

METODOLOGÍA PARA EL AJUSTE Y VALIDACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO DE UN ROTOR DE JEFFCOTT,  
MEDIANTE EL USO DE FUNCIONES DE RESPUESTA EN FRECUENCIA (*FRF*)

BRIAN FARID MORALES HERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA  
BUCARAMANGA  
2023

METODOLOGÍA PARA EL AJUSTE Y VALIDACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO DE UN ROTOR DE JEFFCOTT,  
MEDIANTE EL USO DE FUNCIONES DE RESPUESTA EN FRECUENCIA (*FRF*)

BRIAN FARID MORALES HERNÁNDEZ

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Ingeniería Mecánica

Director

Heller Guillermo Sánchez Acevedo

PhD. Ingeniería Mecánica Aplicada y Computacional

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA  
BUCARAMANGA

2023

## CONTENIDO

pág.

<b>INTRODUCCIÓN</b>	13
<b>1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN</b>	15
1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	15
1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	15
1.3 JUSTIFICACIÓN	15
1.4 HIPÓTESIS	16
1.5 OBJETIVOS	16
1.5.1 Objetivo general	16
1.5.2 Objetivos específicos	16
<b>2. REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE</b>	17
2.1 MODELOS NUMÉRICOS DE ROTORES	17
2.2 MÉTODOS DE COMPARACIÓN Y CORRELACIÓN MODAL	17
2.3 AJUSTE DE MODELOS NUMÉRICOS	18
2.3.1 Ajuste de modelos basados en funciones de respuesta en frecuencia ( <i>FRF</i> )	18
2.3.2 Ajuste de modelos en rotores	19
<b>3. ESPECIFICACIONES DEL ROTOR</b>	21
3.1 GEOMETRÍA DEL ROTOR Y PROPIEDADES MECÁNICAS DEL MATERIAL	21
3.2 GEOMETRÍA Y PROPIEDADES DEL MATERIAL DEL DISCO Y ACCESORIOS	22
3.3 GEOMETRÍA DEL COJINETE Y PROPIEDADES DEL ACEITE	23
3.4 MASA Y RADIO DE DESBALANCEO AÑADIDO	24
<b>4. MODELO NUMÉRICO DEL ROTOR</b>	25
4.1 SISTEMA DE COORDENADAS	25
4.2 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO	25
4.3 DISCRETIZACIÓN DEL ROTOR EN ELEMENTOS FINITOS	27
4.4 SELECCIÓN DE FUNCIONES DE FORMA	27
4.5 CÓMPUTO DE LAS MATRICES	31
4.5.1 Matriz de rigidez	31
4.5.2 Matriz de masa	32

4.5.3	Matriz de inercia rotacional	33
4.5.4	Matriz de efecto giroscópico	34
4.5.5	Matriz de rigidez de amortiguamiento interno	35
4.6	COJINETES HIDRODINÁMICOS	36
4.7	DISCOS	39
4.8	APORTES DE RIGIDEZ DE LOS ACCESORIOS INSTALADOS	40
4.8.1	Acople	41
4.8.2	Cadena	41
4.9	ENSAMBLE DE MATRICES	44
4.9.1	Ensamble de matrices de los elementos discretizados	44
4.9.2	Adición de matrices de cojinetes y accesorios	45
<b>5.</b>	<b>SOLUCIÓN DEL MODELO NUMÉRICO DEL ROTOR</b>	<b>46</b>
5.1	ESPACIO DE ESTADOS	46
5.2	VALORES Y VECTORES PROPIOS	47
5.3	ORDENAMIENTO DE MODOS Y RESOLUCIÓN DE CRUCES	47
5.4	CABECEO DEL ROTOR	49
5.5	ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DEL MALLADO	50
5.6	ANÁLISIS MODAL	53
5.6.1	Diagrama de Campbell	53
5.6.2	Diagrama de estabilidad	55
5.6.3	Formas de deflexión	56
5.7	FUNCIÓN DE RESPUESTA EN FRECUENCIA ( <i>FRF</i> )	57
5.7.1	<i>FRF</i> a partir de la representación en espacio de estados	58
5.7.2	Respuesta del sistema	59
5.8	DINÁMICA DE LOS COJINETES	61
<b>6.</b>	<b>AJUSTE Y VALIDACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO</b>	<b>63</b>
6.1	ADQUISICIÓN DE DATOS EXPERIMENTALES	63
6.1.1	Prueba de arranque del rotor	63
6.1.2	Montaje	64
6.1.3	Parámetros de adquisición de las señales de vibración	64
6.2	PROCESAMIENTO DE DATOS	65
6.2.1	Velocidad de rotación del rotor	65

6.2.2 Seguimiento de órdenes de la amplitud en desplazamiento	66
6.3 COMPARACIÓN Y CORRELACIÓN MODAL	68
6.4 OPTIMIZACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO	70
6.4.1 Algoritmo genético	71
6.4.2 Búsqueda de patrones	71
6.4.3 Función objetivo	71
6.4.4 Variables de ajuste	72
6.4.5 Límites de las variables de ajuste	75
6.4.6 Población inicial	75
6.4.7 Configuración del algoritmo de optimización	76
6.4.8 Proceso iterativo de optimización	77
6.5 METODOLOGÍA DE AJUSTE Y VALIDACIÓN	79
<b>7. ANÁLISIS DE RESULTADOS</b>	81
7.1 MODELO AJUSTADO	81
7.2 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD Y COMPORTAMIENTO VIBRATORIO DEL ROTOR	87
7.3 COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE LOS COJINETES	91
7.4 RESPUESTA DEL ROTOR	92
<b>8. CONCLUSIONES</b>	96
<b>9. RECOMENDACIONES</b>	98
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	105
<b>ANEXOS</b>	106

## LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Características geométricas del rotor y propiedades mecánicas del material	22
Tabla 2. Características geométricas del disco principal, muñones y accesorios	23
Tabla 3. Características geométricas de los cojinetes hidrodinámicos	23
Tabla 4. Propiedades químicas del aceite de lubricación del cojinete TP ISO 68	24
Tabla 5. Número de elementos y análisis de convergencia a 14400 [RPM]	52
Tabla 6. Discretización del rotor en elementos de longitud variable	52
Tabla 7. Posiciones nodales de los discos, cojinetes y accesorios	53
Tabla 8. Configuración de las variables de adquisición de datos con los sensores de proximidad	65
Tabla 9. Configuración de las variables de adquisición de datos con el fototacómetro óptico	65
Tabla 10. Límites y punto inicial de las variables de ajuste	75
Tabla 11. Resultados de la ejecución del algoritmo híbrido de optimización	81
Tabla 12. Variables de ajuste del modelo numérico del rotor optimizadas	86

## LISTA DE FIGURAS

pág.

Figura 1. Banco experimental para el estudio de rotores flexibles soportados en cojinetes hidrodinámicos	21
Figura 2. Disco y accesorios instalados sobre el rotor	22
Figura 3. Coordenadas, desplazamientos y rotaciones globales del rotor	25
Figura 4. Diagrama esquemático del rotor tipo Jeffcott con cojinetes hidrodinámicos	26
Figura 5. Coordenadas, desplazamientos y rotaciones nodales de los elementos de viga	27
Figura 6. Coordenadas locales y naturales de los elementos de viga	28
Figura 7. Características geométricas de un cojinete hidrodinámico de dos lóbulos	37
Figura 8. Secciones de disco en el muñón 1	39
Figura 9. Acople del motor al rotor	41
Figura 10. Sección de cadena	42
Figura 11. Rigidez de la cadena de transmisión	42
Figura 12. Rigidez equivalente de los eslabones de la cadena	43
Figura 13. Ensamble de matrices	44
Figura 14. Adición de matrices	45
Figura 15. Representación gráfica de los primeros cuatro modos cruzados	48
Figura 16. Sentido de rotación del cabeceo del rotor	50
Figura 17. Convergencia de las frecuencias naturales de acuerdo con el número de elementos	51
Figura 18. Diagrama de Campbell del modelo numérico del rotor sin ajustar	54
Figura 19. Diagrama de estabilidad del modelo numérico del rotor sin ajustar	55
Figura 20. Formas modales del modelo numérico del rotor sin ajustar	57
Figura 21. Receptancia: Función de respuesta en frecuencia	59
Figura 22. Respuesta en frecuencia	60
Figura 23. Dinámica de los cojinetes hidrodinámicos del modelo numérico del rotor sin ajustar	61
Figura 24. Equipos e instrumentos utilizados en la adquisición de vibraciones	63
Figura 25. Montaje de sensores de proximidad en el banco experimental del rotor	64
Figura 26. Respuesta del rotor en el grado de libertad 29 (dirección $x$ )	66
Figura 27. Respuesta del rotor en el grado de libertad 30 (dirección $y$ )	67
Figura 28. Respuesta del rotor en el grado de libertad 53 (dirección $x$ )	67
Figura 29. Respuesta del rotor en el grado de libertad 54 (dirección $y$ )	68
Figura 30. <i>FRAC</i> entre la respuesta del modelo numérico y la respuesta experimental del rotor	70

Figura 31. Diagrama de flujo del proceso de optimización y ajuste del modelo numérico	78
Figura 32. Metodología de ajuste y validación a partir de la respuesta en frecuencia del rotor	79
Figura 33. Valor de aptitud y mejor individuo actual de la ejecución del algoritmo genético	82
Figura 34. Mejor valor y punto actual de la ejecución de la búsqueda de patrones	83
Figura 35. <i>FRAC</i> entre la respuesta del modelo numérico ajustado y la respuesta experimental	84
Figura 36. Diagrama de Campbell del modelo numérico del rotor ajustado	87
Figura 37. Diagrama de estabilidad del modelo numérico del rotor ajustado	88
Figura 38. Formas modales del modelo numérico del rotor ajustado a 3430 [RPM]	89
Figura 39. Formas modales del modelo numérico ajustado a 5660 [RPM]	90
Figura 40. Dinámica de los cojinetes hidrodinámicos del modelo numérico del rotor ajustado	91
Figura 41. Respuesta del rotor (modelo ajustado) en el grado de libertad 29 (dirección $x$ )	92
Figura 42. Respuesta del rotor (modelo ajustado) en el grado de libertad 30 (dirección $y$ )	93
Figura 43. Respuesta del rotor (modelo ajustado) en el grado de libertad 53 (dirección $x$ )	94
Figura 44. Respuesta del rotor (modelo ajustado) en el grado de libertad 54 (dirección $y$ )	95
Figura 45. Analizador multicanal OROS OR35	106
Figura 46. Proximitor, cable extensor y transductor SHINKAWA	107
Figura 47. Fuente DC Tektronix	107
Figura 48. Sensor óptico remoto y módulo de alimentación	108

## LISTA DE CÓDIGOS

	pág.
Código 1. Opciones de configuración del algoritmo genético	76
Código 2. Opciones de configuración del algoritmo de búsqueda de patrones	77
Código 3. Estructura del solver o solucionador	77

## LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. Especificaciones técnicas de equipos y sensores	106
Anexo B. Opciones de optimización del algoritmo de búsqueda de patrones	109

## RESUMEN

**TÍTULO:** METODOLOGÍA PARA EL AJUSTE Y VALIDACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO DE UN ROTOR DE JEFFCOTT, MEDIANTE EL USO DE FUNCIONES DE RESPUESTA EN FRECUENCIA (FRF)\*

**AUTORES:** BRIAN FARID MORALES HERNÁNDEZ\*\*

**PALABRAS CLAVE:** Ajuste, Campbell, Cojinetes hidrodinámicos, FRAC, Estabilidad, Jeffcott, Rotor.

### DESCRIPCIÓN

El presente trabajo de investigación desarrolla una metodología orientada al ajuste y validación del modelo numérico de rotores flexibles, con énfasis en aquellos soportados en cojinetes con características anisotrópicas. La metodología de ajuste se fundamenta en la implementación de un algoritmo de optimización híbrido. Este algoritmo combina las capacidades de un Algoritmo Genético (GA) y un algoritmo de Búsqueda de Patrones (PS). La correlación numérico-experimental de la respuesta del rotor en desplazamiento se realiza utilizando el Criterio de Confianza de Respuesta en Frecuencia (FRAC). Los resultados obtenidos permiten validar el modelo numérico del rotor y evidencian la funcionalidad de la metodología de ajuste. Se muestra que factores como la dinámica de los cojinetes hidrodinámicos y su influencia en el rotor dificultan el proceso de ajuste y generan un costo computacional elevado. Con el modelo numérico ajustado, se analiza el comportamiento dinámico del rotor. Se pone énfasis en las formas modales o formas de deflexión, la variación de las frecuencias naturales en función de la velocidad de rotación y la estabilidad del sistema.

---

\* Tesis de Maestría

\*\* Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Director: Heller Guillermo Sánchez Acevedo, PhD. Maestría en Ingeniería Mecánica.

## ABSTRACT

**TITLE:** METHODOLOGY FOR THE UPDATE AND VALIDATION OF THE NUMERICAL MODEL OF A JEFFCOTT ROTOR, THROUGH THE USE OF FREQUENCY RESPONSE FUNCTIONS (FRF)\*

**AUTHORS:** BRIAN FARID MORALES HERNÁNDEZ\*\*

**KEYWORDS:** Campbell, FRAC, Jeffcott, Journal bearing, Rotor, Stability, Update.

### DESCRIPTION

This research work develops a methodology designed for updating and validating the numerical model of flexible rotors, with an emphasis on those supported by bearings with anisotropic characteristics. The update methodology is based on the implementation of a hybrid optimization algorithm. This algorithm combines the capabilities of a Genetic Algorithm (GA) and a Pattern Search (PS) algorithm. The numerical-experimental correlation of the rotor's displacement response is carried out using the Frequency Response Assurance Criterion (FRAC). The obtained results validate the numerical model of the rotor and demonstrate the functionality of the update methodology. Factors such as the dynamics of the journal bearings and their influence on the rotor complicate the update process and generate a high computational cost. With the updated numerical model, the dynamic behavior of the rotor is analyzed. Emphasis is placed on modal shapes or deflection shapes, the variation of natural frequencies as a function of rotational speed, and the stability of the system.

---

\* Master's Thesis

\*\* Physicomechanical Faculty of Engineering. School of Mechanical Engineering. Director: Heller Guillermo Sánchez Acevedo, PhD. Master's degree in Mechanical Engineering.

## INTRODUCCIÓN

La dinámica de rotores o rotordinámica desempeña un papel de gran importancia en el campo de la turbomaquinaria. Esta importancia radica en la posibilidad de reducir fallas, mejorar la eficiencia y prolongar la vida de útil de los equipos, generalmente de alta criticidad.

El estudio de la dinámica de los rotores está sustentado en el modelamiento numérico de los sistemas, de tal modo que reflejen el comportamiento real de los rotores. Sin embargo, la interacción de diferentes fuerzas y efectos, como la dinámica del fluido de aceite en los cojinetes hidrodinámicos, entre otros aspectos, representan un gran desafío a la hora de modelar su comportamiento. En este sentido, la validación y ajuste de los modelos numéricos implementados para el análisis de la dinámica de los rotores, se constituye como un aspecto fundamental para garantizar la confianza en la predicción y control de las vibraciones no deseadas en los equipos rotativos.

El presente trabajo de investigación desarrolla una metodología orientada al ajuste y validación del modelo numérico de rotores flexibles, con énfasis en aquellos soportados en cojinetes con características anisotrópicas. La metodología de ajuste propuesta se desarrolla a partir de un rotor basado en el modelo de Jeffcott o modelo modal, con un disco centrado, y soportado en cojinetes hidrodinámicos. El trabajo se desarrolló en la plataforma de programación y cálculo numérico de MATLAB. La aplicación de la metodología puede extenderse a diferentes tipos de rotores con características geométricas, soportes o configuraciones diferentes, que permitan la medición de la respuesta del sistema en un rango considerable de velocidades de rotación (variador de velocidad).

El modelo numérico de un rotor ajustado permite conocer el comportamiento dinámico del rotor y su interacción con los componentes instalados. Además, permite realizar seguimientos de la condición del sistema o detectar fallas, y modelar cambios estructurales que permitan predecir la respuesta dinámica real del rotor al efectuarse dichos cambios.

Uno de los aspectos más representativos en la complejidad del proceso de ajuste, se encuentra en el costo computacional generado por el comportamiento dependiente de los cojinetes hidrodinámicos con la velocidad de rotación del rotor, que además generan modos de alta amplitud y amortiguamiento que cambian de orden y dificultan el proceso de reducción del modelo numérico. Del mismo modo, la inclusión de las matrices de amortiguamiento en el modelo numérico del rotor, también dificultan el proceso de reducción necesario para la comparación y correlación con los datos experimentales.

En el Capítulo 1, se presenta el planteamiento del problema de investigación, donde se expone la justificación, importancia y los objetivos referentes al trabajo de investigación.

En el Capítulo 2, se realiza una revisión general del estado del arte sobre los procesos de ajuste y validación de modelos numéricos en rotores, teniendo en cuenta la implementación de modelos numéricos, los métodos o técnicas de comparación y correlación modal, las técnicas de reducción de modelos y expansión de coordenadas modales, y los métodos de ajuste y validación de modelos numéricos en rotores, con énfasis en aquellos basados en el uso de Funciones de Respuesta en Frecuencia (*FRF*).

En el Capítulo 3, se presentan las características geométricas, mecánicas y/o químicas, del rotor, el disco principal, los cojinetes y otros accesorios instalados sobre el rotor.

En el Capítulo 4, se implementa el modelo numérico del rotor que comprende desde la selección y obtención de las funciones de forma hasta la obtención y ensamble de las matrices de rigidez, masa, amortiguamiento, inercia rotacional y efectos giroscópicos.

En el Capítulo 5, se presenta la solución del modelo numérico del rotor, donde se determina el sentido de giro del cabeceo del rotor, se selecciona de manera óptima el número de elementos en que se discretiza el rotor y se establecen otros resultados de relevante importancia para el estudio de la dinámica del rotor, como el diagrama de Campbell, el diagrama de estabilidad y las formas de deflexión o formas modales.

En el Capítulo 6, se describe la metodología implementada para el proceso de ajuste del modelo numérico, a partir de los datos adquiridos del modelo real, incluyendo el procesamiento de los datos experimentales, la correlación de los datos teórico-experimentales y la configuración del algoritmo de optimización utilizado en el proceso de ajuste.

En el Capítulo 7, se muestran los resultados obtenidos del proceso de ajuste del modelo numérico del rotor implementado y se analiza el comportamiento dinámico del rotor con énfasis en las formas modales, la variación de las frecuencias naturales en función de la velocidad de rotación y la estabilidad del sistema.

Finalmente se presentan las conclusiones y las recomendaciones, derivadas del trabajo de investigación desarrollado.

# 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

## 1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Los modelos numéricos han sido ampliamente utilizados, entre diversas áreas, para estudiar el comportamiento de la respuesta dinámica de los sistemas mecánicos. Dichos modelos requieren de procesos que permitan ajustar sus resultados, con respecto a los presentados por el sistema real en las mismas condiciones de operación, de tal forma que esta información pueda ser empleada para el análisis y estudio del comportamiento dinámico del sistema.

Los modelos numéricos usados para representar el comportamiento dinámico de los rotores o rotodinámica, son en su mayoría simplificaciones e idealizaciones que abordan de forma general los complejos fenómenos físicos que ocurren durante la rotación de estos sistemas. Sin embargo, estas consideraciones no garantizan una adecuada correlación y correspondencia con el comportamiento dinámico real de los rotores. En este sentido, se hace necesario implementar y apropiar metodologías que permitan realizar el ajuste y la validación del modelo numérico, de tal modo, que permitan estudiar y analizar de forma confiable la respuesta dinámica de los rotores y así evitar la toma de decisiones erróneas en los ámbitos de diseño y mantenimiento, en aplicaciones que incluyen estos tipos de rotores.

## 1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Es posible ajustar y validar un modelo numérico de un rotor flexible tipo Jeffcott, soportado en cojinetes hidrodinámicos anisotrópicos, mediante Funciones de Respuesta en Frecuencia (FRF), de tal modo que permitan reproducir la respuesta dinámica real del sistema?

## 1.3 JUSTIFICACIÓN

El ajuste y validación de modelos, es una herramienta de gran utilidad para reproducir con gran exactitud la respuesta dinámica de un sistema real. En este sentido, esta investigación pretende implementar una metodología de ajuste y validación del modelo numérico de un rotor soportado en cojinetes hidrodinámicos, que se ajuste de forma consistente con el comportamiento rotodinámico del sistema, y proporcione información útil para comprender las variables que inciden en la respuesta dinámica de este tipo de sistemas con parámetros anisotrópicos y no lineales.

El modelo numérico de un rotor flexible debidamente ajustado y validado, proporciona también información

de gran interés, que puede llegar a utilizarse en aplicaciones prácticas, como, por ejemplo, la evaluación de la condición de turbomáquinas, aerogeneradores y otros sistemas que integran rotores flexibles y cojinetes con comportamiento anisotrópico en sus diseños.

De igual manera, el desarrollo de esta investigación permitirá reducir la brecha de conocimiento existente respecto al ajuste de modelos numéricos en elementos mecánicos rotativos en el país y la región, y permitirá consolidar las líneas estratégicas de vibraciones mecánicas y rotodinámica del Grupo de Investigación en Energía y Medio Ambiente (GIEMA).

## **1.4 HIPÓTESIS**

La implementación de una metodología de ajuste y validación fundamentada en Funciones de Respuesta en Frecuencia (FRF), que conduce a la identificación y ajuste del grado de correlación entre la respuesta del modelo numérico y los resultados experimentales de un rotor flexible con apoyos de características anisotrópicas, permite contar con modelos validados que brindarán información fiable para el estudio y análisis de la respuesta dinámica del sistema en operación.

## **1.5 OBJETIVOS**

**1.5.1 Objetivo general.** Implementar una metodología para el ajuste y validación del modelo numérico de un rotor de Jeffcott a escala de laboratorio, soportado en cojinetes anisotrópicos, mediante la aplicación de métodos de comparación y correlación basados en las Funciones de Respuesta en Frecuencia (FRF).

### **1.5.2 Objetivos específicos.**

- Implementar el modelo numérico de un rotor flexible tipo Jeffcott a escala de laboratorio, soportado en cojinetes anisotrópicos, considerando el efecto giroscópico, las fuerzas de desbalanceo y el amortiguamiento externo.
- Caracterizar dinámicamente el rotor de Jeffcott, a partir de la identificación numérica y experimental de los parámetros modales del sistema y la Función de Respuesta en Frecuencia (FRF).
- Validar y ajustar el modelo numérico, empleando herramientas de comparación y correlación, basadas en el Criterio de Confianza Modal (MAC) y en procesos de ajuste fundamentados en el uso de Funciones de Respuesta en Frecuencia (FRF).

## 2. REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE

### 2.1 MODELOS NUMÉRICOS DE ROTORES

Uno de los primeros y más destacados modelos referentes a los rotores, es la propuesta de Jeffcott,<sup>40</sup> orientada al estudio de vibraciones laterales en un rotor simple con un disco centrado, sujeto a fuerzas de desbalanceo. Otros enfoques basados en esta propuesta incluyen rotores soportados en rodamientos, cojinetes y con diferentes masas asociadas, a estos nuevos modelos se les denomina modelos modales de uno, dos o múltiples modos laterales.<sup>59</sup>

En la actualidad, la literatura disponible cuenta con diversos compendios de información que abordan diferentes aspectos relacionados con la dinámica de los rotores, desde la modelación matemática hasta el estudio de los fenómenos asociados al comportamiento dinámico de los rotores, como la estabilidad del sistema. Estas temáticas son expuestas de forma detallada por Tiwari<sup>74</sup> y Friswell.<sup>25</sup> A nivel académico, Jones<sup>43</sup> realiza un completo estudio sobre el modelo de elementos finitos de rotores que cuentan con la influencia de efectos giroscópicos.

### 2.2 MÉTODOS DE COMPARACIÓN Y CORRELACIÓN MODAL

En los procesos de ajuste de modelos numéricos, es necesario determinar el grado de correspondencia entre los modos de vibración teóricos y experimentales. Este proceso de correspondencia se realiza mediante la aplicación de métodos de comparación y correlación modal.

Uno de los métodos más utilizados, es el criterio de confianza modal (*MAC*),<sup>2</sup> que proporciona cuantitativamente el grado de consistencia y linealidad entre los vectores modales comparados. El *MAC* ha servido como base para el desarrollo de diversos criterios o métodos de comparación y correlación modal,<sup>1</sup> destinados a diferentes aplicaciones en los análisis modales. Uno de los métodos más representativos, es el criterio de confianza modal por coordenadas (*COMAC*),<sup>50</sup> una extensión del *MAC* que involucra la incidencia de los grados de libertad, en la correlación de los modos analizados.

Otro enfoque de los métodos de comparación y correlación modal está orientado a determinar el grado de correspondencia entre las funciones de respuesta en frecuencia (*FRF*), en este sentido, a partir del *MAC*, se desarrolló el criterio de confianza de respuesta en frecuencia (*FRAC*).<sup>35</sup> Otros métodos derivados del *MAC* y el *FRAC* son el criterio de confianza en el dominio de la frecuencia (*FDAC*)<sup>63</sup> y el factor de escala de respuesta en frecuencia (*FRSF*),<sup>63</sup> que dan prioridad a las variaciones de frecuencia de la *FRF*.

Para el caso de rotores, en donde se involucran efectos giroscópicos, se desarrolló el criterio de confianza modal para rotores (*RMAC*),<sup>57</sup> el cuál pondera las matrices de masa y rigidez de acuerdo con la energía de vibración.

## 2.3 AJUSTE DE MODELOS NUMÉRICOS

**2.3.1 Ajuste de modelos basados en funciones de respuesta en frecuencia (*FRF*).** En general, el ajuste de modelos se realiza a partir de la correlación teórico-experimental de los parámetros modales, sin embargo, se ha introducido un nuevo enfoque orientado hacia el uso de funciones de respuesta en frecuencia (*FRF*), con el fin de contar con un flujo mayor de información. En este sentido, Friswell<sup>23</sup> desarrolló un algoritmo de ajuste para un modelo de elementos finitos con funciones de respuesta en frecuencia y, Lin y Ewins<sup>52</sup> un método de ajuste con datos directos de las funciones de respuesta en frecuencia.

Algunas de las ventajas destacadas en el uso de funciones de respuesta en frecuencia para el ajuste de modelos, son, por ejemplo, el no requerir análisis modales y de este modo reducir el error inherente de la identificación modal o disponer de información abundante como las características de amortiguamiento, en todo el rango de frecuencias medido.<sup>17</sup> Por otro lado, existen algunas desventajas como la presencia de ruido en las mediciones, problemas de convergencia por una inadecuada selección de frecuencias, la dificultad del ajuste por la incongruencia dimensional entre los grados de libertad del modelo y los puntos de medición,<sup>39</sup> y el ajuste de modelos con presencia significativa de amortiguamiento.<sup>51</sup>

El ruido en las mediciones de vibraciones puede atenuarse mediante la promediación de las señales, sin embargo, la presencia de falsos modos o altos niveles de vibración por transientes indeseadas, son difíciles de atenuar y generan *FRF* de baja calidad. Mohd et al.,<sup>81</sup> plantearon el uso de funciones de respuesta en frecuencia sintetizadas, con el fin de mejorar la correspondencia teórico-experimental del modelo de una estructura soldada.

Al seleccionar inadecuadamente las frecuencias de ajuste, se pueden presentar algunos inconvenientes originados por presencia de ruido y el problema matemático de ajustar rangos espectrales en los puntos de resonancia. En este sentido, Esfandiari et al.<sup>21</sup> sugieren el uso de rangos de frecuencia alrededor de las resonancias, de modo que no las incluyan y que no disten mucho de ellas. De igual forma sugieren evitar rangos de frecuencias que incluyan antiresonancias por la cantidad de ruido que contienen. Los resultados obtenidos de su investigación demuestran mejoras en la convergencia y precisión del proceso de ajuste.

Para mitigar la diferencia entre los grados de libertad de un modelo numérico con respecto a los puntos

de medición, Yan y Golinval<sup>79</sup> sugieren el uso de dos técnicas numéricas, la descomposición de valores singulares (*SVD*) y la perturbación diagonal, y adicionalmente el uso del criterio de confianza en el dominio de la frecuencia (*FDAC*) modificado.

El ajuste de modelos representativos de estructuras amortiguadas mediante funciones de respuesta en frecuencia puede conllevar a perder información relevante y por consiguiente a un inadecuado ajuste. En este sentido, Lin y Zhu<sup>51</sup> ampliaron la metodología convencional de ajuste basada en funciones de respuesta en frecuencia, para identificar los coeficientes de amortiguamiento y actualizar los errores de modelización.

Otras estudios e investigaciones referentes a los procesos de ajuste basados en funciones de respuesta en frecuencia están orientados a mejorar la eficiencia del proceso de ajuste, como se evidencia en el aporte de Wang et al.<sup>76</sup> al introducir un metamodelo tipo *Kriging* para reemplazar el modelo de elementos finitos de una estructura *Garteur*, en el proceso de ajuste mediante funciones de respuesta en frecuencia. El resultado de su investigación demuestra la efectividad del método y la obtención de resultados satisfactorios.

**2.3.2 Ajuste de modelos en rotores.** El ajuste de modelos numéricos en rotores se puede realizar desde dos perspectivas diferentes: en análisis estáticos y en análisis dinámicos. En el enfoque orientado a los análisis estáticos, los datos usualmente son obtenidos de un análisis modal experimental (*EMA*) y está destinado a la identificación de daños estructurales.

Lu et al.<sup>54</sup> implementaron un método de identificación de grietas en rotores, a partir del ajuste del modelo del rotor con un modelo sustituto de *Kriging* y las respuestas superarmónicas inducidas por las grietas en el rotor. Alonso et al.<sup>3</sup> de forma análoga ajustan el modelo de un rotor con seis aspas, representativo de un rotor de turbomaquinaria aeronáutica, para la identificación de daños estructurales. Hofmeister et al.,<sup>36</sup> también realizan el ajuste del modelo del aspa del rotor de un aerogenerador *off-shore* para la detección de daños.

El ajuste de modelos en rotores con datos experimentales en operación (análisis dinámicos) involucra una mayor complejidad, debido en gran parte a la existencia de problemas de valores propios no autoadjuntos,<sup>48,49</sup> lo que hace necesario implementar metodologías de ajuste diferentes.<sup>41,48</sup> Lindemann,<sup>53</sup> por ejemplo, aplicó metodologías usadas para modelos estructurales y evaluó su factibilidad en el uso de la dinámica de los rotores. Otra dificultad en el proceso de ajuste corresponde a los componentes asociados a los rotores, como cojinetes, rodamientos, acoples, entre otros. En este sentido Tadeo y Cavalca<sup>71</sup> analizaron la incidencia de los acoples flexibles en la respuesta vibratoria de los rotores, mediante el ajuste de los modelos de diferentes tipos de acoples.

El uso de métodos de ajuste iterativos, se pueden considerar los más apropiados para el ajuste de modelos de rotores. Dentro de estos métodos, se encuentran los análisis de sensibilidad de valores propios o frecuencias naturales. Por ejemplo, Ricci et al.<sup>65</sup> modelaron un turbogenerador industrial de vapor para analizar las vibraciones torsionales mediante un análisis de sensibilidad. Del mismo modo, Nascimento y Caldiron,<sup>60</sup> implementaron un método de estimación de rigidez en los apoyos de un rotor por medio de un análisis de sensibilidad. Chouksey et al.,<sup>11-13</sup> también implementaron diversas metodologías de ajuste basadas en el análisis de sensibilidad, conocidas como métodos de sensibilidad propia inversa (*IESM*), para el ajuste del modelo de un rotor soportado en rodamientos, un rotor soportado en cojinetes hidrodinámicos, y el ajuste de la rigidez y amortiguamiento, radial y angular de los elementos rodantes de un rodamiento.

Dentro de los métodos de ajuste iterativos, los algoritmos de optimización se han consolidado como una alternativa efectiva para diversas aplicaciones. Wroblewski et al.<sup>77</sup> implementaron un algoritmo *Nelder-Mead* para ajustar el modelo del rotor de un husillo soportado en cojinetes magnéticos activos. Madden y Sawicki,<sup>55</sup> y Xu et al.,<sup>78</sup> igualmente aplicaron el algoritmo *Nelder-Mead* para ajustar el modelo de un rotor como herramienta de control de los cojinetes magnéticos activos.

