

**COMPROBACIÓN DEL COMPORTAMIENTO CAÓTICO EN EL ÍNDICE  
GENERAL DE LA BOLSA DE COLOMBIA**

**KATHERINE JULIETH SIERRA SUÁREZ**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES  
BUCARAMANGA**

**2012**

**COMPROBACIÓN DEL COMPORTAMIENTO CAÓTICO EN EL ÍNDICE  
GENERAL DE LA BOLSA DE COLOMBIA**

**KATHERINE JULIETH SIERRA SUÁREZ**

**Trabajo de Grado para optar al título de  
Ingeniero Industrial**

**Director:  
Juan Benjamín Duarte Duarte  
Magister en Finanzas de Empresas**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES  
BUCARAMANGA**

**2012**

*A Dios que me ha dado la gracia de llegar hasta aquí,  
a mis padres y a mi hermanita.*

*Al amor de mi vida por enseñarme que una meta  
compartida vale más que una gloria conseguida.*

## **AGRADECIMIENTOS**

Este proyecto es el resultado de los esfuerzos de muchas personas que estuvieron dispuestos ayudarme, acompañarme y motivándome a continuar.

Agradezco al Profesor Juan Benjamín Duarte Duarte por depositar su confianza en mí, brindarme su apoyo, ánimo y dirección durante todo el proceso.

A mis padres y mi hermana, por apoyarme durante todos los años de mi carrera, por entender mis preocupaciones y mis ausencias.

A ti, Víctor, que siempre has estado a mi lado, me has ayudado, y me has brindado tu apoyo incondicional.

Agradezco a todos mis maestros y compañeros que me acompañaron durante todo el camino, porque más que conocimiento me enseñaron a ser persona, y a darle valor a la amistad, a la honestidad y al compromiso.

## CONTENIDO

Pág.

INTRODUCCIÓN .....	17
1. GENERALIDADES DEL PROYECTO.....	19
1.1. CUMPLIMIENTO DE OBJETIVOS.....	19
1.1.1. Objetivo General .....	19
1.1.1. Objetivo Específicos .....	19
1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	21
1.3. JUSTIFICACIÓN DEL PROYECTO .....	21
2. REVISIÓN DE LA LITERATURA .....	22
3. MARCO TEÓRICO .....	26
3.1. DESCRIPCIÓN DEL MERCADO .....	26
3.2. ANÁLISIS FINANCIERO DE SERIES DE TIEMPO .....	28
3.2.1. Inferencia Estadística.....	29

3.2.2.	Modelos ARIMA-GARCH .....	31
3.3.	EFICIENCIA DEL MERCADO .....	38
3.3.1.	Eficiencia débil .....	40
3.3.2.	Eficiencia intermedia .....	40
3.3.3.	Eficiencia fuerte .....	40
3.4.	COMPORTAMIENTO CAÓTICO .....	41
3.4.1.	Características de los Sistemas Caóticos .....	41
3.4.2.	Fractales y caos .....	43
3.4.3.	Hipótesis de Mercado Fractal .....	43
3.4.4.	Comprobación de comportamiento caótico .....	45
4.	COMPROBACIÓN DE COMPORTAMIENTO CAÓTICO EN EL MERCADO BURSÁTIL COLOMBIANO .....	56
4.1.	DATOS .....	56
4.2.	METODOLOGÍA .....	59
4.3.	RESULTADOS .....	60

4.3.1. Filtros .....	60
4.3.2. Herramientas para la comprobación de la teoría del Caos .....	74
4.3.3. Test Estadístico BDS .....	88
4.3.4. Resumen de resultados .....	90
4.4. OBSERVACIONES .....	94
5. HALLAZGOS.....	96
6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	99
BIBLIOGRAFÍA.....	101
APÉNDICES .....	107
ANEXOS .....	197

## LISTA DE FIGURAS

	<b>Pág.</b>
Figura 1. Metodología del proyecto.....	59
Figura 2. Correlogramas serie retornos IGBC.....	66
Figura 3. Precios del IGBC, con diferente escala temporal.....	74
Figura 4. Información mutua en función del retardo para la serie del IGBC .....	76
Figura 5. Porcentaje de Falsos Vecinos en función de la dimensión de inmersión para la serie del IGBC.....	76
Figura 6. Gráficos de Recurrencia de una serie caótica y una serie aleatoria .....	78
Figura 7. Gráfico de recurrencia para el IGBC.....	78
Figura 8. Gráficos de recurrencia para series de rentabilidades de los subperíodos del IGBC, en orden temporal de izquierda a derecha .....	79
Figura 9. Gráficos de recurrencia para series de residuos ARIMA-GARCH de los subperíodos del IGBC, en orden temporal de izquierda a derecha .....	79
Figura 10. Dimensión de correlación en función de la dimensión de inmersión del IGBC .....	83

## LISTA DE TABLAS

	<b>Pág.</b>
Tabla 1. Cumplimiento de Objetivos .....	9
Tabla 2. Criterios para identificación de procesos ARMA ( $p, q$ ) .....	35
Tabla 3. Activos Financieros Seleccionados.....	56
Tabla 4. Subperíodos Iguales para cada serie de activos .....	57
Tabla 5. Casos excluidos por superar en n-veces la desviación típica ( $\sigma$ ) .....	58
Tabla 6. Estadísticas De Las Series De Retornos .....	62
Tabla 7. Análisis de autocorrelación en la rentabilidad del IGBC.....	64
Tabla 8. Identificación de procesos ARMA ( $p, q$ ) de la serie del IGBC.....	66
Tabla 9. Estimación del modelo ARMA(3,1) del IGBC.....	67
Tabla 10: Estimación coeficientes procesos ARMA para IGBC .....	68
Tabla 11: Test Bartlett y QLB la serie de residuos del modelo AR(3) del IGBC....	69
Tabla 12. Modelos ARMA ( $p, q$ ) .....	70

Tabla 13. Test ARCH modelo AR(3) del IGBC .....	71
Tabla 14. Modelos GARCH ( $p, q$ ).....	73
Tabla 15. Retardo y Dimensión de Inmersión para series de rentabilidad y residuos del IGBC .....	77
Tabla 16. Entropía de Espacio temporal en el IGBC .....	81
Tabla 17. Coeficiente de Hurst IGBC.....	85
Tabla 18. Máximo Exponente de Lyapunov IGBC .....	86
Tabla 19. Test BDS para la serie de retornos de IGBC .....	88
Tabla 20. Test BDS para la serie de residuos de IGBC.....	89
Tabla 21. Resultados test de comprobación de caos en los activos financieros...	90
Tabla 22. Resumen de Resultados.....	92

## LISTA DE APÉNDICES

	<b>Pág.</b>
Apéndice A. Prueba de estacionariedad series de precios y rentabilidades .....	107
Apéndice B. Pruebas de autocorrelación: Bartlett y $Q_{LB}$ . .....	110
Apéndice C. Modelos ARMA ( $p, q$ ) .....	116
Apéndice D. Test de BARTLETT y QLB para residuos de modelos ARMA ( $p, q$ )	119
Apéndice E. Test ARCH para residuos al cuadrado. ....	125
Apéndice F. Calculo de retardo y dimensión de inmersión .....	131
Apéndice G. Porcentaje de entropía de espacio temporal .....	134
Apéndice H. Cálculo de los exponentes de HURST y LYAPUNOV .....	136
Apéndice I. Test BDS serie de rentabilidades y residuos .....	138
Apéndice J. Apéndice gráfico.....	148

## LISTA DE ANEXOS

	<b>Pág.</b>
Anexo A. Código MATLAB para cálculo del exponente de HURST .....	197
Anexo B. Código MATLAB para cálculo del exponente de LYAPUNOV .....	198
Anexo C. Certificado y ponencia "Ajuste de Modelos Econométricos al Mercado Bursátil Colombiano" .....	201

## RESUMEN

**TITULO:** COMPROBACIÓN DEL COMPORTAMIENTO CAÓTICO EN EL ÍNDICE GENERAL DE LA BOLSA DE COLOMBIA \*

**AUTOR:** KATHERINE JULIETH SIERRA SUÁREZ\*\*

**PALABRAS CLAVES:** TEORÍA DE CAOS, HEM, HFM, GARCH, ARIMA.

La hipótesis de Mercado Eficiente afirma que los precios de un activo financiero dependen de la información pública y/o privada, que se incorpora al mercado de manera instantánea, y generalmente se asocian a caminatas aleatorias o martingalas, por tanto no pueden ser predichos; por otro lado la Hipótesis de Mercado Fractal dice que los precios dependen del manejo que le da cada inversor a la información, según su horizonte de inversión, produciendo un comportamiento caótico en los mercados.

En el presente trabajo se busca probar la existencia de comportamiento caótico en las principales series financieras del mercado bursátil colombiano, para ello se utilizan herramientas cualitativas y cuantitativas, las cuales pueden ser afectadas por autocorrelaciones, por esta razón, la primera parte de la metodología consiste en usar ajustes ARIMA y GARCH como filtros, para obtener series de residuos no autocorrelacionados.

La segunda parte, es un análisis cualitativo, el cual incluye la interpretación visual de los gráficos de precios en función del tiempo usando distintas escalas temporales, con el fin de detectar estructuras fractales; y de los gráficos de recurrencia, para detectar patrones repetitivos. La tercera parte incluye métodos cuantitativos para la detección de comportamiento caótico como el cálculo de la dimensión de correlación, el coeficiente de Hurst y el exponente de Lyapunov. Por último se realiza un contraste estadístico para probar la hipótesis nula de que las series son independientes e idénticamente distribuidas.

Los resultados revelan que los activos financieros colombianos, muestran indicios de comportamiento caótico para períodos al alza y aleatorio para períodos a la baja, apoyando así la hipótesis de mercado fractal. Sin embargo, para períodos mixtos los resultados no son concluyentes. Los hallazgos respaldan la utilización de modelos no lineales para la predicción de los precios de estos activos en los períodos al alza.

---

\* Proyecto de Grado

\*\* Facultad Fisicomecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales.  
Director: Juan Benjamin Duarte Duarte.

## ABSTRACT

**TITLE:** TESTING CHAOTIC BEHAVIOR IN COLOMBIAN STOCK MARKET GENERAL INDEX.

**AUTHOR:** KATHERINE JULIETH SIERRA SUÁREZ\*\*

**KEYWORDS:** CHAOS THEORY, HEM, HFM, GARCH, ARIMA.

The Efficient Market Hypothesis says that financial asset prices depend of the available public and/or private information in the market and they generally follow a random walk or martingale, so they can not be predicted, on the other hand, the Fractal Market Hypothesis says that prices depend of each behavior investor and his investment horizon, producing a chaotic behavior in the markets.

This paper testing the existence of chaotic behavior in major financial series Colombian stock market, for this it use qualitative and quantitative tools, which can be affected by autocorrelation, therefore, the first part of the methodology consist in using ARIMA and GARCH adjust as filters, for generating not autocorrelated series.

The second part is a qualitative analysis, which includes the visual interpretation of price charts as a function of time using different time scales, in order to detect fractal structures; and recurrence plots, to detect repetitive patterns. The third part includes quantitative methods for the detection of chaotic behavior as the calculation of the correlation dimension, the Hurst coefficient and the Lyapunov exponent. Finally a statistical test is performed to test the null hypothesis that the series are independent and identically distributed.

The results show that the Colombian financial assets reveal chaotical behavior for upward periods and randomized for periods of low. However, for mixed periods, the results are not concluding. Tye results support the use of nonlinear models for the prediction of the prices of this actives in upward periods.

---

\* Proyecto de Grado

\*\* Facultad Fisicomecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales. Director:  
Juan Benjamín Duarte Duarte.

## INTRODUCCIÓN

El modelamiento y análisis de mercados financieros surge con Bachelier (1900), quien fue pionero en el estudio de la martingala, posteriormente otros autores como Cowles Jones (1937), Alexander (1961) Fama (1970,1997), trabajan sobre la hipótesis de mercados eficientes (HEM), la cual ha sido base de muchos estudios que buscan comportamiento aleatorio en los retornos financieros.

La Hipótesis de mercado eficiente determina que las variaciones de los precios son completamente aleatorias y dependen solo de la información nueva, la cual se incorpora imprevisiblemente en el mercado, por tanto, el movimiento de los activos es completamente impredecible. De esta forma, la aplicación de análisis técnico (basado en información histórica del mercado) y de análisis fundamental (basado en la información de la empresa) no es útil para obtener rendimientos extraordinarios.

Buscando probar la HEM, varios autores han encontrado evidencia de no normalidad, no linealidad, dependencias de largo plazo e indicios de comportamiento caótico en las series empíricas. En base a esto, Peters (1994) propone la Hipótesis de Mercado Fractal, la cual se caracteriza por ineficiencia, memoria de largo plazo, aleatoriedad local y determinismo global. A diferencia del mercado eficiente, el mercado fractal permite hacer predicciones, pero solo en el corto plazo, pues según Lorenz (1963) a largo plazo el efecto exponencial generado por la dependencia de las condiciones iniciales hace que el sistema sea inestable (Efecto Mariposa).

Como resultado de los estudios realizados, se han encontrado señales de comportamiento caótico en las principales bolsas asiáticas, europeas y americanas. Sin embargo, en Colombia no se han aplicado estudios similares.

El propósito de este proyecto es probar la existencia de comportamiento caótico en el mercado bursátil colombiano y dejar abierta la posibilidad a otros investigadores de estudiar el pasado de las series financieras para configurar un modelo que pueda predecir el comportamiento futuro, permitiendo a los inversionistas evitar riesgos innecesarios o tener la oportunidad de alcanzar beneficios que la mayoría no puede aprovechar.

Este documento se divide en cinco capítulos. El primero presenta las características generales del proyecto. Los capítulos 2 y 3 muestran la revisión de la literatura y el marco teórico, respectivamente. En el capítulo 4 se presentan los datos, la metodología y los resultados obtenidos. El capítulo 5 muestra los hallazgos importantes. Por último el capítulo 6 corresponde a las conclusiones y recomendaciones.

## 1. GENERALIDADES DEL PROYECTO

### 1.1. CUMPLIMIENTO DE OBJETIVOS

**1.1.1. Objetivo General.** Probar la hipótesis de comportamiento caótico, determinístico y con memoria de largo plazo mediante diversas herramientas cualitativas\* y cuantitativas\*\*, con el fin de verificar el grado de eficiencia de mercado del Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia.

#### 1.1.1. Objetivo Específicos

Tabla 1. Cumplimiento de Objetivos

OBJETIVO PLANTEADO	CUMPLIMIENTO
Revisar investigaciones que se han realizado con el objetivo de buscar comportamiento caótico y no lineal en los mercados bursátiles, con el fin de conocer las metodologías aplicadas y los resultados obtenidos en los distintos índices bursátiles a nivel global.	En el numeral 2 se hace una revisión de la literatura existente.

---

\* Haciendo uso software VRA (Visual Recurrence Analysis) desarrollado por Eugene Kononov, para construir gráficos de recurrencia y calcular la entropía de espacio temporal.

\*\* Mediante test estadísticos como el Brock-Dechert-Scheinkman (BSD) que busca probar que los incrementos de los rendimientos son independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d)

OBJETIVO PLANTEADO	CUMPLIMIENTO
Estudiar la biografía econométrica relacionada con las series de tiempo financieras en los mercados accionarios, con el fin de conocer, entender y aplicar las herramientas científicas relacionadas con la temática.	En el numeral 3 se describe el marco teórico, y las herramientas científicas para medir el nivel de caos en una serie.
Aplicar análisis de gráficos de recurrencia y entropía del espacio temporal, además estimar la dimensión de correlación, el coeficiente de Hurst, y el máximo exponente de Lyapunov, con el fin de determinar el nivel de caos en el índice bursátil colombiano.	En el numeral 4.2.3, se usan los análisis gráficos y cuantitativos para determinar el nivel de caos.
Probar la hipótesis de comportamiento caótico, mediante inferencia estadística usando test que contrasten autocorrelación, heterocedasticidad, independencia y estacionariedad; con el fin de evaluar si la Bolsa de Valores de Colombia tiene una eficiencia débil o sigue un comportamiento caótico, y así validar la utilización de modelos predictivos relacionados con cualquiera de las dos hipótesis.	En el numeral 4.3.3, se usa el test estadístico BDS, Para probar la hipótesis de independencia, y en el numeral 4.3.4, se da un resumen de los resultados obtenidos mediante los diversos test analíticos y estadísticos.
Escribir un artículo que refleje los resultados de la investigación*	En el Anexo C, se incluye el texto de la ponencia "Ajuste de Modelos Econométricos al Mercado Bursátil Colombiano", Presentada en la Global Conference on Business and Finance, en San José de Costa Rica, el 23/05/2012.

---

\* El artículo es un producto confidencial entre el director y el estudiante, no se anexará al Proyecto de Grado para someter a evaluación.

## **1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

Debido al reciente crecimiento de la economía y del mercado bursátil colombiano, se hace necesario indagar sobre el cumplimiento de los supuestos en los cuales se fundamentan la mayoría de modelos de valoración de activos, como el Capital Asset Pricing Model (CAPM) y el Arbitrage Trading Program (APT), cuyos cálculos suponen eficiencia en el mercado.

Para evaluar la eficiencia del mercado, se usan pruebas de caminata aleatoria, sin embargo recientemente se ha generado una nueva corriente encaminada a buscar comportamiento caótico en mercados bursátiles. En este trabajo se evalúa la eficiencia del mercado, buscando el cumplimiento de la teoría del caos en la Bolsa de Valores de Colombia, mediante pruebas cualitativas y cuantitativas.

## **1.3. JUSTIFICACIÓN DEL PROYECTO**

Trabajos recientes han probado que al demostrar comportamientos caóticos en las series financieras, se rechaza la hipótesis de eficiencia del mercado, debido a que se abre la posibilidad para la predicción mediante modelos econométricos no lineales.

El presente trabajo busca comprobar el comportamiento caótico en el Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia con el fin de contrastar la Hipótesis de Mercado Eficiente.

## 2. REVISIÓN DE LA LITERATURA

Bachelier en su tesis doctoral (1900), analiza por primera vez el comportamiento de mercados financieros buscando movimiento browniano en los cambios de precios. A partir de esto, autores como Cowles Jones (1937), Alexander (1961) y Fama (1970), plantean la hipótesis de mercados eficientes. Sin embargo, algunos supuestos de la HEM no se cumplen en las series empíricas, entre ellos, distribución normal, independencia, homocedasticidad y no autocorrelación.

Box y Jenkins (1970) proponen modelos lineales con términos autorregresivos y de medias móviles (ARMA), los cuales corrigen la autocorrelación, pero se basan en el supuesto de homocedasticidad. En la década siguiente, Engle (1982) propone los modelos de heterocedasticidad autorregresiva ARCH y posteriormente Bollerslev (1986) propone los modelos generalizados GARCH, los cuales identifican procesos ARMA en la varianza de los retornos bursátiles.

Los modelos anteriores explican el comportamiento del mercado, usando solamente información endógena de tipo histórico, rechazando así la eficiencia del mercado, y dando paso a la búsqueda de pronósticos. Algunos autores han usado ajustes ARMA y GARCH para realizar predicciones, entre ellos se encuentran French, Schwert y Stambaugh (1987) que analizan el S&P 500; también Aburachis y Kish (1999) usan esta metodología con los principales índices a nivel mundial, y más recientemente Jarrett y Schilling (2008) ajustan estos modelos a las series de las empresas más importantes de la bolsa alemana.

Los ajustes autorregresivos, modelan de forma lineal la correlación serial a corto plazo, dejando sin explicación aquella de largo plazo, como afirma Grau (1996) los modelos lineales no pueden reproducir completamente la dinámica del sistema económico, sólo representan un número limitado de comportamientos.

A partir del trabajo de Lorenz (1963), Takens (1981), Mandelbrot (1961, 1982) y otros, se inicia la búsqueda en series de tiempo de comportamiento no lineal y dependiente de las condiciones iniciales en el largo plazo. En los años 80, la teoría del caos es aplicada con resultados importantes en las series económicas y posteriormente en los mercados financieros.

Mandelbrot (1961), definió que los precios de activos sufren grandes saltos que tienden a agruparse, y en consecuencia, las desviaciones típicas se incrementan, por lo cual deben de seguir una distribución de tipo hiperbólico, al menos en las colas. Esto indica que los precios no se distribuyen normalmente y no pueden ser modelados como lo indica la HEM.

Posteriormente, Peters (1994) propone la Hipótesis de Mercado Fractal (HFM), en la cual la información no se incorpora de forma inmediata a los precios, sino que es valorada de forma distinta por cada inversor, según su horizonte temporal, el cual puede variar en cualquier instante, produciendo cambios bruscos en las series; la HFM se caracteriza por:

- Ineficiencia.
- Mercado sin un único equilibrio
- Memoria y ciclos en el mercado
- Aleatoriedad Local y Determinismo Global

En base a estas características, el mercado fractal permite hacer predicciones en el corto plazo, ya que a largo plazo el sistema es inestable. Por esta razón, diversos autores han buscado indicios de comportamiento caótico en los cambios de los precios financieros, que confirmen la existencia de mercados fractales en lugar de mercados eficientes.

Lipka y Los (2003), encuentran que las series financieras europeas presentan dependencias de largo plazo de tipo antipersistente medidas por coeficientes de Hurst ( $H$ ) menores a 0.5, aunque los autores comprueban que los retornos no siguen procesos de ruido blanco o de caminata aleatoria, concluyen que por ser antipersistentes se revierten rápidamente a la media, sin generar rendimientos muy altos; en ese sentido son mercados eficientes. Sin embargo, este trabajo no es concluyente ya que el coeficiente de Hurst, es calculado mediante siete técnicas diferentes, produciendo resultados totalmente distintos para cada metodología.

En ese mismo año, Kyaw, Los y Zong (2003) realizan un estudio con los índices bursátiles de Latinoamérica, en el cual los autores encuentran persistencia en casi todas las series, excepto en la de Colombia, donde se evaluó un período (1998-2001) anterior a la consolidación del índice general (IGBC), obteniendo resultados similares a los hallados en el mercado europeo (antipersistencia). Los autores afirman que los mercados persistentes podrían presentar largos períodos de calma que daban la impresión de predictibilidad, pero no lo suficiente para obtener rendimientos extraordinarios, además concluyen que ni los modelos usados actualmente, ni el coeficiente de Hurst describen totalmente el mercado, y sugieren calcular este coeficiente para subperíodos, buscando mayor precisión en la explicación del mercado.

Los y Yu (2005), analizan el mercado Chino, antes y después de las intervenciones del gobierno, y concluyen que el mercado es moderadamente persistente con exponentes de Hurst mayores a 0.5. Además observan que esta bolsa fue considerablemente más persistente antes de las desregulaciones, pero ahora se comporta más como movimiento Browniano.

Di Matteo, Aste y Dacorogna (2005), aplican el cálculo del coeficiente de Hurst ( $H$ ) en veintiocho países del mundo con el propósito de clasificarlos, encontrando que

los mercados emergentes presentan  $H$  mayores a 0.5 (persistencia), los mercados medianos tienen  $H=0.5$  (aleatoriedad) y los mercados desarrollados muestran  $H<0.5$  (antipersistencia).

Basado en los trabajos anteriores, Espinosa (2007,2008) estudia los mercados americanos (sin incluir a Colombia) usando varias metodologías para evaluar comportamiento no lineal y dependencia de las condiciones iniciales. Concluye que todas las series muestran evidencia de no aleatoriedad, lo cual apoya robustamente la hipótesis existencia de comportamiento caótico e indica que el mercado tiene memoria, es decir que se podrían repetir situaciones ocurridas en el pasado cuando la evolución pase nuevamente cerca de algún acontecimiento en particular, esto justifica el uso de técnicas de predicción

En su tesis doctoral, Gimeno (2000), luego de comprobar la existencia de comportamiento caótico, busca modelos no lineales para predecir el comportamiento futuro del Bono Nacional en España, obteniendo buenos resultados con las redes neuronales artificiales, rechazando así la hipótesis de mercado eficiente.

### 3. MARCO TEÓRICO

#### 3.1. DESCRIPCIÓN DEL MERCADO\*

El 3 de julio de 2001, las bolsas de Bogotá, Medellín y Occidente se unen para crear la Bolsa de Valores de Colombia, la cual administra el mercado accionario, cambiario, de derivados y de renta fija.

El mercado bursátil opera de lunes a viernes, en días no festivos desde las 9:30 am hasta las 4:00 pm.

La regulación y supervisión del mercado está a cargo fundamentalmente de tres entidades, sin perjuicio de las funciones de regulación del Banco de la República, específicamente encaminadas a mantener el poder adquisitivo de la moneda y que puedan incidir en el mercado de valores:

- Congreso de la República que expide la ley marco del mercado de valores.
- Gobierno Nacional, a través del Ministerio de Hacienda y Crédito Público, que expide regulaciones que concretan las normas generales de la ley marco de valores.
- Superintendencia Financiera, que expide instrucciones sobre el cumplimiento de las normas emitidas por el Ministerio de Hacienda y Crédito Público.

---

\* Información tomada de la página oficial de la Bolsa de Valores de Colombia:

<http://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc/Home/AcercaBVC/conozcanos?action=dummy>, y de la página web del Ministerio de Hacienda y Crédito Público:

[http://www.irc.gov.co/irc/es/mercadovalorescolombiano/Mercado%20en%20Colombia%20Ene11\\_0.pdf](http://www.irc.gov.co/irc/es/mercadovalorescolombiano/Mercado%20en%20Colombia%20Ene11_0.pdf)

Otras entidades con competencias reguladoras son:

- Autorregulador del Mercado de Valores
- Bolsa de Valores de Colombia
- Participantes en el mercado

Los intervinientes en el mercado de valores comprenden fundamentalmente los emisores de valores y los inversionistas. Dentro de estas relaciones que se dan entre emisores e inversionistas intervienen terceros que facilitan las transacciones entre los primeros, actuando así como intermediarios del mercado de valores.

El índice de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC), es el indicador bursátil del mercado accionario, refleja el comportamiento promedio de los precios de las acciones en el mercado

El IGBC se compone de las acciones más representativas en función de su rotación y frecuencia, entonces el número de acciones que compone la canasta para el índice es variable y se calcula de forma trimestral. Su valor se computa en cada instante de las negociaciones y su valor definitivo se obtiene media hora después del cierre del mercado.

Las acciones que componen la canasta del índice general, cumplen dos condiciones:

- Acciones con una rotación en el último semestre mayor o igual a 0.5%
- La frecuencia de negociación en el trimestre inmediatamente anterior es superior o igual al 40%.

### 3.2. ANÁLISIS FINANCIERO DE SERIES DE TIEMPO

El análisis financiero de series de tiempo se centra en la valoración de activos a través del tiempo. Se diferencia de otros análisis de series de tiempo por la incertidumbre propia de la teoría económica, por ejemplo la volatilidad no se observa directamente y no cuenta con una única definición.

La mayoría de los estudios financieros usan retornos en lugar de los precios de los activos por dos razones: primero, para la mayoría de inversores, el retorno de un activo es un resumen completo y sin escala de la oportunidad de inversión; y segundo, sus propiedades estadísticas son más atractivas. Existen varias definiciones de los retornos; en este proyecto se usa la rentabilidad diaria continua descrita como:

$$r_t = \text{Ln} \left[ \frac{P_t}{P_{t-1}} \right] \quad (1)$$

Donde  $r_t$  es el retorno continuo en el tiempo  $t$ ,  $P_t$  es el precio en el período  $t$  y  $P_{t-1}$  es el precio en el período  $t - 1$ .

Los análisis estadísticos preliminares son útiles para detectar la distribución de probabilidad que siguen los retornos, que en la teoría clásica de aleatoriedad es asumida como normal. Dentro de este tipo de análisis se encuentran la media, la mediana, la desviación estándar, el sesgo y la curtosis.

Si la distribución es normal, los valores de la media, la mediana, la desviación estándar y el sesgo deben ser iguales a cero, mientras que la curtosis debe ser igual a tres.

El sesgo mide la distribución uniforme alrededor de la media, el cual puede ser:

- **Positivo:** Datos por encima del valor del promedio.
- **Simétrico:** Distribución uniforme alrededor de la media.
- **Negativo:** Distribución por debajo del valor del promedio

La curtosis determina el grado de concentración que presentan los valores en la región central de la distribución. La serie puede ser:

- **Leptocúrtica:** Alta concentración.
- **Mesocúrtica:** Concentración normal.
- **Platicúrtica:** Baja concentración.

Según Espinosa (2008), la no normalidad y la elevada Curtosis, características comunes en series bursátiles, suelen ser indicios de que la serie ha sido generada por un proceso no lineal.

**3.2.1. Inferencia Estadística.** Es la base de la mayoría de test estadísticos, ya que generalmente solo se disponen de datos empíricos para estimar los parámetros poblacionales. Entonces es necesario indagar la exactitud de dichos estimadores en relación a los verdaderos parámetros.

Usando la formulación de intervalos de confianza y la realización de pruebas de hipótesis sobre los parámetros estimados, se puede obtener mayor confianza en los resultados.

$$H_0: \beta_1 = 0 \tag{2}$$

$$H_1: \beta_1 \neq 0 \tag{3}$$

La anterior hipótesis de dos colas se puede probar usando un estadístico a partir de los datos muestrales; el cual se calcula en general como:

$$t = \frac{\hat{\beta}_k}{ee(\hat{\beta}_k)} \quad (4)$$

El estadístico  $t$  es contrastado con los valores críticos de la distribución de  $t$ -student a cierto nivel de significancia  $\alpha$  predefinido. Si el estadístico  $t$  cae en la región crítica se rechaza la hipótesis nula y el parámetro es estadísticamente diferente de cero. De manera alternativa Koop (2005), usa el P-Valor como otro método para evaluar la significancia del estadístico de prueba. El cual está dado la probabilidad de que el parámetro sea igual a cero. Si el P-valor es pequeño, es poco probable que la hipótesis sea verdadera. Por lo tanto si se define un  $\alpha = 5\%$ , entonces el criterio de decisión sería: Si P-valor es menor a 5%, se rechaza la hipótesis, y si P-valor es mayor a 5%, no se puede rechazar la hipótesis.

La Prueba Jarque-Bera se usa para determinar si los datos se ajustan a una distribución normal mediante el análisis de la relación entre el valor del sesgo y la curtosis de los datos empíricos y la de una distribución normal teórica, si las diferencias son grandes se rechaza la hipótesis de normalidad. Para medir estas diferencias el P-valor del estadístico  $JB$  debe ser mayor al 5%.

$$JB = \frac{N}{6} \left( S^2 + \frac{1}{4} K^2 \right) \quad (5)$$

Donde  $N$  es el número de datos,  $S$  es el sesgo y  $K$  es la curtosis de la serie analizada.

Sí se quiere analizar una hipótesis conjunta de parámetros se usa la prueba de significancia global, llamada prueba F.

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0 \quad (6)$$

$$H_1: \text{Al menos un estimador es diferente de cero} \quad (7)$$

En la prueba F los valores  $\beta_i$  se pueden afectar entre sí, lo cual no ocurre en la prueba  $t$  en donde cada estimador es evaluado de manera independiente. El estadístico de la Prueba F (8), mide la significancia global, y es también una prueba de significancia de  $R^2$  \* (Con hipótesis nula:  $R^2 = 0$ ), también puede ser evaluado por el P-Valor.

$$F = \frac{R^2}{k-1} \bigg/ \frac{1-R^2}{N-k} \quad (8)$$

Donde  $k$  es el número de variables y  $N$  es el número de observaciones.

**3.2.2. Modelos ARIMA-GARCH.** Para probar la existencia de caos en series financieras se usan herramientas que son afectadas por la presencia de correlación serial, la cual puede ser eliminada con modelos lineales de tipo ARIMA y GARCH, que funcionan como filtros de las dependencias de corto plazo.

Los modelos ARIMA, se construyen con base a la presencia de autocorrelación, definida como, “correlación entre miembros de series de observaciones ordenadas en el tiempo”\*\*

Sin embargo, la no estacionariedad en una serie puede causar autocorrelación, por esta razón, primero se comprueba que las series sean estacionarias, es decir

---

\*  $R^2$  es el coeficiente de determinación múltiple, y es el porcentaje de variabilidad de la variable dependiente que es explicado por las variables independientes.

\*\* Maurice G. Kendall y William R. Buckland. A Dictionary of Statistical Terms, Hafner Publishing Company, Nueva York, 1971, pág. 8.

que sea invariables en el tiempo. Debido a que esta condición difícilmente se encuentra en series empíricas, generalmente se acepta una estacionariedad débil, es decir, la serie es estacionaria si sus dos primeros momentos son finitos e invariables en el tiempo. En la literatura financiera comúnmente se asume que la serie de los retornos es estacionaria, pero este supuesto debe ser comprobado empíricamente.

El Test de Dickey and Fuller Aumentado (1979) contrasta la Hipótesis nula, de que la serie es generada por un proceso de raíz unitaria en contra a la hipótesis de que la serie es estacionaria. En consecuencia, si la hipótesis es rechazada, se puede afirmar que los datos son estacionarios.

Comprobada la estacionariedad de las series, se puede detectar correlación serial entre dos rentabilidades  $r_t$  y  $r_{t-l}$  ( $l = 1 \dots m$ ), construyendo la función de autocorrelación, denotada comúnmente por  $\rho_l$ , el cual bajo el supuesto de estacionariedad es una función de  $l$ .

$$\rho_l = \frac{Cov(r_t, r_{t-l})}{\sqrt{Var(r_t)Var(r_{t-l})}} = \frac{Cov(r_t, r_{t-l})}{Var(r_t)} = \frac{\gamma_l}{\gamma_0}, \quad (9)$$

Donde  $Var(r_t) = Var(r_{t-l})$  dada la estacionariedad de la serie. Basado en esta definición, se tiene que  $\rho_0 = 1$ , y  $-1 \leq \rho_l \leq 1$ . Una serie estacionaria no presenta autocorrelación si y solo si  $\rho_l = 0$  para todo  $l > 0$ . Usando el promedio de la serie de retornos  $\bar{r}$ . La autocorrelación muestral  $\hat{\rho}_l$ , (11), es consistente para estimar  $\rho_l$ .

$$\hat{\rho}_l = \frac{\sum_{t=2}^T (r_t - \bar{r})(r_{t-l} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2} \quad (10)$$

Bartlett (1946), establece que en una serie generada por un proceso de ruido blanco, los estimadores son aproximadamente variables aleatorias normalmente

distribuidas con media cero y varianza  $1/\sqrt{N}$ , donde  $N$  es el número total de observaciones.

Para probar la existencia de autocorrelación en un determinado rezago  $l$ . Se puede construir un intervalo de confianza al 95% que pruebe la hipótesis nula de no autocorrelación al rezago  $l$ ; para esto se compara el valor de  $\rho_l$  con los valores críticos  $\pm 1,96/\sqrt{N}$ . Si  $\rho_l$  cae fuera de los límites de confianza se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación.

Para probar simultáneamente que todas las autocorrelaciones de  $m$  rezagos son cero, contra la hipótesis alternativa de que al menos una de las autocorrelaciones de  $m$  rezagos es diferente de cero, se utiliza el Estadístico  $Q$  de Ljung-Box (1978), el cual se describe como:

$$Q(m) = N(N + 2) \sum_{l=1}^m \frac{\hat{\rho}_l^2}{N-l} \quad (11)$$

Donde  $N$  es el número total de datos,  $m$  el número total de rezagos y  $\hat{\rho}^2$  la autocorrelación del rezago  $l$ .

La regla de decisión es rechazar la hipótesis nula de no autocorrelación, si  $Q(m) > \chi_{\alpha}^2$ , donde  $\chi_{\alpha}^2$  denota el 100  $(1 - \alpha)$  percentil de una distribución chi-cuadrado con  $m$  grados de libertad. O rechazar si el P-valor es menor o igual al nivel de significancia.

La selección del  $m$  puede afectar el estadístico  $Q(m)$ . La literatura sugiere usar una cuarta parte de los datos, sin embargo, según Tsay (2005), "estudios de simulación sugieren que la elección de  $m \approx \ln(N)$  provee mejor eficiencia".

**3.2.2.1. Modelos ARIMA.** Las autocorrelaciones se pueden estimar suponiendo que siguen alguna estructura, que puede ser un proceso autorregresivo AR, un proceso de media móvil MA o procesos mixtos ARMA.

Los procesos autorregresivos indican que el comportamiento de una variable en un instante de tiempo depende de valores pasados de la propia variable. Si la relación de dependencia se establece con los  $p$  valores anteriores el proceso será autorregresivo de orden  $p$ , representado matemáticamente, así:

$$r_t = \alpha_1 r_{t-1} + \alpha_2 r_{t-2} + \dots + \alpha_p r_{t-p} + u_t \quad (12)$$

Los procesos de media móvil indican que el comportamiento de una variable en un instante de tiempo depende de valores pasados del término aleatorio. Si depende de  $q$  rezagos, el proceso es de media móvil de orden  $q$ :

$$r_t = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \dots + \beta_q u_{t-q} + \mu_t \quad (13)$$

Los procesos mixtos, combinan ambos tipos de procesos. Un modelo ARMA  $(p, q)$  se compone por  $p$  términos autorregresivos y  $q$  términos de medias móviles. Como se observa a continuación

$$r_t = \alpha_1 r_{t-1} + \alpha_2 r_{t-2} + \dots + \alpha_p r_{t-p} + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \dots + \beta_q u_{t-q} + \mu_t \quad (14)$$

Un proceso autorregresivo integrado de media móvil (ARIMA) requiere integrar la serie  $d$  veces hasta convertirla en estacionaria. Un modelo ARIMA  $(p, d, q)$  de los precios, donde  $d$  es igual a 1; es equivalente a un modelo ARMA  $(p, q)$  para los retornos.

Si las series de retornos presentan autocorrelación, se usa la metodología planteada por Box-Jenkins (1970), para encontrar modelos ARIMA. La cual consta de cuatro pasos iterativos: identificación, estimación, y verificación.

Las herramientas principales en la **identificación**, son la función de autocorrelación (FAC), la función de autocorrelación parcial (FACP) y los correlogramas resultantes, que son simplemente los gráficos de la FAC y de la FACP respecto a la longitud del rezago  $l$ . La autocorrelación parcial mide la correlación entre observaciones que están separadas  $l$  períodos de tiempo después de eliminar el efecto de los rezagos intermedios. Con estas herramientas, se estiman los procesos estocásticos  $AR(p)$  y  $MA(q)$ , siguiendo los criterios de identificación dados por Gujarati (2004).

Tabla 2. Criterios para identificación de procesos ARMA ( $p, q$ )

Proceso	FAC	FACP
$AR(p)$	Decrece exponencialmente	Se corta en el rezago p
$MA(q)$	Se corta en el rezago q	Decrece exponencialmente
$ARMA(p, q)$	Corta en el rezago q-p	Corta en el rezago p-q

Fuente: Econometría, Gujarati, Damodar (2005), pág. 818.

Al **estimar** los coeficientes AR y MA del modelo por mínimos cuadrados, se determina su significancia mediante el estadístico t-student y se **verifican** los residuos para determinar si presentan aleatoriedad o autocorrelación. Una forma de evaluar la autocorrelación en los residuos, es mediante la prueba de Durbin-Watson presentada a continuación

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^N (\hat{\mu}_t - \hat{\mu}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^N \hat{\mu}_t^2} \quad (15)$$

Como regla de decisión, si no hay autocorrelación el estadístico DW estará alrededor de 2. Si es cercano a cero, existe evidencia de correlación serial positiva; si hay autocorrelación negativa, el estadístico estará alrededor de 4.

Cuando varios modelos cumplen con las condiciones deseadas, el criterio de información de Akaike permite seleccionar aquel con el número de coeficientes y máxima verosimilitud, siguiendo la ecuación

$$AIC = -2(l/N) + 2k/N \quad (16)$$

Donde  $l$  es el logaritmo de la función de verosimilitud, y  $k$  el número de variables del modelo.

Además del criterio de Akaike, se puede usar el criterio de Schwarz (SIC) el cual penaliza el uso de coeficientes adicionales.

$$SIC = -2(l/N) + k \log(N)/N \quad (17)$$

Por último, el criterio de información de Hannan-Quinn (HQ), es una variación del criterio de Schwarz, con una pequeña penalización de la magnitud del tamaño muestral. Inicialmente este criterio fue sugerido para seleccionar el orden de una autorregresión\*.

$$HQ = -2(l/N) + 2k \log(\log(N))/N \quad (18)$$

El mejor ajuste será aquel que minimice los criterios de información.

---

\* Caballero D. Félix, Tesis Doctoral: Selección de modelos mediante criterios de información de análisis factorial. Aspectos teóricos y computacionales, 2011, pág. 63

El modelo elegido disminuye o elimina la autocorrelación de los residuos estandarizados, sin embargo, al realizar el correlograma de residuos al cuadrado, se puede encontrar autocorrelaciones en la varianza, indicando que esta no es homocedástica. Matemáticamente se puede evaluar la autocorrelación en los residuos al cuadrado, mediante el test ARCH formulado por Engle (1982), el cual consiste en ajustar el modelo (19), y evaluar el estadístico F de la prueba conjunta de los coeficientes  $\gamma_i$  y el estadístico t de la prueba individual, si estos muestran que los coeficientes son estadísticamente diferentes de cero, es un indicio de heterocedasticidad autorregresiva.

$$u_t^2 = \gamma_1 + \gamma_2 u_{t-1}^2 + \gamma_3 u_{t-2}^2 + \dots + \gamma_{11} u_{t-p}^2 \quad (19)$$

**3.2.2.2. Modelos GARCH.** Los modelos lineales, tales como el ARIMA, se basan en el supuesto de homocedasticidad, la cual implica que la varianza en los residuos del modelo es constante en el tiempo.

Cuando el test ARCH indica que hay heterocedasticidad de tipo autorregresiva, el comportamiento de la varianza en un instante de tiempo, depende de los valores pasados de los errores al cuadrado y de sus propios valores rezagados, lo cual es representado matemáticamente por la regresión

$$\sigma_t = \gamma_1 + \gamma_2 u_{t-1}^2 + \dots + \delta_1 \sigma_{t-1} + \delta_2 \sigma_{t-2} + \dots + \gamma_p u_{t-p}^2 + \delta_q \sigma_{t-q} + \varepsilon_t \quad (20)$$

Estos modelos pueden ser estimados a partir de los correlogramas de residuos al cuadrado, usando la metodología Box Jenkins, descrita anteriormente. En este caso, el modelo GARCH  $(p, q)$  presenta procesos autorregresivos y de media móvil en los rezagos de los residuos al cuadrado, equivalentes a los presentados por los rezagos de la rentabilidad en los ajustes ARMA  $(p, q)$ .

Aunque estos ajustes se usan como filtros para pruebas posteriores, también sirven para ajustar la serie a un modelo lineal; de tal forma que si el ajuste es bueno, se hace inútil buscar un modelo mas complejo para explicar el comportamiento de la serie.

### 3.3. EFICIENCIA DEL MERCADO

Según Fama (1965), un mercado eficiente es una competencia equitativa, en la cual la información está libremente disponible para todos los participantes, los cuales intentan predecir los valores futuros de los activos del mercado. Esta competencia lleva a que en un punto del tiempo, los precios actuales reflejan los efectos de toda la información disponible basada en eventos ocurridos y eventos que se esperan tendrán lugar en el futuro. En otras palabras, un mercado eficiente en un punto del tiempo, el precio actual del activo será un buen estimador de su valor intrínseco.

Asumiendo que el mercado es eficiente los cambios en los precios solo se producirán cuando se incorpora noticias no anticipadas, en la práctica, si esto se cumple no se puede hacer ninguna predicción del comportamiento futuro, debido a que la información nueva que pueda producirse ya se ha incorporado en el precio del activo.

Formalmente la Hipótesis de mercado eficiente se define como:

$$f(P_t | H_{t-1}) = f_m(P_t | H_{t-1}^m) \quad (21)$$

La ecuación indica que la función de densidad que genera el vector de precios en el instante t, depende de toda la información disponible en el momento t-1, la cual

es igual a la función de densidad del que genera el vector de precios, basado en la información usada por el mercado en el momento  $t-1$ .

Según Zablotsky (2001), un mercado eficiente se caracteriza porque:

- Los precios de los activos reflejan inmediatamente la nueva información.
- La variación de los precios está dada por dicha información y por lo tanto es impredecible.
- Las estrategias de trading buscando rendimientos extraordinarios sobre la base de reglas técnicas fracasarían.
- Los inversores profesionales no obtendrían retornos superiores en forma consistente.

En general, la hipótesis de eficiencia del mercado indica que éste no tiene memoria, pues no recuerda lo que ocurrió anteriormente, por tanto, la variación de los precios hoy no tiene relación con la de ayer.

Según Ludlow (1997), para que la HEM se cumpla es necesario que se den las condiciones de competencia perfecta:

- Que en el mercado exista un gran número de compradores y vendedores.
- Facilidad de entrada y salida del mercado, para todos los participantes.
- Continuidad y volumen de las negociaciones.
- Disponibilidad de información.
- Listas públicas de valores en cotización, lo cual da un espectro de alternativas de inversión y diversificación.

Según el tipo de información disponible Harry Roberts (1967), definió la eficiencia de tres maneras: débil, intermedia y fuerte.

**3.3.1. Eficiencia débil.** Cada activo refleja la información histórica de precios y volúmenes operados. En consecuencia, los inversores no pueden obtener rendimientos superiores realizando análisis técnico de las series de tiempo o usando reglas de comportamiento basadas en esta información, porque todos los participantes han aprendido a explotar las señales que dichas series puedan mostrar. Sin embargo, si el mercado muestra este tipo de eficiencia, el inversor podrá ganarle al mercado usando información pública y privilegiada.

**3.3.2. Eficiencia intermedia.** Esta definición abarca a la de eficiencia débil, pues los precios reflejan toda la información públicamente disponible que pueda afectar a cada activo, la cual incluye los datos históricos de precios y la noticias públicas acerca de la empresa y su entorno, como los informes de resultados, anuncios de dividendos, balances, proyecciones de ganancias, etc.

Si un mercado se ajusta a ésta hipótesis, no es posible utilizar un análisis fundamental para buscar un rendimiento superior al promedio del mercado. La única forma de lograr esto es por medio de información privilegiada.

**3.3.3. Eficiencia fuerte.** La hipótesis de eficiencia fuerte supone que los precios reflejan toda la información relevante que puede ser histórica, pública y privada. Si un mercado es eficiente en su forma fuerte, ningún inversor puede obtener grandes rendimientos de no ser por azar, ya que no es posible predecir precios futuros. La hipótesis fuerte es la más restrictiva, pues implica que el mercado sea perfecto.

Como ningún mercado es estrictamente eficiente en el sentido fuerte. Aquellos que tienen acceso a la información privilegiada pueden obtener retornos

extraordinarios, dependiendo del marco legal que los regule y los esfuerzos para hacerlo cumplir.

### **3.4. COMPORTAMIENTO CAÓTICO**

La HEM, no describe completamente el comportamiento de las series empíricas, las cuales han mostrado ser no normales, no homocedásticas y no lineales. En consecuencia, se han buscado hipótesis alternativas.

En la Conferencia Internacional sobre Caos, realizada en Londres en 1986, se definió el caos, como el comportamiento estocástico que ocurre en un sistema determinista. Aunque contradictorio, el caos es el comportamiento aparentemente aleatorio que está gobernado por leyes exactas, siendo su comportamiento predecible.

**3.4.1. Características de los Sistemas Caóticos.** Gálvez (2005), recopilando lo dicho por autores como Lorenz, Braun, Schroeder y otros caracteriza los sistemas caóticos como:

**3.4.1.1. Determinismo.** En un movimiento aparentemente caótico, se puede encontrar pautas o fórmulas que permitan predecir el estado final al que es atraído el movimiento; la ecuación que gobierna el sistema es el atractor.

Un atractor extraño es la suma de factores pequeños, diversos y variables que determinan el comportamiento de los inversores sobre los precios de las acciones.

Por tanto, conocidas algunas causas y el estado inicial se puede prever el estado del sistema en otros momentos.

**3.4.1.2. Sensibilidad a las condiciones iniciales.** Un pequeño cambio en el punto de inicio se amplifica a través de la evolución del sistema, produciendo grandes diferencias después de varias iteraciones. Según Espinoza (2007), la sensibilidad a las condiciones iniciales no dice cuál será el estado futuro del conjunto, pero permite inferir su comportamiento a corto plazo.

**3.4.1.3. Puntos periódicos densos.** El sistema es recurrente porque existen puntos periódicos, de esta forma si se pasa por uno de ellos, después de algunas iteraciones se vuelve a pasar por el mismo punto.

Existen puntos periódicos infinitos y soluciones periódicas inestables propias de un atractor extraño, de tal forma que las orbitas en el atractor se aproximan a estas soluciones y permanecen en sus límites, hasta que su naturaleza inestable haga que la órbita escape a los límites de otra solución, finalmente se alcanza el equilibrio caótico. Esto provoca que el atractor sea denso en puntos periódicos.

**3.4.1.4. Transitividad.** Implica que un sistema dinámico no puede descomponerse en dos subsistemas independientes entre sí. Aunque las orbitas que se encuentran próximas, se pueden alejar debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales; en el largo plazo pasaran por todas las regiones que componen el atractor, formando un solo sistema.

En resumen, un sistema caótico, es impredecible a largo plazo debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales, posee un atractor extraño el cual es

irreducible dada su transitividad, y finalmente en medio de la aparente aleatoriedad, el sistema presenta regularidad debido a los puntos periódicos densos.

