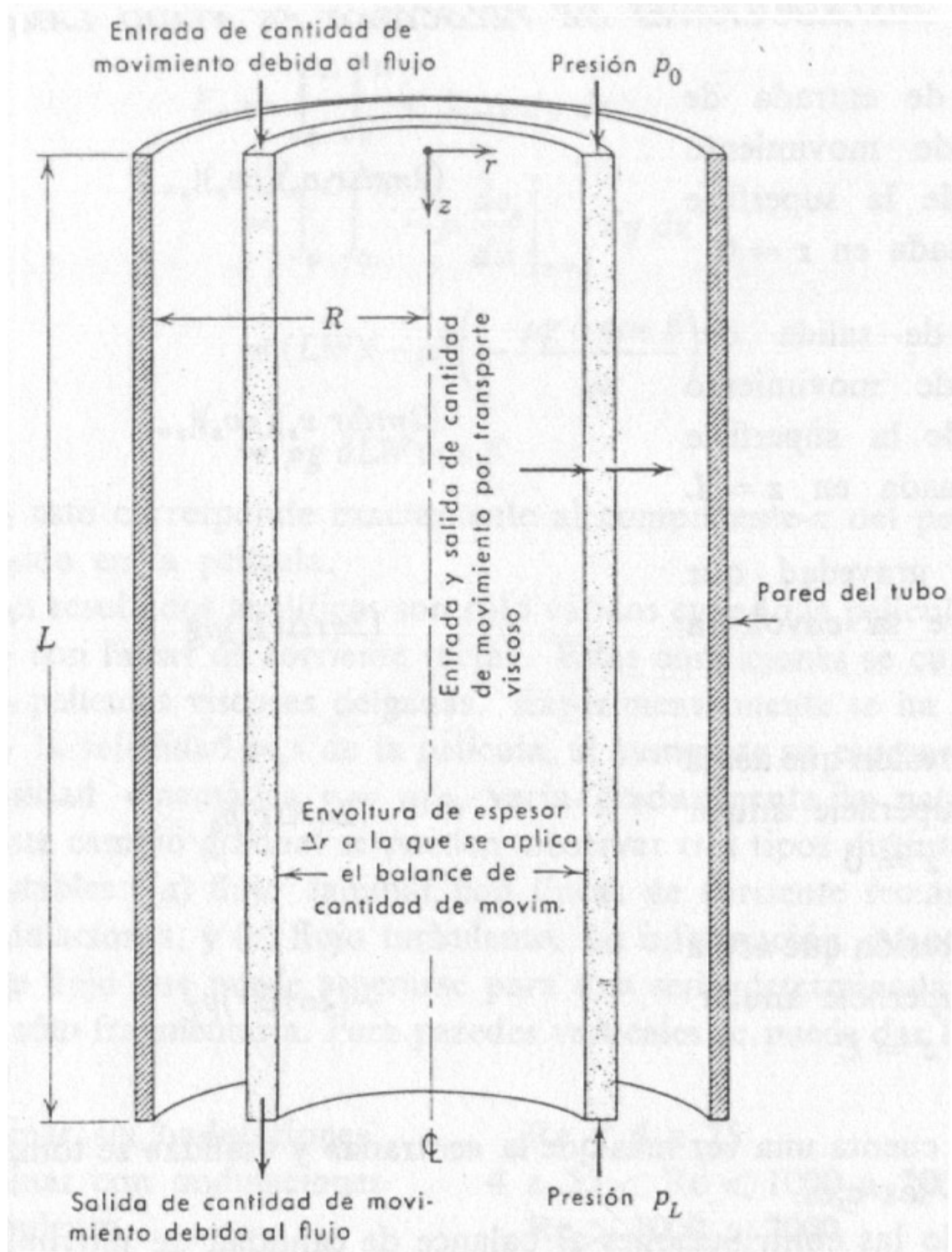
3.3 FLUJO A TRAVÉS DE UN TUBO CIRCULAR

El flujo de fluidos en tubos circulares se encuentra con frecuencia en física, química, biología e ingeniería. El flujo laminar de fluidos en tubos circulares puede analizarse mediante el balance de cantidad de movimiento que se ha descrito en 3.1. La única modalidad nueva que se introduce aquí es el uso de coordenadas cilíndricas, que son las coordenadas naturales para describir las posiciones en una tubería circular.

Consideremos el flujo laminar en estado estacionario de un fluido de densidad constante ρ en un tubo «muy largo» de longitud L y radio R . Especificamos que el tubo sea «muy largo» porque vamos a suponer que no existen «efectos finales»; es decir, que vamos a ignorar el hecho de que a la entrada y a la salida el flujo no será necesariamente paralelo a la superficie del tubo.

Elegimos como sistema una envoltura cilíndrica de espesor Δr y longitud L (véase Figura 12), y comenzamos por enumerar las distintas contribuciones al balance de cantidad de movimiento en la dirección z :

Figura 12. Envoltura cilíndrica de un fluido sobre la cual se aplica el balance de cantidad de movimiento, para obtener el perfil de velocidad y la fórmula de Hagen-Poiseuille para la velocidad volumétrica de flujo. (Bird 1993)



Velocidad de entrada de cantidad de movimiento z a través de la superficie cilíndrica situada en r

$$(2\pi r L \tau_{rz})|_r \quad (3.23)$$

Velocidad de salida de cantidad de movimiento z a través de la superficie cilíndrica situada en r + Δr

$$(2\pi r L \tau_{rz})|_{r+\Delta r} \quad (3.24)$$

Velocidad de entrada de cantidad de movimiento z a través de la superficie anular situada en z = 0

$$(2\pi r \Delta r v_z)(\rho v_z)|_{z=0} \quad (3.25)$$

Velocidad de salida de cantidad de movimiento z a través de la superficie anular situada en z = L

$$(2\pi r \Delta r v_z)(\rho v_z)|_{z=L} \quad (3.26)$$

Fuerza de gravedad que actúa sobre la envoltura cilíndrica

$$(2\pi r \Delta r L) \rho g \quad (3.27)$$

Fuerza de presión que actúa sobre la superficie anular situada en z = 0

$$(2\pi r \Delta r) p_0 \quad (3.28)$$

Fuerza de presión que actúa sobre la superficie anular situada en z = L

$$-(2\pi r \Delta r) p_L \quad (3.29)$$

Téngase en cuenta una vez más que la «entrada» y «salida» se toma en la dirección positiva de los ejes.

Sumando las contribuciones al balance de cantidad de movimiento, se obtiene

$$(2\pi r L \tau_{rz})_r - (2\pi r L \tau_{rz})_{r+\Delta r} + (2\pi \Delta r \rho v_z^2)_{z=0} - (2\pi \Delta r \rho v_z^2)_{z=L} + 2\pi \Delta r L \rho g + 2\pi \Delta r (p_0 - p_L) = 0 \quad (3.29)$$

Como se supone que el fluido es incompresible, v_z es la misma para $z = 0$ y $z = L$, y, por tanto, los términos tercero y cuarto se anulan entre sí. Dividiendo la Ec. 2.3-8 por $2\pi L \Delta r$ y pasando al límite, cuando Δr tiende hacia cero, queda

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left(\frac{(r \tau_{rz})_{r+\Delta r} - (r \tau_{rz})_r}{\Delta r} \right) = \left(\frac{p_0 - p_L}{L} + \rho g \right) r \quad (3.30)$$

El primer miembro de esta ecuación es por definición la derivada primera, y por, tanto la Ec. 3.30 puede escribirse así:

$$\frac{d}{dr} (r \tau_{rz}) = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) r \quad (3.31)$$

en la que $\mathbf{P} = p - \rho g z$. La Ec. 2.3-10 puede integrarse para obtener:

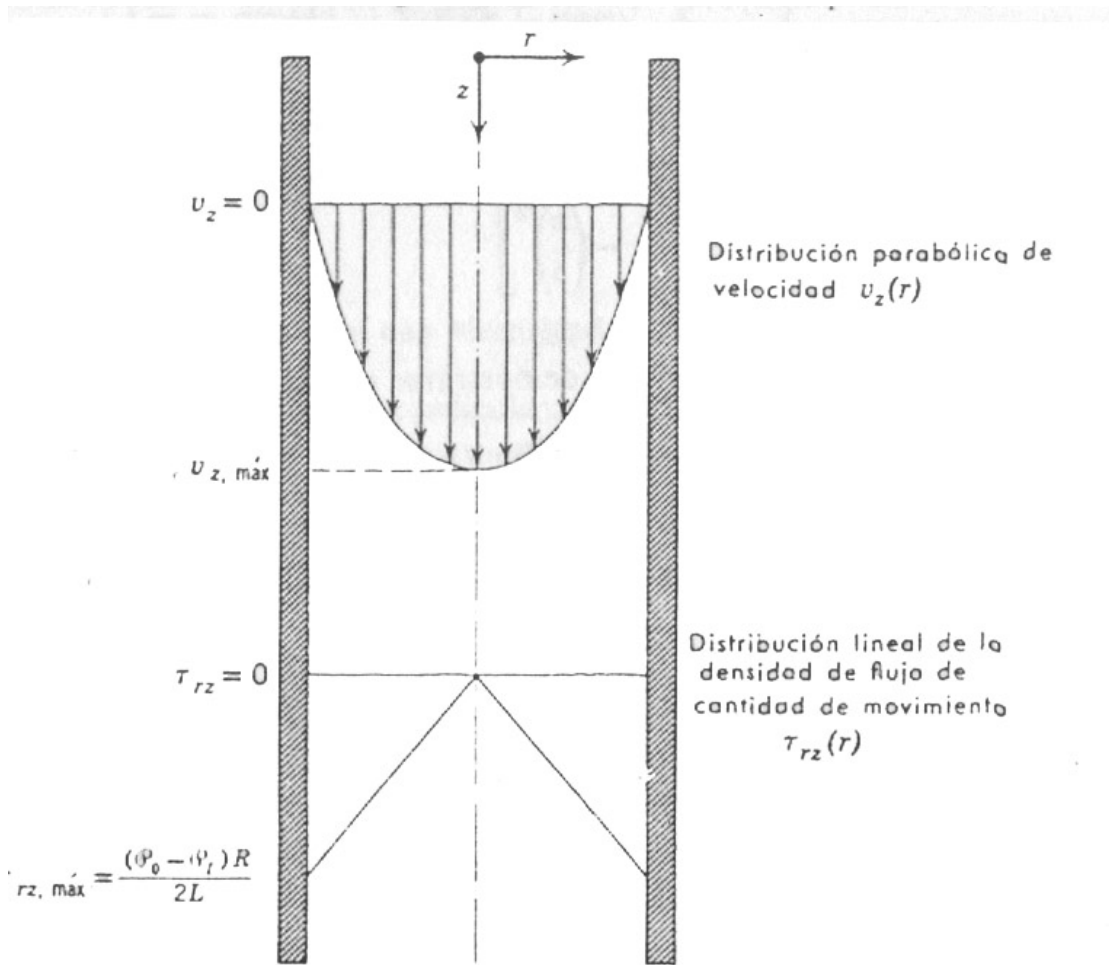
$$\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r + \frac{C_1}{r} \quad (3.32)$$

La constante C_1 tiene que ser cero si la densidad de flujo de cantidad de movimiento no es infinita para $r = 0$. La distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento es, por consiguiente

$$\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r \quad (3.33)$$

Esta distribución se indica en la Figura 13.

Figura 13. Distribuciones de velocidad y densidad de flujo de cantidad de movimiento para el flujo en tubos cilíndricos. (Bird 1993)



La ley de Newton para la viscosidad para este caso es

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} \quad (3.34)$$

Substituyendo este valor de τ_{rz} en la Ec. 3.33, se obtiene para la velocidad la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dv_z}{dr} = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\right)r \quad (3.35)$$

Integrando, se llega a

$$v_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)r^2 + C_2 \quad (3.36)$$

Teniendo en Cuenta la condición límite de que v_z , es cero para $r = R$, se obtiene para la constante C_2 el valor $(P_0 - P_L)R^2/4\mu L$. La distribución de velocidad es por tanto

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \quad (3.37)$$

Este resultado nos indica que la distribución de velocidad para el flujo laminar de un fluido incompresible en un tubo es parabólica. (Véase Fig. 13)

Una vez que se conoce el perfil de velocidad, pueden calcularse fácilmente las siguientes magnitudes:

(i) La **velocidad máxima**, $v_{z,máx.}$, tiene lugar para $r = 0$, y su valor es

$$v_{z,máx.} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \quad (3.38)$$

(ii) **La velocidad media** $\langle v_z \rangle$, se calcula sumando todas las velocidades en una sección transversal y dividiendo por el área de dicha sección:

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{8\mu L} \quad (3.39)$$

Los detalles de la integración se dejan para el lector. Nótese que

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{2} v_{z, \text{máx.}}$$

(iii) La **velocidad volumétrica de flujo** Q , es el producto del área por la velocidad media, por tanto

$$Q = \frac{\pi(P_0 - P_L)R^4}{8\mu L} \quad (3.40)$$

Este último resultado es la conocida ley de Hagen-Poiseuille (1839), en honor de los dos científicos que se han hecho famosos con esta fórmula. Establece la relación que existe entre la velocidad volumétrica de flujo y las fuerzas que originan dicho flujo (las fuerzas relacionadas con la caída de presión y la aceleración gravitacional).

(iv) El componente z de la **fuerza del fluido que actúa sobre la superficie mojada de la tubería** F_z es exactamente la densidad de flujo de cantidad de movimiento integrado sobre el área mojada:

$$F_z = (2\pi RL) \left(-\mu \frac{dv_z}{dr} \right) \Big|_{r=R} = \pi R^2 (P_0 - P_L) = \pi R^2 (p_0 - p_L) + \pi R^2 L \rho g \quad (3.41)$$

Este resultado viene a decir que la fuerza neta que actúa en el sentido de la corriente sobre el cilindro de fluido, debido a la diferencia de presión y a la aceleración gravitacional, se equilibra exactamente por la fuerza viscosa F_z que tiende a oponerse al movimiento del fluido.

Los resultados de esta sección son válidos solamente para valores del número de Reynolds inferiores a 2100, para los que el flujo es laminar. Para este sistema se acostumbra definir el número de Reynolds por $Re = D\langle v_z \rangle \rho / \mu$ siendo $D = 2R$, el diámetro del tubo.

A continuación vamos a resumir todas las suposiciones que están implícitas en el desarrollo de la ley de Hagen-Poiseuille (1839):

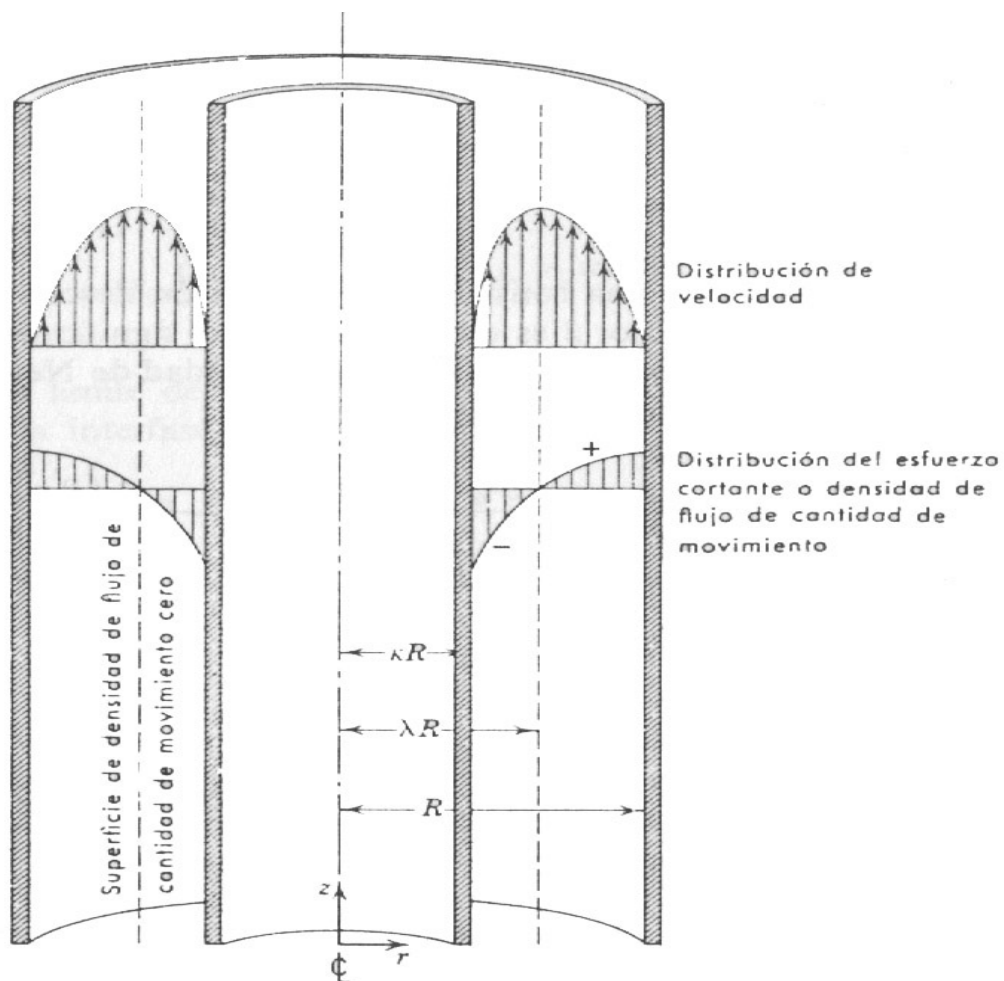
- a. El flujo es laminar (Re menor que aproximadamente 2100)
- b. La densidad ρ es constante («flujo incompresible»)
- c. El flujo es independiente del tiempo («estado estacionario»).
- d. El fluido es newtoniano; es decir, $\tau_{rz} = -\mu(dv_z/dr)$.
- e. Los efectos finales son despreciables. En la práctica se necesita una «longitud de entrada» (después de la entrada del tubo) del orden de $L_e = 0,035D Re$ para que se formen los perfiles parabólicos. Si en la sección de la tubería de que se trata está incluida la región de entrada hay que aplicar una corrección. El factor de corrección que se introduce bien sea en ΔP_0 en Q nunca excede de L_e/L si $L > L_e$.
- f. El fluido se comporta como un medio continuo. Esta, suposición es válida, excepto para los gases muy diluidos o tubos capilares muy estrechos, en los que el recorrido libre medio es comparable al diámetro del tubo (régimen de «flujo de deslizamiento»), o mucho mayor que el diámetro del tubo (régimen de «flujo de Knudsen (1934)» o de «flujo de molécula libre»).

g. No hay deslizamiento en la pared. Esta suposición es muy correcta para los fluidos puros en las condiciones que se han supuesto en (f).