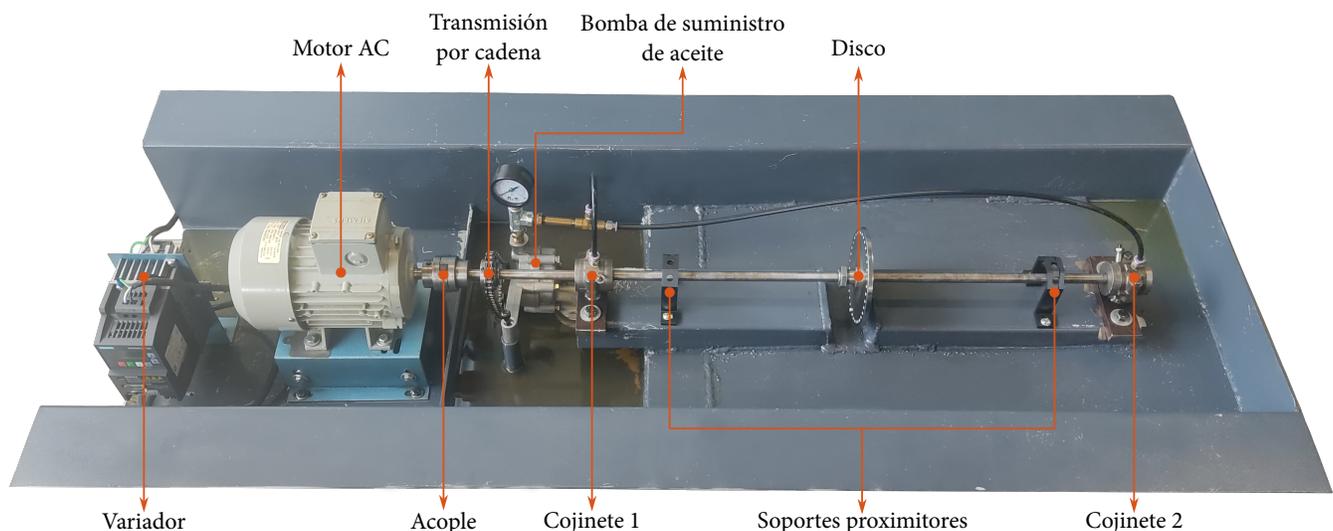
Uno de los factores de gran relevancia en los procesos de ajuste, es contar con una cantidad considerable de datos. Bajo esta premisa, el uso de funciones de respuesta en frecuencia (*FRF*) garantiza datos representativos y abundantes. En este sentido, Ziaei-Rad,<sup>80</sup> realizó un estudio sobre diversas técnicas de optimización determinísticas y estocásticas para el ajuste del modelo de un rotor, a partir de funciones de respuesta en frecuencia (*FRF*). Algunas de las técnicas destacadas en su estudio, son: la regresión lineal por mínimos cuadrados (*LLS*), los algoritmos genéticos (*GA*) y el método de recocido simulado adaptativo (*ASA*). Feng et al.,<sup>22</sup> analizaron el uso individual y combinado de los algoritmos genéticos (*GA*) con el método de recocido simulado adaptativo (*ASA*), concluyendo que el uso combinado de los algoritmos es más efectivo.

Al momento de trabajar con funciones de respuesta en frecuencia (*FRF*) en los procesos de ajuste, es necesario seleccionar adecuadamente las frecuencias para evitar zonas que generen un comportamiento asintótico, propio de las zonas circundantes a las frecuencias de resonancia. Kwon y Lin,<sup>48</sup> propusieron un método de selección eficiente de frecuencias en procesos de ajuste de modelos basados en el uso de *FRF*. El modelo analizado, comprende un rotor soportado en rodamientos, y la aplicación de funciones de respuesta en frecuencia direccionales (*dFRF*) desarrolladas por Joh y Lee,<sup>42</sup> con el fin de encontrar características de asimetría y anisotropía en rotores flexibles.

### 3. ESPECIFICACIONES DEL ROTOR

El modelo numérico del rotor se implementa a partir del banco de ensayos mostrado en la Figura 1, el cual se encuentra ubicado en el Laboratorio de Vibraciones Mecánicas de la Escuela de Ingeniería Mecánica, en la Universidad Industrial de Santander. El banco de ensayos está conformado por un motor AC trifásico de dos polos SIEMENS 1LA7 070-2 YA60 de 0.75 [HP] y 3430 [RPM], con variador de velocidad SIEMENS Sinamics V20 6SL3210-5BB17-5UV1, que está conectado mediante un acople flexible de tres mordazas al rotor. También cuenta con una bomba de suministro de aceite para la lubricación de los cojinetes hidrodinámicos, conectada mediante una cadena de transmisión a un piñón instalado sobre el rotor.

Figura 1. Banco experimental para el estudio de rotores flexibles soportados en cojinetes hidrodinámicos



Fuente: Elaboración propia.

#### 3.1 GEOMETRÍA DEL ROTOR Y PROPIEDADES MECÁNICAS DEL MATERIAL

El rotor tiene un diámetro pequeño de sección transversal constante y longitud relativamente larga con respecto a su diámetro, y está fabricado en acero para maquinaria AISI 4140. Las características geométricas del rotor y las propiedades mecánicas del material se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Características geométricas del rotor y propiedades mecánicas del material (acero AISI 4140)

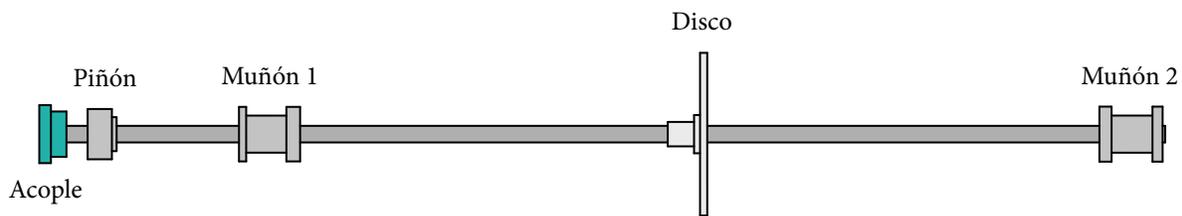
Característica o propiedad	Valor
Diámetro $D$	1.27 [cm]
Longitud $L$	85.7 [cm]
Módulo elástico longitudinal $E$	$210 \times 10^9$ [GPa]
Módulo elástico transversal $G$	$81.7 \times 10^9$ [GPa]
Densidad $\rho$	7850 [ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ]

Fuente: Elaboración propia.

### 3.2 GEOMETRÍA Y PROPIEDADES DEL MATERIAL DEL DISCO Y ACCESORIOS

En el rotor está dispuesto un disco de diámetro considerable y pequeño espesor, para el estudio de los efectos giroscópicos en la dinámica del rotor. Otros elementos o accesorios están instalados sobre el rotor, como los muñones de los cojinetes, el piñón que transmite potencia mediante una cadena de transmisión a la bomba de suministro de aceite de los cojinetes, y un acople flexible conectado al motor. Tanto el piñón como el acople son simplificados como discos, para facilitar los cálculos en el modelo numérico.

Figura 2. Disco y accesorios instalados sobre el rotor



Fuente: Elaboración propia.

Los discos son segmentados en secciones de acuerdo con las variaciones diametrales como se muestra en la Figura 2, y están enumerados desde el lado de accionamiento (acople), hasta el lado libre del rotor (muñón 2). Las características geométricas del disco y los accesorios, así como las densidades del material, se encuentran tabuladas en la Tabla 2.

Tabla 2. Características geométricas del disco principal, muñones y accesorios

<b>Disco</b>	<b>Diámetro [cm]</b>	<b>Espesor [cm]</b>	<b>Densidad del material [kg · m<sup>-3</sup>]</b>
Acople 1.1	4.44	0.89	7850
Acople 1.2	3.47	1.48	7850
Piñón 1.1	3.85	1.855	7850
Piñón 1.2	2.6	0.36	7850
Muñón 1.1	4.175	0.55	7850
Muñón 1.2	2.84	3.075	7850
Muñón 1.3	4.175	1.05	7850
Disco 1.1	1.87	2.01	7850
Disco 1.2	2.93	0.46	7850
Disco 1.3	12.45	0.555	7850
Muñón 2.1	4.215	0.93	7850
Muñón 2.2	2.845	3.13	7850
Muñón 2.3	4.215	0.775	7850

Fuente: Elaboración propia.

### 3.3 GEOMETRÍA DEL COJINETE Y PROPIEDADES DEL ACEITE

Los cojinetes que soportan el rotor son cojinetes bipartidos de dos lóbulos con relación longitud/diámetro de aproximadamente 1. Las características geométricas básicas, se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Características geométricas de los cojinetes hidrodinámicos

<b>Característica</b>	<b>Cojinete 1</b>	<b>Cojinete 2</b>
Diámetro del cojinete $D_c$	2.865 [cm]	2.865 [cm]
Longitud del cojinete $L_c$	3 [cm]	3 [cm]
Diámetro del muñón $D_m$	2.84 [cm]	2.845 [cm]

Fuente: Elaboración propia.

El aceite de lubricación de los cojinetes hidrodinámicos es un aceite TP ISO 68 con características antidesgaste. Las propiedades químicas requeridas en el modelo numérico se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. Propiedades químicas del aceite de lubricación del cojinete TP ISO 68

<b>Propiedad</b>	<b>Valor</b>
Gravedad <i>API</i>	29.9
Gravedad específica <i>GE</i>	0.8767
Densidad del aceite $\rho_a$ a 15°C (60°F)	875.9171 [kg · m <sup>-3</sup> ]
Viscosidad cinemática $\nu_a$ nominal a 40°C	68 [cSt]
Viscosidad dinámica del aceite $\eta_a$	0.0596 [Pa · s]

Fuente: Elaboración propia con base en *FT-L-04 Ficha Técnica Aceite Hidráulico TP ISO 68*. URL: <https://www.lubrigras.net/producto/lubry-hidraulico-tp-iso-68/>

### 3.4 MASA Y RADIO DE DESBALANCEO AÑADIDO

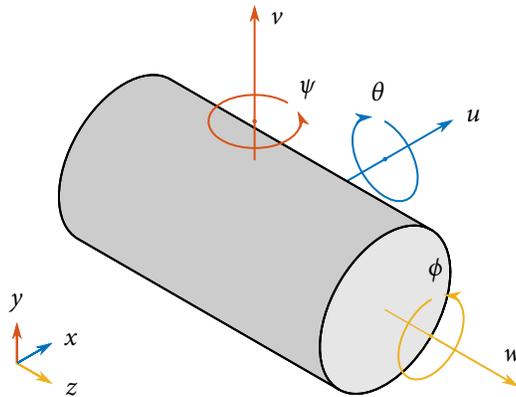
Se agrega una masa de desbalanceo de 1.8 [g] al disco principal del rotor, situada a una distancia radial de 5.75 [cm]. Esta masa actuará como una fuerza de control durante el proceso de ajuste del modelo numérico del rotor.

## 4. MODELO NUMÉRICO DEL ROTOR

### 4.1 SISTEMA DE COORDENADAS

Las coordenadas, desplazamientos y rotaciones globales definidas para la implementación del modelo numérico de un rotor tipo Jeffcott, se muestran en la Figura 3. Los desplazamientos  $u$ ,  $v$  y  $w$  corresponden a la dirección y orientación de los ejes cartesianos  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Las rotaciones  $\theta$ ,  $\psi$  y  $\phi$  son positivas en sentido antihorario con respecto a los ejes cartesianos (sentido positivo).

Figura 3. Coordenadas, desplazamientos y rotaciones globales del rotor



Fuente: Elaboración propia.

### 4.2 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

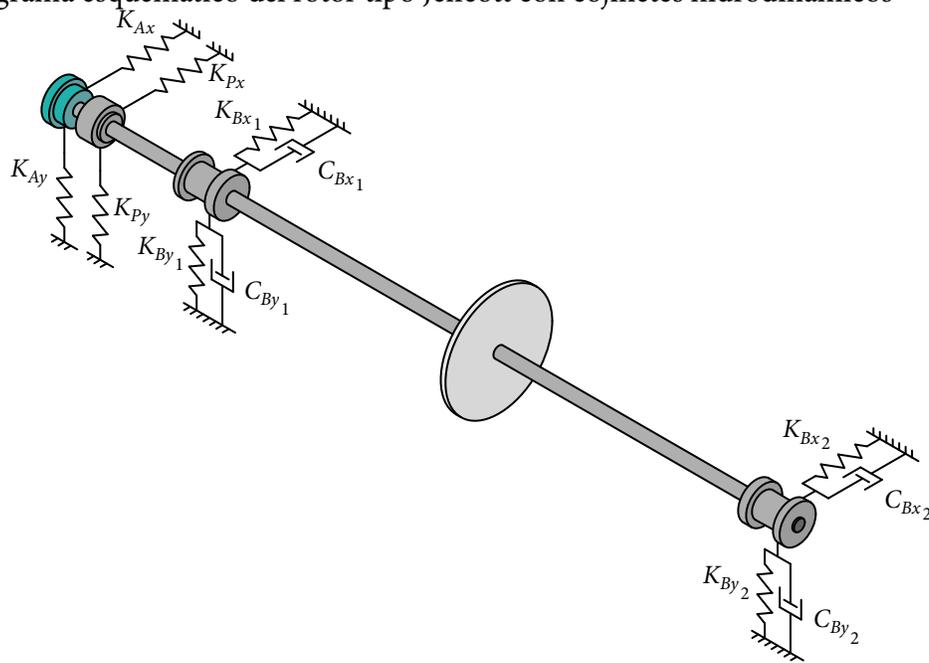
La ecuación de movimiento de un sistema amortiguado de múltiples grados de libertad está dada por:

$$M\ddot{\mathbf{q}}(t) + C\dot{\mathbf{q}}(t) + K\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

Donde  $M$  es la matriz de masa,  $C$  es la matriz de amortiguamiento,  $K$  es la matriz de rigidez,  $\mathbf{f}$  es el vector de fuerzas y,  $\ddot{\mathbf{q}}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\mathbf{q}$  son los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento.

El modelo numérico del rotor o modelo modal está basado en un rotor tipo Jeffcott como se muestra en la Figura 4, donde  $K_A$  es el aporte en rigidez del acople al rotor,  $K_P$  es el aporte en rigidez al rotor debido al piñón que transmite potencia hacia la bomba de suministro de aceite de los cojinetes, mediante transmisión por cadena,  $K_B$  es el aporte de rigidez de los cojinetes hidrodinámicos al rotor y  $C_B$  es el aporte de amortiguamiento de los cojinetes hidrodinámicos al rotor. Los subíndices  $x$  e  $y$  representan la dirección

Figura 4. Diagrama esquemático del rotor tipo Jeffcott con cojinetes hidrodinámicos



Fuente: Elaboración propia.

del aporte de rigidez o amortiguamiento de los elementos al rotor, y los subíndices 1 y 2 representan el orden de ubicación de los cojinetes desde el lado del motor.

Al expandir la ecuación de movimiento y adecuarla a las características de un sistema constituido por un rotor basado en el modelo de Jeffcott y soportado en cojinetes anisotrópicos como se muestra en la Figura 4, obtenemos:

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_{ir})\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\beta\mathbf{K} + \omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \omega\beta\mathbf{K}_{ai})\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2)$$

Donde  $\mathbf{M}_{ir}$  es la matriz de inercia rotacional,  $\mathbf{G}$  es la matriz de efectos giroscópicos,  $\mathbf{K}_{ai}$  es la matriz de rigidez de amortiguamiento interno,  $\omega$  es la velocidad de rotación del rotor y  $\beta$  es la constante de amortiguamiento proporcional a la rigidez, obtenida a partir de la ecuación de amortiguamiento proporcional o amortiguamiento de Rayleigh dada por:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (3)$$

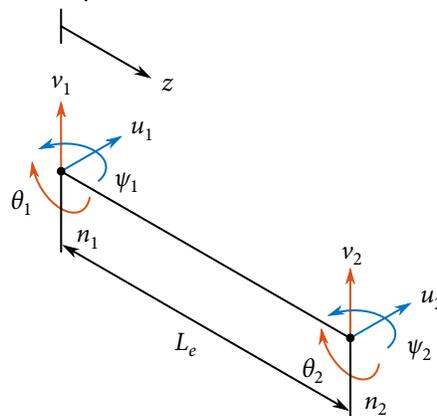
Incluir la constante de amortiguamiento proporcional a la masa  $\alpha$  puede suponer un problema difícil de manejar, tanto en la respuesta del sistema, como en la estimación de dicho valor, por lo tanto, la constante

es despreciada.<sup>18,44</sup>

### 4.3 DISCRETIZACIÓN DEL ROTOR EN ELEMENTOS FINITOS

El modelo numérico del rotor se discretiza en elementos lineales de viga de longitud variable  $L_e$ , con 2 nodos  $n$  por elemento. Para cada uno de los nodos se definen 4 grados de libertad, dos traslacionales  $u, v$  y dos rotacionales  $\theta, \psi$ , es decir, 8 grados de libertad por elemento. Los índices y la configuración de los elementos de viga se muestran en la Figura 5.

Figura 5. Coordenadas, desplazamientos y rotaciones nodales de los elementos de viga



Fuente: Elaboración propia

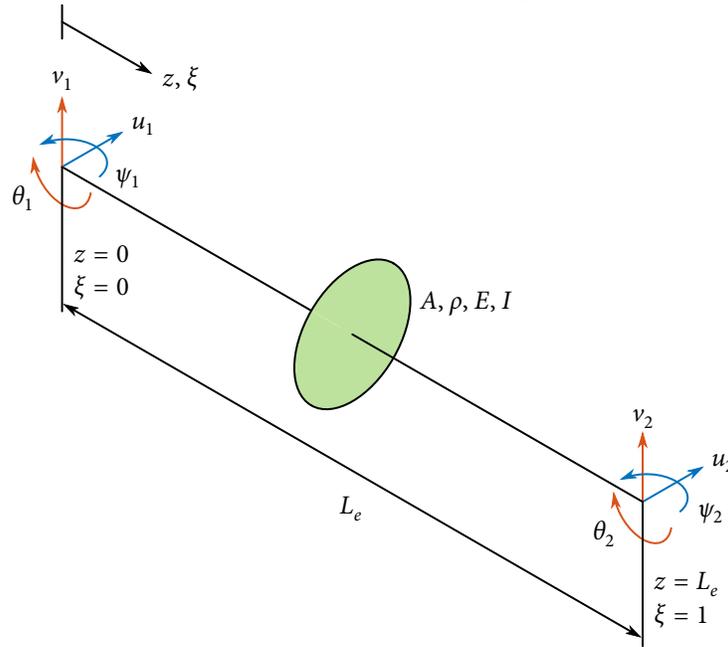
El uso de elementos de longitud variable se establece para facilitar la discretización del rotor en función de los accesorios instalados, y en las posiciones de montaje de los sensores de proximidad instalados para la adquisición de datos experimentales.

### 4.4 SELECCIÓN DE FUNCIONES DE FORMA

Para obtener las matrices que describen el comportamiento dinámico del rotor, se determinan las funciones de forma o funciones de interpolación que permitan aproximar los desplazamientos de los elementos discretizados, para el cómputo de las matrices mediante el método de energías.

Como primer paso para determinar las funciones de forma, se establece un sistema de coordenadas naturales  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ) en función de las coordenadas locales  $z$  del elemento, como se muestra en la Figura 6, donde,  $A$  representa el área transversal,  $\rho$  la densidad del material,  $E$  el módulo elástico longitudinal e  $I$  el segundo momento de inercia del elemento.

Figura 6. Coordenadas locales y naturales de los elementos de viga



Fuente: Elaboración propia

Las coordenadas naturales  $\xi$  están relacionadas con las coordenadas locales  $z$  y la longitud del elemento de viga  $L_e$ , mediante la siguiente expresión:

$$\xi(z) = \frac{z}{L_e} \quad (4)$$

Luego:

$$dz = L_e d\xi \quad (5)$$

Con la relación entre  $\xi$  y  $z$  establecida, se selecciona una función polinómica para los desplazamientos  $\hat{q}_t = \{u \ v\}$ , en cualquier punto de la longitud del elemento. Para el caso específico de los elementos de viga del rotor, se selecciona una función polinómica de grado 3 (función cúbica), considerando los cuatro grados de libertad por plano del elemento. Luego:

$$\hat{q}_t(\xi) = \begin{Bmatrix} u(\xi) \\ v(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3 \\ \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \xi^2 + \beta_4 \xi^3 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Posteriormente, se establece una relación entre los desplazamientos y las rotaciones con base en el sistema

de coordenadas definido en la Figura 6, luego la relación está dada por:

$$\theta = -\frac{dv}{dz} \quad y \quad \psi = \frac{du}{dz} \quad (7)$$

Luego, transformando la Ecuación 7 en función de la relación entre las coordenadas naturales y las coordenadas locales dada por la Ecuación 5, se obtiene:

$$\theta = -\frac{1}{L_e} \frac{dv}{d\xi} \quad y \quad \psi = \frac{1}{L_e} \frac{du}{d\xi} \quad (8)$$

La función polinómica para las rotaciones  $\hat{q}_r = \{\theta \ \psi\}$  se obtiene derivando la Ecuación 6 con respecto a  $\xi$ , de acuerdo con la Ecuación 8 y las coordenadas establecidas en la Figura 6. La función está dada por:

$$\hat{q}_r(\xi) = \begin{Bmatrix} \theta(\xi) \\ \psi(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} (\alpha_2 + 2\alpha_3\xi + 3\alpha_4\xi^2) \\ \frac{1}{L} (\beta_2 + 2\beta_3\xi + 3\beta_4\xi^2) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

El conjunto de funciones polinómicas para los desplazamientos y rotaciones se puede escribir de forma matricial como:

$$\hat{q}(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi & 0 & \xi^2 & 0 & \xi^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \xi & 0 & \xi^2 & 0 & \xi^3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{2}{L}\xi & 0 & -\frac{3}{L}\xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & \frac{2}{L}\xi & 0 & \frac{3}{L}\xi^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\hat{q}(\xi) = \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}$$

Después de establecer las funciones polinómicas, se evalúa  $\mathbf{P}$  en los grados de libertad del elemento,

sustituyendo los valores de  $\xi$  correspondientes, luego:

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_e} & 0 & -\frac{2}{L_e} & 0 & -\frac{3}{L_e} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_e} & 0 & \frac{2}{L_e} & 0 & \frac{3}{L_e} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{E}\boldsymbol{\alpha}$$

Reordenando la ecuación, se tiene:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{q} \quad (12)$$

Luego, sustituyendo la Ecuación 10 en la Ecuación 12, se obtiene:

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{P}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{q} \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{N}\mathbf{q}$$

$\mathbf{N}$  es la matriz de funciones de forma, y su cómputo de acuerdo con la Ecuación 13 está dado por:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & N_1 & -N_2 & 0 & 0 & N_3 & -N_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Donde:

$$N_1 = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \quad (15a)$$

$$N_2 = L_e\xi^3 - 2L_e\xi^2 + L_e\xi \quad (15b)$$

$$N_3 = -2\xi^3 + 3\xi^2 \quad (15c)$$

$$N_4 = L_e\xi^3 - L_e\xi^2 \quad (15d)$$

## 4.5 CÓMPUTO DE LAS MATRICES

El cómputo de las matrices que describen el comportamiento dinámico de cada uno de los elementos de viga que conforman el rotor, se realiza mediante el método de energías<sup>6</sup> (principio de conservación de la energía) y la teoría clásica de vigas o modelo de vigas de Euler-Bernoulli,<sup>7</sup> y el modelo de vigas de Rayleigh.<sup>68</sup>

**4.5.1 Matriz de rigidez.** La matriz de rigidez  $K_e$  de cada elemento, de acuerdo con el modelo de vigas de Euler-Bernoulli, se obtiene a partir de la energía potencial, que para el caso de una viga<sup>34</sup> está dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} EI \left( \frac{\partial^2 q(z, t)}{\partial z^2} \right)^2 dz \quad (16)$$

Donde  $E$  representa el módulo elástico longitudinal e  $I$  el segundo momento de inercia del elemento. Luego, asumiendo que el rotor tiene una sección transversal constante, y transformando la Ecuación 16 desde el sistema de coordenadas globales  $z$  al sistema de coordenadas locales  $\xi$ , de acuerdo con la Ecuación 5, se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} \frac{EI}{L_e^3} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 q(\xi, t)}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi \quad (17)$$

La energía potencial de un sistema de varios grados de libertad se puede expresar de forma matricial como:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (18)$$

Luego, la energía potencial definida en la Ecuación 17, se puede reescribir de acuerdo con las funciones de forma  $\mathbf{N}$ , el vector de desplazamientos nodales  $\mathbf{q}$  y la Ecuación 18, como:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left( \frac{EI}{L_e^3} \int_0^1 \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' d\xi \right) \mathbf{q} \quad (19)$$

De la Ecuación 19 se puede computar la matriz de rigidez de cada elemento  $K_e$ , luego:

$$K_e = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6L_e & -12 & 0 & 0 & 6L_e \\ 0 & 12 & -6L_e & 0 & 0 & -12 & -6L_e & 0 \\ 0 & -6L_e & 4L_e^2 & 0 & 0 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 \\ 6L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 & -6L_e & 0 & 0 & 2L_e^2 \\ -12 & 0 & 0 & -6L_e & 12 & 0 & 0 & -6L_e \\ 0 & -12 & 6L_e & 0 & 0 & 12 & 6L_e & 0 \\ 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 & 6L_e & 4L_e^2 & 0 \\ 6L_e & 0 & 0 & 2L_e^2 & -6L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

**4.5.2 Matriz de masa.** La matriz de masa  $M_e$  de cada elemento, de acuerdo con el modelo de vigas de Euler-Bernoulli, se obtiene a partir de la energía cinética, que para el caso de una viga<sup>34</sup> está dada por:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho A \left( \frac{\partial q(z, t)}{\partial t} \right)^2 dz \quad (21)$$

Donde  $\rho$  representa la densidad del material y  $A$  representa el área transversal del elemento. Luego, asumiendo que el rotor tiene una sección transversal constante, y transformando la Ecuación 21 desde el sistema de coordenadas globales  $z$  al sistema de coordenadas locales  $\xi$ , de acuerdo con la Ecuación 5, se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} \rho A L_e \int_0^1 \left( \frac{\partial q(\xi, t)}{\partial t} \right)^2 d\xi \quad (22)$$

La energía cinética de un sistema de varios grados de libertad se puede expresar de forma matricial como:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (23)$$

Luego, la energía cinética definida en la Ecuación 22, se puede reescribir de acuerdo con las funciones de forma  $N$ , el vector de velocidades nodales  $\dot{\mathbf{q}}$  y la Ecuación 23, como:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left( \rho A L_e \int_0^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\xi \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (24)$$

De la Ecuación 24 se puede computar la matriz de masa de cada elemento  $M_e$ , luego:

$$M_e = \frac{AL_e\rho}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & 22L_e & 54 & 0 & 0 & -13L_e \\ 0 & 156 & -22L_e & 0 & 0 & 54 & 13L_e & 0 \\ 0 & -22L_e & 4L_e^2 & 0 & 0 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 \\ 22L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 & 13L_e & 0 & 0 & -3L_e^2 \\ 54 & 0 & 0 & 13L_e & 156 & 0 & 0 & -22L_e \\ 0 & 54 & -13L_e & 0 & 0 & 156 & 22L_e & 0 \\ 0 & 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 & 22L_e & 4L_e^2 & 0 \\ -13L_e & 0 & 0 & -3L_e^2 & -22L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

**4.5.3 Matriz de inercia rotacional.** La matriz de inercia rotacional  $M_{ir_e}$  de cada elemento, de acuerdo con el modelo de vigas de Rayleigh, se obtiene a partir del aporte de la inercia rotacional a la energía cinética, que para el caso de una viga<sup>34</sup> está dada por:

$$T_r = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho I \left( \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z \partial t} \right)^2 dz \quad (26)$$

Donde  $\rho$  representa la densidad del material e  $I$  representa el segundo momento de inercia del elemento. Luego, asumiendo que el rotor tiene una sección transversal constante, y transformando la Ecuación 26 desde el sistema de coordenadas globales  $z$  al sistema de coordenadas locales  $\xi$ , de acuerdo con la Ecuación 5, se obtiene:

$$T_r = \frac{1}{2} \frac{\rho I}{L_e} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi \partial t} \right)^2 d\xi \quad (27)$$

El aporte de la inercia rotacional a la energía cinética de un sistema de varios grados de libertad se puede expresar de forma matricial como:

$$T_r = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_\xi^T \mathbf{I} \dot{\mathbf{q}}_\xi \quad (28)$$

Donde  $\dot{\mathbf{q}}_\xi$  es el vector de velocidades angulares nodales (derivada del vector de velocidades nodales con respecto a  $\xi$ ), luego, el aporte de la inercia rotacional a la energía cinética definida en la Ecuación 27, se puede reescribir de acuerdo con las funciones de forma  $N$ , el vector de velocidades nodales  $\dot{\mathbf{q}}$  y la Ecuación

28, como:

$$T_r = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left( \frac{\rho I}{L_e} \int_0^1 \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' d\xi \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (29)$$

De la Ecuación 29 se puede computar la matriz de inercia rotacional de cada elemento  $\mathbf{M}_{ir_e}$ , luego:

$$\mathbf{M}_{ir_e} = \frac{I\rho}{30L_e} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3L_e & -36 & 0 & 0 & 3L_e \\ 0 & 36 & -3L_e & 0 & 0 & -36 & -3L_e & 0 \\ 0 & -3L_e & 4L_e^2 & 0 & 0 & 3L_e & -L_e^2 & 0 \\ 3L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 & -3L_e & 0 & 0 & -L_e^2 \\ -36 & 0 & 0 & -3L_e & 36 & 0 & 0 & -3L_e \\ 0 & -36 & 3L_e & 0 & 0 & 36 & 3L_e & 0 \\ 0 & -3L_e & -L_e^2 & 0 & 0 & 3L_e & 4L_e^2 & 0 \\ 3L_e & 0 & 0 & -L_e^2 & -3L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

**4.5.4 Matriz de efecto giroscópico.** La matriz de efecto giroscópico  $\mathbf{G}_e$  de cada elemento, se obtiene a partir del aporte del efecto giroscópico a la energía cinética, que para el caso de una viga<sup>26</sup> está dada por:

$$T_g = -2 \int_0^{L_e} \rho I \omega \left( \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z \partial t} \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \right) dz \quad (31)$$

Donde  $\rho$  representa la densidad del material,  $I$  representa el segundo momento de inercia y  $\omega$  representa la velocidad de rotación del elemento. Luego, asumiendo que el rotor tiene una sección transversal constante, y transformando la Ecuación 31 desde el sistema de coordenadas globales  $z$  al sistema de coordenadas locales  $\xi$ , de acuerdo con la Ecuación 5, se obtiene:

$$T_g = -\frac{2\rho I \omega}{L_e} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi \partial t} \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial \xi} \right) d\xi \quad (32)$$

El aporte del efecto giroscópico a la energía cinética de un sistema de varios grados de libertad se puede expresar de forma matricial como:

$$T_g = \omega \mathbf{G}_e \dot{\mathbf{q}} \quad (33)$$

Donde  $\dot{\mathbf{q}}$  es el vector de velocidades nodales, luego, el aporte del efecto giroscópico a la energía cinética definida en la Ecuación 32, se puede reescribir de acuerdo con las funciones de forma  $N$ , el vector de velocidades nodales  $\dot{\mathbf{q}}$ , la velocidad de rotación del elemento  $\omega$  y la Ecuación 33, como:

$$T_g = \omega \left( -\frac{2\rho I}{L_e} \int_0^1 (\mathbf{N}'_1{}^T (-\mathbf{N}'_2) - (-\mathbf{N}'_2{}^T) \mathbf{N}'_1) d\xi \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (34)$$

Donde  $N'_1$  y  $N'_2$  corresponden a la fila número 1 y la fila número 2 de la derivada de la matriz de funciones de forma  $N$ .

De la Ecuación 32 se puede apreciar el acoplamiento entre los planos correspondientes a los desplazamientos nodales  $u$  y  $v$ , por lo tanto, el cómputo de la matriz de efecto giroscópico  $\mathbf{G}_e$  de acuerdo con la Ecuación 34, generará una matriz antisimétrica, luego:

$$\mathbf{G}_e = \frac{I\rho}{15L_e} \begin{bmatrix} 0 & 36 & -3L_e & 0 & 0 & -36 & -3L_e & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3L_e & 36 & 0 & 0 & -3L_e \\ 3L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 & -3L_e & 0 & 0 & -L_e^2 \\ 0 & 3L_e & -4L_e^2 & 0 & 0 & -3L_e & L_e^2 & 0 \\ 0 & -36 & 3L_e & 0 & 0 & 36 & 3L_e & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 3L_e & -36 & 0 & 0 & 3L_e \\ 3L_e & 0 & 0 & -L_e^2 & -3L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 \\ 0 & 3L_e & L_e^2 & 0 & 0 & -3L_e & -4L_e^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

**4.5.5 Matriz de rigidez de amortiguamiento interno.** La matriz de rigidez de amortiguamiento interno  $\mathbf{K}_{ai_e}$  proporciona una contribución a la matriz de rigidez, con dependencia lineal a la velocidad de rotación.<sup>24</sup> El cómputo de la matriz se realiza de acuerdo con la Ecuación 19, pero acoplando los planos de los desplazamientos  $u$  y  $v$ , luego:

$$\mathbf{K}_{ai_e} = \frac{EI}{L_e^3} \int_0^1 (\mathbf{N}''_1{}^T \mathbf{N}''_2 - \mathbf{N}''_2{}^T \mathbf{N}''_1) d\xi \quad (36)$$

Donde  $N''_1$  y  $N''_2$  corresponden a la fila número 1 y la fila número 2 de la segunda derivada de la matriz de funciones de forma  $N$ .