**3.4.2. Fractales y caos.** Los atractores extraños según Mandelbrot (1982), exhiben una estructura fractal. Pues debido a las características mencionadas, dentro del atractor se produce un proceso de estiramiento y plegado que da origen a sus dos propiedades fractales: autosimilitud (La misma estructura en todas las escalas) y dimensión fractal no entera. Es decir, el caos mantiene una estructura ordenada en sí mismo y además se comporta de forma semejante a la estructura global del fenómeno estudiado.

Los atractores extraños presentan propiedades fractales, pero ambos conceptos no son iguales. El caos se caracteriza por tener sensibilidad a las condiciones iniciales y no predictibilidad a largo plazo, mientras que los fractales poseen autosimilitud e invariancia a escala. Pero ambos tienen características similares como no linealidad, iteración y memoria; esta última cualidad es la que permite tomar en cuenta los eventos pasados.

Dadas estas condiciones, la hipótesis de mercado eficiente ha sido sustituida por la hipótesis de mercado fractal.

**3.4.3. Hipótesis de Mercado Fractal.** A diferencia de la Hipótesis de mercado eficiente, la hipótesis de mercado fractal no se basa en la nueva información que ingresa al mercado, sino en el uso que le da cada inversor de acuerdo a su horizonte temporal. Por tanto la información que ingresa al mercado depende del horizonte temporal de los inversores.

Peters (1994), describe las características de un mercado fractal:

**3.4.3.1. Ineficiencia.** Las estructuras no lineales en los precios de los activos hacen inválida la hipótesis de caminata aleatoria, y por tanto, el mercado no es eficiente. Sin embargo el inversor no busca eficiencia sino liquidez en el mercado.

**3.4.3.2. El equilibrio del mercado.** En la hipótesis de Mercado Fractal, los inversores tienen diferentes horizontes temporales, y valoran la información disponible de acuerdo al horizonte de su interés, por esto el mercado se mantiene estable. Cuando el inversor cambia su horizonte temporal, se producen cambios bruscos, que generan inestabilidad en el mercado. Por tanto, no existe un solo equilibrio de mercado, sino tantos como horizontes temporales de los inversores.

**3.4.3.3. Memoria y ciclos en el mercado.** Los sistemas caóticos son deterministas y tienen memoria de los hechos pasados, por lo que el sistema puede volver a pasar por un punto en el que ya había estado, debido al atractor del sistema, dando posibilidad al inversor de predecir el futuro comportamiento del mercado.

**3.4.3.4. Aleatoriedad Local y Determinismo Global.** Debido a que un inversor valora la información disponible en función de su horizonte temporal, y dos inversores con el mismo horizonte pueden valorar una información de forma distinta, se producen movimientos aleatorios a nivel local. Sin embargo, la existencia de atractores convierte en caótico el mercado global.

Dada estas características, se encuentra que la principal diferencia entre ambas hipótesis, es que la HEM, no permite hacer predicciones, porque los precios son aleatorios, y el pasado no sirve de guía para el futuro. Pero si el mercado no es eficiente, sino caótico, se pueden realizar predicciones en el corto plazo, ya que en el largo plazo, el sistema se hace inestable (Efecto Mariposa).

**3.4.4. Comprobación de comportamiento caótico.** Existen diversas herramientas cualitativas y cuantitativas para probar la existencia de comportamiento caótico.

#### **3.4.4.1. Técnicas Cualitativas**

- **Gráfica Precios vs Tiempo, a diferentes escalas:** Peters (1994) observó que las graficas de series de precios de los activos financieros, tienen la misma estructura independientemente de la escala temporal estudiada.

Peters también explica que la presencia de estructuras fractales, se debe a los distintos horizontes temporales con los que operan los inversores, debido a que negocian en el corto plazo, con visión a largo plazo o a su horizonte temporal, tal como lo afirma la hipótesis de mercado fractal.

Cuando un objeto tiene la misma apariencia en distintas escalas, puede definirse como un fractal. Sin embargo, aunque esta característica esté presente no se puede concluir que la serie sigue un comportamiento caótico, ya que Mandelbrot (1982) observó el mismo comportamiento en el movimiento browniano, el cual es aleatorio.

- **Gráficos de Recurrencia:** Los Gráficos de recurrencia, fueron introducidos por Eckmann (1987) y se usan para mostrar cambios estructurales y patrones recurrentes e intermitentes en las series de tiempo.

Según Packard, Crutchfield, Farmer & Shaw (1980) y Takens (1993) a partir de una serie de tiempo unidimensional, que ha sido generada por un sistema determinista de dimensión  $d$ , se puede obtener información del sistema completo. Takens demostró que es posible construir un espacio de estados de dimensión  $M \geq 2d + 1$ , con las mismas propiedades del espacio multidimensional del sistema original.

Antes de realizar el gráfico de recurrencia se debe tener información el retardo temporal y la dimensión de inmersión.

- **Retardo temporal (T):** Para determinar el retardo óptimo se usa la función de información mutua (AMI). Un retardo óptimo es aquel que provee la máxima cantidad de información nueva al sistema  $x(t)$ , sobre el estado  $x(t + T)$ , de tal forma que si se tiene  $x_n$  y  $x_{n+T}$ , la información mutua entre ambas mediciones es la cantidad aprendida de  $x_n$  acerca de  $x_{n+T}$ , para cualquier valor de  $n$ .

Gimeno (2000), describe el procedimiento para calcular la función de información mutua usando la entropía de la información\*. Esta última se puede calcular para una sola variable (22) o para la distribución conjunta de dos variables (23).

$$H = - \sum_i p_i \log_2 p_i \tag{22}$$

$$H = - \sum_i \sum_j p_{ij} \log_2 p_{ij} \tag{23}$$

---

\* Claude E. Shannon (1948): A Mathematical Theory of Communication, Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp. 379–423, 623–656.

Donde  $p_i$  es la probabilidad de que ocurra  $i$ , y  $p_{ij}$  es la probabilidad conjunta de que ocurra  $i$  dado que ocurre  $j$ , para variables independientes esta probabilidad es igual al producto de las probabilidades  $p_i$  y  $p_j$ .

La función de información mutua es la diferencia entre la entropía conjunta y las entropías de cada una de las variables individuales.

$$IM = -\sum_i \sum_j p_{ij} \log_2 p_{ij} - H = -\sum_i p_i \log_2 p_i - H = -\sum_j p_j \log_2 p_j \quad (24)$$

Para calcular el retardo óptimo se toman como variables  $x_t$  y  $x_{t+T}$ . Luego se agrupan los datos por intervalos para cada variable y se asignan marcas de clase para calcular frecuencias relativas, estas últimas se usan como estimadores de las probabilidades de la ecuación (24).

A medida que aumenta la distancia temporal entre observaciones disminuye la información proporcionada. De tal manera que al construir una gráfica de la IM en función de  $T$ , se puede obtener el  $T$  óptimo cuando la función IM alcanza su primer mínimo.

- **Dimensión de Inmersión (m):** El método de falsos vecinos cercanos, se usa para elegir la mínima dimensión de inmersión de una serie unidimensional. Este método encuentra los vecinos cercanos de cada punto en una dimensión dada, y verifica si continúan siendo cercanos en una dimensión más alta. Cuando se alcanza la dimensión apropiada el porcentaje de falsos vecinos cercanos debe tender a cero.

El software VRA calcula la dimensión de inmersión usando una versión modificada del método original, para hacerlo robusto en presencia de ruido y no sensible al tamaño de muestra. Usando el siguiente algoritmo: Para cada vector  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  encuentra su vecino cercano  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  en un espacio n-

dimensional. Luego calcula la distancia  $R = |x_{n+1} - y_{n+1}|$  y la compara con la distancia  $|x_{n+1} - x_n|$ , si son iguales, se etiqueta como falso vecino.

Para expandir una serie unidimensional a un espacio de fase M-dimensional, se recomienda convertir la serie en estacionaria\* y luego sustituir cada observación de la serie original  $x(t)$ , con el vector

$$y_i = \{x_i, x_i - T, x_i - 2T, \dots, x_i - (m - 1)T\} \quad (25)$$

Donde  $i$  es el instante de tiempo,  $m$  es la dimensión de inmersión, y  $T$  es el retardo temporal. Como resultado se tiene la serie de vectores

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_N - (m - 1)d\} \quad (26)$$

Donde  $N$  es la longitud de la serie original.

El gráfico de recurrencia es una matriz de distancias euclidianas, entre el vector  $Y_i$  y el vector  $Y_j$ , de tamaño  $M \times M$ , donde las intersecciones entre la coordenada  $i$ , y la coordenada  $j$ , se identifican mediante un código de colores de acuerdo a la escala establecida, en la cual el color más claro muestra las distancias más cortas y el color más fuerte denota las distancias más grandes.

Este gráfico es esencialmente una representación de la integral de correlación; preservando, a diferencia de esta, la dependencia temporal en las series de tiempo, además de la dependencia espacial.

La inspección visual del gráfico de recurrencia mostrará  $M$  puntos en la bisectriz del cuadrado. Además, pueden aparecer segmentos de línea paralelos a la

---

\* Eugene Kononov (1987), Desarrollador del software Visual Recurrence Analysis, utilizado para realizar gráficos de recurrencia.

bisectriz que corresponden a vectores, cronológicamente secuenciados. Teóricamente, estos segmentos no deben aparecer si el mecanismo generador de la serie es aleatorio y aparecerán en los sistemas deterministas.

Como herramienta de análisis, entre más estructurado sea el gráfico de recurrencia, más determinista es la serie. Por el contrario, existe indicio de aleatoriedad cuando el gráfico es uniforme.

La entropía de espacio temporal (STE), es una medida de la estructura del gráfico de recurrencia, el cual compara la distribución de colores del gráfico completo con la distribución de colores en cada línea diagonal del gráfico. La diferencia es mayor, cuando la imagen es más estructurada. Matemáticamente el STE es un porcentaje que compara la distribución de las distancias entre todos los pares de vectores del espacio y de las órbitas que evolucionan a través del tiempo. Como criterio de decisión, valores de STE cercanos a 100 indican aleatoriedad y cercanos a cero, indican periodicidad. Los porcentajes intermedios son indicio de comportamiento caótico.

#### 3.4.4.2. Técnicas Cuantitativas

- **Dimensión de Correlación:** La Integral de Correlación  $C^m(\varepsilon)$  es una función de probabilidad de que dos puntos del atractor estén separados por una distancia menor que  $\varepsilon$ , donde el límite representa la necesidad de conocer el sistema completo o tener observaciones infinitas, para conocer el valor verdadero de la integral. Se define la Integral de Correlación como:

$$C^m(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H(\varepsilon, \bar{x}_i, \bar{x}_j)}{N^2} \quad (27)$$

Donde:

$\varepsilon$ : Distancia Umbral.

$C^m(l)$  : Integral de correlación o probabilidad de que un par de puntos del sistema se encuentren a una distancia menor que  $\varepsilon$  en la dimensión de inmersión  $m$ .

$N$ : Número de observaciones del sistema.

$x_i, x_j$ : Dos observaciones del sistema

$H(\varepsilon, \bar{x}_i, \bar{x}_j)$ : Función de Heaviside, se puede expresar de la forma:

$$H(\varepsilon, \bar{x}_i, \bar{x}_j) \begin{cases} = 0, si(\varepsilon - \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\|) \leq 0 \\ = 1, si(\varepsilon - \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\|) > 0 \end{cases} \quad (28)$$

donde  $\| \|$  representa la distancia euclídea.

Grassberger y Procaccia (1983a) consideran que para valores pequeños de  $\varepsilon$ , se puede afirmar que:

$$C(\varepsilon) = \varepsilon^{Dc} \quad (29)$$

Donde  $Dc$  es la Dimensión de Correlación, y  $C(\varepsilon) = \lim_{m \rightarrow \infty} C^m(\varepsilon)$ . Despejando  $Dc$ , se obtiene:

$$Dc = \text{Log } C(\varepsilon) / \text{Log } \varepsilon \quad (30)$$

Si la serie es caótica, cuando aumenta el valor de la dimensión de inmersión ( $m$ ) el valor de la dimensión de correlación tenderá asintóticamente al valor de la dimensión del atractor. Por el contrario, si el fenómeno es aleatorio, al aumentar la dimensión de inmersión, se aumenta el espacio disponible y por tanto aumenta indefinidamente la estimación de la dimensión de correlación.

En los sistemas no aleatorios, este valor se mantendrá siempre por debajo de la dimensión de inmersión. Como criterio de decisión, si  $D_c$  es igual a uno la serie es periódica, si es igual a dos las oscilaciones son cuasi-periódicas y si es mayor de dos el comportamiento es caótico. Cuando existe comportamiento caótico en la serie, la dimensión de correlación determina la dimensión del atractor extraño.

- **Coefficiente de Hurst (H):** El exponente de Hurst (1951) mide el nivel de persistencia en una serie de tiempo. Se usa principalmente para detectar memoria a largo plazo en las series temporales, la cual es evidencia de un comportamiento no lineal. Este coeficiente es calculado a través de la ley de potencia

$$R/S(\tau) = (a * \tau)^H \quad (31)$$

Donde,  $a$  es una constante,  $\tau$  es el número de observaciones,  $H$  es el exponente o coeficiente de Hurst, y  $R/S(\tau)$  es el estadístico que depende del tamaño de la serie y se define como el rango de variación de la serie sobre su desviación típica.

Siguiendo la metodología usada por Pérez (2008)\*, para calcular el coeficiente de Hurst de la serie temporal  $\{x_t\}$ , donde  $t = 1, 2, 3 \dots N$ ; se divide la serie en vectores  $\bar{x}_j$  de tamaño  $\tau_i = N/2i$ , donde  $i$  es un entero positivo y  $j = 1, 2, 3 \dots i$ .

Para un valor de  $\tau$ , se hallan los valores promedio ( $M_j$ ) y las desviaciones estándar ( $S_j$ ) de cada vector.

$$M_j = \sum_{t=1+[(j-1)*\tau]}^{j*\tau} \left[ \frac{x_t}{\tau-1} \right] \quad (32)$$

---

\* Creador del código MATLAB, usado para calcular el coeficiente de Hurst.

$$S_j = \sqrt{\frac{1}{\tau-1} \sum_{t=1+[(j-1)*\tau]^{j*\tau}} (x_t - M_j)^2} \quad (33)$$

Con el promedio  $M_j$  se transforman los datos originales, en una nueva serie que representa la diferencia acumulada respecto a la media

$$V_j = \sum_{t=1+[(j-1)*\tau]^{j*\tau}} (x_t - M_j) \quad (34)$$

Para cada  $j$ , el rango ( $R_j$ ) se calcula como la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de  $V_j$ . Luego se compara  $R_j$  con la desviación estándar hallada inicialmente. Matemáticamente, se expresa así

$$[R/S]_j = \frac{R_j}{S_j} \quad (35)$$

El valor promedio de todos los  $[R/S]_j$  con tamaño de muestra  $\tau_i$ , es igual al valor  $[R/S]_i$  el cual es logaritmicamente proporcional a  $\tau_i$ , siguiendo la expresión:

$$\log(R/S) = H \log(\tau) + b \quad (36)$$

Donde H es el exponente de Hurst. Como criterio de decisión si  $H > 0.5$ , la serie es persistente, lo cual es indicio de que no es un proceso de ruido blanco y que los datos son dependientes. Si  $H < 0.5$  la serie es antipersistente. Pero si el coeficiente de Hurst es igual a 0.5, la serie es ruido blanco.

- **Máximo exponente de Lyapunov:** En un sistema dinámico mide la separación de dos orbitas cercanas respecto al tiempo. Se usa para detectar sensibilidad a las condiciones iniciales como indicio de caos en las series. Si el exponente es menor que cero, la serie es convergente, si es cero no converge ni diverge, lo que indicaría comportamiento periódico, pero si es positivo implica dinámica caótica.

Matemáticamente el exponente de Lyapunov (1992) indica que dos trayectorias dentro del atractor, con separación inicial  $\Delta x_0$ , divergen en el instante  $t$  hasta  $\Delta x_t$ , cuando  $t$  tiende a infinito y  $\Delta x_0$  es muy pequeño. Estas distancias se relacionan, mediante la expresión

$$\delta x_t \approx e^{\lambda t} \delta x_0 \quad (37)$$

Dicho de otra forma,

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\Delta x_t}{\Delta x_0} \right) \quad (38)$$

Si se toma  $D$  como la distancia relativa entre dos trayectorias cercanas, entonces esa distancia se puede expresar en función del exponente de Lyapunov.

$$D = e^{\lambda t} \quad (39)$$

Si  $\lambda$  es positivo, la distancia entre las trayectorias aumenta con el tiempo, y si es negativo, disminuye. Si el sistema es estable, las trayectorias deben convergen hacia un atractor, y la distancia entre ellas disminuye con el paso del tiempo. Si el sistema es inestable, las trayectorias no tienden a ningún atractor, y la distancia entre trayectorias próximas tenderá a aumentar.

El radio de separación puede ser diferente para diferentes orientaciones del vector de separación inicial. Por tanto, existen tantos exponentes de Lyapunov, como número de dimensiones del espacio de fase. Pero generalmente se toma como referencia el máximo exponente.

#### 3.4.4.3. Test Estadístico

- **Prueba BDS:** Este test fue desarrollado por Brock, Dechert, Scheinkman and LeBaron (1996). Se basa en la dependencia en las series y se usa para probar si una serie es independiente, o si por el contrario, presenta dependencia lineal, dependencia no lineal o comportamiento caótico.

Este test se basa en la hipótesis nula de que la serie es independiente e idénticamente distribuida (i.i.d) y se aplica con mayor potencia a muestras grandes, ya sean series de tiempo o de residuos.

Para calcular el estadístico, se usa la integral de correlación  $C^m(\epsilon)$  definida en (27), donde  $m$  es la dimensión de inmersión y  $\epsilon$  es la distancia umbral de referencia, como la probabilidad de que dos puntos en el atractor se encuentren a una distancia menor que  $\epsilon$ .

Si todos los valores de la serie están idénticamente distribuidos, se cumplirá la igualdad

$$C^m(\epsilon) = [C^1(\epsilon)]^m \tag{40}$$

De hecho, Brock, Decher, & Scheinkman (1987) demostraron que

$$\frac{\sqrt{N}[c^m(\varepsilon) - [c^1(\varepsilon)]^m]}{\sigma_m(\varepsilon)} \rightarrow N(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \quad (41)$$

Donde la varianza  $\sigma_m^2(\varepsilon)$  se estima con la expresión:

$$\sigma_m^2(\varepsilon) = 4[K^m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} K^{m-j} (c^1)^{2j} + (m-1)^2 (c^1)^{2m} - m^2 K (c^1)^{2m-2}] \quad (42)$$

Como se observa la varianza depende de la integral de correlación de dimensión 1, y de  $K(\varepsilon)$ , que es la probabilidad de que tres puntos estén a una distancia menor de  $l$ , esta probabilidad, obedece a la ecuación

$$K(\varepsilon) = \frac{6}{N(N-1)(N-2)} \sum_{t=1}^N \sum_{s=t+1}^N \sum_{r=s+1}^N \frac{1}{3} \begin{bmatrix} H(\varepsilon - |x_t - x_s| H(l - |x_s - x_r|) + \\ H(\varepsilon - |x_t - x_s| H(l - |x_s - x_r|) + \\ H(\varepsilon - |x_t - x_s| H(l - |x_s - x_r|) \end{bmatrix} \quad (43)$$

El estadístico (41) permite hacer el contraste BDS, en el que la hipótesis nula de que  $x_t$  es aleatoria, independiente e idénticamente distribuida; se rechaza si el valor del estadístico tiene un P-valor menor al nivel de significancia.

## 4. COMPROBACIÓN DE COMPORTAMIENTO CAÓTICO EN EL MERCADO BURSÁTIL COLOMBIANO

### 4.1. DATOS

Los datos seleccionados corresponden a los precios de cierre diarios del Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC) y de los principales activos que representan aproximadamente el 60% de la composición del índice. Se omiten los días en los que la Bolsa no operó y los que presentan valores nulos.

Tabla 3. Activos Financieros Seleccionados

Activo	Nemotécnico	N	Fecha Inicial	Fecha Final
Índice General Bolsa de Colombia	IGBC	2625	03/08/2001	15/06/2012
Ecopetrol	ECOPETROL	1020	21/04/2008	03/07/2012
Pacific Rubiales Energy Corporation	PREC	510	08/06/2010	03/07/2012
Preferencial Bancolombia	PFBCOLOM	2040	27/01/2004	03/07/2012
Grupo Inversiones Suramericana	GRUPOSURA	510	27/05/2010	29/06/2012
Cementos Argos	CEMARGOS	1530	06/03/2006	29/06/2012
Isagen	ISAGEN	1020	16/04/2008	03/07/2012
Bancolombia	BCOLOMBIA	2550	31/10/2001	03/07/2012

Fuente: Elaboración Propia.

Las series son analizadas en los períodos totales, y en subperíodos iguales, con el fin de observar la evolución de la eficiencia del mercado bursátil a través de los años.

Tabla 4. Subperíodos Iguales para cada serie de activos.

<b>Activo</b>	<b>Período</b>	<b>N</b>	<b>Fecha Inicial</b>	<b>Fecha Final</b>
IGBC	P1	525	03/08/2001	30/09/2003
	P2	525	01/10/2003	24/11/2005
	P3	525	25/11/2005	18/02/2008
	P4	525	19/02/2008	28/04/2010
	P5	525	29/04/2010	15/06/2012
ECOPETROL	P1	510	21/04/2008	03/06/2010
	P2	510	04/06/2010	03/07/2012
PREC	P1	510	08/06/2010	03/07/2012
PFBCOLOM	P1	510	27/01/2004	02/03/2006
	P2	510	03/03/2006	21/04/2008
	P3	510	22/04/2008	03/06/2010
	P4	510	04/06/2010	03/07/2012
GRUPOSURA	P1	510	27/05/2010	29/06/2012
CEMARGOS	P1	510	06/03/2006	16/04/2008
	P2	510	17/04/2008	24/05/2010
	P3	510	25/05/2010	29/06/2012
ISAGEN	P1	510	16/04/2008	01/06/2010
	P2	510	02/06/2010	03/07/2012
BCOLOMBIA	P1	510	31/10/2001	19/01/2004
	P2	510	20/01/2004	20/02/2006
	P3	510	21/02/2006	15/04/2008
	P4	510	16/04/2008	01/06/2010
	P5	510	02/06/2010	03/07/2012

Fuente: Elaboración Propia.

Se toma como variable de estudio, la rentabilidad continua de cada activo, teniendo en cuenta que para construir modelos ARIMA y GARCH se debe contar con series estacionarias.

Por otro lado, Gimeno (2000) afirma que las colas pesadas en las distribuciones de rendimientos, se presentan por comportamientos anómalos, producto del ingreso de información nueva al mercado, la cual es ajena a la dinámica del sistema. Es por eso que sugiere intervenir las series y eliminar los rendimientos que superen  $n$  veces las desviaciones estándar de las series. Para elegir el valor de  $n$ , se toma la serie más general, período total del IGBC (2674 Datos), y se calcula el número de datos excluidos en cada  $n$ . Finalmente, se toma el valor que incluya el 99% de los datos para garantizar que solo se eliminan datos anómalos.

Tabla 5. Casos excluidos por superar en  $n$ -veces la desviación típica ( $\sigma$ ).

$\sigma*n$	Casos Incluidos	% Incluido	Casos Excluidos	% Excluido
$\sigma*1$	1433	54%	1242	46%
$\sigma*2$	2128	80%	546	20%
$\sigma*3$	2436	91%	238	9%
$\sigma*4$	2559	96%	115	4%
$\sigma*5$	2610	98%	64	2%
$\sigma*6$	2631	98%	43	2%
<b><math>\sigma*7</math></b>	<b>2644</b>	<b>99%</b>	<b>30</b>	<b>1%</b>
$\sigma*8$	2654	99%	20	1%
$\sigma*9$	2658	99%	16	1%
$\sigma*10$	2662	100%	12	0%

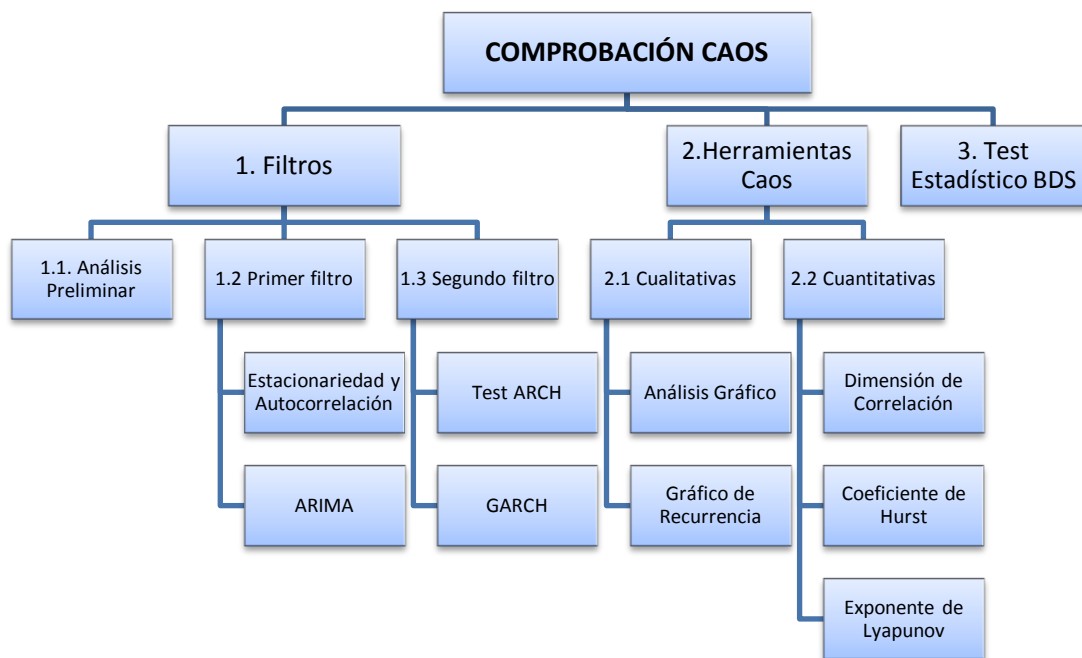
Fuente: Elaboración Propia.

De acuerdo a la tabla 5, se intervienen las series de retornos, eliminando todos los datos anómalos que excedan  $\pm 3.5$  veces la desviación típica. Se precisa que la

extensión de los períodos y subperíodos de las series descritos en las tablas 3 y 4, fueron calculados, luego de depurar los datos.

## 4.2. METODOLOGÍA

Figura 1. Metodología del proyecto.



Fuente: Elaboración Propia.

El método usado para comprobar el comportamiento caótico en el mercado colombiano esta descrito por la figura 1.

La primera parte consiste en obtener series de residuos no correlacionados, mediante el ajuste de modelos ARIMA y GARCH, esta parte se divide en tres pasos: primero, el análisis de la serie mediante los estadísticos básicos y la

prueba Jarque-Bera, que contrasta estadísticamente la normalidad de la distribución; posteriormente se aplican los test DFA (Contraste Estacionariedad) y los test de Bartlett y  $Q_{LB}$  (Contraste Autocorrelación) para ajustar modelos ARIMA; hasta obtener series de residuos estandarizados sin autocorrelación, finalmente, se realiza el test ARCH, para evaluar la necesidad de ajustar modelos GARCH.

Una vez se hayan eliminado las autocorrelaciones en los residuos estandarizados y los residuos al cuadrado; la segunda parte consiste en la búsqueda de indicios de comportamiento caótico de forma cualitativa, mediante la elaboración de gráficos de la serie de tiempo a diferentes escalas y gráficos de recurrencia, los cuales identifican estructuras fractales y estructuras periódicas, respectivamente.

Cuando se encuentran indicios de caos en las pruebas cualitativas, se usan las técnicas cuantitativas como el cálculo de la Dimensión de Correlación, el Coeficiente de Hurst, y el Exponente de Lyapunov.

La última parte consiste en el uso del test estadístico BDS para corroborar los resultados obtenidos de la parte anterior.

### **4.3. RESULTADOS**

A continuación se presenta la estimación de los diferentes estadísticos, pruebas y modelos descritos en la metodología.

**4.3.1. Filtros.** De acuerdo la metodología, la primera etapa consiste en el análisis preliminar de los datos, y posteriormente la búsqueda de autocorrelación y heterocedasticidad para ajustar modelos ARIMA-GARCH.

**4.3.1.1. Análisis estadístico preliminar.** En la tabla 6 se presentan los resultados del análisis estadístico preliminar, con el fin de establecer las características de las series financieras, se resaltan los valores de la media, el sesgo y la curtosis, en los que usando la prueba t-student de dos colas, no se puede rechazar la hipótesis de que son estadísticamente iguales a los parámetros de una distribución normal (media=0, sesgo=0 y curtosis=3).

Se observa los activos que incluyen períodos del 2001 al 2006 (IGBC, PFBCOLOM y BCOLOMBIA), presentan medias positivas estadísticamente diferentes de cero, durante esos años. Mientras que para los demás períodos en todas las acciones, no se puede rechazar la hipótesis de que la media sea estadísticamente diferente de cero. Esto podría indicar que a partir del año 2006 el mercado se ha hecho más eficiente.

Al observar la medida del sesgo, se debe tener en cuenta que las series han sido intervenidas, eliminando valores extremos, pero a pesar de esto se observa que el IGBC presenta valores negativos durante todo el período estudiado, siendo estadísticamente diferentes de cero hasta el año 2006, esto se debe a que probablemente la serie aún tiene valores negativos extremos. En las demás series este estadístico es similar al de una distribución normal.

Por otro lado, el valor de la curtosis es estadísticamente mayor a tres en todas las series. Esto significa que aunque se eliminan los valores extremos, continúan siendo leptocúrticas, lo cual es usual en las series financieras.

Por último la significancia del estadístico Jarque-Bera confirma que a pesar de lo indican algunos parámetros, estadísticamente se rechaza la hipótesis de que las series de rentabilidades, sigan una distribución de probabilidad normal. Según

Espinoza (2008), la no normalidad y la elevada curtosis suelen ser indicios de que la serie ha sido generada por un proceso no lineal.

Tabla 6. Estadísticas De Las Series De Retornos.

Activo	Media	Mediana	Máx.	Mín.	Desv. Estándar	Sesgo	Curtosis	JBp
<b>IGBC</b>	0.00119	0.00138	0.0481	-0.0475	0.0118	-0.236	4.68	0%
P1	0.00125	0.00121	0.0343	-0.0406	0.0096	-0.325	5.06	0%
P2	0.00271	0.00305	0.0400	-0.0470	0.0122	-0.506	4.33	0%
P3	<b>0.00088</b>	0.00141	0.0481	-0.0475	0.0140	<b>-0.064</b>	4.26	0%
P4	<b>0.00084</b>	0.00092	0.0443	-0.0466	0.0116	<b>-0.123</b>	4.99	0%
P5	<b>0.00024</b>	0.00060	0.0375	-0.0420	0.0110	-0.302	4.23	0%
<b>ECOPETROL</b>	<b>0.00085</b>	0.00000	0.0529	-0.0545	0.0149	<b>-0.013</b>	4.06	0%
P1	<b>0.00054</b>	0.00000	0.0529	-0.0545	0.0146	<b>0.084</b>	4.33	0%
P2	<b>0.00116</b>	0.00125	0.0503	-0.0471	0.0152	<b>-0.103</b>	3.84	0%
<b>PREC</b>	<b>-0.00011</b>	0.00081	0.0837	-0.0826	0.0232	<b>-0.056</b>	4.50	0%
<b>PFBCOLOM</b>	0.00098	0.00000	0.0723	-0.0719	0.0181	<b>-0.008</b>	4.35	0%
P1	0.00272	0.00180	0.0723	-0.0709	0.0191	<b>0.037</b>	4.39	0%
P2	<b>0.00015</b>	0.00000	0.0710	-0.0719	0.0187	<b>-0.139</b>	4.37	0%
P3	<b>0.00070</b>	0.00000	0.0653	-0.0661	0.0190	<b>0.006</b>	4.00	0%
P4	<b>0.00036</b>	0.00000	0.0529	-0.0546	0.0152	<b>0.036</b>	4.03	0%
<b>GRUPOSURA</b>	<b>0.00005</b>	0.00000	0.0473	-0.0502	0.0139	<b>-0.022</b>	4.09	0%
<b>CEMARGOS</b>	<b>0.00014</b>	0.00000	0.1528	-0.1155	0.0195	<b>-0.036</b>	10.14	0%
P1	<b>-0.00073</b>	0.00000	0.1528	-0.1155	0.0236	<b>0.013</b>	10.99	0%
P2	<b>0.00086</b>	0.00124	0.0953	-0.0910	0.0193	<b>-0.171</b>	5.90	0%
P3	<b>0.00029</b>	0.00000	0.0582	-0.0495	0.0146	0.264	4.35	0%

Tabla 6. Estadísticas De Las Series De Retornos (Continuación).

Activo	Media	Mediana	Máx.	Mín.	Desv. Estándar	Sesgo	Curtosis	JBp
<b>ISAGEN</b>	<b>-0.00010</b>	0.00000	0.0445	-0.0417	0.0113	0.201	4.75	0%
P1	<b>-0.00019</b>	0.00000	0.0433	-0.0417	0.0106	<b>0.201</b>	5.53	0%
P2	<b>0.00000</b>	0.00000	0.0445	-0.0386	0.0120	<b>0.193</b>	4.16	0%
<b>BCOLOMBIA</b>	0.00146	0.00000	0.0683	-0.0648	0.0170	<b>0.043</b>	4.49	0%
P1	0.00301	0.00000	0.0599	-0.0440	0.0166	0.402	4.18	0%
P2	0.00258	0.00215	0.0683	-0.0619	0.0185	<b>-0.129</b>	4.21	0%
P3	<b>0.00023</b>	0.00000	0.0597	-0.0576	0.0168	<b>0.041</b>	5.00	0%
P4	<b>0.00098</b>	0.00102	0.0659	-0.0648	0.0176	<b>-0.038</b>	4.33	0%
P5	<b>0.00048</b>	0.00000	0.0535	-0.0611	0.0152	<b>-0.071</b>	4.47	0%

Nota: En la tabla sólo aparece el P-valor de la prueba Jarque-Bera.

Fuente: Elaboración Propia.

**4.3.1.2. Estacionariedad y Autocorrelación.** La prueba de Dickey y Fuller Aumentada (DFA) confirma la presencia de raíz unitaria en las series de precios, haciendo evidente la necesidad de integrarla, usando diferenciación logarítmica (rentabilidad). La serie de retornos, genera estadísticos DFA, con una significancia menor al 1%, rechazando la hipótesis de que tengan una raíz unitaria. Con estos resultados (Ver Apéndice A) se asume estacionariedad en los retornos. Aunque algunas series originales son estacionarias en los precios, se usan solo retornos para unificar variables.

Después se evalúa la autocorrelación de las series, usando el test de Bartlett y el estadístico  $Q_{LB}(m)$ . Siguiendo a Tsay (2005)  $m = \ln(N)$ , se obtienen valores entre

6 y 8 para todas las series. Sin embargo, se elige  $m=10$  para tener un horizonte de dos semanas, el cual es adecuado para la toma de decisiones para los inversores.

Tabla 7. Análisis de autocorrelación en la rentabilidad del IGBC

IGBC									
PERÍODO	m	$\rho$	QLB	$P_{QLB}$	PERÍODO	m	$\rho$	QLB	$P_{QLB}$
TOTAL	1	<b>0.195</b>	99.9	0.0%	P3	1	<b>0.146</b>	11.3	0.1%
<b>03/08/2001-</b>	2	0.022	101.1	0.0%	<b>25/11/2005-</b>	2	0.002	11.3	0.4%
<b>15/06/2012</b>	3	-0.046	106.6	0.0%	<b>18/02/2008</b>	3	-0.054	12.9	0.5%
	4	-0.032	109.3	0.0%		4	0.002	12.9	1.2%
Nº de Datos	5	0.005	109.4	0.0%	Nº de Datos	5	0.023	13.2	2.2%
<b>2625</b>	6	0.004	109.5	0.0%	<b>525</b>	6	-0.018	13.3	3.8%
	7	0.010	109.7	0.0%		7	-0.065	15.6	2.9%
Intervalo Bartlett	8	0.015	110.3	0.0%	Intervalo Bartlett	8	-0.074	18.5	1.8%
$\pm$ <b>0.038</b>	9	0.020	111.4	0.0%	$\pm$ <b>0.086</b>	9	-0.012	18.6	2.9%
	10	0.015	112.0	0.0%		10	-0.013	18.6	4.5%
P1	1	<b>0.323</b>	55.0	0.0%	P4	1	<b>0.142</b>	10.7	0.1%
<b>03/08/2001-</b>	2	<b>0.134</b>	64.4	0.0%	<b>19/02/2008-</b>	2	-0.086	14.6	0.1%
<b>30/09/2003</b>	3	-0.016	64.6	0.0%	<b>28/04/2010</b>	3	<b>-0.105</b>	20.4	0.0%
	4	-0.076	67.7	0.0%		4	-0.050	21.7	0.0%
Nº de Datos	5	-0.070	70.3	0.0%	Nº de Datos	5	0.034	22.3	0.0%
<b>525</b>	6	0.009	70.3	0.0%	<b>525</b>	6	-0.042	23.3	0.1%
	7	0.007	70.3	0.0%		7	<b>0.094</b>	28.0	0.0%
Intervalo Bartlett	8	0.027	70.7	0.0%	Intervalo Bartlett	8	0.086	31.9	0.0%
$\pm$ <b>0.086</b>	9	0.068	73.2	0.0%	$\pm$ <b>0.086</b>	9	-0.053	33.4	0.0%
	10	0.053	74.7	0.0%		10	-0.066	35.8	0.0%
P2	1	<b>0.285</b>	42.8	0.0%	P5	1	<b>0.105</b>	5.8	1.6%
<b>01/10/2003-</b>	2	0.053	44.3	0.0%	<b>29/04/2010-</b>	2	0.027	6.2	4.5%
<b>24/11/2005</b>	3	-0.034	44.9	0.0%	<b>15/06/2012</b>	3	-0.033	6.8	8.0%
	4	-0.018	45.1	0.0%		4	-0.084	10.5	3.3%
Nº de Datos	5	0.019	45.3	0.0%	Nº de Datos	5	-0.047	11.6	4.0%
<b>525</b>	6	0.054	46.8	0.0%	<b>525</b>	6	-0.011	11.7	6.9%
	7	0.069	49.4	0.0%		7	-0.061	13.7	5.7%
Intervalo Bartlett	8	0.078	52.6	0.0%	Intervalo Bartlett	8	-0.018	13.8	8.6%
$\pm$ <b>.086</b>	9	<b>0.106</b>	58.6	0.0%	$\pm$ <b>0.086</b>	9	0.002	13.8	12.8%
	10	0.097	63.7	0.0%		10	-0.009	13.9	17.9%

Nota: Se resaltan los valores significativos según el Intervalo de Bartlett.

Fuente. Elaboración Propia

En la serie del IGBC, se observa que durante todo el período estudiado, las autocorrelaciones más grandes se presentan en el primer rezago, es decir, la rentabilidad de hoy depende del día anterior, además el cuarto subperíodo se destaca por ser el que más presenta autocorrelación

Luego de hacer un análisis de autocorrelación en todas las series (Ver Apéndice B), se observa que la mayoría presenta autocorrelaciones en la mayor parte del período estudiado, por lo cual es posible ajustar modelos ARIMA, que generen residuos sin autocorrelación.

A excepción de Ecopetrol y CEMARGOS todas las series presentan autocorrelación en el primer rezago, igual sucede en la serie del IGBC. Además se observa que el subperíodo con más autocorrelaciones en el IGBC, coincide con el mismo subperíodo (2008-1010) en cada uno de los activos, donde se destacan autocorrelaciones del orden uno, dos y tres, así como también con una semana y media o dos semanas atrás.

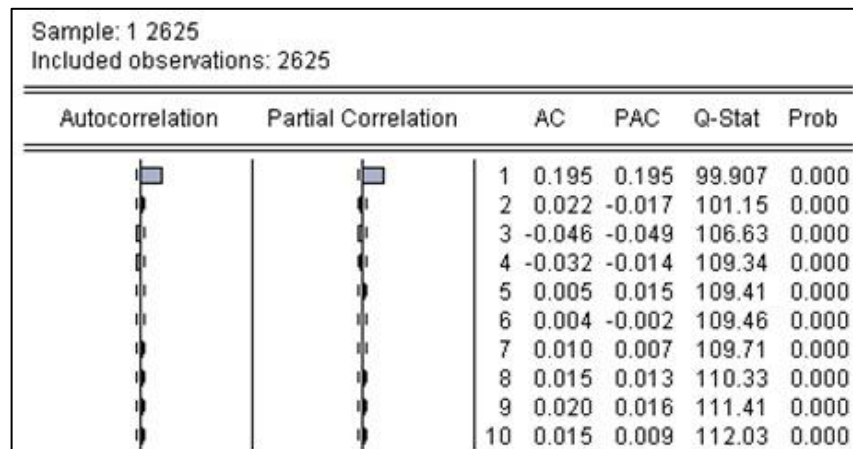
En las series que no se identifican rezagos autocorrelacionados, no es necesario usar la metodología ARIMA para filtrar las series.

**4.3.1.3. Modelos ARIMA.** A partir de los autocorrelogramas de cada serie (Ver Apéndice J) se buscan los rezagos con correlación significativa en la FAC (AC, por sus siglas en inglés) y la FACP (PAC, por sus siglas en inglés). Con los rezagos encontrados, se identifican los posibles procesos autorregresivos y de media móvil, usando los criterios dados por Gujarati (2005), descritos en la tabla 1.

En la figura 2, se muestra el correlograma del período total del IGBC, se observa que tanto la función FAC como la FACP, se cortan después del rezago uno, por esto, no se puede distinguir si el proceso es AR(1) o MA(1), por el contrario en el

rezago tres, la FACP se corta mientras la FAC decrece exponencialmente, esto permite identificar el proceso AR(3).

Figura 2. Correlogramas serie retornos IGBC



Fuente: Elaboración Propia

Luego de identificar los procesos  $AR(p)$  y  $MA(q)$ , en la tabla 8 se muestran todas las combinaciones posibles para obtener los modelos  $ARMA(p, q)$ . Sin embargo, se precisa que un modelo autorregresivo de orden  $p$ , o un modelo de media móvil de orden  $q$ , puede tener implícitos procesos de orden  $(p - k)$  o  $(q - l)$ , respectivamente. Por ejemplo, en la tabla 8, los modelos  $AR(3)$  y  $ARMA(3,1)$  pueden o no incluir el proceso  $AR(1)$ .

Tabla 8. Identificación de procesos  $ARMA(p, q)$  de la serie del IGBC

p \ q	0	1
0	N/A	MA(1)
1	AR(1)	ARMA(1,1)
3	AR(3)	ARMA(3,1)

Fuente: Elaboración Propia

Para hallar el primer ajuste se estiman los coeficientes del modelo ARMA(3,1), incluyendo todos los términos identificados anteriormente, mediante la siguiente regresión:

$$r_t = C + \alpha_1 r_{t-1} + \alpha_3 r_{t-3} + \beta_1 u_{t-1} \quad (44)$$

Siguiendo la metodología Box-Jenkins, se hacen las regresiones por mínimos cuadrados para estimar los coeficientes de todos los modelos posibles, buscando que ellos sean significativos, es decir, que el P-valor sea menor al 5% para garantizar que el coeficiente es diferente de cero.

Tabla 9. Estimación del modelo ARMA(3,1) del IGBC

Variable	Coefficiente	Error Estándar	P-valor
C	0.001185	0.000264	0.00%
AR(1)	0.180103	0.095921	6.05%
AR(3)	-0.04928	0.019332	1.09%
MA(1)	0.016714	0.09759	86.40%

Fuente: Elaboración Propia.

En la tabla 9, se observa que los coeficientes de los procesos AR(1) y MA(1), no son estadísticamente significativos, por tanto, se debe buscar un mejor modelo para la serie de retornos. Es así que al hallar un modelo con coeficientes significativos, se deben examinar los correlogramas de residuos para verificar que no tengan ningún rezago autocorrelacionado ( $\rho \neq 0$ ), este aspecto se evalúa por el estadístico Durbin-Watson (DW) y mediante los test de Bartlett y  $Q_{LB}$ .

Cuando existen varios modelos posibles, se elige aquel que tenga menor valor en los criterios de información Akaike, Schwarz y Hannan-Quinn. En la siguiente tabla, se estiman estos criterios.

Tabla 10: Estimación coeficientes procesos ARMA con significancia para IGBC

Mod.	C	AR(1)	AR(3)	MA(1)	Akaike	Schwarz	Hannan Quinn	DW	$\rho \neq 0$
1	0.0012 0.0%			0.190 0.0%	-6.078	-6.073	-6.076	1.986	3
2	0.0012 0.0%	0.195 0.0%			-6.078	-6.074	-6.076	1.993	3
3	0.0012 0.0%	0.139 15.9%		0.058 55.9%	-6.077	-6.071	-6.075	1.999	3
4	0.0012 0.0%		-0.046 1.9%		-6.041	-6.036	-6.039	1.609	1
<b>5</b>	<b>0.0012 0.0%</b>	<b>0.196 0.0%</b>	<b>-0.050 0.9%</b>		<b>-6.079</b>	<b>-6.072</b>	<b>-6.077</b>	<b>1.999</b>	--
6	0.0012 0.0%		-0.047 1.8%	0.191 0.0%	-6.078	-6.071	-6.075	1.989	--
7	0.0012 0.0%	0.180 6.1%	-0.049 1.1%	0.017 86.4%	-6.078	-6.069	-6.075	2.000	--

NOTA: La tabla presenta los coeficientes de los procesos ARMA y debajo su respectiva significancia. Además la columna  $\rho \neq 0$ , brinda información de los rezagos de los residuos que continúan presentando correlación serial.

Fuente: Elaboración Propia.

De la tabla 3 se elige para el IGBC un modelo autorregresivo AR(3), el cual incluye dos términos autorregresivos y se expresa matemáticamente, así:

$$r_t = C + \alpha_1 r_{t-1} + \alpha_3 r_{t-3} \quad (45)$$

El modelo elegido no presenta autocorrelaciones en los primeros diez rezagos, esto se confirma usando el test de Bartlett y de  $Q_{LB}$ .

Tabla 11: Test Bartlett y QLB la serie de residuos del modelo AR(3) del IGBC

<b>IGBC: AR(3)</b>				
<b>PERÍODO</b>	<b>m</b>	<b><math>\rho</math></b>	<b>QLB</b>	<b><math>P_{QLB}</math></b>
TOTAL	1	0.001	0.0	
<b>03/08/2001-</b>	2	-0.006	0.1	
<b>15/06/2012</b>	3	0.003	0.1	71.84%
	4	-0.016	0.8	66.45%
Nº de Datos	5	0.014	1.3	72.97%
<b>2625</b>	6	0.000	1.3	86.17%
	7	0.005	1.4	92.68%
Intervalo Bartlett	8	0.011	1.7	94.33%
$\pm$ <b>0.038</b>	9	0.015	2.3	93.87%
	10	0.010	2.6	95.62%

Fuente: Elaboración Propia.

Siguiendo el mismo procedimiento para todos los activos, se obtienen los modelos ARIMA, presentados en la tabla 12, se observa que algunas series no tienen ajuste ARIMA, esto se debe a que dichas series no presentan ningún rezago con autocorrelación significativa. El detalle de los términos incluidos en cada ajuste se encuentra en el Apéndice C

Para cada modelo seleccionado se evalúa nuevamente la autocorrelación en los residuos usando el test de Bartlett y el test  $Q_{LB}$  (Ver Apéndice D), como no se muestra autocorrelación significativa en los diez primeros rezagos, las series de residuos obtenidas, son apropiadas para el uso la metodología de comprobación de caos, de acuerdo a Peters (1994).

Tabla 12. Modelos ARMA ( $p, q$ )

Activo	Período	Modelo	Activo	Período	Modelo	
<b>IGBC</b>	TOTAL	AR(3)	<b>GRUPOSURA</b>	TOTAL	ARMA(4,8)	
	P1	AR(1)		<b>CEMARGOS</b>	TOTAL	ARMA(6,10)
	P2	AR(9)			P1	ARMA(10,10)
	P3	AR(1)			P2	AR(9)
	P4	ARMA(3,3)			P3	AR(2)
	P5	AR(1)				
<b>ECOPETROL</b>	TOTAL	--	<b>ISAGEN</b>	TOTAL	--	
	P1	AR(8)		P1	ARMA(7,7)	
	P2	MA(4)		P2	--	
<b>PREC</b>	TOTAL	MA(1)	<b>BCOLOMBIA</b>	TOTAL	AR(1)	
				P1	MA(1)	
<b>PFBCOLOM</b>	TOTAL	MA(1)		P2	MA(1)	
	P1	AR(1)		P3	AR(8)	
	P2	MA(7)		P4	AR(8)	
	P3	ARMA(8,8)		P5	--	
	P4	--				

Fuente: Elaboración Propia

**4.3.1.4. Test ARCH.** Las series de residuos obtenidas, no tienen autocorrelaciones en los primeros rezagos, sin embargo, debido a que los modelos ARIMA son construidos bajo el supuesto de homocedasticidad, este se debe corroborar mediante el test ARCH, antes de usar las herramientas de comportamiento caótico.

El test ARCH prueba la hipótesis nula de homocedasticidad contra la hipótesis alternativa de que existe heterocedasticidad autocorrelacionada. Para las series

que no se encontró un modelo ARIMA, se hace una regresión respecto a la media y se analizan los residuos resultantes.

