

Diseño de situaciones a-didácticas para el aprendizaje de la derivada como razón de cambio
mediante el uso de software matemático interactivo

Giovanni Rodríguez Santamaría

Trabajo de Grado Para Optar el Título de Magíster en Educación Matemática

Director:

Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor en Didáctica de la Matemática

Universidad Industrial De Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2019

Dedicatoria

A mi Madre. Todo lo que soy es gracias a ti.

Agradecimientos

A Dios, quien nunca me desampara.

Al profesor Jorge Fiallo, por dirigirme, por alentarme, por sus aportes y por sobre todo, su gran paciencia.

A mi pequeña familia, seguiremos unidos.

A Jonatan, compañero de batalla en la maestría y ahora un muy buen amigo. Gracias por creer en mí y no dejarme desfallecer.

A mis profesores de la maestría Sandra Evelyn Parada y Gabriel Yáñez, aprendí mucho de ellos.

A mis compañeros, Sully, Anita, Edwing y Cristian.

A la Escuela de Matemáticas, orgulloso me siento de conseguir mi tercer título como estudiante UIS.

Contenido

	Pág.
Introducción	15
1. Antecedentes	18
1.1 Derivada y el uso de tecnología computacional para su enseñanza.....	18
1.2 Situaciones didácticas e ingeniería didáctica	30
2. Problema de investigación	34
2.1 Pregunta de investigación	36
2.2 Objetivo.....	36
3. Marco Teórico.....	36
3.1 Teoría de las situaciones didácticas	36
3.1.1 Situación a-didáctica.....	37
3.1.2 La validación.....	39
3.1.3 La devolución.....	39
3.1.4 El medio.....	40
3.2 La derivada y algunas concepciones epistemológicas	41
3.2.1 Cociente incremental.	41
3.2.2 Derivada en un punto.....	41
3.2.3 Derivada en Física.....	42

3.2.4 Interpretación geométrica de la derivada	42
3.2.5 Acercamiento a la derivada por Oresme	43
3.2.6 Método de la pseudo-igualdad de Fermat	43
3.2.7 Triángulo característico de Barrow	44
3.2.8 El cociente diferencial de Leibniz	46
3.2.9 Las fluxiones de Newton.	47
 4. Sobre las Representaciones	47
 5. Metodología de Investigación	56
5.1 Población y muestra de estudio	57
 6. Análisis Preliminar	59
6.1 Actividad 1 – reto de la tortuga	62
6.2 Actividad 2 – reto de los móviles 1	63
6.3 Actividad 3 – reto de los móviles 2	65
6.4 Actividad 4 – reto de los móviles 3	67
6.5 Actividad 5 – flujos	74
 7. Creación de las Actividades	77
7.1 Actividad 1 – reto de la tortuga / secuencia 3	77
7.2 Actividad 2 - reto de los móviles 1	79
7.3 Actividad 3 – reto de los móviles 2	80

7.4 Actividad 4 – reto de los móviles 3	80
7.5. Actividad 5 – flujos.....	81
8. Aplicación de las Actividades y Análisis de Acciones y Retroacciones	82
8.1 Actividad 1.....	84
8.2 Actividad 2.....	93
8.3 Actividad 3.....	100
8.4 Actividad 4.....	107
8.5 Actividad 5.....	113
9. Conclusiones	120
Referencias Bibliográficas	125
Apéndices.....	130