La matriz resultante de la solución de la Ecuación 36 al igual que la matriz de efecto giroscópico, es una matriz antisimétrica y está dada por:

$$K_{ai_e} = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 0 & 12 & -6L_e & 0 & 0 & -12 & -6L_e & 0 \\ -12 & 0 & 0 & -6L_e & 12 & 0 & 0 & -6L_e \\ 6L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 & -6L_e & 0 & 0 & 2L_e^2 \\ 0 & 6L_e & -4L_e^2 & 0 & 0 & -6L_e & -2L_e^2 & 0 \\ 0 & -12 & 6L_e & 0 & 0 & 12 & 6L_e & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 6L_e & -12 & 0 & 0 & 6L_e \\ 6L_e & 0 & 0 & 2L_e^2 & -6L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 \\ 0 & 6L_e & -2L_e^2 & 0 & 0 & -6L_e & -4L_e^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

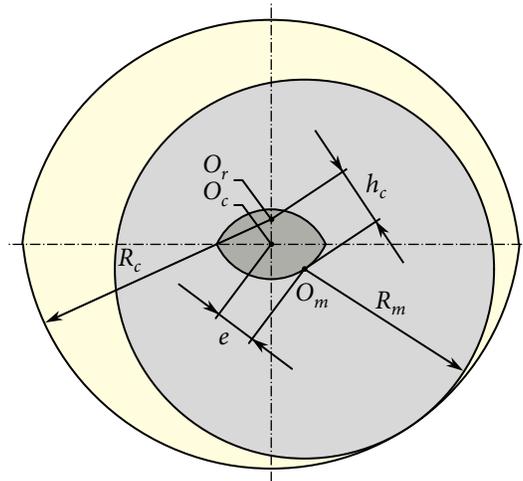
#### 4.6 COJINETES HIDRODINÁMICOS

Los cojinetes hidrodinámicos están constituidos por una o varias superficies cilíndricas que soportan el peso del rotor mediante una película de aceite dispuesta entre el muñón del rotor y la superficie del cojinete. A la distancia entre el centro radial del cojinete  $O_r$  y el centro del muñón del rotor  $O_m$ , se le denomina holgura o juego radial  $h_c$ , y a la distancia entre el centro real del cojinete  $O_c$  y el centro del muñón del rotor  $O_m$  se le denomina excentricidad  $e$ . Las características geométricas anteriormente mencionadas se pueden apreciar en la Figura 7.

El movimiento relativo entre el muñón del rotor y la superficie del cojinete genera una presión hidrodinámica en la película de aceite, comúnmente conocida como presión de cuña de aceite. Luego, mediante la fuerza obtenida a partir de la distribución de presión de la película de aceite sobre la superficie del cojinete (ecuaciones de Reynold), se obtienen las características dinámicas de rigidez y amortiguamiento.<sup>69</sup> Sin embargo, debido a la complejidad en la obtención de los coeficientes de las matrices de rigidez y amortiguamiento, se utilizará un método de cálculo aproximado más simplificado.<sup>26</sup>

Los cojinetes que soportan el rotor son cojinetes hidrodinámicos de dos lóbulos, con una relación entre la longitud y el diámetro de 1.0471, por lo que se aproximarán como cojinetes cilíndricos (relación longitud-diámetro de 1). De igual manera, se asume que el desplazamiento del muñón y la fuerza que actúa sobre la película de aceite, son linealmente dependientes. También se desprecian la influencia de variables higrotérmicas sobre la película de aceite.

Figura 7. Características geométricas de un cojinete hidrodinámico de dos lóbulos



Fuente: Elaboración propia con base en Tsuneo SOMEYA. *Journal-Bearing Databook*. Heidelberg: Springer Berlin, 1989. XIII, 326. ISBN: 978-3-642-52511-7. DOI: 10.1007/978-3-642-52509-4.

Es importante destacar que los cojinetes hidrodinámicos dependiendo su estado de operación (estático, en bajas velocidades, y en altas velocidades), tienen un comportamiento dinámico diferente, por lo tanto, el cómputo de las matrices de rigidez y amortiguamiento solo serán válidas para velocidades de operación altas (por encima de 240 [RPM] aproximadamente). Sin embargo, se computarán estas matrices para velocidades bajas, bajo la consideración del proceso de ajuste que se realizará posteriormente.

Como un primer paso para determinar los coeficientes de las matrices de rigidez y amortiguamiento de acuerdo con las consideraciones previamente definidas, se determina el número de Sommerfeld modificado, un valor adimensional utilizado en el diseño de cojinetes, que está dado por:

$$S_m = \frac{(D_c \omega \eta L_c^3)}{(8 F h_c^2)} \quad (38)$$

Donde  $D_c$  es el diámetro del cojinete,  $\omega$  la velocidad de rotación,  $\eta$  la viscosidad dinámica del aceite,  $L_c$  la longitud del cojinete y  $F$  la fuerza estática que actúa sobre el cojinete, es decir, el peso del rotor con accesorios instalados, dividido entre el número de cojinetes.

Otro variable importante en la obtención de las características dinámicas de los cojinetes, es la relación de

excentricidad  $\varepsilon$  dada por:

$$\varepsilon = \frac{e}{h_c} \quad (39)$$

El valor de excentricidad  $e$  es un parámetro desconocido que es difícil de estimar. Por lo tanto, la relación de excentricidad  $\varepsilon$  se obtiene mediante la siguiente ecuación de octavo grado:<sup>26</sup>

$$\varepsilon^8 - 4\varepsilon^6 + (6 - S_m^2 (16 - \pi^2)) \varepsilon^4 - (4 + \pi^2 S_m^2) \varepsilon^2 + 1 = 0 \quad (40)$$

Los coeficientes de la matriz de rigidez adimensional están dados por:<sup>26</sup>

$$k_{xx} = 4h_0 (\pi^2 (2 - \varepsilon^2) + 16\varepsilon^2) \quad (41a)$$

$$k_{xy} = h_0 \left( \frac{\pi (\pi^2 (1 - \varepsilon^2)^2 + 16\varepsilon^4)}{\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \quad (41b)$$

$$k_{yx} = -h_0 \left( \frac{\pi (\pi^2 (1 - \varepsilon^2) (1 + 2\varepsilon^2) + 32\varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2))}{\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \quad (41c)$$

$$k_{yy} = 4h_0 \left( \pi^2 (1 + 2\varepsilon^2) + \frac{32\varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)} \right) \quad (41d)$$

Luego, la matriz de rigidez dimensional se define como:

$$\mathbf{K}_B = \frac{F}{h_c} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Los coeficientes de la matriz de amortiguamiento adimensional están dados por:<sup>26</sup>

$$c_{xx} = h_0 \left( \frac{2\pi \sqrt{1 - \varepsilon^2} (\pi^2 (1 + 2\varepsilon^2) - 16\varepsilon^2)}{\varepsilon} \right) \quad (43a)$$

$$c_{xy} = -8h_0 (\pi^2 (1 + 2\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2) \quad (43b)$$

$$c_{yx} = c_{xy} \quad (43c)$$

$$c_{yy} = h_0 \left( \frac{2\pi (\pi^2 (1 - \varepsilon^2)^2 + 48\varepsilon^2)}{\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \quad (43d)$$

Luego, la matriz de amortiguamiento dimensional se define como:

$$\mathbf{C}_B = \frac{F}{h_c \omega} \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \quad (44)$$

La expresión  $h_0$  utilizada para el cálculo de los coeficientes de las matrices de rigidez y amortiguamiento, está dado por:<sup>26</sup>

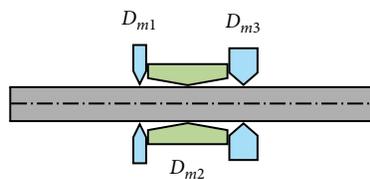
$$h_0 = \frac{1}{(\pi^2 (1 - \varepsilon^2) + 16\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (45)$$

#### 4.7 DISCOS

El disco y los elementos instalados sobre el rotor son añadidos al modelo numérico como un aporte puntual sobre los nodos de ubicación de sus centros geométricos. Solo se consideran los aportes de masa, inercia rotacional y efectos giroscópicos. La rigidez en los discos se desprecia considerando que los discos son instalados y no mecanizados sobre el rotor.

En función de las variaciones de diámetro, cada una de las secciones del acople, el piñón, los muñones y el disco principal se modelan como discos independientes, y su aporte como se mencionó previamente se realiza de forma puntual para cada uno de los centros geométricos de las secciones de disco, de cada uno de los elementos instalados. En la Figura 8 se puede ver un ejemplo de la segmentación del muñón 1 (ver Figura 2) en secciones de disco  $D_{mi}$  y la ubicación puntual de los aportes de masa, inercia rotacional y efectos giroscópicos de cada una de las secciones definidas.

Figura 8. Secciones de disco en el muñón 1



Fuente: Elaboración propia.

La matriz de masa de los discos  $M_d$  es una matriz cuadrada de  $4 \times 4$  y está dada por:

$$M_d = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_d \end{bmatrix} \quad (46)$$

$m_d$  es la masa de cada sección de disco y  $J_d$  es el momento de inercia perpendicular al eje de rotación de cada sección de disco y está dado por:

$$J_d = \frac{1}{12} m_d \left( \frac{3}{4} (D_d^2 + D^2) + e_d^2 \right) \quad (47)$$

Donde  $D_d$  es el diámetro de las secciones de disco,  $D$  es el diámetro del eje o rotor y  $e_d$  es el espesor de las secciones de disco.

Del mismo modo que la matriz de masa  $M_d$ , la matriz de efectos giroscópicos de las secciones de disco  $G_d$  está dada por:

$$G_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_p \\ 0 & 0 & -J_p & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Donde  $J_p$  es el momento de inercia de cada sección de disco y está dado por:

$$J_p = \frac{1}{8} m_d (D_d^2 + D^2) \quad (49)$$

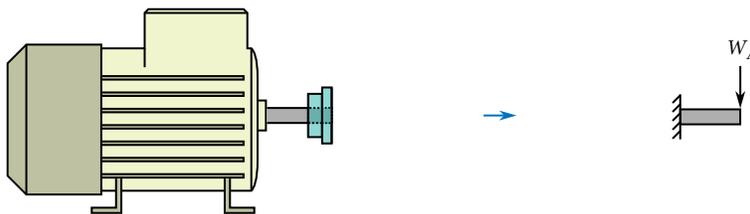
#### 4.8 APORTES DE RIGIDEZ DE LOS ACCESORIOS INSTALADOS

Los elementos instalados sobre el rotor como el acople flexible y el piñón aportan rigidez, masa y amortiguamiento. Para facilitar la implementación del modelo numérico y considerando el ajuste que se desea realizar, se realiza una aproximación del aporte de rigidez de los accesorios, se desprecia el aporte de amortiguamiento y se simplifica los accesorios como discos para determinar el aporte de masa y efecto

giroscópico sobre el rotor, como se describe en la Sección 4.7.

**4.8.1 Acople.** Como una aproximación del aporte de rigidez del acople sobre el rotor principal, se determina la rigidez del eje del motor de forma teórica mediante la solución exacta. El eje se asume como una viga de sección transversal constante empotrada en un extremo y con una carga puntual en el extremo opuesto, como se muestra en la Figura 9.

Figura 9. Acople del motor al rotor



Fuente: Elaboración propia.

La rigidez en los grados de libertad rotacionales es despreciada. Se asume que el acople es completamente rígido en dirección radial, luego, las deformaciones en los grados de libertad longitudinales del eje del motor y el rotor principal, en el lado del acople, se asumen como iguales<sup>71</sup> de acuerdo con el modelo de Krämer.<sup>47</sup> A partir de las consideraciones previas, el aporte de rigidez sobre el rotor principal en la zona del acople (zona de carga) de forma teórica mediante la solución exacta<sup>73</sup> es:

$$k_A = \frac{3E_{em}I_{em}}{L_{em}^3} \quad (50)$$

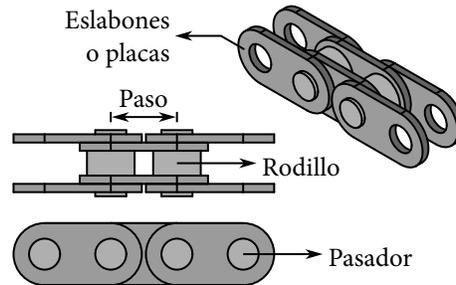
De forma matricial el aporte de rigidez del acople para los grados de libertad longitudinales  $u$  y  $v$  está dado por:

$$\mathbf{K}_A = \begin{bmatrix} k_A & 0 \\ 0 & k_A \end{bmatrix} \quad (51)$$

**4.8.2 Cadena.** El rotor proporciona potencia a la bomba de suministro de aceite de los cojinetes, mediante una transmisión por cadena. Como una aproximación del aporte de rigidez de la cadena sobre el rotor principal, se determina la rigidez axial equivalente de los eslabones que conforman la cadena y se asume que el piñón, los casquillos, los rodillos y los pasadores de la cadena son totalmente rígidos. El aporte de rigidez en los grados de libertad rotacionales es despreciado.

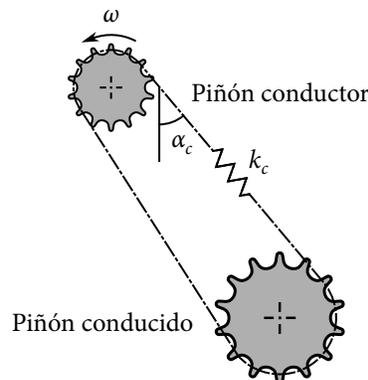
La cadena de transmisión está formada por pares de eslabones o placas, unidos mediante rodillos, casquillos (en el interior de los rodillos) y pasadores, como se muestra en la Figura 10.

Figura 10. Sección de cadena



Fuente: Elaboración propia.

Figura 11. Rigidez de la cadena de transmisión



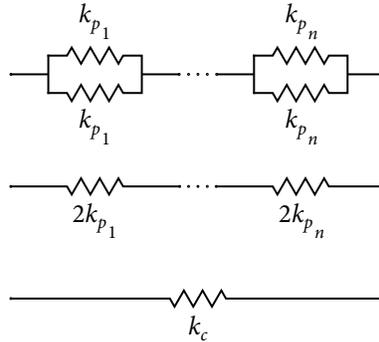
Fuente: Elaboración propia.

La rigidez axial de la cadena  $k_c$  en la sección sometida a tensión mostrada en la Figura 11, se puede idealizar como un resorte lineal o una barra elástica que conecta los dos piñones.<sup>5</sup> En consecuencia, la rigidez del resorte que representa la cadena se puede obtener determinando la rigidez equivalente y efectiva de los pasos de la cadena, que también son representados como pequeñas barras elásticas en combinaciones en paralelo y en serie, como se muestra en la Figura 12.

La expresión de la rigidez equivalente está dada por:

$$\frac{1}{k_c} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2k_{p_i}} = \frac{n}{2k_p} \quad (52)$$

Figura 12. Rigidez equivalente de los eslabones de la cadena



Fuente: Elaboración propia.

Dónde  $n$  es el número de pasos sometidos a tensión de la cadena y  $k_p$  es la rigidez axial de los eslabones o placas de la cadena. Luego:

$$k_c = \frac{2k_p}{n} \quad (53)$$

La rigidez axial de los eslabones de la cadena que inciden en la vibración lateral del rotor, asumidos como barras elásticas,<sup>30</sup> está dada por:

$$k_p = \frac{A_e E_e}{L p_e} \quad (54)$$

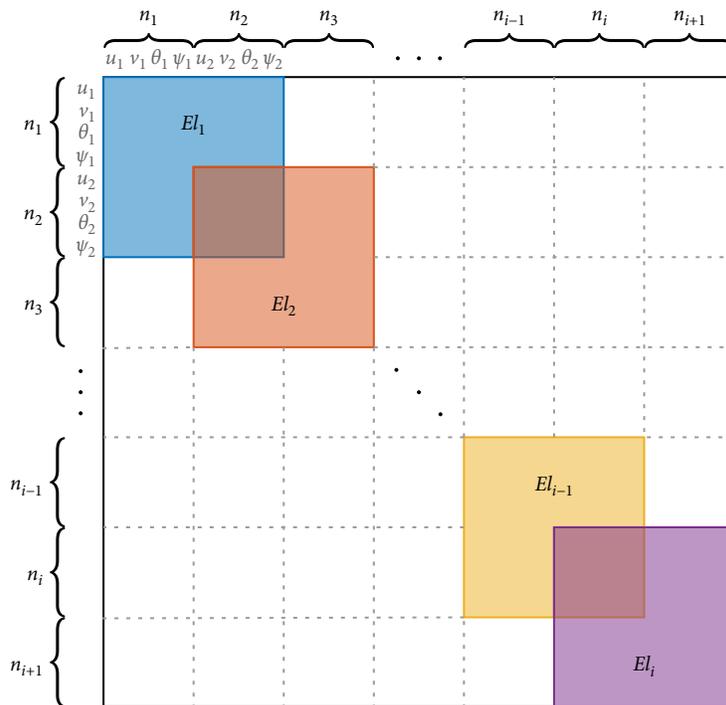
Donde  $A_e$  es el área transversal de los eslabones,  $E_e$  es el módulo elástico longitudinal del material de los eslabones de la cadena y  $L p_e$  es la longitud del paso de la cadena (ver Figura 10).

De forma matricial el aporte de amortiguamiento de la cadena para los grados de libertad longitudinales  $u$  y  $v$  está dado por:

$$\mathbf{K}_C = \begin{bmatrix} k_c \cos \alpha_c & 0 \\ 0 & k_c \sin \alpha_c \end{bmatrix} \quad (55)$$

Donde  $\alpha_c$  es el ángulo formado entre la sección de cadena sometida a tensión y el eje vertical, en la zona del piñón conductor o rotor principal, como se muestra en la Figura 11.

Figura 13. Ensamble de matrices



Fuente: Elaboración propia.

## 4.9 ENSAMBLE DE MATRICES

**4.9.1 Ensamble de matrices de los elementos discretizados.** De acuerdo con la Ecuación 2 y las matrices computadas en la Sección 4.5, se establecen las matrices generales de rigidez  $K_{el}$ , masa  $M_{el}$  y amortiguamiento  $C_{el}$  de los elementos en que se discretizó el rotor, dadas por:

$$K_{el} = K_e + \omega\beta K_{ai_e} \quad (56a)$$

$$M_{el} = M_e + M_{ir_e} \quad (56b)$$

$$C_{el} = \beta K_e + \omega G_e \quad (56c)$$

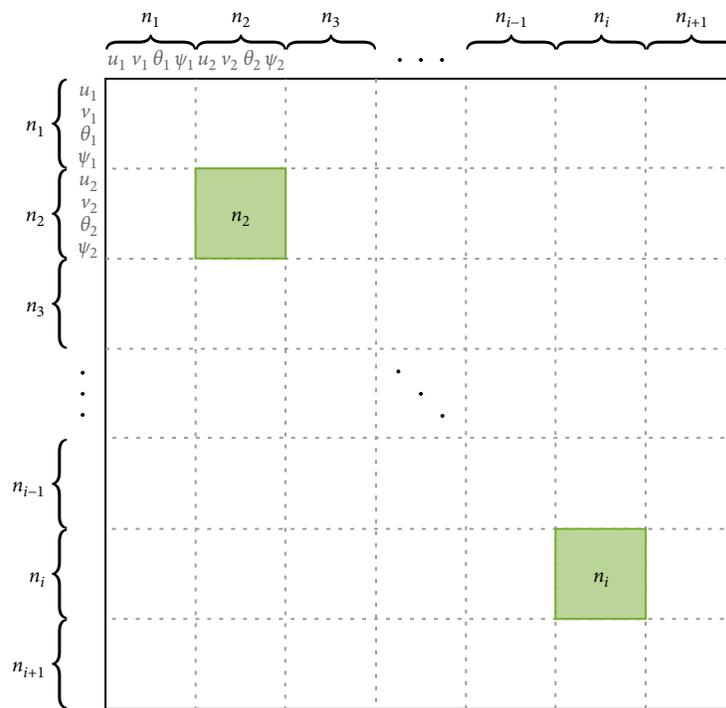
Cada una de las matrices generales de los elementos definidas en la Ecuación 56, se ensamblan en las matrices globales de rigidez  $K$ , masa  $M$  y amortiguamiento  $C$ .

El ensamblaje de las matrices se describe gráficamente en la Figura 13, donde  $El_i$  son los elementos y  $n_i$  los nodos de las matrices globales. Los coeficientes de las matrices generales de los elementos, correspondientes

a los grados de libertad en los nodos compartidos por los elementos, son sumados término a término, como se muestra en las dos zonas de intersección en la Figura 13.

**4.9.2 Adición de matrices de cojinetes y accesorios.** Las matrices de los aportes de masa, rigidez, amortiguamiento y efectos giroscópicos del disco, el acople, el piñón y los muñones de los cojinetes, son adicionados de forma puntual en los nodos en que están posicionados sobre el rotor, en sus correspondientes grados de libertad, como se describe gráficamente en la Figura 14.

Figura 14. Adición de matrices



Fuente: Elaboración propia.

## 5. SOLUCIÓN DEL MODELO NUMÉRICO DEL ROTOR

### 5.1 ESPACIO DE ESTADOS

La presencia del amortiguamiento en la ecuación de movimiento del rotor dada por la Ecuación 1, no permite solucionar el sistema de múltiples grados de libertad, por lo tanto, se expresará la ecuación de movimiento como una ecuación de primer orden mediante la formulación de espacio de estados de la ecuación de movimiento. Para ello reescribimos los vectores de velocidad  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  y aceleración  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ , en función de los vectores de desplazamiento  $\mathbf{q}(t)$  y velocidad  $\dot{\mathbf{q}}(t)$ , luego:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (57a)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) \quad (57b)$$

A partir de la Ecuación 57, se define el vector de estados  $\mathbf{x}(t)$  como un vector bidimensional que está dado por:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \quad (58)$$

Luego, la ecuación de espacio de estados estará dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{ee}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{ee}\mathbf{f}(t) \quad (59a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_{ee}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{ee}\mathbf{f}(t) \quad (59b)$$

$\mathbf{A}_{ee}$  es la matriz de estados,  $\mathbf{B}_{ee}$  es la matriz de entradas,  $\mathbf{y}(t)$  es el vector de salidas,  $\mathbf{f}(t)$  es el vector de entradas,  $\mathbf{C}_{ee}$  es la matriz de salidas y  $\mathbf{D}_{ee}$  es la matriz de transmisión directa. La matriz de estados  $\mathbf{A}_{ee}$  y la matriz de entradas  $\mathbf{B}_{ee}$ , se obtienen reemplazando la Ecuación 58 en la Ecuación 59, de acuerdo con la Ecuación 57, luego:

$$\mathbf{A}_{ee} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (60a)$$

$$\mathbf{B}_{ee} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (60b)$$

$I$  representa la matriz identidad y  $0$  una matriz de ceros.

## 5.2 VALORES Y VECTORES PROPIOS

Para obtener los parámetros modales a partir de la ecuación de estados se asume el sistema como libre, es decir, sin considerar los efectos de ninguna fuerza, luego, la ecuación de espacio de estados para el sistema de vibraciones libre estará dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{ee}\mathbf{x}(t) \quad (61)$$

El vector de estados  $\mathbf{x}(t)$  puede expresarse de forma armónica como:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}e^{i\omega t} \quad y \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = i\omega\boldsymbol{\phi}e^{i\omega t} \quad (62)$$

Luego, reemplazando la Ecuación 62 en la Ecuación 61 y dividiendo ambos lados de la igualdad entre la parte armónica  $e^{i\omega t}$ , se obtiene la ecuación estándar del problema de valores propios, dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\boldsymbol{\phi} &= i\omega\boldsymbol{\phi} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{\phi} &= \lambda\boldsymbol{\phi} \end{aligned} \quad (63)$$

Donde  $\lambda$  son los valores propios y  $\boldsymbol{\phi}$  los vectores propios, obtenidos al solucionar el problema de valores propios de la Ecuación 63. Es importante destacar que la matriz  $\mathbf{A}$  de la ecuación de espacio de estados no es simétrica, debido a la inclusión del amortiguamiento y los efectos giroscópicos en la ecuación de movimiento, por lo tanto, los valores y vectores propios son complejos conjugados, luego:

$$\lambda = \omega_n\zeta \pm i\omega_d \quad (64)$$

Donde  $\omega_n$  es la frecuencia natural,  $\zeta$  es el factor de amortiguamiento y  $\omega_d$  es la frecuencia natural amortiguada del sistema.

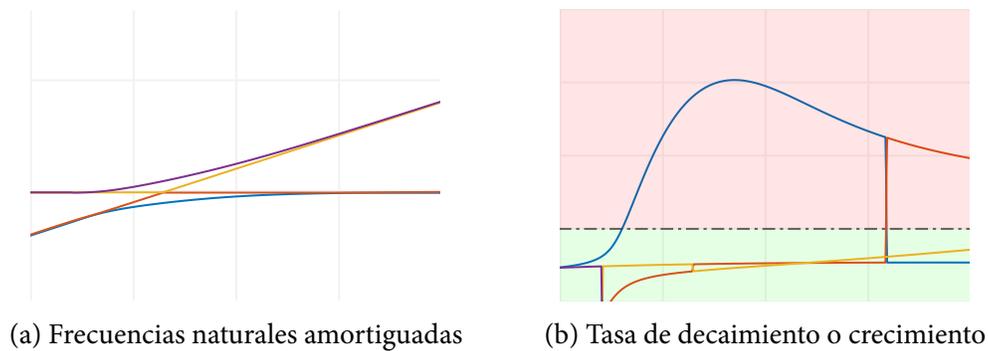
## 5.3 ORDENAMIENTO DE MODOS Y RESOLUCIÓN DE CRUCES

Los cojinetes hidrodinámicos inducen la aparición de modos subsíncronos, que son originados por los fenómenos de torbellino y latigazo de aceite. Estos modos cambian de orden con variaciones en la velocidad

de rotación. Esto se puede observar en la representación gráfica de las frecuencias naturales amortiguadas y la tasa de decaimiento o crecimiento, que se muestran en la Figura 15.

Es importante ordenar los modos (valores y vectores propios) con el fin de facilitar su visualización en los diagramas que permiten el análisis de la dinámica del rotor. El ordenamiento de los modos es fundamental no solo para facilitar su visualización en los diagramas que permiten el análisis de la dinámica del rotor, sino también para llevar a cabo exitosamente los procesos de reducción de coordenadas.

Figura 15. Representación gráfica de los primeros cuatro modos cruzados



Fuente: Elaboración propia.

En este trabajo, se propone una metodología para organizar los modos y facilitar su visualización en los diagramas de Campbell y estabilidad. La metodología propuesta solo considera los modos cuyos valores propios tienen una parte imaginaria, es decir, modos subamortiguados y no amortiguados. Los modos con valores propios reales, es decir, modos críticamente amortiguados y sobreamortiguados, no son tomados en cuenta debido a la dificultad de encontrar sus pares conjugados. Los pasos de la metodología propuesta son:

1. Identifique los valores propios cuya parte imaginaria sea igual a 0 y añada un valor imaginario significativamente alto (por ejemplo,  $10^7$ ). Almacene los resultados como una nueva matriz.

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda + 10^7 i & \text{si } \text{Im}(\lambda) = 0 \\ \lambda & \text{si } \text{Im}(\lambda) \neq 0 \end{cases} \quad (65)$$

2. Ordene los valores propios de acuerdo con el valor absoluto  $|\lambda_n|$  de forma ascendente, guardando sus respectivas posiciones.

3. Reordene los valores propios de las primeras  $m$  posiciones de acuerdo con el valor absoluto de la parte imaginaria  $|\text{Im}(\lambda_n(1:m, :))|$  y guarde sus respectivas posiciones. Se sugiere que el valor de  $m$  corresponda a cuatro veces el número de modos de interés. En el presente trabajo, se analizarán los primeros 6 modos (es decir, las primeras 12 posiciones de la matriz de valores propios); por lo tanto,  $m = 24$ .
4. Establezca los valores propios correspondientes a la primera frecuencia o velocidad de rotación del sistema  $\lambda_n(:, \omega_1)$  como referencia inicial.
5. Para cada uno de los primeros  $m$  valores propios de la referencia inicial  $\lambda_n(1:m, \omega_1)$ , calcule el valor absoluto de la diferencia con los primeros  $m$  valores propios de la siguiente frecuencia o velocidad de rotación  $\lambda_n(1:m, \omega_2)$ . El vector resultante es de tamaño  $m^2$ .
6. Determine el menor valor de las diferencias para cada uno de los valores propios de la referencia inicial  $\lambda_n(1:m, \omega_1)$ , e identifique las posiciones de los valores propios  $\lambda_n(1:m, \omega_2)$  de la siguiente frecuencia que dieron origen a dichos valores mínimos.
7. Actualice el vector de valores propios de la siguiente frecuencia  $\lambda_n(1:m, \omega_2)$  con las posiciones identificadas y establezca el vector como nueva referencia inicial.
8. Repita el proceso con todas las frecuencias o velocidades de rotación  $\omega_i$ .
9. Actualice las posiciones de los pasos 2, 3 y 6, en las matrices originales de valores  $\lambda$  y vectores propios  $\phi$ .

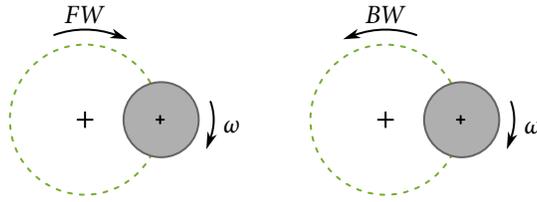
#### 5.4 CABECEO DEL ROTOR

Los rotores flexibles pueden experimentar un fenómeno denominado cabeceo (*whirling*), que causa que la deflexión o arqueado del rotor gire alrededor del eje geométrico o línea central de los cojinetes, al mismo tiempo que el rotor gira sobre su propio eje.<sup>58</sup> Este fenómeno es causado por diversos factores como fuerzas de desbalanceo, fuerzas giroscópicas, el uso de cojinetes hidrodinámicos para soportar el rotor, amortiguamiento interno, campos magnéticos, etc.<sup>19</sup>

El cabeceo en los rotores puede llegar a ser más destructivo que el paso de la velocidad de rotación por las velocidades críticas del sistema. Es por esta razón que el análisis de este fenómeno adquiere gran importancia. Como se mencionó previamente, los cojinetes hidrodinámicos son uno de los principales causantes del cabeceo en los rotores, debido a las vibraciones autoexcitadas que ocurren en un rango de velocidades de inestabilidad dinámica por encima de la primera velocidad crítica del rotor.<sup>32</sup>

El giro del cabeceo puede ser en el mismo sentido que la rotación del rotor *forward FW*, o en el sentido contrario a la rotación del rotor *backward BW*, como se muestra en la Figura 16.

Figura 16. Sentido de rotación del cabeceo del rotor



Fuente: Elaboración propia.

Para determinar el sentido de giro del cabeceo del rotor a partir del modelo numérico, se calcula la diferencia entre las fases  $\alpha_p$  de los vectores propios  $\phi$  en los grados de libertad longitudinales o traslacionales  $u, v$ , en el nodo establecido para el análisis:

$$\Delta\alpha_p = \alpha_p(\phi_v) - \alpha_p(\phi_u) \quad (66)$$

Luego, para facilitar la identificación del cabeceo del rotor, se normaliza la diferencia de fase  $\Delta\alpha_p$  al intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Consecutivamente se asigna el sentido de giro de acuerdo con:

$$\text{Cabeceo} = \begin{cases} FW(\text{Forward}) & \text{si } -\pi < \Delta\alpha_p < 0 \\ BW(\text{Backward}) & \text{si } 0 < \Delta\alpha_p < \pi \end{cases} \quad (67)$$

La asignación del sentido de giro es aplicable si los valores propios complejos conjugados se encuentran ordenados de la forma  $[a + bi, a - bi]$ . Sin embargo, si se encuentran ordenados de la forma  $[a - bi, a + bi]$ , el sentido de giro con respecto a la Ecuación 67 se invertirá. Esto sucede porque los vectores propios asociados a estos valores propios también son complejos conjugados; por lo tanto, el signo de la parte imaginaria cambiará y, en consecuencia, el signo del ángulo o fase del vector propio se modificará.

## 5.5 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DEL MALLADO

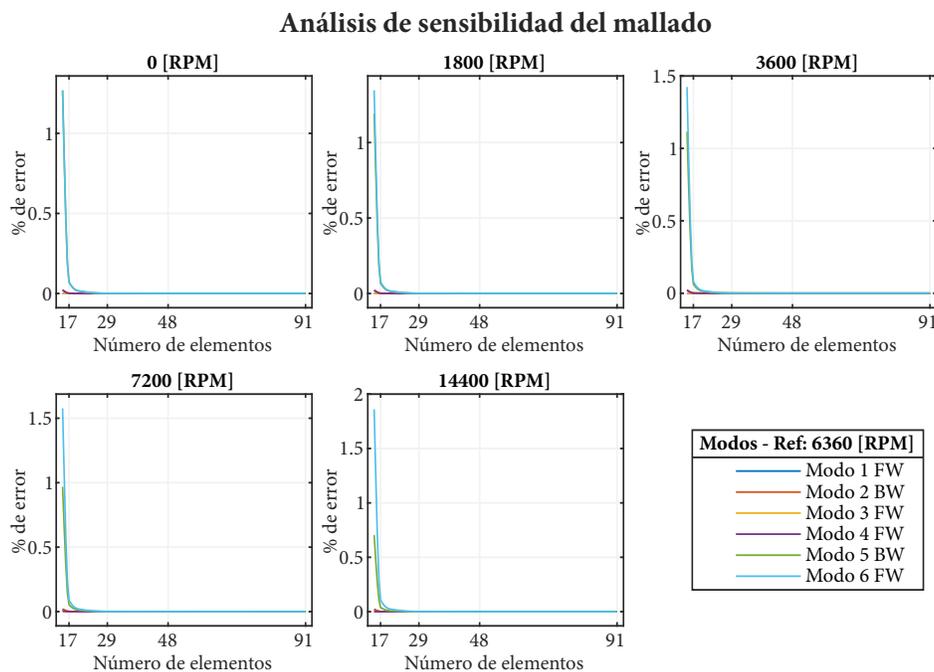
Para garantizar la precisión en los resultados obtenidos a partir del modelo numérico y lograr una velocidad de cálculo adecuada, se realiza un proceso de selección óptima del número de elementos con los que se discretiza el rotor. Este proceso implica elegir una cantidad significativamente alta de elementos que servirá como patrón de referencia para evaluar la convergencia de las frecuencias naturales de los primeros 6 modos de vibración del rotor, considerando diferentes configuraciones en la cantidad de elementos discretizados.