Los modelos autorregresivos de varianza (ARCH), usan los residuos al cuadrado como medida de la varianza. Esta prueba evalúa la significancia conjunta de las autocorrelaciones hasta el rezago  $m$ , mediante una regresión (19) de mínimos cuadrados, brindando una significancia individual para cada valor retardado de los residuos al cuadrado. Los resultados del test ARCH, para el mejor modelo identificado anteriormente en el IGBC, se presentan en la tabla 13.

Tabla 13. Test ARCH modelo AR(3) del IGBC

Test Heterocedasticidad: ARCH				
Estadístico F	32.3		Prob. F(10,2447)	0.0%
Variable	Coefficiente	Error Estándar	Estadístico t	Prob. t
C	0.0001	0.00	8.37	0.0%
RESID <sup>2</sup> (-1)	0.1683	0.02	8.58	0.0%
RESID <sup>2</sup> (-2)	0.1162	0.02	5.85	0.0%
RESID <sup>2</sup> (-3)	0.0760	0.02	3.80	0.0%
RESID <sup>2</sup> (-4)	0.0207	0.02	1.03	30.3%
RESID <sup>2</sup> (-5)	0.0579	0.02	2.89	0.4%
RESID <sup>2</sup> (-6)	0.0720	0.02	3.60	0.0%
RESID <sup>2</sup> (-7)	0.0231	0.02	1.15	25.0%
RESID <sup>2</sup> (-8)	0.0332	0.02	1.66	9.8%
RESID <sup>2</sup> (-9)	0.0217	0.02	1.09	27.6%
RESID <sup>2</sup> (-10)	-0.0114	0.02	-0.58	56.2%

Fuente: Elaboración Propia

En la tabla 13, se rechaza la hipótesis nula de que la serie es homocedástica, por lo tanto se debe ajustar un modelo GARCH, que modele la autocorrelación de la varianza. Los resultados de los demás activos (Ver apéndice E), también indican que la varianza no es constante, solamente para el primer período de las acciones (ordinaria y preferencial) de Bancolombia y para el período dos de ISAGEN, no se puede rechazar la hipótesis de que exista homocedasticidad, sin embargo al observar el correlograma de residuos al cuadrado muestra que existen autocorrelaciones en la varianza. Por tanto para todas las series, es posible ajustar un modelo GARCH.

**4.3.1.5. Modelos GARCH.** A pesar de que los correlogramas de residuos al cuadrado de cada serie permiten visualizar posibles modelos GARCH ( $p, q$ ), este tipo de ajustes no permiten excluir procesos menores al seleccionado, de tal manera que si se detecta un proceso ARCH(5), el modelo debe incluir también, los procesos 1, 2, 3 y 4.

Para encontrar el mejor ajuste se hace una búsqueda exhaustiva en cada serie de residuos, estimando por máxima verosimilitud todas las combinaciones posibles entre  $p\{0-9\}$  y  $q\{0-9\}$ .

De la misma forma que en la metodología ARIMA, los mejores modelos son elegidos verificando la ausencia de correlación serial en residuos al cuadrado, la cual se puede detectar en los correlogramas de residuos al cuadrado; y usando los criterios de información.

Luego de hacer todas las combinaciones posibles y estimar cada modelo, se seleccionan los modelos más adecuados para cada serie de datos. La tabla 14, muestra un resumen de los ajustes realizados en cada activo.

Tabla 14. Modelos GARCH ( $p, q$ )

Activo	Período	Modelo	Activo	Período	Modelo	
<b>IGBC</b>	TOTAL	AR(3)-ARCH(3)	<b>GRUPOSURA</b>	TOTAL	ARMA(4,8)-ARCH(5)	
	P1	AR(1)-GARCH(1,1)		<b>CEMARGOS</b>	TOTAL	ARMA(6,10)-ARCH(2)
	P2	AR(9)-GARCH(1,1)			P1	ARMA(10,10)-GARCH(1,3)
	P3	AR(1)-GARCH(1,1)			P2	AR(9)-GARCH(1,1)
	P4	ARMA(3,3)-ARCH(3)			P3	AR(2)-GARCH(1,1)
P5	AR(1)-GARCH(1,3)					
<b>ECOPETROL</b>	TOTAL	GARCH(2,1)	<b>ISAGEN</b>	TOTAL	GARCH(1,1)	
	P1	AR(8)-ARCH(3)		P1	ARMA(7,7)-GARCH(1,3)	
	P2	MA(4)-GARCH(3,1)		P2	GARCH(2)	
<b>PREC</b>	TOTAL	MA(1)-GARCH(1,1)	<b>BCOLOMBIA</b>	TOTAL	AR(1)-GARCH(1,2)	
<b>PFBCOLOM</b>	TOTAL	MA(1)-GARCH(1,1)		P1	MA(1)-GARCH(2,5)	
	P1	AR(1)-GARCH(1,1)		P2	MA(1)-GARCH(1,1)	
	P2	MA(7)-ARCH(1)		P3	AR(8)-GARCH(1,1)	
	P3	ARMA(8,8)-ARCH(2)		P4	AR(8)-GARCH(1,1)	
P4	GARCH(1,1)	P5	ARCH(2)			

**Fuente:** Elaboración Propia

Los modelos ARIMA-GARCH permiten generar una serie de residuos sin dependencias o autocorrelaciones significativas en sus primeros diez rezagos, que pudieran afectar las pruebas de comportamiento caótico.

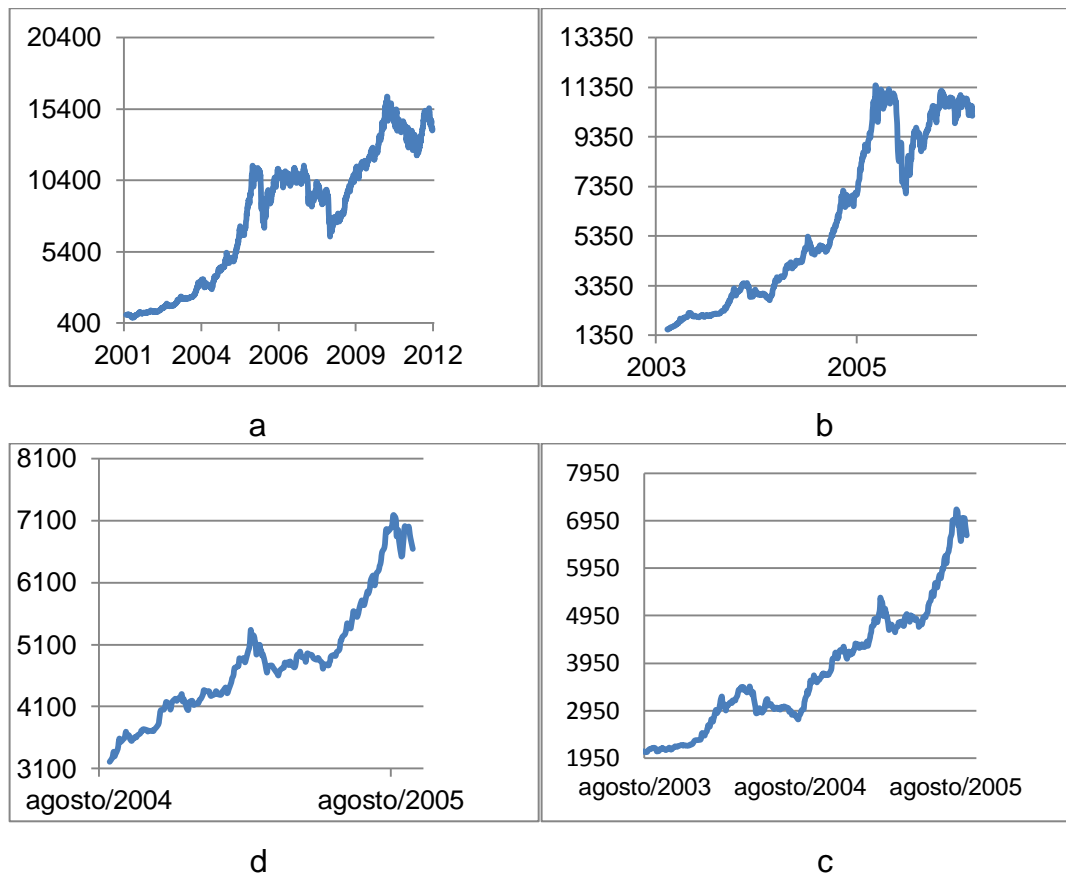
La serie de residuos puede representar al sistema, de tal forma que si el sistema fuera aleatorio, los residuos seguirían un proceso ruido blanco, pero si el sistema fuera caótico, los residuos mostrarían dependencias no lineales, sensibilidad a las condiciones iniciales y memoria de largo plazo.

## 4.3.2. Herramientas para la comprobación de la teoría del Caos

### 4.3.2.1. Herramientas Cualitativas

- **Gráfica Precios vs Tiempo a diferentes escalas:** Peters (1994), afirma que en un mercado fractal, al graficar los precios de los activos en función del tiempo, se puede observar la misma estructura en sus precios, sin importar la escala temporal.

Figura 3. Precios del Índice General de la Bolsa, con diferente escala temporal.



Fuente: Elaboración Propia

Para estudiar la serie del Índice General, se tienen 2625 datos en un período de once años aproximadamente (figura 3.a); al contrastar el comportamiento de los precios durante este período y el comportamiento de los mismos en un período de 1000 datos (figura 3.b), se observa que el comportamiento es similar. El mismo fenómeno fractal ocurre con períodos más pequeños de 500 (figura 3.c) y 250 datos (figura 3.d).

Cuando a una escala diferente no se pueden distinguir los períodos porque la estructura es similar, la serie graficada es un fractal, lo cual es indicio de que el mercado puede comportarse como un sistema caótico.

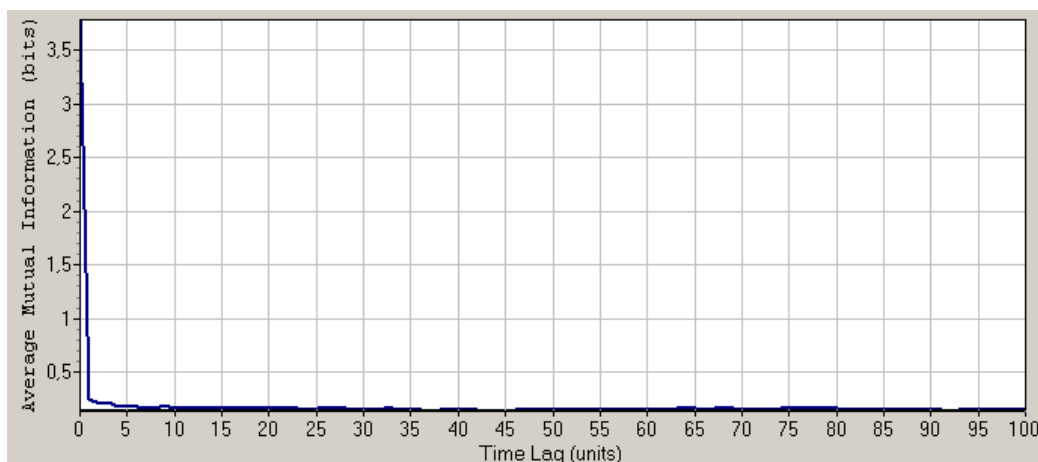
Este tipo de comportamiento también se hace evidente los demás activos (Ver apéndice J, figuras J31 –J37), sin embargo, hace falta más análisis antes de concluir que se está frente a un comportamiento caótico.

- **Gráficos de recurrencia:** Para generar los gráficos de recurrencia se usa el software Visual Recurrence Analysis (VRA), desarrollado por Kononov en 1987. Para graficar el software necesita como parámetros de entrada, la dimensión de inmersión ( $m$ ) y el retardo óptimo ( $T$ ).

Primero se debe obtener el valor del retardo, el cual está dado por la función de información mutua (IM), y también puede ser calculado usando el software VRA, que gráfica la información mutua en función del retardo, siendo  $T$  óptimo, aquel donde IM alcanza su primer mínimo.

En la figura 4, se gráfica la información mutua en función del retardo, para calcular el  $T$  óptimo de la serie de rentabilidades del IGBC.

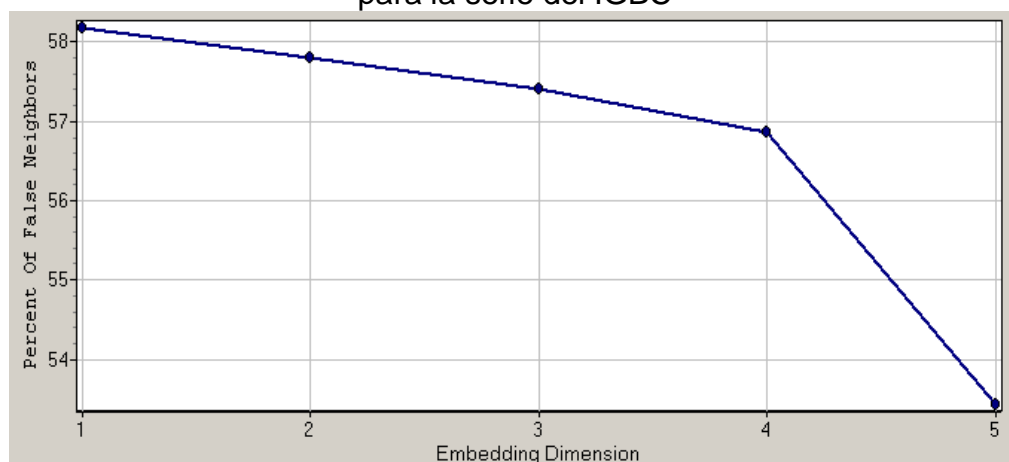
Figura 4. Información mutua en función del retardo para la serie del IGBC



Fuente: Elaboración Propia.

La función de información mutua alcanza su primer mínimo en el retardo 2, tomando en cuenta este valor, se halla la dimensión de inmersión, usando VRA, mediante el método de falsos vecinos. La figura 5 muestra la información correspondiente.

Figura 5. Porcentaje de Falsos Vecinos en función de la dimensión de inmersión para la serie del IGBC



Fuente. Elaboración Propia.

En la tabla 15 se presentan las dimensiones de inmersión y los retardos óptimos para cada serie de rentabilidad y de residuos del IGBC. En el apéndice F, se muestran los valores de T y m, para las demás series de activos.

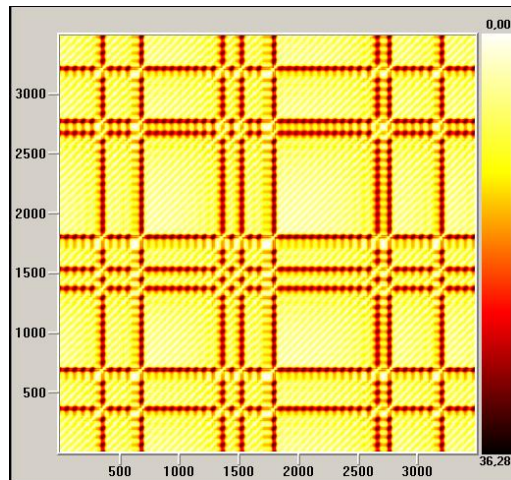
Tabla 15. Retardo y Dimensión de Inmersión para series de rentabilidad y residuos del IGBC.

IGBC			
Período	Serie	T	m
Total	RENTABILIDAD	1	4
	AR(3)ARCH(3)	2	5
P1	RENTABILIDAD	3	5
	AR(1)GARCH(1,1)	3	1
P2	RENTABILIDAD	2	5
	AR(9)GARCH(1,1)	3	2
P3	RENTABILIDAD	2	5
	AR(1)GARCH(1,1)	2	4
P4	RENTABILIDAD	5	3
	ARMA(3,3)ARCH(3)	4	2
P5	RENTABILIDAD	2	4
	AR(1)GARCH(1,3)	1	2

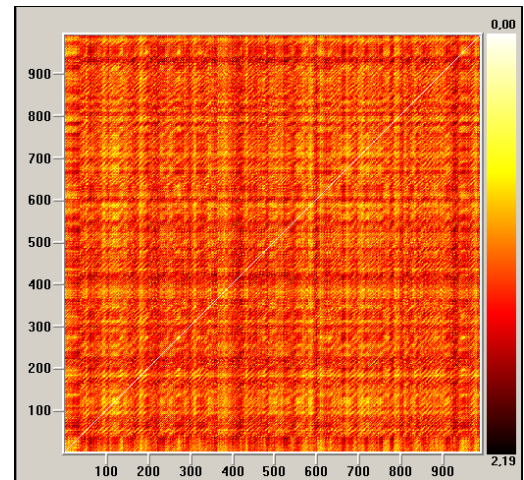
Fuente: Elaboración Propia

Antes de realizar el gráfico de recurrencia, se debe tener un punto de comparación, para lograr un buen análisis visual. En la figura 6, se comparan dos procesos teóricos: el 6.a muestra una serie generada por el atractor de Lorenz y el 6.b muestra proceso de ruido blanco, de tal manera que cuando una serie tiene un comportamiento caótico, el gráfico de recurrencia es más estructurado que el de un proceso aleatorio, el cual es uniforme.

Figura 6. Gráficos de Recurrencia de una serie caótica (a) y una serie aleatoria (b)



a

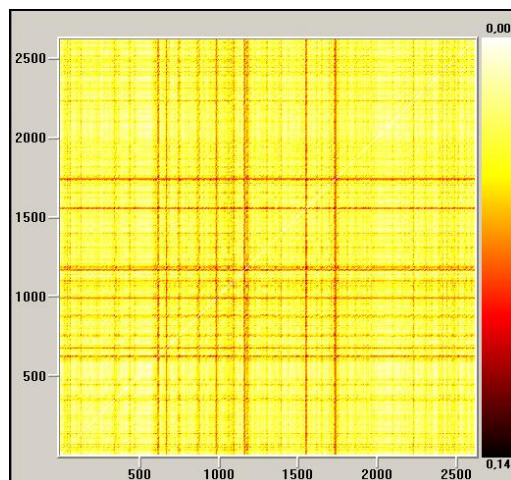


b

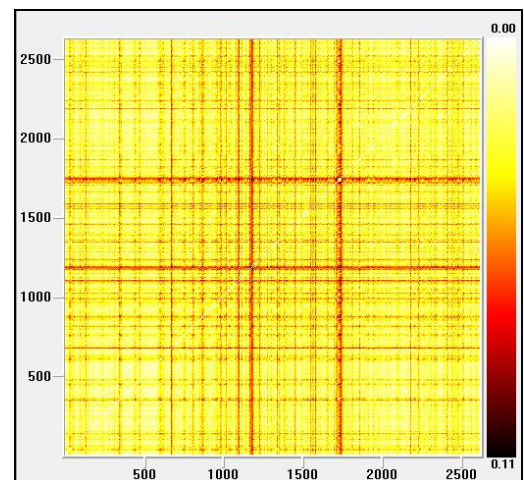
Fuente: Elaboración Propia.

Con este punto de referencia, se realiza el gráfico de la serie del IGBC, para las rentabilidades (Ver figura 7.a) y los residuos ARIMA-GARCH (Ver figura 7.b.)

Figura 7. Gráfico de recurrencia para el IGBC



a



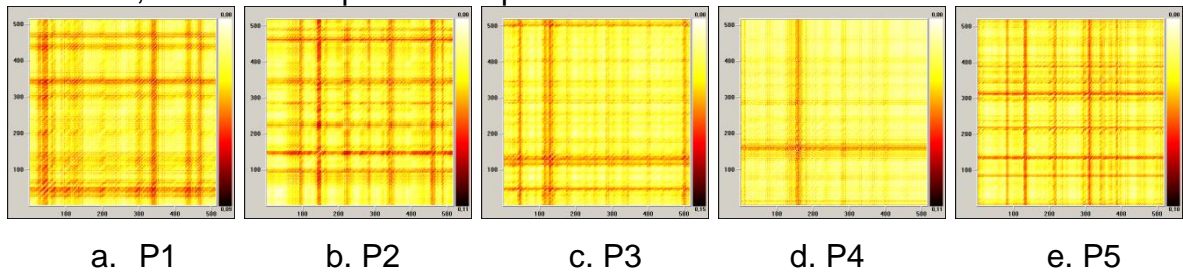
b

Fuente: Elaboración Propia

Al elaborar el gráfico del período total del IGBC, se observan estructuras marcadas en las rentabilidades y se hacen más evidentes en la serie de residuos ARIMA-GARCH. Estas estructuras indican que la serie tiene patrones recurrentes e intermitentes, los cuales caracterizan las series deterministas.

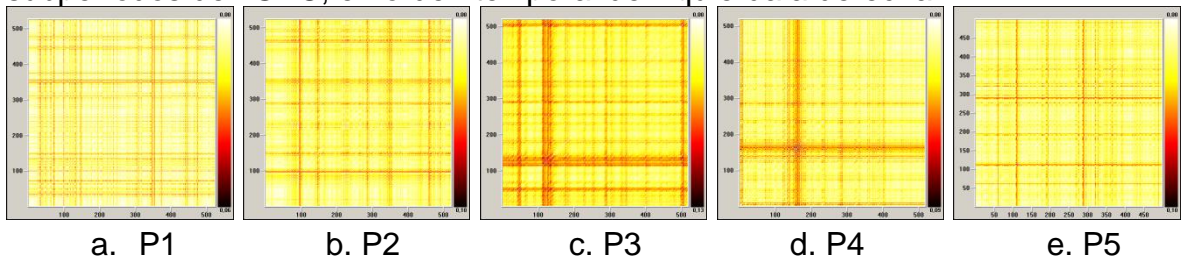
Para evaluar mejor la serie del IGBC, se estudia la evolución de los gráficos de recurrencia a través de los subperíodos (figuras 8 y 9).

Figura 8. Gráficos de recurrencia para series de rentabilidades de los subperíodos del IGBC, en orden temporal de izquierda a derecha.



Fuente: Elaboración Propia

Figura 9. Gráficos de recurrencia para series de residuos ARIMA-GARCH de los subperíodos del IGBC, en orden temporal de izquierda a derecha.



Fuente: Elaboración Propia

La figura 8 muestra que durante en los subperíodos del IGBC, existen estructuras recurrentes, sin embargo los gráficos para los tres últimos subperíodos, que

corresponden a datos tomados entre finales del 2005 y mediados de 2012, son más uniformes, evidenciando aleatoriedad. En la figura 9, se observa que el gráfico de recurrencia del primer período se hace más uniforme luego de usar un filtro ARIMA-GARCH, sin embargo las estructuras se mantienen para todos los subperíodos.

Para los demás activos (Ver apéndice J, figuras J41–J57) se obtienen resultados variados:

- En los gráficos de ECOPETROL e ISAGEN el período total es caótico, pero los subperíodos muestran un aumento de la eficiencia a través del tiempo, siendo el último subperíodo el más aleatorio.
- Los gráficos de recurrencia de PREC y GRUPOSURA muestran estructuras características del comportamiento aleatorio.
- El período total de PFBCOLOM, muestra estructuras recurrentes, las cuales no son claras en los subperíodos. Solamente los subperíodos dos, cuatro, y cinco muestran indicios de comportamiento caótico.
- La serie de CEMARGOS muestra aleatoriedad durante todo el período de estudio.
- Por último, BCOLOMBIA, muestra comportamiento caótico en los dos primeros subperíodos, aleatorio en los subperíodos 3 y 4, y vuelve a ser caótico en el último período.

Para evaluar matemáticamente los gráficos de recurrencia, se usa el porcentaje de entropía de espacio temporal (STE, por sus siglas en inglés), el cual mide la relación entre colores del gráfico en general contra la distribución de colores sobre la bisectriz.

Como criterio de decisión el porcentaje de entropía es cero para sistemas periódicos y cien para sistemas aleatorios, mientras que los valores intermedios indican comportamiento caótico.

La tabla 16 muestra los valores de STE para cada período del IGBC.

Tabla 16. Entropía de Espacio temporal en el IGBC.

<b>Período</b>	<b>Serie</b>	<b>STE (%)</b>
TOTAL	RENTABILIDAD	84%
	AR(3)ARCH(3)	84%
P1	RENTABILIDAD	68%
	AR(1)GARCH(1,1)	83%
P2	RENTABILIDAD	72%
	AR(9)GARCH(1,1)	78%
P3	RENTABILIDAD	73%
	AR(1)GARCH(1,1)	75%
P4	RENTABILIDAD	77%
	ARMA(3,3)ARCH(3)	78%
P5	RENTABILIDAD	75%
	AR(1)GARCH(1,3)	80%
	<b>Promedio</b>	<b>77%</b>

Fuente: Elaboración Propia

Según los resultados de la tabla 16, la entropía en el IGBC aumenta a medida que el tiempo avanza y genera en promedio un valor de 77%, lo cual es indicio de comportamiento caótico.

Sin embargo, al calcular el índice para una serie aleatoria débil, generada por la función “aleatorio” de Excel, se obtiene un STE igual 76% y para una serie caótica generada por un atractor de Lorenz se obtiene un valor de 57%.

Como un nuevo criterio se analiza en forma conjunta el gráfico de recurrencia y el porcentaje STE, de tal forma que si el gráfico es caótico, se considera caótico, un porcentaje entre 0 y 100, pero si el gráfico es aleatorio y el porcentaje STE es mayor a 76%, se considera aleatorio.

Según Espinosa (2007), la serie de residuos es ruido blanco si el sistema es aleatorio, pero es caótica si el sistema original también lo es. En la tabla se observa que el primer subperíodo de la serie tiende a ser más aleatorio luego de usar el filtro ARIMA-GARCH, lo que confirma lo visto en los gráficos de recurrencia.

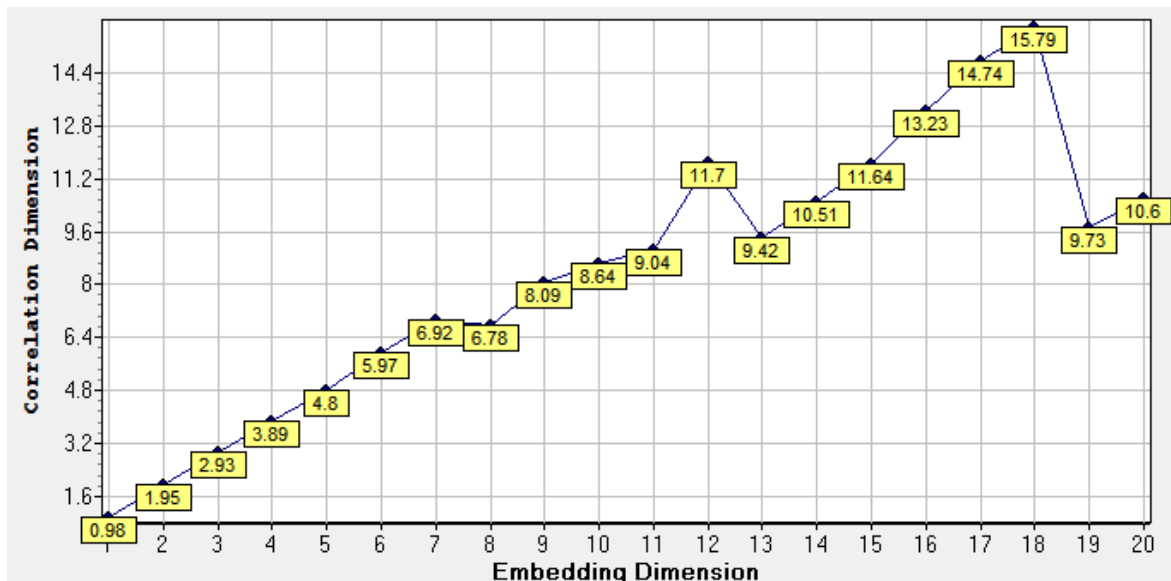
Para los demás activos (ver Apéndice G), la entropía de espacio temporal indica que las series no son ni periódicas, ni aleatorias, el valor máximo (90%) lo alcanza la serie de CEMARGOS, pero en promedio el valor es de 77%, esto es indicio de que las series siguen un comportamiento caótico.

Usando el criterio de análisis conjunto en las series de residuos, se consideran aleatorios: el último período de Ecopetrol (80%) e ISAGEN (78%), el primer período de PFBCOLOM (79%), el total y el último período de CEMARGOS (86 y 81% respectivamente), y los períodos 3 y 4 de BCOLOMBIA (77%) y las series de PREC y GRUPOSURA (79 y 78% respectivamente).

**4.3.2.2. Herramientas Cuantitativas.** Cómo se observa en el análisis gráfico, las series de residuos caracterizan bien el sistema original. Para los análisis cuantitativos, solamente se evaluarán las series de residuos con el propósito de evitar que las pruebas sean afectadas por dependencias lineales.

- **Dimensión de Correlación:** Si la serie es caótica, cuando aumenta la dimensión de inmersión ( $m$ ) el valor de la dimensión de correlación tiende asintóticamente al valor de la dimensión del atractor, la cual no deberá ser mayor a  $m$ . Si es igual a uno la serie es periódica, si es dos las oscilaciones son cuasi-periódicas y si es mayor de dos el comportamiento es caótico.

Figura 10. Dimensión de correlación vs dimensión de inmersión para IGBC



Fuente: Elaboración Propia

En la figura 10 el valor de la dimensión de correlación para el IGBC, muestra un pico máximo, el valor de esta no supera a la dimensión de inmersión

correspondiente; además se hace estable en un valor menor a la dimensión de inmersión y mayor a dos, lo cual es un claro indicio de comportamiento caótico.

Al analizar los subperíodos del índice (Ver apéndice J, figuras J59 –J63), entre 2001 y 2003, se puede ver un indicio de comportamiento caótico. En el siguiente subperíodo existe una tendencia a estabilizarse en un valor cercano a 6, pero luego disminuye y aumenta drásticamente, lo cual hace que el resultado no sea concluyente. Entre finales de 2005 y mediados del 2010, el valor crece con la dimensión de inmersión y alcanza valores por encima de esta, como muestra de aleatoriedad, indicando que el mercado se hace más eficiente a través del tiempo. Sin embargo, en el último período (2010-2012) la dimensión de correlación se estabiliza con un valor menor a la dimensión de inmersión y mayor a dos, lo cual es una clara señal de caos.

Al analizar los otros activos (Ver apéndice J, figuras J64 –J86), se observa que:

- En la serie de Ecopetrol el resultado del período total no es concluyente, pues la dimensión de correlación presenta un comportamiento estable alrededor de ocho, y luego alcanza un pico que supera el valor de la dimensión de inmersión. Sin embargo en los períodos se observa que el activo pasa de un comportamiento caótico (2008-2010) a un comportamiento aleatorio (2010-2012).
- El resultado para el período total de PFBCOLOM no es concluyente, pero al observar los subperíodos se encuentra aleatoriedad en los tres primeros, pues la DC continua creciendo a medida que aumenta la dimensión de inmersión, para el último período (2010-2012), el valor se estabiliza por debajo de la dimensión de inmersión, lo cual indica comportamiento caótico.
- La dimensión de correlación en la serie GRUPOSURA indica comportamiento caótico. Por el contrario, para la serie de ISAGEN muestra comportamiento aleatorio.

- CEMARGOS tiene comportamiento caótico, entre 2006 y 2010, y se hace más aleatorio en el último subperíodo. Sin embargo el período total es caótico.
- En las series total, P3 y P4 de Bancolombia, la dimensión parece estable a medida que aumenta la dimensión de inmersión, pero luego el valor tiene un pico que hace que el resultado no sea concluyente. Por otro lado, los períodos uno, dos y cuatro muestran un comportamiento caótico.

- **Coefficiente de Hurst:** Para medir el nivel de persistencia en las series estudiadas, se calcula el coeficiente de Hurst, usando el código MATLAB (Ver Anexo A) desarrollado por Pérez (2008).

Como criterio de decisión, si  $H > 0.5$ , la serie es persistente, lo cual es indicio de que no es un proceso de ruido blanco y que los datos son dependientes. Si  $H < 0.5$  la serie es anti-persistente. Pero si el Coeficiente de Hurst es igual a 0.5 la serie es ruido blanco.

Tabla 17. Coeficiente de Hurst IGBC

Período	Hurst
TOTAL	0.56636
P1	0.66079
P2	0.66157
P3	0.58345
P4	0.55752
P5	0.55144
Promedio	0.59685

Fuente: Elaboración propia

En la serie del IGBC, no se encuentra ningún valor antipersistente o aleatorio, por el contrario, todas las series muestran que el activo es persistente, aunque esta

característica disminuye a través de los años. Lo que indica que la serie tiene un comportamiento caótico, el cual disminuye lentamente a través del tiempo.

Todas las series (Ver Apéndice H) producen coeficientes de Hurst mayores a 0.5, es decir son persistentes, y posiblemente caóticas, excepto las series de CEMARGOS y Bancolombia, las cuales en sus períodos completos son antipersistentes, es decir se revierten rápidamente a la media, en este sentido son eficientes.

- Máximo Exponente de Lyapunov:** Mide la sensibilidad a las condiciones iniciales como indicio de caos en las series. Si el exponente es menor que cero, la serie es convergente, si es cero no converge ni diverge, lo que indicaría comportamiento periódico, pero si es positivo implica dinámica caótica.

Tabla 18. Máximo Exponente de Lyapunov IGBC

<b>Período</b>	<b>Lyapunov</b>
TOTAL	0.49
P1	0.00
P2	0.78
P3	0.19
P4	0.02
P5	0.05
Promedio	0.25

Fuente: Elaboración Propia

En la tabla 18 se muestran los máximos exponentes de Lyapunov para el IGBC, se observa que aunque todos son positivos, el primer período, tiene un exponente

cero, esto indica que la serie no converge ni diverge, sino que existe una bifurcación, y el sistema cambia de comportamiento regular a caótico o viceversa. El período cuatro también tiene un valor muy pequeño del exponente Lyapunov, que podría indicar otra bifurcación. Con esta medida se puede concluir que en la serie hay sensibilidad a las condiciones iniciales, la cual es totalmente clara en el período completo y los subperíodos 2, 3 y 5.

Para los otros activos (Ver apéndice H) los exponentes también son positivos, indicando presencia de sensibilidad a las condiciones iniciales, se observa que:

- El primer período (2008-2010) de Ecopetrol tiene un valor muy cercano a cero, por lo que podría no ser ni caótico ni aleatorio. Sin embargo el período total y el último período muestran sensibilidad a las condiciones iniciales, lo cual coincide con el resultado del IGBC.
- Para la series de PREC y GRUPOSURA, el exponente de Lyapunov es cero, indicando que la serie pasa de caótica a aleatoria y viceversa.
- En la serie de PFBCOLOM, solo los subperíodos dos y tres presentan sensibilidad a las condiciones iniciales. Mientras en los demás existe una bifurcación entre caos y aleatoriedad.
- En CEMARGOS, el período completo y el subperíodo dos (2008-2010) indican comportamiento caótico, mientras que el primero y el último presentan una bifurcación.
- Los resultados de los dos subperíodos de ISAGEN coinciden con los dos equivalentes en la serie del índice, mostrando una bifurcación entre 2008 y 2010 y caos entre (2010 y 2012).
- Por último, en la serie de Bancolombia los subperíodos 1, 3, 4 y 5, muestran una clara señal de comportamiento caótico, mientras que para el período total y el subperíodo dos el valor es muy cercano a cero.

**4.3.3. Test Estadístico BDS.** Luego de encontrar indicios de comportamiento caótico en todas las series, se usa el test BDS, el cual contrasta la hipótesis de que la series se distribuyen de forma independiente, contra la hipótesis nula de que presenta dependencia lineal, dependencia no lineal o comportamiento caótico.

Este test se usa para evaluar la independencia, tanto en las series de rentabilidad como en las series de residuos.

Tabla 19. Test BDS para la serie de retornos de IGBC

<b>Dimensión</b>	<b>Estadístico BDS</b>	<b>Error Estándar</b>	<b>Estadístico Z</b>	<b>Prob.</b>
2	0.0222	0.0017	12.96	0.0%
3	0.0427	0.0027	15.72	0.0%
4	0.0563	0.0032	17.46	0.0%
5	0.0617	0.0034	18.40	0.0%
6	0.0628	0.0032	19.44	0.0%
7	0.0609	0.0030	20.61	0.0%
8	0.0567	0.0026	21.78	0.0%
9	0.0520	0.0022	23.27	0.0%
10	0.0470	0.0019	25.01	0.0%

Fuente: Elaboración Propia

En todas las dimensiones evaluadas se rechaza la hipótesis nula de que la serie de retornos se distribuye de forma independiente. De esta forma el activo podría tener dependencia lineal, no lineal o comportamiento caótico. Con el uso de filtros ARIMA-GARCH, se eliminan en gran parte las dependencias lineales, la tabla 20, muestra el test BDS para la series de residuos del IGBC.

Tabla 20. Test BDS para la serie de residuos de IGBC

<b>Dimensión</b>	<b>Estadístico BDS</b>	<b>Error Estándar</b>	<b>Estadístico Z</b>	<b>Prob.</b>
2	0.0188	0.0017	11.17	0.0%
3	0.0386	0.0027	14.40	0.0%
4	0.0522	0.0032	16.41	0.0%
5	0.0586	0.0033	17.69	0.0%
6	0.0602	0.0032	18.87	0.0%
7	0.0586	0.0029	20.06	0.0%
8	0.0547	0.0026	21.24	0.0%
9	0.0504	0.0022	22.75	0.0%
10	0.0456	0.0019	24.46	0.0%

Fuente: Elaboración Propia

El test BDS, también rechaza la hipótesis nula de que la serie de residuos es idéntica e independientemente distribuida, por lo tanto, se concluye que presenta dependencia no lineal y/o comportamiento caótico.

En todas las series de activos (Ver apéndice I), el resultado es igual al obtenido en el IGBC. Excepto para GRUPOSURA donde el error tipo I para todas las dimensiones son iguales o mayores al 5%, indicando tendencia aleatoria.

Para los otros activos se concluye que no son independientes ni idénticamente distribuidos, por tanto podrían seguir un comportamiento caótico, dados los indicios obtenidos en las pruebas anteriores.

**4.3.4. Resumen de resultados.** La tabla 21 muestra los resultados para cada período de cada activo. Donde “+” indica comportamiento caótico y “-” comportamiento aleatorio, NC para resultados no concluyentes. Los criterios de decisión son claros:

- Si el gráfico de recurrencia es estructurado, la serie es caótica.
- Si el gráfico de recurrencia es estructurado y STE está entre 0 y 100, la serie presenta comportamiento caótico.
- Si el gráfico de recurrencia muestra aleatoriedad y el STE es mayor a 76%, el porcentaje STE indica aleatoriedad.
- Si la dimensión de correlación se hace estable al aumentar la dimensión de inmersión, además su valor es mayor a esta última y menor a dos, el sistema es caótico.
- Si el exponente de Hurst es mayor a 0.5, la serie se considera caótica.
- Si el exponente de Lyapunov es mayor a cero el sistema es caótico. Si es negativo el sistema es aleatorio y si es cero, el sistema oscila entre el caos y la aleatoriedad
- Si el test BDS tiene una significancia menor al 5%; se rechaza la hipótesis de que el sistema es independiente e idénticamente distribuido y el comportamiento de la serie se considera no aleatorio.

Tabla 21. Resultados test de comprobación de caos en los activos financieros.

IGBC						
Periodo	Gráfico de Recurrencia	STE (%)	Dimensión de Correlación	Hurst	Lyapunov	BDS
TOTAL	+	+	+	+	+	+
P1	+	+	+	+	NC	+
P2	+	+	NC	+	+	+
P3	-	-	-	+	+	+
P4	-	-	-	+	NC	+
P5	-	-	+	+	NC	+

Tabla 21. Resultados test de comprobación de caos en los activos financieros (Continuación)

<b>ECOPETROL</b>						
Periodo	Gráfico de Recurrencia	STE (%)	Dimensión de Correlación	Hurst	Lyapunov	BDS
TOTAL	+	+	NC	+	+	+
P1	+	+	+	+	NC	+
P2	-	-	-	+	+	+

<b>PREC</b>						
Periodo	Gráfico de Recurrencia	STE (%)	Dimensión de Correlación	Hurst	Lyapunov	BDS
TOTAL	-	-	NC	+	NC	+

<b>PFBCOLOM</b>						
Periodo	Gráfico de Recurrencia	STE (%)	Dimensión de Correlación	Hurst	Lyapunov	BDS
TOTAL	+	+	NC	+	NC	+
P1	-	-	-	+	NC	+
P2	+	+	-	+	+	+
P3	-	+	-	+	+	+
P4	+	+	+	+	NC	-

<b>GRUPOSURA</b>						
Periodo	Gráfico de Recurrencia	STE (%)	Dimensión de Correlación	Hurst	Lyapunov	BDS
TOTAL	-	-	+	+	NC	-

<b>CEMARGOS</b>						
Periodo	Gráfico de Recurrencia	STE (%)	Dimensión de Correlación	Hurst	Lyapunov	BDS
TOTAL	-	-	+	-	+	+
P1	-	+	+	+	NC	+
P2	-	+	+	+	+	+
P3	-	-	-	+	NC	+

<b>ISAGEN</b>						
Periodo	Gráfico de Recurrencia	STE (%)	Dimensión de Correlación	Hurst	Lyapunov	BDS
TOTAL	+	+	-	+	NC	+
P1	+	+	-	+	NC	+
P2	-	-	NC	+	+	+

Tabla 21. Resultados test de comprobación de caos en los activos financieros (Continuación)

BCOLOMBIA						
Periodo	Gráfico de Recurrencia	STE (%)	Dimensión de Correlación	Hurst	Lyapunov	BDS
TOTAL	+	+	NC	-	NC	+
P1	+	+	+	+	+	+
P2	+	+	+	+	NC	+
P3	-	-	NC	+	+	+
P4	-	-	+	+	+	+
P5	+	+	NC	+	+	+

Fuente: Elaboración Propia. Basado en el gráfico presentado como resumen por Espinosa (2007).

Además de resultados anteriores, los gráficos de precios en función del tiempo, a diferentes escalas, muestran comportamiento fractal, en todas las series de los activos financieros.

En la tabla 22, se muestra una síntesis de los resultados obtenidos. El criterio para llegar a concluir si una serie es aleatoria o no, es que al obtener cuatro pruebas con hallazgo positivo de comportamiento caótico, el activo se asume caótico, de lo contrario se toma como aleatorio.

Tabla 22. Resumen de Resultados

IGBC	
Periodo	Comportamiento
<b>2001-2012</b>	<b>Caótico</b>
2001-2003	Caótico
2003-2005	Caótico
2005-2008	Aleatorio
2008-2010	Aleatorio
2010-2012	Caótico

Tabla 22. Resumen de Resultados (Continuación)

<b>ECOPETROL</b>	
<b>Periodo</b>	<b>Comportamiento</b>
<b>2008-2012</b>	<b>Caótico</b>
2008-2010	Caótico
2010-2012	Aleatorio
<b>PREC</b>	
<b>Periodo</b>	<b>Comportamiento</b>
<b>2010-2012</b>	<b>Aleatorio</b>
<b>PFBCOLOM</b>	
<b>Periodo</b>	<b>Comportamiento</b>
<b>2004-2012</b>	<b>Caótico</b>
2004-2006	Aleatorio
2006-2008	Caótico
2008-2010	Caótico
2010-2012	Aleatorio
<b>GRUPOSURA</b>	
<b>Periodo</b>	<b>Comportamiento</b>
<b>2010-2012</b>	<b>Aleatorio</b>
<b>CEMARGOS</b>	
<b>Periodo</b>	<b>Comportamiento</b>
<b>2006-2012</b>	<b>Caótico</b>
2006-2008	Caótico
2008-2010	Caótico
2010-2012	Aleatorio
<b>ISAGEN</b>	
<b>Periodo</b>	<b>Comportamiento</b>
<b>2008-2012</b>	<b>Aleatorio</b>
2008-2010	Caótico
2010-2012	Aleatorio
<b>BCOLOMBIA</b>	
<b>Periodo</b>	<b>Comportamiento</b>
<b>2001-2012</b>	<b>Caótico</b>
2001-2003	Caótico
2003-2005	Caótico
2005-2008	Aleatorio
2008-2010	Caótico
2010-2012	Caótico

Fuente: Elaboración Propia

La tabla 22 resume los resultados de cada activo, se observa que:

- El IGBC es caótico al inicio del período y luego se hace más eficiente, pero vuelve a ser caótico en el último subperíodo.
- Entre finales de 2001 y 2003, solo se obtienen datos de la serie de BCOLOMBIA, la cual muestra comportamiento caótico, al igual que el índice.
- Durante el período de 2004 y 2006, la serie de PFBCOLOM es aleatoria, mientras que BCOLOMBIA y del índice se comportan de forma caótica.
- Entre 2006 y 2008, la serie del IGBC es aleatoria al igual que BCOLOMBIA, mientras que PFBCOLOM y CEMARGOS son caóticas.
- En el período de 2008 a 2010, todos los activos con excepción del índice general presentan un comportamiento caótico.
- En el período de 2010 a 2012, el mercado es caótico para el índice y BCOLOMBIA; los demás activos muestran comportamiento aleatorio.
- En la mayoría de activos, el primer período de negociación se comporta de forma caótica.
- El mercado financiero muestra indicios de comportamiento caótico en los períodos entre 2001 y 2006, entre 2006 y 2008 no hay un patrón definido, pero entre 2008 y 2010, se observa nuevamente comportamiento caótico y entre 2010 y 2012 el mercado tiende a ser aleatorio.

#### **4.4. OBSERVACIONES**

- En este proyecto se ajustan modelos ARIMA en períodos de 500 datos diarios, de un período de aproximadamente dos años. Aunque algunos estudios muestran que esta no es una cantidad suficiente para analizar el comportamiento de una serie. En este proyecto no se busca modelar el comportamiento de los datos con miras a realizar predicciones usando la

metodología ARIMA, sino que solamente se busca filtrar las series para eliminar correlaciones de corto plazo.

- En el cálculo de la dimensión de inmersión se limitó el valor máximo a cinco, debido a que en los cálculos que la requieren este es el límite computacional, y además se validó que los resultados no se afectan con esta restricción.
- Las pruebas de comportamiento caótico están diseñadas para experimentos físicos, los cuales usan series infinitas, esto implica que cada período estudiado debe tener mínimo 500 datos para usar dichas pruebas.
- Debido a que los períodos requieren un mínimo de 500 datos, no se pudo dividir los períodos por tendencias al alza o a la baja.
- Para usar la prueba de STE en algunas series, se hizo necesario ajustar la cantidad de datos, ajustando hasta un máximo de veinte valores\* que no afectaran el resultado obtenido; estas son, el primer subperíodo de ECOPETROL y CEMARGOS, el subperíodo tres de PFBCOLOM y el último subperíodo de BCOLOMBIA.

---

\* Se agregaron en puntos equidistantes a lo largo de la serie. En un rango de diez valores incluyendo el punto equidistante, se toma el valor que tenga la menor diferencia respecto al anterior, y entre el dato elegido y el anterior se agrega un nuevo dato correspondiente al promedio de ambos. Por ejemplo, si se quiere agregar 14 datos, se divide el intervalo de 510 en 15, y en el dato 34, se toma el intervalo [30,40], se hallan las diferencias absolutas de cada dato con el anterior, y se toma el punto en que la diferencia es menor, entre ese punto y el dato anterior, se agrega el valor promedio de ambos datos. Se repite el procedimiento para los datos 68, 102, 136...476.

## 5. HALLAZGOS

- Los activos que incluyen períodos del 2001 al 2006 (IGBC, PFBCOLOM y BCOLOMBIA), presentan durante estos años medias positivas estadísticamente diferentes de cero. Mientras que para los demás períodos en todas las acciones, no se puede rechazar la hipótesis de que la media sea estadísticamente diferente de cero. Esto podría indicar que a partir del año 2006 el mercado tiende a mejorar su eficiencia.
- Todas las series de rentabilidades de los activos tienen una distribución leptocúrtica, con una curtosis estadísticamente diferente de tres (parámetro de una distribución normal).
- La significancia del estadístico Jarque-Bera rechaza la hipótesis de que las series de rentabilidades, sigan una distribución de probabilidad normal. Según Espinoza (2008), la no normalidad y la elevada curtosis suelen ser indicios de que la serie ha sido generada por un proceso no lineal.
- La prueba de Dickey y Fuller Aumentada (DFA) confirma la presencia de raíz unitaria en las series de precios. La serie de retornos genera estadísticos DFA, con una significancia menor al 1%, rechazando la hipótesis de que tengan una raíz unitaria. Con estos resultados se asume estacionariedad en los retornos. Aunque algunas series originales son estacionarias en los precios, se usan solo retornos para unificar variables.
- En la serie del IGBC, se observa que durante todo el período estudiado, las autocorrelaciones más grandes se presentan en el primer rezago, es decir, la rentabilidad de hoy depende del día anterior, además el cuarto subperíodo se destaca por ser el que más presenta autocorrelación

- Luego de hacer un análisis de autocorrelación en todas las series, se observa que la mayoría presentan autocorrelaciones en la mayor parte del período estudiado, por lo cual es posible ajustar modelos ARIMA, que generen residuos sin autocorrelación.
- Las series de retornos que no presentan autocorrelación son ECOPETROL e ISAGEN en su periodo total. Tampoco hay autocorrelación en el último período de PFBCOLOM, CEMARGOS, ISAGEN y BCOLOMBIA; lo que indica que estas series son más aleatorias en los períodos más recientes.
- Usando el test ARCH se observa que la varianza no es constante en ninguno de los activos. Solamente para el subperíodo uno de las acciones (ordinaria y preferencial) de Bancolombia y para el período dos de ISAGEN, no se puede rechazar la hipótesis de que exista homocedasticidad; sin embargo al observar el correlograma de residuos al cuadrado muestra que existen autocorrelaciones en la varianza, por tanto para todas las series, es posible ajustar un modelo GARCH.
- Al contrastar el comportamiento de los precios de cada activo en función del tiempo durante el período total y subperíodos de tamaño diferente, se observa que el comportamiento es similar en distintas escalas temporales. Esto indica comportamiento fractal en todas las series de tiempo.
- Al elaborar el gráfico de recurrencia del período total del IGBC, se observan estructuras marcadas en las rentabilidades y haciéndose más evidentes en la serie de residuos ARIMA-GARCH. Estas estructuras indican que la serie tiene patrones recurrentes e intermitentes, los cuales caracterizan las series deterministas.