3.4 FLUJO A TRAVÉS DE UNA SECCIÓN DE CORONA CIRCULAR

Vamos a considerar ahora otro problema de flujo viscoso en coordenadas cilíndricas, pero cuyas condiciones límites son diferentes. Un fluido incompresible fluye en estado estacionario a través de la región comprendida entre dos cilindros circulares coaxiales de radios κR y R (véase Figura 14).

Figura 14. Flujo ascendente a través de dos cilindros concéntricos (Bird 1993)



Comenzamos efectuando un balance de cantidad de movimiento sobre una fina envoltura cilíndrica, y se llega a la misma ecuación diferencial que se ha obtenido anteriormente para el flujo en un tubo (véase Ec. 3.31):

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right)r \quad (3.42)$$

Téngase en cuenta que para este problema $P = p + \rho gz$, puesto que las fuerzas de presión y gravedad actúan en direcciones opuestas. Esta ecuación diferencial puede integrarse igual que antes (véase Ec. 3.23), para obtener

$$\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L}\right)r + \frac{C_1}{r} \quad (3.43)$$

La constante C_1 no puede determinarse de forma inmediata, puesto que no, disponemos de información acerca de la densidad de flujo, de cantidad de movimiento en ninguna de las dos superficies $r = \kappa R$ o $r = R$; Lo más que podemos decir es que ha de existir un máximo de la curva de velocidad en un cierto plano (hasta ahora desconocido) $r = \lambda R$, para el cual la densidad de flujo de cantidad de movimiento ha de ser cero. Teniendo esto en cuenta, puede substituirse C_1 por $-(P_0 - P_L)(\lambda R)^2/2L$, con lo que la Ec. 3.43 se transforma en

$$\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L)R}{2L} \left[\left(\frac{r}{R}\right) - \lambda^2 \left(\frac{R}{r}\right) \right] \quad (3.44)$$

Nótese que λ es todavía una constante de integración desconocida. La única razón de haber substituido C_1 por λ es que conocemos el significado físico de λ .

Substituyendo en la Ec. 3.44 la ley de la viscosidad de Newton $\tau_{rz} = -\mu(dv_z/dr)$ se obtiene esta ecuación diferencial:

$$\frac{dv_z}{dr} = -\frac{(P_0 - P_L)R}{2\mu L} \left[\left(\frac{r}{R} \right) - \lambda^2 \left(\frac{R}{r} \right) \right] \quad (3.45)$$

Integrando con respecto a r :

$$v_z = -\frac{(P_0 - P_L)R}{4\mu L} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - 2\lambda^2 \ln \left(\frac{r}{R} \right) + C_2 \right] \quad (3.46)$$

Ahora pueden evaluarse las dos constantes de integración λ y C_2 , utilizando las dos siguientes condiciones límite:

C.L. 1: para $r = \kappa R$ $v_z = 0$
(3.47)

C.L. 2: para $r = R$ $v_z = 0$
(3.48)

Substituyendo estas condiciones límites en la Ec. 2.4-5 se obtienen estas dos ecuaciones simultáneas

$$0 = -\frac{(P_0 - P_L)R}{4\mu L} (\kappa^2 - 2\lambda^2 \ln \kappa + C_2) \quad (3.49)$$

$$0 = -\frac{(P_0 - P_L)R}{4\mu L}(1 + C_2) \quad (3.50)$$

de las que se deduce el valor de las constantes C_2 y λ

$$C_2 = -1 \quad 2\lambda^2 = \frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)} \quad (3.51-52)$$

Substituyendo estos valores en las Ecs. 3.44 y 3.46 se obtienen, respectivamente, la distribución de densidad de flujo de cantidad de movimiento y la distribución, de velocidad, para el flujo incompresible en estado estacionario a través de dos tubos concéntricos

$$\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L)R}{2L} \left[\left(\frac{r}{R} \right) - \left(\frac{1 - \kappa^2}{2\ln(1/\kappa)} \right) \left(\frac{R}{r} \right) \right] \quad (3.53)$$

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right) + \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)} \right) \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right] \quad (3.54)$$

Obsérvese que cuando κ se hace cero estas ecuaciones se transforman en las correspondientes al flujo en tubos circulares (véanse Ecs. 3.33 y 3.34). El lector deberá de habituarse a comprobar analíticamente los resultados para asegurarse de que describen adecuadamente los «casos límite».

Una vez que se conocen ya las distribuciones de velocidad y densidad de flujo de cantidad de movimiento, pueden obtenerse de forma inmediata otras magnitudes interesantes:

(i) **La velocidad máxima**

$$v_{z,m\acute{a}x.} = v_z \Big|_{r=\lambda R} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left\{ I - \left(\frac{1 - \kappa^2}{2 \ln(1/\kappa)} \right) \left[I - \left(\frac{1 - \kappa^2}{2 \ln(1/\kappa)} \right) \right] \right\} \quad (3.55)$$

(ii) La velocidad **media**

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{8\mu L} \left(\frac{1 - \kappa^4}{1 - \kappa^2} - \frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)} \right) \quad (3.56)$$

(iii) **La velocidad volumétrica de flujo**

$$Q = \pi R^2 (1 - \kappa^2) \langle v_z \rangle = \frac{\pi(P_0 - P_L)R^4}{8\mu L} \left((1 - \kappa^4) - \frac{(1 - \kappa^2)^2}{\ln(1/\kappa)} \right) \quad (3.57)$$

(iv) **La fuerza ejercida por el fluido sobre el sólido** se obtiene sumando las fuerzas que actúan sobre los cilindros interior y exterior, respectivamente:

$$F = -\tau_{rz} \Big|_{r=\kappa R} \cdot 2\pi\kappa RL + \tau_{rz} \Big|_{r=R} \cdot 2\pi RL = \pi R^2 (1 - \kappa^2) (P_0 - P_L) \quad (3.58)$$

El estudiante deberá de comprobar e interpretar, como ejercicio, estos resultados.

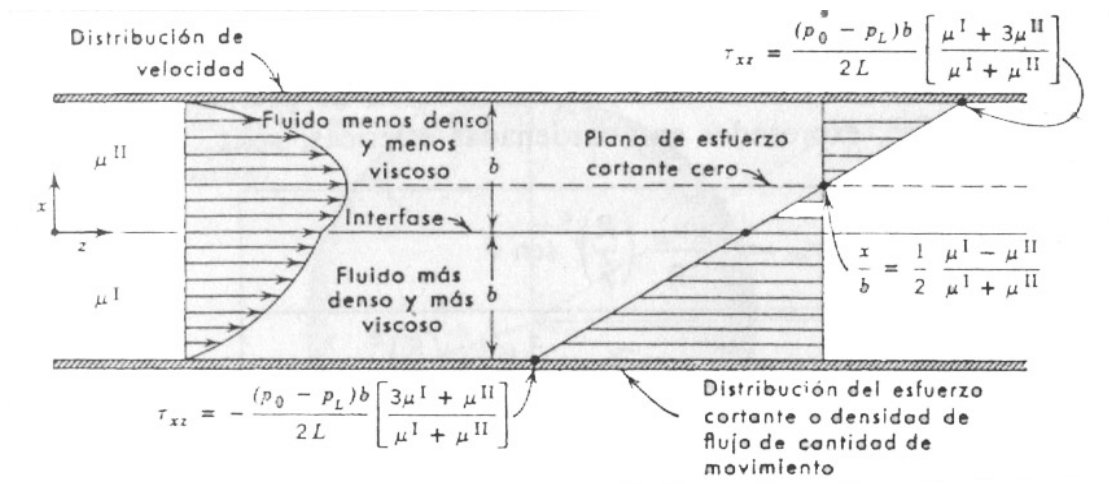
Las ecuaciones anteriores se transforman en las fórmulas para el flujo en tubos circulares en el caso límite de que $\kappa \rightarrow 0$. De igual forma, se obtienen también las ecuaciones para el flujo en rendijas planas cuando $\kappa \rightarrow 1$. Los procesos necesarios para obtener estas últimas se tratan en los problemas 2.F (para la velocidad volumétrica de flujo) y 2.P (para los perfiles de velocidad) del libro de Bird 1993.

La solución que se ha obtenido es sólo válida para el flujo laminar. La transición de laminar a turbulento se produce en las inmediaciones de $Re = 2000$, estando el número de Reynolds definido por $Re = 2R(1 - \kappa) \langle v_z \rangle \rho / \mu$. En realidad, antes de la transición, el flujo laminar estable presenta un movimiento sinuoso.

3.5 FLUJO ADYACENTE DE DOS FLUIDOS INMISCIBLES

Hasta aquí hemos considerado casos de flujo con superficies de separación sólido-fluido y líquido-gas. Vamos a ver ahora un ejemplo de flujo con superficie de separación líquido-líquido. (Véase Figura 15)

Figura 15. Flujo de dos fluidos inmiscibles entre dos láminas planas paralelas debido a un gradiente de presión. (Bird 1993).



Dos fluidos inmiscibles e incompresibles circulan, debido a un gradiente de presión, en la dirección z de una estrecha rendija horizontal de longitud L y anchura W . Las velocidades de los fluidos están ajustadas de tal forma que una mitad de la rendija esta llena del fluido I (la fase más densa), y la otra mitad está ocupada por el fluido II (la fase menos densa). Se desea analizar la distribución de velocidad y de densidad de flujo de cantidad de movimiento en este sistema.

Un balance diferencial de cantidad de movimiento conduce a la siguiente ecuación:

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \frac{p_0 - p_L}{L} \quad (3.59)$$

Esta ecuación se obtiene tanto para la fase 1 como para la fase II. Integrando la Ec. 3.59 para las dos regiones, resulta

$$\tau_{xz}^I = \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) x + C_1^I \quad (3.60)$$

$$\tau_{xz}^{II} = \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) x + C_1^{II} \quad (3.61)$$

Se utiliza la condición límite de que el transporte de cantidad de movimiento es continuo a través de la interfase de los dos fluidos:

$$\text{C.L. 1:} \quad \text{para } x = 0 \quad \tau_{xz}^I = \tau_{xz}^{II} \quad (3.62)$$

Lo que nos indica que $C_1^I = C_1^{II}$, y, por tanto, le llamaremos simplemente constante de integración C_1 .

Si se substituye la ley de Newton de la viscosidad en las Ecs. 3.60 y 3.61, se llega a

$$-\mu^I \frac{dv_z^I}{dx} = \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) x + C_1 \quad (3.63)$$

$$-\mu^I \frac{dv_z^{II}}{dx} = \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) x + C_1 \quad (3.64)$$

La integración de estas ecuaciones da

$$v_z^I = -\frac{(p_0 - p_L)x^2}{2\mu^I L} - \frac{C_1}{\mu^I} x + C_2^I \quad (3.65)$$

$$v_z^{II} = -\frac{(p_0 - p_L)x^2}{2\mu^I L} - \frac{C_1}{\mu^I} x + C_2^{II} \quad (3.66)$$

Para determinar las tres constantes de integración, se utilizan estas tres condiciones límites adicionales

$$\text{C.L. 2:} \quad \text{para } x = 0, \quad v_z^I = v_z^{II} \quad (3.67)$$

$$\text{C.L. 3:} \quad \text{para } x = -b, \quad v_z^I = 0 \quad (3.68)$$

$$\text{C.L. 4:} \quad \text{para } x = +b, \quad v_z^{II} = 0 \quad (3.69)$$

Al establecer matemáticamente estas condiciones límite se obtiene

$$\text{B.C. 2:} \quad C_2^I = C_2^{II} \quad (3.70)$$

$$\text{B.C. 3:} \quad 0 = -\frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^I L} + \frac{C_1 b}{\mu^I} + C_2^I \quad (3.71)$$

$$\text{B.C. 4:} \quad 0 = -\frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu''L} - \frac{C_1b}{\mu''} + C_2'' \quad (3.72)$$

De estas ecuaciones se deduce que

$$C_1 = -\frac{(p_0 - p_L)b}{2L} \left(\frac{\mu' - \mu''}{\mu' + \mu''} \right) \quad (3.73)$$

$$C_2' = -\frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu'L} \left(\frac{2\mu'}{\mu' + \mu''} \right) = C_2'' \quad (3.74)$$

Por lo tanto, los perfiles de densidad de flujo de cantidad de movimiento y de velocidad son:

$$\tau_{xz} = \frac{(p_0 - p_L)b}{L} \left[\left(\frac{x}{b} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu' - \mu''}{\mu' + \mu''} \right) \right] \quad (3.75)$$

$$v_z' = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu'L} \left[\left(\frac{2\mu'}{\mu' + \mu''} \right) + \left(\frac{\mu' - \mu''}{\mu' + \mu''} \right) \left(\frac{x}{b} \right) - \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right] \quad (3.76)$$

$$v_z'' = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu''L} \left[\left(\frac{2\mu''}{\mu' + \mu''} \right) + \left(\frac{\mu' - \mu''}{\mu' + \mu''} \right) \left(\frac{x}{b} \right) - \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right] \quad (3.77)$$

Estas distribuciones se indican en la Fig. 15. Obsérvese que si $\mu' = \mu''$, ambas distribuciones son iguales, y los resultados se transforman en el perfil parabólico de velocidad para el flujo laminar de un fluido puro en una rendija.