Lista de figuras

	Pág.
<i>Figura 1.</i> Diferencias para una función lineal	19
<i>Figura 2.</i> Diferencias para una función cuadrática.....	20
<i>Figura 3.</i> Marco conceptual para el desarrollo del cálculo	29
<i>Figura 4.</i> Aproximación geométrica de la derivada	42
<i>Figura 5.</i> Aproximación geométrica de la derivada según Oresme	43
<i>Figura 6.</i> Representación de Fermat para aproximar una tangente	44
<i>Figura 7.</i> Deducción de la recta tangente por Fermat	44
<i>Figura 8.</i> Triángulo característico de Barrow.....	45
<i>Figura 9.</i> Triángulo característico de Leibniz	46
<i>Figura 10.</i> Notación de fluente.....	47
<i>Figura 11.</i> Derivada de y con respecto a x	47
<i>Figura 12.</i> ¿Cuál es la representación algebraica de la gráfica?.....	50
<i>Figura 13.</i> ¿Se intersecan las dos curvas?	51
<i>Figura 14.</i> Zoom de acercamiento 1	52
<i>Figura 15.</i> Zoom de acercamiento 2.....	52
<i>Figura 16.</i> Uso de Derive para integrales.....	53
<i>Figura 17.</i> Uso de GeoGebra para integrales 1	53
<i>Figura 18.</i> Grafica del integrando	54
<i>Figura 19.</i> Uso de GeoGebra para integrales 1	54
<i>Figura 20.</i> Aproximación a la integral impropia 1	55

<i>Figura 21. Aproximación a la integral impropia 2</i>	<i>55</i>
<i>Figura 22. Función posición.....</i>	<i>69</i>
<i>Figura 23. Aproximación discreta a la función derivada mediante tasas medias</i>	<i>70</i>
<i>Figura 24. Aproximación discreta a la función derivada mediante tasas medias</i>	<i>70</i>
<i>Figura 25. Contraste entre la función derivada y la aproximación por tasas medias</i>	<i>71</i>
<i>Figura 26. Zoom de contraste entre la derivada y la paroximación por tasas medias.....</i>	<i>72</i>
<i>Figura 27. Desarrollo de la fórmula de tres puntos para la derivada</i>	<i>74</i>
<i>Figura 28. Objetos fijos para la Actividad 1</i>	<i>78</i>
<i>Figura 29. Ventana de programación en JavaScripting.....</i>	<i>78</i>
<i>Figura 30. Objetos fijos para la Actividad 2</i>	<i>79</i>
<i>Figura 31. Objetos fijos Actividad 3</i>	<i>80</i>
<i>Figura 32. Objetos fijos Actividad 4</i>	<i>81</i>
<i>Figura 33. Objetos fijos Actividad 5</i>	<i>82</i>
<i>Figura 34. Ilustración 1 del Cuestionario para la actividad 1.....</i>	<i>85</i>
<i>Figura 35. Ilustración 2 del Cuestionario para la actividad 1.....</i>	<i>86</i>

Lista de tablas

	Pág.
Tabla 1. <i>Actividad 1.</i>	87
Tabla 2. <i>Actividad 2.</i>	94
Tabla 3. <i>Actividad 3.</i>	101
Tabla 4. <i>Actividad 4.</i>	108
Tabla 5. <i>Actividad 5.</i>	114

Lista de apéndices

	Pág.
Apéndice A. Programación actividad 1	130
Apéndice B. Programación actividad 2	149
Apéndice C. Programación actividad 3	165
Apéndice D. Programación actividad 4	191
Apéndice E. Programación actividad 5.....	210

Resumen

Diseño de situaciones a-didácticas para el aprendizaje de la derivada como razón de cambio mediante el uso de software matemático interactivo¹

Autor: Giovanni Rodríguez Santamaría²

Palabras claves: Razón de cambio, Derivada; Teoría de las situaciones didácticas; Teoría de las representaciones; Ingeniería didáctica; Software de Geometría Dinámica (SGD).

Descripción:

Diversas investigaciones muestran que la enseñanza de la derivada sigue siendo un compendio de desarrollos algebraicos y memorísticos que no están ligados a la comprensión del concepto fundamental como la razón de cambio de una magnitud de interés. Presentamos una propuesta de investigación cuyo interés es favorecer el aprendizaje de la derivada como razón de cambio explorando diferentes representaciones simuladas por software de geometría dinámica (SGD).

Diseñamos bajo la teoría de las situaciones didácticas (TSD) (Brousseau, 2007), actividades en Geogebra, con las cuales los estudiantes interactúan para lograr aprendizaje por adaptación. Tomamos como base para el diseño referentes epistemológicos acerca de la derivada y las sugerencias de la comunidad internacional sobre el uso de diferentes tipos de representaciones para la enseñanza de objetos matemáticos.