- En todos los subperíodos del IGBC, existen estructuras recurrentes, sin embargo los gráficos que corresponden a datos tomados entre finales del 2005 y 2012, son más uniformes, evidenciando aleatoriedad.
- Usando el coeficiente de Hurst en la serie del IGBC, no se encuentra ningún valor antipersistente o aleatorio, por el contrario, todo el período muestra persistencia, es decir, la serie tiene memoria y comportamiento cíclico, aunque su nivel de persistencia disminuye a través de los años.
- Todas las series producen coeficientes de Hurst mayores a 0.5, son persistente, y posiblemente caóticas, excepto los activos CEMARGOS y Bancolombia, los cuales en sus períodos completos son antipersistentes, es decir se revierten rápidamente a la media, en este sentido son eficientes.
- En todas las acciones el exponente de Lyapunov muestra presencia de sensibilidad a las condiciones iniciales, pero en algunas series (Ver apéndice H) el resultado es cercano a cero, lo cual indica que el sistema oscila entre caos y aleatoriedad.
- Usando el test BDS para todos los activos se concluye que no son independientes ni idénticamente distribuidos, por tanto podrían seguir un comportamiento caótico, dados los indicios obtenidos en las pruebas anteriores, excepto la serie de GRUPOSURA, en la cual este estadístico no permite rechazar la hipótesis nula de que la serie es independiente e idénticamente distribuida.
- El mercado financiero muestra indicios de comportamiento caótico en los períodos entre 2001 y 2006, entre 2006 y 2008 no hay un patrón definido, pero entre 2008 y 2010, se observa nuevamente comportamiento caótico y entre 2010 y 2012 el mercado tiende a ser aleatorio.

## 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- Los períodos que muestran indicio de comportamiento caótico, coinciden con los períodos con tendencia al alza, mientras que el aleatorio coincide con el período con tendencia a la baja. Esto podría explicarse por la hipótesis de mercado fractal de Peters, la cual postula que los inversores negocian con horizontes de largo plazo cuando el mercado es rentable, produciendo un equilibrio que hace posible realizar predicciones durante este período; pero cuando el mercado cae, los horizontes de inversión cambian y se producen cambios bruscos en la dinámica del mercado, que lo hacen más aleatorio y por tanto eficiente, disminuyendo la posibilidad de realizar predicciones acertadas, sin embargo, se debe tener en cuenta que no se han tenido suficientes períodos al alza y a la baja, para corroborar con mayor certeza este comportamiento.
- En períodos mixtos (tendencia conjunta a alza y baja), el comportamiento no está bien definido, por tanto se debería dividir los períodos de este tipo en subperíodos con tendencias mejor definidas, sin embargo, en este trabajo no se pudo realizar dicha división porque la cantidad de datos resultante es insuficiente para usar las pruebas mencionadas, es por eso que se recomienda analizar estos nuevos subperíodos usando datos intradía de alta frecuencia.
- En los períodos en que los activos inician operaciones en el mercado, la mayoría de ellos muestran comportamientos caóticos, esto podría estar relacionado con la baja frecuencia de negociaciones, por lo tanto, sería interesante indagar sobre este posible fenómeno, que podría dar lugar a posibles ganancias extraordinarias por parte de un inversor.

- Como trabajo posterior, se podría indagar sobre este mismo tipo de comportamiento con datos intradía, comparando los resultados con mercados desarrollados como los americanos, europeos y asiáticos.
- En definitiva, se comprueba mediante el presente trabajo que el mercado bursátil colombiano evolucionó de un comportamiento caótico a uno aleatorio en los últimos diez años, lo cual podría dar indicios de mejoramiento de la eficiencia del mercado en Colombia.

## BIBLIOGRAFÍA

ABURACHIS, A. T y KISH, Richard. International Evidence on the Comovements Between Bond Yields and Stock Returns 1984-1994. En: Journal of Financial and Strategic Decisions. 1999. Vol. 12, no. 2, p. 67-81.

ALEXANDER, Sidney. Price Movements in Speculative Markets: Trends or Random Walks. En: Industrial Management Review. 1961. Vol 2, p. 7-26.

BACHELIER, Louis Jean-Baptiste. Teoria de la especulación. En: Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. 1900. Vol. 17, p. 21-86.

BARTLETT, M. S. On the theoretical specification and sampling properties of autocorrelated time series. En: Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society. 1946. Vol. 8, p. 27-41.

BOLLERSLEV, Tim. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. En: Journal of Econometrics. 1986. Vol. 31, p. 307-327.

BOX, George y JENKINS, Gwilym. Time Series Analysis: Forecasting and Control. 3 ed. San Francisco: Prentice Hall, 1970.

BROCK, W. A., DECHER, W. y SCHEINKMAN, J. A test for independence based on the correlation dimension. Madison: Universidad de Wisconsin.. Departamento de Economía, 1987.

COWLES, Alfred. y JONES, Herbert. Some A Posteriori Probabilities in Stock Market Action. En: *Econometrica*. 1937. Vol 5, no. 3, p. 208-294.

DI MATTEO, T., ASTE, T y DACOROGNA, M. Long-term memories of developed and emerging markets: Using the scaling analysis to characterize their stage of development. En: *Journal of Banking & Finance*. 2005. Vol. 29, p. 827-851.

DICKEY, David y FULLER, Wayne. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. En: *Journal of the American Statistical Association*. 1979. Vol. 74, p. 427–431.

ECKMANN, J. P., KAMPHORST, S. O y RUELLE, D. Recurrence Plots of Dynamical Systems. En: *Europhysics Letters*. 1987. Vol 4, no. 9, p. 973-977.

ENGLE, Robert. F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. En: *Econometrica*. 1982. Vol. 50, p. 987-1008.

ESPINOSA, Christian. Comportamiento caótico en los mercados bursátiles latinoamericanos utilizando Visual Recurrence Analysis. En: *Análisis Económico*. 2008. Vol. 23, no. 52, p. 159-183.

ESPINOSA, C., PARISI, F. y PARISI, A. Evidencia de comportamiento caótico en índices bursátiles americanos. En: *El Trimestre Económico*. 2007. Vol. 296, p. 901-927.

FAMA, Eugene F. The Behavior of Stock Market Prices. En: *Journal of Business*. 1965. Vol. 38, p. 34-105.

FAMA, Eugene F. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. En: Journal of Finance. 1970. Vol. 25, p. 383-417.

FAMA, Eugene F. Market efficiency, long-term returns, and behavioral. En: Journal of Financial Economics. 1998. Vol 49, p. 283-306.

FRENCH, Kenneth. R. Expected Stock Returns and Volatility. En: Journal of Financial Economics. 1987. Vol. 19, p. 3-29.

GÁLVEZ M., Ernesto. Análisis Fractal del Mercado de Valores de México (1978-2004). Tesis para optar al título de Doctor en Ciencias Administrativas. Ciudad de México: Instituto Politécnico Nacional, 2005. 171 p.

GIMENO, Ricardo. Análisis Caótico de Series Temporales Financieras de Alta Frecuencia. El Contrato de Futuro sobre el Bono Nocional a 10 años. Tesis para optar al título de Doctor. Madrid: Universidad de Comillas, 2000.

GRASSBERER, Peter. y PROCACCIA, I. Characterization of Strange Attractors. En: Physical Review Letters. 1983<sup>a</sup>. Vol. 50, no. 3, p. 346.

GRAU CARLES, P. Economía Dinámica Caótica: Una aplicación al mercado de capitales español. Tesis de grado para optar al título de Doctor en Ciencias Económicas. Madrid: Universidad Complutense de Madrid, 1996. 203 p.

GUJARATI, Damodar. N. Econometría. 4 ed. Mexico: McGraw-Hill, 2005. 972 p. ISBN 970-10-3971-8.

JARRETT, Jeffrey. E. y SCHILLING, Janne. Daily variation and predicting stock market returns for the frankfurter börse. En: Journal of Business Economics and Management. 2008. Vol. 9, p. 189-198.

HURST H.E. Long-term Storage Capacity of Reservoirs. En: Transactions of the American Society of Civil Engineers. 1951. Vol. 116, p. 770-799.

KOOP, Gary. Analysis of Economic Data. 2 ed. Inglaterra: John Wiley & Sons Ltd, 2005.

KYAW, N. A., LOS, C. A y ZONG, S. Persistence Characteristics of Latin American Financial Markets. Documento de trabajo. Kent: Kent State University , 2003.

LIPKA, Joanna M. y LOS, Cornelis A. Long-Term Dependence Characteristics of European Stock Indices. Documento de trabajo. Kent: Kent State University, 2003.

LJUNG, G. M. y BOX, G. E. On a measure of lack of fit in time series models. En: Biometrika. 1978. Vol. 65, p. 297-303.

LORENZ, Edward N. Deterministic nonperiodic Flow. En: Journal of Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20, p. 130.

LOS, Cornelis A. Visualization of chaos for finance majors. Documento de trabajo. Kent: Kent State University, 2004.

LOS, Cornelis y YU, Bing. Persistence Characteristics of the Chinese Stock Markets. Documento de trabajo. Kent: Kent State University, 2005.

LUDLOW, Jorge. Modelos, pronósticos y volatilidad de las series de tiempo generadas en la bolsa mexicana de valores. Mexico: Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco, 1997. ISBN 978-9706209559.

LYAPUNOV, Aleksandr M. The general problem of the stability of motion. Trabajo de grado para optar al título de Doctor. Rusia: Universidad de Moscú. 1992. 220 p.

MANDELBROT, Benoit. Stable Paretian Random Functions and the Multiplicative Variation of Income. En: Econométrica. 1961. Vol. 29, p. 517-543.

MANDELBROT, Benoit. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: W. H. Freeman and co., 1982. ISBN 978- 0716711865.

MOHAMMADI, Shapour. LYAPROSEN: MATLAB function to calculate Lyapunov exponent. 2009 [Citado 6 Junio 2012]. Disponible en Internet: <<http://ideas.repec.org/c/boc/bocode/t741502.htm>>.

PACKARD, N. H., CRUTCHFIELD, J. P., FARMER, J. D. y SHAW, R. S. Geometry from a Time Series. En: Physical Review Letters. 1980. Vol. 45 no. 9, p. 712-717.

PÉREZ E., Roman. Programa en Matlab para el cálculo del exponente de Hurst y dimensión fractal de series de tiempo. Bol-e: boletín electrónico del Centro de Geociencias. 2008. Vol. 4, no.3.

PETERS, Edgar E. Fractal Market Analysis. Estados Unidos: John Wiley & Sons Ltd, 1994. ISBN 0-417-58524-6.

ROBERTS, Harry. Statistical versus Clinical Prediction of the Stock Market. Manuscrito no publicado: Universidad de Chicago, 1967. Center for Research in Security Prices.

TAKENS, Floris. Detecting Strange Attractors in Turbulence. En: Lecture Notes in Mathematics. 1981. Vol. 898, p. 366-381.

TAKENS, Floris. Detecting nonlinearities in stationary time series. En: International Journal of Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3, no. 2, p. 241-256.

TSAY, Ruey S. Analysis of financial time series. 2 ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2005. 640 p. ISBN 0-471-69074-0.

ZABLOTSKY, Edgardo E. Eficiencia de Mercado de Capitales. Una ilustración. Documento de trabajo. Universidad del CEMA, 2001. No. 194, 40 p.

## APÉNDICES

### Apéndice A. Prueba de estacionariedad para las series de precios y rentabilidades

IGBC				
Período	Precios		Rentabilidades	
	Estadístico t	P-Valor	Estadístico t	P-Valor
Total	-0.898	79%	-46.983	0%
P1	0.224	97%	-19.687	0%
P2	1.952	100%	-19.344	0%
P3	-2.778	6%	-21.051	0%
P4	-0.273	93%	-22.249	0%
P5	-2.246	19%	-23.998	0%

ECOPETROL				
Período	Precios		Rentabilidades	
	Estadístico t	P-Valor	Estadístico t	P-Valor
Total	-0.311	92%	-30.010	0%
P1	-1.470	55%	-15.049	0%
P2	-1.744	41%	-21.134	0%

PREC				
Período	Precios		Rentabilidades	
	Estadístico t	P-Valor	Estadístico t	P-Valor
Total	-1.905	33%	-20.221	0%

<b>PFBCOLOM</b>				
<b>Período</b>	<b>Precios</b>		<b>Rentabilidades</b>	
	<b>Estadístico t</b>	<b>P-Valor</b>	<b>Estadístico t</b>	<b>P-Valor</b>
Total	-1.240	66%	-42.493	0%
P1	1.775	100%	-18.897	0%
P2	-2.452	13%	-23.806	0%
P3	-0.228	93%	-20.501	0%
P4	-4.027	0%	-22.845	0%

<b>GRUPOSURA</b>				
<b>Período</b>	<b>Precios</b>		<b>Rentabilidades</b>	
	<b>Estadístico t</b>	<b>P-Valor</b>	<b>Estadístico t</b>	<b>P-Valor</b>
Total	-1.962	30%	-22.996	0%

<b>CEMARGOS</b>				
<b>Período</b>	<b>Precios</b>		<b>Rentabilidades</b>	
	<b>Estadístico t</b>	<b>P-Valor</b>	<b>Estadístico t</b>	<b>P-Valor</b>
Total	-5.901	0%	-40.598	0%
P1	-3.441	1%	-24.605	0%
P2	-0.511	89%	-21.762	0%
P3	-1.680	44%	-23.358	0%

<b>ISAGEN</b>				
<b>Período</b>	<b>Precios</b>		<b>Rentabilidades</b>	
	<b>Estadístico t</b>	<b>P-Valor</b>	<b>Estadístico t</b>	<b>P-Valor</b>
Total	-2.083	25%	-30.504	0%
P1	-1.542	51%	-20.078	0%
P2	-2.343	16%	-22.817	0%

<b>BCOLOMBIA</b>				
<b>Período</b>	<b>Precios</b>		<b>Rentabilidades</b>	
	<b>Estadístico t</b>	<b>P-Valor</b>	<b>Estadístico t</b>	<b>P-Valor</b>
Total	-0.783	82%	-46.983	0%
P1	0.444	98%	-19.687	0%
P2	0.841	99%	-19.344	0%
P3	-2.208	20%	-21.051	0%
P4	-0.038	95%	-22.249	0%
P5	-3.917	0%	-23.998	0%

Fuente: Elaboración Propia

## Apéndice B. Pruebas de autocorrelación: Bartlett y Q<sub>LB</sub>.

IGBC									
PERÍODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>	PERÍODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>
TOTAL	1	<b>0.195</b>	99.9	0.0%	P3	1	<b>0.146</b>	11.3	0.1%
<b>03/08/2001-</b>	2	0.022	101.1	0.0%	<b>25/11/2005-</b>	2	0.002	11.3	0.4%
<b>15/06/2012</b>	3	-0.046	106.6	0.0%	<b>18/02/2008</b>	3	-0.054	12.9	0.5%
	4	-0.032	109.3	0.0%		4	0.002	12.9	1.2%
Nº de Datos	5	0.005	109.4	0.0%	Nº de Datos	5	0.023	13.2	2.2%
<b>2625</b>	6	0.004	109.5	0.0%	<b>525</b>	6	-0.018	13.3	3.8%
	7	0.010	109.7	0.0%		7	-0.065	15.6	2.9%
Intervalo Bartlett	8	0.015	110.3	0.0%	Intervalo Bartlett	8	-0.074	18.5	1.8%
$\pm$ <b>0.038</b>	9	0.020	111.4	0.0%	$\pm$ <b>0.086</b>	9	-0.012	18.6	2.9%
	10	0.015	112.0	0.0%		10	-0.013	18.6	4.5%
P1	1	<b>0.323</b>	55.0	0.0%	P4	1	<b>0.142</b>	10.7	0.1%
<b>03/08/2001-</b>	2	<b>0.134</b>	64.4	0.0%	<b>19/02/2008-</b>	2	-0.086	14.6	0.1%
<b>30/09/2003</b>	3	-0.016	64.6	0.0%	<b>28/04/2010</b>	3	<b>-0.105</b>	20.4	0.0%
	4	-0.076	67.7	0.0%		4	-0.050	21.7	0.0%
Nº de Datos	5	-0.070	70.3	0.0%	Nº de Datos	5	0.034	22.3	0.0%
<b>525</b>	6	0.009	70.3	0.0%	<b>525</b>	6	-0.042	23.3	0.1%
	7	0.007	70.3	0.0%		7	<b>0.094</b>	28.0	0.0%
Intervalo Bartlett	8	0.027	70.7	0.0%	Intervalo Bartlett	8	0.086	31.9	0.0%
$\pm$ <b>0.086</b>	9	0.068	73.2	0.0%	$\pm$ <b>0.086</b>	9	-0.053	33.4	0.0%
	10	0.053	74.7	0.0%		10	-0.066	35.8	0.0%
P2	1	<b>0.285</b>	42.8	0.0%	P5	1	<b>0.105</b>	5.8	1.6%
<b>01/10/2003-</b>	2	0.053	44.3	0.0%	<b>29/04/2010-</b>	2	0.027	6.2	4.5%
<b>24/11/2005</b>	3	-0.034	44.9	0.0%	<b>15/06/2012</b>	3	-0.033	6.8	8.0%
	4	-0.018	45.1	0.0%		4	-0.084	10.5	3.3%
Nº de Datos	5	0.019	45.3	0.0%	Nº de Datos	5	-0.047	11.6	4.0%
<b>525</b>	6	0.054	46.8	0.0%	<b>525</b>	6	-0.011	11.7	6.9%
	7	0.069	49.4	0.0%		7	-0.061	13.7	5.7%
Intervalo Bartlett	8	0.078	52.6	0.0%	Intervalo Bartlett	8	-0.018	13.8	8.6%
$\pm$ <b>0.086</b>	9	<b>0.106</b>	58.6	0.0%	$\pm$ <b>0.086</b>	9	0.002	13.8	12.8%
	10	0.097	63.7	0.0%		10	-0.009	13.9	17.9%

ECOPETROL									
PERÍODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>	PERÍODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>
TOTAL	1	0.061	3.8	5.2%	P2	1	0.063	2.0	15.4%
<b>21/04/2008-</b>	2	-0.043	5.6	6.0%	<b>21/04/2008-</b>	2	-0.017	2.2	33.7%
<b>03/07/2012</b>	3	-0.056	8.9	3.1%	<b>03/06/2010</b>	3	0.009	2.2	52.9%
	4	-0.058	12.4	1.5%		4	<b>-0.106</b>	8.0	9.0%
Nº de Datos	5	-0.023	12.9	2.4%	Nº de Datos	5	-0.053	9.5	9.0%
<b>1020</b>	6	-0.008	13.0	4.4%	<b>510</b>	6	0.022	9.8	13.5%
	7	0.012	13.1	6.9%		7	-0.027	10.2	18.0%
Intervalo Bartlett	8	0.051	15.8	4.5%	Intervalo Bartlett	8	0.010	10.2	25.1%
$\pm$ <b>0.061</b>	9	0.001	15.8	7.1%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	0.007	10.2	33.2%
	10	-0.030	16.7	8.0%		10	-0.030	10.7	38.1%
P1	1	0.057	1.7	5.2%					
<b>04/06/2010-</b>	2	-0.072	4.3	6.0%					
<b>03/07/2012</b>	3	<b>-0.127</b>	12.6	0.6%					
	4	-0.007	12.7	1.3%					
Nº de Datos	5	0.009	12.7	2.6%					
<b>510</b>	6	-0.042	13.6	3.4%					
	7	0.057	15.3	3.2%					
Intervalo Bartlett	8	<b>0.093</b>	19.8	1.1%					
$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.007	19.8	1.9%					
	10	-0.033	20.4	2.6%					

PREC					
PERÍODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>	
TOTAL	1	<b>0.105</b>	5.6	1.8%	
<b>08/06/2010-</b>	2	0.054	7.1	2.8%	
<b>03/07/2012</b>	3	-0.011	7.2	6.6%	
	4	-0.013	7.3	12.3%	
Nº de Datos	5	0.009	7.3	19.9%	
<b>510</b>	6	-0.030	7.8	25.7%	
	7	-0.057	9.5	22.1%	
Intervalo Bartlett	8	-0.009	9.5	30.1%	
$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.044	10.5	31.1%	
	10	-0.036	11.2	34.2%	

PFBCOLOM									
PERÍODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>	PERÍODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>
TOTAL	1	<b>0.060</b>	7.4	0.6%	P3	1	<b>0.095</b>	4.6	3.2%
<b>27/01/2004-</b>	2	<b>0.057</b>	14.1	0.1%	<b>22/04/2008-</b>	2	<b>0.097</b>	9.4	0.9%
<b>03/07/2012</b>	3	0.014	14.5	0.2%	<b>03/06/2010</b>	3	0.010	9.4	2.4%
	4	-0.001	14.5	0.6%		4	0.013	9.5	4.9%
Nº de Datos	5	0.026	15.8	0.7%	Nº de Datos	5	0.037	10.2	6.9%
<b>2040</b>	6	-0.013	16.2	1.3%	<b>510</b>	6	-0.023	10.5	10.4%
	7	0.020	17.0	1.8%		7	<b>0.108</b>	16.6	2.0%
Intervalo Bartlett	8	-0.001	17.0	3.1%	Intervalo Bartlett	8	<b>0.100</b>	21.7	0.5%
$\pm$ <b>0.043</b>	9	-0.005	17.0	4.9%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	0.016	21.9	0.9%
	10	0.000	17.0	7.4%		10	-0.010	21.9	1.6%
P1	1	<b>0.175</b>	15.8	0.0%	P4	1	-0.017	0.1	70.5%
<b>27/01/2004-</b>	2	0.077	18.8	0.0%	<b>04/06/2010-</b>	2	0.003	0.1	92.9%
<b>02/03/2006</b>	3	0.012	18.9	0.0%	<b>03/07/2012</b>	3	-0.017	0.3	96.0%
	4	0.022	19.1	0.1%		4	-0.070	2.8	58.5%
Nº de Datos	5	0.019	19.3	0.2%	Nº de Datos	5	-0.028	3.2	66.4%
<b>510</b>	6	0.017	19.5	0.3%	<b>510</b>	6	0.013	3.3	76.8%
	7	0.015	19.6	0.7%		7	0.042	4.2	75.2%
Intervalo Bartlett	8	-0.021	19.8	1.1%	Intervalo Bartlett	8	-0.054	5.8	67.4%
$\pm$ <b>0.087</b>	9	0.018	20.0	1.8%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.015	5.9	75.2%
	10	-0.024	20.3	2.7%		10	0.039	6.7	75.6%
P2	1	-0.056	1.6	20.8%					
<b>03/03/2006-</b>	2	0.022	1.8	39.9%					
<b>21/04/2008</b>	3	0.038	2.6	46.2%					
	4	0.000	2.6	63.1%					
Nº de Datos	5	0.047	3.7	59.3%					
<b>510</b>	6	-0.063	5.8	45.0%					
	7	<b>-0.091</b>	10.1	18.4%					
Intervalo Bartlett	8	-0.053	11.5	17.3%					
$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.051	12.9	16.8%					
	10	-0.008	12.9	22.8%					

GRUPOSURA				
PERÍODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>
TOTAL	1	-0.023	0.3	60.9%
<b>27/05/2010-</b>	2	-0.003	0.3	87.5%
<b>29/06/2012</b>	3	0.035	0.9	82.6%
	4	<b>-0.120</b>	8.4	7.9%
Nº de Datos	5	-0.044	9.4	9.5%
<b>510</b>	6	0.083	12.9	4.4%
	7	-0.016	13.0	7.1%
Intervalo Bartlett	8	-0.073	15.8	4.5%
$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.031	16.3	6.1%
	10	0.053	17.8	5.9%

CEMARGOS									
PERÍODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>	PERÍODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>
TOTAL	1	-0.036	2.0	15.8%	P2	1	0.033	0.6	44.9%
<b>06/03/2006-</b>	2	-0.012	2.2	33.0%	<b>17/04/2008-</b>	2	0.002	0.6	75.0%
<b>29/06/2012</b>	3	0.016	2.6	45.6%	<b>24/05/2010</b>	3	0.004	0.6	90.0%
	4	-0.027	3.7	45.0%		4	-0.023	0.8	93.2%
Nº de Datos	5	-0.002	3.7	59.4%	Nº de Datos	5	-0.036	1.5	91.1%
<b>1530</b>	6	<b>-0.097</b>	18.3	0.5%	<b>510</b>	6	-0.072	4.2	65.0%
	7	-0.004	18.3	1.1%		7	0.040	5.0	65.4%
Intervalo Bartlett	8	0.040	20.8	0.8%	Intervalo Bartlett	8	0.054	6.6	58.4%
$\pm$ <b>0.050</b>	9	0.045	24.0	0.4%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	<b>0.101</b>	11.9	21.9%
	10	<b>-0.069</b>	31.3	0.1%		10	0.036	12.6	24.9%
P1	1	-0.083	3.5	6.0%	P3	1	-0.039	0.8	37.8%
<b>06/03/2006-</b>	2	0.008	3.6	16.8%	<b>25/05/2010-</b>	2	-0.099	5.8	5.5%
<b>16/04/2008</b>	3	0.040	4.4	22.1%	<b>29/06/2012</b>	3	-0.039	6.6	8.7%
	4	-0.063	6.4	17.0%		4	0.058	8.3	8.1%
Nº de Datos	5	0.023	6.7	24.4%	Nº de Datos	5	-0.006	8.3	14.0%
<b>510</b>	6	<b>-0.123</b>	14.6	2.4%	<b>510</b>	6	-0.076	11.3	8.0%
	7	-0.022	14.8	3.8%		7	-0.050	12.6	8.4%
Intervalo Bartlett	8	0.040	15.7	4.7%	Intervalo Bartlett	8	0.005	12.6	12.7%
$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.006	15.7	7.3%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	0.080	15.9	6.9%
	10	-0.152	27.8	0.2%		10	-0.027	16.3	9.2%

ISAGEN									
PERÍODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>	PERÍODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>
TOTAL	1	0.044	2.0	15.7%	P2	1	-0.012	0.1	78.7%
<b>16/04/2008-</b>	2	0.013	2.2	33.7%	<b>02/06/2010-</b>	2	-0.011	0.1	93.5%
<b>03/07/2012</b>	3	0.048	4.6	20.8%	<b>03/07/2012</b>	3	0.079	3.4	33.7%
	4	-0.001	4.6	33.6%		4	-0.032	3.9	41.8%
Nº de Datos	5	0.004	4.6	47.1%	Nº de Datos	5	-0.029	4.3	50.1%
<b>1020</b>	6	0.061	8.4	21.1%	<b>510</b>	6	0.021	4.6	60.1%
	7	0.026	9.1	24.5%		7	-0.050	5.9	55.3%
Intervalo Bartlett	8	0.034	10.3	24.6%	Intervalo Bartlett	8	-0.010	5.9	65.4%
$\pm$ <b>0.061</b>	9	-0.004	10.3	32.7%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.001	5.9	74.6%
	10	0.001	10.3	41.5%		10	0.040	6.8	74.8%
P1	1	<b>0.113</b>	6.6	1.0%					
<b>16/04/2008-</b>	2	0.042	7.5	2.4%					
<b>01/06/2010</b>	3	0.009	7.5	5.7%					
	4	0.036	8.2	8.4%					
Nº de Datos	5	0.039	9.0	10.9%					
<b>510</b>	6	<b>0.114</b>	15.8	1.5%					
	7	<b>0.129</b>	24.4	0.1%					
Intervalo Bartlett	8	0.082	27.9	0.0%					
$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.007	27.9	0.1%					
	10	-0.048	29.1	0.1%					

BCOLOMBIA									
PERÍODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>	PERÍODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>
TOTAL	1	<b>0.071</b>	12.9	0.0%	P1	1	<b>0.132</b>	8.9	0.3%
<b>31/10/2001-</b>	2	0.035	15.9	0.0%	<b>31/10/2001-</b>	2	-0.003	8.9	1.2%
<b>03/07/2012</b>	3	-0.027	17.7	0.0%	<b>19/01/2004</b>	3	-0.006	8.9	3.0%
	4	-0.001	17.7	0.1%		4	0.003	8.9	6.3%
Nº de Datos	5	0.007	17.9	0.3%	Nº de Datos	5	0.002	8.9	11.2%
<b>2550</b>	6	0.018	18.7	0.5%	<b>510</b>	6	0.051	10.3	11.3%
	7	0.024	20.1	0.5%		7	0.023	10.5	16.0%
Intervalo Bartlett	8	0.004	20.1	1.0%	Intervalo Bartlett	8	0.042	11.4	17.8%
$\pm$ <b>0.039</b>	9	0.006	20.2	1.7%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	0.062	13.4	14.3%
	10	0.023	21.5	1.8%		10	0.051	14.8	13.9%

**BCOLOMBIA (Continuación)**

PERÍODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>	PERÍODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>
P2	1	<b>0.151</b>	11.7	0.1%	P4	1	0.012	0.1	78.3%
<b>20/01/2004-</b>	2	0.017	11.9	0.3%	<b>16/04/2008-</b>	2	0.063	2.1	34.9%
<b>20/02/2006</b>	3	-0.052	13.2	0.4%	<b>01/06/2010</b>	3	-0.038	2.9	41.2%
	4	-0.011	13.3	1.0%		4	0.011	2.9	56.9%
Nº de Datos	5	0.018	13.5	1.9%	Nº de Datos	5	0.023	3.2	66.7%
<b>510</b>	6	0.041	14.3	2.6%	<b>510</b>	6	0.015	3.3	76.5%
	7	0.000	14.3	4.6%		7	0.068	5.7	57.0%
Intervalo Bartlett	8	-0.009	14.4	7.3%	Intervalo Bartlett	8	<b>0.109</b>	12.0	15.3%
$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.021	14.6	10.3%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.035	12.6	18.0%
	10	0.045	15.6	11.1%		10	-0.006	12.6	24.5%
P3	1	0.067	2.3	13.0%	P5	1	-0.066	2.2	13.6%
<b>21/02/2006-</b>	2	0.065	4.5	10.6%	<b>02/06/2010-</b>	2	0.004	2.2	32.7%
<b>15/04/2008</b>	3	-0.073	7.2	6.4%	<b>03/07/2012</b>	3	0.019	2.4	49.0%
	4	-0.011	7.3	12.1%		4	-0.017	2.6	63.3%
Nº de Datos	5	0.016	7.4	19.0%	Nº de Datos	5	-0.065	4.8	44.6%
<b>510</b>	6	-0.004	7.4	28.2%	<b>510</b>	6	-0.033	5.3	50.4%
	7	-0.010	7.5	37.9%		7	-0.001	5.3	62.1%
Intervalo Bartlett	8	<b>-0.150</b>	19.2	1.4%	Intervalo Bartlett	8	-0.020	5.5	70.1%
$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.013	19.3	2.3%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.003	5.5	78.6%
	10	-0.025	19.7	3.3%		10	0.047	6.66	75.7%

**Apéndice C. Modelos ARMA ( $p, q$ )**

IGBC										
Período	C	AR(p)					MA(q)			
		1	2	3	8	9	1	2	3	4
Total	0.001185	0.196		-0.050						
P1	0.001254	0.323								
P2	0.002738	0.277				0.085				
P3		0.150								
P4	0.001056		0.355	-0.544			0.152	-0.453	0.430	
P5		0.106								

ECOPETROL				
Período	C	AR(p)		MA(q)
		3	8	4
Total	0.00085			
P1		-0.126	0.095	
P2				-0.097

PREC	
Período	MA(q)
	1
Total	0.095

PFBCOLOM								
Período	C	AR(p)				MA(q)		
		1	2	7	8	1	2	7
Total	0.000968	0.057					0.054	
P1	0.002654	0.175						
P2								-0.093
P3	0.000038		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
P4	0.000357							

GRUPOSURA		
Período	AR(p)	MA(q)
	4	8
<b>Total</b>	-0.1389	-0.1010

CEMARGOS							
Período	AR(p)					MA(q)	
	1	2	6	9	10	1	6
<b>Total</b>			-0.098				-0.068
P1	0.171				-0.740	-0.314	-0.113
P2			0.104				0.724
P3		-0.100					

ISAGEN						
Período	C	AR(p)			MA(q)	
		1	6	7	6	7
<b>Total</b>	-0.000098					
P1		0.122	-0.581	0.475	0.677	-0.325
P2	-0.000002					

BCOLOMBIA				
Período	C	AR(p)		MA(q)
		1	8	1
<b>Total</b>	0.00146	0.071013		
P1	0.00302			0.135171
P2	0.00258			0.146431
P3			-0.15078	
P4			0.113619	
P5	0.00048			

### Apéndice D. Test de BARTLETT y QLB para residuos de modelos ARMA ( $p, q$ )

IGBC									
PERIODO	m	$\rho$	QLB	$P_{QLB}$	PERIODO	m	$\rho$	QLB	$P_{QLB}$
TOTAL- AR(3)	1	0.00	0.0		P3-MA(1)	1	0.00	0.0	
<b>03/08/2001-</b>	2	-0.01	0.1		<b>25/11/2005-</b>	2	0.01	0.1	82.1%
	3	0.00	0.1	71.8%	<b>18/02/2008</b>	3	-0.06	1.7	41.7%
	4	-0.02	0.8	66.5%		4	0.01	1.8	62.1%
Nº de Datos	5	0.01	1.3	73.0%	Nº de Datos	5	0.02	2.1	72.1%
<b>2625</b>	6	0.00	1.3	86.2%	<b>525</b>	6	-0.01	2.2	82.5%
	7	0.01	1.4	92.7%		7	-0.05	3.6	72.5%
Intervalo Bartlett	8	0.01	1.7	94.3%	Intervalo Bartlett	8	-0.07	6.0	54.0%
$\pm$ <b>0.038</b>	9	0.02	2.3	93.9%	$\pm$ <b>0.086</b>	9	0.00	6.0	64.7%
	10	0.01	2.6	95.6%		10	-0.02	6.2	72.0%
P1-AR(1)	1	-0.01	0.1		P4-ARMA(3,3)	1	0.03	0.6	
<b>03/08/2001-</b>	2	0.05	1.6	20.1%	<b>19/02/2008-</b>	2	-0.02	0.7	
<b>30/09/2003</b>	3	-0.04	2.5	28.7%	<b>28/04/2010</b>	3	0.00	0.7	
	4	-0.06	4.6	20.3%		4	0.04	1.7	
Nº de Datos	5	-0.06	6.6	15.6%	Nº de Datos	5	0.04	2.7	
<b>524</b>	6	0.03	7.3	20.2%	<b>522</b>	6	-0.08	6.0	1.4%
	7	0.00	7.3	29.7%		7	0.05	7.2	2.8%
Intervalo Bartlett	8	0.01	7.3	39.9%	Intervalo Bartlett	8	0.08	10.5	1.5%
$\pm$ <b>0.086</b>	9	0.05	8.9	35.0%	$\pm$ <b>0.086</b>	9	-0.07	12.8	1.2%
	10	0.02	9.1	42.8%		10	-0.04	13.7	1.7%
P2-MA(1)	1	0.02	0.2		P5-AR(1)	1	0.00	0.0	
<b>01/10/2003-</b>	2	0.06	2.2	14.1%	<b>29/04/2010-</b>	2	0.02	0.2	69.7%
<b>24/11/2005</b>	3	-0.05	3.4	18.5%	<b>15/06/2012</b>	3	-0.03	0.5	78.1%
	4	-0.01	3.4	33.2%		4	-0.07	3.4	34.0%
Nº de Datos	5	0.01	3.5	48.1%	Nº de Datos	5	-0.03	3.9	41.5%
<b>525</b>	6	0.04	4.3	50.5%	<b>524</b>	6	0.00	3.9	55.9%
	7	0.05	5.5	47.9%		7	-0.06	6.0	42.6%
Intervalo Bartlett	8	0.05	6.8	45.0%	Intervalo Bartlett	8	-0.01	6.1	53.3%
$\pm$ <b>0.086</b>	9	0.07	9.5	30.2%	$\pm$ <b>0.086</b>	9	0.00	6.1	64.0%
	10	0.09	14.2	11.6%		10	-0.01	6.2	72.2%

ECOPETROL									
PERIODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>	PERIODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>
TOTAL	1	0.06	3.8	5.2%	P2-MA(4)	1	0.06	1.8	
<b>21/04/2008-</b>	2	-0.04	5.6	6.0%	<b>21/04/2008-</b>	2	-0.02	2.0	15.9%
<b>03/07/2012</b>	3	-0.06	8.9	3.1%	<b>03/06/2010</b>	3	0.01	2.1	35.4%
	4	-0.06	12.4	1.5%		4	-0.01	2.1	54.7%
Nº de Datos	5	-0.02	12.9	2.4%	Nº de Datos	5	-0.05	3.2	51.8%
<b>1020</b>	6	-0.01	13.0	4.4%	<b>510</b>	6	0.02	3.4	63.6%
	7	0.01	13.1	6.9%		7	-0.02	3.7	72.3%
Intervalo Bartlett	8	0.05	15.8	4.5%	Intervalo Bartlett	8	0.01	3.7	81.1%
$\pm$ <b>0.061</b>	9	0.00	15.8	7.1%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	0.01	3.7	87.9%
	10	-0.03	16.7	8.0%		10	-0.03	4.1	90.2%
P1-AR(8)	1	0.03	0.4						
<b>04/06/2010-</b>	2	-0.07	3.1						
<b>03/07/2012</b>	3	-0.02	3.3	7.0%					
	4	-0.01	3.4	18.4%					
Nº de Datos	5	0.00	3.4	33.6%					
<b>502</b>	6	-0.06	5.2	26.7%					
	7	0.06	6.8	23.8%					
Intervalo Bartlett	8	0.00	6.8	34.2%					
$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.03	7.2	41.0%					
	10	-0.03	7.6	47.5%					

PREC				
PERIODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>
TOTAL-MA(1)	1	0.01	0.0	
<b>08/06/2010-</b>	2	0.06	1.6	20.7%
<b>03/07/2012</b>	3	-0.02	1.7	42.4%
	4	-0.01	1.8	61.8%
Nº de Datos	5	0.01	1.9	76.0%
<b>510</b>	6	-0.03	2.2	81.9%
	7	-0.06	3.8	70.6%
Intervalo Bartlett	8	0.00	3.8	80.4%
$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.04	4.6	79.7%
	10	-0.04	5.5	78.6%

PFBCOLOM									
PERIODO	m	$\rho$	QLB	$P_{QLB}$	PERIODO	m	$\rho$	QLB	$P_{QLB}$
TOTAL-ARMA(1,2)	1	0.00	0.0		P3-ARMA(8,8)	1	0.00	0.0	
<b>27/01/2004-</b>	2	0.00	0.0		<b>22/04/2008-</b>	2	0.03	0.4	
<b>03/07/2012</b>	3	0.01	0.2	65.4%	<b>03/06/2010</b>	3	0.06	2.0	
	4	0.00	0.2	90.3%		4	0.06	3.7	
Nº de Datos	5	0.02	1.5	69.1%	Nº de Datos	5	0.05	5.1	
<b>2039</b>	6	-0.02	2.0	73.6%	<b>502</b>	6	-0.05	6.2	
	7	0.02	2.8	72.9%		7	0.02	6.5	1.1%
Intervalo Bartlett	8	0.00	2.8	83.2%	Intervalo Bartlett	8	-0.02	6.7	3.5%
$\pm$ <b>0.043</b>	9	-0.01	2.9	89.5%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.04	7.3	6.2%
	10	0.00	2.9	94.0%		10	-0.03	7.7	10.4%
P1-AR(1)	1	-0.01	0.0		P4	1	-0.02	0.1	70.5%
<b>27/01/2004-</b>	2	0.05	1.3	26.3%	<b>04/06/2010-</b>	2	0.00	0.1	92.9%
<b>02/03/2006</b>	3	0.00	1.3	53.2%	<b>03/07/2012</b>	3	-0.02	0.3	96.0%
	4	0.02	1.5	67.4%		4	-0.07	2.8	58.5%
Nº de Datos	5	0.01	1.6	81.1%	Nº de Datos	5	-0.03	3.2	66.4%
<b>509</b>	6	0.01	1.6	89.6%	<b>510</b>	6	0.01	3.3	76.8%
	7	0.02	1.8	93.6%		7	0.04	4.2	75.2%
Intervalo Bartlett	8	-0.03	2.2	94.9%	Intervalo Bartlett	8	-0.05	5.8	67.4%
$\pm$ <b>0.087</b>	9	0.02	2.5	96.2%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.01	5.9	75.2%
	10	-0.04	3.2	95.7%		10	0.04	6.7	75.6%
P2-MA(7)	1	-0.07	2.3						
<b>03/03/2006-</b>	2	0.02	2.6	10.8%					
<b>21/04/2008</b>	3	0.04	3.3	19.2%					
	4	0.01	3.3	34.5%					
Nº de Datos	5	0.04	4.4	36.0%					
<b>510</b>	6	-0.07	7.0	22.0%					
	7	0.00	7.0	32.0%					
Intervalo Bartlett	8	-0.05	8.5	29.2%					
$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.04	9.4	30.6%					
	10	-0.01	9.5	39.3%					

GRUPOSURA				
PERIODO	m	$\rho$	QLB	$P_{QLB}$
TOTAL-ARMA(4,8)	1	-0.03	0.4	
<b>27/05/2010-</b>	2	0.02	0.7	
<b>29/06/2012</b>	3	0.03	1.1	29.3%
	4	0.00	1.1	57.5%
Nº de Datos	5	-0.05	2.2	53.1%
<b>510</b>	6	0.09	6.4	17.2%
	7	-0.01	6.4	26.6%
Intervalo Bartlett	8	0.00	6.4	37.6%
$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.04	7.2	40.7%
	10	0.05	8.6	37.9%

CEMARGOS									
PERIODO	m	$\rho$	QLB	$P_{QLB}$	PERIODO	m	$\rho$	QLB	$P_{QLB}$
TOTAL-ARMA(10,6)	1	-0.03	1.7		P2-AR(9)	1	0.03	0.4	
<b>06/03/2006-</b>	2	-0.01	1.8		<b>17/04/2008-</b>	2	0.01	0.4	51.4%
<b>29/06/2012</b>	3	0.02	2.6	10.7%	<b>24/05/2010</b>	3	0.01	0.5	77.6%
	4	-0.03	4.0	13.4%		4	-0.03	1.0	79.5%
Nº de Datos	5	-0.01	4.1	24.9%	Nº de Datos	5	-0.04	1.9	75.7%
<b>1520</b>	6	0.00	4.1	39.0%	<b>510</b>	6	-0.07	4.3	50.7%
	7	0.00	4.1	53.2%		7	0.04	5.1	53.2%
Intervalo Bartlett	8	0.04	6.6	35.5%	Intervalo Bartlett	8	0.05	6.2	51.8%
$\pm$ <b>0.050</b>	9	0.04	9.4	22.3%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	0.01	6.2	62.3%
	10	0.00	9.4	30.7%		10	0.03	6.5	68.4%
P1-ARMA(10-10)	1	0.02	0.2		P3-AR(2)	1	-0.04	0.9	
<b>06/03/2006-</b>	2	0.03	0.7		<b>25/05/2010-</b>	2	0.00	0.9	35.3%
<b>16/04/2008</b>	3	0.02	1.0		<b>29/06/2012</b>	3	-0.04	1.6	45.4%
	4	-0.06	2.9			4	0.04	2.3	51.4%
Nº de Datos	5	0.01	2.9		Nº de Datos	5	-0.01	2.4	66.3%
<b>500</b>	6	-0.03	3.5	6.1%	<b>508</b>	6	-0.07	5.1	39.8%
	7	0.02	3.8	14.9%		7	-0.04	6.0	42.1%
Intervalo Bartlett	8	0.05	5.0	17.3%	Intervalo Bartlett	8	0.00	6.0	53.7%
$\pm$ <b>0.087</b>	9	0.02	5.2	26.7%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	0.08	9.1	33.8%
	10	-0.07	7.5	18.7%		10	-0.03	9.6	38.5%

ISAGEN									
PERIODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>	PERIODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>
TOTAL	1	0.04	2.0	15.7%	P2	1	-0.01	0.1	78.7%
<b>16/04/2008-</b>	2	0.01	2.2	33.7%	<b>02/06/2010-</b>	2	-0.01	0.1	93.5%
<b>03/07/2012</b>	3	0.05	4.6	20.8%	<b>03/07/2012</b>	3	0.08	3.4	33.7%
	4	0.00	4.6	33.6%		4	-0.03	3.9	41.8%
Nº de Datos	5	0.00	4.6	47.1%	Nº de Datos	5	-0.03	4.3	50.1%
<b>1020</b>	6	0.06	8.4	21.1%	<b>510</b>	6	0.02	4.6	60.1%
	7	0.03	9.1	24.5%		7	-0.05	5.9	55.3%
Intervalo Bartlett	8	0.03	10.3	24.6%	Intervalo Bartlett	8	-0.01	5.9	65.4%
$\pm$ <b>0.061</b>	9	0.00	10.3	32.7%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	0.00	5.9	74.6%
	10	0.00	10.3	41.5%		10	0.04	6.8	74.8%
P1-ARMA(7,7)	1	-0.01	0.0						
<b>16/04/2008-</b>	2	0.00	0.0						
<b>01/06/2010</b>	3	0.01	0.1						
	4	0.06	1.7						
Nº de Datos	5	0.01	1.7						
<b>503</b>	6	0.03	2.3	12.8%					
	7	0.01	2.4	30.7%					
Intervalo Bartlett	8	0.05	3.6	30.8%					
$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.03	4.1	38.7%					
	10	-0.06	6.2	28.4%					

BCOLOMBIA									
PERIODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>	PERIODO	m	$\rho$	QLB	P <sub>QLB</sub>
TOTAL-AR(1)	1	0.00	0.0		P3-AR(8)	1	0.06	1.8	
<b>31/10/2001-</b>	2	0.03	2.6	10.8%	<b>21/02/2006-</b>	2	0.07	4.3	3.9%
<b>03/07/2012</b>	3	-0.03	4.8	9.1%	<b>15/04/2008</b>	3	-0.06	6.2	4.5%
	4	0.00	4.8	18.8%		4	-0.01	6.2	10.1%
Nº de Datos	5	0.01	4.9	30.0%	Nº de Datos	5	0.00	6.2	18.3%
<b>2549</b>	6	0.02	5.5	35.6%	<b>502</b>	6	0.00	6.2	28.4%
	7	0.02	6.8	34.0%		7	0.01	6.3	39.6%
Intervalo Bartlett	8	0.00	6.8	44.9%	Intervalo Bartlett	8	0.01	6.4	49.9%
$\pm$ <b>0.039</b>	9	0.00	6.9	55.2%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	0.01	6.4	60.4%
	10	0.02	8.3	50.8%		10	-0.01	6.4	69.6%

BCOLOMBIA									
PERIODO	m	$\rho$	QLB	$P_{QLB}$	PERIODO	m	$\rho$	QLB	$P_{QLB}$
P1-MA(1)	1	0.00	0.0		P4-AR(8)	1	0.01	0.0	
<b>31/10/2001-</b>	2	0.00	0.0	95.1%	<b>16/04/2008-</b>	2	0.07	2.4	12.5%
<b>19/01/2004</b>	3	-0.01	0.0	99.1%	<b>01/06/2010</b>	3	-0.04	3.0	22.1%
	4	0.00	0.0	99.9%		4	0.01	3.1	38.0%
Nº de Datos	5	-0.01	0.0	100%	Nº de Datos	5	0.03	3.4	48.6%
<b>510</b>	6	0.05	1.3	93.3%	<b>502</b>	6	0.01	3.5	62.2%
	7	0.01	1.4	96.6%		7	0.07	6.2	40.5%
Intervalo Bartlett	8	0.03	2.0	96.1%	Intervalo Bartlett	8	-0.01	6.2	51.5%
$\pm$ <b>0.087</b>	9	0.05	3.4	90.8%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.05	7.3	50.2%
	10	0.05	4.7	86.3%		10	-0.01	7.4	59.7%
P2-MA(1)	1	0.00	0.0		P5	1	-0.07	2.2	13.6%
<b>20/01/2004-</b>	2	0.02	0.3	57.6%	<b>02/06/2010-</b>	2	0.00	2.2	32.7%
<b>20/02/2006</b>	3	-0.05	1.8	40.0%	<b>03/07/2012</b>	3	0.02	2.4	49.0%
	4	0.00	1.8	60.5%		4	-0.02	2.6	63.3%
Nº de Datos	5	0.01	1.9	74.8%	Nº de Datos	5	-0.07	4.8	44.6%
<b>510</b>	6	0.04	2.7	73.9%	<b>510</b>	6	-0.03	5.3	50.4%
	7	-0.01	2.8	83.8%		7	0.00	5.3	62.1%
Intervalo Bartlett	8	0.00	2.8	90.5%	Intervalo Bartlett	8	-0.02	5.5	70.1%
$\pm$ <b>0.087</b>	9	-0.03	3.1	92.5%	$\pm$ <b>0.087</b>	9	0.00	5.5	78.6%
	10	0.05	4.3	89.1%		10	0.05	6.7	75.7%