La **velocidad media** en cada capa puede calcularse de esta forma:

$$\langle v_z^I \rangle = \frac{I}{b} \int_{-b}^0 v_z^I dx = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{12\mu^I L} \left(\frac{7\mu^I + \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \quad (3.78)$$

$$\langle v_z^{II} \rangle = \frac{I}{b} \int_{-b}^0 v_z^{II} dx = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{12\mu^{II} L} \left(\frac{\mu^I + 7\mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \quad (3.79)$$

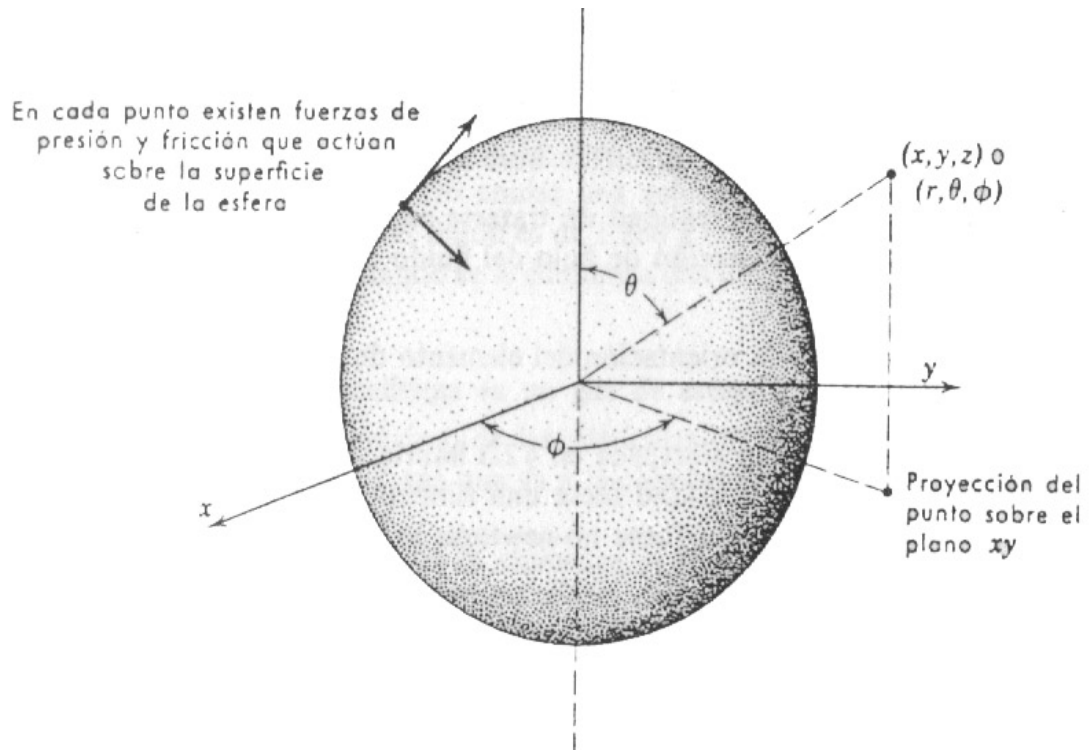
A partir de las distribuciones de la densidad de flujo de cantidad de movimiento y de la velocidad, que hemos obtenido anteriormente, se puede además calcular la velocidad máxima, la velocidad en la interfase, el plano de esfuerzo cortante cero y la fricción en las paredes de la rendija.

3.6 FLUJO REPTANTE ALREDEDOR DE UNA ESFERA SÓLIDA

En las secciones anteriores se solucionaron algunos problemas elementales de flujo viscoso, mediante la aplicación de balances diferenciales de cantidad de movimiento. En la sección inicial de este capítulo se insistió en que este método de análisis está restringido a los sistemas con líneas de corriente rectas. Puesto que el problema del flujo alrededor de una esfera implica líneas de corriente curvas, no puede resolverse por las técnicas que hemos visto en este capítulo. Sin embargo, lo trataremos aquí brevemente debido a la importancia que tiene en ingeniería el flujo alrededor de objetos sumergidos. No se pretenden deducir las expresiones para las distribuciones de la densidad de flujo de cantidad de movimiento, de la presión y de la velocidad, sino que enunciaremos estos resultados y los utilizaremos después para deducir algunas relaciones importantes que serán necesarias en posteriores tratamientos.

Consideremos el flujo muy lento de un fluido incompresible alrededor de una esfera sólida, tal como se indica en la Figura 16. La esfera es de radio R y diámetro D . El fluido tiene una viscosidad μ y una densidad ρ , y asciende verticalmente hacia la esfera con una velocidad uniforme v_∞ a lo largo del eje z negativo.

Figura 16. Sistema coordenado utilizado para describir el flujo de un fluido alrededor de una esfera rígida. (Bird 1993).



Analíticamente se ha encontrado que para un flujo muy lento, la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento, la distribución de presión, y los componentes de la velocidad, expresados en coordenadas esféricas, son:

$$\tau_{r\theta} = \frac{3}{2} \frac{\mu v_\infty}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^4 \text{sen} \theta \quad (3.80)$$

$$p = p_0 - \rho g z - \frac{3}{2} \frac{\mu v_\infty}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \text{cos} \theta \quad (3.81)$$

$$v_r = v_\infty \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \right] \text{cos} \theta \quad (3.82)$$

$$v_\theta = -v_\infty \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r}\right) - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \right] \text{sen} \theta \quad (3.83)$$

En la Ec. 3.81, p_0 es la presión en el plano $z = 0$ alejado de la esfera, $-\rho g z$ es la contribución del peso del fluido (efecto hidrostático), y el término que contiene v_∞ resulta como consecuencia del flujo del fluido alrededor de la esfera. Estas ecuaciones son solamente válidas para «flujo reptante», que para este sistema tiene lugar cuando el número de Reynolds $Dv_\infty\rho/\mu$ es inferior a aproximadamente 0,1. Esta región se caracteriza por la virtual ausencia de remolinos aguas abajo de la esfera.

Obsérvese que la distribución de velocidad cumple la condición de que $v_r = v_\theta = 0$ en la superficie de la esfera. Además, puede demostrarse que v_z tiende hacia v_∞ para puntos alejados de la esfera. Por otra parte, se ve claramente que, lejos de la superficie esférica, la distribución de presión se transforma en la ecuación hidrostática $p = p_0 - \rho g z$. Por lo tanto, las ecuaciones deben de satisfacer las condiciones límite para $r = R$ y $r = \infty$.

Calculamos ahora la fuerza neta que el fluido ejerce sobre la esfera. Esta fuerza se calcula integrando la fuerza normal y la fuerza tangencial sobre la superficie de la esfera.

3.6.1 Integración de la fuerza normal. En cada punto de la superficie esférica existe una presión sobre el sólido que actúa perpendicularmente a la superficie. El componente z de esta presión es $-p \cos \theta$. Esta presión local se multiplica por el área de la superficie sobre la que actúa, $R^2 \sin \theta d\theta d\phi$, y se integra sobre la superficie esférica para obtener la fuerza resultante en la dirección z:

$$F_n = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (-p|_{r=R} \cos \theta) R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.84)$$

La distribución de presión en la superficie de la esfera es

$$p|_{r=R} = p_0 - \rho g R \cos \theta - \frac{3}{2} \frac{\mu v_\infty}{R} \cos \theta \quad (3.85)$$

Esta expresión se substituye en la integral de la Ec. 3.84. La integral que contiene p_0 se anula, la de $-\rho g R \cos \theta$ da la fuerza de flotación del fluido sobre el sólido, y la integral en que interviene la velocidad da la resistencia de forma. Por lo tanto, queda finalmente

$$F_n = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g + 2\pi \mu R v_\infty \quad (3.86)$$

3.6.2 Integración de la fuerza tangencial. En cada punto de la superficie existe también un esfuerzo cortante que actúa tangencialmente. Este esfuerzo, $-\tau_{r\theta}$ es la fuerza que actúa en la dirección θ sobre la unidad de área de la superficie esférica. El componente z de esta fuerza, por unidad de área,

es $(-\tau_{r\theta})(-\text{sen}\theta)$. Multiplicando por $R^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi$ e integrando sobre la superficie de la esfera, se obtiene la fuerza resultante en la dirección z:

$$F_t = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(+ \tau_{r\theta} \Big|_{r=R} \text{sen}\theta \right) R^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi \quad (3.87)$$

La distribución del esfuerzo cortante en la superficie de la esfera, de acuerdo con la Ec. 2.6-1, es

$$\tau_{r\theta} \Big|_{r=R} = \frac{3}{2} \frac{\mu v_\infty}{R} \text{sen}\theta \quad (3.88)$$

Substituyendo esta expresión en la integral de la Ec. 2.6-7, se obtiene la resistencia de fricción»

$$F_t = 4\pi\mu R v_\infty \quad (3.89)$$

Por lo tanto, la fuerza total F del fluido sobre la esfera, viene dada por la suma de las Ecs. 3.86 y 3.89:

$$F = \underbrace{4/3 \pi R^3 \rho g}_{\text{(fuerza de flotación)}} + \underbrace{2\pi\mu R v_\infty}_{\text{(resistencia de forma)}} + \underbrace{4\pi\mu R v_\infty}_{\text{(resistencia de fricción)}} \quad (3.90)$$

o bien

$$F = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g + 6\pi\mu R v_\infty \quad (3.91)$$

El primer término del segundo miembro de la Ec. 3.91 representa el empuje y el segundo resulta como consecuencia del movimiento del fluido alrededor de la esfera. Para posteriores consideraciones, es conveniente designar estos dos términos por F_S (la fuerza que se ejerce aunque el fluido esté en reposo) y F_A (la fuerza que resulta del movimiento del fluido, o sea, la contribución «cinética»); en el caso que estamos considerando, estas fuerzas son

$$F_S = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g \quad (3.92)$$

$$F_A = 6 \pi \mu R v_\infty \quad (3.93)$$

La Ec. 3.93 es la conocida *ley de Stokes*. Se aplica en el movimiento de partículas coloidales por efecto de un campo eléctrico, en la teoría de sedimentación, y en el estudio del movimiento de partículas de aerosoles. Téngase en cuenta que la ley de Stokes es válida para números de Reynolds (basados en el diámetro de la esfera) inferiores a aproximadamente 0,1; para $Re = 1$, la ley de Stokes predice una fuerza resistente que es un 10 por ciento menor. Este problema indica que cuando las líneas de corriente son curvas es preciso desarrollar una formulación más general de la mecánica de fluidos.

4. LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA SISTEMAS ISOTÉRMICOS

En el Capítulo 3 se han presentadas las distribuciones de velocidad para varios sistemas sencillos de flujo, aplicando balances de cantidad de movimiento a una envoltura. Estas distribuciones de velocidad se utilizaron después para calcular otras magnitudes, tales como la velocidad media y la fuerza resistente. El método del balance aplicado a una envoltura se utilizó con el fin de familiarizar al estudiante con la aplicación del principio de conservación de la cantidad de movimiento en los problemas de flujo viscoso. Sin embargo, no es necesario formular un balance de cantidad de movimiento siempre que se comienza a trabajar con un nuevo problema de flujo. Es más rápido, más fácil, y más seguro, partir de las ecuaciones de conservación de la materia y la cantidad de movimiento, expresadas en la forma general, y simplificarlas con el fin de adaptarlas al problema de que se trate. Estas dos ecuaciones describen todos los problemas de flujo viscoso isotérmico de un fluido puro. Para fluidos no isotérmicos y para mezclas fluidas de varios componentes, se necesitan ecuaciones adicionales para describir la conservación de la energía y la conservación de las especies químicas individuales. Estas distintas ecuaciones de conservación se denominan a veces «ecuaciones de variación», ya que describen la variación de la velocidad, temperatura y concentración, con respecto al tiempo y la posición en el sistema.

En la sección 4.1 se desarrolla la «ecuación de continuidad», mediante la aplicación de la ley de la conservación de la materia a un pequeño elemento de volumen situado en el seno de un fluido en movimiento. En la sección 4.2 se introduce la segunda ecuación de variación, la «ecuación de movimiento». Con esta ecuación y la de continuidad, se pueden resolver muchos

problemas bastante complicados. Las definiciones aquí descritas fueron basadas en el libro de Bird 1993.

En la sección 4.3 se utiliza la ecuación de movimiento para deducir una expresión que describe la interconversión de las distintas formas de la energía mecánica de un fluido en movimiento. Esta ecuación es particularmente útil para describir la degradación de la energía mecánica en energía calorífica, que acompaña a todos los procesos reales de flujo. También es la base del importante balance macroscópico de energía mecánica, o ecuación de Bernoulli.

En las tres primeras secciones, las deducciones se obtienen en coordenadas rectangulares. Sin embargo, para muchos problemas resulta más conveniente utilizar coordenadas cilíndricas o esféricas. En la sección 4.4 se trata brevemente el tema de las coordenadas curvilíneas, a la vez que se presenta un resumen de numerosas relaciones importantes, expresadas en los tres sistemas de coordenadas. El estudiante podrá comprobar que esta tabulación reduce el arte de plantear problemas de flujo viscoso a casi un simple procedimiento de «recetario de cocina».

Antes de entrar en el tema principal del capítulo, vamos a detenernos brevemente para hacer algunos comentarios acerca de los tres tipos de derivadas con respecto al tiempo que se utilizan en el texto. Para ilustrar esto utilizaremos un ejemplo casero, como es el problema de referir la concentración de peces en el río Magdalena.

Puesto que los peces se están moviendo, su concentración c será una función de la posición (x, y, z) y del tiempo (t) .

Derivada parcial con respecto al tiempo, $\partial c/\partial t$

Supongamos que estamos sobre un puente y observamos cómo varía la concentración de peces exactamente debajo de nosotros con el tiempo. Estamos, pues, observando cómo varía la concentración con el tiempo, para una posición fija en el espacio. De acuerdo con esto, $\partial c/\partial t$ indica la «parcial de c con respecto a t, manteniendo constantes x, y, z».

Derivada total con respecto al tiempo, dc/dt

Supongamos ahora que en vez de estar sobre el puente, vamos en una lancha a motor que se mueve en el río en todas direcciones, unas veces en contra de la corriente, otras a través, y tal vez otras a favor de la corriente. Al referir la variación de la concentración de peces con respecto al tiempo, los números que resultan han de reflejar también el movimiento de la lancha. La derivada total con respecto al tiempo viene dada por

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (4.1)$$

en la que **dx/dt , dy/dt y dz/dt** son los componentes de la velocidad de la lancha.

Derivada substancial con respecto al tiempo, Dc/Dt

Supongamos que vamos en una canoa a la que no se comunica energía, sino que simplemente flota. En este caso, la velocidad del observador es exactamente la misma que la velocidad de la corriente v . Al referir la variación de la concentración de peces con respecto al tiempo, los números dependen de la velocidad local de la corriente. Esta derivada es una clase especial de derivada total con respecto al tiempo que se denomina «derivada substancial» o, a veces (más lógicamente), «derivada siguiendo el

movimiento». Está relacionada con la derivada parcial con respecto al tiempo de la forma siguiente:

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} \quad (4.2)$$

en la que v_x , v_y y v_z son los componentes de la velocidad local del fluido v .

El estudiante deberá de entender perfectamente el significado físico de estas tres derivadas. Recuérdese que $\partial c/\partial t$ es la derivada para un punto fijo en el espacio y Dc/Dt es la derivada calculada por un observador que flota corriente abajo con el fluido.

4.1 LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

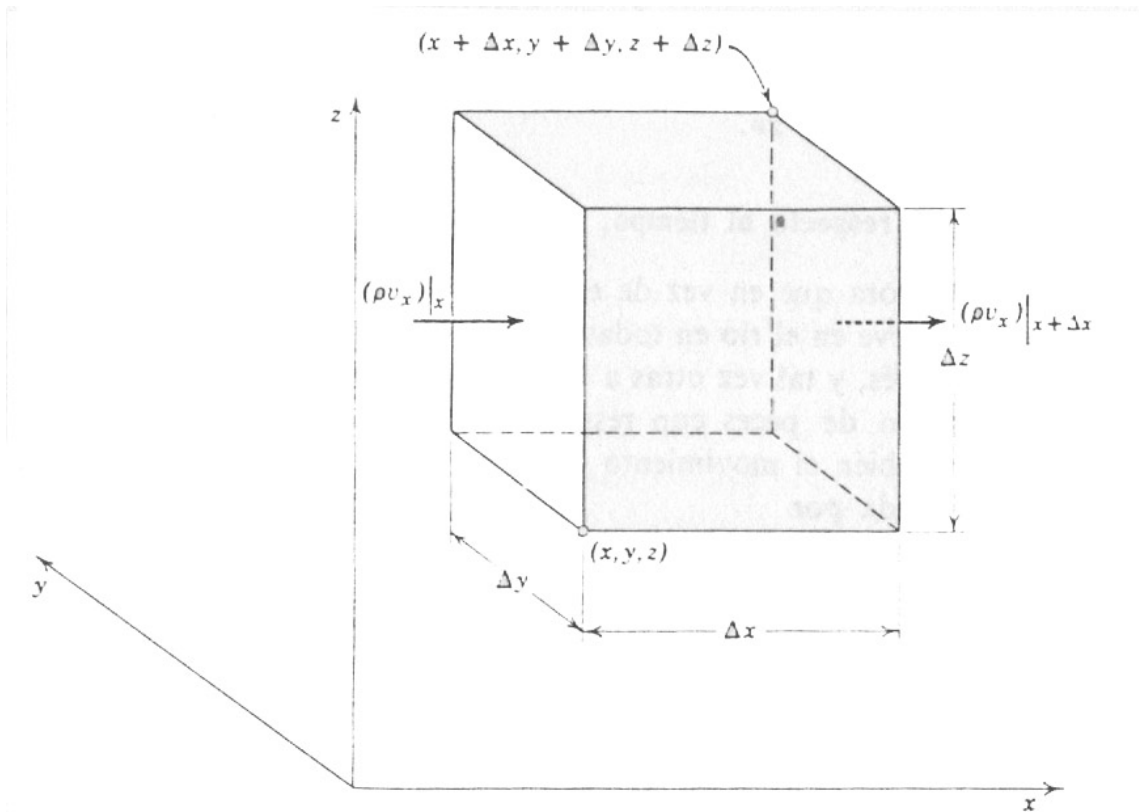
Esta ecuación se deduce aplicando un balance de materia a un elemento estacionario de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, a través del que está circulando el fluido (véase Figura 17):

$$\boxed{\text{Velocidad de acumulación de materia}} = \boxed{\text{Velocidad de entrada de materia}} - \boxed{\text{Velocidad de salida de materia}} \quad (4.3)$$