Para cada una de las frecuencias naturales de los modos de vibración, se determinará el porcentaje de error con respecto a los resultados obtenidos a partir del modelo numérico discretizado con la cantidad de elementos patrón. Se seleccionará la cantidad mínima de elementos que garantice un porcentaje de error igual o inferior al 0.3 %. Esta elección del valor 0.3 % toma en cuenta que la frecuencia natural máxima del sexto modo de vibración, en el rango de velocidades de rotación analizado, alcanza valores cercanos a 280 [Hz]. De esta manera, un porcentaje de error del 0.3 % garantizará una diferencia máxima inferior a 1 [Hz] para todas las frecuencias naturales de los modos de vibración analizados

La discretización del rotor en elementos finitos se realiza garantizando que los nodos se ubiquen en las posiciones de los aportes puntuales de masa, rigidez y amortiguamiento de los cojinetes, discos y accesorios, así como también, en los puntos de medición donde se ubicaron los sensores de proximidad.

La Figura 17 presenta los resultados del análisis de convergencia de las frecuencias naturales para las distintas configuraciones de elementos, considerando las velocidades de rotación de 0, 1800, 3600, 7200 y 14400 [RPM].

Figura 17. Convergencia de las frecuencias naturales de acuerdo con el número de elementos



Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 5 presenta las configuraciones del número de elementos y los resultados de porcentaje de error

obtenidos del análisis de convergencia de las frecuencias naturales, para una velocidad de rotación de 14400 [RPM] (mayor % de error).

Tabla 5. Configuraciones del número de elementos y resultados del análisis de convergencia para la velocidad de rotación de 14400 [RPM]

<b>Configuración</b>	<b>Número de elementos</b>	<b>% de error máximo</b>	<b>Modo con mayor % de error</b>
1 (Referencia)	91	0	6
2	48	0	6
3	29	0.0014	6
4	20	0.0237	6
5	17	0.1090	6
6	15	1.8615	6

Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con los resultados obtenidos, el número de elementos que garantiza un porcentaje de error menor al 0.3 % en las frecuencias naturales de los primeros 6 modos, es de 17 elementos. La discretización del rotor en 17 elementos de longitud variable (ver Sección 4.3), se muestra en la Tabla 6.

Tabla 6. Discretización del rotor en elementos de longitud variable

<b>Elementos</b>	<b>Longitud [mm]</b>
1	8.95
2	32.875
3	11.075
4	98.2
5	18.125
6	20.625
7	74.15
8-9	111.225
10	12.35
11	5.075
12-13	115.284375
14	76.85625
15	20.3
16	19.525
17	5.875

Fuente: Elaboración propia.

La ubicación de las secciones del disco principal, los muñones, los cojinetes, el acople y el piñón, sobre el rotor discretizado, se muestran en la Tabla 7.

Tabla 7. Posiciones nodales de los discos, cojinetes y accesorios

Disco o accesorio	Nodo
Acople 1.1	1
Acople 1.2	2
Piñón 1.1	3
Piñón 1.2	4
Muñón 1.1	5
Muñón 1.2 (Cojinete 1)	6
Muñón 1.3	7
Disco 1.1	10
Disco 1.2	11
Disco 1.3 (Principal)	12
Muñón 2.1	15
Muñón 2.2 (Cojinete 2)	16
Muñón 2.3	17

Fuente: Elaboración propia.

## 5.6 ANÁLISIS MODAL

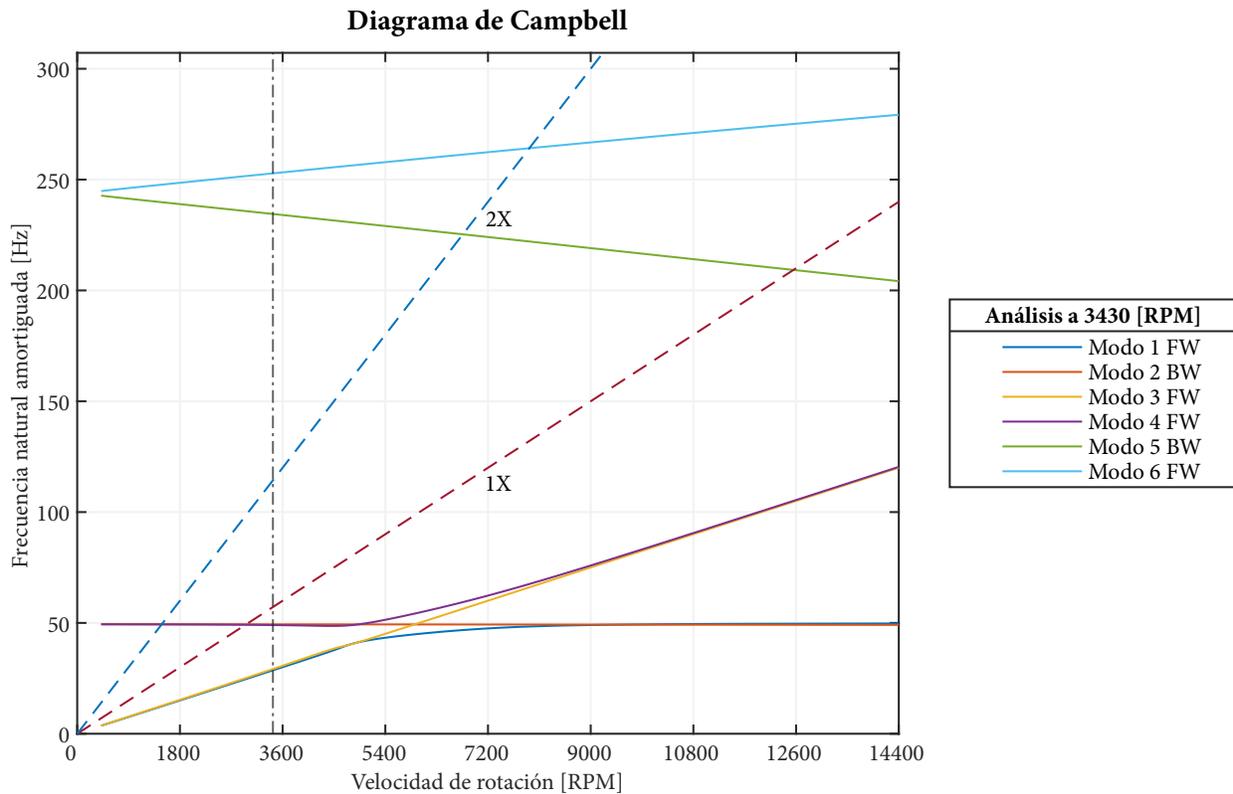
Los resultados de la simulación del modelo numérico del rotor se analizan en un rango de velocidades de rotación entre 420 y 14400 [RPM]. Se excluyen del análisis las velocidades inferiores a 420 [RPM], considerando que el comportamiento de los cojinetes hidrodinámicos en este rango de velocidades es difícil de modelar y bajo el modelo implementado presentan resultados erráticos. La identificación de los modos (etiquetas) se realiza con referencia al ciento siete por ciento de dos veces la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$  del primer modo lateral ( $1.07 \cdot 2\omega_d$ ).

**5.6.1 Diagrama de Campbell.** El diagrama de Campbell es una herramienta gráfica que permite visualizar las frecuencias naturales de los modos de vibración del rotor en función de la velocidad de rotación. Este diagrama permite identificar las velocidades críticas del rotor, es decir, las frecuencias naturales que son excitadas por la coincidencia con la velocidad de rotación del sistema.

A partir de la parte imaginaria de los valores propios  $\lambda$ , es decir, de la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$ , se grafican los primeros 6 modos de vibración en función de la velocidad de rotación del rotor  $\omega$ . Cada uno

de los modos graficados se etiquetan con el sentido del cabeceo del rotor, *backward* (BW) o *forward* (FW). El diagrama de Campbell del modelo numérico del rotor se muestra en la Figura 18.

Figura 18. Diagrama de Campbell del modelo numérico del rotor sin ajustar



Fuente: Elaboración propia.

En el diagrama se evidencia la existencia de dos modos subarmónicos correspondientes a los fenómenos de torbellino (*whirl*) y latigazo (*whip*) de aceite en los cojinetes hidrodinámicos. El modo 1 con cabeceo en el sentido de giro del rotor (FW) corresponde a un modo de torbellino de aceite (*whirl mode*) hasta aproximadamente 4980 [RPM]. A partir de esta velocidad, el modo 1 pasará a convertirse en un modo de latigazo de aceite (*whip mode*). El modo 3 corresponde también a un modo de torbellino de aceite con cabeceo en el sentido de giro del rotor (FW), que se mantiene en todo el rango de velocidades analizado. Los modos 2 y 5 corresponden al primer y tercer modo de flexión lateral, con cabeceo en sentido contrario al giro del rotor (BW). Los modos 4 y 6 corresponden al segundo y cuarto modo de flexión lateral, con cabeceo en el sentido de giro del rotor (FW).

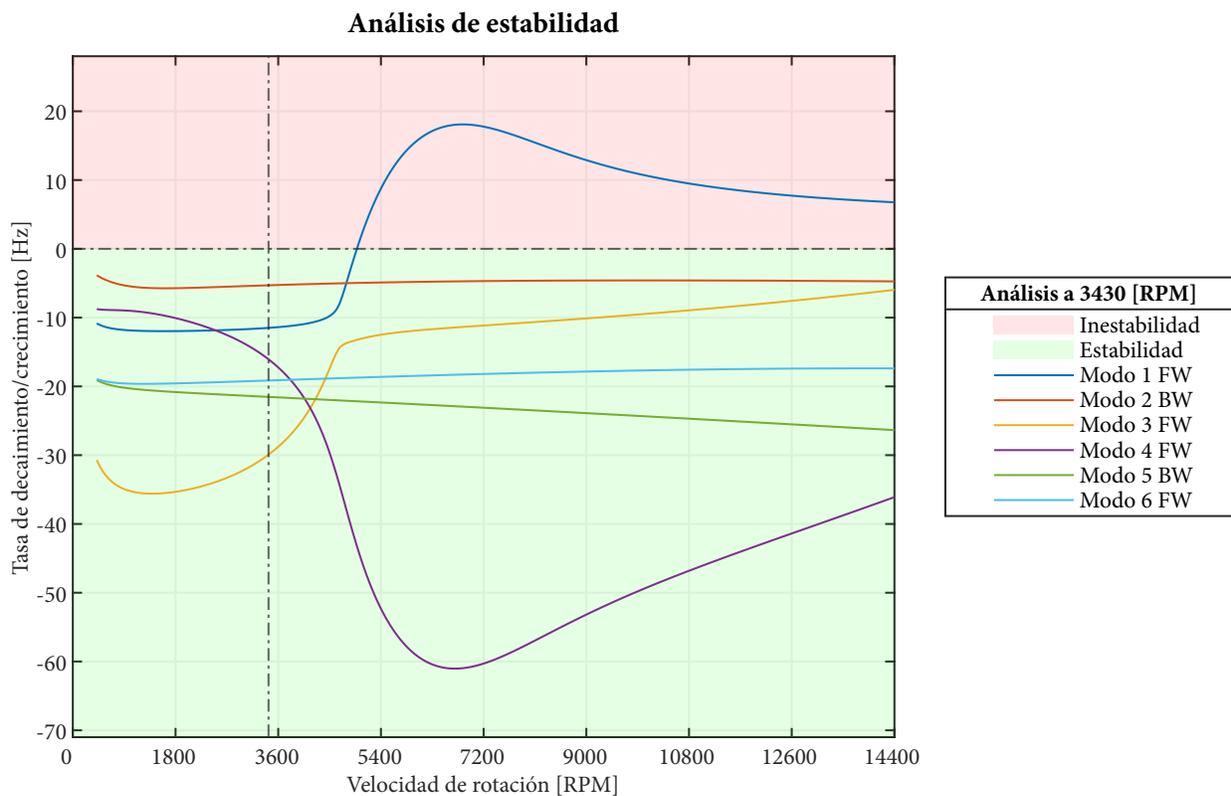
En el rango de velocidades analizado, solo se presentan tres velocidades críticas a 49.14 [Hz], 49.36 [Hz] y

209.2 [Hz], correspondientes a los modos 2,4 y 5 (primer, segundo y tercer modo de flexión).

**5.6.2 Diagrama de estabilidad.** El diagrama de estabilidad muestra la variación de la tasa de crecimiento o decaimiento, también conocida como tasa de atenuación, de las frecuencias naturales del sistema en función de la velocidad de rotación. Este diagrama permite determinar los intervalos de frecuencia donde el sistema es inestable, es decir, donde la parte real de los valores propios de los modos subamortiguados es positiva. Los valores positivos indican que el coeficiente de amortiguamiento es menor que 0 ( $\zeta < 0$ ). Este fenómeno implica una falta de amortiguamiento y provoca un aumento en la amplitud de las vibraciones del sistema con el tiempo.

A partir de la parte real de los valores propios  $\omega_n \zeta$ , se grafica la tasa de crecimiento o decaimiento de los primeros 6 modos de vibración en función de la velocidad de rotación del rotor  $\omega$ . Cada uno de los modos graficados se etiquetan con el sentido del cabeceo del rotor, *backward BW* o *forward FW*. El diagrama de estabilidad del modelo numérico del rotor se muestra en la Figura 19.

Figura 19. Diagrama de estabilidad del modelo numérico del rotor sin ajustar



Fuente: Elaboración propia.

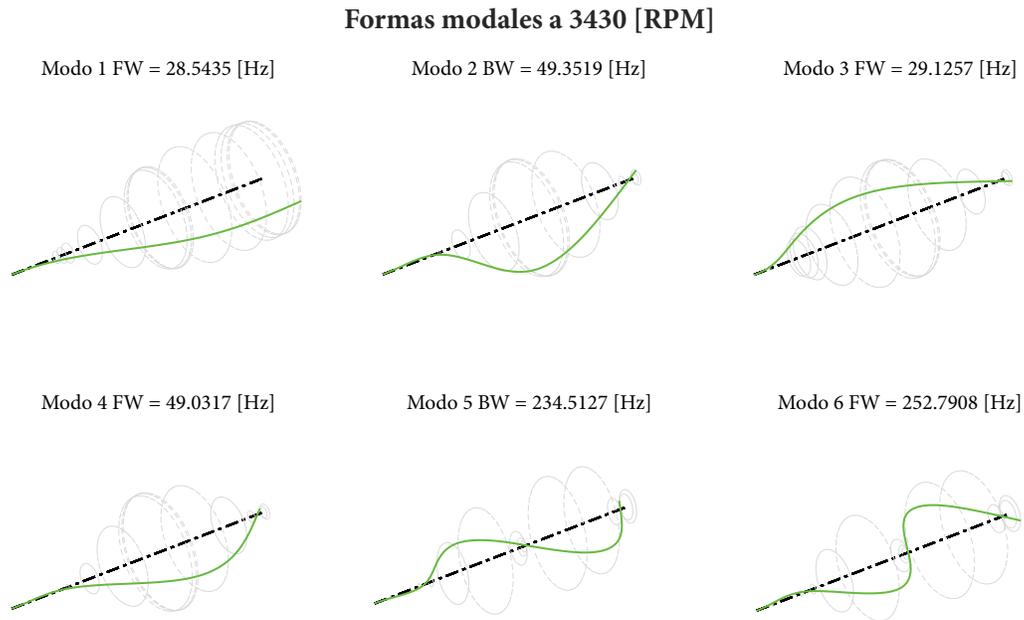
Los 6 modos analizados muestran un comportamiento estable hasta aproximadamente los 4980 [RPM]. A partir de esta velocidad, el modo 1 que corresponde a un modo de torbellino de aceite (*whirl mode*) hace su transición hacia el fenómeno de latigazo de aceite (*whip mode*) y genera inestabilidad en la dinámica del rotor (zona roja en el diagrama de estabilidad), es decir, el coeficiente de amortiguamiento es menor que 0 ( $\zeta < 0$ ) y por ende la vibración aumentará. Los modos 3 y 4 presentan variaciones significativas que evidencian cambios en el coeficiente de amortiguamiento, en el caso del modo 4 tendiendo, pero sin acercarse al amortiguamiento crítico y en el caso del modo 3 acercándose hacia la inestabilidad a altas velocidades de rotación.

**5.6.3 Formas de deflexión.** Las formas de deflexión o formas modales son una representación gráfica del movimiento del sistema, en este caso el rotor, ante la excitación a una determinada frecuencia, usualmente las frecuencias naturales de los modos de vibración. La grafica permite determinar los puntos de mayor deflexión y es de gran utilidad para corroborar e identificar la naturaleza del modo de vibración.

A partir de la parte real de los vectores propios  $\phi$ , se grafican las formas modales proyectadas sobre el plano de mayor deflexión en proyección ortográfica. Estas formas modales corresponden a los primeros 6 modos de vibración para cada uno de los grados de libertad traslacionales en los que se discretizó el rotor. La representación gráfica de las formas de deflexión del modelo numérico del rotor, a una velocidad de rotación de 3430 [RPM] se muestran en la Figura 20. c

Los modos de flexión del rotor, es decir, los modos 2, 4, 5 y 6, muestran unas formas de deflexión típicas restringidas en las zonas de los cojinetes, el acople y la cadena. El modo 1 de torbellino de aceite (*whirl mode*) corresponde a un modo cónico del rotor con comportamiento de solido rígido. El modo 3 de torbellino de aceite (*whirl mode*) tiende a tener forma de modo cónico y comportamiento de solido rígido, pero se ve influenciado por la rigidez del acople y la cadena (zona izquierda) restringiendo su movimiento.

Figura 20. Formas modales del modelo numérico del rotor sin ajustar



Fuente: Elaboración propia.

## 5.7 FUNCIÓN DE RESPUESTA EN FRECUENCIA (FRF)

A partir de la ecuación de movimiento de un sistema amortiguado definida en la Ecuación 1, se expresa el vector de desplazamientos, velocidades, aceleraciones y fuerzas de forma armónica como:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 e^{i\omega t} \quad (68a)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = i\omega \mathbf{q}_0 e^{i\omega t} \quad (68b)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 \mathbf{q}_0 e^{i\omega t} \quad (68c)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 e^{i\omega t} \quad (68d)$$

Reemplazando la Ecuación 68 en la Ecuación 1, simplificando la parte armónica y agrupando en función del vector de amplitudes en desplazamiento, se obtiene:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{q}_0 = \mathbf{f}_0 \quad (69)$$

Luego, la relación entre el vector de desplazamiento y el vector de fuerzas, conocido como función de respuesta en frecuencia, y más específicamente como receptancia, está dada por:<sup>27,76</sup>

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{q}_0}{\mathbf{f}_0} = \frac{1}{-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}} \quad (70)$$

Los elementos  $H_{ij}(\omega)$  de la matriz de receptancia, relacionan la salida o respuesta del sistema  $q_{0_i}$  en el grado de libertad  $i$ , con la entrada o fuerza armónica unitaria  $f_{0_j}$  en el grado de libertad  $j$ . Los elementos de la función de respuesta en frecuencia  $H_{ij}(\omega)$  corresponden a un número complejo de la forma  $z = a + bi$ , donde  $r$  es la magnitud y  $\theta$  la fase, dadas por:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (71a)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (71b)$$

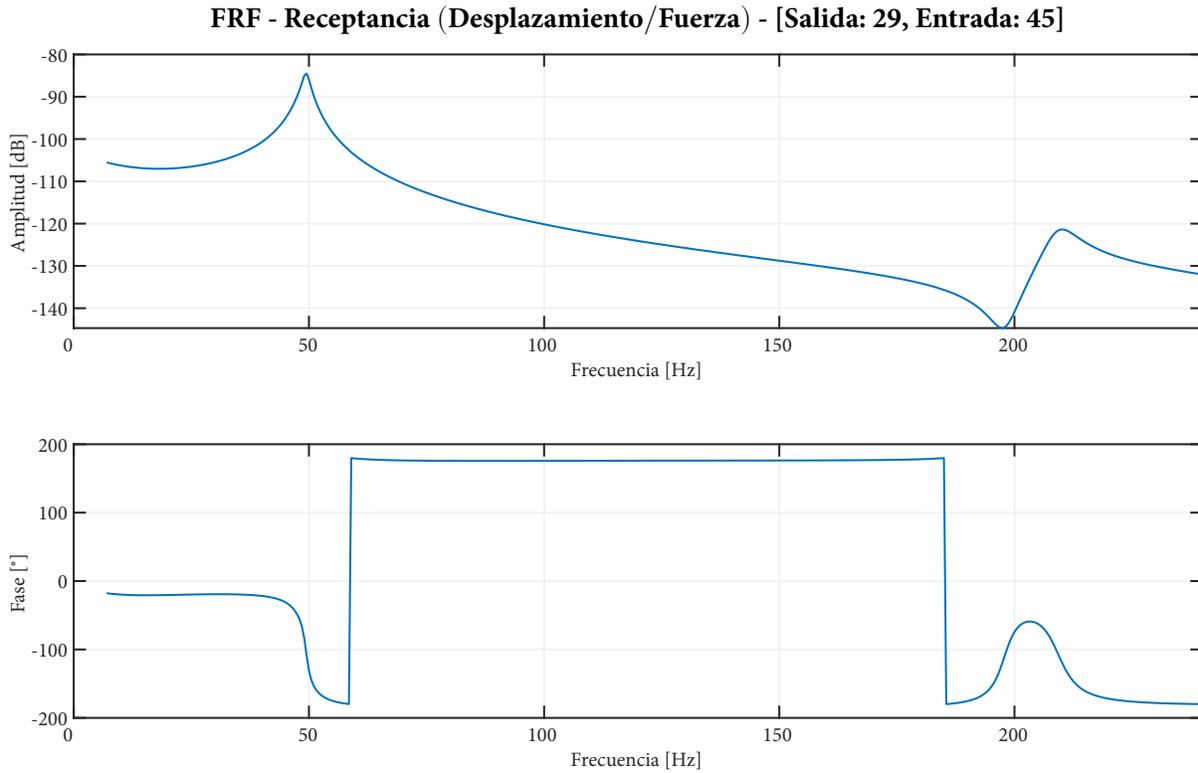
La función de respuesta en frecuencia (*FRF*) o receptancia del modelo numérico del rotor implementado, correspondiente a la respuesta o salida, en el grado de libertad 29 (ubicación del sensor de proximidad en dirección x) y la fuerza armónica unitaria de entrada, en el grado de libertad 45 (ubicación del disco en dirección x), se muestra en la Figura 21.

La función de respuesta en frecuencia (*FRF*) muestra un pico a 49.5 [Hz] con un cambio de fase de 180°. Este pico corresponde a la primera y segunda velocidad crítica del rotor, que se unen por la resolución espectral de 0.5 [Hz] de la *FRF*. Un segundo pico de baja amplitud a 210 [Hz] junto con un cambio de fase de 180° se muestra en la *FRF*. Este pico corresponde a la tercera velocidad crítica del rotor. Finalmente, se observa un pico invertido a 197.5 [Hz] junto con un cambio de fase de 180° correspondiente a una antiresonancia.

**5.7.1 FRF a partir de la representación en espacio de estados.** A partir de la representación en espacio de estados de la ecuación de movimiento del sistema dada en la Ecuación 59, puede obtenerse la función de respuesta en frecuencia o función de transferencia, que está dada por:<sup>16</sup>

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{D}_{ee} + \mathbf{C}_{ee} (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}_{ee})^{-1} \mathbf{B}_{ee} \quad (72)$$

Figura 21. Receptancia: Función de respuesta en frecuencia



Fuente: Elaboración propia.

Donde  $D_{ee}$  es la matriz de transmisión directa,  $C_{ee}$  la matriz de salidas,  $I$  la matriz identidad,  $A_{ee}$  la matriz de estados y  $B_{ee}$  la matriz de entradas.

**5.7.2 Respuesta del sistema.** De acuerdo con la función de respuesta en frecuencia  $H(\omega)$  se determina la respuesta del sistema a la aplicación de una determinada fuerza. En el caso del modelo del rotor analizado, la fuerza aplicada corresponde al desbalanceo estático  $f_d$  (fuerza centrífuga) en las direcciones de los desplazamientos  $u$  y  $v$  (ejes cartesianos  $x$  e  $y$ ), dado por:

$$f_{d_u} = m_d r_d \omega^2 e^{i\phi} \quad (73a)$$

$$f_{d_v} = -i m_d r_d \omega^2 e^{i\phi} \quad (73b)$$

Donde  $m_d$  es la masa de desbalanceo,  $r_d$  el radio de ubicación de la masa de desbalanceo y  $\phi$  el desfase con respecto al tiempo 0. La respuesta del sistema de acuerdo con la Ecuación 74 y la Ecuación 73 está dada

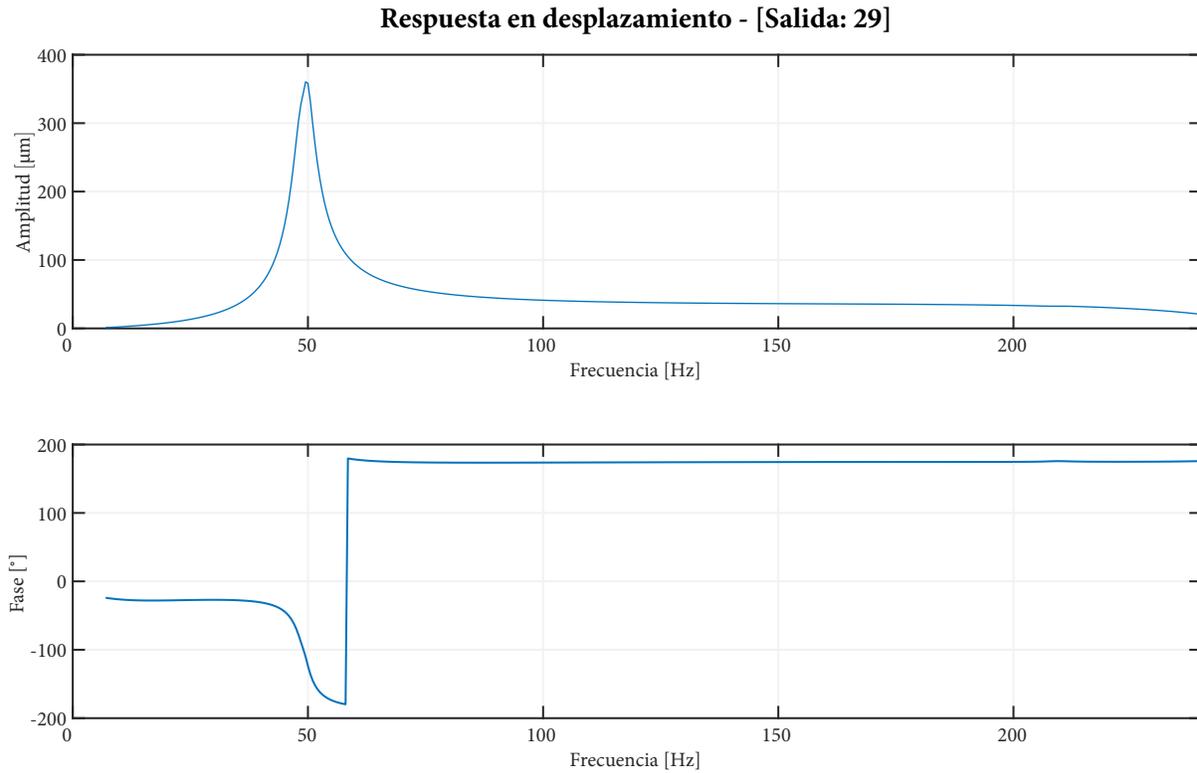
por:<sup>27</sup>

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{f}_0 = (-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{f}_0 \quad (74)$$

Al igual que con los elementos de la matriz de receptancia  $H_{ij}(\omega)$ , los elementos del vector de la respuesta del sistema  $q_{0j}$  corresponden a un número complejo de la forma  $z = a + bi$ .

La respuesta en frecuencia del modelo numérico del rotor implementado, correspondiente al grado de libertad 29 (ubicación del sensor de proximidad en dirección  $x$ ) y a la fuerza armónica unitaria o entrada, en el grado de libertad 45 (ubicación del disco en dirección  $x$ ), se muestra en la Figura 22.

Figura 22. Respuesta en frecuencia



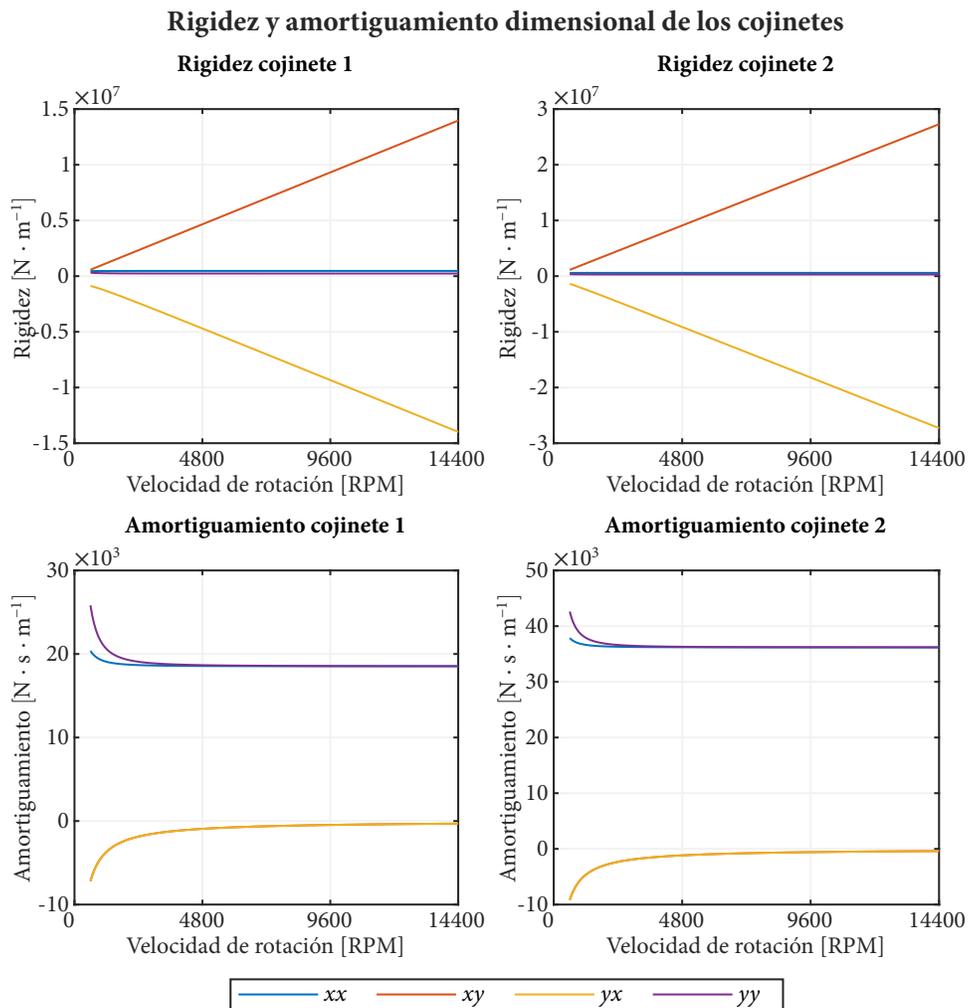
Fuente: Elaboración propia.

La respuesta del sistema muestra la primera y segunda velocidad crítica del rotor, en el pico de resonancia a 49.5 [Hz] y el cambio de fase a 180°. Al igual que con la función de respuesta en frecuencia (*FRF*) las dos velocidades críticas se unen por la resolución espectral de 0.5 [Hz] de la respuesta en frecuencia del rotor.

## 5.8 DINÁMICA DE LOS COJINETES

Las características dinámicas de rigidez y amortiguamiento de los cojinetes hidrodinámicos se grafican a partir de los coeficientes de las matrices de rigidez y amortiguamiento dimensional ( $xx, xy, yx, yy$ ) como función de la velocidad de rotación del rotor. La grafica de los coeficientes de las matrices dimensionales de rigidez y amortiguamiento de los cojinetes hidrodinámicos se muestra en la Figura 23.

Figura 23. Dinámica de los cojinetes hidrodinámicos del modelo numérico del rotor sin ajustar



Fuente: Elaboración propia.

La gráfica de las características de rigidez y amortiguamiento dimensionales muestra una relación lineal entre la rigidez y la velocidad de rotación en las direcciones transversales a las fuerzas aplicadas ( $xy, yx$ ). La rigidez en estas direcciones transversales también presenta asimetría. Esta condición es la principal causa

de la aparición de modos con frecuencias naturales amortiguadas dependientes de la velocidad de rotación con una pendiente aproximada de 0.5 en el diagrama de Campbell. En las direcciones longitudinales a las fuerzas aplicadas ( $xx$ ,  $yy$ ), la rigidez no varía significativamente.