**Apéndice E. Test ARCH para residuos al cuadrado.**

IGBC									
Período	Variable	Coef.	Prob.	Período	Variable	Coef.	Prob.		
Total	C	0.0001	0%	P3	C	0.0001	0%		
	RESID^2(-1)	0.1683	0%		RESID^2(-1)	0.1966	0%		
	RESID^2(-2)	0.1162	0%		RESID^2(-2)	0.0871	6%		
	RESID^2(-3)	0.0760	0%		RESID^2(-3)	0.0965	3%		
	RESID^2(-4)	0.0207	30%		RESID^2(-4)	0.0680	13%		
	Prob. F	RESID^2(-5)	0.0579		0%	Prob. F	RESID^2(-5)	-0.0036	94%
	0.0%	RESID^2(-6)	0.0720		0%	0.0%	RESID^2(-6)	0.0675	14%
		RESID^2(-7)	0.0231		25%		RESID^2(-7)	-0.0310	50%
		RESID^2(-8)	0.0332		10%		RESID^2(-8)	0.0853	6%
		RESID^2(-9)	0.0217		28%		RESID^2(-9)	0.0188	68%
	RESID^2(-10)	-0.0114	56%		RESID^2(-10)	-0.0139	75%		
P1	C	0.0000	0%	P4	C	0.0000	1%		
	RESID^2(-1)	0.0802	7%		RESID^2(-1)	0.2237	0%		
	RESID^2(-2)	0.0941	4%		RESID^2(-2)	0.0584	20%		
	RESID^2(-3)	0.0497	27%		RESID^2(-3)	0.1024	1%		
	RESID^2(-4)	0.0672	14%		RESID^2(-4)	-0.0689	9%		
	Prob. F	RESID^2(-5)	0.0922		4%	Prob. F	RESID^2(-5)	0.1000	1%
	0.3%	RESID^2(-6)	-0.0074		87%	0.0%	RESID^2(-6)	0.1247	0%
		RESID^2(-7)	0.0252		57%		RESID^2(-7)	0.0922	2%
		RESID^2(-8)	0.0498		27%		RESID^2(-8)	0.0504	21%
		RESID^2(-9)	0.0047		92%		RESID^2(-9)	0.0266	51%
	RESID^2(-10)	-0.0426	33%		RESID^2(-10)	-0.0071	86%		
P2	C	0.0001	0%	P5	C	0.0001	0%		
	RESID^2(-1)	0.0693	12%		RESID^2(-1)	0.1043	2%		
	RESID^2(-2)	0.1464	0%		RESID^2(-2)	0.1408	0%		
	RESID^2(-3)	0.0573	20%		RESID^2(-3)	0.1113	1%		
	RESID^2(-4)	0.0643	16%		RESID^2(-4)	-0.0556	22%		
	Prob. F	RESID^2(-5)	0.0958		3%	Prob. F	RESID^2(-5)	0.0231	61%
	0.0%	RESID^2(-6)	0.0353		44%	0.0%	RESID^2(-6)	0.0341	45%
		RESID^2(-7)	0.0223		62%		RESID^2(-7)	0.0593	18%
		RESID^2(-8)	0.0401		37%		RESID^2(-8)	-0.0807	7%
		RESID^2(-9)	-0.0415		35%		RESID^2(-9)	0.0095	83%
	RESID^2(-10)	-0.0197	66%		RESID^2(-10)	-0.0134	44%		

ECOPETROL							
Período	Variable	Coef.	Prob.	Período	Variable	Coef.	Prob.
Total	C	0.0001	0%	P2	C	0.0001	0%
	RESID^2(-1)	0.1204	0%		RESID^2(-1)	0.1425	0%
	RESID^2(-2)	0.1412	0%		RESID^2(-2)	0.1342	0%
	RESID^2(-3)	0.0606	0%		RESID^2(-3)	0.0606	19%
	RESID^2(-4)	0.0087	30%		RESID^2(-4)	0.0017	97%
Prob. F	RESID^2(-5)	0.0321	0%	Prob. F	RESID^2(-5)	-0.0278	55%
0.0%	RESID^2(-6)	0.0223	0%	0.05%	RESID^2(-6)	0.0284	54%
	RESID^2(-7)	-0.0133	25%		RESID^2(-7)	-0.0460	33%
	RESID^2(-8)	0.0845	10%		RESID^2(-8)	0.0370	44%
	RESID^2(-9)	0.0613	28%		RESID^2(-9)	0.0686	15%
	RESID^2(-10)	0.0311	56%		RESID^2(-10)	-0.0353	45%
P1	C	0.0001	0%				
	RESID^2(-1)	0.1196	1%				
	RESID^2(-2)	0.1392	0%				
	RESID^2(-3)	0.1022	2%				
	RESID^2(-4)	-0.0088	66%				
Prob. F	RESID^2(-5)	0.0083	62%				
0.0%	RESID^2(-6)	-0.0081	54%				
	RESID^2(-7)	-0.0078	53%				
	RESID^2(-8)	0.0124	31%				
	RESID^2(-9)	0.0013	91%				
	RESID^2(-10)	-0.0038	67%				

PREC			
Período	Variable	Coef.	Prob.
Total	C	0.0003	0%
	RESID^2(-1)	0.1127	1%
	RESID^2(-2)	0.1080	2%
	RESID^2(-3)	0.0893	5%
	RESID^2(-4)	0.0308	51%
Prob. F	RESID^2(-5)	0.0200	67%
0.3%	RESID^2(-6)	-0.0347	45%
	RESID^2(-7)	0.0063	89%
	RESID^2(-8)	-0.0024	96%
	RESID^2(-9)	0.0508	27%
	RESID^2(-10)	0.0365	42%

PFBCOLOM							
Período	Variable	Coef.	Prob.	Período	Variable	Coef.	Prob.
Total	C	0.0002	0%	P3	C	0.0001	0%
	RESID^2(-1)	0.1435	0%		RESID^2(-1)	0.1316	0%
	RESID^2(-2)	0.0328	14%		RESID^2(-2)	0.0933	4%
	RESID^2(-3)	0.0885	0%		RESID^2(-3)	0.1195	1%
	RESID^2(-4)	0.0490	3%		RESID^2(-4)	0.1249	1%
Prob. F	RESID^2(-5)	0.0177	43%	Prob. F	RESID^2(-5)	0.0095	83%
0.00%	RESID^2(-6)	0.0761	0%	0.00%	RESID^2(-6)	0.0380	40%
	RESID^2(-7)	-0.0061	79%		RESID^2(-7)	-0.0398	38%
	RESID^2(-8)	0.0476	3%		RESID^2(-8)	0.0215	63%
	RESID^2(-9)	0.0079	73%		RESID^2(-9)	-0.0195	66%
	RESID^2(-10)	0.0449	4%		RESID^2(-10)	0.2313	0%
P1	C	0.0002	0%	P4	C	0.0002	0%
	RESID^2(-1)	0.1047	2%		RESID^2(-1)	0.0901	5%
	RESID^2(-2)	0.0209	65%		RESID^2(-2)	0.0482	29%
	RESID^2(-3)	0.0805	8%		RESID^2(-3)	0.0669	14%
	RESID^2(-4)	-0.0123	79%		RESID^2(-4)	-0.038	40%
Prob. F	RESID^2(-5)	0.0444	33%	Prob. F	RESID^2(-5)	0.0185	68%
13.16%	RESID^2(-6)	0.0590	20%	1.58%	RESID^2(-6)	0.1196	1%
	RESID^2(-7)	-0.0125	78%		RESID^2(-7)	0.081	8%
	RESID^2(-8)	0.0389	39%		RESID^2(-8)	-0.043	35%
	RESID^2(-9)	0.0073	87%		RESID^2(-9)	0.0025	96%
	RESID^2(-10)	-0.0043	84%		RESID^2(-10)	-0.002	97%
P2	C	0.0002	0%				
	RESID^2(-1)	0.1476	0%				
	RESID^2(-2)	-0.0064	89%				
	RESID^2(-3)	0.0465	31%				
	RESID^2(-4)	0.1078	2%				
Prob. F	RESID^2(-5)	0.0089	83%				
1.67%	RESID^2(-6)	0.0349	40%				
	RESID^2(-7)	-0.0130	73%				
	RESID^2(-8)	0.0018	91%				
	RESID^2(-9)	0.0116	43%				
	RESID^2(-10)	-0.0005	97%				

GRUPOSURA			
Período	Variable	Coef.	Prob.
Total	C	0.0001	0%
	RESID^2(-1)	0.0495	28%
	RESID^2(-2)	0.0094	83%
	RESID^2(-3)	0.1865	0%
	RESID^2(-4)	-0.0484	30%
Prob. F	RESID^2(-5)	0.0034	94%
0.2%	RESID^2(-6)	-0.0216	64%
	RESID^2(-7)	0.0080	86%
	RESID^2(-8)	-0.0543	23%
	RESID^2(-9)	0.1321	0%
	RESID^2(-10)	0.0104	82%

CEMARGOS							
Período	Variable	Coef.	Prob.	Período	Variable	Coef.	Prob.
Total	C	0.0001	0%	P2	C	0.0001	1%
	RESID^2(-1)	0.2904	0%		RESID^2(-1)	0.3980	0%
	RESID^2(-2)	0.2700	0%		RESID^2(-2)	0.0932	5%
	RESID^2(-3)	-0.0598	3%		RESID^2(-3)	-0.0811	9%
	RESID^2(-4)	0.0987	0%		RESID^2(-4)	0.0308	49%
Prob. F	RESID^2(-5)	-0.0877	0%	Prob. F	RESID^2(-5)	0.0688	1%
0.00%	RESID^2(-6)	0.0382	17%	0.00%	RESID^2(-6)	0.0461	6%
	RESID^2(-7)	0.0589	3%		RESID^2(-7)	0.0485	1%
	RESID^2(-8)	0.0302	28%		RESID^2(-8)	0.0419	2%
	RESID^2(-9)	0.0487	7%		RESID^2(-9)	0.0419	2%
	RESID^2(-10)	0.0802	0%		RESID^2(-10)	0.0199	24%
P1	C	0.0001	6%	P3	C	0.0001	0%
	RESID^2(-1)	0.2944	0%		RESID^2(-1)	0.1701	0%
	RESID^2(-2)	0.1821	0%		RESID^2(-2)	0.1482	0%
	RESID^2(-3)	0.0578	22%		RESID^2(-3)	0.0718	12%
	RESID^2(-4)	0.1539	0%		RESID^2(-4)	-0.065	17%
Prob. F	RESID^2(-5)	-0.1168	2%	Prob. F	RESID^2(-5)	0.0595	21%
0.00%	RESID^2(-6)	0.0168	73%	0.00%	RESID^2(-6)	0.0565	23%
	RESID^2(-7)	0.0109	82%		RESID^2(-7)	0.0186	69%
	RESID^2(-8)	-0.0743	12%		RESID^2(-8)	-0.03	52%
	RESID^2(-9)	0.0978	4%		RESID^2(-9)	-0.003	83%
	RESID^2(-10)	0.1464	0%		RESID^2(-10)	-0.002	90%

ISAGEN							
Período	Variable	Coef.	Prob.	Período	Variable	Coef.	Prob.
Total	C	7.1E-05	0%	P2	C	0.0001	0%
	RESID^2(-1)	0.09356	0%		RESID^2(-1)	0.0412	36%
	RESID^2(-2)	0.08074	1%		RESID^2(-2)	0.085	6%
	RESID^2(-3)	0.07733	2%		RESID^2(-3)	0.0738	11%
	RESID^2(-4)	0.02024	53%		RESID^2(-4)	0.0229	62%
Prob. F	RESID^2(-5)	0.04009	21%	Prob. F	RESID^2(-5)	0.0503	28%
0.00%	RESID^2(-6)	0.06597	4%	26.23%	RESID^2(-6)	0.0152	74%
	RESID^2(-7)	0.03977	22%		RESID^2(-7)	-0.023	62%
	RESID^2(-8)	0.02718	40%		RESID^2(-8)	0.0052	91%
	RESID^2(-9)	-0.0318	32%		RESID^2(-9)	-0.034	46%
	RESID^2(-10)	0.0295	36%		RESID^2(-10)	0.0452	33%
P1	C	5.2E-05	0%				
	RESID^2(-1)	0.08465	6%				
	RESID^2(-2)	0.04055	37%				
	RESID^2(-3)	0.04616	31%				
	RESID^2(-4)	0.04284	34%				
Prob. F	RESID^2(-5)	0.01433	75%				
0.24%	RESID^2(-6)	0.07509	10%				
	RESID^2(-7)	0.09986	3%				
	RESID^2(-8)	0.04173	36%				
	RESID^2(-9)	0.01017	82%				
	RESID^2(-10)	0.04989	27%				

BCOLOMBIA							
Período	Variable	Coef.	Prob.	Período	Variable	Coef.	Prob.
Total	C	0.0002	0%	P3	C	0.0002	0%
	RESID^2(-1)	0.1605	0%		RESID^2(-1)	0.1782	0%
	RESID^2(-2)	0.0379	6%		RESID^2(-2)	0.1187	1%
	RESID^2(-3)	0.0443	3%		RESID^2(-3)	-0.0549	23%
	RESID^2(-4)	0.0378	6%		RESID^2(-4)	0.0359	29%
Prob. F	RESID^2(-5)	0.0327	10%	Prob. F	RESID^2(-5)	0.0452	18%
0.00%	RESID^2(-6)	0.0324	11%	0.02%	RESID^2(-6)	-0.0338	23%
	RESID^2(-7)	0.0433	3%		RESID^2(-7)	0.0455	6%
	RESID^2(-8)	0.0251	21%		RESID^2(-8)	-0.046	5%
	RESID^2(-9)	0.0237	24%		RESID^2(-9)	0.0088	65%
	RESID^2(-10)	0.0010	96%		RESID^2(-10)	-0.022	20%

**BCOLOMBIA (Continuación)**

<b>Período</b>	<b>Variable</b>	<b>Coef.</b>	<b>Prob.</b>	<b>Período</b>	<b>Variable</b>	<b>Coef.</b>	<b>Prob.</b>
P1	C	0.0002	0%	P4	C	0.0001	0%
	RESID^2(-1)	0.0609	18%		RESID^2(-1)	0.1777	0%
	RESID^2(-2)	0.0381	40%		RESID^2(-2)	-0.032	48%
	RESID^2(-3)	0.0762	8%		RESID^2(-3)	0.1564	0%
	RESID^2(-4)	0.0156	72%		RESID^2(-4)	0.0916	3%
Prob. F	RESID^2(-5)	0.0021	96%	Prob. F	RESID^2(-5)	0.1435	0%
24.91%	RESID^2(-6)	-0.0259	55%	0.0%	RESID^2(-6)	-0.0076	82%
	RESID^2(-7)	0.0075	86%		RESID^2(-7)	0.0362	25%
	RESID^2(-8)	0.0942	3%		RESID^2(-8)	-0.0081	77%
	RESID^2(-9)	0.0200	66%		RESID^2(-9)	0.0331	14%
	RESID^2(-10)	0.0136	76%		RESID^2(-10)	-0.0175	31%
P2	C	0.0002	0%	P5	C	0.0002	0%
	RESID^2(-1)	0.1869	0%		RESID^2(-1)	0.1975	0%
	RESID^2(-2)	0.0107	81%		RESID^2(-2)	0.0546	24%
	RESID^2(-3)	0.0583	20%		RESID^2(-3)	-0.0334	47%
	RESID^2(-4)	0.0129	78%		RESID^2(-4)	-0.0121	79%
Prob. F	RESID^2(-5)	0.0638	16%	Prob. F	RESID^2(-5)	-0.034	46%
0.15%	RESID^2(-6)	0.0557	22%	0.68%	RESID^2(-6)	0.0123	79%
	RESID^2(-7)	-0.0441	34%		RESID^2(-7)	0.024	60%
	RESID^2(-8)	0.0489	29%		RESID^2(-8)	-0.0168	72%
	RESID^2(-9)	-0.0360	43%		RESID^2(-9)	0.0188	69%
	RESID^2(-10)	0.0010	98%		RESID^2(-10)	-0.0004	99%

## Apéndice F. Calculo de retardo y dimensión de inmersión

<b>IGBC</b>			
<b>PERÍODO</b>	<b>Serie</b>	<b>T</b>	<b>m</b>
Total	Rentabilidad	1	4
	AR(3)ARCH(3)	2	5
P1	Rentabilidad	3	5
	AR(1)GARCH(1,1)	3	1
P2	Rentabilidad	2	5
	AR(9)GARCH(1,1)	3	2
P3	Rentabilidad	2	5
	AR(1)GARCH(1,1)	2	4
P4	Rentabilidad	5	3
	ARMA(3,3)ARCH(3)	4	2
P5	Rentabilidad	2	4
	AR(1)GARCH(1,3)	1	2

<b>ECOPETROL</b>			
<b>PERÍODO</b>	<b>SERIE</b>	<b>T</b>	<b>M</b>
Total	Rentabilidad	5	3
	GARCH(2,1)	5	3
P1	Rentabilidad	4	3
	AR(8)GARCH(3,0)	1	2
P2	Rentabilidad	2	5
	MA(4)GARCH(3,1)	2	2

<b>PREC</b>			
<b>PERÍODO</b>	<b>SERIE</b>	<b>T</b>	<b>M</b>
Total	Rentabilidad	1	2
	MA(1)GARCH(1,1)	1	2

---

**PFBCOLOM**

---

<b>PERÍODO</b>	<b>SERIE</b>	<b>T</b>	<b>M</b>
Total	Rentabilidad	2	1
	MA(1)GARCH(1,1)	2	1
P1	Rentabilidad	2	3
	AR(1)GARCH(1,1)	2	3
P2	Rentabilidad	2	1
	MA(7)ARCH(1)	1	3
P3	Rentabilidad	1	2
	ARMA(8,8)ARCH(2)	1	2
P4	Rentabilidad	2	3
	GARCH(1,1)	2	1

---

---

**GRUPOSURA**

---

<b>PERÍODO</b>	<b>SERIE</b>	<b>T</b>	<b>M</b>
Total	Rentabilidad	2	(9) 4
	ARMA(4,8)GARCH(5,0)	2	2

---

---

**CEMARGOS**

---

<b>PERÍODO</b>	<b>SERIE</b>	<b>T</b>	<b>M</b>
Total	Rentabilidad	5	1
	ARMA(6,10)ARCH2	5	1
P1	Rentabilidad	5	3
	ARMA(10,10)GARCH(1,3)	6	3
P2	Rentabilidad	2	1
	AR(9)GARCH(1,1)	1	5
P3	Rentabilidad	1	1
	AR(2)GARCH(1,1)	1	2

---

<b>ISAGEN</b>			
<b>PERÍODO</b>	<b>SERIE</b>	<b>T</b>	<b>M</b>
Total	Rentabilidad	4	1
	GARCH(1,1)	4	1
P1	Rentabilidad	4	1
	ARMA(7,7)GARCH(1,3)	3	1
P2	Rentabilidad	1	2
	GARCH(0,2)	1	2

<b>BCOLOMBIA</b>			
<b>PERÍODO</b>	<b>SERIE</b>	<b>T</b>	<b>M</b>
Total	Rentabilidad	4	4
	AR(1)GARCH(1,2)	3	3
P1	Rentabilidad	2	2
	MA(1)GARCH(2,5)	2	4
P2	Rentabilidad	2	2
	MA(1)GARCH(1,1)	2	1
P3	Rentabilidad	2	4
	AR(8)GARCH(1,1)	2	2
P4	Rentabilidad	2	2
	AR(8)GARCH(1,1)	1	3
P5	Rentabilidad	3	5
	ARCH(2)	3	5

## Apéndice G. Porcentaje de entropía de espacio temporal

Activo	Período	Serie	STE
<b>IGBC</b>	Total	Rentabilidad	84%
		AR(3)ARCH(3)	84%
	P1	Rentabilidad	68%
		AR(1)GARCH(1,1)	83%
	P2	Rentabilidad	72%
		AR(9)GARCH(1,1)	78%
	P3	Rentabilidad	73%
		AR(1)GARCH(1,1)	75%
	P4	Rentabilidad	77%
		ARMA(3,3)ARCH(3)	78%
P5	Rentabilidad	75%	
	AR(1)GARCH(1,3)	80%	
		<b>PROMEDIO</b>	77%
<b>ECOPETROL</b>	Total	Rentabilidad	80%
		GARCH(2,1)	80%
	P1	Rentabilidad	74%
		AR(8)GARCH(3,0)	78%
	P2	Rentabilidad	72%
		MA(4)GARCH(3,1)	80%
		<b>PROMEDIO</b>	77%
<b>PREC</b>	Total	Rentabilidad	77%
		MA(1)GARCH(1,1)	79%
<b>PFBCOLOM</b>	Total	Rentabilidad	86%
		MA(1)GARCH(1,1)	79%
	P1	Rentabilidad	82%
		AR(1)GARCH(1,1)	82%
	P2	Rentabilidad	77%
		MA(7)ARCH(1)	78%
	P3	Rentabilidad	81%
		ARMA(8,8)ARCH(2)	73%
	P4	Rentabilidad	80%
		GARCH(1,1)	80%
		<b>PROMEDIO</b>	80%
<b>GRUPOSURA</b>	Total	Rentabilidad	74%
		ARMA(4,8)GARCH(5,0)	78%

<b>Activo</b>	<b>Período</b>	<b>Serie</b>	<b>STE</b>
<b>CEMARGOS</b>	Total	Rentabilidad	90%
		ARMA(6,10)ARCH2	86%
	P1	Rentabilidad	73%
		ARMA(10,10)GARCH(1,3)	69%
	P2	Rentabilidad	83%
		AR(9)GARCH(1,1)	70%
	P3	Rentabilidad	82%
AR(2)GARCH(1,1)		81%	
	<b>PROMEDIO</b>	79%	
<b>ISAGEN</b>	Total	Rentabilidad	85%
		GARCH(1,1)	85%
	P1	Rentabilidad	81%
		ARMA(7,7)GARCH(1,3)	83%
	P2	Rentabilidad	78%
		GARCH(0,2)	78%
		<b>PROMEDIO</b>	82%
<b>BCOLOMBIA</b>	Total	Rentabilidad	86%
		AR(1)GARCH(1,2)	87%
	P1	Rentabilidad	75%
		MA(1)GARCH(2,5)	71%
	P2	Rentabilidad	76%
		MA(1)GARCH(1,1)	80%
	P3	Rentabilidad	73%
		AR(8)GARCH(1,1)	77%
	P4	Rentabilidad	78%
		AR(8)GARCH(1,1)	77%
P5	Rentabilidad	69%	
	ARCH(2)	68%	
	<b>PROMEDIO</b>	76%	

## Apéndice H. Cálculo de los exponentes de HURST y LYAPUNOV

<b>IGBC</b>			
<b>Período</b>	<b>Serie</b>	<b>Hurst</b>	<b>Lyapunov</b>
TOTAL	AR(3)ARCH(3)	0.566	0.5
P1	AR(1)GARCH(1,1)	0.661	0.0
P2	AR(9)GARCH(1,1)	0.662	0.8
P3	AR(1)GARCH(1,1)	0.583	0.2
P4	ARMA(3,3)ARCH(3)	0.558	0.0
P5	AR(1)GARCH(1,3)	0.551	0.0
<b>Promedio</b>		<b>0.597</b>	<b>0.3</b>

<b>ECOPETROL</b>			
<b>Período</b>	<b>SERIE</b>	<b>Hurst</b>	<b>Lyapunov</b>
TOTAL	GARCH(2,1)	0.578	0.4
P1	AR(8)GARCH(3,0)	0.549	0.0
P2	MA(4)GARCH(3,1)	0.651	0.1
<b>Promedio</b>		<b>0.593</b>	<b>0.1</b>

<b>PREC</b>			
<b>Período</b>	<b>SERIE</b>	<b>Hurst</b>	<b>Lyapunov</b>
TOTAL	MA(1)GARCH(1,1)	0.573	0.0
<b>Promedio</b>		<b>0.573</b>	<b>0.0</b>

<b>PFBCOLOM</b>			
<b>Período</b>	<b>SERIE</b>	<b>Hurst</b>	<b>Lyapunov</b>
TOTAL	MA(1)GARCH(1,1)	0.573	0.0
P1	AR(1)GARCH(1,1)	0.674	0.0
P2	MA(7)ARCH(1)	0.555	0.1
P3	ARMA(8,8)ARCH(2)	0.629	0.4
P4	GARCH(1,1)	0.545	0.0
<b>Promedio</b>		<b>0.597</b>	<b>0.3</b>

<b>GRUPOSURA</b>			
<b>Período</b>	<b>SERIE</b>	<b>Hurst</b>	<b>Lyapunov</b>
TOTAL	ARMA(4,8)GARCH(5,0)	0.710	0.0
<b>Promedio</b>		0.710	0.0

<b>CEMARGOS</b>			
<b>Período</b>	<b>SERIE</b>	<b>Hurst</b>	<b>Lyapunov</b>
TOTAL	ARMA(6,10)ARCH2	0.504	0.1
P1	ARMA(10,10)GARCH(1,3)	0.567	0.0
P2	AR(9)GARCH(1,1)	0.608	0.2
P3	AR(2)GARCH(1,1)	0.638	0.0
<b>Promedio</b>		0.597	0.3

<b>ISAGEN</b>			
<b>Período</b>	<b>SERIE</b>	<b>Hurst</b>	<b>Lyapunov</b>
TOTAL	GARCH(1,1)	0.629	0.0
P1	ARMA(7,7)GARCH(1,3)	0.687	0.0
P2	GARCH(0,2)	0.720	0.2
<b>Promedio</b>		0.679	0.1

<b>BCOLOMBIA</b>			
<b>Período</b>	<b>SERIE</b>	<b>Hurst</b>	<b>Lyapunov</b>
TOTAL	AR(1)GARCH(1,2)	0.478	0.0
P1	MA(1)GARCH(2,5)	0.598	0.1
P2	MA(1)GARCH(1,1)	0.623	0.0
P3	AR(8)GARCH(1,1)	0.610	0.4
P4	AR(8)GARCH(1,1)	0.629	0.4
P5	ARCH(2)	0.530	0.1
<b>Promedio</b>		0.597	0.3

**Apéndice I. Test BDS serie de rentabilidades y residuos**

IGBC									
RENTABILIDADES					RESIDUOS ARIMA-GARCH				
Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.	Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.
Total	2	0.022	13.0	0%	Total	2	0.019	11.2	0.0%
	3	0.043	15.7	0%		3	0.039	14.4	0.0%
	4	0.056	17.5	0%		4	0.052	16.4	0.0%
	5	0.062	18.4	0%		5	0.059	17.7	0.0%
	6	0.063	19.4	0%		6	0.060	18.9	0.0%
	7	0.061	20.6	0%		7	0.059	20.1	0.0%
	8	0.057	21.8	0%		8	0.055	21.2	0.0%
	9	0.052	23.3	0%		9	0.050	22.7	0.0%
	10	0.047	25.0	0%		10	0.046	24.5	0.0%
	P1	2	0.020	4.9		0%	P1	2	0.019
3		0.041	6.2	0%	3	0.037		5.9	0.0%
4		0.052	6.7	0%	4	0.049		6.6	0.0%
5		0.059	7.1	0%	5	0.056		7.3	0.0%
6		0.062	7.8	0%	6	0.060		8.1	0.0%
7		0.061	8.3	0%	7	0.059		8.7	0.0%
8		0.056	8.7	0%	8	0.056		9.3	0.0%
9		0.052	9.3	0%	9	0.051		10.0	0.0%
10		0.046	9.8	0%	10	0.046		10.6	0.0%
P2		2	0.022	6.6	0%	P2		2	0.018
	3	0.041	7.6	0%	3		0.035	6.1	0.0%
	4	0.052	8.2	0%	4		0.045	6.6	0.0%
	5	0.058	8.8	0%	5		0.052	7.4	0.0%
	6	0.060	9.3	0%	6		0.055	8.1	0.0%
	7	0.058	9.8	0%	7		0.054	8.7	0.0%
	8	0.055	10.5	0%	8		0.051	9.2	0.0%
	9	0.051	11.4	0%	9		0.047	9.8	0.0%
	10	0.047	12.5	0%	10		0.043	10.8	0.0%

**IGBC**

<b>RENTABILIDADES</b>					<b>RESIDUOS ARIMA-GARCH</b>				
<b>Período</b>	<b>Dim.</b>	<b>BDS</b>	<b>Est. Z</b>	<b>Prob.</b>	<b>Período</b>	<b>Dim.</b>	<b>BDS</b>	<b>Est. Z</b>	<b>Prob.</b>
P3	2	0.027	7.1	0%	P3	2	0.024	6.5	0.0%
	3	0.050	8.3	0%		3	0.048	8.1	0.0%
	4	0.064	8.9	0%		4	0.062	8.8	0.0%
	5	0.068	9.1	0%		5	0.067	9.1	0.0%
	6	0.068	9.4	0%		6	0.068	9.4	0.0%
	7	0.064	9.6	0%		7	0.064	9.7	0.0%
	8	0.058	9.9	0%		8	0.058	9.9	0.0%
	9	0.053	10.5	0%		9	0.053	10.6	0.0%
	10	0.047	11.0	0%		10	0.047	11.1	0.0%
	P4	2	0.023	5.9		0%	P4	2	0.022
3		0.043	7.0	0%	3	0.041		6.8	0.0%
4		0.057	7.6	0%	4	0.055		7.7	0.0%
5		0.059	7.6	0%	5	0.059		7.9	0.0%
6		0.058	7.9	0%	6	0.058		8.2	0.0%
7		0.055	8.1	0%	7	0.055		8.5	0.0%
8		0.049	8.1	0%	8	0.050		8.7	0.0%
9		0.043	8.3	0%	9	0.045		9.2	0.0%
10		0.037	8.6	0%	10	0.041		9.8	0.0%
P5		2	0.009	2.5	1%	P5		2	0.006
	3	0.021	3.5	0%	3		0.017	3.0	0.3%
	4	0.032	4.5	0%	4		0.029	4.1	0.0%
	5	0.035	4.7	0%	5		0.032	4.4	0.0%
	6	0.035	4.9	0%	6		0.033	4.7	0.0%
	7	0.036	5.5	0%	7		0.034	5.3	0.0%
	8	0.034	5.8	0%	8		0.033	5.7	0.0%
	9	0.031	6.1	0%	9		0.030	6.1	0.0%
	10	0.027	6.5	0%	10		0.027	6.5	0.0%

**ECOPETROL**

RENTABILIDADES					RESIDUOS ARIMA-GARCH				
Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.	Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.
Total	2	0.017	6.6	0%	Total	2	0.019	11.2	0.0%
	3	0.032	7.7	0%		3	0.039	14.4	0.0%
	4	0.043	8.7	0%		4	0.052	16.4	0.0%
	5	0.047	9.2	0%		5	0.059	17.7	0.0%
	6	0.048	9.6	0%		6	0.060	18.9	0.0%
	7	0.044	9.7	0%		7	0.059	20.1	0.0%
	8	0.040	9.9	0%		8	0.055	21.2	0.0%
	9	0.035	10.2	0%		9	0.050	22.7	0.0%
	10	0.032	10.9	0%		10	0.046	24.5	0.0%
	P1	2	0.020	5.4		0%	P1	2	0.019
3		0.041	6.8	0%	3	0.038		6.6	0.0%
4		0.054	7.6	0%	4	0.050		7.3	0.0%
5		0.059	7.9	0%	5	0.055		7.6	0.0%
6		0.061	8.5	0%	6	0.057		8.2	0.0%
7		0.058	8.9	0%	7	0.054		8.5	0.0%
8		0.053	9.1	0%	8	0.049		8.7	0.0%
9		0.047	9.5	0%	9	0.044		9.1	0.0%
10		0.042	10.0	0%	10	0.039		9.6	0.0%
P2		2	0.015	4.1	0%	P2		2	0.014
	3	0.025	4.3	0%	3		0.024	4.1	0.0%
	4	0.033	4.8	0%	4		0.031	4.6	0.0%
	5	0.036	5.1	0%	5		0.035	4.9	0.0%
	6	0.034	5.0	0%	6		0.033	4.8	0.0%
	7	0.028	4.4	0%	7		0.027	4.3	0.0%
	8	0.023	4.1	0%	8		0.023	4.1	0.0%
	9	0.018	3.7	0%	9		0.018	3.7	0.0%
	10	0.015	3.8	0%	10		0.015	3.8	0.0%

PREC									
RENTABILIDADES					RESIDUOS ARIMA-GARCH				
Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.	Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.
Total	2	0.013	3.3	0%	Total	2	0.013	3.3	0.1%
	3	0.031	4.9	0%		3	0.031	4.9	0.0%
	4	0.040	5.4	0%		4	0.041	5.4	0.0%
	5	0.043	5.6	0%		5	0.043	5.6	0.0%
	6	0.047	6.3	0%		6	0.047	6.2	0.0%
	7	0.048	7.0	0%		7	0.047	6.9	0.0%
	8	0.047	7.8	0%		8	0.046	7.6	0.0%
	9	0.043	8.3	0%		9	0.042	8.1	0.0%
	10	0.040	9.2	0%		10	0.039	8.9	0.0%

PFBCOLOM									
RENTABILIDADES					RESIDUOS ARIMA-GARCH				
Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.	Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.
Total	2	0.016	9.0	0%	Total	2	0.015	8.3	0.0%
	3	0.029	10.0	0%		3	0.027	9.3	0.0%
	4	0.037	10.9	0%		4	0.035	10.3	0.0%
	5	0.041	11.4	0%		5	0.039	10.9	0.0%
	6	0.041	12.1	0%		6	0.039	11.5	0.0%
	7	0.040	12.7	0%		7	0.038	12.2	0.0%
	8	0.037	13.4	0%		8	0.035	12.8	0.0%
	9	0.033	14.1	0%		9	0.032	13.5	0.0%
	10	0.030	14.9	0%		10	0.028	14.3	0.0%
	P1	2	0.016	4.3		0%	P1	2	0.014
3		0.027	4.7	0%	3	0.024		4.1	0.0%
4		0.035	5.0	0%	4	0.032		4.6	0.0%
5		0.038	5.2	0%	5	0.035		4.9	0.0%
6		0.041	5.8	0%	6	0.038		5.4	0.0%
7		0.041	6.3	0%	7	0.038		6.0	0.0%
8		0.038	6.6	0%	8	0.035		6.2	0.0%
9		0.035	7.1	0%	9	0.032		6.7	0.0%
10		0.033	7.8	0%	10	0.030		7.4	0.0%

PFBCOLOM									
RENTABILIDADES					RESIDUOS ARIMA-GARCH				
Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.	Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.
P2	2	0.018	4.7	0%	P2	2	0.018	4.7	0.0%
	3	0.028	4.6	0%		3	0.028	4.6	0.0%
	4	0.034	4.7	0%		4	0.033	4.6	0.0%
	5	0.036	4.7	0%		5	0.034	4.6	0.0%
	6	0.035	4.8	0%		6	0.033	4.6	0.0%
	7	0.034	5.0	0%		7	0.031	4.6	0.0%
	8	0.030	5.1	0%		8	0.027	4.7	0.0%
	9	0.026	5.1	0%		9	0.023	4.6	0.0%
	10	0.022	5.1	0%		10	0.019	4.6	0.0%
	P3	2	0.022	6.4		0%	P3	2	0.018
3		0.042	7.6	0%	3	0.037		7.0	0.0%
4		0.057	8.6	0%	4	0.049		7.8	0.0%
5		0.063	9.2	0%	5	0.055		8.5	0.0%
6		0.064	9.6	0%	6	0.055		8.8	0.0%
7		0.062	10.2	0%	7	0.054		9.5	0.0%
8		0.057	10.6	0%	8	0.049		9.7	0.0%
9		0.053	11.5	0%	9	0.044		10.1	0.0%
10		0.048	12.4	0%	10	0.039		10.7	0.0%
P4		2	0.004	1.2	22%	P4		2	0.004
	3	0.011	1.9	5%	3		0.011	1.9	5.2%
	4	0.018	2.7	1%	4		0.018	2.7	0.7%
	5	0.018	2.6	1%	5		0.018	2.6	0.9%
	6	0.019	2.9	0%	6		0.019	2.9	0.4%
	7	0.018	2.9	0%	7		0.018	2.9	0.4%
	8	0.018	3.3	0%	8		0.018	3.3	0.1%
	9	0.016	3.5	0%	9		0.016	3.5	0.0%
	10	0.015	3.9	0%	10		0.015	3.9	0.0%

### GRUPOSURA

RENTABILIDADES					RESIDUOS ARIMA-GARCH				
Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.	Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.
Total	2	0.003	0.8	44%	Total	2	0.002	0.6	53.1%
	3	0.007	1.3	20%		3	0.006	1.0	31.4%
	4	0.013	1.8	7%		4	0.011	1.6	10.6%
	5	0.015	2.0	5%		5	0.014	1.9	6.0%
	6	0.014	1.9	5%		6	0.014	1.9	5.6%
	7	0.012	1.9	6%		7	0.013	2.0	4.7%
	8	0.008	1.5	14%		8	0.010	1.7	8.2%
	9	0.007	1.4	18%		9	0.008	1.6	11.4%
	10	0.005	1.2	23%		10	0.006	1.5	13.8%

### CEMARGOS

RENTABILIDADES					RESIDUOS ARIMA-GARCH				
Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.	Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.
Total	2	0.032	12.8	0%	Total	2	0.032	12.8	0.0%
	3	0.058	14.7	0%		3	0.058	14.7	0.0%
	4	0.075	15.9	0%		4	0.075	15.9	0.0%
	5	0.081	16.5	0%		5	0.081	16.5	0.0%
	6	0.082	17.5	0%		6	0.082	17.5	0.0%
	7	0.080	18.5	0%		7	0.080	18.5	0.0%
	8	0.074	19.3	0%		8	0.074	19.3	0.0%
	9	0.067	20.5	0%		9	0.067	20.5	0.0%
	10	0.060	21.7	0%		10	0.060	21.7	0.0%
	P1	2	0.056	11.3		0%	P1	2	0.055
3		0.092	11.6	0%	3	0.090		11.6	0.0%
4		0.111	11.7	0%	4	0.107		11.5	0.0%
5		0.116	11.7	0%	5	0.112		11.6	0.0%
6		0.114	11.9	0%	6	0.111		11.8	0.0%
7		0.107	12.1	0%	7	0.105		12.1	0.0%
8		0.098	12.6	0%	8	0.098		12.7	0.0%
9		0.089	13.3	0%	9	0.090		13.5	0.0%
10		0.080	14.1	0%	10	0.081		14.3	0.0%

**CEMARGOS**

RENTABILIDADES					RESIDUOS ARIMA-GARCH				
Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.	Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.
P2	2	0.022	5.7	0%	P2	2	0.025	6.4	0.0%
	3	0.046	7.4	0%		3	0.050	8.2	0.0%
	4	0.063	8.4	0%		4	0.068	9.3	0.0%
	5	0.073	9.4	0%		5	0.079	10.3	0.0%
	6	0.078	10.3	0%		6	0.083	11.3	0.0%
	7	0.078	11.2	0%		7	0.083	12.2	0.0%
	8	0.074	12.0	0%		8	0.079	13.1	0.0%
	9	0.068	12.9	0%		9	0.072	13.9	0.0%
	10	0.062	13.9	0%		10	0.066	15.0	0.0%
	P3	2	0.022	6.4		0%	P3	2	0.018
3		0.042	7.6	0%	3	0.037		7.0	0.0%
4		0.057	8.6	0%	4	0.049		7.8	0.0%
5		0.063	9.2	0%	5	0.055		8.5	0.0%
6		0.064	9.6	0%	6	0.055		8.8	0.0%
7		0.062	10.2	0%	7	0.054		9.5	0.0%
8		0.057	10.6	0%	8	0.049		9.7	0.0%
9		0.053	11.5	0%	9	0.044		10.1	0.0%
10		0.048	12.4	0%	10	0.039		10.7	0.0%
P4		2	0.013	3.6	0%	P4		2	0.015
	3	0.028	4.9	0%	3		0.030	5.3	0.0%
	4	0.039	5.7	0%	4		0.041	6.1	0.0%
	5	0.041	5.7	0%	5		0.042	6.0	0.0%
	6	0.043	6.3	0%	6		0.045	6.6	0.0%
	7	0.043	6.8	0%	7		0.045	7.2	0.0%
	8	0.039	7.0	0%	8		0.040	7.4	0.0%
	9	0.035	7.3	0%	9		0.036	7.5	0.0%
	10	0.030	7.4	0%	10		0.031	7.7	0.0%

ISAGEN									
RENTABILIDADES					RESIDUOS ARIMA-GARCH				
Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.	Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.
Total	2	0.017	6.0	0%	Total	2	0.017	6.0	0.0%
	3	0.032	7.1	0%		3	0.032	7.1	0.0%
	4	0.043	8.1	0%		4	0.043	8.1	0.0%
	5	0.046	8.3	0%		5	0.046	8.3	0.0%
	6	0.046	8.7	0%		6	0.046	8.7	0.0%
	7	0.043	8.9	0%		7	0.043	8.9	0.0%
	8	0.040	9.3	0%		8	0.040	9.3	0.0%
	9	0.037	10.0	0%		9	0.037	10.0	0.0%
	10	0.033	10.7	0%		10	0.033	10.7	0.0%
	P1	2	0.023	5.6		0%	P1	2	0.022
3		0.040	6.1	0%	3	0.039		6.0	0.0%
4		0.050	6.4	0%	4	0.049		6.3	0.0%
5		0.053	6.5	0%	5	0.052		6.5	0.0%
6		0.050	6.3	0%	6	0.049		6.3	0.0%
7		0.046	6.3	0%	7	0.046		6.4	0.0%
8		0.042	6.5	0%	8	0.043		6.7	0.0%
9		0.038	6.9	0%	9	0.040		7.2	0.0%
10		0.034	7.4	0%	10	0.036		7.7	0.0%
P2		2	0.009	2.4	2%	P2		2	0.009
	3	0.019	3.2	0%	3		0.019	3.2	0.1%
	4	0.031	4.3	0%	4		0.031	4.3	0.0%
	5	0.033	4.4	0%	5		0.033	4.4	0.0%
	6	0.034	4.8	0%	6		0.034	4.8	0.0%
	7	0.032	4.9	0%	7		0.032	4.9	0.0%
	8	0.030	5.2	0%	8		0.030	5.2	0.0%
	9	0.027	5.5	0%	9		0.027	5.5	0.0%
	10	0.024	5.8	0%	10		0.024	5.8	0.0%

**BCOLOMBIA**

RENTABILIDADES					RESIDUOS ARIMA-GARCH				
Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.	Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.
Total	2	0.019	10.8	0%	Total	2	0.0179	10.2	0.0%
	3	0.033	11.9	0%		3	0.0319	11.5	0.0%
	4	0.042	12.7	0%		4	0.0404	12.2	0.0%
	5	0.045	13.0	0%		5	0.0431	12.6	0.0%
	6	0.044	13.3	0%		6	0.0427	12.9	0.0%
	7	0.042	13.8	0%		7	0.0403	13.3	0.0%
	8	0.038	14.2	0%		8	0.0367	13.8	0.0%
	9	0.034	14.7	0%		9	0.0326	14.3	0.0%
	10	0.030	15.4	0%		10	0.0286	14.9	0.0%
	P1	2	0.007	1.8		8%	P1	2	0.007
3		0.016	2.5	1%	3	0.016		2.5	1.3%
4		0.021	2.8	1%	4	0.021		2.8	0.5%
5		0.024	3.0	0%	5	0.024		3.0	0.3%
6		0.026	3.4	0%	6	0.026		3.4	0.1%
7		0.023	3.3	0%	7	0.023		3.3	0.1%
8		0.023	3.7	0%	8	0.023		3.7	0.0%
9		0.024	4.4	0%	9	0.024		4.4	0.0%
10		0.022	4.8	0%	10	0.022		4.8	0.0%
P2		2	0.021	5.8	0%	P2		2	0.007
	3	0.037	6.4	0%	3		0.016	2.5	1.3%
	4	0.047	6.7	0%	4		0.021	2.8	0.5%
	5	0.050	6.9	0%	5		0.024	3.0	0.3%
	6	0.049	7.0	0%	6		0.026	3.4	0.1%
	7	0.047	7.3	0%	7		0.023	3.3	0.1%
	8	0.042	7.3	0%	8		0.023	3.7	0.0%
	9	0.036	7.3	0%	9		0.024	4.4	0.0%
	10	0.031	7.5	0%	10		0.022	4.8	0.0%

**BCOLOMBIA**

RENTABILIDADES					RESIDUOS ARIMA-GARCH				
Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.	Período	Dim.	BDS	Est. Z	Prob.
P3	2	0.021	4.9	0%	P3	2	0.020	4.7	0.0%
	3	0.035	5.2	0%		3	0.033	4.9	0.0%
	4	0.042	5.2	0%		4	0.040	4.9	0.0%
	5	0.047	5.5	0%		5	0.044	5.3	0.0%
	6	0.049	5.9	0%		6	0.047	5.8	0.0%
	7	0.047	6.2	0%		7	0.045	6.1	0.0%
	8	0.042	6.4	0%		8	0.042	6.4	0.0%
	9	0.037	6.5	0%		9	0.037	6.6	0.0%
	10	0.032	6.5	0%		10	0.032	6.7	0.0%
	P4	2	0.017	4.8		0%	P4	2	0.017
3		0.030	5.2	0%	3	0.029		5.2	0.0%
4		0.039	5.6	0%	4	0.039		5.7	0.0%
5		0.043	5.9	0%	5	0.043		6.1	0.0%
6		0.041	5.8	0%	6	0.041		6.0	0.0%
7		0.040	6.3	0%	7	0.039		6.4	0.0%
8		0.037	6.6	0%	8	0.036		6.7	0.0%
9		0.033	6.7	0%	9	0.032		6.8	0.0%
10		0.028	6.9	0%	10	0.027		6.9	0.0%
P5		2	0.020	5.2	0%	P5		2	0.020
	3	0.037	6.0	0%	3		0.037	6.0	0.0%
	4	0.043	5.9	0%	4		0.043	5.9	0.0%
	5	0.041	5.4	0%	5		0.041	5.4	0.0%
	6	0.038	5.2	0%	6		0.038	5.2	0.0%
	7	0.033	4.9	0%	7		0.033	4.9	0.0%
	8	0.029	4.9	0%	8		0.029	4.9	0.0%
	9	0.023	4.6	0%	9		0.023	4.6	0.0%
	10	0.020	4.5	0%	10		0.020	4.5	0.0%

## Apéndice J. Apéndice gráfico

### 1. CORRELOGRAMAS DE FAC Y FACP.

#### 1.1. IGBC

Figura J1. Correlogramas IGBC

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				1	0.195	0.195	99.907	0.000
				2	0.022	-0.017	101.15	0.000
				3	-0.046	-0.049	106.63	0.000
				4	-0.032	-0.014	109.34	0.000
				5	0.005	0.015	109.41	0.000
				6	0.004	-0.002	109.46	0.000
				7	0.010	0.007	109.71	0.000
				8	0.015	0.013	110.33	0.000
				9	0.020	0.016	111.41	0.000
				10	0.015	0.009	112.03	0.000

Fuente: Elaboración Propia

Figura J2. Correlogramas P1

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				1	0.323	0.323	54.967	0.000
				2	0.134	0.033	64.449	0.000
				3	-0.016	-0.076	64.583	0.000
				4	-0.076	-0.061	67.667	0.000
				5	-0.070	-0.020	70.257	0.000
				6	0.009	0.054	70.301	0.000
				7	0.007	-0.011	70.325	0.000
				8	0.027	0.013	70.716	0.000
				9	0.068	0.059	73.196	0.000
				10	0.053	0.017	74.718	0.000

Fuente: Elaboración Propia

Figura J3. Correlogramas P2

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.285	0.285	42.776	0.000	
		2	0.053	-0.030	44.284	0.000	
		3	-0.034	-0.045	44.906	0.000	
		4	-0.018	0.006	45.079	0.000	
		5	0.019	0.026	45.261	0.000	
		6	0.054	0.043	46.806	0.000	
		7	0.069	0.044	49.353	0.000	
		8	0.078	0.051	52.613	0.000	
		9	0.106	0.079	58.593	0.000	
		10	0.097	0.055	63.685	0.000	

Fuente: Elaboración Propia

Figura J4. Correlogramas P3

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.146	0.146	11.293	0.001	
		2	0.002	-0.020	11.294	0.004	
		3	-0.054	-0.053	12.867	0.005	
		4	0.002	0.019	12.870	0.012	
		5	0.023	0.020	13.162	0.022	
		6	-0.018	-0.028	13.329	0.038	
		7	-0.065	-0.058	15.556	0.029	
		8	-0.074	-0.055	18.479	0.018	
		9	-0.012	0.004	18.556	0.029	
		10	-0.013	-0.019	18.644	0.045	

Fuente: Elaboración Propia

Figura J5. Correlogramas P4

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				1	0.142	0.142	10.707	0.001
				2	-0.086	-0.108	14.590	0.001
				3	-0.105	-0.078	20.380	0.000
				4	-0.050	-0.033	21.698	0.000
				5	0.034	0.030	22.309	0.000
				6	-0.042	-0.069	23.251	0.001
				7	0.094	0.114	27.957	0.000
				8	0.086	0.053	31.939	0.000
				9	-0.053	-0.067	33.445	0.000
				10	-0.066	-0.026	35.795	0.000