Comenzamos considerando el par de caras perpendiculares al eje x . La velocidad de entrada de materia a través de la cara x es $(\rho v_x)|_x \Delta y \Delta z$, y la velocidad de salida de materia a través de la cara $x + \Delta x$ es $(\rho v_x)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$. Para los otros dos pares de caras pueden escribirse expresiones análogas. La velocidad de acumulación de materia en el elemento de volumen es $(\Delta x \Delta y \Delta z)(\partial \rho / \partial t)$. El balance de materia queda por tanto

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta y \Delta z [(\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+\Delta x}] + \Delta x \Delta z [(\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_{y+\Delta y}] + \Delta x \Delta y [(\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_{z+\Delta z}] \quad (4.3)$$

Figura 17. Región de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ fija en el espacio, a través de la cual está circulando un fluido. (Bird 1993)



Dividiendo toda la ecuación por $(\Delta x \Delta y \Delta z)$, y tomando límites cuando estas dimensiones tienden a cero, se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right) \quad (4.4)$$

Ésta es la *ecuación de continuidad*, que describe la variación de la densidad para un punto fijo, como consecuencia de las variaciones del vector de velocidad másica ρv . La Ec. 4.4 puede escribirse en una forma más conveniente utilizando notación vectorial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho v) \quad (4.5)$$

El término $(\nabla \cdot \rho v)$ se denomina «divergencia:» de ρv , y a veces se escribe $\text{div.} \rho v$. Vease que el vector ρv es la densidad de flujo de materia y que su divergencia tiene un significado sencillo: representa la velocidad neta con que disminuye la densidad de flujo de materia por unidad de volumen. Por lo tanto, la Ec. 4.5 establece simplemente que la velocidad con que aumenta la densidad en el interior de un pequeño elemento de volumen fijo en el espacio, es igual a la velocidad neta de entrada de densidad de flujo de materia en el elemento dividida por su volumen.

Generalmente, es preferible modificar la ecuación 4.4, efectuando la diferenciación que está indicada y reuniendo todas las derivadas de ρ , en el primer miembro :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (4.6)$$

El primer miembro de la Ec. 4.6 es la derivada substancial de la densidad, es decir, la derivada con respecto al tiempo *para un recorrido que sigue el movimiento del fluido*. De acuerdo con esto, la Ec. 4.6 puede expresarse abreviadamente en esta forma:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot v) \quad (4.7)$$

en la que el operador D/Dt está definido por la Ec. 4.2. La ecuación de continuidad, expuesta en esta forma, describe la velocidad de variación de la densidad, tal como la ve un observador que «flota» con el fluido.

Recuérdese que esta ecuación es sencillamente una formulación de la conservación de la materia. Es preciso señalar que la deducción puede efectuarse igualmente para un elemento de volumen de una forma arbitraria cualquiera, y no esta por lo tanto restringida para el caso del elemento paralelepédico que se ha presentado aquí.

Una forma especial muy importante de la ecuación de continuidad, que se utilizará posteriormente, es la correspondiente a un fluido de densidad constante, para el que (fluido incompresible)

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (4.8)$$

Aunque en realidad ningún fluido es totalmente incompresible, en la práctica se puede admitir con mucha frecuencia que la densidad es constante, con lo que se obtiene una considerable simplificación, sin cometer casi error. Obsérvese que para que la Ec. 4.8 sea válida, sólo es necesario que ρ permanezca constante para un elemento de fluido que se mueva a lo largo de una línea de corriente, es decir, que $D\rho/Dt$ sea cero.

4.2 LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Para un elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, como el utilizado en la sección anterior, se puede escribir el siguiente balance de cantidad de movimiento:

$$\boxed{\text{Velocidad de acumulación de cantidad de movimiento}} = \boxed{\text{Velocidad de entrada de cantidad de movimiento}} - \boxed{\text{Velocidad de salida de cantidad de movimiento}} + \boxed{\text{Suma de las fuerzas que actúan sobre el sistema}} \quad (4.9)$$

Obsérvese que la Ec. 4.9 corresponde exactamente a una ampliación de la ecuación 3.1 para sistemas en estado no estacionario.

Sin embargo, además de tener en cuenta el comportamiento no estacionario, permitiremos al fluido que se mueva en una dirección arbitraria a través de las seis caras del elemento de volumen, igual que en 3.1. Es preciso resaltar que la Ec. 4.9 es la ecuación de un *vector*, con componentes para cada una de las tres direcciones coordenadas, x, y y z. Para mayor sencillez, comenzaremos considerando el componente x de cada uno de los términos de la Ec. 4.9; los componentes y y z se pueden obtener por analogía.

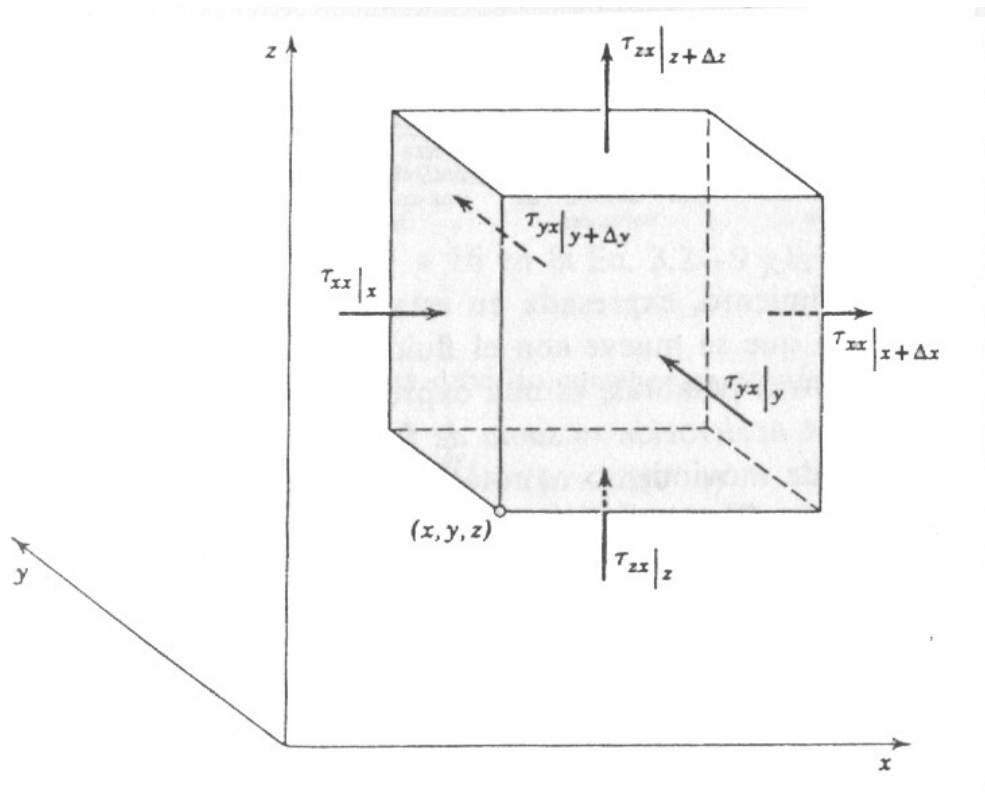
Vamos a considerar en primer lugar las velocidades de flujo del componente x de la cantidad de movimiento que entra y sale del elemento de volumen que se indica en la Figura 18. La cantidad de movimiento entra y sale del elemento de volumen en virtud de dos mecanismos: por convección (es decir, debido al flujo global del fluido) y por transporte molecular (o sea, a causa de los gradientes de velocidad).

La velocidad con la que entra por convección el componente x de la cantidad de movimiento por la cara situada en x es $\rho v_x v_x|_x \Delta y \Delta z$, y la velocidad con la que sale por $x + \Delta x$ es $\rho v_x v_x|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$. La velocidad a la que entra por y es $\rho v_y v_x|_y \Delta x \Delta z$. Para las demás caras se pueden escribir expresiones similares. Vemos, por tanto, que es preciso considerar el flujo convectivo de

la cantidad de movimiento x, a través de las seis caras, y que el flujo convectivo neto, de la cantidad de movimiento x, en el elemento de volumen, es:

$$\Delta y \Delta z (\rho v_x v_x|_x - \rho v_x v_x|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z (\rho v_y v_x|_y - \rho v_y v_x|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y (\rho v_z v_x|_z - \rho v_z v_x|_{z+\Delta z}) \quad (4.10)$$

Figura 18. Elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, en el que se señala con flechas la dirección en que se transporta el componente x de la cantidad de movimiento a través de las superficies. (Bird 1993).



De igual forma, la velocidad con la que el componente x de la cantidad de movimiento entra por transporte molecular por la cara situada en x es $\tau_{xx}|_x \Delta y \Delta z$, y la con la que sale por $x + \Delta x$ es $\tau_{xx}|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$. La velocidad con que entra por y es $\tau_{xy}|_y \Delta x \Delta z$; para las otras tres caras se pueden obtener

expresiones similares (véase Figura 18). Téngase en cuenta que τ_{yx} es la densidad de flujo de cantidad de movimiento x a través de una cara perpendicular al eje y. Sumando estas seis contribuciones, se obtiene

$$\Delta y \Delta z (\tau_{xx}|_x - \tau_{xx}|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z (\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y (\tau_{zx}|_z - \tau_{zx}|_{z+\Delta z}) \quad (4.11)$$

Obsérvese que, de igual forma que antes, estas densidades de flujo de cantidad de movimiento pueden considerarse como esfuerzos. Por lo tanto, τ_{xx} es el esfuerzo *normal* que actúa sobre la cara x, y τ_{yx} es el esfuerzo *tangencial* (o *cortante*) que actúa sobre la cara y en la dirección x, y que resulta como consecuencia de las fuerzas viscosas.

En la mayor parte de los casos, las únicas fuerzas importantes serán las procedentes de la presión del fluido p y la fuerza gravitacional por unidad de masa g.

La resultante de estas fuerzas en la dirección x será, evidentemente

$$\Delta y \Delta z (p|_x - p|_{x+\Delta x}) + \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.12)$$

La presión de un fluido en movimiento está definida por la ecuación de estado $p = p(\rho, T)$, y es una magnitud escalar.

Finalmente, la velocidad de acumulación de cantidad de movimiento x en el elemento es $\Delta x \Delta y \Delta z (\partial \rho v_x / \partial t)$. Substituimos ahora las anteriores expresiones en la Ec. 4.9. Dividiendo toda la ecuación que resulta por $\Delta x \Delta y \Delta z$, y tomando el límite cuando Δx , Δy e Δz , tienden a cero, se obtiene el componente x de la ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho v_x = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_x \right) \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right) - \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned} \quad (4.13)$$

Los componentes y y z, que pueden obtenerse de una forma análoga, son

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho v_y = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_y + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_y \right) \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right) - \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho g_y \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho v_z = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_z + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_z + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_z \right) \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right) - \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho g_z \end{aligned} \quad (4.15)$$

Las magnitudes ρv_x , ρv_y , ρv_z son los componentes del vector velocidad másica ρv ; de igual forma, g_x , g_y , g_z , son los componentes de la aceleración gravitacional g . Por otra parte, $\partial \rho / \partial x$, $\partial \rho / \partial y$, $\partial \rho / \partial z$, son los componentes de un vector $\nabla \rho$, denominado «gradiente de ρ » (a veces se escribe $\text{grad } \rho$). Los términos $\rho v_x v_x$, $\rho v_x v_y$, $\rho v_x v_z$, $\rho v_y v_z$, etc., son los nueve componentes de la densidad de flujo convectivo de cantidad de movimiento $\rho v v$, que es el «producto diádico»* de ρv y v . Análogamente, τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} , etc., son los nueve componentes de τ , que es el «tensor esfuerzo».

Como las Ecs. 4.13, 4.14 y 4.15 ocupan mucho espacio, es conveniente combinarlas con el fin de obtener la sencilla ecuación vectorial:

$\frac{\partial}{\partial t} \rho v =$	$-\left[\nabla \cdot \rho v v\right]$	$-\Delta p$	
Velocidad de aumento de cantidad de movimiento por unidad de volumen	Velocidad de ganancia de cantidad de movimiento por convección, por unidad de volumen	Fuerza de presión que actúa sobre el elemento por unidad de volumen	
	$-\left[\nabla \cdot \tau\right]$	$+\rho g$	(4.16)
	Velocidad de ganancia de cantidad de movimiento por transporte viscoso, por unidad de volumen	Fuerza de gravitación que actúa sobre el elemento por unidad de volumen	

Es preciso advertir al estudiante que $[\nabla \cdot \rho v v]$ y $[\nabla \cdot \tau]$ no son divergencias simples, debido a la naturaleza tensorial de $\rho v v$ y τ . Sin embargo la interpretación física es análoga a la de $(\nabla \cdot \rho v)$ en el capítulo 4.1; mientras que $(\nabla \cdot \rho v)$ representa la velocidad de pérdida de materia (un escalar) por unidad de volumen debida al flujo del fluido, la magnitud $[\nabla \cdot \rho v v]$ representa la velocidad de pérdida de cantidad de movimiento (un vector) por unidad de volumen debido al flujo del fluido. La Ec. 4.13 puede reordenarse, con ayuda de la ecuación de continuidad, para obtener

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad (4.17)$$

Para los componentes y y z pueden obtenerse expresiones análogas. Sumando vectorialmente los tres componentes, se llega a

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\Delta p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g \quad (4.18)$$

Masa por unidad de volumen, multiplicada por aceleración	Fuerza de presión sobre el elemento por unidad de volumen	Fuerza viscosa sobre el elemento por unidad de volumen	Fuerza gravitacional sobre el elemento por unidad de volumen
--	---	--	--

La ecuación de movimiento, expresada en esta forma, establece que un pequeño elemento de volumen que se mueve con el fluido es acelerado por las fuerzas que actúan sobre él. En otras palabras, es una expresión de la segunda ley de Newton, según la cual, **masa x aceleración = suma de fuerzas**. Vemos, por lo tanto, que el balance de cantidad de movimiento es totalmente equivalente a la segunda ley de Newton del movimiento. Obsérvese que las dos formas de la ecuación de movimiento que se dan en las Ecs. 4.16 y 4.18, corresponden a las dos formas de la ecuación de continuidad de las Ecs. 4.5 y 4.6. En cada caso, la primera forma representa un balance aplicado a un elemento de volumen fijo en el espacio, y la segunda es una descripción de las variaciones que tienen lugar en un elemento que sigue el movimiento del fluido. Es necesario tener en cuenta que las Ecs. 4.13.a 4.18 son válidas para cualquier medio continuo.

Con el fin de utilizar estas ecuaciones para determinar las distribuciones de velocidad, hay que expresar los distintos esfuerzos en función de los gradientes de velocidad y las propiedades del fluido. Para fluidos newtonianos, estas expresiones son:

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v) \quad (4.19)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v) \quad (4.20)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v) \quad (4.21)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (4.22)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (4.23)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (4.24)$$

Las Ecs. 4.19 a 4.24 se han expuesto aquí sin demostración, debido a que es demasiado larga. Estas ecuaciones, que constituyen un planteamiento más general de la ley de Newton de la viscosidad, correspondiente a la Ec. 2.1, se aplican a los casos complejos de flujo, en los que el fluido circula en todas las direcciones. Cuando el fluido circula en la dirección X, entre dos láminas perpendiculares a la dirección y, de forma que v_x , es una función exclusiva de y, de esta serie de seis ecuaciones se obtiene $\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ y $\tau_{yx} = -\mu(dv_x/dy)$, que es idéntica a la Ec. 2.1.

Substituyendo las Ecs. 4.19 a 4.24 en la Ec. 4.17 y las ecuaciones correspondientes para y y z, se obtienen las ecuaciones generales de movimiento para un fluido newtoniano que presenta variación de la densidad y la viscosidad:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_x}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] + \rho g_x \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_y}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] + \rho g_y \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_z}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] + \rho g_z \end{aligned} \quad (4.27)$$

Estas ecuaciones, juntamente con la ecuación de continuidad, la ecuación de estado $p = p(\rho)$, la variación de la viscosidad con la densidad $\mu = \mu(\rho)$ y las condiciones iniciales y límite, determinan completamente la presión, densidad y los componentes de la velocidad, para el flujo isotérmico de un fluido.