El amortiguamiento de los cojinetes también varía con la velocidad de rotación. El amortiguamiento tiende a reducirse y estabilizarse a aproximadamente 4800 [RPM]. Los valores grandes de amortiguamiento reducen la oscilación de algunos modos de vibración. Estos modos, junto con la asimetría de la rigidez en direcciones transversales, dan lugar a modos subsincrónicos asociados a los fenómenos de torbellino y latigazo de aceite en el cojinete.

## 6. AJUSTE Y VALIDACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO

### 6.1 ADQUISICIÓN DE DATOS EXPERIMENTALES

**6.1.1 Prueba de arranque del rotor.** El variador de velocidad del motor se configura para realizar un barrido de frecuencia desde 0 hasta 55 [Hz] en aproximadamente 55 segundos. La velocidad de rotación del motor se encuentra levemente por debajo de la frecuencia del variador, debido a la frecuencia de deslizamiento. El rango de frecuencia se estableció para obtener la mayor cantidad de información del rotor de forma segura.

Para la realización de la prueba, se utilizan los siguientes instrumentos (ver Figura 24):

- (a) Un analizador de vibraciones multicanal en tiempo real OROS OR35.
- (b) Cuatro sensores de desplazamiento o proximitores SHINKAWA FL-202F05L-M1-00-04-10 con cables de extensión SHINKAWA FW-202F-80, atenuadores de 10 [dB] y transductores SHINKAWA FK-202F2-1.
- (c) Dos fuentes DC Tektronix PWS2326 de 0-32 [V] conectadas en serie, para generar un voltaje de -24 [VDC].
- (d) Un sensor óptico remoto MONARCH INSTRUMENT ROS-P autoalimentado con el módulo MONARCH INSTRUMENT SPSR.

Figura 24. Equipos e instrumentos utilizados en la adquisición de vibraciones



Fuente: Imágenes obtenidas de las páginas web de los fabricantes.

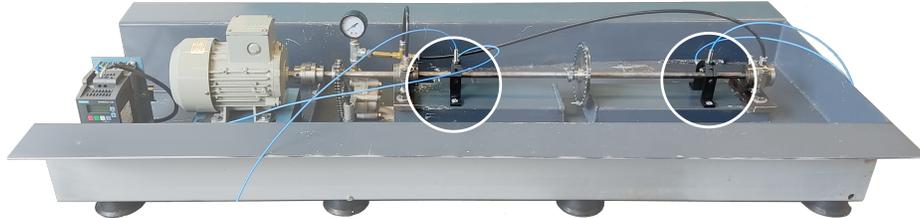
La señal de los transductores de las sondas de proximidad es atenuada mediante un cable de atenuación de 10 [dB] generando una señal entre 0 y -7.589 [VDC] para satisfacer los niveles de voltaje máximos del analizador. Las especificaciones de los instrumentos se encuentran en el Anexo A.

Los datos son adquiridos mediante la plataforma de software OROS NVGate, que gestiona la configuración de los instrumentos, la grabación de las señales adquiridas, el análisis en tiempo real y el posprocesamiento de las señales de vibración.

**6.1.2 Montaje.** Los sensores de desplazamiento son montados sobre dos soportes ubicados en los nodos 8 (soporte izquierdo) y 14 (soporte derecho), en dirección horizontal (eje  $x$ ) y dirección vertical (eje  $y$ ), correspondientes a los grados de libertad 29 ( $x$ ), 30 ( $y$ ), 53 ( $x$ ) y 54 ( $y$ ), de acuerdo con la discretización en elementos finitos definida en la Sección 5.5. En la Figura 25 se muestra la ubicación de los sensores de desplazamiento o proximitores instalados.

Los sensores de desplazamiento están montados sobre dos soportes ubicados en los nodos 8 (soporte izquierdo) y 14 (soporte derecho), en dirección horizontal (eje  $x$ ) y dirección vertical (eje  $y$ ), en los grados de libertad 29 ( $x$ ), 30 ( $y$ ), 53 ( $x$ ) y 54 ( $y$ ). Los nodos y grados de libertad se enuncian de acuerdo con la discretización en elementos finitos definida en la sección 5.5. La Figura 25 muestra la ubicación de los sensores de desplazamiento o proximitores instalados.

Figura 25. Montaje de sensores de proximidad en el banco experimental del rotor



Fuente: Elaboración propia.

**6.1.3 Parámetros de adquisición de las señales de vibración.** La configuración de los parámetros de adquisición de los sensores de proximidad se define a partir de la velocidad de rotación máxima del rotor, establecida en 55 [Hz] sin tener en cuenta la frecuencia de deslizamiento del motor. La frecuencia de interés para el análisis se establece como 3 veces la frecuencia correspondiente a la velocidad de rotación máxima del rotor, es decir, 165 [Hz]. Por lo tanto, la frecuencia máxima  $F_{m\acute{a}x}$  se aproximará a 200 [Hz]. El tiempo de colección  $T_c$  se define en 60 [s] teniendo en cuenta el tiempo de barrido del variador de velocidad de aproximadamente 55 [s]. Los parámetros de configuración derivados de la frecuencia máxima  $F_{m\acute{a}x}$ , el tiempo de colección  $T_c$  y las opciones definidas por el analizador OROS OR35, se presentan en la Tabla 8

La configuración del sensor óptico o fototacómetro se realiza manteniendo el tiempo de colección  $T_c$  de

Tabla 8. Configuración de las variables de adquisición de datos con los sensores de proximidad

Parámetro	Valor
Tiempo de colección $T_c$	60 [s]
Número de muestras $N$	30720
Frecuencia de muestreo $F_m$	512 [Hz]
Frecuencia máxima $F_{m\acute{a}x}$	200 [Hz]

Fuente: Elaboración propia.

60 [s]. Los parámetros de configuración adicionales son establecidos por el software OROS NVGate y se muestran en la Tabla 9.

Tabla 9. Configuración de las variables de adquisición de datos con el fototacómetro óptico

Parámetro	Valor
Tiempo de colección $T_c$	60 [s]
Número de muestras $N$	1536000
Frecuencia de muestreo $F_m$	25600 [Hz]
Frecuencia máxima $F_{m\acute{a}x}$	10000 [Hz]

Fuente: Elaboración propia.

## 6.2 PROCESAMIENTO DE DATOS

**6.2.1 Velocidad de rotación del rotor.** A partir de la señal de pulsos del fototacómetro, se determinan las revoluciones por minuto (RPM) del rotor. Para ello se identifica el tiempo de aparición de cada uno de los pulsos y el tiempo de diferencia entre pulsos consecutivos. Esta diferencia corresponderá al periodo de cada una de las rotaciones, luego, la frecuencia de rotación estará dada por el inverso del periodo. Las RPM se obtienen multiplicando la frecuencia de rotación por 60.

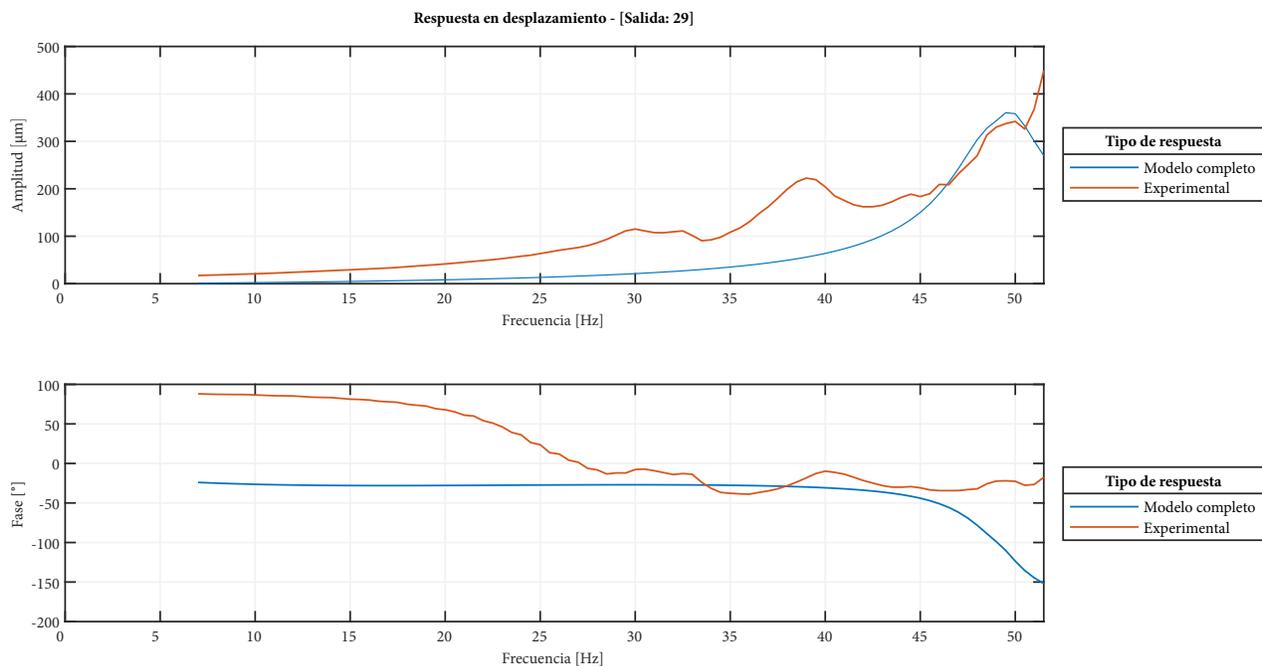
Cada una de las RPM del rotor se relacionan con el tiempo de aparición de los pulsos y se descartan los valores atípicos o inconsistentes. Posteriormente se realiza una interpolación o remuestreo del vector de RPM en función del tiempo de muestreo  $T_m$  o el inverso de la frecuencia de muestreo  $F_m$  de la señal de desplazamiento adquirida por los proximitores. Una alternativa para extraer las RPM de la señal de pulsos del fototacómetro, es usar la función “tachorpm” de la plataforma de programación y cálculo numérico de MATLAB.

**6.2.2 Seguimiento de órdenes de la amplitud en desplazamiento.** Mediante la función “ordertrack” de la plataforma de programación y cálculo numérico de MATLAB, se rastrea la amplitud de la señal de desplazamiento adquirida por los proximitores para cada una de las RPM del rotor, es decir, para el orden 1X. Para atenuar el ruido de la señal y obtener valores de fase más precisos, se determina la amplitud en niveles de potencia “power”.

La amplitud obtenida del seguimiento de órdenes corresponde a la magnitud de la respuesta del rotor. La fase es obtenida mediante la aplicación de la función “angle” a la transformada de Hilbert de la magnitud de la respuesta del rotor, mediante la función “hilbert”. Para mayor practicidad, la fase obtenida en [rad/s], se convierte a grados. Tanto la magnitud como la fase de la respuesta del rotor son interpoladas de acuerdo con las frecuencias de rotación o saltos de frecuencia  $\Delta\omega$  en [Hz] utilizados en el análisis del modelo numérico del rotor.

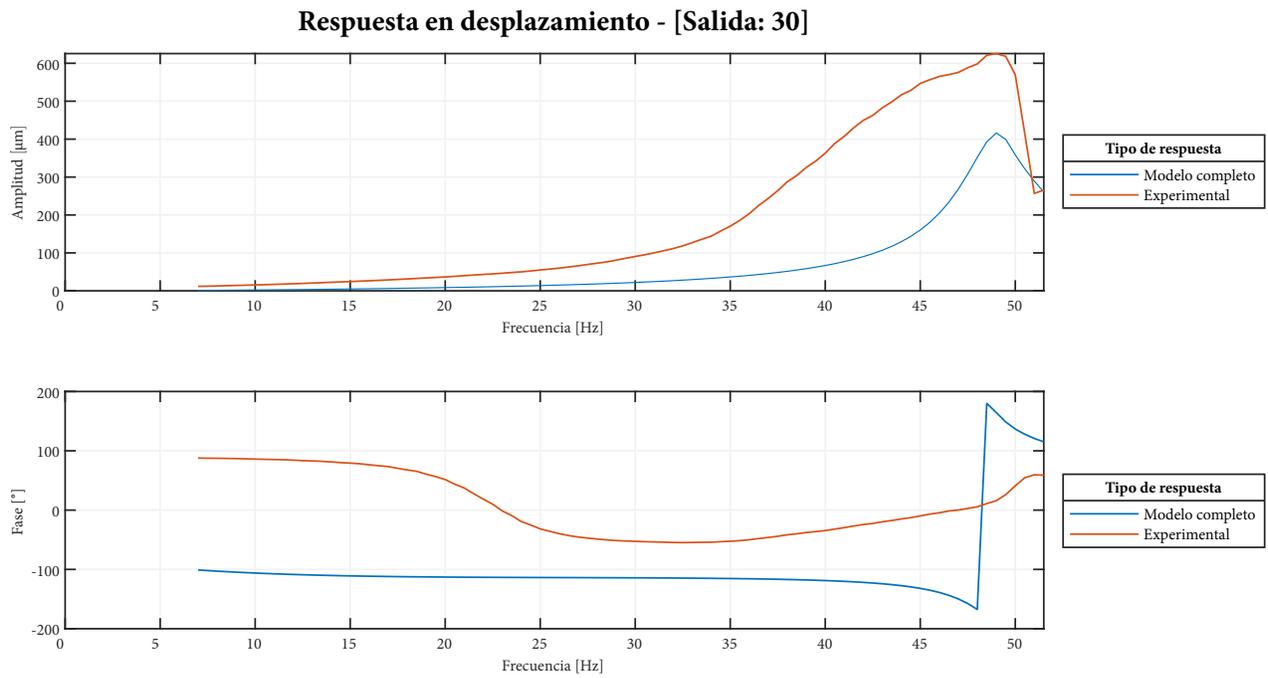
Los resultados obtenidos para las cuatro posiciones de medición se muestran en comparación con los resultados del modelo numérico en las Figuras 26, 27, 28 y 29.

Figura 26. Respuesta del rotor en el grado de libertad 29 (dirección  $x$ )



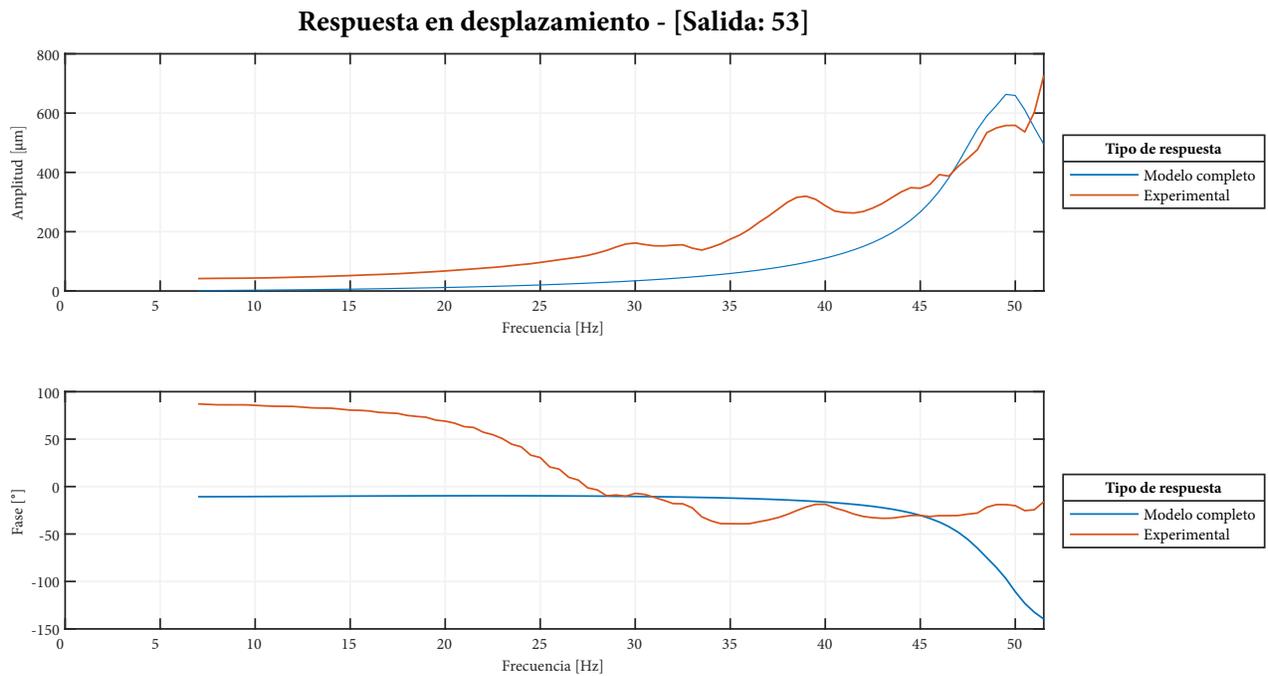
Fuente: Elaboración propia.

Figura 27. Respuesta del rotor en el grado de libertad 30 (dirección  $y$ )



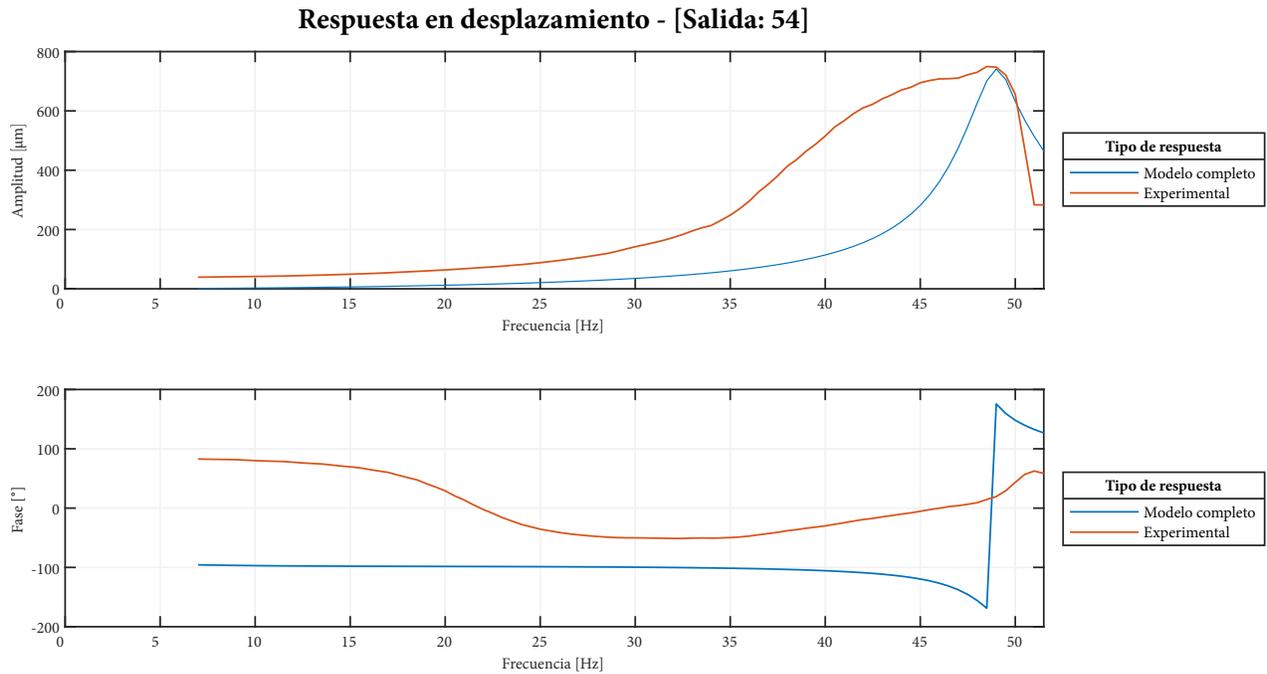
Fuente: Elaboración propia.

Figura 28. Respuesta del rotor en el grado de libertad 53 (dirección  $x$ )



Fuente: Elaboración propia.

Figura 29. Respuesta del rotor en el grado de libertad 54 (dirección y)



Fuente: Elaboración propia.

### 6.3 COMPARACIÓN Y CORRELACIÓN MODAL

El criterio de confianza modal (*MAC*) es uno de los métodos de comparación y correlación más utilizados en el ámbito de los análisis modales. Sin embargo, en los casos en que no es posible obtener los parámetros modales de los datos experimentales, el criterio de confianza de respuesta en frecuencia (*FRAC*) se consolida como una herramienta de gran utilidad. De forma análoga al *MAC*, el *FRAC* correlaciona las funciones de respuesta en frecuencia experimentales con respecto a las funciones de respuesta en frecuencia teóricas para todas las salidas *i* ante una entrada o fuerza *j*. En este sentido, el *FRAC* está dado por:

$$FRAC(\omega) = \frac{|\mathbf{H}_n(\omega)\mathbf{H}_e^T(\omega)|^2}{|\mathbf{H}_n(\omega)|^2|\mathbf{H}_e(\omega)|^2} \quad (75)$$

Dónde  $\mathbf{H}_n$  es el vector de salidas para una determinada entrada *j* de la función de respuesta en frecuencia del modelo numérico, y  $\mathbf{H}_e$  es el vector de salidas para una determinada entrada *j* de la función de respuesta en frecuencia obtenida experimentalmente. La correlación generará un vector de valores entre 0 y 1 para cada una de las entradas, en cada una de las frecuencias o velocidades de rotación  $\omega$ . Los valores cercanos a

1 significarán una adecuada correspondencia y correlación entre las *FRF*, y los valores cercanos a 0 una inadecuada correspondencia y correlación.

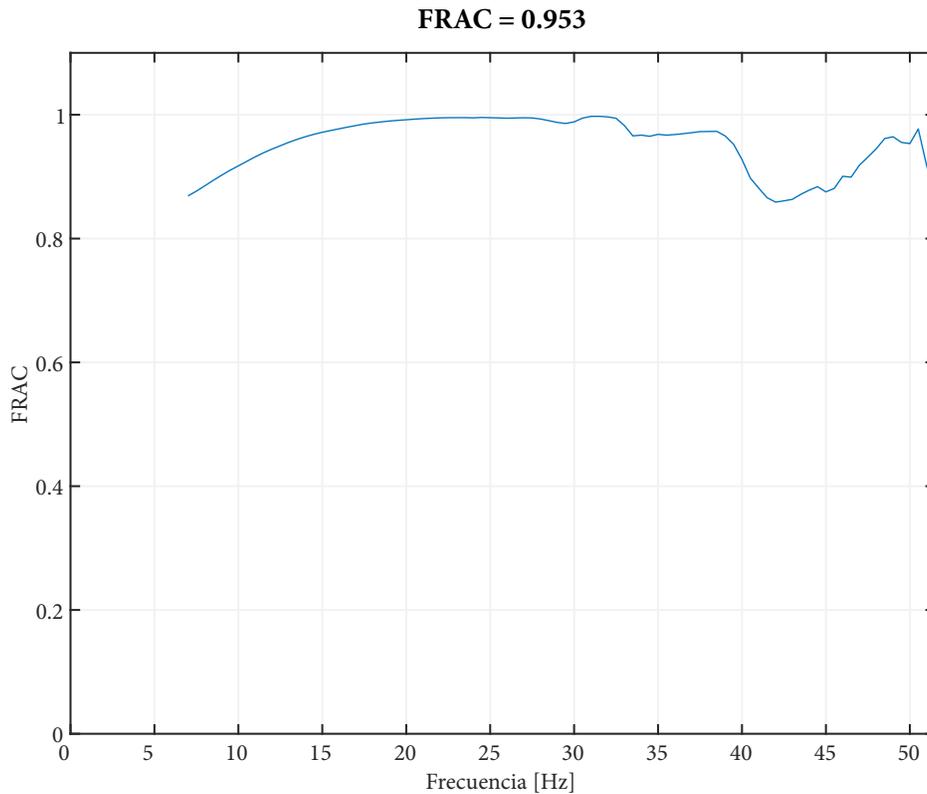
Considerando la dificultad para obtener la función de respuesta en frecuencia experimental a partir de las mediciones de la prueba de arranque del rotor, se propone una adaptación del criterio de confianza de respuesta en frecuencia (*FRAC*) orientado a la correlación de la respuesta del rotor ante las fuerzas aplicadas. Luego:

$$FRAC(\omega) = \frac{|\mathbf{R}_n(\omega)\mathbf{R}_e^T(\omega)|^2}{|\mathbf{R}_n(\omega)|^2|\mathbf{R}_e(\omega)|^2} \quad (76)$$

A diferencia de la correlación con las funciones de respuesta en frecuencia, la correlación con las respuestas del rotor, numérica  $\mathbf{R}_n$  ( $\mathbf{R}_n = \mathbf{q}_0$  de acuerdo con la Ecuación 74) y experimental  $\mathbf{R}_e$ , solo corresponderá a un único valor para cada frecuencia o velocidad de rotación  $\omega$ . El criterio de confianza de respuesta en frecuencia (*FRAC*), que correlaciona el modelo numérico del rotor con la respuesta obtenida a partir de los datos experimentales, se muestra en la Figura 30.

La comparación entre la respuesta experimental y la respuesta del modelo numérico en los grados de libertad correspondientes a los puntos de medición, muestran una buena correspondencia y correlación general del 95.3 %. Los rangos de frecuencia entre 40 y 47 [Hz], y por debajo de 13 [Hz] tienen los valores más bajos de correspondencia, pero se mantienen por encima del 80 %, lo que significa una sobresaliente correlación y correspondencia.

Figura 30. *FRAC* entre la respuesta del modelo numérico y la respuesta experimental del rotor



Fuente: Elaboración propia.

## 6.4 OPTIMIZACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO

En los procesos de optimización, especialmente cuando se enfrentan problemas complejos que involucran un número considerable de variables, la elección de un algoritmo se vuelve crucial para obtener los mejores resultados con el menor costo computacional posible. En este contexto, la optimización a través de la búsqueda directa o la búsqueda de patrones se adecúa a las necesidades en términos de carga computacional, número de variables, presencia de discontinuidades y la existencia de múltiples mínimos locales. No obstante, la capacidad de los algoritmos genéticos para explorar amplios espacios de búsqueda y abordar problemas de complejidad, los convierte en una opción adecuada a considerar.

En este sentido se implementará un algoritmo híbrido en serie, es decir, se empleará el algoritmo genético en combinación con el algoritmo de búsqueda de patrones, utilizando la solución óptima obtenida a través del algoritmo genético como punto de partida para la ejecución del segundo algoritmo. Este enfoque aportará una mayor robustez al proceso de optimización en el ajuste del modelo numérico.

La implementación se realizará mediante la opción “HybridFcn” de la función “ga” que hace parte de la caja de herramientas o complemento “Global Optimization Toolbox” de la plataforma de programación y cálculo numérico de MATLAB.

**6.4.1 Algoritmo genético.** Los algoritmos genéticos (GA) representan un método estocástico de optimización de problemas, fundamentado en la teoría de la evolución de Darwin. Su funcionamiento se basa en la aplicación de los operadores genéticos de selección, cruce y mutación, sobre un conjunto de datos conocido como población. Cada elemento en esta población se denomina individuo. Los operadores genéticos son empleados de manera iterativa hasta que se cumpla la condición o condiciones de finalización establecidas. A cada uno de estos ciclos iterativos se les conoce como generaciones.

El algoritmo genético utilizado corresponde a la función “ga” que hace parte de la caja de herramientas o complemento “Global Optimization Toolbox” de la plataforma de programación y cálculo numérico de MATLAB.

**6.4.2 Búsqueda de patrones.** La búsqueda de patrones o búsqueda directa (PS) es un método numérico y heurístico de optimización de gran utilidad en funciones discontinuas. El algoritmo comienza evaluando la función objetivo a partir de un conjunto de variables con valores previamente asignados, es decir, un punto inicial. Posteriormente, se establece una malla con puntos definidos a partir de las variables de optimización en todo el espacio de búsqueda, definido por los límites establecidos para las variables. Cada uno de los puntos que forman la malla es evaluado con la función objetivo y comparado con el punto inicial. Si la función objetivo evaluada en alguno de los puntos de la malla es menor que la función objetivo evaluada en el punto inicial, el tamaño de la malla se incrementa y el punto con la función objetivo menor se establece como un nuevo punto de comparación. Si no es así, el tamaño de la malla se reduce o refina. Este proceso se repite de forma iterativa hasta que se cumpla algún criterio de parada, como la diferencia mínima entre las funciones objetivo de menor valor de dos iteraciones consecutivas.

El algoritmo de búsqueda de patrones utilizado corresponde a la función “patternsearch” que hace parte de la caja de herramientas o complemento “Global Optimization Toolbox” de la plataforma de programación y cálculo numérico de MATLAB.

**6.4.3 Función objetivo.** La función objetivo se define a partir del criterio de confianza de respuesta en frecuencia (FRAC) y la diferencia entre la respuesta del modelo numérico y la respuesta experimental. La

función objetivo se expresa como:

$$F_{obj} = (1 - \overline{FRAC}) + R \times 10^{-5} \quad (77)$$

$\overline{FRAC}$  representa el valor promedio del criterio de confianza de respuesta en frecuencia en todo el rango de frecuencias, mientras que  $R$  es la suma de las diferencias entre la respuesta del modelo numérico  $R_n$  y la respuesta experimental  $R_e$  en todo el rango de frecuencias. El valor de  $R$  se multiplica por  $10^{-5}$  para dar más peso al criterio de confianza de respuesta en frecuencia ( $FRAC$ ). El valor de  $R$  está dado por:

$$R(\omega) = \sum_{i=1}^k |R_{n_i}(\omega) - R_{e_i}(\omega)| \quad (78a)$$

$$R = \sum_{\omega=\omega_o}^{\omega_f} R(\omega) \quad (78b)$$

El valor de  $k$  está dado por el número de grados de libertad medidos en la prueba de arranque del rotor.  $R_n(\omega)$  representa la matriz de vectores de respuestas del modelo numérico para distintas frecuencias o velocidades de rotación  $\omega$ , mientras que  $R_e$  denota la matriz de vectores de respuestas experimentales para distintas frecuencias o velocidades de rotación  $\omega$ .

La selección de del valor de  $10^{-5}$  se realiza bajo las siguientes consideraciones:

- Un valor altamente deseable para el  $FRAC$  es de 0.999. Por lo tanto, el valor de  $(1 - \overline{FRAC})$  corresponderá al orden de  $10^{-3}$ .
- Las diferencias aceptables entre la respuesta del modelo numérico  $R_n$  y la respuesta experimental  $R_e$ , se establecen en un valor aproximado de 1 [mm]. Al considerar el número de grados de libertad y las frecuencias analizadas para el cálculo del  $FRAC$ , el valor de  $R$  corresponderá al orden de  $10^2$ .
- Para garantizar una contribución equilibrada en la función objetivo entre los valores de  $R$  y  $(1 - \overline{FRAC})$ , el valor de  $R$  se escala hasta alcanzar valores que correspondan al orden de  $10^{-3}$ . Para ello, se divide el orden deseado  $10^{-3}$  entre el orden de los valores de  $R$  de  $10^2$ , resultando en valores del orden  $10^{-5}$ .