Fuente: Elaboración Propia

Figura J6. Correlogramas P5

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				1	0.105	0.105	5.8367	0.016
				2	0.027	0.016	6.2086	0.045
				3	-0.033	-0.037	6.7695	0.080
				4	-0.084	-0.078	10.480	0.033
				5	-0.047	-0.029	11.643	0.040
				6	-0.011	-0.001	11.712	0.069
				7	-0.061	-0.064	13.668	0.057
				8	-0.018	-0.014	13.835	0.086
				9	0.002	0.002	13.837	0.128
				10	-0.009	-0.015	13.879	0.179

Fuente: Elaboración Propia

## 1.2. ECOPETROL

Figura J7. Correlogramas ECOPETROL

Sample: 1 1020 Included observations: 1020						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.061	0.061	3.7808	0.052
		2	-0.043	-0.046	5.6399	0.060
		3	-0.056	-0.051	8.8870	0.031
		4	-0.058	-0.054	12.363	0.015
		5	-0.023	-0.021	12.900	0.024
		6	-0.008	-0.013	12.969	0.044
		7	0.012	0.006	13.126	0.069
		8	0.051	0.044	15.792	0.045
		9	0.001	-0.007	15.793	0.071
		10	-0.030	-0.027	16.747	0.080

Fuente: Elaboración Propia

Figura J8. Correlogramas P1

Sample: 1 510 Included observations: 510						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.057	0.057	1.6679	0.197
		2	-0.072	-0.075	4.3307	0.115
		3	-0.127	-0.119	12.633	0.006
		4	-0.007	0.001	12.660	0.013
		5	0.009	-0.008	12.702	0.026
		6	-0.042	-0.059	13.625	0.034
		7	0.057	0.063	15.303	0.032
		8	0.093	0.082	19.756	0.011
		9	-0.007	-0.022	19.786	0.019
		10	-0.033	-0.006	20.369	0.026

Fuente: Elaboración Propia

Figura J9. Correlogramas P2

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				1	0.063	0.063	2.0315	0.154
				2	-0.017	-0.021	2.1747	0.337
				3	0.009	0.012	2.2175	0.529
				4	-0.106	-0.108	8.0466	0.090
				5	-0.053	-0.040	9.5116	0.090
				6	0.022	0.024	9.7685	0.135
				7	-0.027	-0.030	10.159	0.180
				8	0.010	0.005	10.210	0.251
				9	0.007	-0.006	10.234	0.332
				10	-0.030	-0.027	10.702	0.381

Fuente: Elaboración Propia

### 1.3. PREC

Figura J10. Correlogramas PREC

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				1	0.105	0.105	5.6038	0.018
				2	0.054	0.044	7.1168	0.028
				3	-0.011	-0.021	7.1791	0.066
				4	-0.013	-0.012	7.2601	0.123
				5	0.009	0.013	7.2998	0.199
				6	-0.030	-0.031	7.7553	0.257
				7	-0.057	-0.054	9.4644	0.221
				8	-0.009	0.005	9.5076	0.301
				9	-0.044	-0.039	10.507	0.311
				10	-0.036	-0.031	11.201	0.342

Fuente: Elaboración Propia

## 1.4. PFBCOLOM

Figura J11. Correlogramas PFBCOLOM

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				1	0.060	0.060	7.4309	0.006
				2	0.057	0.053	14.054	0.001
				3	0.014	0.008	14.458	0.002
				4	-0.001	-0.006	14.461	0.006
				5	0.026	0.025	15.838	0.007
				6	-0.013	-0.016	16.172	0.013
				7	0.020	0.019	16.961	0.018
				8	-0.001	-0.002	16.961	0.031
				9	-0.005	-0.006	17.008	0.049
				10	0.000	-0.000	17.008	0.074

Fuente:Elaboración Propia

Figura J12. Correlogramas P1

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				1	0.175	0.175	15.783	0.000
				2	0.077	0.047	18.803	0.000
				3	0.012	-0.009	18.879	0.000
				4	0.022	0.019	19.132	0.001
				5	0.019	0.012	19.312	0.002
				6	0.017	0.010	19.467	0.003
				7	0.015	0.009	19.577	0.007
				8	-0.021	-0.027	19.800	0.011
				9	0.018	0.025	19.977	0.018
				10	-0.024	-0.030	20.283	0.027

Fuente:Elaboración Propia

Figura J13. Correlogramas P2

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				1	-0.056	-0.056	1.5838	0.208
				2	0.022	0.019	1.8394	0.399
				3	0.038	0.040	2.5760	0.462
				4	0.000	0.004	2.5760	0.631
				5	0.047	0.046	3.7056	0.593
				6	-0.063	-0.060	5.7616	0.450
				7	-0.091	-0.101	10.081	0.184
				8	-0.053	-0.066	11.548	0.173
				9	-0.051	-0.050	12.885	0.168
				10	-0.008	-0.005	12.916	0.228

Fuente:Elaboración Propia

Figura J14. Correlogramas P3

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				1	0.095	0.095	4.6010	0.032
				2	0.097	0.088	9.3922	0.009
				3	0.010	-0.006	9.4486	0.024
				4	0.013	0.004	9.5353	0.049
				5	0.037	0.036	10.246	0.069
				6	-0.023	-0.031	10.522	0.104
				7	0.108	0.108	16.567	0.020
				8	0.100	0.088	21.725	0.005
				9	0.016	-0.020	21.866	0.009
				10	-0.010	-0.028	21.916	0.016

Fuente: Elaboración Propia

Figura J15. Correlogramas P4

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				1	-0.017	-0.017	0.1429	0.705
				2	0.003	0.003	0.1476	0.929
				3	-0.017	-0.017	0.3018	0.960
				4	-0.070	-0.071	2.8400	0.585
				5	-0.028	-0.030	3.2328	0.664
				6	0.013	0.012	3.3199	0.768
				7	0.042	0.040	4.2381	0.752
				8	-0.054	-0.059	5.7635	0.674
				9	-0.015	-0.021	5.8787	0.752
				10	0.039	0.042	6.6744	0.756

Fuente:Elaboración Propia

## 1.5. GRUPOSURA

Figura J16. Correlogramas GRUPOSURA

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				1	-0.023	-0.023	0.2623	0.609
				2	-0.003	-0.004	0.2669	0.875
				3	0.035	0.035	0.8981	0.826
				4	-0.120	-0.119	8.3720	0.079
				5	-0.044	-0.049	9.3709	0.095
				6	0.083	0.080	12.910	0.044
				7	-0.016	-0.005	13.042	0.071
				8	-0.073	-0.087	15.816	0.045
				9	-0.031	-0.052	16.305	0.061
				10	0.053	0.074	17.787	0.059

Fuente:Elaboración Propia

## 1.6. CEMARGOS

Figura J17. Correlogramas CEMARGOS

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
Sample: 1 1530 Included observations: 1530								
				1	-0.036	-0.036	1.9950	0.158
				2	-0.012	-0.013	2.2145	0.330
				3	0.016	0.015	2.6061	0.456
				4	-0.027	-0.026	3.6890	0.450
				5	-0.002	-0.003	3.6950	0.594
				6	-0.097	-0.099	18.315	0.005
				7	-0.004	-0.010	18.339	0.011
				8	0.040	0.036	20.776	0.008
				9	0.045	0.052	23.950	0.004
				10	-0.069	-0.071	31.320	0.001

Fuente:Elaboración Propia

Figura J18. Correlogramas P1

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
Sample: 1 510 Included observations: 510								
				1	-0.083	-0.083	3.5327	0.060
				2	0.008	0.001	3.5627	0.168
				3	0.040	0.041	4.4044	0.221
				4	-0.063	-0.056	6.4235	0.170
				5	0.023	0.013	6.6938	0.244
				6	-0.123	-0.123	14.580	0.024
				7	-0.022	-0.038	14.829	0.038
				8	0.040	0.033	15.677	0.047
				9	-0.006	0.012	15.697	0.073
				10	-0.152	-0.169	27.837	0.002

Fuente:Elaboración Propia

Figura J19. Correlogramas P2

Sample: 1 510 Included observations: 510		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
Autocorrelation	Partial Correlation	1	0.033	0.033	0.5724	0.449
		2	0.002	0.001	0.5751	0.750
		3	0.004	0.004	0.5845	0.900
		4	-0.023	-0.023	0.8464	0.932
		5	-0.036	-0.035	1.5157	0.911
		6	-0.072	-0.070	4.1952	0.650
		7	0.040	0.046	5.0451	0.654
		8	0.054	0.052	6.5714	0.584
		9	0.101	0.098	11.901	0.219
		10	0.036	0.025	12.560	0.249

Fuente: Elaboración Propia

Figura J20. Correlogramas P3

Sample: 1 510 Included observations: 510		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
Autocorrelation	Partial Correlation	1	-0.039	-0.039	0.7775	0.378
		2	-0.099	-0.101	5.8157	0.055
		3	-0.039	-0.047	6.5791	0.087
		4	0.058	0.044	8.2974	0.081
		5	-0.006	-0.010	8.3169	0.140
		6	-0.076	-0.069	11.279	0.080
		7	-0.050	-0.055	12.562	0.084
		8	0.005	-0.017	12.574	0.127
		9	0.080	0.065	15.891	0.069
		10	-0.027	-0.020	16.278	0.092

Fuente:Elaboración Propia

## 1.7. ISAGEN

Figura J21. Correlogramas ISAGEN

Sample: 1 1020 Included observations: 1020						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.044	0.044	2.0013	0.157
		2	0.013	0.011	2.1775	0.337
		3	0.048	0.047	4.5514	0.208
		4	-0.001	-0.005	4.5523	0.336
		5	0.004	0.003	4.5654	0.471
		6	0.061	0.059	8.3933	0.211
		7	0.026	0.022	9.1106	0.245
		8	0.034	0.030	10.286	0.246
		9	-0.004	-0.012	10.300	0.327
		10	0.001	-0.001	10.300	0.415

Fuente:Elaboración Propia

Figura J22. Correlogramas P1

Sample: 1 510 Included observations: 510						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.113	0.113	6.5918	0.010
		2	0.042	0.029	7.4780	0.024
		3	0.009	0.002	7.5231	0.057
		4	0.036	0.034	8.2079	0.084
		5	0.039	0.031	8.9907	0.109
		6	0.114	0.106	15.773	0.015
		7	0.129	0.106	24.394	0.001
		8	0.082	0.052	27.872	0.000
		9	-0.007	-0.030	27.899	0.001
		10	-0.048	-0.058	29.113	0.001

Fuente:Elaboración Propia

Figura J23. Correlogramas P2

Sample: 1 510 Included observations: 510						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.012	-0.012	0.0733	0.787
		2	-0.011	-0.011	0.1340	0.935
		3	0.079	0.079	3.3809	0.337
		4	-0.032	-0.031	3.9111	0.418
		5	-0.029	-0.028	4.3424	0.501
		6	0.021	0.013	4.5621	0.601
		7	-0.050	-0.046	5.8855	0.553
		8	-0.010	-0.007	5.9375	0.654
		9	-0.001	-0.006	5.9378	0.746
		10	0.040	0.048	6.7583	0.748

Fuente:Elaboración Propia

## 1.8. BCOLOMBIA

Figura J24. Correlogramas BCOLOMBIA

Sample: 1 2550 Included observations: 2550						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.071	0.071	12.853	0.000
		2	0.035	0.030	15.908	0.000
		3	-0.027	-0.031	17.732	0.000
		4	-0.001	0.002	17.738	0.001
		5	0.007	0.009	17.863	0.003
		6	0.018	0.016	18.672	0.005
		7	0.024	0.021	20.094	0.005
		8	0.004	0.000	20.137	0.010
		9	0.006	0.005	20.231	0.017
		10	0.023	0.023	21.548	0.018

Fuente: Elaboración Propia

Figura J25. Correlogramas P1

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
■		■		1	0.132	0.132	8.9069	0.003
				2	-0.003	-0.021	8.9130	0.012
				3	-0.006	-0.002	8.9287	0.030
				4	0.003	0.004	8.9342	0.063
				5	0.002	0.001	8.9361	0.112
				6	0.051	0.052	10.285	0.113
				7	0.023	0.009	10.549	0.160
				8	0.042	0.039	11.445	0.178
				9	0.062	0.053	13.449	0.143
				10	0.051	0.038	14.818	0.139

Fuente: Elaboración Propia

Figura J26. Correlogramas P2

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
■		■		1	0.151	0.151	11.704	0.001
				2	0.017	-0.006	11.855	0.003
				3	-0.052	-0.055	13.223	0.004
				4	-0.011	0.005	13.283	0.010
				5	0.018	0.021	13.452	0.019
				6	0.041	0.033	14.311	0.026
				7	-0.000	-0.012	14.311	0.046
				8	-0.009	-0.006	14.354	0.073
				9	-0.021	-0.014	14.573	0.103
				10	0.045	0.051	15.635	0.111

Fuente: Elaboración Propia

Figura J27. Correlogramas P3

Sample: 1 510 Included observations: 510						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.067	0.067	2.2939	0.130
		2	0.065	0.061	4.4974	0.106
		3	-0.073	-0.082	7.2447	0.064
		4	-0.011	-0.005	7.3059	0.121
		5	0.016	0.028	7.4365	0.190
		6	-0.004	-0.012	7.4466	0.282
		7	-0.010	-0.014	7.5012	0.379
		8	-0.150	-0.146	19.239	0.014
		9	-0.013	0.007	19.332	0.023
		10	-0.025	-0.006	19.657	0.033

Fuente:Elaboración Propia

Figura J28. Correlogramas P4

Sample: 1 510 Included observations: 510						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.012	0.012	0.0760	0.783
		2	0.063	0.063	2.1063	0.349
		3	-0.038	-0.040	2.8686	0.412
		4	0.011	0.008	2.9310	0.569
		5	0.023	0.028	3.2165	0.667
		6	0.015	0.012	3.3381	0.765
		7	0.068	0.066	5.7446	0.570
		8	0.109	0.109	11.968	0.153
		9	-0.035	-0.046	12.622	0.180
		10	-0.006	-0.014	12.640	0.245

Fuente:Elaboración Propia

Figura J29. Correlogramas P5

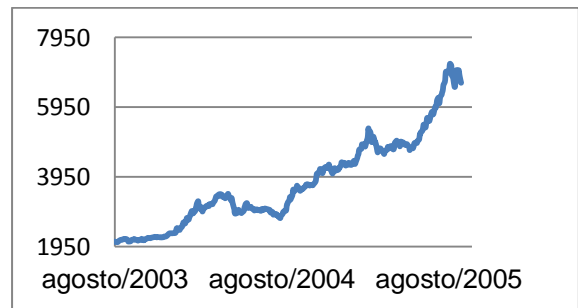
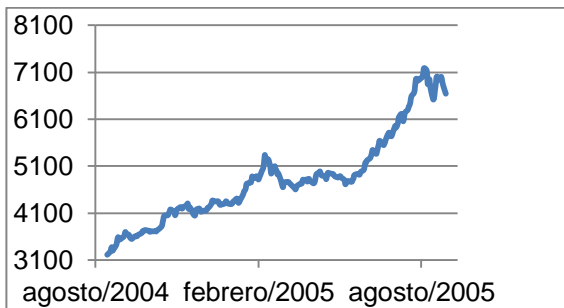
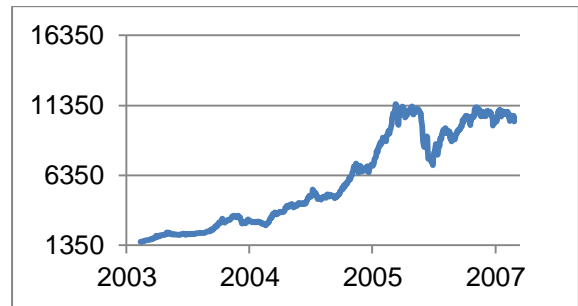
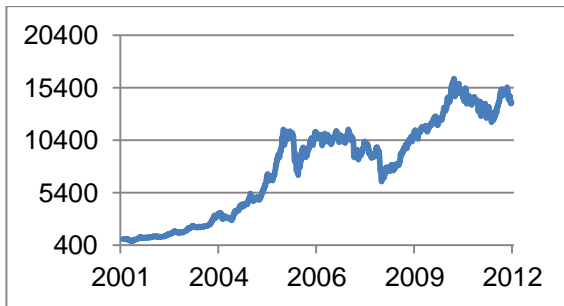
Sample: 1 510						
Included observations: 510						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.066	-0.066	2.2230	0.136
		2	0.004	-0.000	2.2326	0.327
		3	0.019	0.019	2.4178	0.490
		4	-0.017	-0.015	2.5680	0.633
		5	-0.065	-0.068	4.7597	0.446
		6	-0.033	-0.042	5.3177	0.504
		7	-0.001	-0.005	5.3185	0.621
		8	-0.020	-0.018	5.5202	0.701
		9	-0.003	-0.007	5.5252	0.786
		10	0.047	0.041	6.6600	0.757

Fuente: Elaboración Propia

## 2. GRÁFICAS PRECIOS VS TIEMPO: DIFERENTES ESCALAS.

### 2.1.IGBC

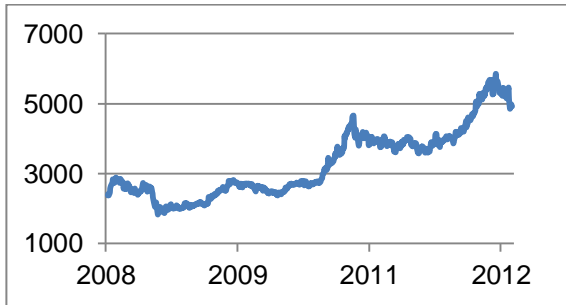
Figura J30. Precios del IGBC, con diferente escala temporal



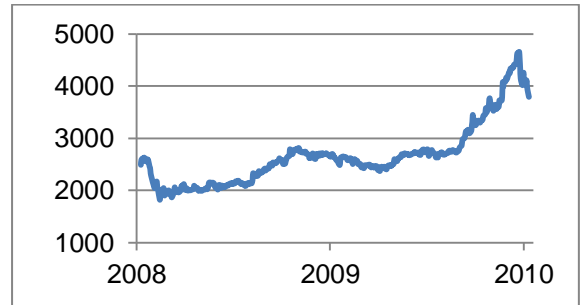
Fuente:Elaboración Propia

## 2.2. ECOPETROL

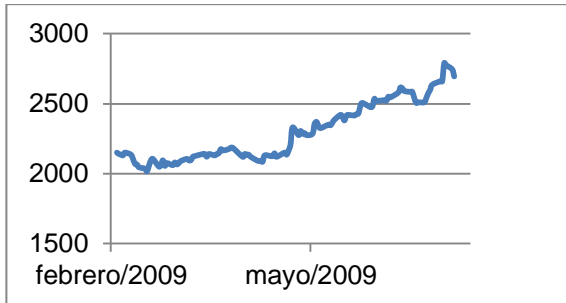
Figura J31. Precios de ECOPETROL, con diferente escala temporal



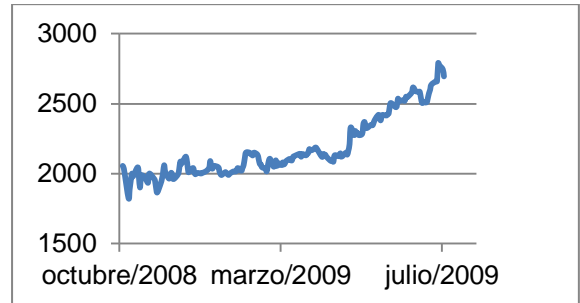
a.



b.



d.

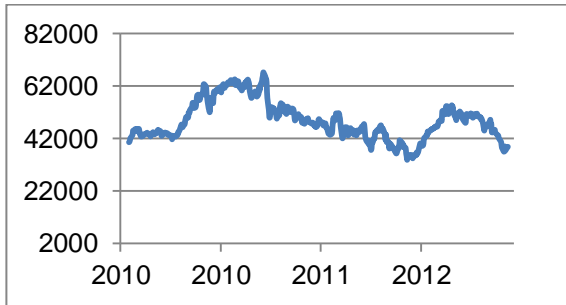


c.

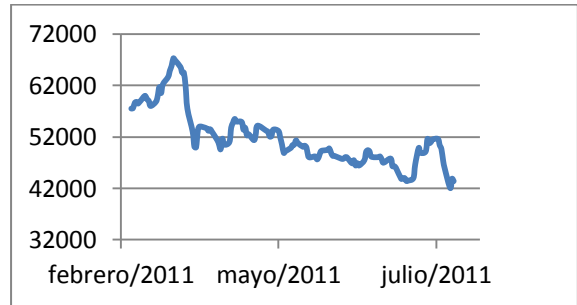
Fuente:Elaboración Propia

### 2.3.PREC

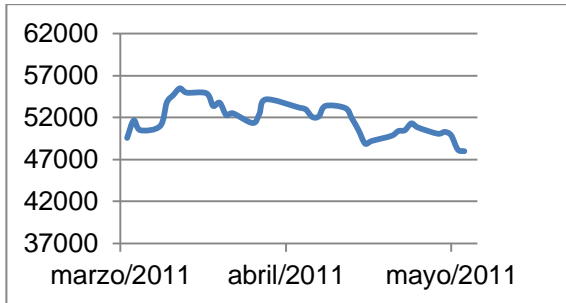
Figura J32. Precios de PREC con diferente escala temporal



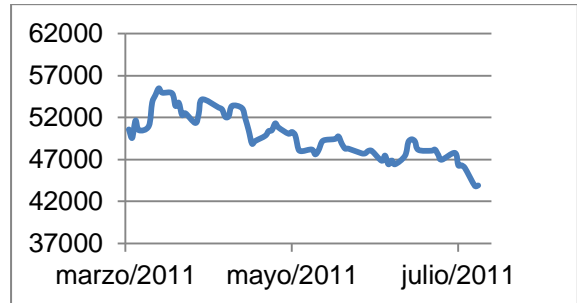
a.



b.



d.

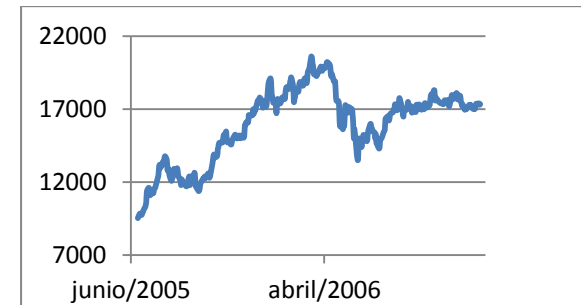
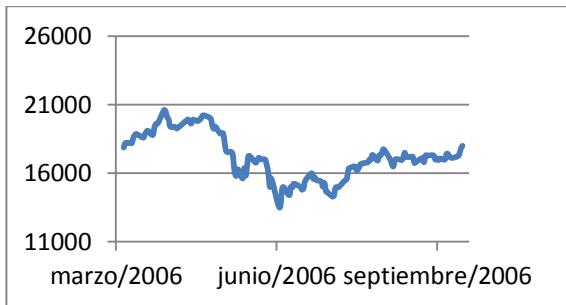
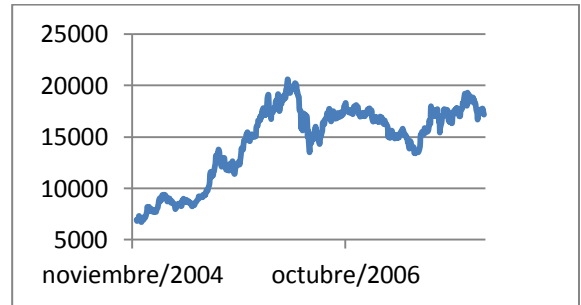
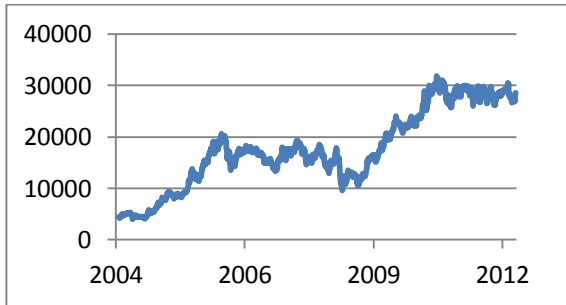


c.

Fuente:Elaboración Propia

## 2.4. PFBCOLOM

Figura J33. Precios de PFBCOLOM con diferente escala temporal



Fuente:Elaboración Propia

## 2.5. GRUPOSURA

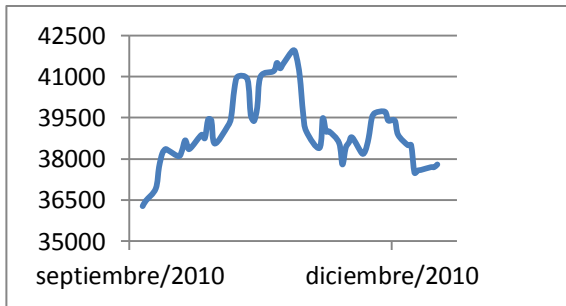
Figura J34. Precios de GRUPOSURA con diferente escala temporal



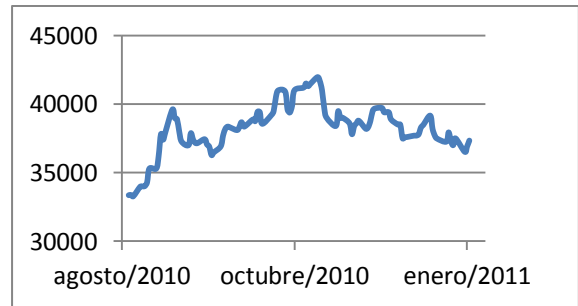
a.



b.



d.

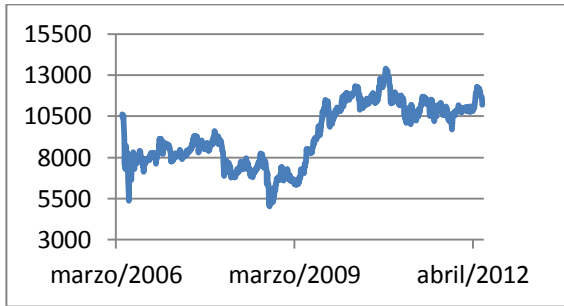


c.

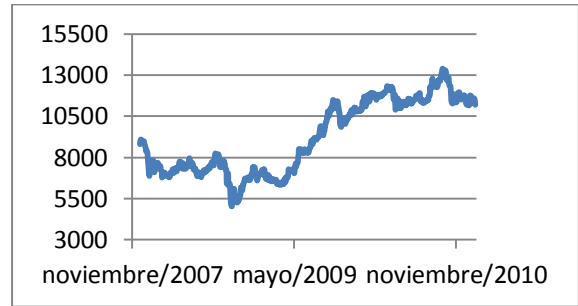
Fuente:Elaboración Propia

## 2.6. CEMARGOS

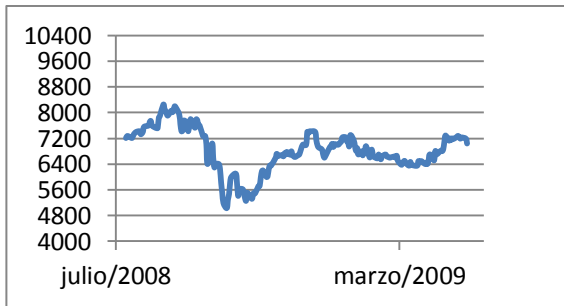
Figura J35. Precios de GRUPOSURA con diferente escala temporal



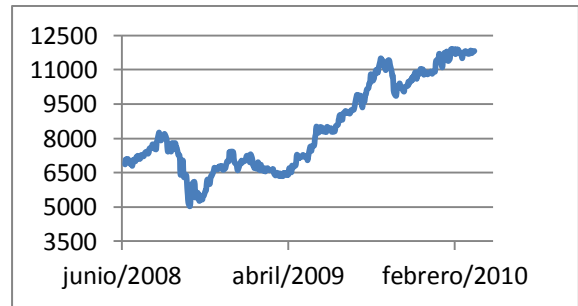
a.



b.



d.

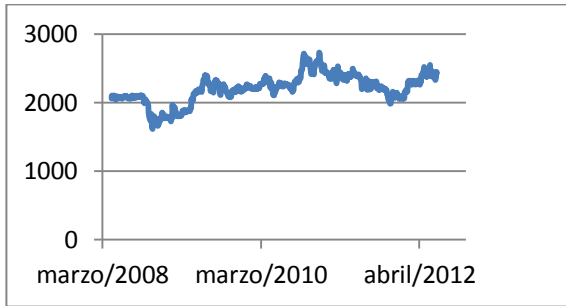


c.

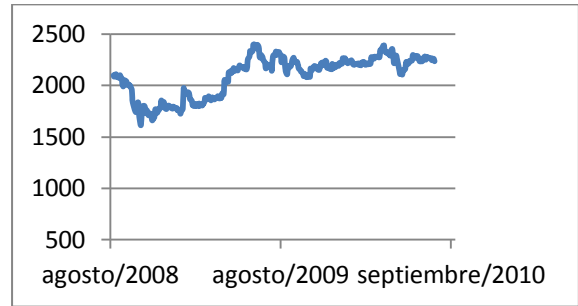
Fuente:Elaboración Propia

## 2.7. ISAGEN

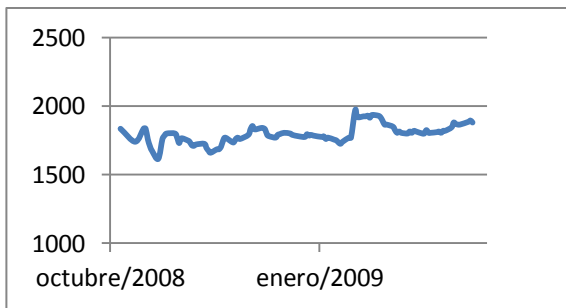
Figura J36. Precios de ISAGEN con diferente escala temporal



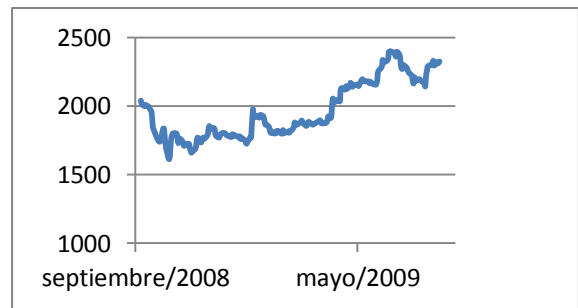
a.



b.



d.

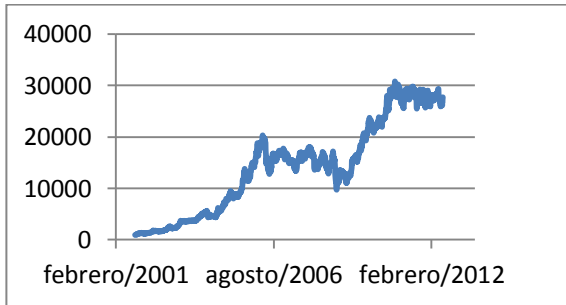


c.

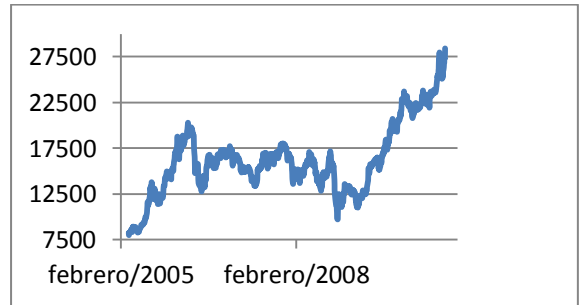
Fuente:Elaboración Propia

## 2.8. BCOLOMBIA

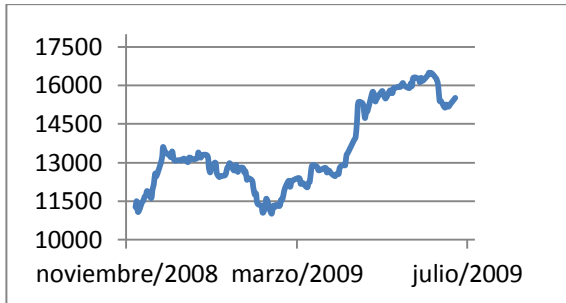
Figura J37. Precios de BCOLOMBIA con diferente escala temporal



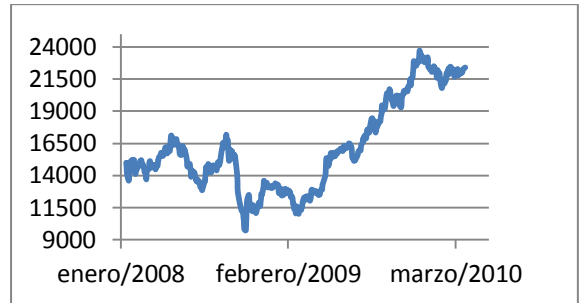
a.



b.



d.



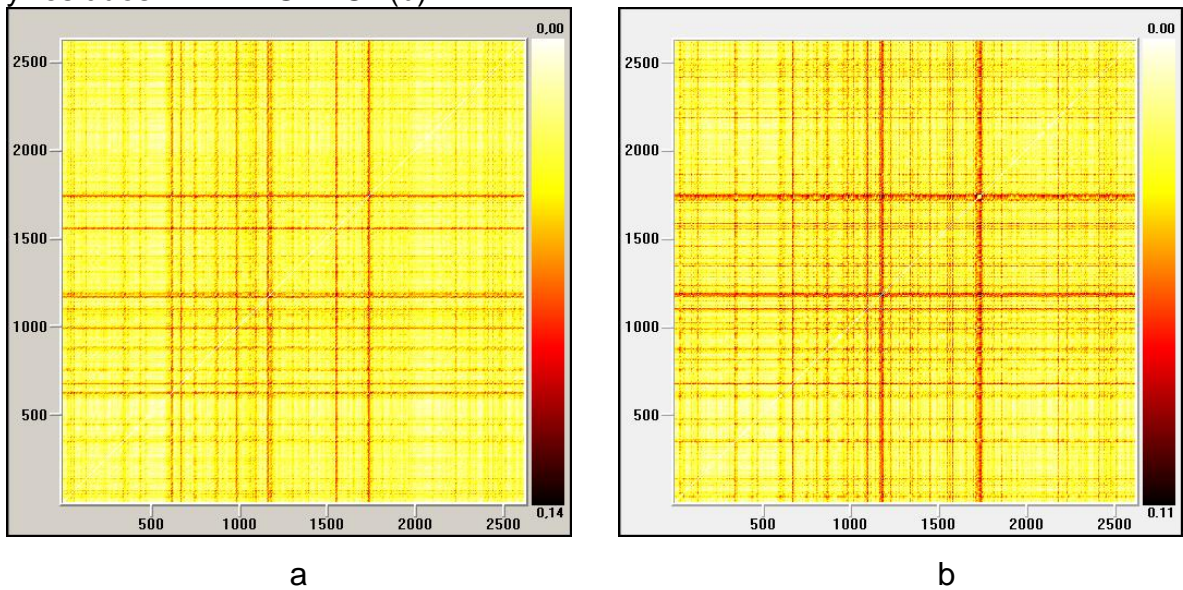
c.

Fuente:Elaboración Propia

### 3. GRÁFICOS DE RECURRENCIA.

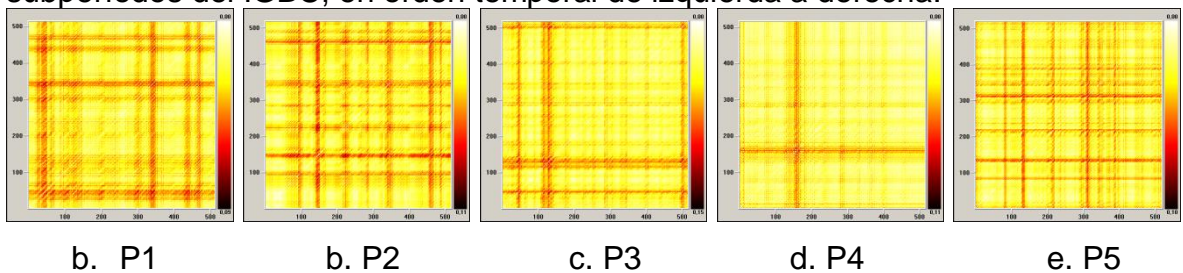
#### 3.1.IGBC

Figura J38. Gráfico de recurrencia para el período total IGBC en rentabilidades (a) y residuos ARIMA-GARCH(b)



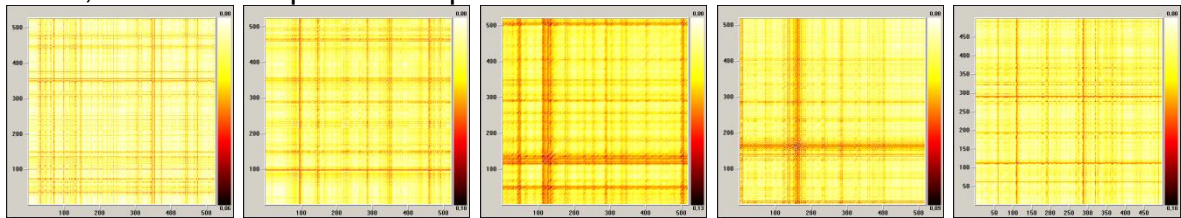
Fuente: Elaboración Propia

Figura J39. Gráficos de recurrencia para series de rentabilidades de los subperíodos del IGBC, en orden temporal de izquierda a derecha.



Fuente: Elaboración Propia

Figura J40. Gráficos de recurrencia para series de residuos de los subperíodos del IGBC, en orden temporal de izquierda a derecha.



b. P1

b. P2

c. P3

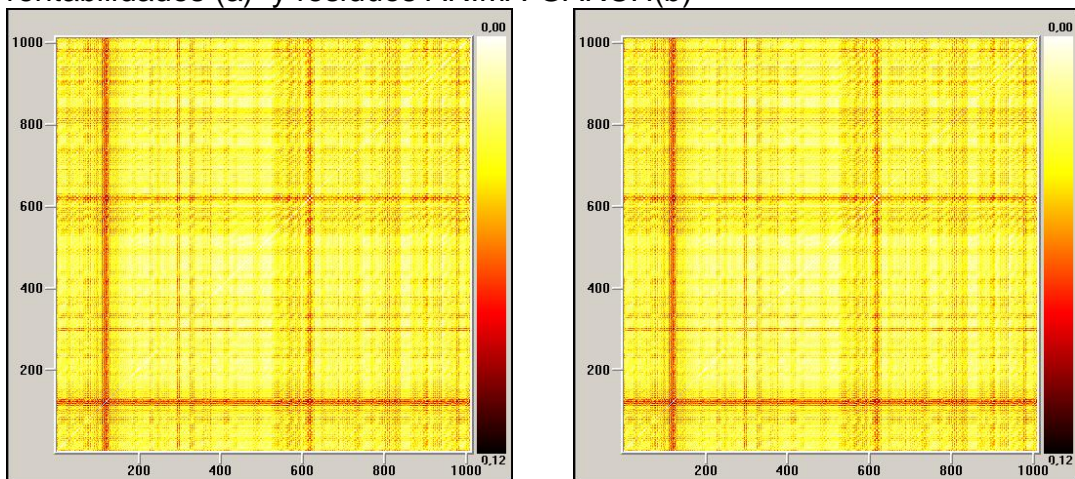
d. P4

e. P5

Fuente: Elaboración Propia

### 3.2. ECOPEPETROL

Figura J41. Gráfico de recurrencia para el período total ECOPEPETROL en rentabilidades (a) y residuos ARIMA-GARCH(b)

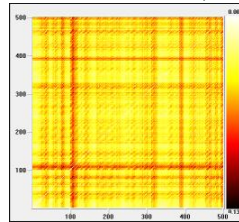


a.

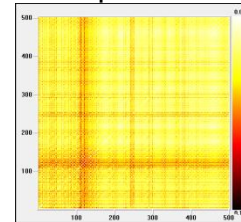
b.

Fuente: Elaboración Propia

Figura J42. Gráficos de recurrencia para series de rentabilidades de los subperíodos de ECOPETROL, en orden temporal de izquierda a derecha.



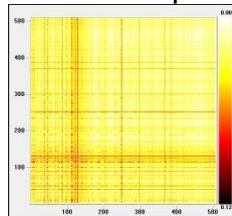
a. P1



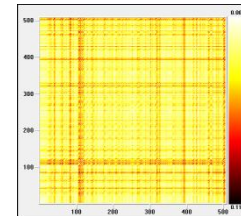
b. P2

Fuente: Elaboración Propia

Figura J43. Gráficos de recurrencia para series de residuos de los subperíodos de ECOPETROL, en orden temporal de izquierda a Derecha.



a. P1

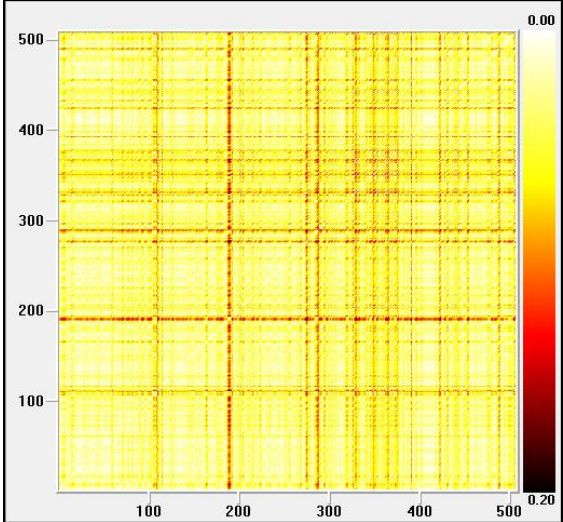


b. P2

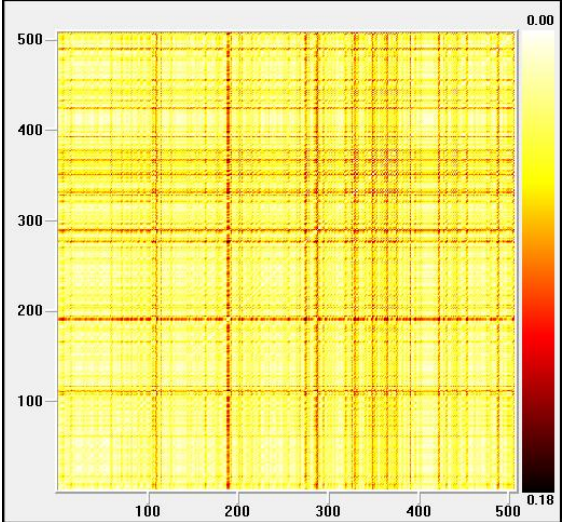
Fuente: Elaboración Propia

3.3.PREC

Figura J44. Gráfico de recurrencia para el período total PREC en rentabilidades (a) y residuos ARIMA-GARCH(b)



a.

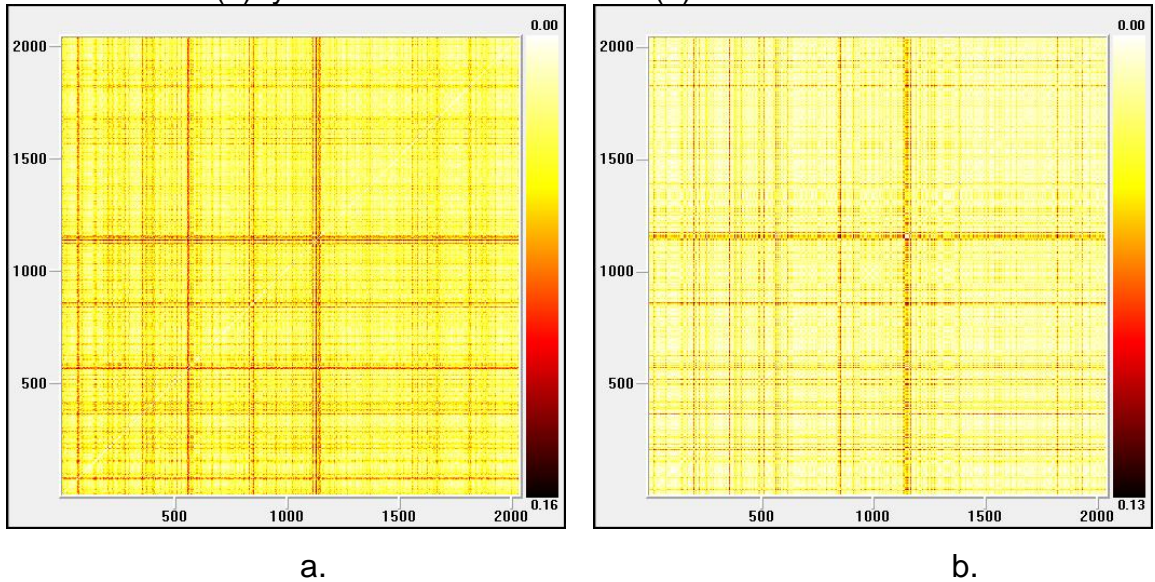


b.

Fuente: Elaboración Propia

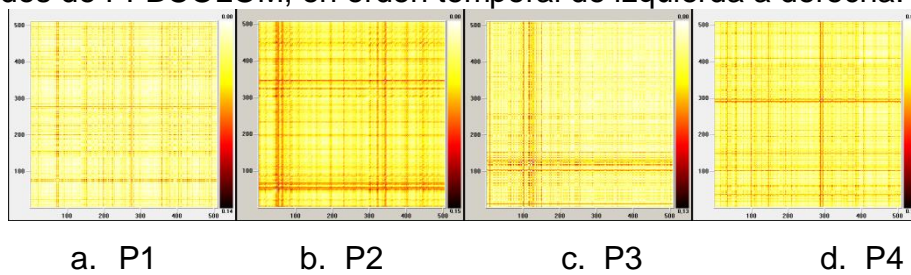
### 3.4. PFBCOLOM

Figura J45. Gráfico de recurrencia para el período total PFBCOLOM en rentabilidades (a) y residuos ARIMA-GARCH(b)



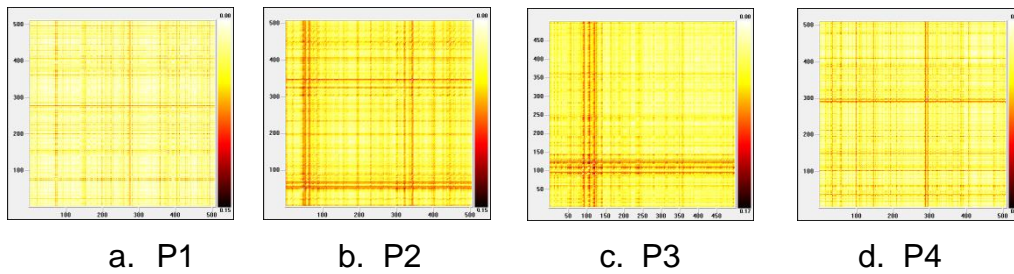
Fuente: Elaboración Propia

Figura J46. Gráficos de recurrencia para series de rentabilidades de los subperíodos de PFBCOLOM, en orden temporal de izquierda a derecha.



Fuente: Elaboración Propia

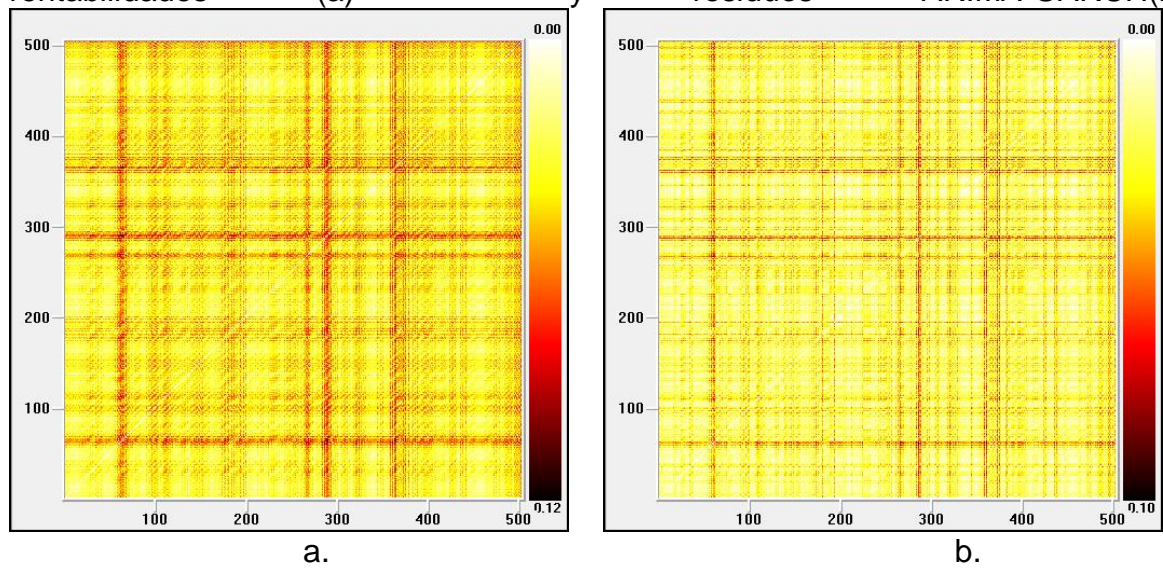
Figura J47. Gráficos de recurrencia para series de residuos de los subperíodos de PFBCOLOM, en orden temporal de izquierda a Derecha.