Rara vez se utilizan estas ecuaciones en su forma completa para el planteamiento de problemas de flujo, sino que generalmente resulta más conveniente emplear formas restringidas de las mismas.

(i) **Para ρ constante y μ constante**, las Ecs. 4.25, 4.26 y 4.27, pueden simplificarse mediante la ecuación de continuidad $[(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0]$ para obtener:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho g \quad (4.28)$$

Los componentes cartesianos de esta ecuación vienen dados por las Ecs. (D), (E) y (F) de la Tabla 4.2. La Ec. 4.48 es la conocida **ecuación de Navier-Stokes** (1959) obtenida inicialmente por Navier en Francia, en 1822, mediante consideraciones moleculares.

(ii) Para $[\nabla \cdot \tau] = 0$, la Ec. 4.18 se reduce a

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \rho g \quad (4.29)$$

La Ec. 4.49 es la famosa ecuación *de Euler*, deducida por primera vez en 1775, y que ha sido muy utilizada para describir sistemas de flujo en los que los efectos viscosos son relativamente poco importantes.

4.3 LA ECUACIÓN DE ENERGÍA MECÁNICA

En esta sección vamos a demostrar cómo se puede utilizar la ecuación de movimiento para obtener una descripción de las interconversiones de energía mecánica que tienen lugar en un fluido en movimiento. Se comienza por formar el producto escalar de la velocidad v con la ecuación de movimiento correspondiente a la Ec. 4.18:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -(v \cdot \nabla p) - (v \cdot [\nabla \cdot \tau]) + \rho (v \cdot g) \quad (4.30)$$

Esta ecuación escalar describe la velocidad de variación de la energía cinética por unidad de masa $\frac{1}{2}v^2$ para un elemento de fluido que se mueve con la corriente.

Para el tratamiento que se hace a continuación, resulta más conveniente escribir esta ecuación en función de $\partial/\partial t$, utilizando la ecuación de continuidad; separaremos también en dos términos cada una de las contribuciones viscosas y de presión. Los términos de la ecuación que resulta pueden interpretarse en función de un elemento estacionario de volumen a través del que circula el fluido.

$$\begin{array}{rcc}
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = & - \left[\nabla \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 v \right] & - \left[\nabla \cdot p v \right] \\
 \text{Velocidad de} & \text{Velocidad neta de entrada} & \text{Velocidad de trabajo} \\
 \text{incremento de energía} & \text{de energía cinética debida} & \text{producido por la presión} \\
 \text{cinética por unidad de} & \text{al flujo global} & \text{de los alrededores sobre} \\
 \text{volumen} & & \text{el elemento de volumen} \\
 & & \\
 & - p(-\nabla \cdot v) & - (\nabla \cdot [\tau \cdot v]) \\
 & \text{Velocidad de} & \text{Velocidad de trabajo} \\
 & \text{conversión reversible} & \text{producido por las fuerzas} \\
 & \text{en energía interna} & \text{viscosas que actúan sobre} \\
 & & \text{el elemento de volumen} \\
 & & \\
 & - (-\tau : \nabla v) & + \rho(v \cdot g) \\
 & \text{Velocidad de} & \text{Velocidad de trabajo} \\
 & \text{conversión irreversible} & \text{producido por la fuerza de} \\
 & \text{en energía interna} & \text{gravedad que actúa sobre} \\
 & & \text{el elemento de volumen}
 \end{array} \tag{4.31}$$

Es preciso hacer notar que para fluidos newtonianos $(-\tau : \nabla v)$ es siempre positivo, ya que puede expresarse como una suma de términos elevada al cuadrado:

$$(-\tau : \nabla v) = \mu \Phi_v = \frac{1}{2} \mu \sum_i \sum_j \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \delta_{ij} \right]^2 \tag{4.32}$$

en la que i y j afectan a los valores de x , y , z , siendo $\delta_{ij} = 1$ para $i = j$, y $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Esto indica que en todos los sistemas de flujo existe una degradación de energía mecánica a energía calorífica, y que, por lo tanto, los procesos reales no son reversibles. En ausencia del término $(\tau:\nabla v)$ todas las formas de energía comprendidas en la Ec. 4.31 (cinética, interna y potencial) serían completamente convertibles entre sí.

Debido a los términos $p(\nabla \cdot v)$ y $(\tau:\nabla v)$, el fluido puede calentarse (o enfriarse) internamente. Por lo tanto, cuando se habla de un «sistema isotérmico», en realidad nos referimos a un sistema en el que el calor generado (o absorbido) no da lugar a una variación apreciable de temperatura. La variación de temperatura debido al término $p(\nabla \cdot v)$ es considerable en el caso de gases que sufren una expansión o compresión brusca, como en compresores, turbinas, etc. La variación de temperatura que se produce a causa del término $(\tau:\nabla v)$ sólo puede apreciarse en sistemas con elevada velocidad de flujo, en los que los gradientes de velocidad son grandes, como ocurre en el vuelo a alta velocidad, extrusión rápida y lubricación

4.4 LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN EN COORDENADAS CURVILÍNEAS

Como puede observarse, todas las anteriores deducciones se han efectuado para mayor sencillez, en coordenadas rectangulares. Sin embargo, no siempre las coordenadas rectangulares son las más convenientes para la resolución de problemas, a veces resultan más adecuadas las coordenadas curvilíneas. Por ejemplo, se ha visto que en el problema de Hagen-Poiseuille la velocidad axial v_z , es una función exclusiva de la única variable r , cuando se utilizan coordenadas cilíndricas. Si se hubiesen utilizado en cambio

coordenadas rectangulares, v_z sería una función de las dos variables x e y . Análogamente, el planteamiento de la condición límite para la pared del tubo sería más difícil. El uso de coordenadas esféricas en el análisis del flujo alrededor de una esfera, permite describir la velocidad en función de los dos componentes v_r , y v_θ en vez de v_x , v_y y v_z dando lugar también a una simplificación de las condiciones límite. Análogas ventajas pueden obtenerse para las coordenadas curvilíneas en el planteamiento de problemas de flujo, debido a la simplificación de las ecuaciones de variación.

Tabla 1. La ecuación de continuidad en distintos sistemas coordenados.

Coordenadas rectangulares (x, y, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (\text{A})$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (\text{B})$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) = 0 \quad (\text{C})$$

Las ecuaciones de continuidad y movimiento, tal como se han obtenido en las secciones 4.1 y 4.2, están, expresadas en función de las coordenadas x , y , z , los componentes de la velocidad v_x , v_y , y v_z los componentes del esfuerzo cortante, τ_{xx} , τ_{xy} , etc. Para expresar estas ecuaciones en coordenadas esféricas es preciso conocer: (a) las relaciones entre x , y , z y r , θ , ϕ ; (b) las relaciones entre v_x , v_y , v_z y los correspondientes componentes v_r , v_θ , v_ϕ ; y (c) las relaciones entre τ_{xx} , τ_{xy} etc., $\tau_{r\theta}$, $\tau_{r\phi}$, etc. El paso de

coordenadas rectangulares a esféricas puede obtenerse mediante un procedimiento directo, pero resulta muy engorroso, En las Tablas 1, 2, 3 y 4 se tabulan importantes ecuaciones expresadas en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.

A este respecto es conveniente advertir que, así como la ecuación de continuidad puede obtenerse fácilmente en coordenadas curvilíneas mediante un balance aplicado a una envoltura, no ocurre lo mismo con la ecuación de movimiento. En general, este método es muy difícil de aplicar a sistemas con líneas de corriente curvas, y no es recomendable en tales casos. En vez de esto, se partirá siempre de las ecuaciones generales que se indican más adelante.

Tabla 2. La ecuación de movimiento en coordenadas rectangulares (x,y,z).

*** En función de τ :**

Componente x:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \quad (\text{A})$$

Componente y:

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \rho g_y \quad (\text{B})$$

Componente z:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad (\text{C})$$

* En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes:

Componente x:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \quad (D)$$

Componente y:

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \quad (E)$$

Componente z:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \quad (F)$$

Tabla 3. La ecuación de movimiento en coordenadas CILÍNDRICAS (r, θ, z).

* En función de τ :

Componente r^a :

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) + \rho g_r \quad (A)$$

Componente θ^b :

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right) + \rho g_\theta \quad (B)$$

Componente z:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad (C)$$

* En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes:

Componente r^a :

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) + \rho g_r \quad (D)$$

Componente θ^b :

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) + \rho g_\theta \quad (E)$$

Componente z:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \quad (F)$$

Tabla 4. La ecuación de movimiento en coordenadas esféricas (r, θ, φ)

* **En función de τ:**

Componente r:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right) + \rho g_r \quad (\text{A})$$

Componente θ:

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot \theta}{r} \tau_{\phi\phi} \right) + \rho g_\theta \quad (\text{B})$$

Componente φ:

$$\rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2 \cot \theta}{r} \tau_{\theta\phi} \right) + \rho g_\phi \quad (\text{C})$$

* **En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes:**

Componente r:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_\theta \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho g_r \quad (\text{D})$$

Componente θ :

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 v_\theta^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho g_\theta \quad (E)$$

Componente ϕ :

$$\rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\phi \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left(\nabla^2 v_\phi \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho g_\phi \quad (F)$$

En estas ecuaciones:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

Tabla 5. Componentes del tensor esfuerzo en coordenadas rectangulares (x, y, z)

$$\tau_{xx} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \right] \quad (A)$$

$$\tau_{yy} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \right] \quad (B)$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \right] \quad (C)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \quad (D)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \quad (E)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] \quad (F)$$

$$(\nabla \cdot v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (G)$$

Tabla 6. Componentes del tensor esfuerzo en coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$\tau_{rr} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$	(A)
$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$	(B)
$\tau_{zz} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$	(C)
$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$	(D)
$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right]$	(E)
$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]$	(F)
$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	(G)

Tabla 7. Componentes del tensor esfuerzo en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$\tau_{rr} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$	(A)
$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$	(B)
$\tau_{\phi\phi} = -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$	(C)
$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$	(D)
$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = -\mu \left[\frac{\text{sen} \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\text{sen} \theta} \right) + \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right]$	(E)
$\tau_{r\phi} = \tau_{\phi r} = -\mu \left[\frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right]$	(F)
$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \text{sen} \theta) + \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$	(G)

4.5 UTILIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA EL PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS DE FLUJO ESTACIONARIO

Para plantear problemas de flujo, siendo la densidad y la viscosidad constantes, se necesita:

Ecuación de continuidad Tabla 1 (con ρ constante)

Ecuación de movimiento Tablas 2, 3 ó 4 (Ecs. D, E, F)

y las condiciones iniciales y límite. A partir de estas dos ecuaciones se obtienen las distribuciones de presión y velocidad.

Para plantear problemas de flujo isotérmico, cuando la densidad y la viscosidad son variables, se precisa:

Ecuación de continuidad. Tabla 1

Ecuación de movimiento. Tabla 2, 3 ó 4 (Ecs. A, B, C, con expresiones para los componentes de τ en las Tablas 5, 6 ó 7)

Ecuación de estado. $\rho = \rho(p)$

Ecuación para la viscosidad. $\mu = \mu(p)$

Juntamente con las condiciones iniciales y límite. A partir de estas cuatro relaciones se obtienen las distribuciones de velocidad, presión, densidad y viscosidad para un determinado sistema de flujo.

En esta sección se estudia la forma de plantear problemas de, flujo viscoso mediante simplificación de las anteriores ecuaciones, descartando aquellos términos de las ecuaciones generales de valor cero (o muy próximos a cero)

para el caso que se considera. Para determinar que términos han de descartarse nos valemos de nuestra percepción intuitiva acerca del comportamiento del sistema: tipo de flujo, distribución de presión, etc. Una ventaja de este procedimiento consiste en que, una vez terminado este «proceso de descartamiento», se tiene automáticamente una relación completa de las suposiciones que se han efectuado.

Para el flujo *axial de un fluido incompresible en un tubo circular* se ha obtenido en la sección 3.3 la distribución de velocidad, mediante la aplicación de un balance de cantidad de movimiento. Vamos a ver ahora cómo se puede llegar al mismo resultado simplificando las ecuaciones de variación. Las coordenadas cilíndricas son evidentemente las más apropiadas para este problema. Consideremos de nuevo un tubo largo, siendo v_θ y v_r iguales a cero. Debido a la simetría cilíndrica, el componente v_z de la velocidad no será función de θ . De acuerdo con esto, el componente z de la ecuación de movimiento para ρ y μ constantes (véase Tabla 3) será

$$\rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (4.33)$$

Esta ecuación puede simplificarse haciendo aplicación de la ecuación de continuidad, que en este caso se reduce a

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4.34)$$

Resulta evidente que también $\partial^2 v_z / \partial z^2$ es cero, con lo que la Ec. 3.5-.I se transforma en:

$$0 = -\frac{dP}{dz} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \quad (4.35)$$

Integrando dos veces con respecto a r , y utilizando las condiciones límite $v_z = 0$ para $r = R$ y $v_z = \text{finito}$ para $r = 0$,

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (4.36)$$

que es la misma ecuación que la 4.24.

Mediante la aplicación de estos métodos pueden resolverse muchos otros problemas.

5. PERMEABILIDAD RELATIVA EN FRACTURAS: UNA FUNCIÓN LINEAL O NO LINEAL DE LA SATURACIÓN

En 1966, E. S. Romm llevó a cabo un trabajo sobre permeabilidades relativas en fracturas. En su investigación él concluyó que la permeabilidad relativa en fracturas es una función lineal de la saturación. Desde aquel entonces se han llevado a cabo muchos esfuerzos para calcular la permeabilidad relativa en fracturas, éste capítulo presenta el resultado de una investigación experimental que prueba la validez de los resultados de Romm. La investigación se llevó a cabo con los mismos sistemas Kerosene y Agua en planos paralelos que simulan una fractura.

La técnica de la imagen por video fue usada para medir las saturaciones en la fractura. Las razones de permeabilidad relativa fueron calculadas usando la interpretación de Welge de la teoría de Buckley-Levrett después de que el flujo fraccional se ha obtenido del desplazamiento.

El flujo de fluidos en una formación geológica fracturada es de mucho interés para el ingeniero de petróleo, para los geólogos es importante en el movimiento de agua subterránea y para los ingenieros ambientales para evaluar el movimiento de residuos tóxicos en aguas subterráneas. En la industria del petróleo, los hidrocarburos de yacimientos fracturados representan una porción importante del aceite y gas producido en el mundo entero cada año. Con el reciente uso de pozos horizontales para drenar yacimientos fracturados de ha convertido en una necesidad el entender el flujo producido en fracturas.

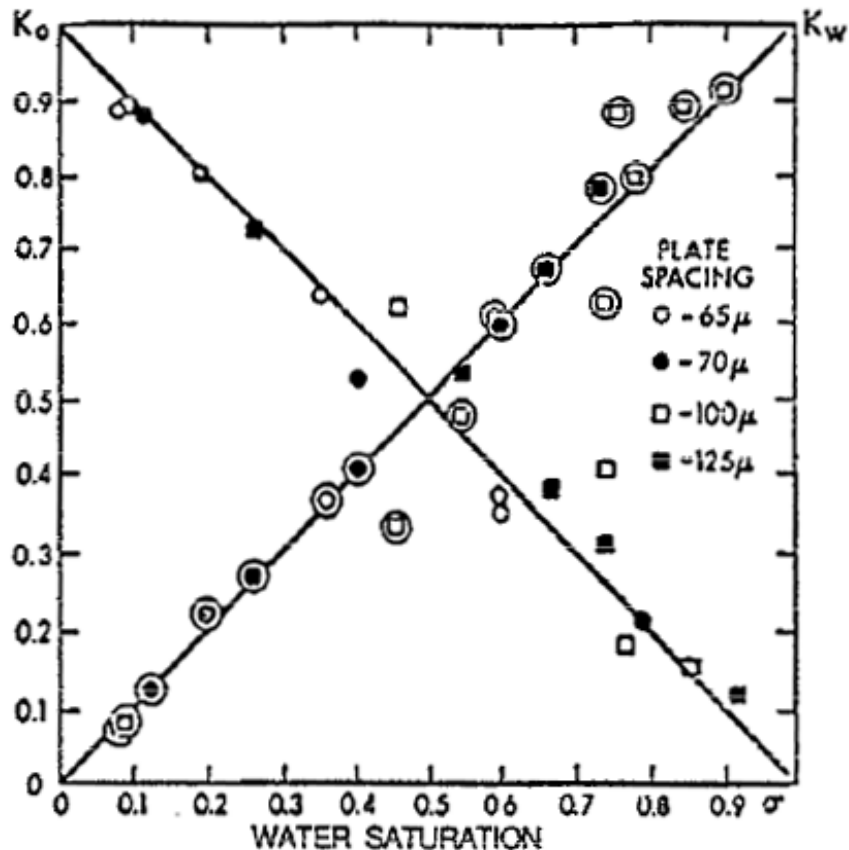
Los datos de permeabilidad relativa son necesarios para predecir el flujo de una fase en presencia de otra. Por esta razón el comportamiento de la

permeabilidad relativa de flujo bifásico en fracturas es de considerable importancia en la estimación de las tasas de producción para modelos de simulación de yacimientos de doble porosidad y doble permeabilidad. Este capítulo fue basado en el artículo "Fracture Relative permeability: Linear or no linear function of saturation" SPE 28701.