**6.4.4 Variables de ajuste.** El ajuste de las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento del rotor estará determinado principalmente por dos variables de ajuste  $a$  y  $b$  que multiplican el módulo elástico longitudinal y la densidad del material, respectivamente. Estas variables se ajustan teniendo en cuenta la incertidumbre asociada al valor real de estas dos propiedades mecánicas del material. El valor de la

constante de amortiguamiento proporcional a la rigidez  $\beta$  también se establece como una variable de ajuste. Siguiendo la Ecuación 56 y las variables de ajuste previamente establecidas, las matrices generales de los elementos del rotor se reescriben de la siguiente manera:

$$\mathbf{K}_{el} = a\mathbf{K}_e + \omega\beta a\mathbf{K}_{ai_e} \quad (79a)$$

$$\mathbf{M}_{el} = b\mathbf{M}_e + b\mathbf{M}_{ir_e} \quad (79b)$$

$$\mathbf{C}_{el} = \beta a\mathbf{K}_e + \omega b\mathbf{G}_e \quad (79c)$$

El aporte de masa, inercia rotacional y el efecto giroscópico de cada uno de los discos instalados en el rotor se ajusta mediante 13 variables  $d_i$  asociadas a la densidad del material de dichos discos. A continuación, las matrices de masa y efecto giroscópico de los discos, de acuerdo con la Ecuación 46 y la Ecuación 48, se reescriben de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}_d = d_i\mathbf{M}_d \quad (80a)$$

$$\mathbf{G}_d = d_i\mathbf{G}_d \quad (80b)$$

Un factor clave en el proceso de ajuste del rotor consiste en ajustar las características dinámicas de los cojinetes. Para lograr esto, se realiza una multiplicación de la fuerza o carga estática ejercida por el rotor sobre los cojinetes por medio de una variable de ajuste  $b_{fi}$ , así como una multiplicación de la holgura o juego radial  $h_c$  por la variable de ajuste  $b_{hi}$  correspondiente a cada uno de los cojinetes en los que se apoya el rotor. Posteriormente, las matrices de rigidez y amortiguamiento de cada uno de los cojinetes, siguiendo la Ecuación 42 y la Ecuación 44, se reescriben de la siguiente manera:

$$\mathbf{K}_{B_i} = \frac{b_{fi}F}{b_{hi}h_c} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (81a)$$

$$\mathbf{C}_{B_i} = \frac{b_{fi}F}{b_{hi}h_c\omega} \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \quad (81b)$$

Los aportes de rigidez del acople y la cadena sobre el rotor se ajustan de manera independiente en las direcciones  $x$  y  $y$ . Esto se logra multiplicando los elementos correspondientes de las matrices de rigidez por las variables de ajuste  $a_{ax}$ ,  $a_{ay}$ ,  $a_{cx}$  y  $a_{cy}$ , respectivamente. Las matrices de rigidez del acople y la cadena, reescritas a partir de las variables de ajuste y de acuerdo con las ecuaciones 51 y 55, son representadas de la

siguiente forma:

$$\mathbf{K}_A = \begin{bmatrix} a_{ax}k_A & 0 \\ 0 & a_{ay}k_A \end{bmatrix} \quad (82a)$$

$$\mathbf{K}_C = \begin{bmatrix} a_{cx}k_c \cos \alpha_c & 0 \\ 0 & a_{cy}k_c \sin \alpha_c \end{bmatrix} \quad (82b)$$

En el modelo numérico, se desprecia el aporte de amortiguamiento del acople y la cadena. En el proceso de ajuste, se definen dos matrices genéricas de amortiguamiento para el acople y la cadena, que se multiplican por 4 variables de ajuste:  $b_{ax}$ ,  $b_{ay}$ ,  $b_{cx}$  y  $b_{cy}$ . Las matrices de amortiguamiento del acople y la cadena, considerando las variables de ajuste mencionadas, se expresan de la siguiente manera:

$$\mathbf{C}_A = \begin{bmatrix} b_{ax}10000 & 0 \\ 0 & b_{ay}10000 \end{bmatrix} \quad (83a)$$

$$\mathbf{C}_C = \begin{bmatrix} b_{cx}10000 & 0 \\ 0 & b_{cy}10000 \end{bmatrix} \quad (83b)$$

Considerando que el ajuste del modelo se realiza mediante la comparación y correlación entre la respuesta del modelo numérico y la respuesta experimental del rotor, se introduce una variable de ajuste  $a_d$  que se multiplica por la fuerza de desbalanceo. La expresión de la fuerza de desbalanceo, considerando la variable de ajuste y la Ecuación 73, se reescribe como:

$$f_{d_u} = a_d m_d r_d \omega^2 e^{i\phi} \quad (84a)$$

$$f_{d_v} = -i a_d m_d r_d \omega^2 e^{i\phi} \quad (84b)$$

Para mejorar la flexibilidad del método de ajuste, también se consideran fuerzas adicionales en los nodos que corresponden a la posición del acoplamiento y la cadena. Estas fuerzas se incorporarán como variables de ajuste en el proceso de optimización. Se asume que las fuerzas dependen de la velocidad de rotación y están expresadas por:

$$f_{ax} = a f_x \omega^2 \quad (85a)$$

$$f_{ay} = -a f_y \omega^2 \quad (85b)$$

$$f_{at} = af_t \omega^2 \quad (85c)$$

$$f_{ap} = af_p \omega^2 \quad (85d)$$

$$f_{cx} = 81cf_x \sin \alpha_c \omega^2 \quad (85e)$$

$$f_{cy} = -81cf_y \cos \alpha_c \omega^2 \quad (85f)$$

Donde  $af_x$ ,  $af_y$ ,  $af_t$ ,  $af_p$ ,  $cf_x$  y  $cf_y$  son variables de ajuste que multiplican la velocidad de rotación y algunas expresiones genéricas, como en el caso de las fuerzas en el nodo de ubicación de la cadena  $f_{cx}$  y  $f_{cy}$ , que aproximan las fuerzas de tensión de la cadena.

**6.4.5 Límites de las variables de ajuste.** El proceso de ajuste de las variables previamente establecidas requiere definir límites que restrinjan el espacio de búsqueda de los algoritmos o métodos de ajuste utilizados. Estos límites deben ser coherentes con las características mecánicas del rotor y deben garantizar una solución factible que se alinee con el comportamiento esperado del rotor durante su operación. Establecer límites adecuados es crucial para evitar soluciones no realistas o inadecuadas que puedan afectar negativamente el proceso de ajuste del modelo numérico del rotor.

Los límites superiores e inferiores de las variables de ajuste definidas, junto con el punto inicial o punto de partida de las variables de ajuste, se muestran en la Tabla 10.

Tabla 10. Límites y punto inicial de las variables de ajuste

Variable	Límite inferior	Límite superior	Punto inicial
$a, b$	0.9	1.1	1
$\beta$	0	$10^{-4}$	$10^{-5}$
$d_1, d_2, \dots, d_{13}$	$10^{-2}$	1000	1
$b_{f1}, b_{h1}, b_{f2}, b_{h2}$	$10^{-3}$	1000	1
$a_{ax}, a_{ay}, a_{cx}, a_{cy}$	0	$10^9$	1
$b_{ax}, b_{ay}, b_{cx}, b_{cy}$	0	$10^9$	0.01
$a_d$	0	$10^9$	1
$af_x, af_y, af_t, af_p, cf_x, cf_y$	0	$10^9$	0

Fuente: Elaboración propia.

**6.4.6 Población inicial.** En los algoritmos genéticos, la población inicial generalmente se genera de manera aleatoria, siguiendo una distribución uniforme. Sin embargo, para guiar al algoritmo hacia una solución óptima y factible desde el punto de vista físico, la población inicial se construye utilizando un punto

de partida (valores iniciales de las variables de ajuste). Esto se realiza manteniendo tanto la aleatoriedad como una separación equidistante entre los individuos de la población. El proceso de generación de la población inicial se describe a continuación:

1. Inicialice una matriz  $P$  de dimensiones  $m \times n$ , donde  $m$  representa el número de individuos en la población inicial menos tres, y  $n$  es el número de variables de optimización.
2. Para cada columna  $n$ , genere un vector de  $m$  valores uniformemente espaciados entre 0 y 1.
3. Mezcle de forma aleatoria los valores de cada columna.
4. Multiplique la matriz resultante  $P$  por la diferencia entre los límites superiores  $ub$  e inferiores  $lb$ , y luego añada el límite inferior  $lb$ , como se muestra en la ecuación:

$$P_i = P \circ (ub - lb) + lb \quad (86)$$

5. Adicione una nueva fila a la matriz resultante  $P_i$  con el punto inicial  $x_0$ .
6. Adicione una nueva fila a la matriz resultante  $P_i$  con el límite inferior  $lb$ .
7. Adicione una nueva fila a la matriz resultante  $P_i$  con el límite superior  $ub$ .
8. Si es necesario ejecutar nuevamente el algoritmo de optimización, repita los pasos anteriores, esta vez con  $m$  igual al número de individuos en la población inicial menos cuatro. Al final, adicione una nueva fila a la matriz resultante  $P_i$  con el punto óptimo o las variables de ajuste resultantes del proceso de optimización, denotadas como  $x$ .

**6.4.7 Configuración del algoritmo de optimización.** Las opciones de configuración utilizadas en la implementación del algoritmo genético (GA) en MATLAB, se muestran en la estructura definida en el segmento de Código 1. La descripción de las opciones se muestra en el Anexo B.

Código 1. Opciones de configuración del algoritmo genético

```
%-----
options = optimoptions('ga', ...
    'Display', 'iter', ...
    'PopulationSize', 350, ...
    'PlotFcn', {@gaplotbestf, @gaplotbestindiv}, ...
    'UseParallel', true, ...
    'HybridFcn', {@patternsearch, hybridoptions}, ...
    'InitialPopulationMatrix', z, ...
```

```
'FunctionTolerance', 1e-9, ...
'MaxGenerations', Inf);
```

%-----

Las opciones de configuración utilizadas en la implementación del algoritmo de búsqueda de patrones (PS) en MATLAB, se muestran en la estructura definida en el fragmento de Código 2. La descripción de las opciones se muestra en el Anexo B.

Código 2. Opciones de configuración del algoritmo de búsqueda de patrones

%-----

```
hybridoptions = optimoptions('patternsearch', ...
    'Display', 'iter', ...
    'UseCompletePoll', true, ...
    'UseParallel', true, ...
    'PlotFcn', {@psplotbestf, @psplotbestx});
```

%-----

La estructura del solucionador o *solver* de MATLAB “ga” implementado, se presenta en el fragmento de Código 3.

Código 3. Estructura del solver o solucionador

%-----

```
[x,fval,exitflag,output] = ga(fun,35,[],[],[],[],lb,ub,[],options);
```

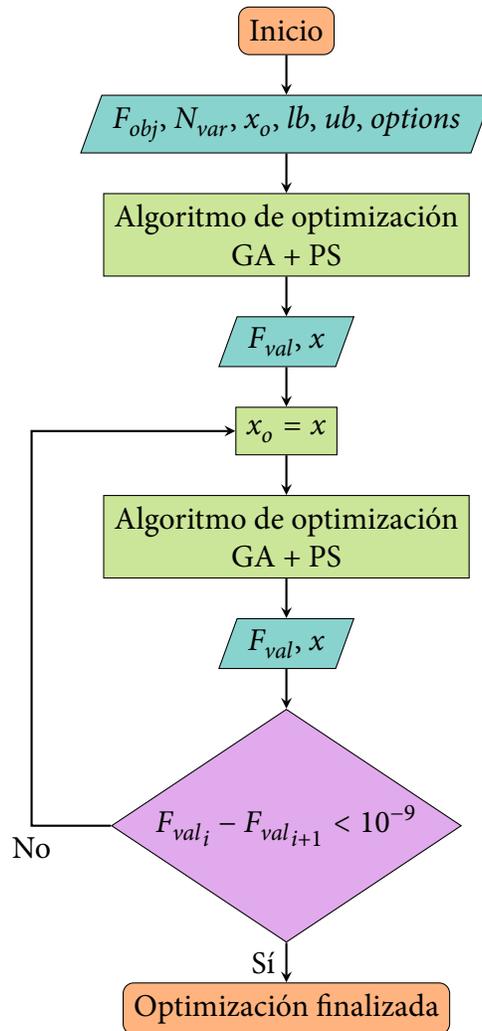
%-----

“x” son las variables resultantes del proceso de optimización o ajuste. “fval” es la función objetivo evaluada, “exitflag” es un valor numérico de salida que especifica la razón de finalización del algoritmo, “output” es una estructura de información sobre el proceso de optimización, “fun” es la función objetivo, “lb” son los límites inferiores de las variables de optimización, “ub” son los límites superiores de las variables de optimización y “options” son las opciones de configuración del algoritmo definidas en el segmento de Código 1.

**6.4.8 Proceso iterativo de optimización.** Con el propósito de potenciar la capacidad de optimización del algoritmo híbrido, se realiza una ejecución iterativa del algoritmo implementado. En cada iteración, se

actualizan los puntos iniciales  $x_0$  (valores iniciales de las variables) y se comparan los resultados de la función objetivo evaluada  $F_{val}$  entre iteraciones sucesivas. Este proceso se repite hasta que se alcance la condición de finalización predefinida. La variable  $N_{var}$  hace referencia al número de variables de optimización. El diagrama de flujo que detalla el proceso implementado para la optimización y ajuste del modelo numérico del rotor se presenta en la Figura 31.

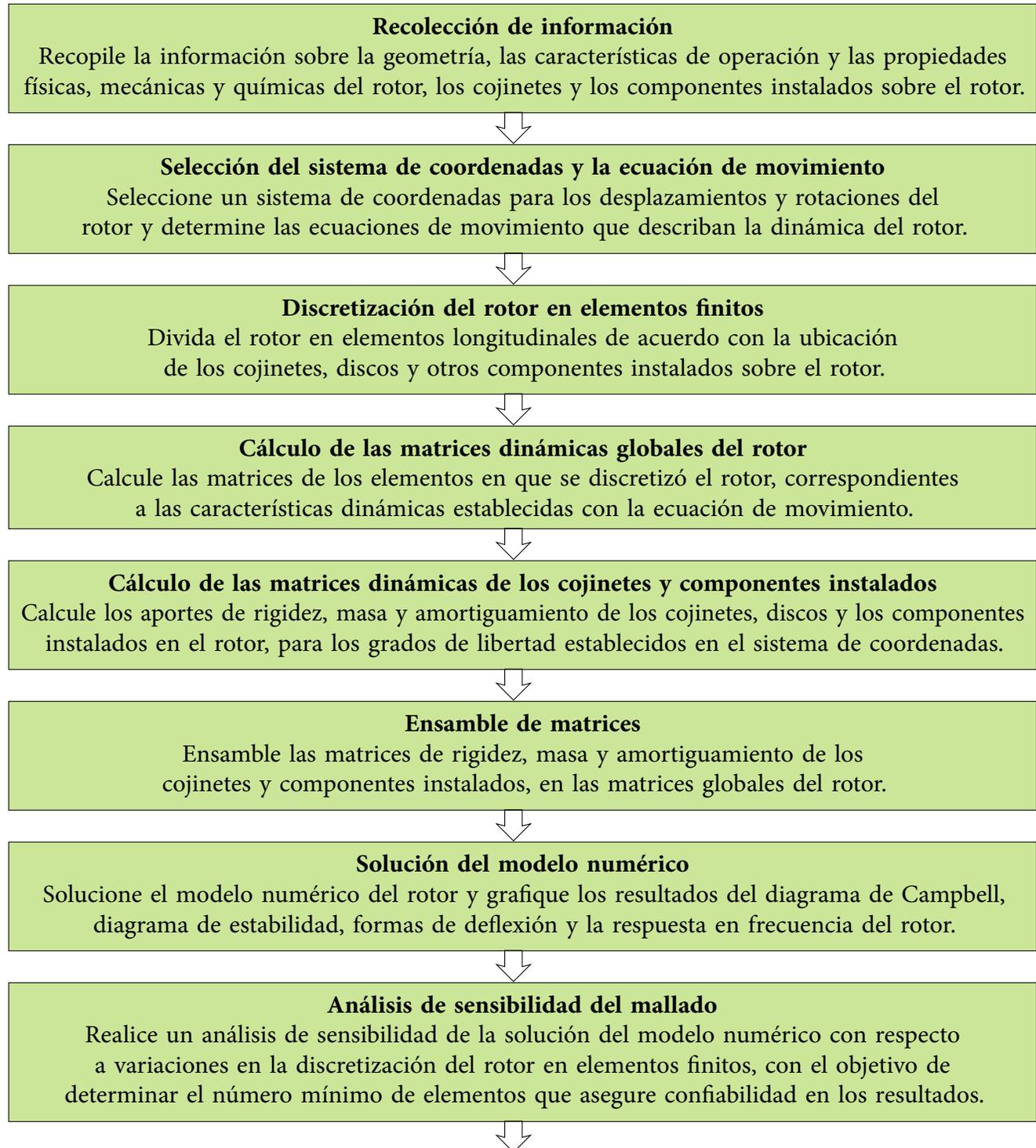
Figura 31. Diagrama de flujo del proceso de optimización y ajuste del modelo numérico



Fuente: Elaboración propia.

## 6.5 METODOLOGÍA DE AJUSTE Y VALIDACIÓN

Figura 32. Metodología de ajuste y validación a partir de la respuesta en frecuencia del rotor



### **Selección e implementación del método de validación**

Seleccione e implemente un método o técnica para establecer la correlación y correspondencia entre las funciones de respuesta en frecuencia (*FRF*) del rotor numéricas y experimentales.



### **Selección del algoritmo de optimización para el proceso de ajuste**

Seleccione uno o varios algoritmos iterativos de optimización de funciones discontinuas, con múltiples variables, que garanticen un bajo costo computacional y una solución óptima global.



### **Definición de la función objetivo y las variables de ajuste**

Defina la función objetivo a partir del método de correlación y correspondencia, y determine cuidadosamente las variables de ajuste de mayor incidencia en la respuesta del rotor, junto a los límites superiores e inferiores relacionados.



### **Implementación del algoritmo de optimización**

Configure los parámetros del algoritmo de optimización y ejecútelo hasta obtener la mejor solución.



### **Validación del modelo numérico ajustado**

A partir del método de correlación y correspondencia, valide el modelo numérico ajustado con los resultados experimentales.

Fuente: Elaboración propia.

## 7. ANÁLISIS DE RESULTADOS

### 7.1 MODELO AJUSTADO

Los resultados obtenidos mediante la aplicación del algoritmo híbrido de optimización para el ajuste del modelo numérico del rotor se presentan en la Tabla 11.

Tabla 11. Resultados de la ejecución del algoritmo híbrido de optimización

Iteración	Función objetivo evaluada GA	Función objetivo evaluada PS	Tiempo de ejecución [s]
1	0.04760	0.04729	63067
2	0.04727	0.04726	979
3	0.04724	0.04720	2982
4	0.04719	0.04718	1714
5	0.04718	0.04718	569
6	0.04717	0.04717	1768
7	0.04717	0.04717	343
<b>Tiempo total</b>			71422 (19 h 50 min 22 s)

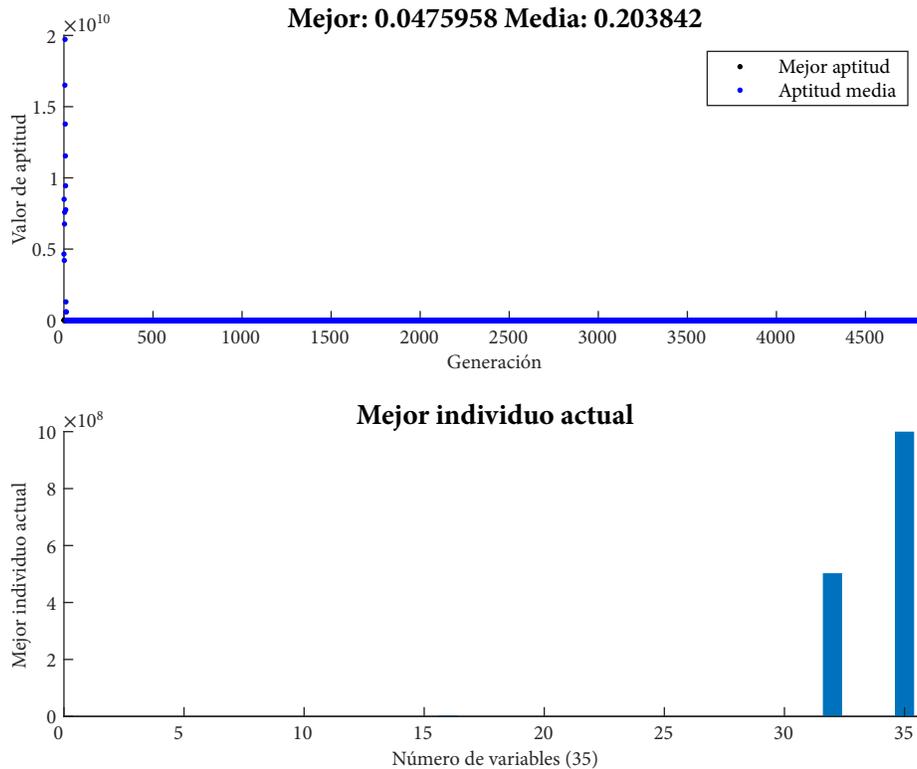
Fuente: Elaboración propia.

Se llevaron a cabo un total de 7 iteraciones del algoritmo híbrido (*GA* + *PS*), con una duración acumulada de 19 horas, 50 minutos y 22 segundos. La primera iteración del algoritmo contribuyó con el mayor tiempo de ejecución, alcanzando un total de 17 horas, 31 minutos y 7 segundos. La convergencia tanto del algoritmo genético (*GA*) como del algoritmo de búsqueda de patrones (*PS*) en esta primera iteración del proceso de optimización híbrido se ilustra en la Figura 33 y la Figura 34, respectivamente.

Como se puede observar en la Figura 33, el algoritmo genético (*GA*) converge de manera rápida hacia una solución óptima local (el mejor valor de aptitud), mostrando mínimas pero significativas variaciones a lo largo de su ejecución. Inicialmente, los valores de la aptitud media, que representan el promedio de la función objetivo evaluada en todos los individuos de la población, comienzan con valores elevados para luego converger rápidamente hacia valores relativamente cercanos a la mejor solución en cada iteración.

El algoritmo de búsqueda de patrones (*PS*) inicia su ejecución a partir de la solución óptima resultante del algoritmo genético (*GA*), por lo que se facilita visualizar la convergencia hacia una solución óptima, que se alcanza relativamente rápido, como se observa en la Figura 34. Las iteraciones posteriores del algoritmo tienen como objetivo mejorar la solución óptima y reducir la posibilidad de converger hacia óptimos

Figura 33. Valor de aptitud y mejor individuo actual de la ejecución del algoritmo genético



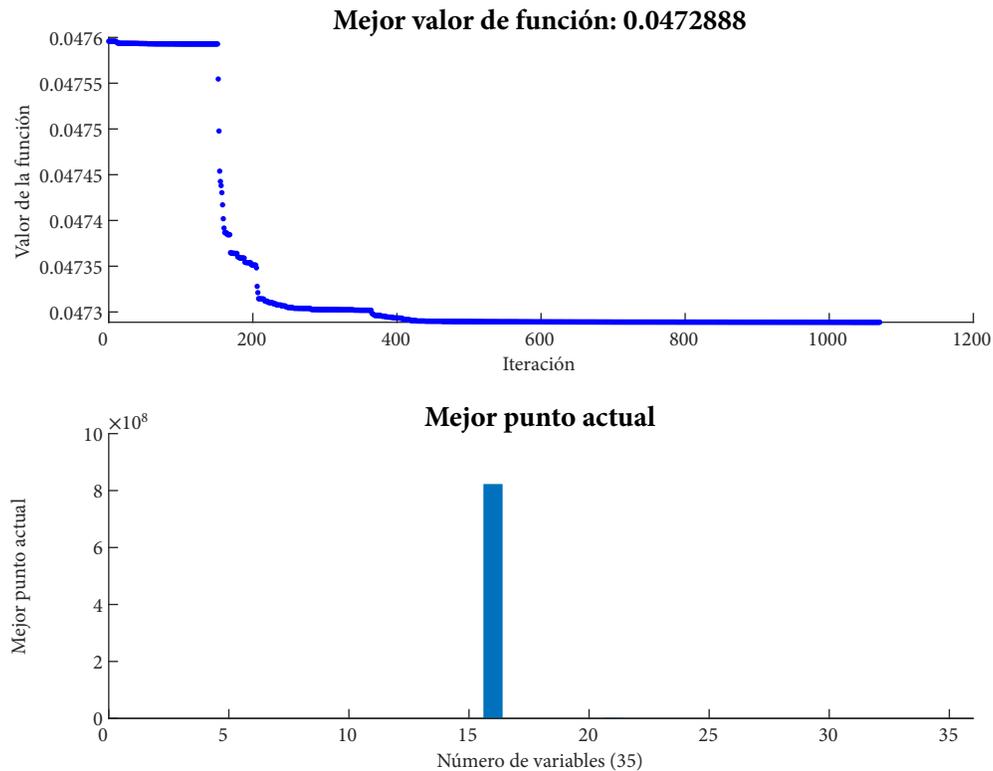
Fuente: Elaboración propia.

locales.

Los resultados de la iteración final del algoritmo de optimización híbrido, presentados en la Tabla 11, reflejan la evaluación de la función objetivo en la mejor solución encontrada por el algoritmo, obteniendo un valor de 0.04717. Al analizar el valor promedio del criterio de confianza de respuesta en frecuencia (*FRAC*) extraído de la función objetivo evaluada, se evidencia una sólida correlación y concordancia entre el modelo numérico del rotor ajustado y los resultados experimentales, con un valor de 0.99417, por lo tanto, el modelo numérico ajustado del rotor se considera válido. Los valores de *FRAC* para cada velocidad de rotación del rotor medida se representan en la Figura 35.

El criterio de confianza de respuesta en frecuencia (*FRAC*) exhibe una sólida correlación y correspondencia en prácticamente todo el rango de velocidades analizado. Alrededor de los 34 [Hz], se observa una ligera disminución en el valor del *FRAC*, que, no obstante, sigue siendo aceptable. A medida que se superan los 50 [Hz], se evidencia una segunda disminución más significativa en el *FRAC*, aunque sigue manteniéndose en un nivel aceptable. Es relevante destacar que, dado que solo se consideran cuatro grados de libertad, el

Figura 34. Mejor valor y punto actual de la ejecución de la búsqueda de patrones



Fuente: Elaboración propia.

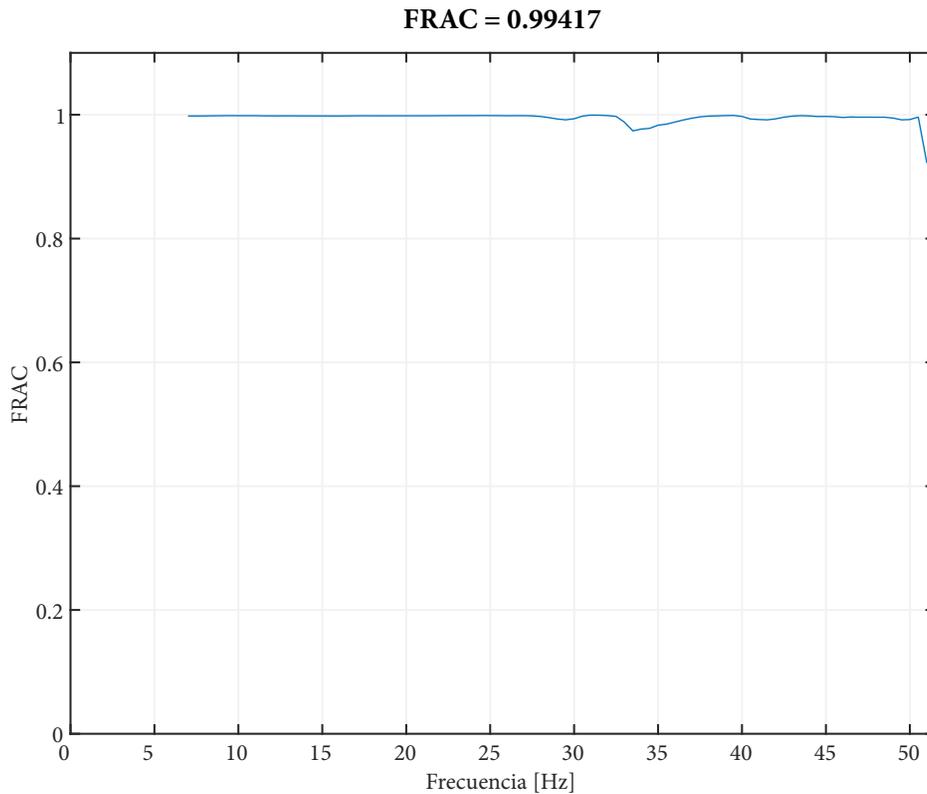
valor del criterio de confianza de respuesta en frecuencia debe acercarse lo máximo posible a 1.

Los resultados de las variables de ajuste correspondientes a la solución óptima obtenida a partir del algoritmo de optimización híbrido se presentan en la Tabla 12.

Las variables  $a$  y  $b$ , asociadas al módulo elástico longitudinal  $E$  y la densidad del material del rotor  $\rho$  respectivamente, no presentan cambios significativos. Esto sugiere una elección adecuada de las propiedades físicas y mecánicas del material del rotor. Por otro lado, la constante de amortiguamiento proporcional a la rigidez  $\beta$ , relacionada con el amortiguamiento proporcional y el amortiguamiento interno del sistema, aumenta hasta alcanzar el límite superior predefinido para esta constante.

En cuanto a las variables de ajuste  $d_i$ , relacionadas con la densidad de los discos instalados en el rotor  $\rho_{di}$ , muestran cambios sustanciales. Para el disco principal  $d_{10}$ , la densidad se mantiene constante. Sin embargo, tanto el acople como el piñón de la cadena  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  y  $d_4$  exhiben un incremento considerable en la densidad y/o la geometría. De manera similar, los muñones de los cojinetes  $d_5$ ,  $d_6$ ,  $d_7$ ,  $d_{11}$ ,  $d_{12}$  y

Figura 35. FRAC entre la respuesta del modelo numérico ajustado y la respuesta experimental



Fuente: Elaboración propia.

$d_{13}$  muestran un aumento significativo en la densidad y/o la geometría, además de una distribución de masa distinta a la planteada en el modelo numérico. Destaca que el valor de la variable de ajuste  $d_7$  para el muñón del cojinete 1 o cojinete del extremo de accionamiento es excesivamente alto, lo que podría estar relacionado con las cargas que afectan al cojinete y no se reflejan en la variable de ajuste asociada a la fuerza sobre el cojinete  $b_{f1}$ .

Las variables de ajuste  $b_{f1}$  y  $b_{f2}$ , vinculadas a las fuerzas que el rotor ejerce sobre el aceite en los cojinetes hidrodinámicos, muestran una disminución en la fuerza que actúa sobre el cojinete 2 o cojinete del extremo opuesto al accionamiento. Además, se observa una ligera variación en la fuerza que actúa sobre el cojinete 1 o cojinete del extremo de accionamiento (la carga relacionada con este cojinete se manifestó en la variable de ajuste asociada a la densidad del muñón  $d_7$ ). Las variables de ajuste  $b_{h1}$  y  $b_{h2}$ , referentes a la holgura radial de los cojinetes, también presentan incrementos considerables, que podrían parecer incoherentes, pero que muestran la tendencia de la holgura en los cojinetes reales.

Las variables de ajuste  $a_{ax}$  y  $a_{ay}$  asociadas al aporte de rigidez del acople, muestran un aumento significativo en la dirección horizontal. Este comportamiento atípico puede estar originado por fuerzas de desalineación horizontales entre el motor y el rotor. Las variables de ajuste  $a_{cx}$  y  $a_{cy}$  asociadas al aporte de rigidez de la cadena, muestran un aumento significativo de la rigidez en dirección vertical, sin cambios significativos en la dirección horizontal.

Las variables de ajuste  $b_{ax}$  y  $b_{ay}$  asociadas al aporte de amortiguamiento del acople, muestran una ligera disminución del amortiguamiento en dirección horizontal y un aumento considerable en la dirección vertical. Esto contrasta con el comportamiento de la rigidez y podría ser consecuencia de las fuerzas de desalineación. De manera similar, las variables de ajuste  $b_{cx}$  y  $b_{cy}$ , asociadas al aporte de amortiguamiento de la cadena, presentan una disminución del amortiguamiento en la dirección horizontal y un incremento bastante notable en la dirección vertical. Este patrón, coherente con el sistema real, se mantiene en consonancia con los cambios en la rigidez.

De acuerdo con la variable de ajuste de la fuerza de desbalanceo  $a_d$ , existe un desbalanceo adicional al del disco, que es tres veces mayor. Las variables de ajuste asociadas a las fuerzas de desalineación paralela  $af_x$  y  $af_y$  muestran una fuerte desalineación en dirección horizontal, mientras que la desalineación en dirección vertical resulta insignificante. Por último, las variables de ajuste para las fuerzas de desalineación angular  $af_t$  y  $af_p$  son tan pequeñas que pueden ser desestimadas. Del mismo modo, las variables de ajuste para las fuerzas proporcionadas por la cadena que conecta el rotor con la bomba de suministro de aceite  $cf_x$  y  $cf_y$  son nulas o muy reducidas, por lo que pueden ser desestimadas.

Algunas de las variables de ajuste muestran resultados incoherentes, que, aunque dificultan la interpretación de las propiedades físicas y mecánicas del sistema, no repercuten en la interpretación de la respuesta dinámica del rotor.

A pesar de que algunas variables de ajuste muestran resultados incoherentes, dificultando la interpretación de las propiedades físicas y mecánicas del sistema, estas no afectan la comprensión de la respuesta dinámica del rotor.