Fuente: Elaboración Propia

### 3.5. GRUPOSURA

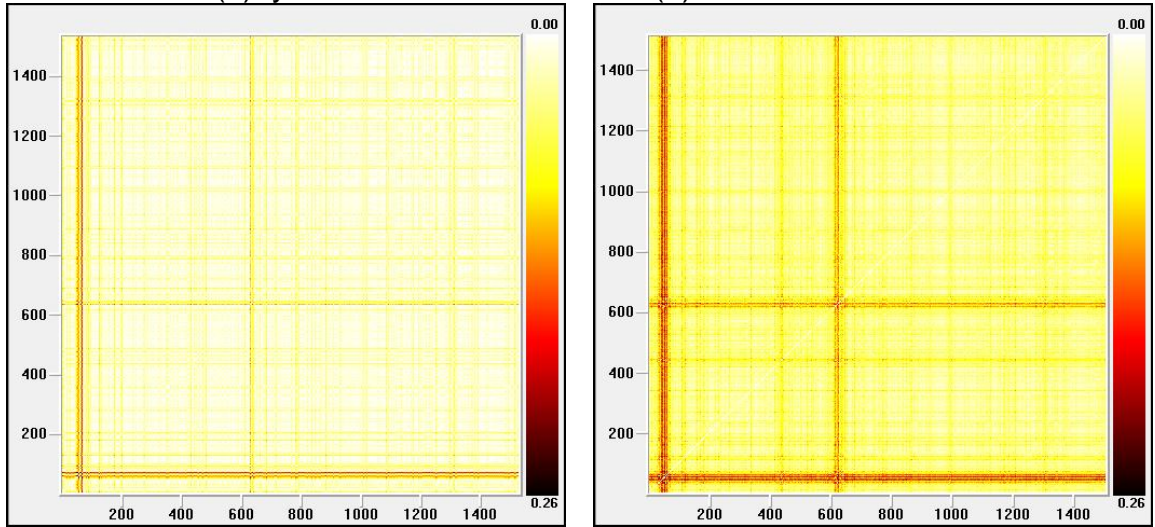
Figura J48. Gráfico de recurrencia para el período total GRUPOSURA en rentabilidades (a) y residuos ARIMA-GARCH(b)



Fuente: Elaboración Propia

### 3.6. CEMARGOS

Figura J49. Gráfico de recurrencia para el período total CEMARGOS en rentabilidades (a) y residuos ARIMA-GARCH(b)

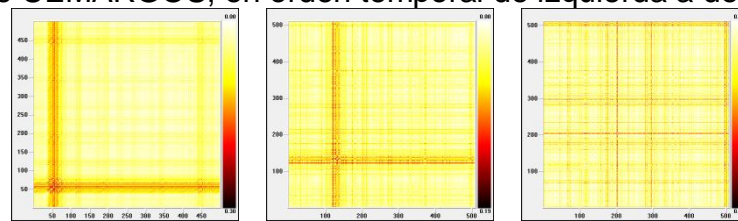


a.

b.

Fuente: Elaboración Propia

Figura J50. Gráficos de recurrencia para series de rentabilidades de los subperíodos de CEMARGOS, en orden temporal de izquierda a derecha.



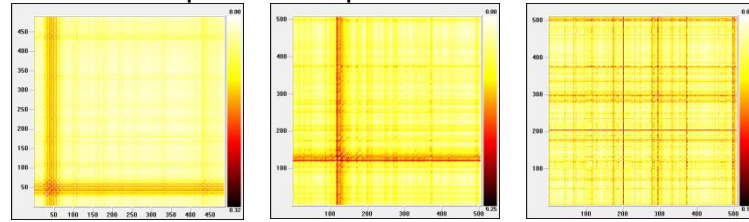
a. P1

b. P2

c. P3

Fuente: Elaboración Propia

Figura J51. Gráficos de recurrencia para series de residuos de los subperíodos de CEMARGOS, en orden temporal de izquierda a Derecha.



a. P1

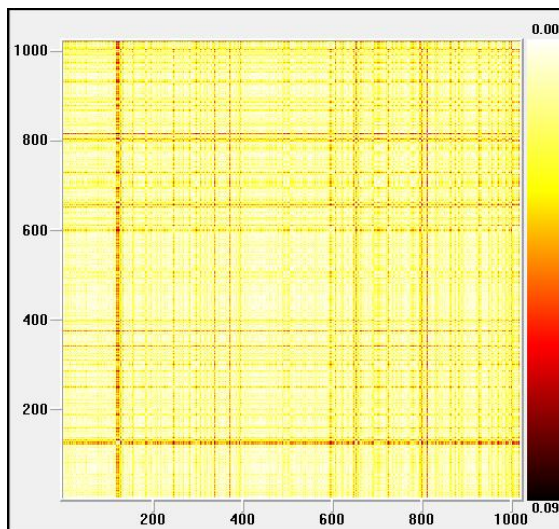
b. P2

c. P3

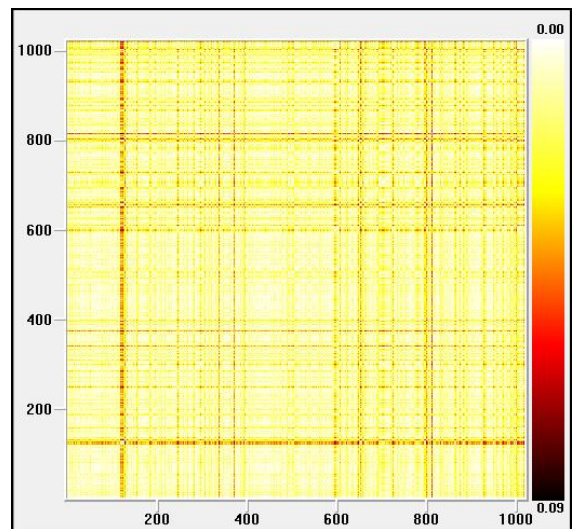
Fuente: Elaboración Propia

### 3.7. ISAGEN

Figura J52. Gráfico de recurrencia para el período total ISAGEN en rentabilidades (a) y residuos ARIMA-GARCH(b)



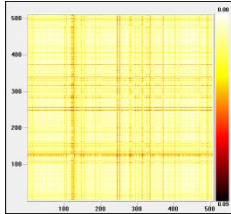
a.



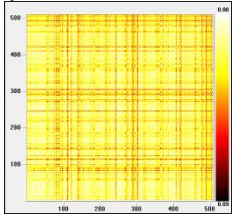
b.

Fuente: Elaboración Propia

Figura J53. Gráficos de recurrencia para series de rentabilidades de los subperíodos de ISAGEN, en orden temporal de izquierda a derecha.



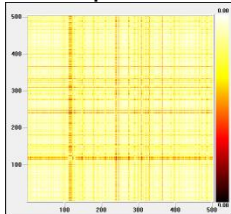
a. P1



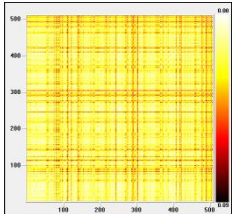
b. P2

Fuente: Elaboración Propia

Figura J54. Gráficos de recurrencia para series de residuos de los subperíodos de ISAGEN, en orden temporal de izquierda a Derecha.



a.P1

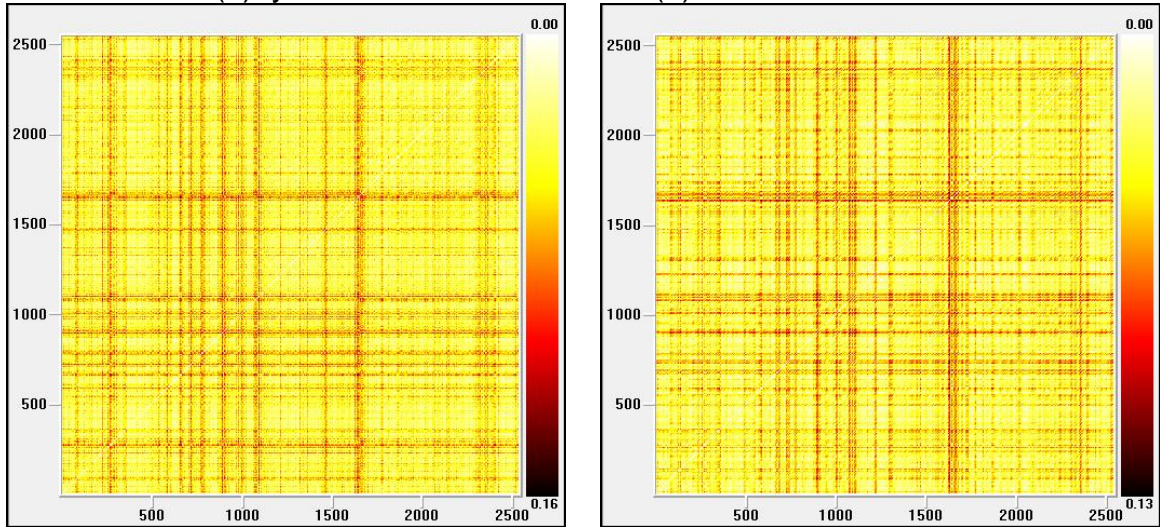


b. P2

Fuente: Elaboración Propia

### 3.8. BCOLOMBIA

Figura J55. Gráfico de recurrencia para el período total BCOLOMBIA en rentabilidades (a) y residuos ARIMA-GARCH(b)

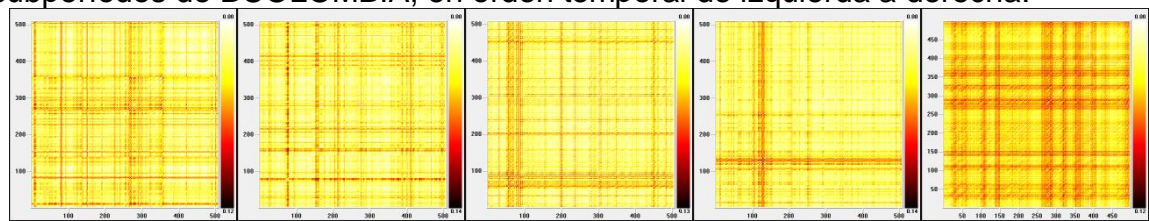


a.

b.

Fuente: Elaboración Propia

Figura J56. Gráficos de recurrencia para series de rentabilidades de los subperíodos de BCOLOMBIA, en orden temporal de izquierda a derecha.



a. P1

b. P2

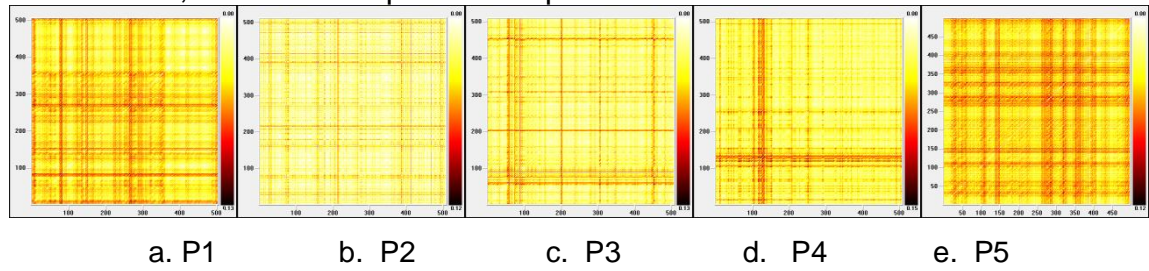
c. P3

d. P4

e. P5

Fuente: Elaboración Propia

Figura J57. Gráficos de recurrencia para series de residuos de los subperíodos de BCOLOMBIA, en orden temporal de izquierda a Derecha.

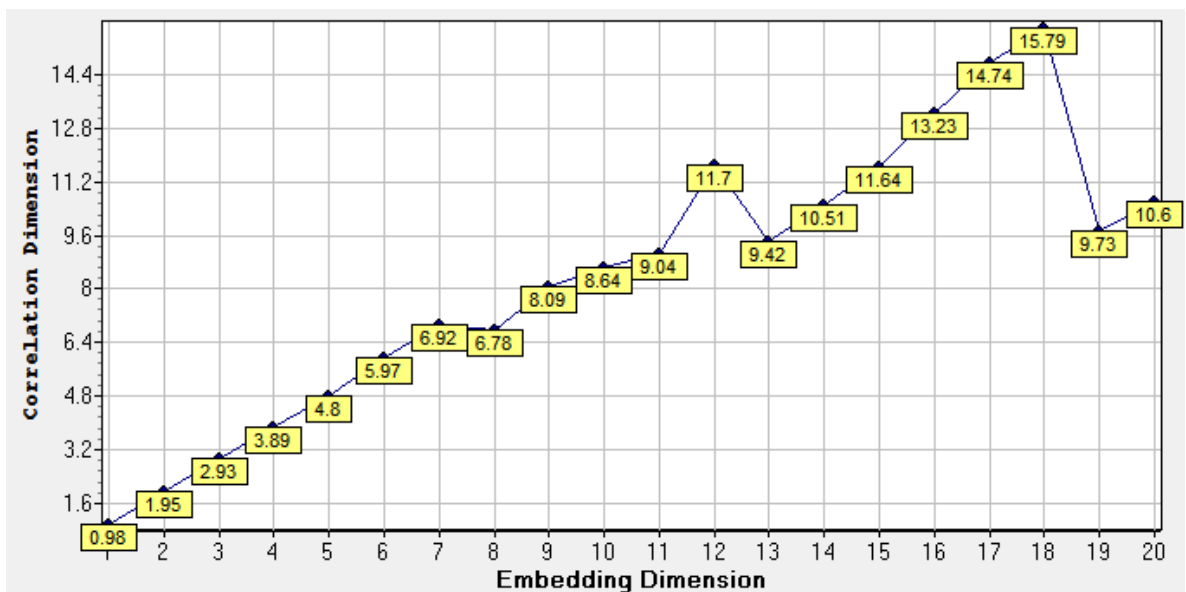


Fuente: Elaboración Propia

#### 4. DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN.

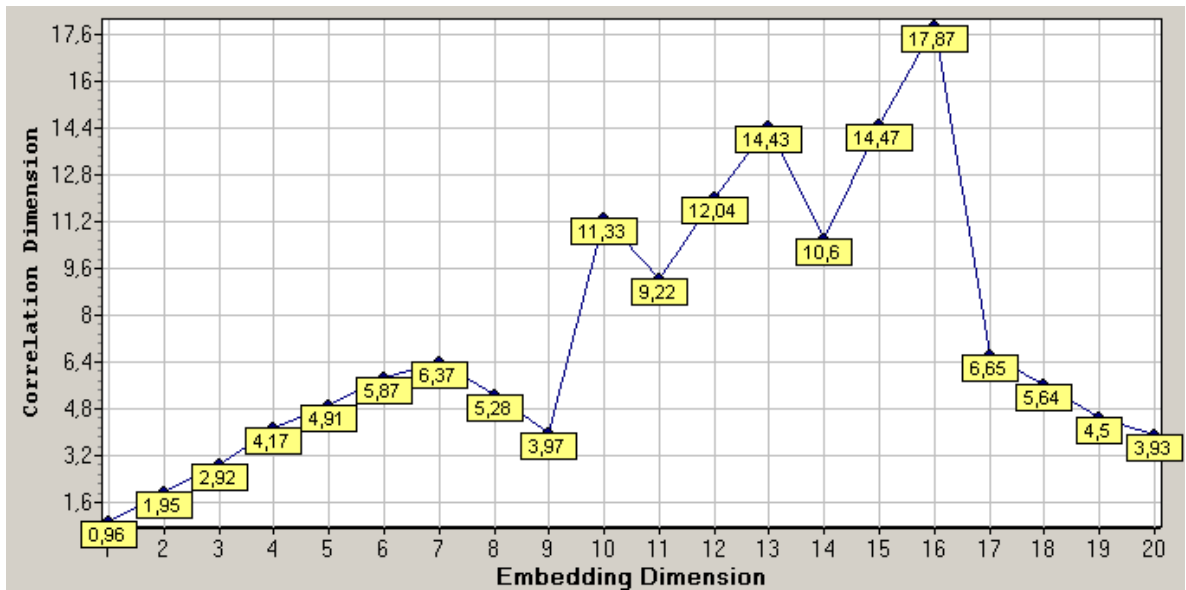
##### 4.1. IGBC

Figura J58. Dimensión de correlación IGBC



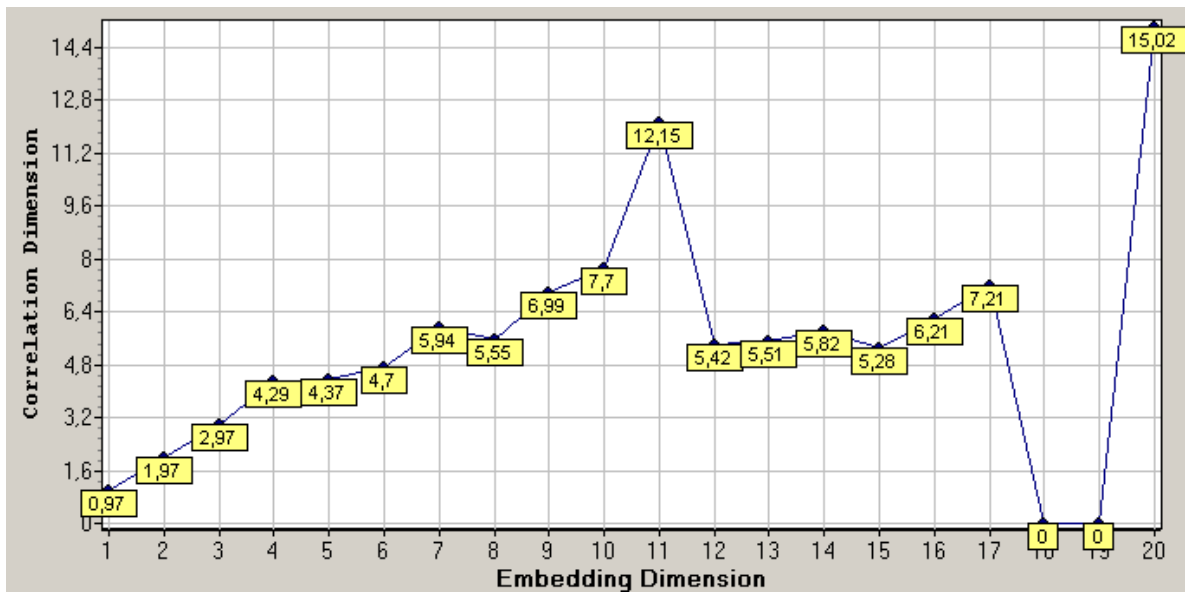
Fuente: Elaboración Propia

Figura J59. Dimensión de correlación P1



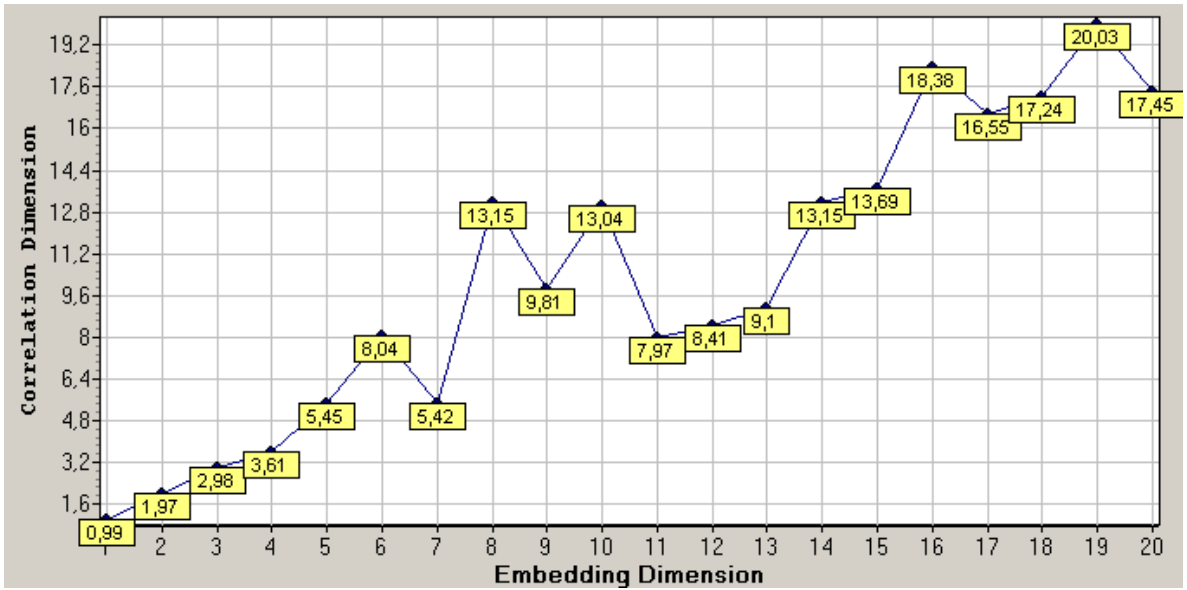
Fuente: Elaboración Propia

Figura J60. Dimensión de correlación P2



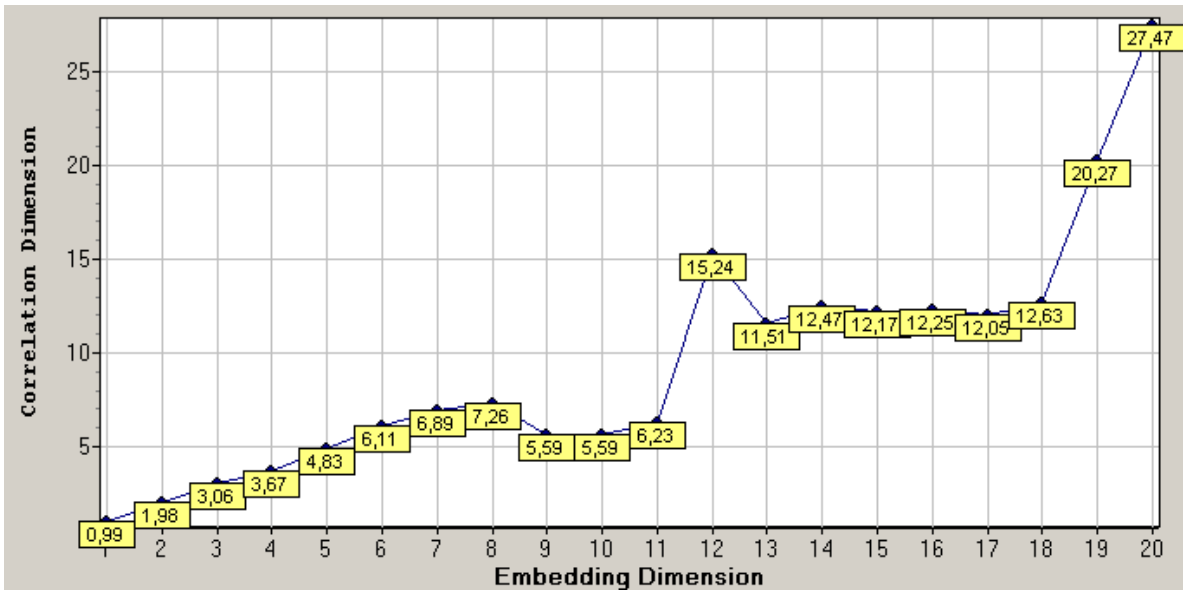
Fuente: Elaboración Propia

Figura J61. Dimensión de correlación P3



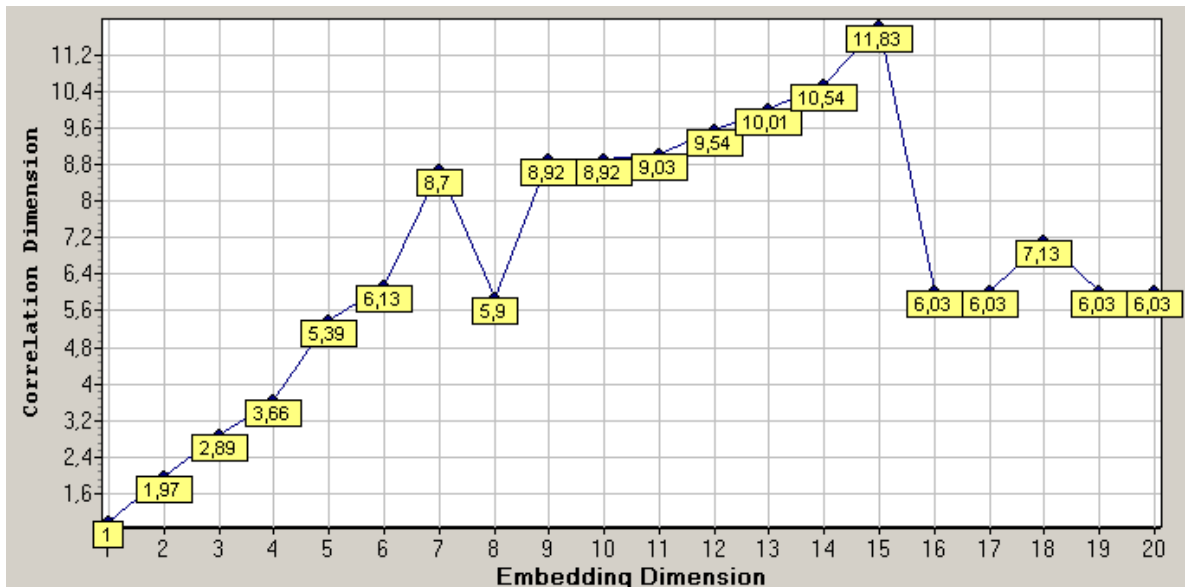
Fuente: Elaboración Propia

Figura J62. Dimensión de correlación P4



Fuente: Elaboración Propia

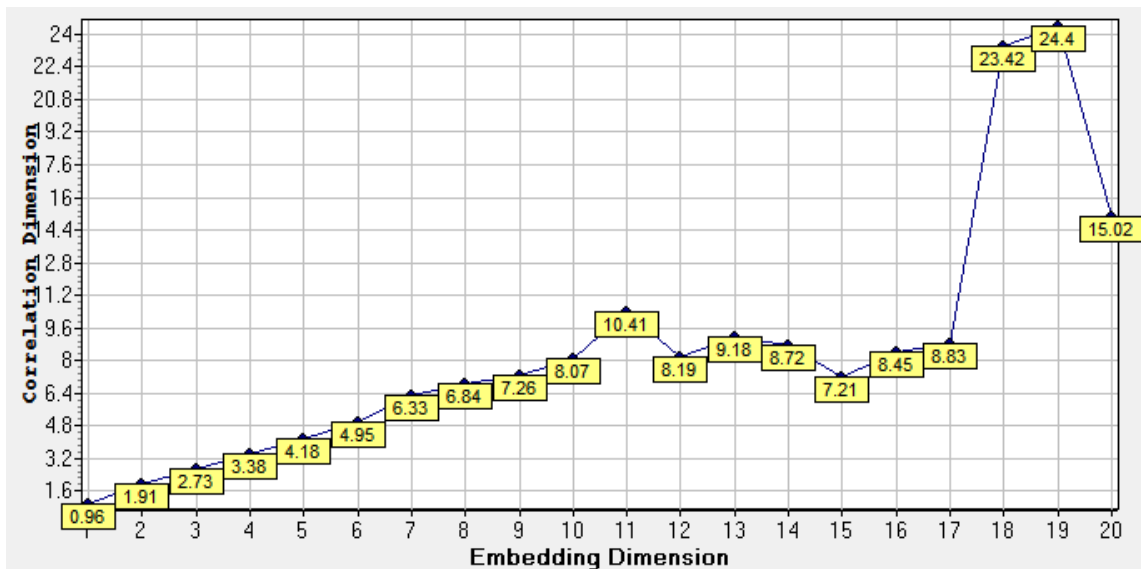
Figura J63. Dimensión de correlación P5



Fuente: Elaboración Propia

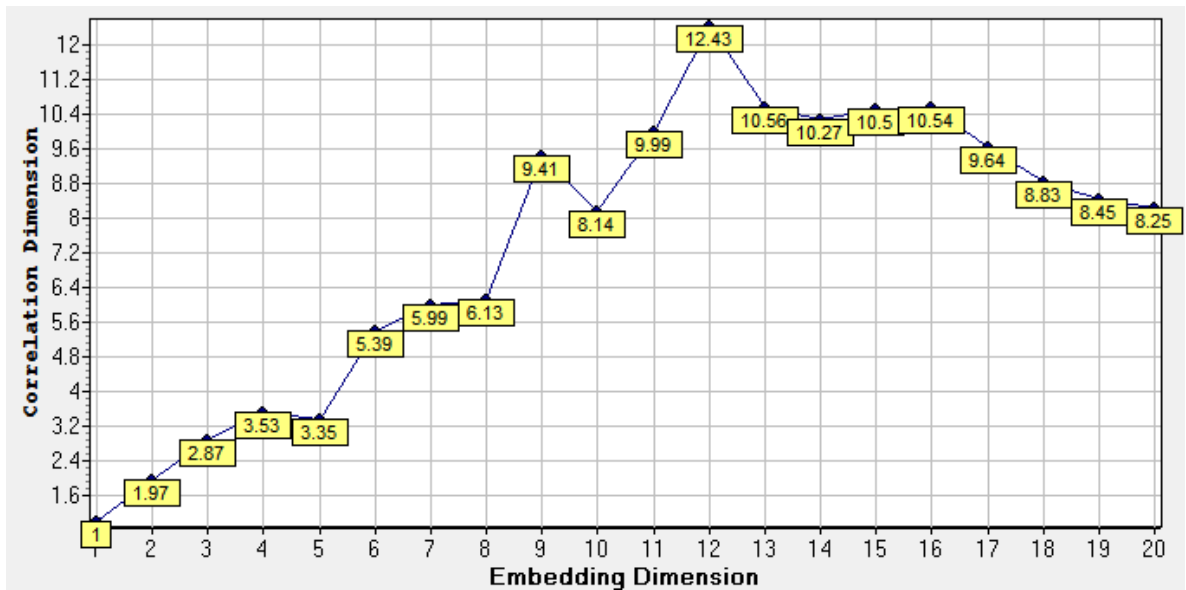
## 4.2. ECOPETROL

Figura J64. Dimensión de correlación ECOPETROL



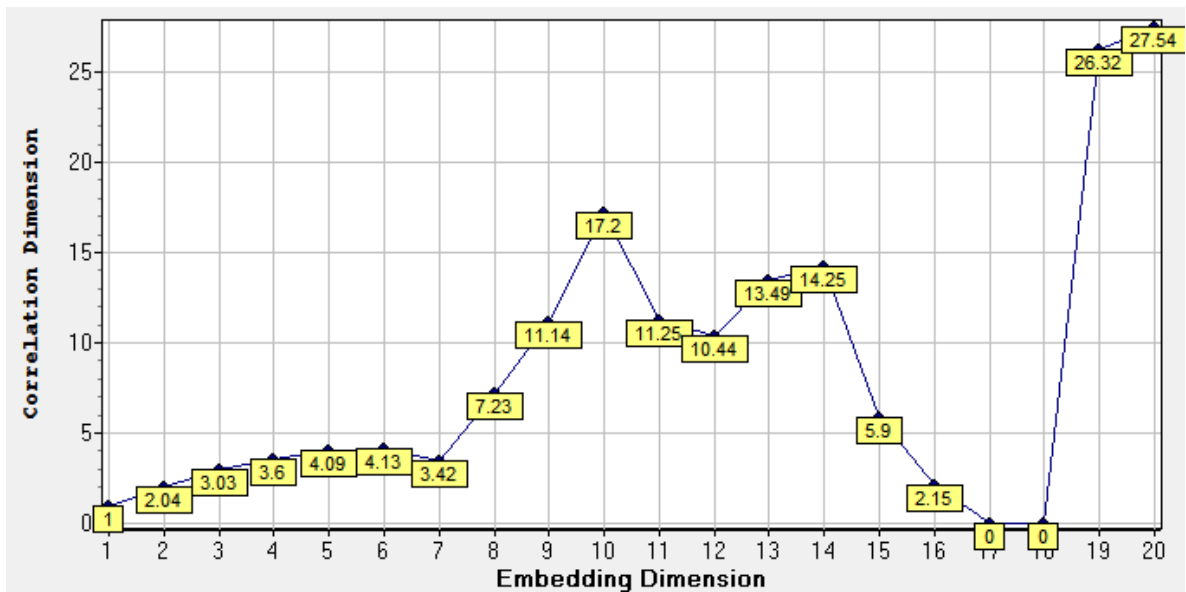
Fuente: Elaboración Propia

Figura J65. Dimensión de correlación P1



Fuente: Elaboración Propia

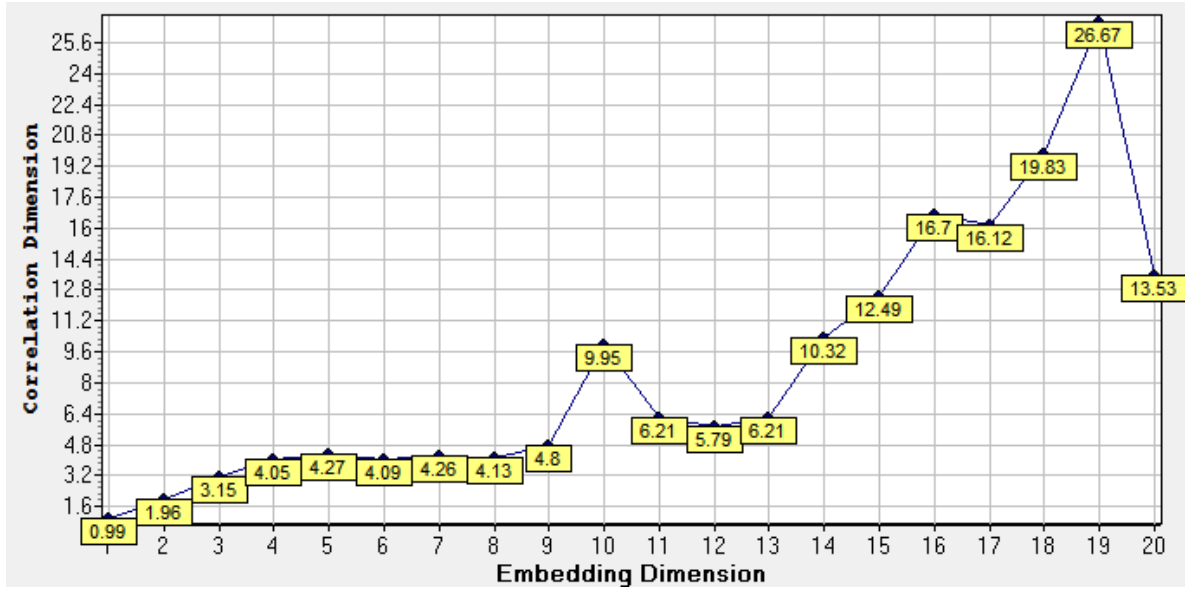
Figura J66. Dimensión de correlación P2



Fuente: Elaboración Propia

### 4.3.PREC

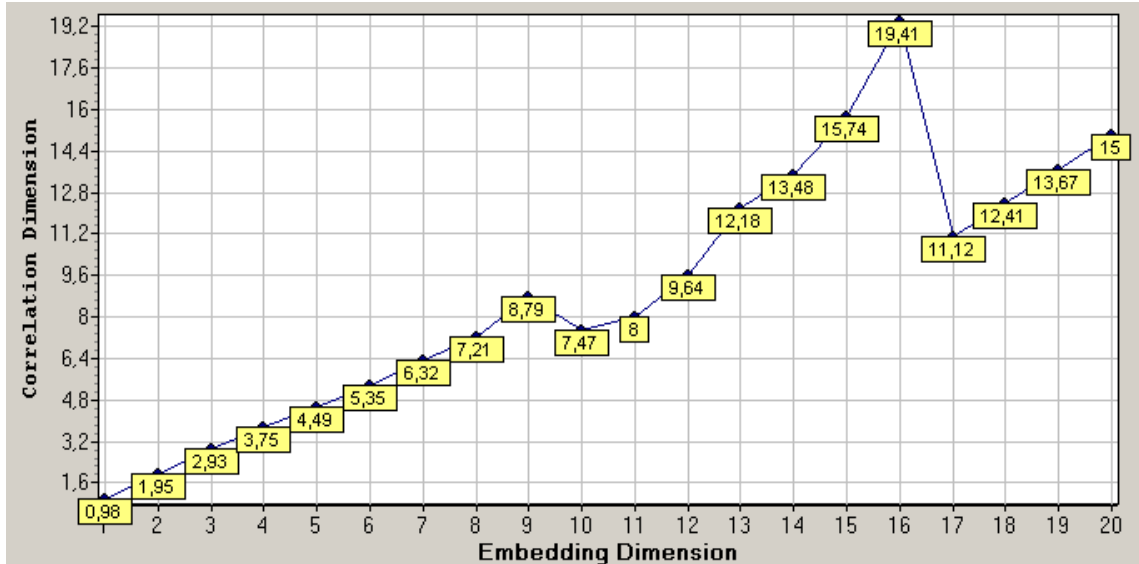
Figura J67. Dimensión de correlación PREC



Fuente: Elaboración Propia

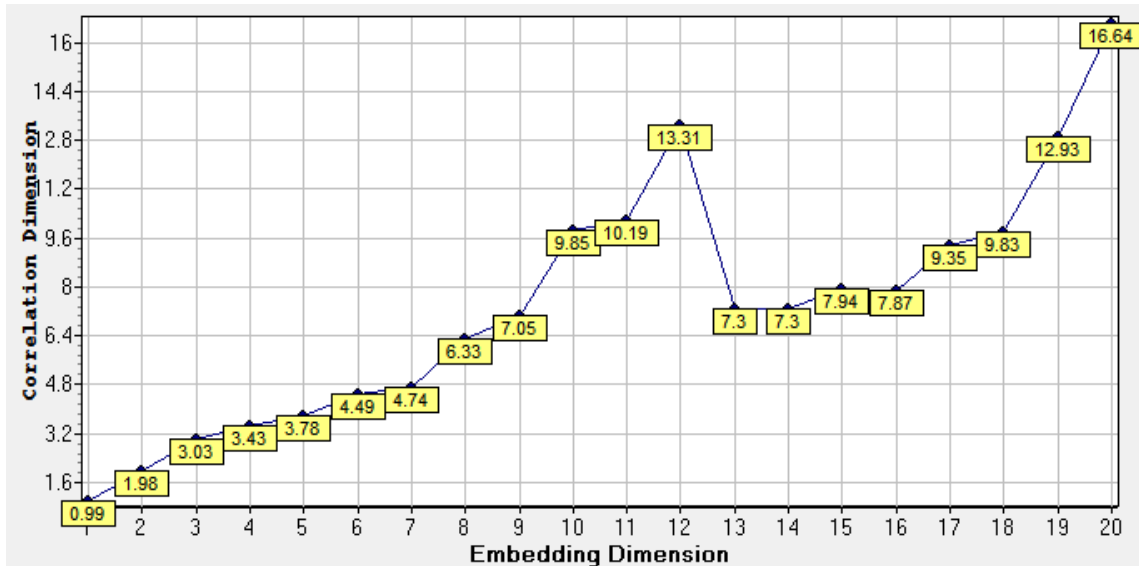
#### 4.4. PFBCOLOM

Figura J68. Dimensión de correlación PFBCOLOM



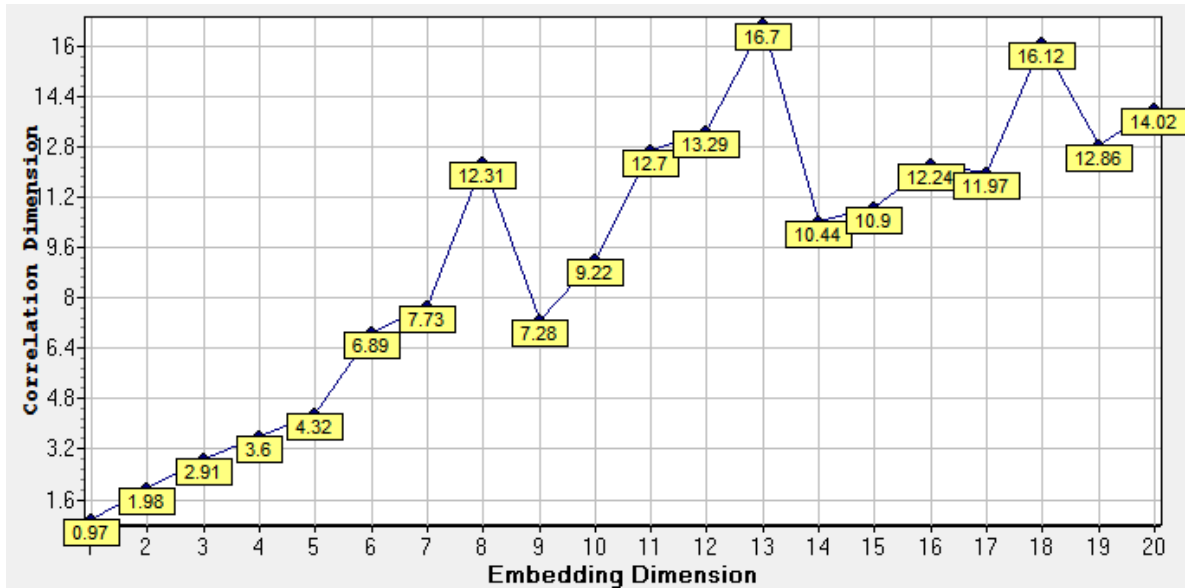
Fuente: Elaboración Propia

Figura J69. Dimensión de correlación P1



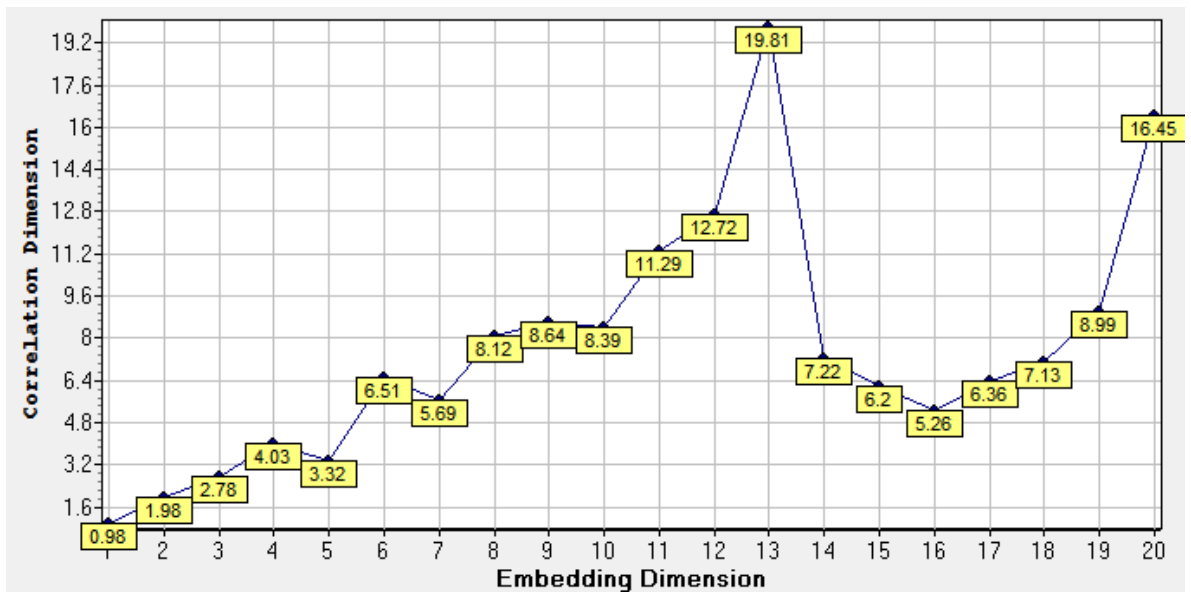
Fuente: Elaboración Propia

Figura J70. Dimensión de correlación P2



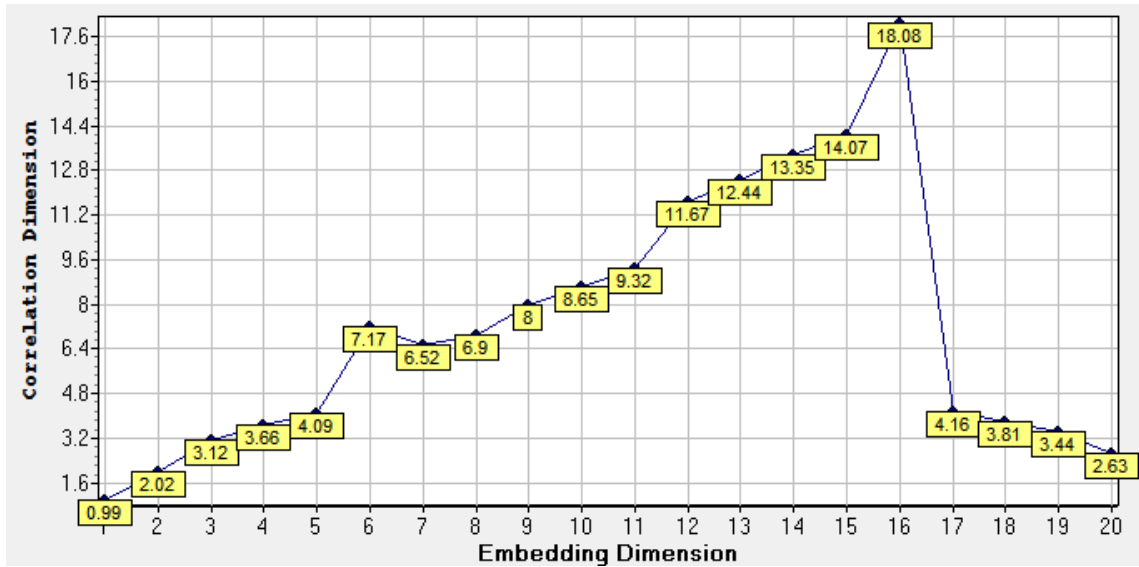
Fuente: Elaboración Propia

Figura J71. Dimensión de correlación P3



Fuente: Elaboración Propia

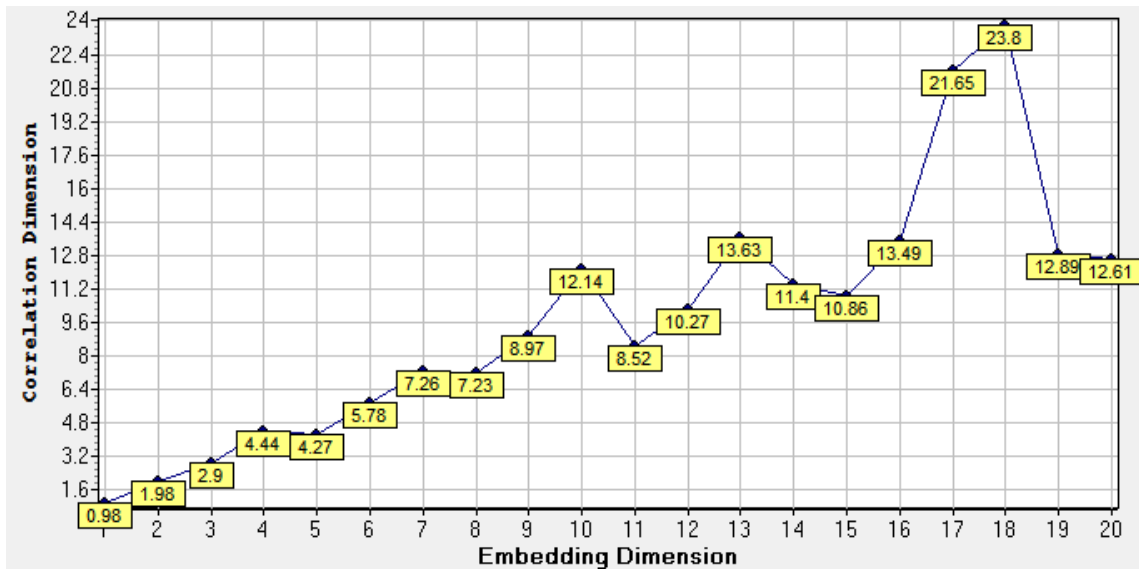
Figura J72. Dimensión de correlación P4



Fuente: Elaboración Propia

#### 4.5. GRUPOSURA

Figura J73. Dimensión de correlación GRUPOSURA



Fuente: Elaboración Propia

#### 4.6. CEMARGOS

Figura J74. Dimensión de correlación CEMARGOS

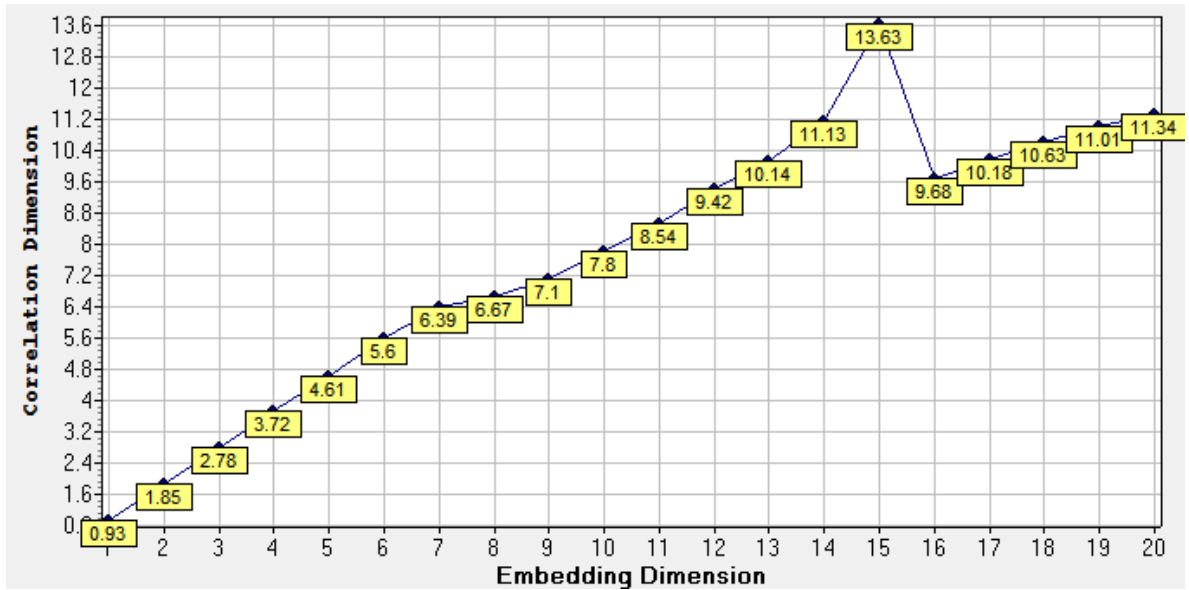
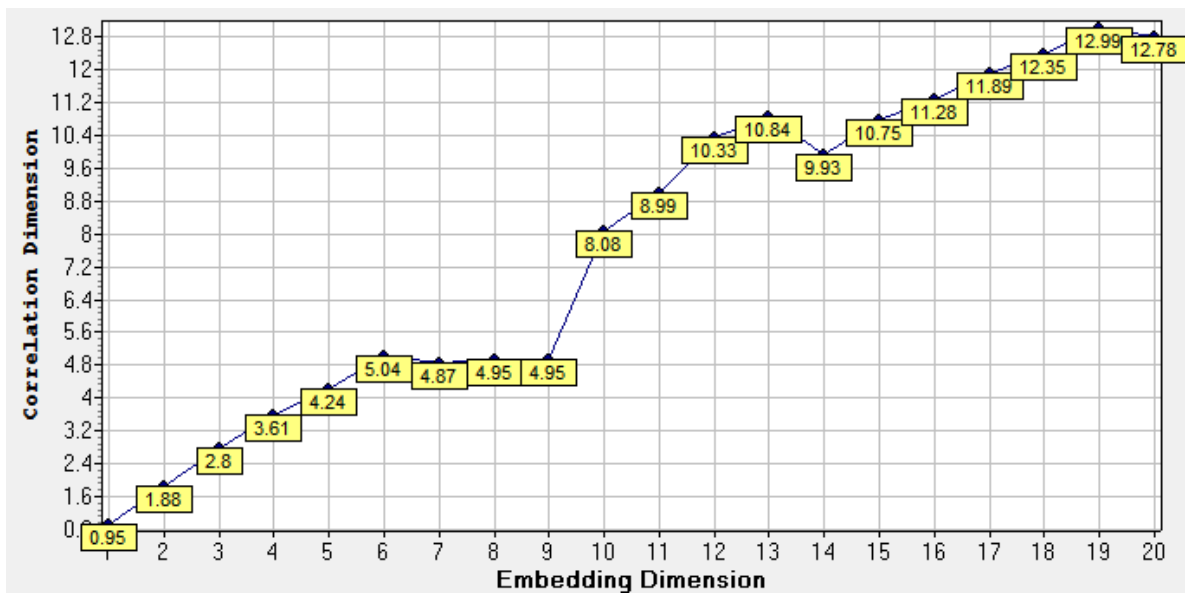
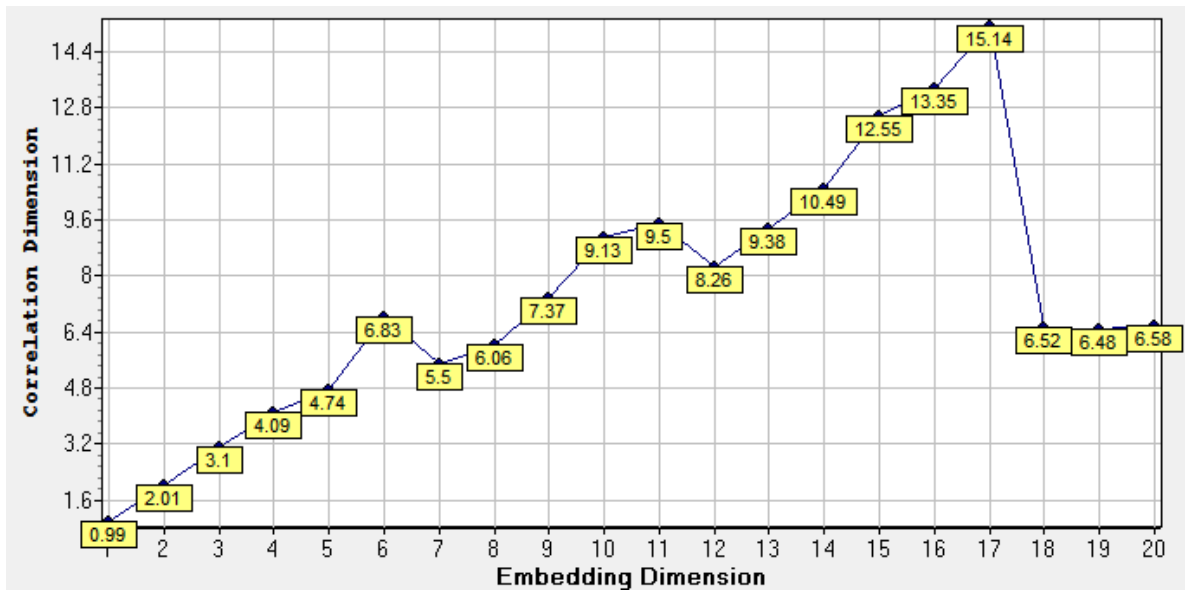