5.1 ANTECEDENTES

Hasta ahora, los estudios sobre las permeabilidades relativas en fracturas han sido conducidos por Room 1996, Merrill 1975, Pruess y Tsang 1990 y McDonald et al 1991. Room mostró que las permeabilidades relativas son una función lineal de la saturación (Figura 19).

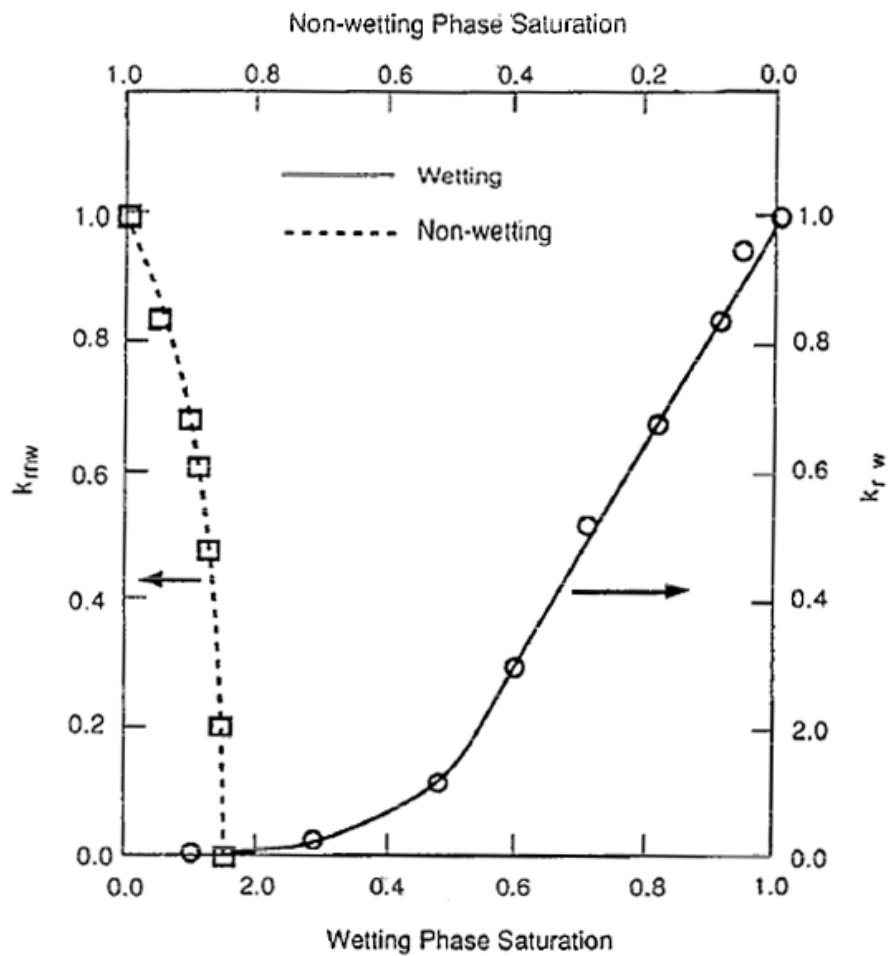
Figura 19. Curvas experimentales de permeabilidad relativa. Pieters 1994



El estudio de Merrill fue inconcluso.

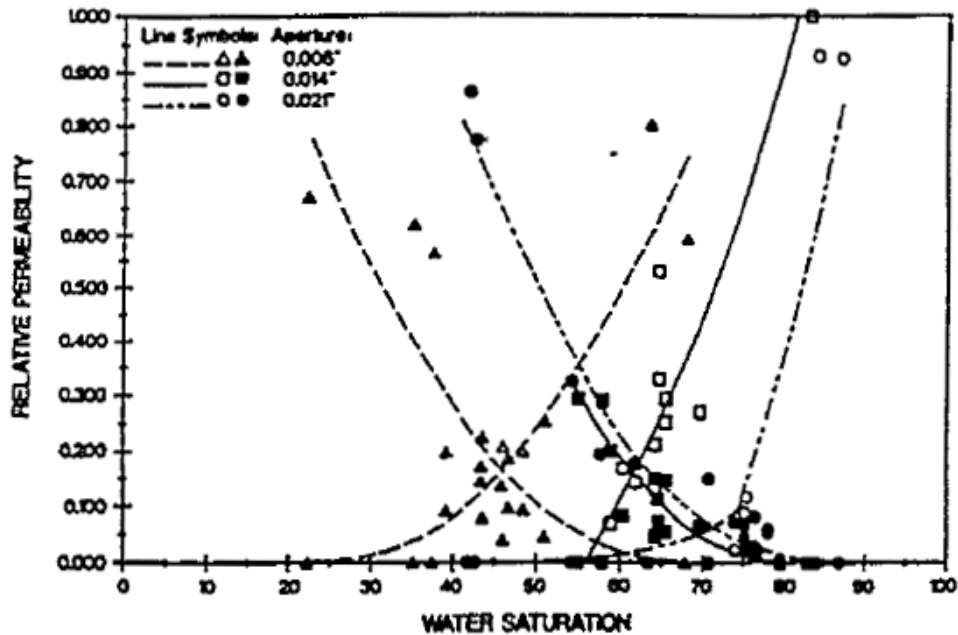
La simulación de una fractura de Pruess y Tsang 1990, mostró, contrario a lo que Room 1966 encontró, que existe una considerable interferencia entre las fases (Figura 20).

Figura 20. Permeabilidades relativas simuladas para drenaje de fase mojanete y no mojanete. Pieters 1994



McDonald et al. 1991 mostró mediciones de permeabilidad relativa no-lineal hechas sobre un corazón de caliza naturalmente fracturada usando técnicas de resonancia magnética nuclear (Figura 21).

Figura 21. Permeabilidades relativas para la caliza fracturada. Pieters 1994



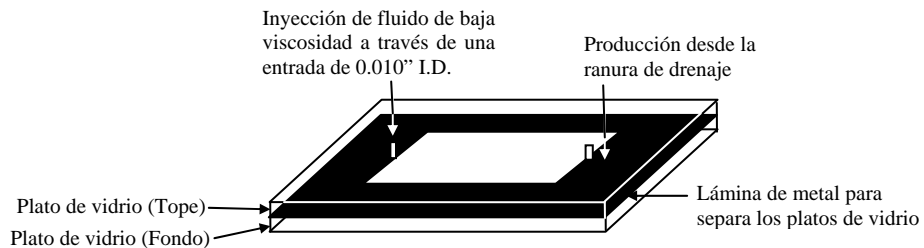
Los resultados de Room son todavía ampliamente utilizados a pesar de que ellos pudieron no haber hecho lo correcto.

Debido a esos resultados conflictivos, se ha despertado una necesidad de realizar investigaciones básicas para responder algunas de esas preguntas.

5.2 APARATOS

5.2.1 Diseño de celdas. Los huecos fueron perforados media pulgada desde el borde de los platos de vidrio de 2" (5.08 cm) por 4" (10.16 cm) y tiras almacenadoras de 0.001" (0.00254cm) fueron colocadas sobre los bordes de los platos de vidrio que tienen los huecos perforados. El otro plato de vidrio fue montado sobre esta adaptación y cementados juntos con epoxy. Piezas de tubing de acero de 1/16 pulgadas fueron puestas en los huecos perforados y cementados allí. La celda es mostrada en la figura 22.

Figura 22. Diseño de una celda Hele-Shaw. Pieters 1994.

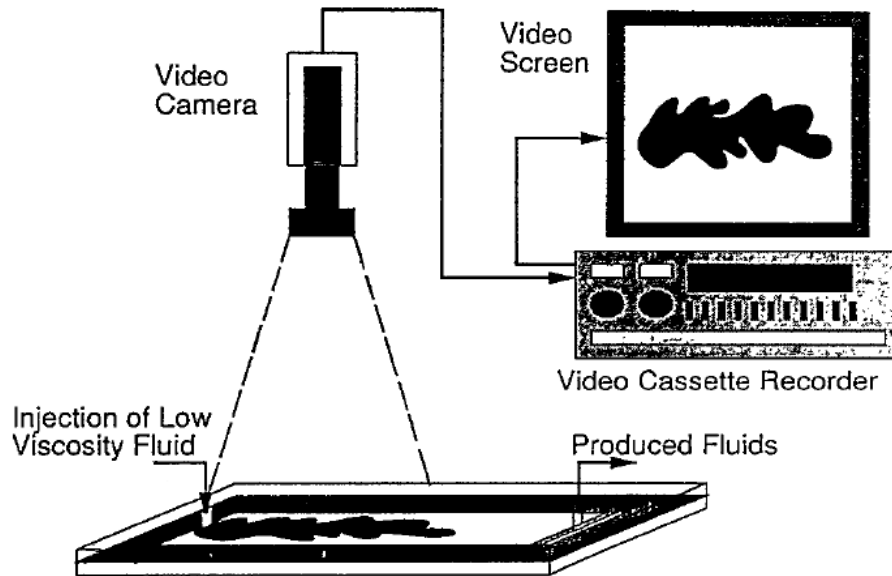


5.2.2 Equipo de videograbadora. Una videograbadora fija con una cámara equipada con lente de aumento fue usada para grabar los experimentos. Un par de lámparas fluorescentes se utilizaron para la iluminación. Un generador de tiempo fue usado para registrar el tiempo sobre la videocámara.

Para analizar la imagen grabada, se utilizó un computador con 8 megabyte de RAM con 40 megabytes de disco duro y un monitor RGB. Una rápida tarjeta capturadora de video DT2255 capaz de capturar imágenes en blanco y negro desde la videograbadora fue usada en el análisis. El equipo de interpretación de datos fue incluido también en el paquete.

Un software de procesamiento de imágenes fue usado para procesar la imagen grabada. Una hoja de cálculo fue usada para el cálculo de la saturación y del flujo fraccional. Una bomba capaz de dar una rata fija desde una jeringa fue usada para inyectar el fluido desplazante. El montaje se muestra en la figura 23.

Figura 23. Arreglo experimental para el experimento. Pieters 1994.



5.3 PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

El siguiente procedimiento fue usado para todas las corridas:

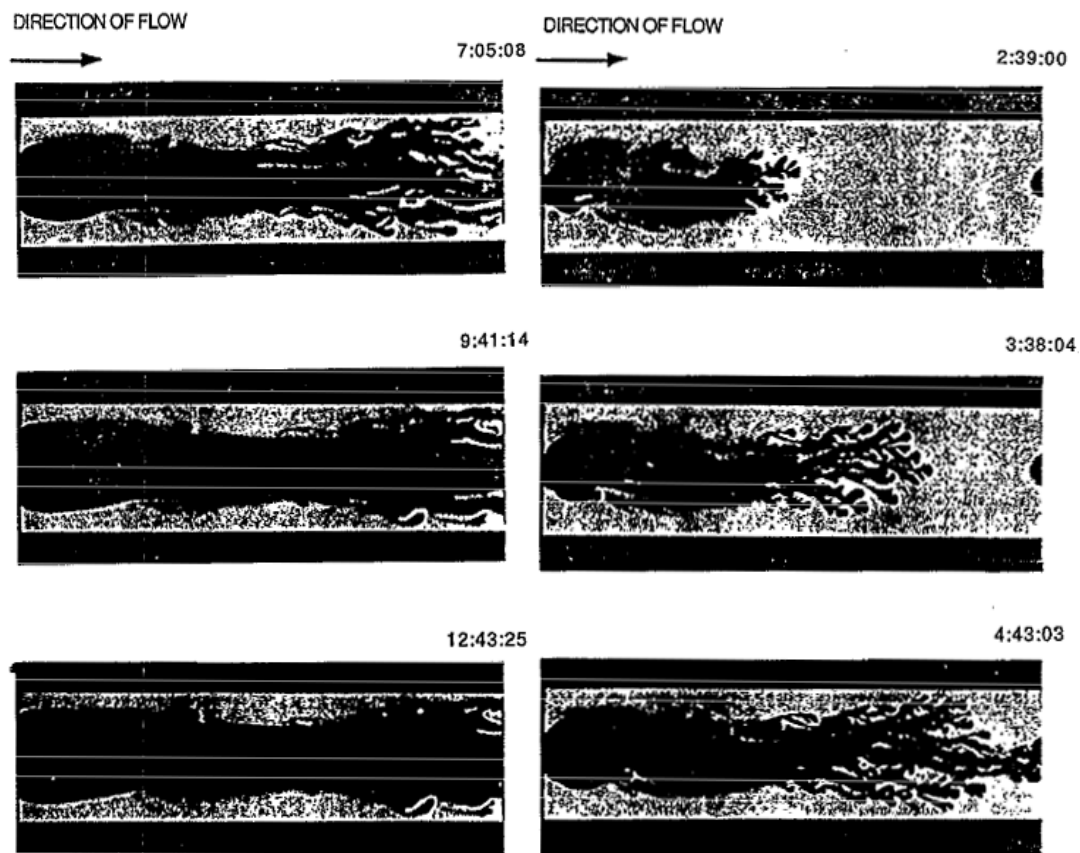
1. La celda fue llenada con Kerosene.
2. Se llenó una jeringa con agua teñida de azul, luego se colocó en la bomba Harvard y el tubing de 1/16" se conectó a la celda.
3. La celda fue ajustada hasta que fuera ortogonal.
4. El foco y apertura de la cámara fueron ajustados para obtener una imagen bien definida.
5. El experimento fue comenzado al presionar el interruptor de la bomba a la primera aparición de el agua teñida de azul en el puerto de entrada, al mismo tiempo se enciende el generador de tiempo de la videocámara. El experimento fue permitido para proceder después del paso del agua, a un punto donde el color azul no cambiara y donde no se formaran nuevos dedos.

6. El proceso se repitió para cada una de las corridas.

5.4 PROCESAMIENTO DE LA IMAGEN DE LA VIDEOGRABADORA

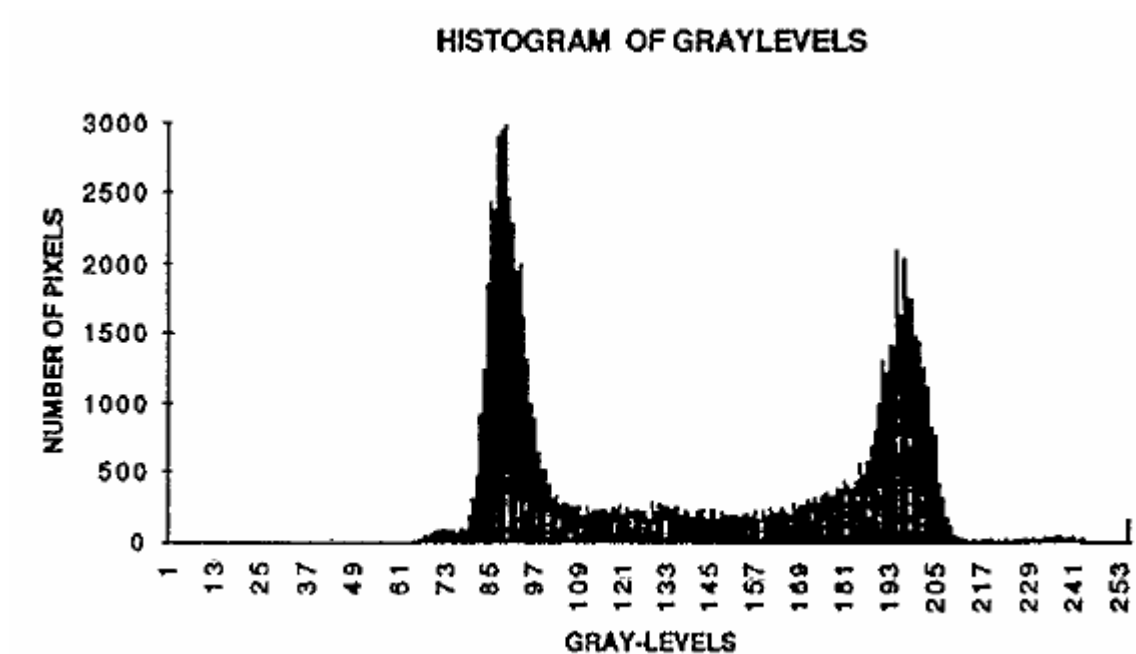
5.4.1 Medida de la saturación. Para realizar un análisis de saturación, se grabaron imágenes 9-12 a varios tiempos durante el proceso de desplazamiento. Un intento fue hecho para obtener por lo menos 2 o 3 cuadros antes del paso con la mayoría de cuadros después del paso. Esta práctica permitió que la forma de la gráfica del recobro contra el volumen de poro del fluido inyectado fuera mejor definida. Las figuras 24a y 24b muestran una versión impresa de las imágenes extraídas.