Tabla 12. Variables de ajuste del modelo numérico del rotor optimizadas

Variable de ajuste	Valor inicial	Valor ajustado	Característica dinámica involucrada
$a$	1	1.0016	$K, C$
$b$	1	0.9987	$M, C$
$\beta$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$K, C$
$d_1$	1	5.1361	$M, C$
$d_2$	1	1.6917	$M, C$
$d_3$	1	2.8093	$M, C$
$d_4$	1	17.825	$M, C$
$d_5$	1	0.0100	$M, C$
$d_6$	1	0.0100	$M, C$
$d_7$	1	177.73	$M, C$
$d_8$	1	1.8304	$M, C$
$d_9$	1	0.1333	$M, C$
$d_{10}$	1	1.0000	$M, C$
$d_{11}$	1	0.1438	$M, C$
$d_{12}$	1	2.3025	$M, C$
$d_{13}$	1	0.0100	$M, C$
$b_{f1}$	1	1.0500	$K, C$
$b_{h1}$	1	1.5468	$K, C$
$b_{f2}$	1	0.0306	$K, C$
$b_{h2}$	1	6.3887	$K, C$
$a_{ax}$	1	$6.2770 \times 10^8$	$K$
$a_{ay}$	1	2.3398	$K$
$a_{cx}$	1	0.9936	$K$
$a_{cy}$	1	8200.9	$K$
$b_{ax}$	0	0.6899	$C$
$b_{ay}$	0	30.453	$C$
$b_{cx}$	0	0.0041	$C$
$b_{cy}$	0	43523	$C$
$a_d$	1	3.2467	$F$
$af_x$	0	$2.0972 \times 10^6$	$F$
$af_y$	0	0.1390	$F$
$af_t$	0	$4.9591 \times 10^{-5}$	$F$
$af_p$	0	$3.8892 \times 10^{-6}$	$F$
$cf_x$	0	0	$F$
$cf_y$	0	$6.1035 \times 10^{-5}$	$F$

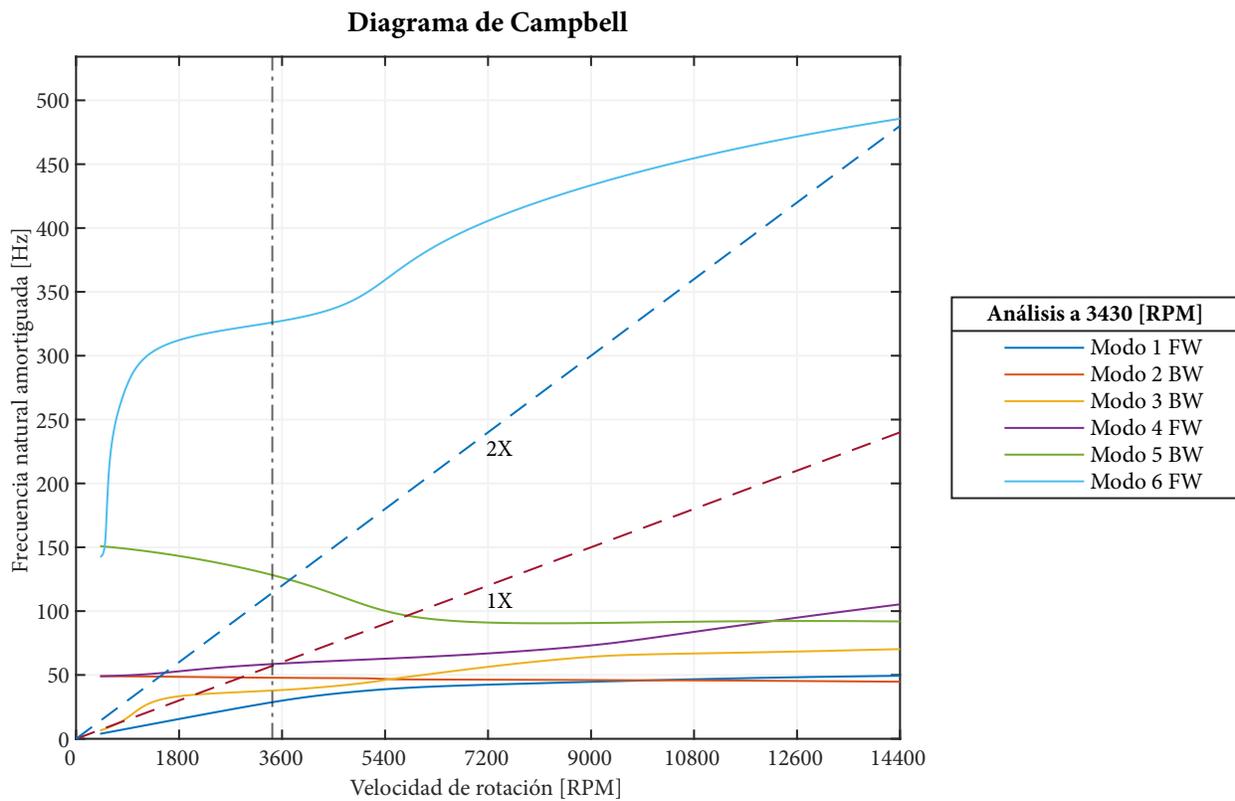
$K$  = Rigidez,  $C$  = Amortiguamiento,  $M$  = Masa y  $F$  = Fuerza.

Fuente: Elaboración propia.

## 7.2 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD Y COMPORTAMIENTO VIBRATORIO DEL ROTOR

Los resultados de la simulación del modelo numérico del rotor ajustado se presentan para un rango de velocidades de rotación que va desde 420 hasta 14400 [RPM]. Se excluyen del análisis las velocidades inferiores a 420 [RPM], considerando que el comportamiento de los cojinetes hidrodinámicos en este rango de velocidades es difícil de modelar y bajo el modelo implementado produce resultados erráticos. Es importante destacar, además, que los resultados del modelo numérico ajustado están respaldados únicamente por los datos experimentales hasta aproximadamente 3090 [RPM]. Los resultados por encima de esta velocidad solo tienen validez como una proyección o guía del comportamiento probable del rotor en ese rango de velocidades de rotación.

Figura 36. Diagrama de Campbell del modelo numérico del rotor ajustado

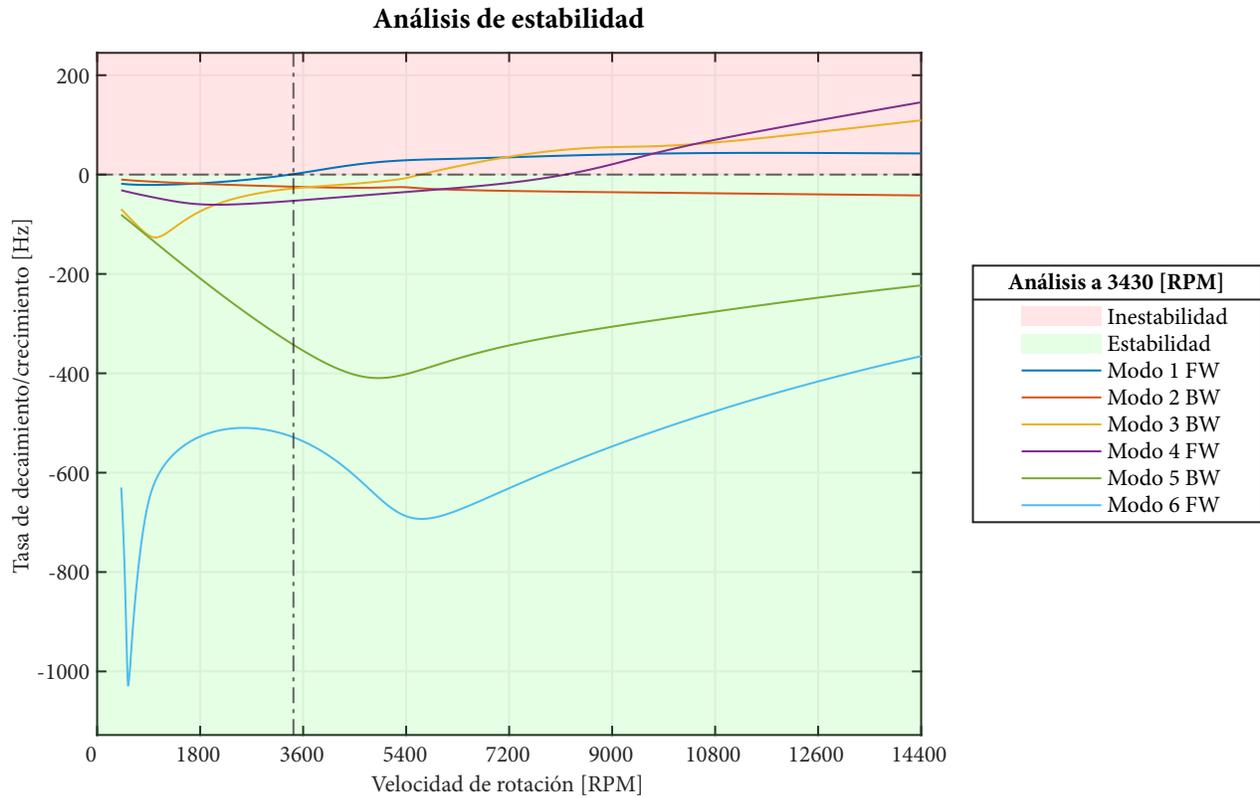


Fuente: Elaboración propia.

La identificación de los modos se realiza con referencia al ciento setenta y siete por ciento de dos veces la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$  del primer modo lateral ( $1.07 \cdot 2\omega_d$ ). Los resultados obtenidos a partir de la implementación del modelo numérico del rotor ajustado se presentan en el diagrama de Campbell en la

Figura 36, en el diagrama de estabilidad en la Figura 37 y en las formas modales en las Figuras 38 y 39.

Figura 37. Diagrama de estabilidad del modelo numérico del rotor ajustado

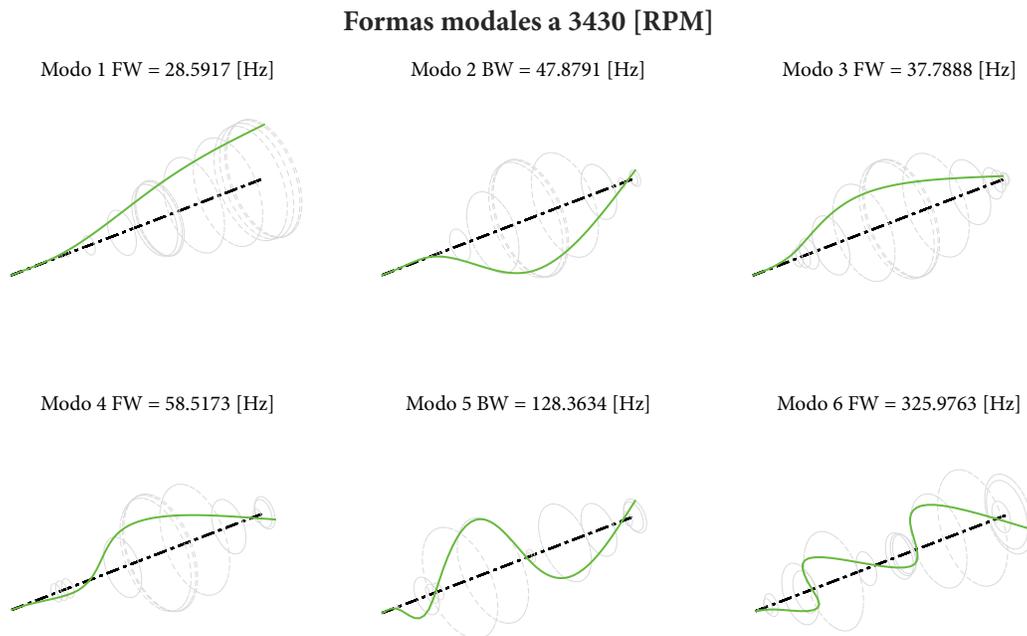


Fuente: Elaboración propia.

En el diagrama de Campbell se puede observar la presencia de un modo subarmónico (modo 1) con cabeceo en el sentido de giro del rotor (*FW*) asociado a un modo de torbellino de aceite (*whirl mode*). Este modo induce inestabilidad prematura en el rotor a velocidades superiores a 3430 [RPM] aproximadamente, como se observa en el diagrama de estabilidad. La forma de deflexión a 3430 [RPM] muestra un modo cónico de sólido rígido, que se bloquea con el primer modo de flexión (modo 2) alrededor de los 5660 [RPM] y se convierte en un modo de latigazo de aceite (*whip mode*). La nueva forma de deflexión del modo 1 se asemeja ahora al modo 2, considerando que es una combinación de los movimientos de sólido rígido y flexión.<sup>20</sup>

El modo 3 corresponde a un modo subsincrónico irregular, que inicialmente se manifiesta como un modo armónico, que causa resonancia en aproximadamente 2072 [RPM] (34.5 [Hz]). Este modo está asociado a un modo de torbellino de aceite, con cabeceo en el sentido de rotación del rotor (*FW*) que prevalece

Figura 38. Formas modales del modelo numérico del rotor ajustado a 3430 [RPM]



Fuente: Elaboración propia.

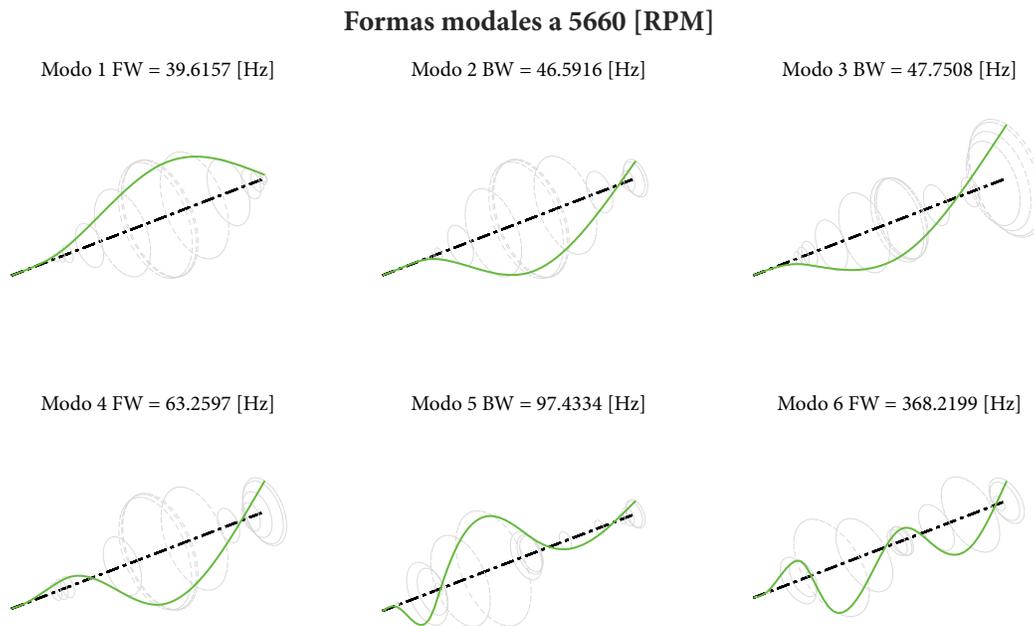
en casi todo el rango de velocidades, excepto en el intervalo entre 5160 y 6930 [RPM]. En este rango, se produce una inversión del sentido de giro del cabeceo del disco, debido a una nueva inestabilidad del rotor provocada por este modo, manifestándose cerca de 5653 [RPM].

Las formas de deflexión propias de este modo tienden a presentar un patrón de movimiento cónico de sólido rígido, que es bloqueado en el extremo izquierdo por la restricción impuesta por el acople y la cadena, como se muestra en la Figura 38. Posterior a su entrada en la zona de inestabilidad, el extremo derecho del rotor tiende a adoptar un movimiento de sólido rígido en combinación con movimiento de flexión, como se muestra en la Figura 39.

Dentro del rango de velocidades de operación del motor entre 0 y 3430 [RPM], el rotor entra en resonancia cerca de los 2885 [RPM] (48.1 [Hz]) al cruzar por la velocidad crítica correspondiente al primer modo de flexión del rotor (modo 2). Este modo, con deflexión predominante en dirección vertical, tiene un cabeceo del disco en sentido opuesto a la rotación del rotor (*BW*) y no induce inestabilidades en el sistema en todo el rango de velocidades analizado.

A 3430 [RPM], el rotor se acerca nuevamente al fenómeno de resonancia al salir del rango de seguridad de

Figura 39. Formas modales del modelo numérico ajustado a 5660 [RPM]



Fuente: Elaboración propia.

operación del rotor a más del 10 % por encima o por debajo de la velocidad crítica, en este caso del segundo modo de flexión del rotor (modo 4) a 3527 [RPM] (58.8 [Hz]). Este modo tiene un cabeceo en el sentido de rotación del rotor (*FW*) y es estable hasta aproximadamente 8180 [RPM] (estimación proyectada).

A partir de la proyección del modelo numérico, se identifica una nueva velocidad crítica a 5787 [RPM] (96.45 [Hz]). Este modo tiene un cabeceo en sentido contrario a la rotación del rotor (*BW*) y es estable en todo el rango de velocidades analizado. La forma del modo está asociada a un modo de flexión con 3 antinodos.

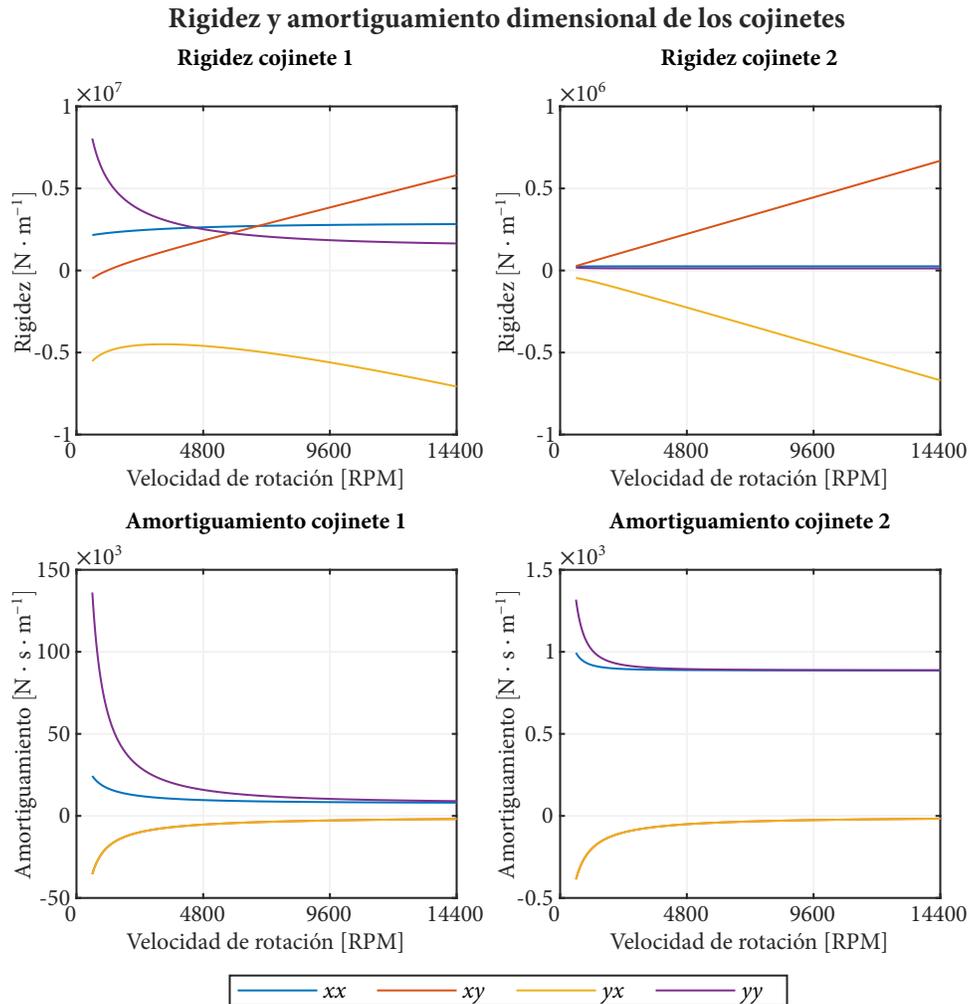
En síntesis, se recomienda operar el rotor únicamente a velocidades inferiores a 3087 [RPM]. Esto asegura mantenerse por debajo del 10 % de la primera velocidad crítica del rotor y evitar así la zona de inestabilidad que se encuentra por encima de los 3430 [RPM]. Dada la presencia de desalineación y la generación de armónicos a dos veces (2X) la velocidad de rotación del rotor, se recomienda evitar la operación del rotor en el rango de velocidades entre 661 y 702 [RPM], como se puede inferir a partir de la Figura 36.

La desalineación y otras cargas que inciden sobre los cojinetes hidrodinámicos pueden potencialmente disminuir la región de inestabilidad (aumentar el umbral) del rotor originada por el acoplamiento cruzado en la matriz de rigidez de los cojinetes. En consecuencia, la presencia de estas cargas podría resultar

provechosa, bajo la premisa de que sean aplicadas de manera controlada.<sup>67</sup>

### 7.3 COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE LOS COJINETES

Figura 40. Dinámica de los cojinetes hidrodinámicos del modelo numérico del rotor ajustado



Fuente: Elaboración propia.

Las características dinámicas de los cojinetes hidrodinámicos obtenidas a partir del modelo numérico ajustado se muestran en la Figura 40.

En comparación con los resultados obtenidos con el modelo numérico sin ajustar, el cojinete 1 o cojinete en el extremo de accionamiento muestra cambios significativos en la rigidez y amortiguamiento, en particular en la ya no tan marcada asimetría de la rigidez en las direcciones transversales (acoplamientos cruzados en

la matriz de rigidez). De forma global, los valores de amortiguamiento y rigidez disminuyen, y presentan un comportamiento con marcada no linealidad. Estas características generan la irregularidad del modo 3, como se evidencia en el diagrama de Campbell en la Figura 36.

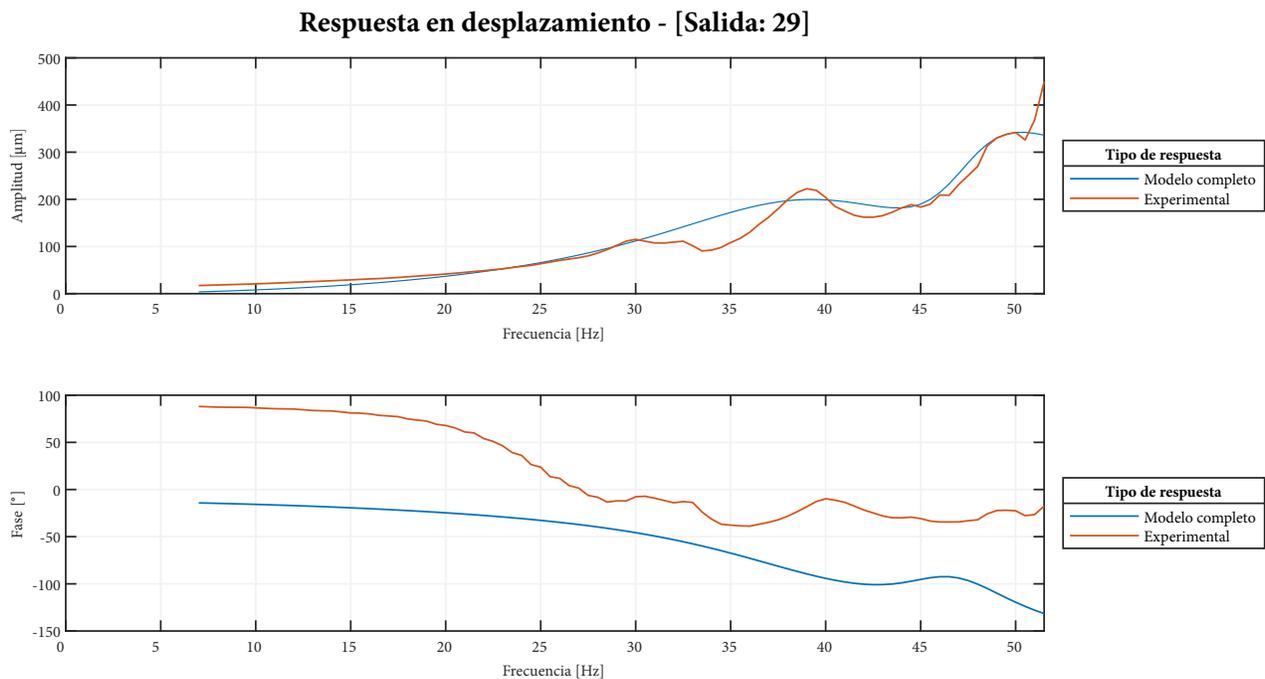
El cojinete 2 o cojinete en el extremo opuesto al accionamiento, muestra un comportamiento similar al del modelo numérico sin ajustar. Los valores de amortiguamiento y rigidez aumentan levemente por lo que su incidencia en los cambios de los modos subarmónicos no es influyente.

### 7.4 RESPUESTA DEL ROTOR

La respuesta del rotor obtenida a partir del modelo numérico ajustado se compara con la respuesta experimental en los grados de libertad 29, 30, 53 y 54 correspondientes a las posiciones de ubicación de los sensores de proximidad. Los resultados se muestran en las Figuras 41, 42, 43 y 44.

La respuesta del modelo numérico ajustado muestra una mayor correspondencia con los datos experimentales en comparación con la respuesta del modelo numérico sin ajustar (Figuras 26, 27, 28 y 29).

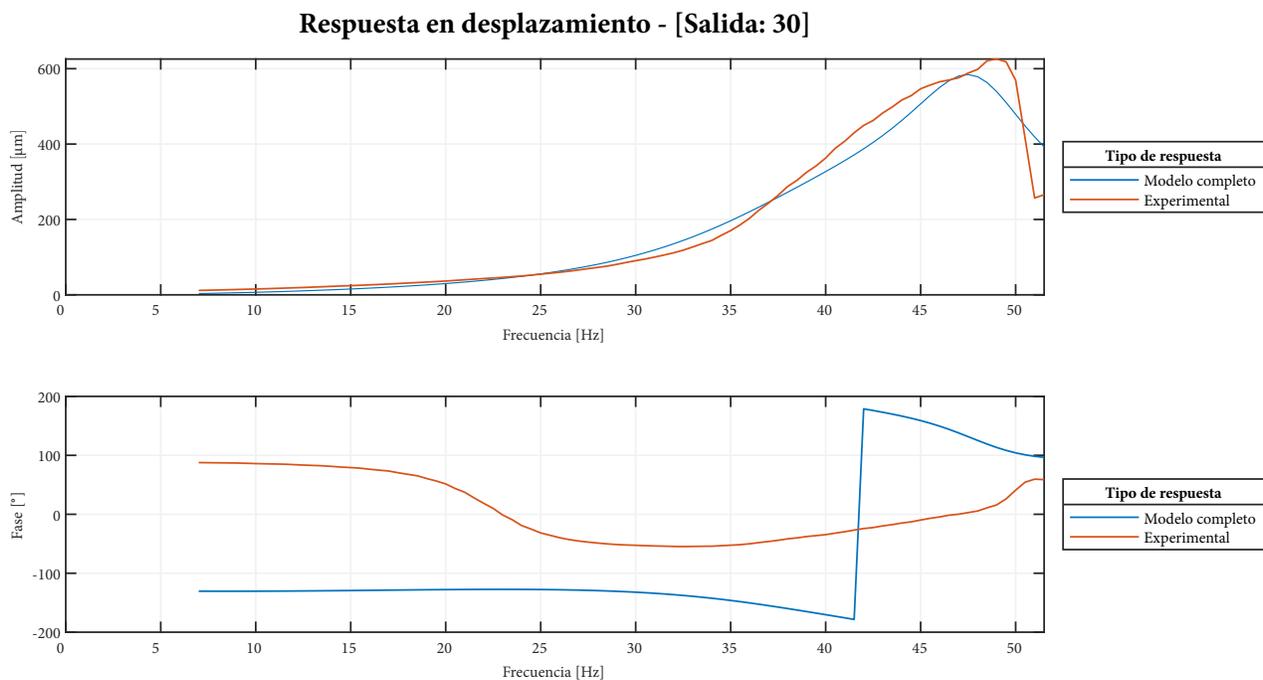
Figura 41. Respuesta del rotor (modelo ajustado) en el grado de libertad 29 (dirección x)



Fuente: Elaboración propia.

La amplitud de la respuesta del rotor en el grado de libertad horizontal adyacente al cojinete del extremo de accionamiento (GDL 29), es notablemente menor en comparación con la amplitud en el grado de libertad horizontal adyacente al cojinete opuesto al extremo de accionamiento (GDL 53). Este comportamiento se atribuye al aporte de rigidez proporcionado por la cadena y, en mayor medida, por la rigidez del acople. Aunque la respuesta en dirección horizontal guarda similitud con la respuesta experimental, no logra reproducir de manera precisa el comportamiento del rotor en el intervalo de 30 a 45 [Hz]. En este rango de frecuencias, surge un pico a 39 [Hz] que el proceso de ajuste vincula a los cojinetes hidrodinámicos, como se puede inferir a partir del diagrama de Campbell en la Figura 36, pero que podría estar relacionado con la resonancia del bastidor o la estructura de soporte del rotor en dirección horizontal.

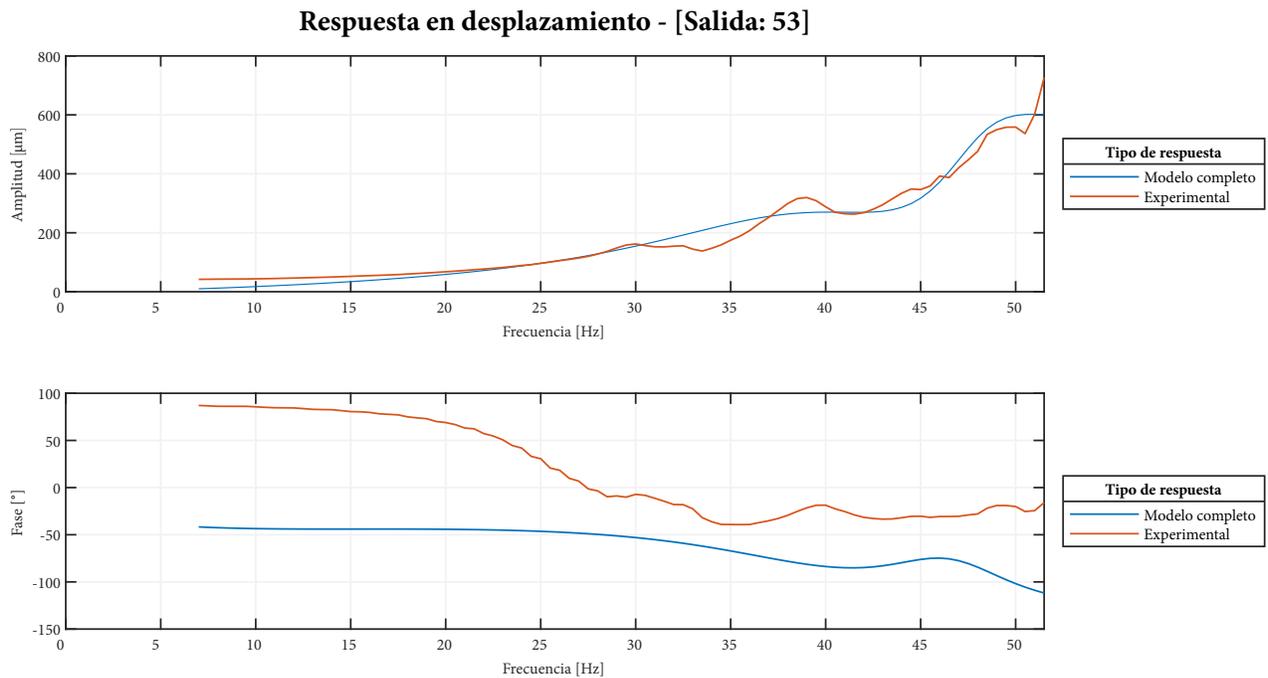
Figura 42. Respuesta del rotor (modelo ajustado) en el grado de libertad 30 (dirección y)



Fuente: Elaboración propia.

La respuesta numérica del rotor en dirección vertical muestra similitud con la respuesta experimental, aunque se observa una mayor discrepancia en el rango entre 49 y 51.5 [Hz]. En este intervalo, de acuerdo con el análisis de estabilidad, el modo 1 o modo de torbellino de aceite evoluciona hacia un modo de latigazo de aceite, lo que resulta en una disminución del coeficiente de amortiguamiento y su transición hacia la inestabilidad del modo, y, por ende, hacia la inestabilidad del rotor. Esto se refleja en la abrupta disminución en la amplitud alrededor de los 50 [Hz] en dirección horizontal (posterior a la velocidad crítica a 48 [Hz]), así como en el aumento de la amplitud en dirección horizontal.

Figura 43. Respuesta del rotor (modelo ajustado) en el grado de libertad 53 (dirección  $x$ )

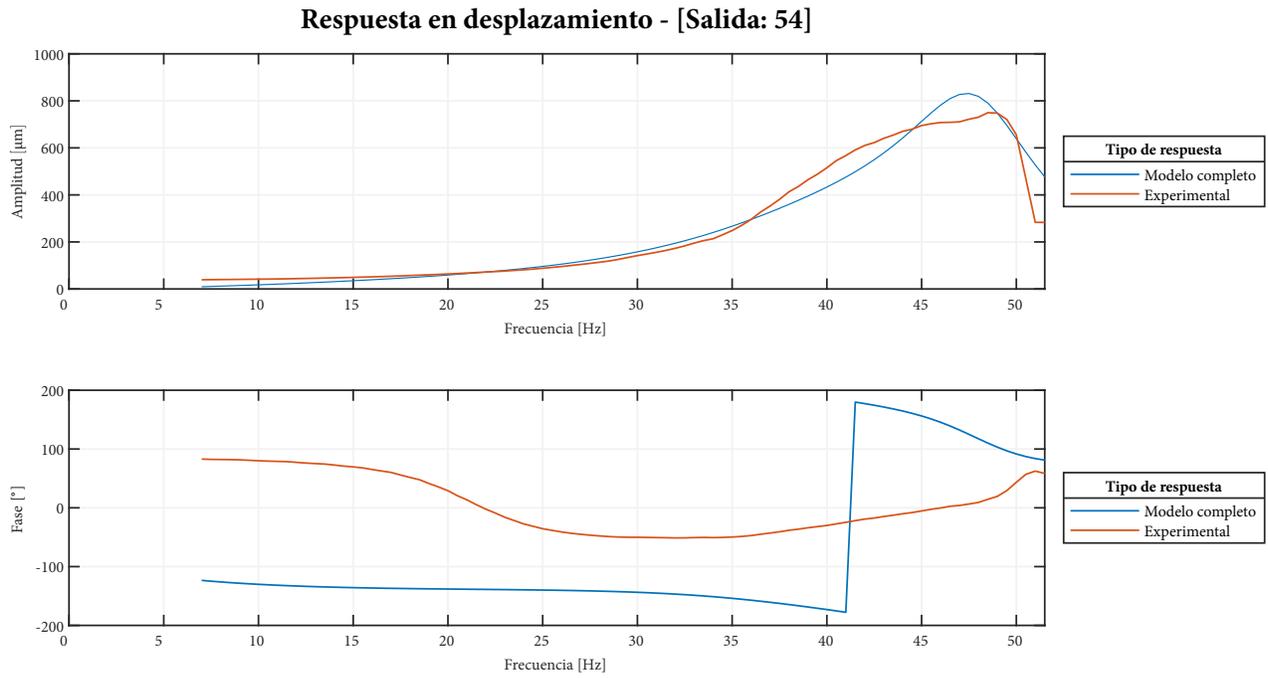


Fuente: Elaboración propia.