Figura J75. Dimensión de correlación P1



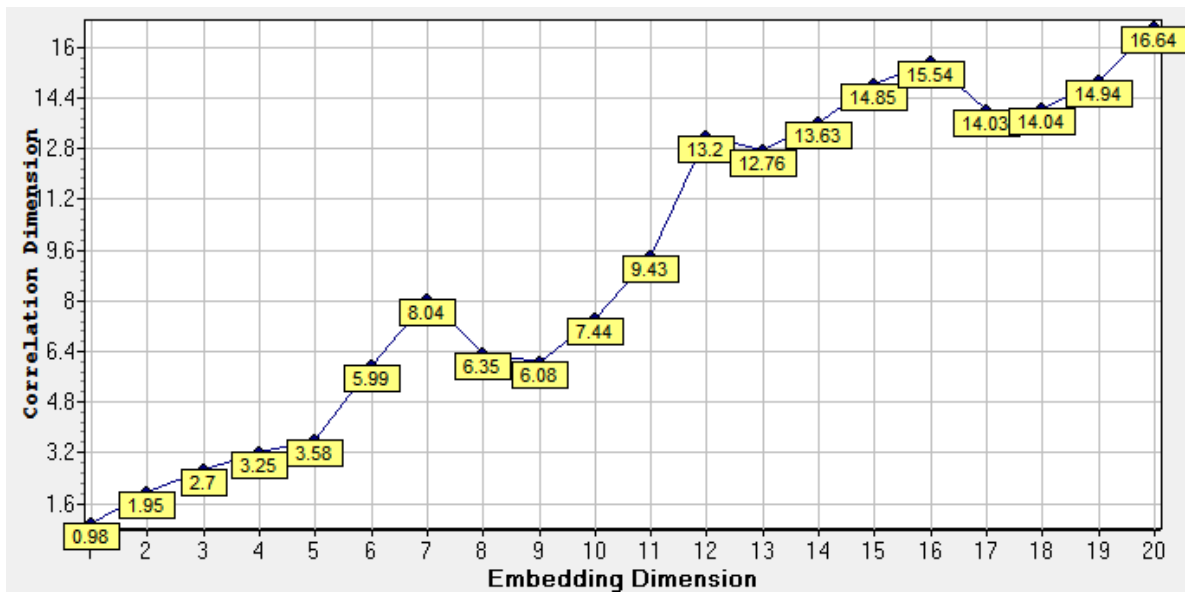
Fuente: Elaboración Propia

Figura J76. Dimensión de correlación P2



Fuente: Elaboración Propia

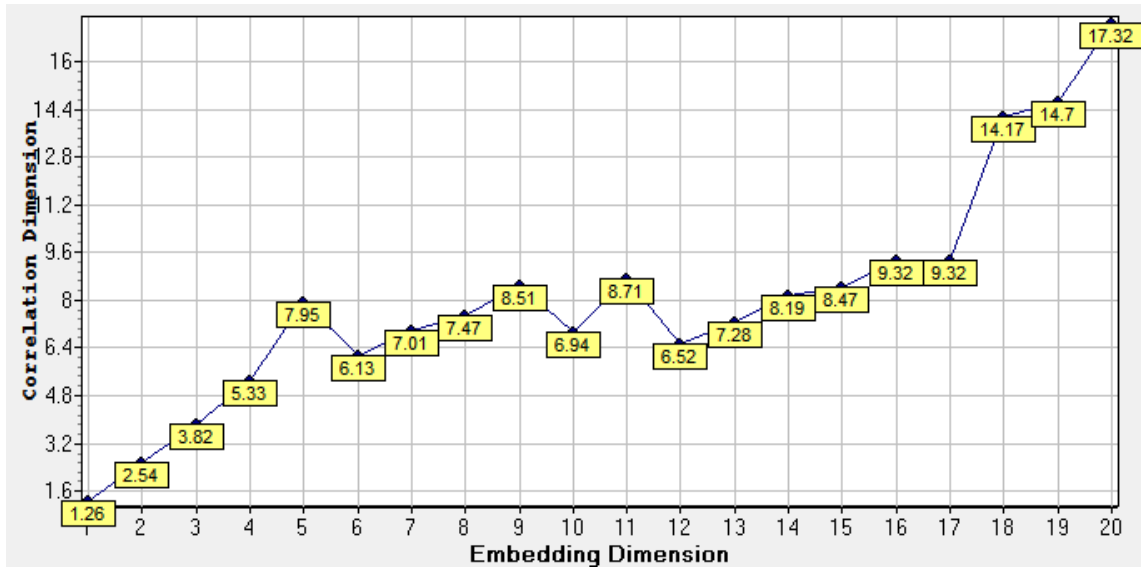
Figura J77. Dimensión de correlación P3



Fuente: Elaboración Propia

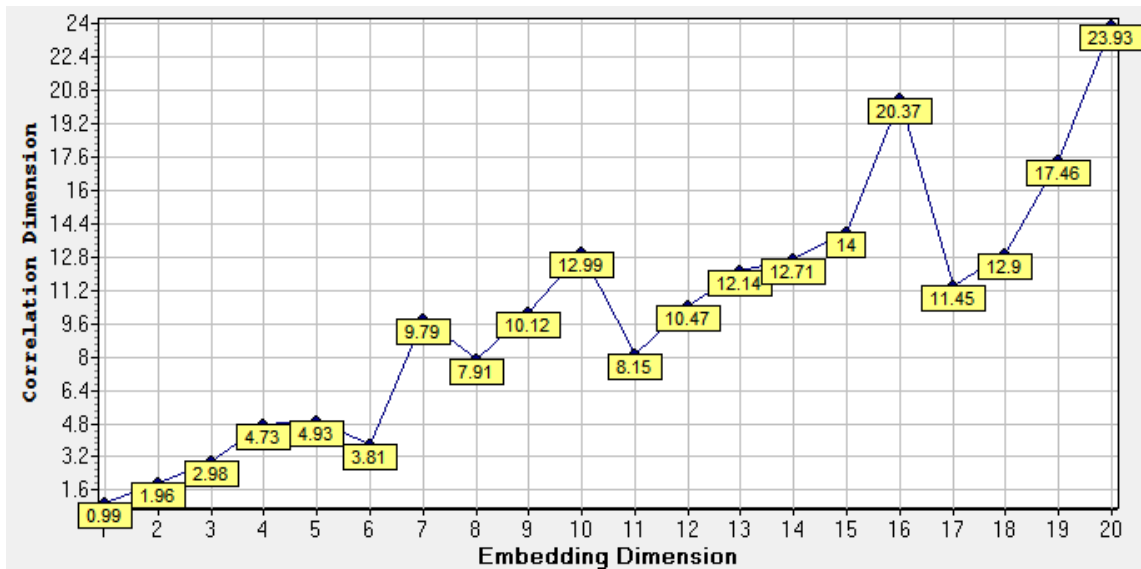
#### 4.7. ISAGEN

Figura J78. Dimensión de correlación ISAGEN



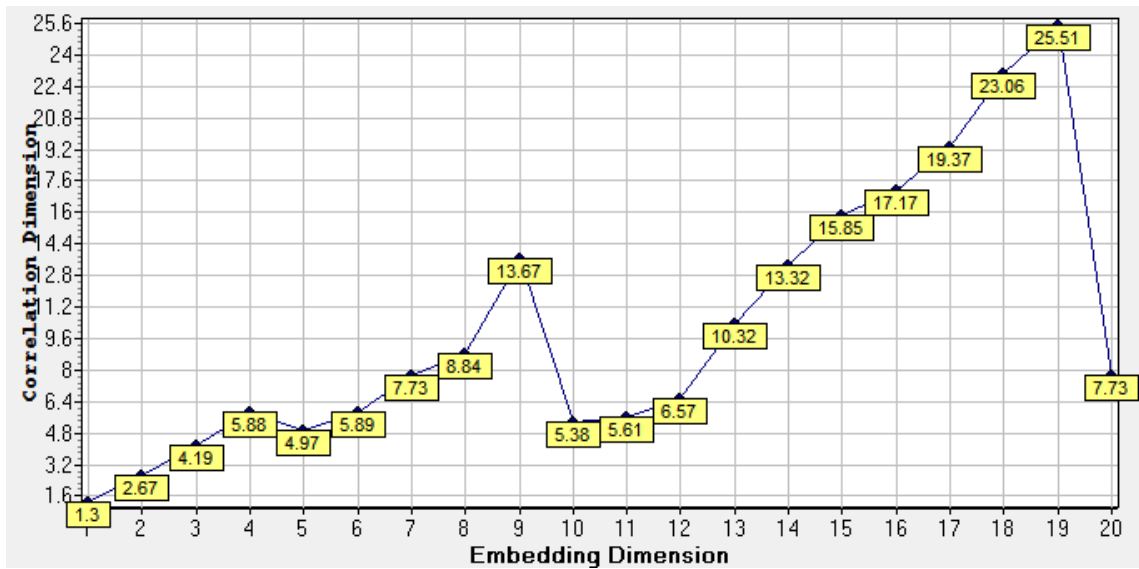
Fuente: Elaboración Propia

Figura J79. Dimensión de correlación P1



Fuente: Elaboración Propia

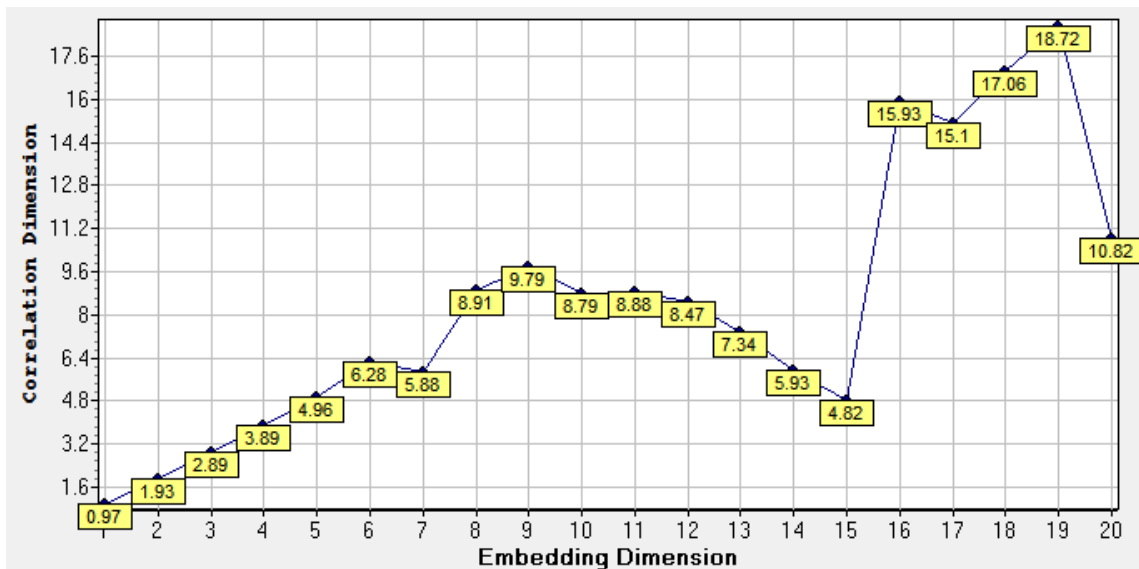
Figura I80. Dimensión de correlación P2



Fuente: Elaboración Propia

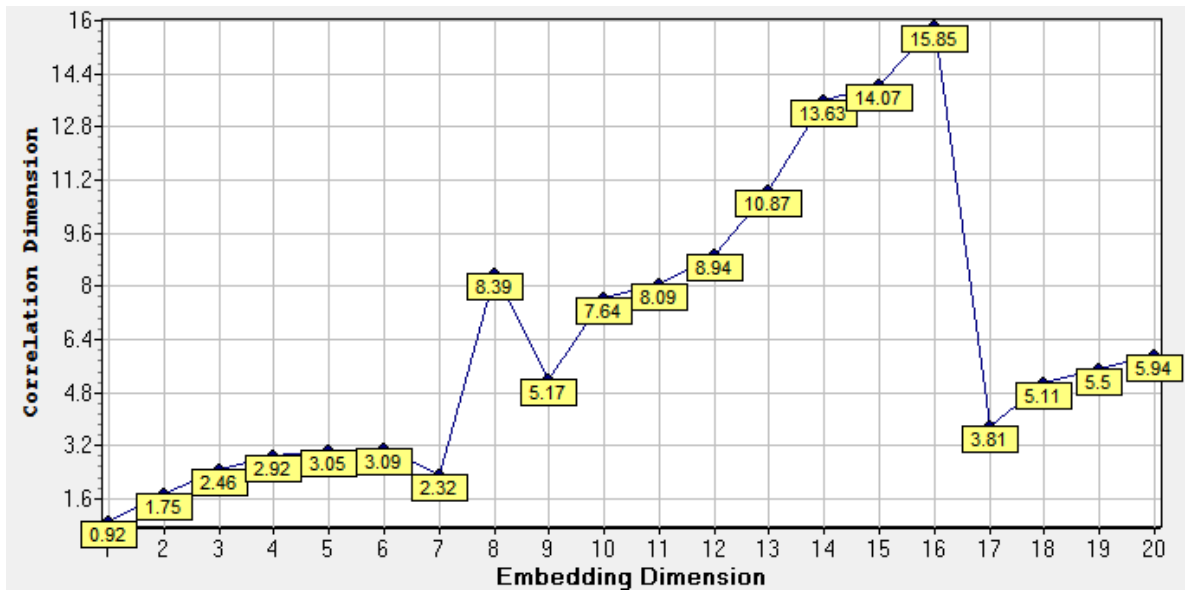
#### 4.8. BCOLOMBIA

Figura I81. Dimensión de correlación BCOLOMBIA



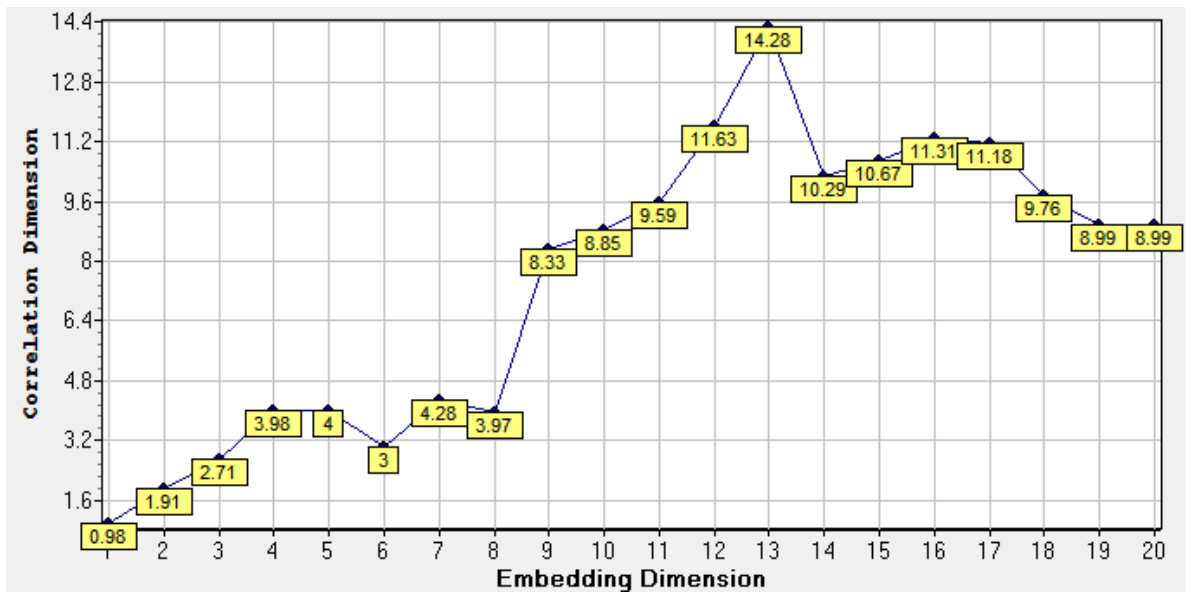
Fuente: Elaboración Propia

Figura J82. Dimensión de correlación P1



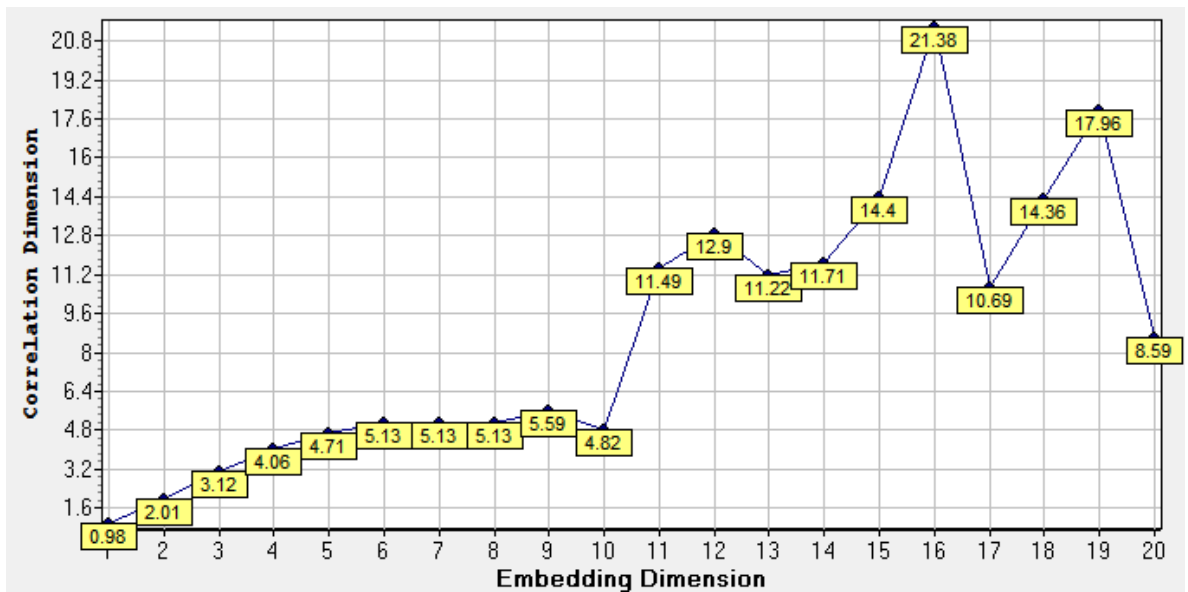
Fuente: Elaboración Propia

Figura I83. Dimensión de correlación P2



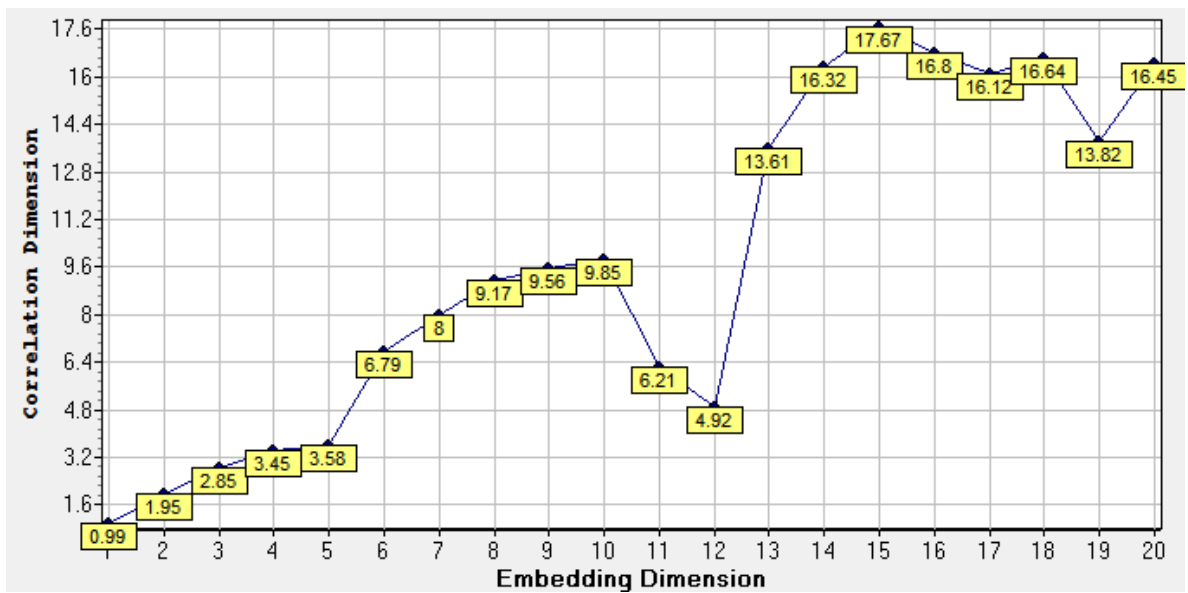
Fuente: Elaboración Propia

Figura J84. Dimensión de correlación P3



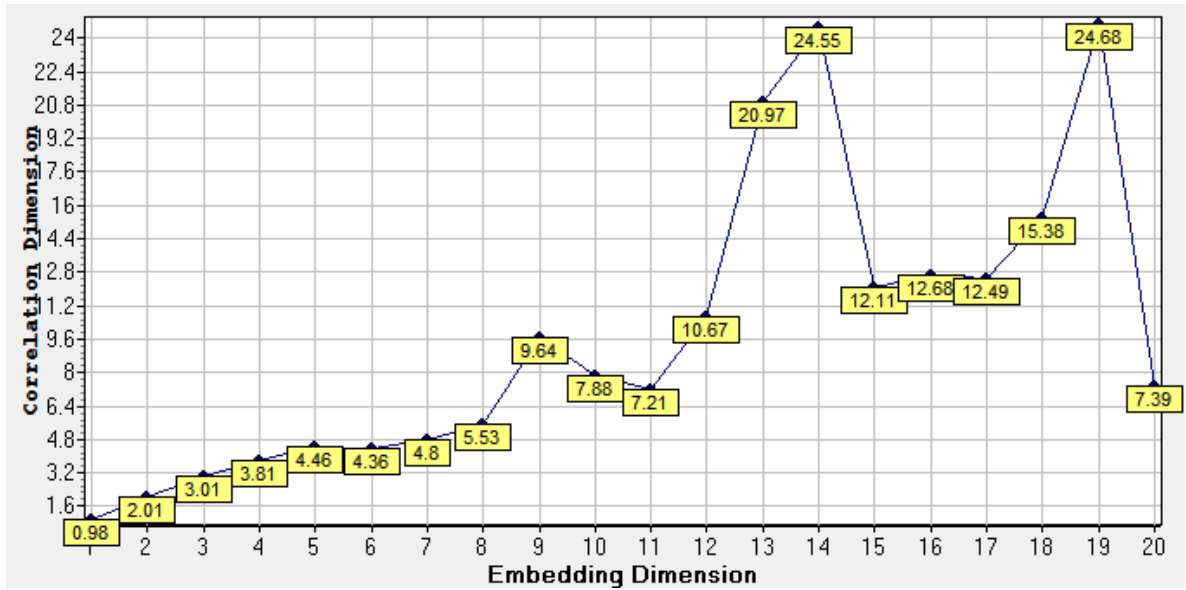
Fuente: Elaboración Propia

Figura J85. Dimensión de correlación P4



Fuente: Elaboración Propia

Figura J86. Dimensión de correlación P5



Fuente: Elaboración Propia

## ANEXOS

### Anexo A. Código MATLAB para cálculo del exponente de HURST

```
Y
s=y
N= length(s);
f1=figure;
t=1:N;
plot(t,s,'r')
xlabel('time','FontSize',12)
ylabel('DST(nT)','FontSize',12)
for i = 1:20;
    m = floor(N/(2*i));
    for j=1:i;
        r = s(1+(j-1)*m:j*m);
        M = mean(r);
        x = (r-M);
        V = cumsum(x);
        R(j) = max(V)-min(V);
        S(j) = std(r);
    end
    tau(i) = m;
    RS(i) = mean(R./S);
end
f2=figure;
plot(log10(tau),log10(RS),'+' )
xlabel('log(\tau)','FontSize',12)
ylabel('log(R/S)', 'FontSize',12)
hold on
q = polyfit(log10(tau),log10(RS),1);
t = 1.5:.01:3;
y = q(1)*t+(q(2));
plot(t,y,'r','LineWidth',2)
text(2,1,['y =' num2str(q(1)), ' x ' num2str(q(2))],'FontSize',12)
hold off
```

**Fuente:** Pérez-Enríquez, Román. Programa en Matlab para el cálculo del exponente de Hurst y dimensión fractal de series de tiempo. 2008

## Anexo B. Código MATLAB para cálculo del exponente de LYAPUNOV

### Código 1

Usage: Calculates largest Lyapunov exponent

```
% INPUTES:
% y: y is vector of values(time series data)
% tau: embedding lag of state space reconstruction. When you have not
% any information about tau please let it zero. The code will
calculates
% the tau.
% m: m is embedding dimension. If you have not any information about
% embedding dimension please let it zero. the code will find proper
% embedding dimension.

% OUTPUTS:
% LLE: Largest Lyapunov Exponent
% lambda: Lyapunov exponents for various ks. Plot of this exponents is
% very helpful. If embedding dimension be selected correctly lambda
curve
% will have smooth part(or fairly horizontal). If there is no smooth
% section on the curve, it is better you try with other embedding
% dimensions.

%_____Defining lags for y_____
yreg=y(:);
maxlag=m;
[nyr,nyc]=size(yreg);
yLreg=lagmatrix(y,1:maxlag);
yreg=yreg(maxlag+1:end,1);
yLreg=yLreg(maxlag+1:end,:);
[ryLreg cyLreg]=size(yLreg);

% Regressors Up to 3 degree

X1=yLreg;

num1=0;
num2=0;
X2ij=[];
X3ijk=[];
for i=1:cyLreg
    for j=i:cyLreg
        X2ij=[X2ij yLreg(:,i).*yLreg(:,j)];
        Indexij(num1+1,1)=i;
        Indexij(num1+1,2)=j;
        num1=num1+1;
    for k=j:cyLreg
        X3ijk=[ X3ijk yLreg(:,i).*yLreg(:,j).*yLreg(:,k)];
        Indexijk(num2+1,1)=i;
        Indexijk(num2+1,2)=j;
```

```

        Indexijk(num2+1,3)=k;
        num2=num2+1;

    end
end
end

X=[ones(ryLreg,1) X1 X2ij X3ijk];

beta =inv (X'*X)*X'*yreg;
e=yreg-X*beta;
myreg=yreg-mean(yreg);
R2=1-e'*e/(myreg'*myreg);
if R2<0
    R2=1;
end

%_____Defining lags for y:tau_____

%Embedding matrix.(time delay)
EM(1:nyr,1:m)=nan;
for lead=0:m-1
EM(1+lead*tau:nyr,lead+1)=y(1:nyr-lead*tau);
end

%EM after nan elimination.
EEM=EM(1+(m-1)*tau:nyr,:);
[rEEM cEEM]=size(EEM);

%_____Loop for distance calculations_____

dd=pdist(EEM,'chebychev');
dd=squareform(dd);

mad=std(y);
dd=dd+eye(rEEM)*10*mad;

for k=0:20
for n=1:rEEM-k

    l1=find(0.05*(1/R2)*mad<dd(n,1:end-k)<0.1*(1/R2)*mad)';

    u=dd(l1+k,n+k);
    LL(n,1) = log(mean(u));

end
L(k+1,1)=nanmean(LL);
K(k+1,1)=k;

```

```

end

lambda=diff(L)./diff(K);

figure('name','Lyapunov Exponent','NumberTitle','off')
plot(K,L, '.');
title(['Lyapunov Exponent'])

plot(lambda);
% _____ Nonlinear Regression Lyapunov Exponents _____

Lmax=max(L);
L0=L(1);
Lm=L0+0.9*(Lmax-L0);
Ldiff=abs(L-Lm);

Tl=find(Ldiff==min(Ldiff));

x=K(1:Tl);

[betar]=regress(L(1:Tl), [ones(Tl,1) x]);

for iii=1:100
beta = nlinfit(K(1:Tl),L(1:Tl),@nonlin1,[betar;randn(1,1)]);
LLE1(iii,1)=beta(2,1);
end
LLE=mean(LLE1);

```

## Código 2.

```

function yhat = nonlin1(beta,x)
b1 = beta(1);
b2 = beta(2);
b3 = beta(3);
yhat =b1+b2*x+b3*x./exp(b2*x);
end

```

Fuente: Mohammadi, Shapour. LYAPROSEN: MATLAB function to calculate Lyapunov exponent. (2009) Disponible en: <http://ideas.repec.org/c/boc/bocode/t741502.htm>

Anexo C. Certificado y ponencia "Ajuste de Modelos Econométricos al Mercado Bursátil Colombiano"



## AJUSTE DE MODELOS ECONOMETRICOS AL MERCADO BURSÁTIL COLOMBIANO

Juan Benjamín Duarte Duarte, Universidad Industrial de Santander-COL  
Juan Manuel Mascareñas Pérez-Iñigo, Universidad Complutense de Madrid-ESP  
Katherine Julieth Sierra Suárez, Universidad Industrial de Santander-COL

### RESUMEN

*En el presente trabajo se ajustan modelos ARIMA y GARCH, a las principales series financieras del mercado bursátil colombiano, hasta obtener aquellos que no presenten autocorrelaciones significativas en sus residuos. Ésto, con el objetivo de permitir el uso de herramientas de verificación de comportamiento caótico en mercados de renta variable, lo cual implica la no linealidad en los precios y la dependencia en el corto plazo respecto a sus valores históricos; permitiendo la predicción, basada en información endógena. La metodología consiste en probar, en primera instancia, la estacionariedad en los retornos de las series bursátiles, mediante el test de Dickey-Fuller Aumentado. Después, utilizando pruebas  $Q_{LB}$  y Bartlett determinar si las series presentan autocorrelaciones significativas en algunos de sus rezagos; justificando así el uso de la metodología de Box-Jenkins, para generar ajustes ARIMA y/o GARCH; con el objetivo de obtener modelos con residuos no autocorrelacionados. Por último, se elige el mejor ajuste para cada uno de los activos bursátiles, usando el criterio de Akaike. Todo lo anterior como preámbulo para probar la hipótesis de comportamiento caótico en las series financieras colombianas.*

JL: C22, C51

**PALABRAS CLAVE:** Autocorrelación, Estacionariedad, ARIMA, GARCH

## ECONOMETRIC MODELS ADJUSTMENT TO COLOMBIAN STOCK MARKET

### ABSTRACT

*In this paper it fits ARIMA and GARCH models, for the major financial series Colombian stock market, until those which do not exhibit significant autocorrelation in the residuals. This, in order to allow the use of verification tools chaotic behavior in stock markets, which implies non-linearity in prices and dependence in the short term compared to its historical values, allowing the prediction, based in endogenous information. The methodology is to test in the first instance, the stationarity in the returns of the stock series, using the Aumentged Dickey-Fuller. Then, using tests such as  $Q_{LB}$  and Bartlett determine whether the series exhibit significant autocorrelations in some of its lags, thus justifying the use of the methodology of Box-Jenkins to generate ARIMA and / or GARCH adjustments, to obtain models with residuals not autocorrelated. Finally, we choose the best fit for each stock assets, using the Akaike criterion. This as a preamble to test the hypothesis of chaotic behavior in the Colombian financial series.*

JL: C22, C51

**PALABRAS CLAVE:** Autocorrelation, Stacionarity, ARIMA, GARCH

## INTRODUCCIÓN

El modelamiento y análisis de mercados financieros surge con Bachelier (1900), quien fue pionero en el estudio de la martingala. Posteriormente otros autores como Cowles & Jones (1937) Alexander (1961) y Fama (1970), trabajan sobre la hipótesis de mercados eficientes, la cual ha sido base de muchos estudios que buscan comprobar comportamiento aleatorio en los retornos financieros. Sin embargo, varios autores han encontrado evidencia de que los mercados accionarios violan los supuestos de la hipótesis de comportamiento aleatorio, en cuanto a independencia y distribución normal. En contra de la hipótesis de mercado eficiente, se ha buscado indicios comportamiento caótico en las series financieras desde la década de los 80, partiendo del trabajo de Lorenz (1963) Takens (1981) y Mandelbrot (1982), entre otros. Desde entonces se han realizado diversos estudios en la búsqueda de comportamiento caótico en las series financieras y económicas (Di Matteo, Aste, & Dacorogna, 2005; Los, 2004; Espinosa, Parisi, & Parisi, 2007). La importancia de hallar comportamiento caótico en determinado activo financiero radica en que permite hacer previsiones para evitar riesgos innecesarios o tener la oportunidad de beneficios extras que la mayoría de inversores no puede aprovechar.

Algunas herramientas que permiten probar la existencia de un comportamiento caótico en las series de tiempo son sensibles a los procesos estocásticos en los cuales existen dependencias entre las variables. Por ello es necesario realizar un filtro para eliminar dichas dependencias, el cual se logra por medio de modelos tipo ARIMA (Box & Jenkins, 1970) y GARCH (Bollerslev, 1986), generando residuos no correlacionados. Por lo tanto, si el sistema es caótico, la serie de residuos tiene las mismas características del sistema original, en tanto que, si es estocástico los residuos no son más que ruido blanco. En este documento, inicialmente se estudian los datos con el fin de evaluar la normalidad de las series mediante estadísticas básicas, en seguida, se describe la metodología usada para ajustar modelos a los retornos de los activos financieros colombianos, por último, se presentan los modelos que mejor se aproximan al comportamiento de los datos.

### Datos Y Características De Los Retornos De Series Financieras Colombianas.

Los datos de las series de tiempo seleccionadas corresponden al valor de cierre diario del Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC) y de sus principales empresas, que representan aproximadamente el 60% de la composición del índice.

Tabla 1: Activos Financieros Seleccionados

activo	nemotécnico	n	fecha inicial	fecha final
Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia	IGBC	2,469	02/01/2002	09/02/2012
Pacific Rubiales Energy Corporation	PREC	506	22/01/2010	09/02/2012
Ecopetrol	ECOPETROL	1,005	02/01/2008	09/02/2012
Preferencial Bancolombia	PFBCOLOM	2,041	01/10/2003	09/02/2012
Grupo de Inversiones Suramericana	GRUPOSURA	660	01/06/2009	09/02/2012
Bancolombia	BCOLOMBIA	2,041	01/10/2003	09/02/2012
Cementos Argos	CEMARGOS	1,207	01/03/2007	09/02/2012

*Esta tabla presenta los Activos seleccionados, sus nemotécnicos oficiales, el número de datos, y el periodo de estudio. Fuente: Elaboración Propia.*

Se toma como fecha de inicio la entrada de cada activo al mercado bursátil omitiendo su periodo de estabilización. Se omiten los días en los que la Bolsa no operó y los que presentan valores nulos. La fuente de información fue la Bolsa de Valores de Colombia. Del análisis estadístico preliminar se

encuentra que las distribuciones de los diferentes activos financieros no son normales (Jarque-Bera), presentan leptocurtosis y en su mayoría son asimétricas negativas, con máximos y mínimos extremos.

### METODOLOGÍA

Los modelos ARIMA, se construyen en base a la presencia de autocorrelación. Sin embargo, la no estacionariedad puede causar correlación serial, por esta razón, inicialmente se comprueba si las series son estacionarias. Generalmente se acepta una estacionariedad débil, es decir, que sus dos primeros momentos son finitos e invariantes en el tiempo. En la literatura generalmente se asume que los retornos son estacionarios. Sin embargo, este supuesto debe ser probado empíricamente, mediante el Test de Dickey and Fuller Aumentado (DFA), el cual contrasta la Hipótesis Nula de que la serie es generada por un proceso de raíz unitaria, contra la hipótesis alternativa de estacionariedad. En seguida, se procede a detectar correlación serial entre las rentabilidades  $r_t$  y  $r_{t-l}$  ( $l = 1, 2 \dots m$ ), construyendo así la Función de Autocorrelación, denotada comúnmente por  $\rho_l$ , el cual bajo el supuesto de estacionariedad es una función de  $l$ .

$$\rho_l = \frac{\text{Cov}(r_t, r_{t-l})}{\sqrt{\text{Var}(r_t)\text{Var}(r_{t-l})}} = \frac{\text{Cov}(r_t, r_{t-l})}{\text{Var}(r_t)} = \frac{\gamma_l}{\gamma_0} \quad (1)$$

Una serie estacionaria no presenta autocorrelación si y solo si  $\rho_l = 0$  para todo  $l > 0$ . Con el promedio de los retornos  $\bar{r}$ . La autocorrelación muestral  $\hat{\rho}_l$ , dada por la ecuación 2, es consistente para estimar  $\rho_l$ .

$$\hat{\rho}_l = \frac{\sum_{t=l+1}^T (r_t - \bar{r})(r_{t-l} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2} \quad (2)$$

Para probar la autocorrelación individual de los rezagos, se usa el intervalo de confianza ( $\pm 1,96/\sqrt{T}$ ) de Bartlett (1946). Por otro lado para detectar la correlación colectiva, se utiliza el Estadístico Q de Ljung-Box (1978), el cual se describe como:

$$Q(m) = T(T+2) \sum_{l=1}^m \frac{\hat{\rho}_l^2}{T-l} \quad (3)$$

Donde  $T$  es el número total de datos,  $m$  el número total de rezagos y  $\hat{\rho}_l$  la auto-correlación del rezago  $l$ . Se rechaza la hipótesis de no autocorrelación, si el P-valor es menor o igual al nivel de significancia. La selección del  $m$  puede afectar el estadístico Q. En el estudio se tienen en cuenta los últimos diez rezagos basado en lo sugerido por Tsay (2005), y teniendo en cuenta que un horizonte máximo de dos semanas es apropiado para la toma de decisiones por parte de los inversionistas.

### Modelos ARIMA

Las autocorrelaciones se estiman suponiendo que siguen alguna estructura, ya sea de tipo autorregresivo AR, de media móvil MA o mixta tipo ARMA, representadas en las ecuaciones 4, 5 y 6 respectivamente.

$$r_t = \alpha_1 r_{t-1} + \alpha_2 r_{t-2} + \dots + \alpha_p r_{t-p} + u_t \quad (4)$$

$$r_t = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \dots + \beta_q u_{t-q} + \mu_t \quad (5)$$

$$r_t = \alpha_1 r_{t-1} + \alpha_2 r_{t-2} + \dots + \alpha_p r_{t-p} + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \dots + \beta_q u_{t-q} + \mu_t \quad (6)$$

La serie de retornos ya ha sido integrada una vez, por tanto un modelo ARIMA(p,d,q) de los precios, donde d es igual a 1; es equivalente a un modelo ARMA(p,q) para los retornos. Luego de comprobar que las series de retornos presentan autocorrelación, se usa la metodología Box Jenkins (1970), para encontrar modelos ARIMA. La cual consta de identificación, estimación, verificación y predicción. Sin embargo, el alcance de este trabajo no incluye pronósticos. Las herramientas principales en la **identificación**, son la función de autocorrelación (FAC), la función de autocorrelación parcial (FACP) y los correlogramas resultantes, que son los gráficos de la FAC y de la FACP respecto a la longitud del rezago. Con estas herramientas, se estiman los procesos estocásticos AR(p) y MA(q), siguiendo los criterios de identificación dados por Gujarati(2004). Al **estimar** los coeficientes AR y MA del modelo por mínimos cuadrados, se determina su significancia mediante el estadístico t-student y se **verifican** los residuos para determinar si presentan aleatoriedad o autocorrelación. Para evaluar las auto-correlaciones en los residuos se utiliza la prueba de Durbin-Watson presentada en la ecuación 7.

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^T (\hat{\mu}_t - \hat{\mu}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T \hat{\mu}_t^2} \quad (7)$$

Luego de evaluar varios modelos, se elige el mejor para cada serie de retornos tomando el de menor criterio de información de Akaike, el cual se estima usando el logaritmo de la función de verosimilitud  $l$  y el número de variables del modelo  $k$ , mediante la ecuación 8.

$$AIC = -2l/T + 2k/T \quad (8)$$

Una vez obtenidos, los mejores ajustes ARIMA, se evalúa la autocorrelación en sus residuos al cuadrado, mediante el test ARCH (Engle, 1982), presentado en la ecuación 9, con el fin de ajustarla a procesos de Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva Generalizada GARCH(p,q).

$$u_t^2 = \gamma_1 + \gamma_2 u_{t-1}^2 + \gamma_3 u_{t-2}^2 + \dots + \gamma_{11} u_{t-p}^2 \quad (9)$$

#### Modelos GARCH

Estos procesos indican que el comportamiento de la varianza en un instante de tiempo, depende de valores pasados de los errores al cuadrado y de sus propios valores rezagados, lo cual es representado matemáticamente en la ecuación 10.

$$r_t = \gamma_1 + \gamma_2 u_{t-1}^2 + \gamma_3 u_{t-2}^2 + \dots + \delta_1 \sigma_{t-1} + \delta_2 \sigma_{t-2} + \dots + \gamma_{11} u_{t-p}^2 + \delta_q \sigma_{t-q} + \varepsilon_t \quad (10)$$

Utilizando los correlogramas de los residuos al cuadrado, y la metodología Box-Jenkins se determinan los mejores modelos GARCH.

#### **RESULTADOS**

En la tabla 2 se presentan los mejores ajustes ARIMA para cada activo financiero, los cuales sirven de base para la estimación de los modelos GARCH.

Tabla 2: Modelos ARMA(p,q)

MODELO	C	AR(p)			MA(q)			
		1	3	7	4	6	7	9
IGBVC	0.00105	0.148				-0.079		0.069
PREC		0.130						
ECOPETROL				0.708			-0.697	
PFBCOLOM	0.001012					-0.051		0.053
GRUPOSURA			-0.078		-0.110			

Esta tabla muestra los modelos compuestos por coeficientes de los procesos autorregresivos y de media móvil identificados en la rentabilidad de los activos

Para los activos BCOLOMBIA y CEMARGOS no se encontraron modelos ARIMA, por no presentar autocorrelaciones significativas en los rezagos estimados. Sin embargo, para éstos se estima un ajuste GARCH, usando como residuos la desviación de cada observación respecto al promedio de los retornos. Los mejores modelos GARCH para cada uno de las series fueron: IGBC-GARCH(4,2); PREC-GARCH(3,5); ECOPETROL-GARCH(5,8); PFBCOLOM-GARCH(7,7); GRUPOSURA-GARCH(3,1); BCOLOMBIA-GARCH(3,7); CEMARGOS-GARCH(6,8).

### CONCLUSIONES

A la luz de lo que se persigue con este estudio, se encuentra que las principales series bursátiles del mercado colombiano presentan comportamientos ARIMA-GARCH, excepto BCOLOMBIA y CEMARGOS, lo cual permitiría filtrar las series de residuos, para aplicar herramientas de comprobación de comportamiento caótico, tales como coeficiente de Hurst y exponente de Lyupanov.

### BIBLIOGRAFÍA

- Alexander, S. (1961). Price Movements in Speculative Markets: Trends or Random Walks. *Industrial Management Review*, 2, 7-26.
- Bachelier, L. (1900). *Teoría de la especulación*.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- Box, G., & Jenkins, G. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. San Francisco.
- Cowles, A., & Jones, H. (1937). Some A Posteriori Probabilities in Stock Market Action. *Econometrica*, 5, 208-294.
- Di Matteo, T., Aste, T., & Dacorogna, M. M. (2005). Long-term memories of developed and emerging markets: Using the scaling analysis to characterize their stage of development. *Journal of Banking & Finance*, 29, 827-851.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50, 987-1008.
- Espinosa, C., Parisi, F., & Parisi, A. (2007). Evidencia de comportamiento caótico en índices bursátiles americanos. *El Trimestre Económico*, 74, 901-927.
- Fama, E. F. (1970). Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, 25, 383-417.
- Gujarati, D. N. (2005). *Econometría*. McGraw-Hill.

- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic Flow. *Journal of Atmospheric Sciences* , 20, 130.
- Los, C. A. (2004). Visualization of chaos for finance majors. *Economics Working Paper Archive* .
- Mandelbrot, B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*.
- Takens, F. (1981). Detecting Strange Attractors in Turbulence. *Lecture Notes in Mathematics* , 366-381.
- Tsay, R. S. (2005). *Analysis of financial time series*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.