Figura. 24a y 24b. Imágenes extraídas del experimento en una celda de 1"x 4" (El color negro es agua teñida de azul). Pieters 1994.



La medida de la saturación en la celda, fue realizada tomando un área rectangular de la celda desde el puerto de entrada al de salida. El histograma visualiza el número de píxeles de cada uno de los 255 niveles de gris dentro del área escogida. Un ejemplo de este histograma es mostrado en la figura 25. Estos datos fueron copiados a la hoja de cálculo para hacer el análisis de saturación.

Figura 25. Histograma desde la imagen extraída. Pieters 1994



El histograma muestra dos picos, uno de ellos corresponde al kerosene y el otro al agua azul presente en la celda. Los más bajos niveles de gris con el máximo número de píxeles (los picos) correspondían a la más alta intensidad de luz, mientras que pico con el mínimo nivel de gris correspondía a la más baja intensidad de luz calculada por normalizar el rango a 1. Esas intensidades de luz fueron convertidas a concentraciones usando las leyes de Beer-Lambert, la cual relata la absorción de energía radiante

monocromática paralela por un medio isotrópico homogéneo a la concentración de las especies absorbidas. Ya con las concentraciones se hizo un promedio de la saturación en la celda.

El mismo procedimiento fue empleado para cada una de las imágenes extraídas y para la medida de saturación del frente efluente, la cual por la definición de Welge es la saturación a la cual el radio de permeabilidad relativa medido es relacionado.

5.5 BASE DE CÁLCULO

Primero que todo usaremos la definición de flujo fraccional:

$$f_w = \frac{q_{wo}}{q_{wo} + q_{qo}}, \quad (5.1)$$

Ahora la tasa de agua que entra, es igual al agua que sale de la celda más el kerosene que sale de la celda:

$$q_{wo} + q_{qo} = q_{wi}, \quad (5.2)$$

Reemplazando esta ecuación en la ec. (5.1) tenemos:

$$f_w = \frac{q_{wo}}{q_{wi}}, \quad (5.3)$$

El flujo de agua que sale es igual al flujo de agua que entra menos la medida del cambio de saturación:

$$q_{wo} = q_{wi} - V_p \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad (5.4)$$

Sustituyendo esta ecuación en la ec. (5.3), tenemos:

$$f_w = \frac{q_{wi} - V_p \frac{\Delta S}{\Delta t}}{q_{wi}}, \quad (5.5)$$

Lo cual nos quedaría:

$$f_w = 1 - \frac{V_p}{q_{wi}} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad (5.6)$$

Luego de que se calcula el flujo fraccional en este experimento, se puede calcular la relación de permeabilidad relativa utilizando la siguiente definición de flujo fraccional:

$$f_w = \frac{1}{1 + \frac{K_g \mu_w}{K_w \mu_g}}, \quad (5.5)$$

Despejando la relación de permeabilidad relativa, tenemos:

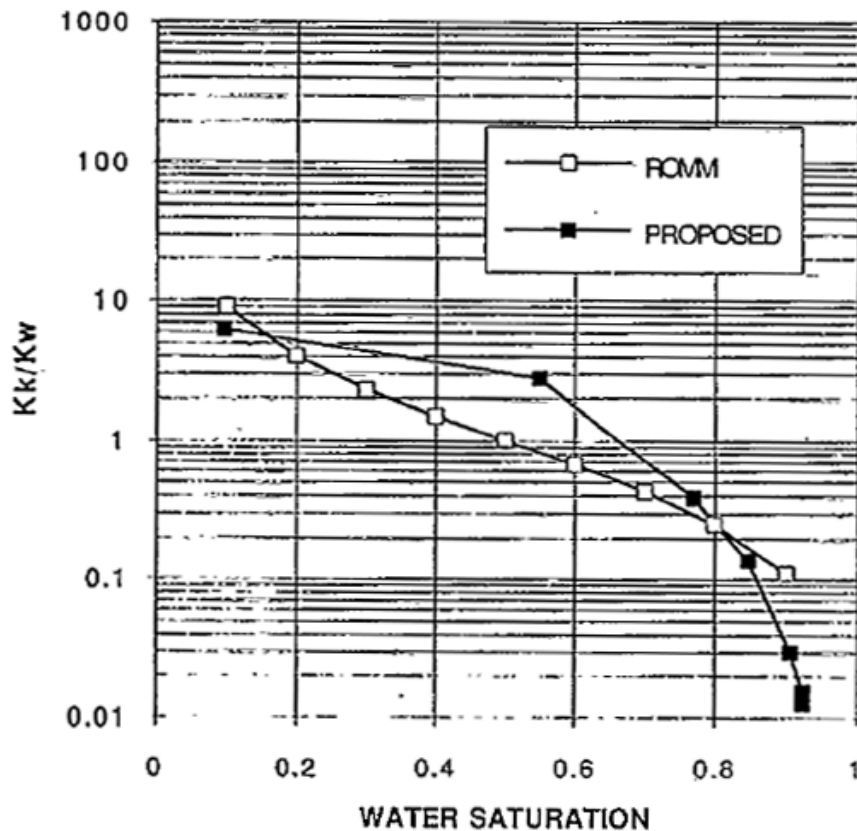
$$\frac{K_w}{K_g} = \frac{\mu_w}{\mu_g} \frac{f_w}{1 - f_w}, \quad (5.6)$$

$$\frac{K_g}{K_w} = \frac{\mu_g}{\mu_w} \frac{1 - f_w}{f_w}, \quad (5.7)$$

5.6 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La figura 26 muestra una comparación entre las relaciones de permeabilidad relativa para el keroseno y el agua medidas en la investigación y las relaciones de permeabilidad relativa para fluidos similares desde el trabajo de Room. Simplemente Room medio permeabilidades relativas actuales, su permeabilidades individuales tuvieron que ser convertidas a relaciones. La comparación revela que la permeabilidad relativa de Room para fracturas ideales de 65 a 125 micrones son lineales sobre una gráfica semilogaritmica, mientras que aquellas medidas sobre las fracturas ideales actuales no lo son.

Figura 26. Comparación con la permeabilidad relativa de Room. Pieters 1994



5.7 POSIBLES ERRORES

1. Las imágenes fueron convertidas a blanco y negro desde color, en la conversión se perdió algo de claridad. Esto resulta en una pequeña variación en las saturaciones.
2. Durante el experimento, la tasa de la bomba pudo no haber sido la misma tasa que al comienzo del experimento.
3. Las leyes de Beer-Lambert muestran una desviación de linealidad a altas concentraciones. Esta situación fue aplicable por lo menos hasta el fin del experimento.

6. FLUJO BIFASICO (AGUA-ACEITE), PERMEABILIDADES EFECTIVAS Y RELATIVAS EN FRACTURAS

En los cursos básicos de yacimientos, nos enseñan que las curvas de permeabilidades relativas en fracturas son una función lineal de la saturación ($k_{ri} = S_{wi}$), según lo establecía E. S. Romm (1966). En este capítulo se propone demostrar analíticamente que las curvas de permeabilidades relativas en fracturas no son una función lineal de la saturación.

Para lograr nuestro objetivo iniciaremos con un balance de cantidad de movimiento a la fractura, y que junto a unas condiciones de frontera nos permitirá encontrar una solución analítica para predecir el comportamiento de las permeabilidades en fracturas.

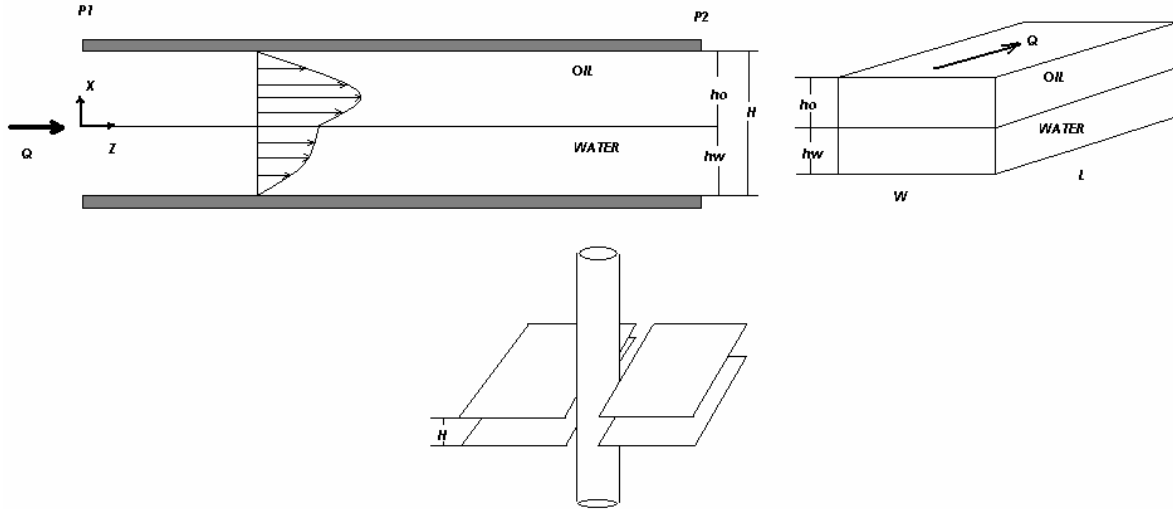
6.1 DESARROLLO MATEMATICO

Para desarrollar el modelo que predice la permeabilidad relativa en fracturas, se van a tener en cuenta las siguientes consideraciones.

1. Flujo laminar y en estado estacionario.
2. Presión capilar nula ($P_c = 0$).

Comenzaremos realizando un Balance de cantidad de movimiento a la fractura mostrada en la figura:

Figura 27. Caracterización de la fractura utilizada en el modelo.



$$L \cdot w \cdot (\tau_{xz})_x - L \cdot w \cdot (\tau_{xz})_{x+\Delta x} + w \cdot \Delta x \cdot (P_1 - P_2) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{(\tau_{xz})_{x+\Delta x} - (\tau_{xz})_x}{\Delta x} \right) = \frac{(P_1 - P_2)}{L}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \frac{P_1 - P_2}{L} \quad (6.1)$$

Esta ecuación es válida tanto para el aceite como para el agua. Integrando la ecuación (6.1) tenemos:

Para el agua:

$$\tau_{xz}^W = \left(\frac{P_1 - P_2}{L} \right) \cdot x + C_1^W \quad (6.2)$$

Para el aceite:

$$\tau_{xz}^O = \left(\frac{P_1 - P_2}{L} \right) \cdot x + C_1^O \quad (6.3)$$

Condición de frontera 1: en $x = 0$; $\tau_{xz}^W = \tau_{xz}^O$.

Reemplazando las siguientes condiciones de frontera en la ecuación (6.2) y (6.3), encontramos que $C_1^W = C_1^O = C_1$.

Aplicando la ley de Newton de la viscosidad tanto para la ecuación (6.2) como para la ecuación (6.3), tenemos:

Para el agua:

$$-\mu_w \cdot \frac{\partial V_z^W}{\partial x} = \left(\frac{P_1 - P_2}{L} \right) \cdot x + C_1$$

$$\int \partial V_z^W = \int - \left(\frac{P_1 - P_2}{\mu_w L} \right) \cdot x \cdot \partial x - \int \frac{C_1}{\mu_w} \cdot \partial x$$

$$V_z^W = - \frac{P_1 - P_2}{2 \cdot \mu_w \cdot L} \cdot x^2 - \frac{C_1}{\mu_w} \cdot x + C_2^W \quad (6.4)$$

Para el aceite:

$$-\mu_o \cdot \frac{\partial V_z^O}{\partial x} = \left(\frac{P_1 - P_2}{L} \right) \cdot x + C_1$$

$$\int \partial V_z^O = \int - \left(\frac{P_1 - P_2}{\mu_o L} \right) \cdot x \cdot \partial x - \int \frac{C_1}{\mu_o} \cdot \partial x$$

$$V_z^O = - \frac{P_1 - P_2}{2 \cdot \mu_o \cdot L} \cdot x^2 - \frac{C_1}{\mu_o} \cdot x + C_2^O \quad (6.5)$$

Ahora, para poder determinar las velocidades tanto para el agua como para el aceite (V_z^W, V_z^O), necesitamos conocer las constantes de integración (C_1, C_2^W, C_2^O). Estas constantes las podemos calcular con las siguientes condiciones de fronteras:

Condición de frontera 2: en $x = 0$; $V_z^W = V_z^O$.

Condición de frontera 3: en $x = -h_w$; $V_z^W = 0$.

Condición de frontera 4: en $x = h_o$; $V_z^O = 0$.

Aplicando la condición frontera 2, en las ecuaciones (6.4) y (6.5) tenemos:

$$C_2^W = C_2^O \quad (6.6)$$

Aplicando la condición frontera 3, en la ecuación (6.4) tenemos:

$$0 = - \frac{P_1 - P_2}{2 \cdot \mu_w \cdot L} \cdot h_w^2 + \frac{C_1}{\mu_w} \cdot h_w + C_2^W \quad (6.7)$$

Aplicando la condición frontera 4, en la ecuación (6.4) tenemos:

$$0 = -\frac{P_1 - P_2}{2 \cdot \mu_O \cdot L} \cdot h_O^2 - \frac{C_1}{\mu_O} \cdot h_O + C_2^O \quad (6.8)$$

Solucionando el sistema de 3*3 (ecuaciones 6.6, 6.7 y 6.8) tenemos:

$$C_1 = \frac{(P_1 - P_2)}{2 \cdot L} \left(\frac{h_W^2 \mu_O - h_O^2 \mu_W}{h_W \mu_O + h_O \mu_W} \right) \quad (6.9)$$

$$C_2^W = C_2^O = -\frac{(P_1 - P_2)}{2 \cdot L} \left[\frac{h_O h_W (h_O + h_W)}{h_W \mu_O + h_O \mu_W} \right] \quad (6.10)$$

Reemplazando el valor de las constantes C_1, C_2^W, C_2^O en las ecuaciones (6.4) y (6.5) tenemos:

$$V_z^W = \frac{(P_1 - P_2)}{2 \cdot \mu_W \cdot L} \left[\frac{\mu_W h_W h_O (h_O + h_W)}{h_W \mu_O + h_O \mu_W} - \frac{h_W^2 \mu_O - h_O^2 \mu_W}{h_W \mu_O + h_O \mu_W} \cdot x - x^2 \right] \quad (6.11)$$

$$V_z^O = \frac{(P_1 - P_2)}{2 \cdot \mu_O \cdot L} \left[\frac{\mu_O h_W h_O (h_O + h_W)}{h_W \mu_O + h_O \mu_W} - \frac{h_W^2 \mu_O - h_O^2 \mu_W}{h_W \mu_O + h_O \mu_W} \cdot x - x^2 \right] \quad (6.12)$$

Con estos resultados calculamos las velocidades medias para cada fluido de la siguiente forma:

$$\overline{V_z^W} = \frac{1}{h_W} \cdot \int_{-h_W}^0 V_z^W \cdot \partial x = \frac{(P_1 - P_2)}{12 \cdot \mu_W \cdot L} \left(\frac{3\mu_W h_O^2 h_W + 4\mu_W h_O h_W^2 + h_W^3 \mu_O}{h_W \mu_O + h_O \mu_W} \right) \quad (6.13)$$

$$\overline{V_z^O} = \frac{1}{h_O} \cdot \int_0^{h_O} V_z^O \cdot \partial x = \frac{(P_1 - P_2)}{12 \cdot \mu_O \cdot L} \left(\frac{3\mu_O h_W^2 h_O + 4\mu_O h_O^2 h_W + h_O^3 \mu_W}{h_W \mu_O + h_O \mu_W} \right) \quad (6.14)$$