Los picos en la respuesta del rotor no coinciden totalmente con las velocidades críticas identificadas a partir del diagrama de Campbell en la Figura 36. Esta discrepancia se origina por la interacción entre los modos cercanos y la influencia de las fuerzas aplicadas al rotor (determinadas mediante el proceso de ajuste).

De acuerdo con el análisis de estabilidad y la respuesta del rotor, es recomendable considerar velocidades de operación de hasta 2100 [RPM] (35 [Hz]) para prevenir daños prematuros en el rotor debido a los niveles incrementales de vibración que se presentan después de ese rango de velocidades.

Figura 44. Respuesta del rotor (modelo ajustado) en el grado de libertad 54 (dirección y)



Fuente: Elaboración propia.

## 8. CONCLUSIONES

1. La implementación de un modelo numérico robusto que integre las características dinámicas involucradas en el movimiento del rotor, como los aportes de rigidez, amortiguamiento y masa de los cojinetes hidrodinámicos, discos, componentes instalados y fuerzas que actúan sobre el rotor, como el desbalanceo, permiten consolidar una representación de la dinámica del rotor cercana a la realidad del sistema, que es de gran utilidad para facilitar el proceso de ajuste del modelo numérico.

A partir de los resultados obtenidos mediante el modelo numérico propuesto y los datos experimentales recolectados con los sensores de proximidad en la prueba de arranque del rotor, se evidencia un alto grado de correlación y correspondencia, de acuerdo con el valor obtenido mediante el cálculo del criterio de confianza de respuesta en frecuencia (*FRAC*), con un porcentaje del 95.3 %. Por lo tanto, se puede considerar que el modelo numérico planteado fue exitoso.

2. Las características dinámicas de rigidez y amortiguamiento de los cojinetes, que inciden en la dinámica del rotor, representaron el mayor costo computacional del modelo numérico implementado. Esta dificultad se presenta por la necesidad de estimar la relación de excentricidad del cojinete a partir de la solución de una ecuación de octavo grado para cada una de las velocidades de rotación analizada.

Con los resultados obtenidos en el diagrama de Campbell y el análisis de estabilidad, se puede evidenciar la influencia de los cojinetes hidrodinámicos en la inestabilidad del rotor, con la aparición de los fenómenos de torbellino y latigazo de aceite. Esta condición induce la falta de amortiguamiento en el sistema en intervalos específicos de la velocidad de rotación, causando un aumento creciente en el tiempo, de la amplitud vibratoria del rotor.

Para la obtención de los aportes de rigidez y amortiguamiento de los cojinetes, se realizaron algunas idealizaciones y asunciones como el régimen laminar del aceite y una carga estática debida al peso del rotor. Estas consideraciones aunque predicen de forma cercana el comportamiento de la interacción entre el aceite y el rotor, pueden ser complementadas en futuros trabajos con la inclusión de cargas dinámicas y cambios en la trayectoria del fluido de la película de aceite como el flujo turbulento, para obtener una representación más exacta de los fenómenos asociados a la película de aceite y su efecto en la estabilidad del sistema, permitiendo hacer una mejor proyección de la respuesta del sistema en velocidades de rotación por fuera del intervalo de ajuste.

3. La solución del modelo numérico ajustado permitió la identificación de 2 velocidades críticas a 2072

y 2885 [RPM] y la entrada en zona de inestabilidad a 3430 [RPM], en el intervalo de velocidades de ajuste. El paso por la primera velocidad crítica no presenta una amplitud considerable, por lo que el paso por esta velocidad no se considera riesgoso. En conclusión, el rotor debería ser operado por debajo de los 2100 [RPM] para evitar daños considerables por la excesiva vibración. El paso por la primera velocidad crítica del rotor está asociada a los cojinetes hidrodinámicos, sin embargo, la aparición de estas frecuencias exclusivamente en la dirección horizontal de la respuesta en frecuencia del rotor, orientan la verdadera causa hacia una posible resonancia del bastidor o base, transmitida por los cojinetes hacia el rotor.

4. El proceso de ajuste iterativo implementado con la ejecución del algoritmo de optimización híbrido, que combina las capacidades de dos algoritmos de optimización robustos como los algoritmos genéticos (GA) y los algoritmos de búsqueda de patrones, proporcionan al proceso de optimización y ajuste de un mayor espacio de búsqueda y reducen la posibilidad de una convergencia prematura en soluciones óptimas locales. La selección adecuada de las variables de ajuste facilita el proceso de optimización y la interpretación física de los cambios en las características dinámicas del sistema.

A partir de los resultados obtenidos del proceso de optimización, se evidencia que, aunque algunas variables de ajuste no contribuyen directamente a una comprensión clara de las propiedades físicas, mecánicas y químicas del rotor y sus componentes, sí tienen un impacto válido en la respuesta simulada del comportamiento dinámico del rotor, dentro del intervalo de velocidades utilizado para el ajuste. En otras palabras, la solución del modelo numérico del rotor ajustado logra describir el comportamiento real del rotor desde 420 hasta 3000 [RPM].

La respuesta obtenida a partir del modelo numérico ajustado del rotor y la respuesta experimental adquirida mediante los sensores de proximidad, muestran una correlación y correspondencia del 99.4 %, que permiten validar el modelo numérico en el rango de velocidades entre 420 y 3000 [RPM]. Valores inferiores o superiores a este intervalo, no son totalmente confiables, pero permiten proyectar el comportamiento dinámico probable del rotor en esos intervalos de velocidad.

## 9. RECOMENDACIONES

1. Mejorar el sistema de alimentación de aceite de los cojinetes hidrodinámicos mediante goteo por gravedad, para reducir la pérdida de aceite del banco, eliminar ruido vibratorio y mejorar el comportamiento hidrodinámico de los cojinetes a altas velocidades. El suministro de aceite se puede adecuar mediante recipientes cerrados en las zonas superiores de los cojinetes. El nivel de aceite en los recipientes se puede mantener de forma manual o automática, mediante el bombeo desde un tanque externo al banco.
2. Instalar bases para el montaje de los proximitores, que permitan medir de forma simultánea las direcciones vertical y horizontal, o “Y” (45°) y “X” (135°), sin perturbaciones debidas a la interferencia de las corrientes de Eddy, generadas en el proceso de medición de los proximitores. Se sugiere instalar los proximitores a una distancia mayor o igual a 4 [cm] sobre los muñones del rotor, evitando las posiciones de los pernos de sujeción del muñón al rotor.
3. Comparar diversos métodos de ajuste directos e iterativos, que permitan identificar el método que proporcione la mejor correlación y correspondencia entre los modelos numéricos y experimentales, y la mejor efectividad computacional.
4. Complementar el modelo numérico del rotor con el cálculo de los aportes de rigidez y amortiguamiento de los cojinetes, considerando flujo laminar y turbulento, y la incidencia de cargas dinámicas en la película de aceite del cojinete. También se sugiere modelar completamente la base o bastidor, y analizar su incidencia en el comportamiento dinámico del rotor.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] R. J. ALLEMANG. «The modal assurance criterion: Twenty years of use and abuse». En: *Journal of Sound and Vibration* 37 (8 2003), págs. 14-23. ISSN: 0038-1810.
- [2] R. J. ALLEMANG y D. L. BROWN. «A correlation coefficient for modal vector analysis». En: 1982, págs. 110-116.
- [3] Roberto ALONSO, Joseba ALBIZURI y Javier ESPARZA. «Application of model updating techniques to turbomachinery rotor components». En: *Advances in Mechanical Engineering* 11 (7 julio de 2019). ISSN: 16878140. DOI: 10.1177/1687814019863941.
- [4] A.C. ANTOULAS. «An overview of model reduction methods and a new result». En: vol. 1. IEEE, diciembre de 2009, págs. 5357-5361. ISBN: 978-1-4244-3871-6. DOI: 10.1109/CDC.2009.5400920.
- [5] AUTODESK INC. *Critical Roller Chain Vibration Frequencies*. 2016. URL: <https://knowledge.autodesk.com/support/inventor-products/learn-explore/caas/CloudHelp/cloudhelp/2016/ENU/Inventor-Help/files/GUID-381564A0-CE77-4B21-ADC5-054F585B5CD8-htm.html>.
- [6] O. A. BAUCHAU y J. I. CRAIG. «Energy methods». En: *Structural Analysis. With Applications to Aerospace Structures*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2009, págs. 493-581. ISBN: 978-90-481-2516-6. DOI: 10.1007/978-90-481-2516-6\_10.
- [7] O. A. BAUCHAU y J. I. CRAIG. «Euler-Bernoulli beam theory». En: *Structural Analysis. With Applications to Aerospace Structures. With Applications to Aerospace Structures*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2009, págs. 173-221. ISBN: 978-90-481-2516-6. DOI: 10.1007/978-90-481-2516-6\_5.
- [8] S. CHANDRAKER y H. ROY. «Dynamic study of viscoelastic rotor: Reduction of higher order model using different techniques». En: *Aerospace Science and Technology* 58 (noviembre de 2016), págs. 306-317. ISSN: 12709638. DOI: 10.1016/j.ast.2016.08.006.
- [9] Hua Peng CHEN. «Mode shape expansion using perturbed force approach». En: *Journal of Sound and Vibration* 329 (8 2010), págs. 1177-1190. ISSN: 0022460X. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.10.027.
- [10] Hua Peng CHEN, Kong Fah TEE y Yi Qing NI. «Mode shape expansion with consideration of analytical modelling errors and modal measurement uncertainty». En: *Smart Structures and Systems* 10 (4 2012), págs. 485-499. ISSN: 17381991. DOI: 10.12989/sss.2012.10.4\_5.485.
- [11] M CHOUKSEY, J K DUTT y S V MODAK. «Model updating of rotors supported on journal bearings». En: *Mechanism and Machine Theory* 71 (2014), págs. 52-63. ISSN: 0094114X. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2013.08.013.

- [12] M CHOUKSEY, J. K. DUTT y S. V. MODAK. «Updating Bearing Stiffness and Damping Coefficients of a Rotor System». En: *Journal of The Institution of Engineers (India): Series C* 94 (4 2013), págs. 365-372. ISSN: 22500553. DOI: 10.1007/s40032-013-0077-x.
- [13] M. CHOUKSEY, J. K. DUTT y S. V. MODAK. «Model updating of rotors supported on ball bearings and its application in response prediction and balancing». En: *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation* 46 (10 2013), págs. 4261-4273. ISSN: 02632241. DOI: 10.1016/j.measurement.2013.08.009.
- [14] Roy R. CRAIG y Arthur L. HALE. «Block-Krylov component synthesis method for structural model reduction». En: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 11 (6 noviembre de 1988), págs. 562-570. ISSN: 0731-5090. DOI: 10.2514/3.20353.
- [15] A. S. DAS y J. K. DUTT. «A reduced rotor model using modified SEREP approach for vibration control of rotors». En: *Mechanical Systems and Signal Processing* 26 (1 enero de 2012), págs. 167-180. ISSN: 0888-3270. DOI: 10.1016/J.YMSSP.2011.07.021.
- [16] A.S. DAS y J.K. DUTT. «Reduced model of a rotor-shaft system using modified SEREP». En: *Mechanics Research Communications* 35 (6 septiembre de 2008), págs. 398-407. ISSN: 00936413. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2008.04.004.
- [17] Eddy DASCOTTE y Jacques STROBBE. «Updating finite element models using FRF correlation functions». En: vol. 2. 1999, págs. 1169-1174.
- [18] K. DING y L. YE. «Simulation methodology». En: *Laser Shock Peening. Performance and Process Simulation*. Cambridge: Woodhead Publishing, 2006, págs. 47-72. ISBN: 978-1-85573-929-1.
- [19] Wenjing DING. «Rotor Whirl». En: *Self-Excited Vibration*. Heidelberg: Springer Berlin, 2010, págs. 191-242. ISBN: 978-3-540-69741-1. DOI: 10.1007/978-3-540-69741-1\_8.
- [20] Rob ELING et al. «Towards Accurate Prediction of Unbalance Response, Oil Whirl and Oil Whip of Flexible Rotors Supported by Hydrodynamic Bearings». En: *Lubricants* 4.3 (3 2016). ISSN: 2075-4442. DOI: 10.3390/lubricants4030033. URL: <https://www.mdpi.com/2075-4442/4/3/33>.
- [21] A. ESFANDIARI et al. «Structural model updating using frequency response function and quasi-linear sensitivity equation». En: *Journal of Sound and Vibration* 326 (3-5 octubre de 2009), págs. 557-573. ISSN: 0022460X. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.07.001.
- [22] Fu Zhou FENG, Yong Han KIM y Bo Suk YANG. «Applications of hybrid optimization techniques for model updating of rotor shafts». En: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 32 (1 2006), págs. 65-75. ISSN: 1615147X. DOI: 10.1007/s00158-006-0003-4.

- [23] M. I. FRISWELL. «Updating physical parameters from frequency response function data». En: vol. 18. Publ by ASME, 1989, págs. 393-400.
- [24] Michael I. FRISWELL et al. «Asymmetric Rotors and Other Sources of Instability». En: *Dynamics of Rotating Machines*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010, págs. 296-338. ISBN: 978-0-51178-050-9. DOI: 10.1017/CBO9780511780509.008.
- [25] Michael I. FRISWELL et al. *Dynamics of Rotating Machines*. Cambridge University Press, marzo de 2010. ISBN: 9780521850162. DOI: 10.1017/CBO9780511780509.
- [26] Michael I. FRISWELL et al. «Free Lateral Response of Complex Systems». En: *Dynamics of Rotating Machines*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010, págs. 155-227. ISBN: 978-0-51178-050-9. DOI: 10.1017/CBO9780511780509.006.
- [27] Michael I. FRISWELL et al. «Introduction to Vibration Analysis». En: *Dynamics of Rotating Machines*. Cambridge: Cambridge University Press, febrero de 2010, págs. 17-75. DOI: 10.1017/CBO9780511780509.003.
- [28] FT-L-04 Ficha Técnica Aceite Hidráulico TP ISO 68. URL: <https://www.lubrigras.net/producto/lubry-hidraulico-tp-iso-68/>.
- [29] Humberto Peredo FUENTES. «Application of the mode-shape expansion based on model order reduction methods to a composite structure». En: *Open Engineering* 7 (1 febrero de 2017), págs. 199-212. ISSN: 23915439. DOI: 10.1515/eng-2017-0026.
- [30] Niels FUGLEDE. «Kinematics and Dynamics of Roller Chain Drives». PhD Thesis. DTU Mechanical Engineering, 2014.
- [31] Abdul GHAFOR y Victor SREERAM. «A Survey/Review of Frequency-Weighted Balanced Model Reduction Techniques». En: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 130 (6 noviembre de 2008), págs. 0610041-06100416. ISSN: 0022-0434. DOI: 10.1115/1.2977468.
- [32] Edgar J. GUNTER JR. *Dynamic Stability of Rotor-Bearing Systems*. Special Publication NASA-SP-113. National Aeronautics and Space Administration (NASA), enero de 1966. VI, 228.
- [33] Robert J. GUYAN. «Reduction of stiffness and mass matrices». En: *AIAA Journal* 3 (2 febrero de 1965), págs. 380-380. ISSN: 0001-1452. DOI: 10.2514/3.2874.
- [34] Seon Mi HAN y Haym BENAROYA. *Nonlinear and Stochastic Dynamics of Compliant Offshore Structures*. Vol. 98. Dordrecht: Springer Netherlands, 2002. XIII, 274. ISBN: 978-90-481-5999-4. DOI: 10.1007/978-94-015-9912-2.
- [35] W HEYLEN y S LAMMENS. «FRAC: A Consistent way of Comparing Frequency Response Functions». En: Swansea, 1996, pp. 48-57.

- [36] Benedikt HOFMEISTER, Marlene BRUNS y Raimund ROLFES. «Finite element model updating using deterministic optimisation: A global pattern search approach». En: *Engineering Structures* 195 (2019), págs. 373-381. ISSN: 18737323. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.05.047.
- [37] Chin HSU y Uday DESAI. «Decomposition of nearly singular control systems». En: vol. 3. IEEE, diciembre de 1982, págs. 1097-1098. DOI: 10.1109/CDC.1982.268320.
- [38] M. IMREGUN y D.J. EWINS. «Investigation into mode shape expansion techniques». En: vol. 1923. 1993. ISBN: 0912053410.
- [39] M. IMREGUN, W. J. VISSER y D. J. EWINS. «Finite element model updating using frequency response function data: I. theory and initial investigation». En: *Mechanical Systems and Signal Processing* 9 (2 marzo de 1995). ISSN: 10961216. DOI: 10.1006/mssp.1995.0015.
- [40] H.H. JEFFCOTT. «XXVII. The lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of a whirling speed.—The effect of want of balance». En: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 37 (219 marzo de 1919), págs. 304-314. ISSN: 1941-5982. DOI: 10.1080/14786440308635889.
- [41] A K JHA, P DEWANGAN y M SARANGI. «Model updating of rotor systems by using Nonlinear least square optimization». En: *Journal of Sound and Vibration* 373 (2016), págs. 251-262. ISSN: 10958568. DOI: 10.1016/j.jsv.2015.12.039.
- [42] Chee Young JOH y Chong Won LEE. «Use of dfrfs for diagnosis of asymmetric/anisotropic properties in rotor-bearing system». En: *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME* 118 (1 abril de 1996), págs. 64-69. ISSN: 15288927. DOI: 10.1115/1.2889636.
- [43] Simon JONES. «Finite elements for the analysis of rotor-dynamic systems that include gyroscopic effects». PhD Thesis. Brunel University, 2005, págs. 1-145.
- [44] A. M. KABE y B. H. SAKO. «Issues with proportional damping». En: *AIAA Journal* 54 (9 2016), págs. 2864-2868. ISSN: 00011452. DOI: 10.2514/1.J054080.
- [45] D. C. KAMMER. «A hybrid approach to test-analysis-model development for large space structures». En: *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME* 113 (3 julio de 1991), págs. 325-332. ISSN: 15288927. DOI: 10.1115/1.2930188.
- [46] P KOUTSOVASILIS y M. BEITELSCHMIDT. «Comparison of model reduction techniques for large mechanical systems: A study on an elastic rod». En: *Multibody System Dynamics* 20 (2 2008), págs. 111-128. ISSN: 13845640. DOI: 10.1007/s11044-008-9116-4. URL: <https://www.researchgate.net/publication/256156971>.

- [47] Erwin KRÄMER. *Dynamics of Rotors and Foundations*. Heidelberg: Springer Berlin, 1993. XII, 384. ISBN: 978-3-662-02800-1. DOI: 10.1007/978-3-662-02798-1.
- [48] Kye Si KWON y Rong Ming LIN. «Frequency selection method for FRF-based model updating». En: *Journal of Sound and Vibration* 278 (1-2 noviembre de 2004), págs. 285-306. ISSN: 0022460X. DOI: 10.1016/j.jsv.2003.10.003.
- [49] C. W. LEE et al. «Modal analysis of a distributed parameter rotating shaft». En: *Journal of Sound and Vibration* 122 (1 abril de 1988), págs. 119-130. ISSN: 10958568. DOI: 10.1016/S0022-460X(88)80010-5.
- [50] N. A. J. LIEVEN y D. J. EWINS. «Spatial correlation of mode shapes: the coordinate modal assurance criterion (COMAC)». En: 1988, págs. 690-695.
- [51] R M LIN y J ZHU. «Model updating of damped structures using FRF data». En: *Mechanical Systems and Signal Processing* 20 (8 2006), págs. 2200-2218. ISSN: 08883270. DOI: 10.1016/j.ymsp.2006.05.008.
- [52] R. M. LIN y D. J. EWINS. «Analytical model improvement using frequency response functions». En: *Mechanical Systems and Signal Processing* 8 (4 julio de 1994), págs. 437-458. ISSN: 10961216. DOI: 10.1006/mssp.1994.1032.
- [53] Sylvester LINDEMANN. «Model Updating an einem biegeelastischem Rotor». PhD Thesis. Universität Kassel, 2009, pág. 134. ISBN: 978-3-89958-674-9.
- [54] Zhiwen LU, Yong LV y Huajiang OUYANG. «A super-harmonic feature based updating method for crack identification in rotors using a Kriging surrogate model». En: *Applied Sciences (Switzerland)* 9 (12 junio de 2019). ISSN: 20763417. DOI: 10.3390/app9122428.
- [55] Ryan J MADDEN y Jerzy T SAWICKI. «Rotor model validation for an active magnetic bearing machining spindle using mu-synthesis approach». En: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 134 (9 2012). ISSN: 07424795. DOI: 10.1115/1.4006988.
- [56] Leonardo B. Saint MARTIN, Ricardo U. MENDES y Katia L. CAVALCA. «Model reduction and dynamic matrices extraction from state-space representation applied to rotating machines». En: *Mechanism and Machine Theory* 149 (julio de 2020), pág. 103804. ISSN: 0094114X. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2020.103804.
- [57] Gudrun MIKOTA. «A model correlation criterion for rotors». En: *Journal of Journal of Sound and Vibration* 441 (febrero de 2019), págs. 106-110. ISSN: 0022460X. DOI: 10.1016/j.jsv.2018.10.040.
- [58] N H MOHD AZMAN et al. «Whirling frequencies of rotor systems using ANSYS APDL». En: vol. 1051. Febrero de 2021, pág. 012039. DOI: 10.1088/1757-899X/1051/1/012039.
- [59] Agnieszka MUSZYNSKA. *Rotordynamics*. CRC Press, mayo de 2005. ISBN: 978-1-4200-2779-2. DOI: 10.1201/9781420027792.

- [60] L. P. NASCIMENTO y L. CALDIRON. «Rotor support stiffness estimation by sensitivity analysis». En: *Latin American Applied Research* 36 (1 enero de 2006), págs. 23-28. ISSN: 03270793.
- [61] J. O'CALLAHAN. «System equivalent reduction expansion process (SEREP)». En: 1989, págs. 29-37.
- [62] Masaaki OOKUMA y Akio NAGAMATSU. «Vibration Analysis by Multiple Component Mode Synthesis Method». En: *Bulletin of JSME* 27 (228 1984), págs. 1288-1293. ISSN: 1881-1426. DOI: 10.1299/jsme1958.27.1288.
- [63] R. PASCUAL, J. C. GOLINVAL y M. RAZETO. «Frequency domain correlation technique for model correlation and updating». En: vol. 1. SEM, 1997, págs. 587-592. ISBN: 9780912053530.
- [64] Saeed Ziaei RAD. «Methods For Updating Numerical Models In Structural Dynamics». PhD Thesis. Imperial College of Science, Technology y Medicine, 1997, pág. 283.
- [65] Roberto RICCI et al. «Modeling and model updating of torsional behavior of an industrial steam turbo generator». En: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 132 (7 julio de 2010). ISSN: 07424795. DOI: 10.1115/1.4000287.
- [66] Lucie ROULEAU, Jean François DEÛ y Antoine LEGAY. «A comparison of model reduction techniques based on modal projection for structures with frequency-dependent damping». En: *Mechanical Systems and Signal Processing* 90 (2017), págs. 110-125. ISSN: 10961216. DOI: 10.1016/j.ymssp.2016.12.013.
- [67] A. EL-SHAFFI et al. «Some Experiments on Oil Whirl and Oil Whip». En: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 129.1 (marzo de 2004), págs. 144-153. ISSN: 0742-4795. DOI: 10.1115/1.2181185. eprint: [https://asmedigitalcollection.asme.org/gasturbinespower/article-pdf/129/1/144/5890923/144\\_1.pdf](https://asmedigitalcollection.asme.org/gasturbinespower/article-pdf/129/1/144/5890923/144_1.pdf). URL: <https://doi.org/10.1115/1.2181185>.
- [68] G.J. SHEU y S.M. YANG. «Dynamic analysis of a spinning Rayleigh beam». En: *International Journal of Mechanical Sciences* 47 (2 febrero de 2005), págs. 157-169. ISSN: 00207403. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2005.01.007.
- [69] Tsuneo SOMEYA. *Journal-Bearing Databook*. Heidelberg: Springer Berlin, 1989. XIII, 326. ISBN: 978-3-642-52511-7. DOI: 10.1007/978-3-642-52509-4.
- [70] R. SUBBIAH, R. B. BHAT y T. S. SANKAR. «Dynamic response of rotors using modal reduction techniques». En: *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME* 111 (4 octubre de 1989), págs. 360-365. ISSN: 15288927. DOI: 10.1115/1.3269869.
- [71] A. T. TADEO y K. L. CAVALCA. «A comparison of flexible coupling models for updating in rotating machinery response». En: *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 25 (3 septiembre de 2003), págs. 235-246. ISSN: 1678-5878. DOI: 10.1590/S1678-58782003000300004.

- [72] Marius TARPØ et al. «Expansion of experimental mode shape from operational modal analysis and virtual sensing for fatigue analysis using the modal expansion method». En: *International Journal of Fatigue* 130 (enero de 2020), pág. 105280. ISSN: 01421123. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2019.105280.
- [73] William T. THOMSON. *Theory of Vibration with Applications*. London: CRC Press, 2018. 546 págs. ISBN: 978-0-20371-884-1. DOI: 10.1201/9780203718841.
- [74] Rajiv TIWARI. *Rotor Systems*. CRC Press, noviembre de 2017, págs. 1-1070. ISBN: 9781315230962. DOI: 10.1201/9781315230962.
- [75] Matthew B WAGNER et al. «Model reduction methods for rotor dynamic analysis: A survey and review». En: *International Journal of Rotating Machinery* 2010 (2010), pág. 17. ISSN: 1023621X. DOI: 10.1155/2010/273716.
- [76] Jutao WANG y Chunjie WANG. «Structural Model Updating of Frequency Response Function Based on Kriging Model». En: Institute of Electrical y Electronics Engineers Inc., octubre de 2016, págs. 640-644. ISBN: 9781509025350. DOI: 10.1109/ICISCE.2016.142.
- [77] Adam C WROBLEWSKI, Jerzy T SAWICKI y Alexander H PESCH. «Rotor model updating and validation for an active magnetic bearing based high-speed machining spindle». En: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 134 (12 2012). ISSN: 15288919. DOI: 10.1115/1.4007337.
- [78] Yuanping XU et al. «Active magnetic bearing rotor model updating using resonance and MAC error». En: *Shock and Vibration* 2015 (enero de 2015). ISSN: 10709622. DOI: 10.1155/2015/263062.
- [79] Aimin YAN y Jean Claude GOLINVAL. «Model updating based on frequency response functions using a general finite element code». En: *European Journal of Mechanical and Environmental Engineering* 48 (3 2003), págs. 149-162. ISSN: 00353612.
- [80] S ZIAEI-RAD. «Finite element model updating of rotating structures using different optimisation techniques». En: *Iranian Journal of Science and Technology, Transaction B: Engineering* 29 (6 2005), págs. 569-585. ISSN: 03601307.
- [81] M S Mohd ZIN et al. «Frequency Response Function Based Updating of a Laser Spot Welded Structure using Synthesised Frequency Response Function». En: vol. 506. 2019. DOI: 10.1088/1757-899X/506/1/012012.

## ANEXO A. ESPECIFICACIONES TÉCNICAS DE EQUIPOS Y SENSORES

### ANALIZADOR DE VIBRACIONES MULTICANAL OROS OR35

Figura 45. Analizador multicanal OROS OR35



Fuente: Elaboración propia.

Analizador de vibraciones multicanal de 8 canales en tiempo real, modular, con gran velocidad de procesamiento, robustez, portabilidad y precisión continua. Las características principales del analizador son:

- 8 entradas compatibles AC, DC, IEPE, Float y TEDS
- 2 entradas externas sincronizadas para instalación de tacómetros
- 2 salidas dinámicas
- $\pm 10$  [V], 24 bits, rango dinámico de 140 dB
- Ancho de banda: 40 [KHz]
- Frecuencia de muestreo máxima: 102.4 [KS/s] y 65.536 [KS/s]

### PROXIMITOR SHINKAWA FL-202F05L-M1-00-04-10

Sondas de proximidad para la medición del desplazamiento en maquinaria rotativa, medición de fase y velocidad de rotación, para una amplia variedad de maquinaria rotativa, a partir del fenómeno de corrientes de Eddy. Los sensores se conectan con cables de extensión SHINKAWA FW-202F-80 a los transductores SHINKAWA FK-202F2-1. Las características generales de los sensores son:

- Rango de medición: 0.25 a 2.25 [mm]
- Factor de escala: 7.87 [V/mm]
- Respuesta en frecuencia: 0 - 10 [KHz] (- 3 [dB])

Figura 46. Proximitor, cable extensor y transductor SHINKAWA



Fuente: <http://vjtech.vn/wp-content/uploads/2021/04/FK.jpg>.

- Alimentación: -24 [VDC]  $\pm 10\%$
- Longitud del cable: 9 [m]
- Diámetro del sensor: 5 [mm]

### FUENTE DC TEKTRONIX PWS2326

Figura 47. Fuente DC Tektronix



Fuente: [https://www.tek.com/-/media/images/product-series/pws2000-dc-power-supply/tek-pws2323\\_03b\\_h\\_0.jpg?h=375&w=500](https://www.tek.com/-/media/images/product-series/pws2000-dc-power-supply/tek-pws2323_03b_h_0.jpg?h=375&w=500).

Fuente de alimentación DC con rangos de voltaje y corriente que cubren un amplio espectro de aplicaciones, y una resolución adecuada para satisfacer los requerimientos básicos de diversas aplicaciones.

- Voltaje: 0 a 32 [V]

- Corriente: 0 a 6 [A]
- Resolución en voltaje: 10 [mV]
- Resolución en corriente: 10 [mA]
- Regulación lineal
- Precisión de voltaje básico: 0.05 %
- Precisión de corriente básica: 0.2 %
- Ondulación y ruido: <3 [mV<sub>p-p</sub>]

## FOTOTACÓMETRO ÓPTICO MONARCH INSTRUMENT ROS-P

Figura 48. Sensor óptico remoto y módulo de alimentación



Fuente: [https://img.directindustry.com/images\\_di/photo-g/7418-12223346.jpg](https://img.directindustry.com/images_di/photo-g/7418-12223346.jpg).

Sensor óptico remoto de acero inoxidable roscado, con fuente de luz led roja visible e indicador led verde, autoalimentado con el módulo de interfaz MONARCH INSTRUMENT SPSR. Las características generales del sensor son:

- Rango de medición: 1 a 250000 [RPM]
- Señal de salida (módulo): Pulsos compatibles con TTL de 0 a 5 [V] o de 5 a 0 [V]
- Conector BNC

## ANEXO B. OPCIONES DE CONFIGURACIÓN DE LOS ALGORITMOS DE OPTIMIZACIÓN

### ALGORITMO GENÉTICO

**Display.** Esta opción establece que información se visualizará en la ventana de comandos de MATLAB. El valor 'iter' establece que el número de funciones objetivo evaluadas, la función objetivo evaluada en el mejor punto, el valor promedio de la función objetivo evaluada en todos los individuos y las generaciones sucesivas sin cambios significativos en la función objetivo, se muestren en cada iteración.

**PopulationSize.** La opción establece el tamaño de la población, es decir, el número de individuos o puntos evaluados en cada generación.

**PlotFcn.** Esta opción proporciona gráficas para monitorear el funcionamiento del algoritmo. El valor '@gaplotbestf' permite visualizar la gráfica del mejor valor y el valor promedio de la función objetivo en función de las iteraciones, mientras que el valor '@gaplotbestindiv' permite visualizar la gráfica del valor de las variables sujetas a la optimización en cada una de las iteraciones.

**UseParallel.** La opción especifica si se desea habilitar el uso de procesamiento en paralelo de los núcleos físicos del procesador.

**HybridFcn.** Esta opción establece el uso de un algoritmo de optimización adicional que funcionará en serie con el algoritmo genético. El valor '@patternsearch' especifica el uso del algoritmo de búsqueda de patrones o búsqueda directa una vez finalice el algoritmo de optimización. Las opciones de configuración del algoritmo adicional o algoritmo híbrido se establecen mediante una estructura de opciones dada por la variable `hybridoptions`.

**InitialPopulationMatrix.** Esta opción establece una población inicial generada por el usuario, en lugar de usar las funciones predeterminadas de generación de poblaciones del algoritmo de optimización.

**MaxGenerations.** La opción establece el número máximo de generaciones que causan la finalización del algoritmo. El valor `Inf` establece que el número de generaciones no será un criterio para la finalización del algoritmo.

## BÚSQUEDA DE PATRONES

**Display.** Esta opción establece que información se visualizará en la ventana de comandos de MATLAB. El valor 'iter' establece que tanto el valor de la función objetivo evaluada en el mejor punto, como el tamaño del mallado correspondiente, se muestren en cada iteración.

**UseCompletePoll.** La opción especifica si el sondeo de los puntos del mallado en cada iteración se realizará de forma completa o solo hasta encontrar un punto que mejore el valor de la función objetivo de la iteración anterior.

**UseParallel.** La opción especifica si se desea habilitar el uso de procesamiento en paralelo de los núcleos físicos del procesador.

**PlotFcn.** Esta opción proporciona gráficas para monitorear el funcionamiento del algoritmo. El valor '@psplotbestf' permite visualizar la gráfica del mejor valor de la función objetivo en función de las iteraciones, mientras que el valor '@psplotbestx' permite visualizar la gráfica del valor de las variables sujetas a la optimización en cada una de las iteraciones.