A partir de las velocidades medias hallamos los flujos tanto para el agua como para el aceite:

$$Q = A \cdot \bar{V}$$

Para el agua:

$$Q_z^w = \frac{(P_1 - P_2) \cdot A_w}{12 \cdot \mu_w \cdot L} \left(\frac{3\mu_w h_o^2 h_w + 4\mu_w h_o h_w^2 + h_w^3 \mu_o}{h_w \mu_o + h_o \mu_w} \right) \quad (6.15)$$

Par el aceite:

$$Q_z^o = \frac{(P_1 - P_2) \cdot A_o}{12 \cdot \mu_o \cdot L} \left(\frac{3\mu_o h_w^2 h_o + 4\mu_o h_o^2 h_w + h_o^3 \mu_w}{h_w \mu_o + h_o \mu_w} \right) \quad (6.16)$$

Combinando estas ecuaciones con la ecuación de DARCY tenemos:

Para el agua:

$$\frac{K_{ew} \cdot A_s \cdot \Delta P_w}{\mu_w \cdot L} = \frac{(P_1 - P_2) \cdot A_w}{12 \cdot \mu_w \cdot L} \left(\frac{3\mu_w h_o^2 h_w + 4\mu_w h_o h_w^2 + h_w^3 \mu_o}{h_w \mu_o + h_o \mu_w} \right) \quad (6.17)$$

Donde;

$$\Delta P_w = \frac{(P_1 - P_2)}{S_w} \quad (\text{Ver sección 6.3}) \quad (6.18)$$

$$A_s = w \cdot (h_o + h_w) \quad (6.19)$$

$$A_w = w \cdot h_w \quad (6.19a)$$

Reemplazando las ecuaciones (6.18), (6.19) y (6.19a) en la ecuación (6.17) y despejando la permeabilidad tenemos:

$$K_{ew} = \frac{1}{12} \cdot \frac{S_w h_w}{h_w + h_o} \left(\frac{3\mu_w h_o^2 h_w + 4\mu_w h_o h_w^2 + h_w^3 \mu_o}{h_w \mu_o + h_o \mu_w} \right) \quad (6.20)$$

Simultáneamente para el aceite tenemos:

$$\Delta P_o = \frac{(P_1 - P_2)}{1 - S_w} \quad (\text{Ver sección 6.3})$$

$$A_s = w \cdot (h_o + h_w)$$

$$A_o = w \cdot h_o$$

$$K_{eo} = \frac{1}{12} \cdot \frac{(1 - S_w) h_o}{h_w + h_o} \left(\frac{3\mu_o h_w^2 h_o + 4\mu_o h_o^2 h_w + h_o^3 \mu_w}{h_w \mu_o + h_o \mu_w} \right) \quad (6.21)$$

como:

$$\frac{h_w}{H} = \frac{\text{vol.}_w}{\text{vol.}_w + \text{vol.}_o} = S_w \quad \text{y} \quad \frac{h_o}{H} = \frac{\text{vol.}_o}{\text{vol.}_w + \text{vol.}_o} = S_o$$

(Ver sección 6.3)

Entonces:

$$h_w = S_w H \quad (6.22)$$

$$h_o = S_o H \quad (6.23)$$

Reemplazando las ecuaciones (6.22) y (6.23) en las ecuaciones (6.20) y (6.21) respectivamente, tenemos que:

$$K_{eW} = \frac{H^2}{12} \cdot \left[\frac{S_W^5 (\mu_o - \mu_w) + S_W^3 \mu_w (3 - 2S_W)}{S_W (\mu_o - \mu_w) + \mu_w} \right] \quad (6.24)$$

$$K_{eO} = \frac{H^2}{12} \cdot \left[\frac{S_o^5 (\mu_w - \mu_o) + S_o^3 \mu_o (3 - 2S_o)}{S_o (\mu_w - \mu_o) + \mu_o} \right] \quad (6.25)$$

Ahora, dividiendo por la permeabilidad absoluta ($K_{abs} = H^2 / 12$, expresión encontrada en el libro de Aguilera 2003), hallamos las expresiones para las permeabilidades relativas:

$$K_{rW} = \frac{K_{eO}}{K_{abs}} = \left[\frac{S_W^5 (\mu_o - \mu_w) + S_W^3 \mu_w (3 - 2S_W)}{S_W (\mu_o - \mu_w) + \mu_w} \right] \quad (6.26)$$

$$K_{rO} = \frac{K_{eO}}{K_{abs}} = \left[\frac{S_o^5 (\mu_w - \mu_o) + S_o^3 \mu_o (3 - 2S_o)}{S_o (\mu_w - \mu_o) + \mu_o} \right] \quad (6.27)$$

Estas dos ecuaciones (6.26 y 6.27) son las propuestas para calcular las permeabilidades relativas en fracturas agua-aceite.

6.2 EJEMPLO

Con el fin de observar los resultados generados por las ecuaciones 6.26 y 6.27 se presentaran los siguientes ejemplos.

- a. Encontrar las curvas de permeabilidades relativas para un yacimiento fracturado cuyas fracturas predominantemente son horizontales, usando las ecuaciones (6.26) y (6.27), utilizando ($\mu_w = 1cP, \mu_o = 0.68cP$).
- b. Con los resultados experimentales obtenidos por Pieters y Graves, compararlos con los resultados obtenidos con la ecuación propuesta 6.26 y 6.27. graficar k_o/k_w contra S_w .

Respuesta:

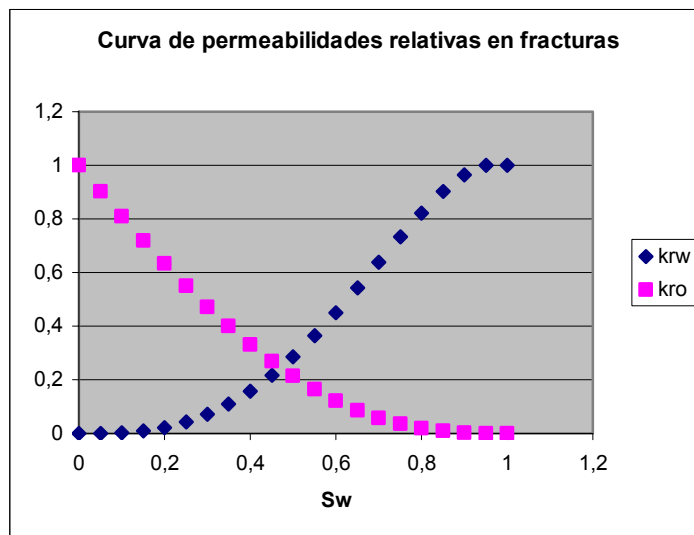
a.

S_w	k_{rw}	S_o	k_{ro}
0	0	1	1
0,05	0,00036829	0,95	0,90338049
0,1	0,00288926	0,9	0,80973223
0,15	0,00954643	0,85	0,71940357
0,2	0,02211282	0,8	0,63277949
0,25	0,04211957	0,75	0,55027174
0,3	0,07082124	0,7	0,47230796
0,35	0,10915743	0,65	0,39931959
0,4	0,15771009	0,6	0,33172844
0,45	0,21665607	0,55	0,26993178

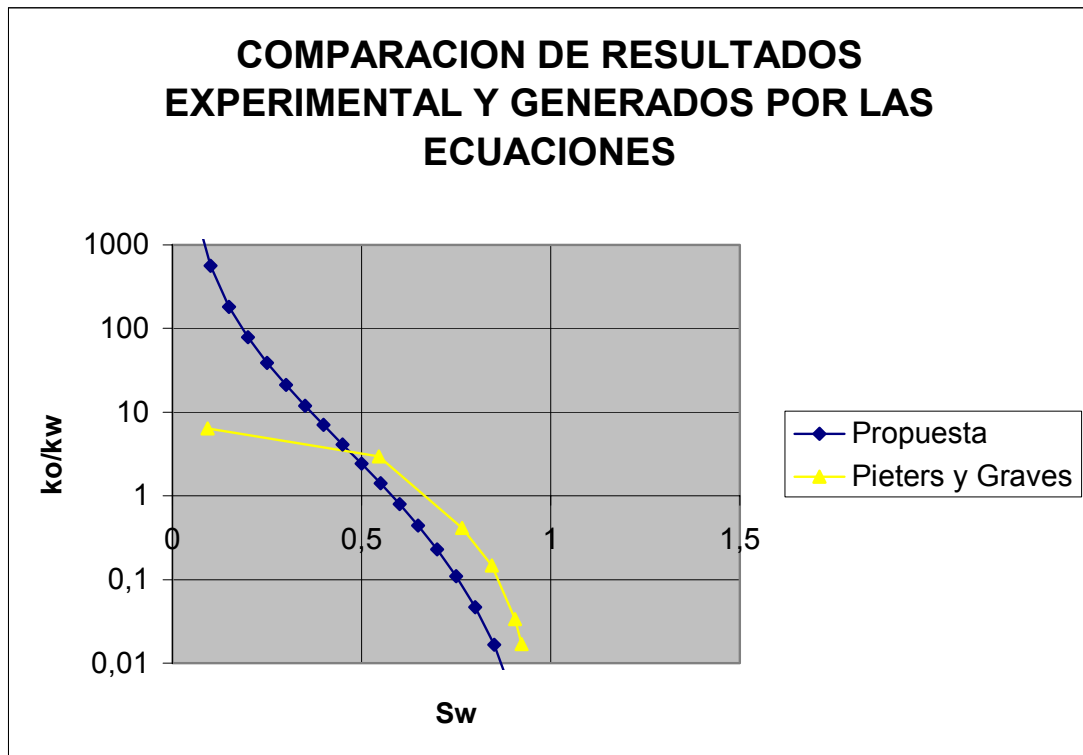
0,5	0,28571429	0,5	0,21428571
0,55	0,36408665	0,45	0,16508665
0,6	0,45039208	0,4	0,1225505
0,65	0,54259242	0,35	0,08678939
0,7	0,63790928	0,3	0,05778557
0,75	0,73273026	0,25	0,03536184
0,8	0,82250323	0,2	0,01914839
0,85	0,90161648	0,15	0,00854505
0,9	0,96326292	0,1	0,00267865
0,95	0,99928534	0,05	0,00035431
1	1	0	0

Figuras 28 a y b. Curva de Permeabilidades relativas en fracturas.

a.



b.



La figura 28 b. muestra los resultados experimentales de Pieters y Graves 1994 para $(\mu_w = 1cP, \mu_o = 3.5cP)$ y los resultados generados por las ecuaciones propuestas. Con esto se puede evidenciar la no-linealidad de las curvas de permeabilidades relativas en fracturas y también la similitud de ambas curvas. También se puede observar la gran diferencia de valores cuando la saturación de agua tiende a cero. Esto se genera debido a que las ecuaciones propuestas generan valores de permeabilidad mayores que la unidad.

6.3 DEMOSTRACION MATEMATICA

En una fractura:

$$S_w = \frac{V_w}{V_w + V_o} = \frac{wLh_w}{wLh_w + wLh_o} = \frac{h_w}{h_w + h_o} = \frac{h_w}{H}$$

Es decir;

$$S_w = \frac{h_w}{H} \quad \text{Lo que es igual a: } h_w = S_w H$$

Análogamente para el aceite:

$$h_o = S_o H$$

Ahora nos disponemos a demostrar que $\Delta P_w = \frac{(P_1 - P_2)}{S_w}$ y $\Delta P_o = \frac{(P_1 - P_2)}{1 - S_w}$ de

la siguiente manera:

$$P_1 = \frac{F_1}{A_s} \quad \text{y} \quad P_2 = \frac{F_2}{A_s}$$

$$P_{w1} = \frac{F_1}{A_w} = \frac{F_1}{wh_w} = \frac{F_1}{S_w(wH)} = \frac{F_1}{S_w A_s} = \frac{P_1}{S_w} \Rightarrow P_{w1} = \frac{P_1}{S_w}$$

$$P_{w2} = \frac{F_2}{A_w} = \frac{F_2}{wh_w} = \frac{F_2}{S_w(wH)} = \frac{F_2}{S_w A_s} = \frac{P_2}{S_w} \Rightarrow P_{w2} = \frac{P_2}{S_w}$$

$$\Delta P_w = P_{w1} - P_{w2} = \frac{(P_1 - P_2)}{S_w}$$

Igualmente para el aceite:

$$\Delta P_o = P_{o1} - P_{o2} = \frac{(P_1 - P_2)}{S_o}$$

CONCLUSIONES

Según los resultados obtenidos en esta tesis las curvas de permeabilidades relativas (agua-aceite) en fracturas de los yacimientos naturalmente fracturados no son una función lineal de la saturación.

El comportamiento de las curvas de permeabilidades relativas en un medio fracturado es similar al comportamiento de las curvas de permeabilidades relativas para medios porosos.

Los simuladores actuales de yacimientos aun consideran la linealidad de las curvas de permeabilidades relativas en fracturas, llevando de alguna u otra manera a errores. Es necesario comenzar a utilizar expresiones que simulen el comportamiento real de la movilidad de los fluidos en las fracturas de los yacimientos naturalmente fracturados.

Experimentalmente se ha podido medir la permeabilidad relativa en fracturas, evidenciando que el comportamiento de dichas curvas genera un comportamiento no lineal.

De acuerdo al estudio llevado a cabo por Pieters y Graves 1994 y a los resultados mostrados en este trabajo se evidencia tanto experimentalmente como analíticamente que las curvas de permeabilidades relativas en fracturas no son una función lineal de la saturación.

Según la literatura consultada, son muy poco los trabajos llevados a cabo para intentar predecir por medio de una ecuación las permeabilidades relativas en fracturas, según lo mostrado por Pieters y Graves 1994 (es decir la no linealidad de las permeabilidades relativas en fracturas)

RECOMENDACIONES

Todos los simuladores comerciales de yacimientos consideran todavía que las curvas de permeabilidades relativas en fracturas son una función lineal de la saturación. Por esto se hace necesario comenzar a programar en este tipo de simuladores la no linealidad de las curvas de permeabilidades relativas en fracturas para de esta manera poder obtener una mejor caracterización del yacimiento.

La medición de las permeabilidades relativas en una fractura se ha realizado esquemáticamente haciendo uso de dos placas paralelas como lo mostramos en el capítulo 5. Pero, se hace necesaria la medición en laboratorio de una fractura sacada del yacimiento, es decir, de un corazón. Con esto se puede evidenciar que los modelos propuestos si concuerdan con lo que ocurre en el yacimiento.

El modelo propuesto en este trabajo se utiliza única y exclusivamente para fracturas en cuyo interior fluyen agua y petróleo. Es necesario proponer modelos para incluir el gas, ya sea para yacimientos bifásicos (agua-gas) o para yacimientos trifásicos (agua-gas-petróleo).

BIBLIOGRAFIA

AGUILERA, Roberto. "Naturally Fractured Reservoirs". PennWell Publishing Company. Tulsa Oklahoma. 2003. 2nd Edition.

BIRD, Byron, STEWART, Warren y LIGHTFOOT Edwin N. "Transport Phenomena". Jhon Wiley & Sons. New York. 1993. 22-27.

CHAPMAN, S. Y COWLING, T. G. Mathematical theory of non-uniform gases. Cambridge University Press (1951), segunda edición.

GLASSTONE, S., LAIDLER, K. J. Y EYRING, H. Theory of rate processes, McGraw-Hill, Nueva York (1941), capítulo 9.

HAGEN, G. Ann Phys. Chem. 46, 423-442. 1839.

HIRSCHFELDER, J. O. Y CURTISS, C. F. J. Chem. Phys., 17, 550-555 (1949)

McDONALD, A. E. Y BECKNER, B. L. Some important consideration in the simulation of naturally fractured reservoirs. SPE21814. 1991.

MERRILL, L. S. Two phase flow in fractures. PhD thesis, University of Denver, Colorado 1975.

NELSON, R. A. Geologic Analysis of naturally fractured reservoirs. Gulf publishing company. Houston, Texas. 1985.

PARTINGTON, J. R. Treatise on physical chemistry. Longmans, Green 1949.

PIETERS, D.A. y GRAVES, R.M. Fracture Relative Permeability: Linear or Non-Linear Function of Saturation. Colorado School of Mines. SPE 28701. (1994).

PRUESS, K. Y TSANG, T. K. On two phase relative permeability and capillary pressure of rough-walled. Water Resources Research, Vol. 29. 1990.

ROMM, E. S. Fluid flow in fractures. Nedra Publishing House, Moscow 1966.

ROUSE, H. Y INCE, S. History of hydraulics. Iowa institute of hydraulics, Iowa City 1959.

WILKE, C. R. J. Chem. Phys., 41, 1345-1347 (1950).