Utilizamos tres fases de una ingeniería didáctica como metodología para el desarrollo de la investigación, el análisis preliminar de la literatura para revisar los obstáculos de enseñanza y así plantear diversas actividades basadas en el uso del cociente de diferencias; el análisis a priori para predecir posibles acciones, selecciones y decisiones del estudiante al interactuar con el medio preparado, y una tercera fase de experimentación para evidenciar que las actividades programadas en Javascripting generan retroacciones que favorecen el uso de la razón de cambio y de diferentes representaciones.

Concluimos que nuestro trabajo tiene el potencial de mejorar la comprensión de la derivada como razón de cambio a partir del desarrollo situaciones a-didácticas, creando un medio que permite diferentes tipos de acciones y retroacciones, ambientadas bajo diferentes representaciones del mismo ente matemático en las que no priorizamos el uso de la representación algebraica y las reglas de derivación para resolver problemas.

¹ Trabajo de grado

² Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal, Doctor en Didáctica de la Matemática.

Abstract

Design of a-didactic situations for the teaching about derivative like change rate using dynamic geometry software³

Author: Giovanni Rodríguez Santamaría⁴

Key words: Rate of change; Derivative; Theory of didactic situations; Theory of representations; Didactic engineering; Dynamic Geometry Software (DGS)

Description:

Research shows that the teaching of the derivative remains a compendium of algebraic and memorial developments that are not linked to the understanding of the fundamental concept as rate of change about a magnitude of interest. We present a research proposal whose interest is to favor the learning of the derivative as a rate of change by exploring different representations simulated by dynamic geometry software (SGD).

We design under the theory of didactic situations (TSD) (Brousseau, 2007), activities in Geogebra, with which students interact to achieve learning by adaptation. We take as a basis for the design epistemological references about the derivative and the suggestions of the international community on the use of different types of representations for the teaching of mathematical objects.

We use three phases of didactic engineering as a methodology for the development of research, preliminary analysis of the literature to review teaching obstacles and thus propose various activities based on the use of the difference ratio; a priori analysis to predict possible actions, selections and decisions of the student when interacting with the prepared medium, and a third phase of experimentation to show that the activities programmed in Javascripting generate feedback that favors the use of the rate of change and of different representations.

We conclude that our work has the potential to improve the understanding of the derivative as a rate of change from the development of a-didactic situations, creating a medium that allows different types of actions and feedback, set under different representations of the same mathematical entity in which we do not prioritize the use of algebraic representation and derivation rules to solve problems.

³ Bachelor Thesis

⁴ Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal, Doctor en Didáctica de la Matemática.

Introducción

Presentamos en este documento una propuesta de investigación que tiene como interés el favorecimiento del aprendizaje de la derivada como razón de cambio explorando diferentes representaciones mediante el diseño, aplicación y validación de situaciones a-didácticas simuladas por el software de matemática interactiva.

En Colombia, el Ministerio de Educación Nacional contempla el pensamiento variacional dentro de sus lineamientos curriculares y estándares básicos del conocimiento, con el fin de fortalecer el desarrollo del pensamiento matemático a partir de la solución de situaciones problema que provengan del entorno sociocultural o que provengan de disciplinas afines a las matemáticas, sin embargo la enseñanza de las matemáticas y particularmente del cálculo diferencial sigue siendo un compendio de desarrollos algebraicos, procedimentales y memorísticos que no están ligados a la comprensión de conceptos fundamentales de la derivada entendida como la razón de cambio de una magnitud de interés.

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad” (Vasco, 2003).

Concordando con Vasco, e intentando dotar de dinamismo el pensamiento variacional, acudimos al uso del software de matemática interactiva (GeoGebra) como una herramienta potencial en el diseño de actividades, ya que este relaciona diferentes representaciones de un mismo objeto matemático (geométrica, algebraica y numérica). Al respecto de las representaciones, Hitt (2013) manifiesta que: “La construcción de conceptos siguiendo una teoría sobre representaciones, nos obliga a considerar a todas las representaciones como importantes y a no priorizar una de ellas en detrimento de las otras”.

Por otra parte, Tall (2013) plantea que las reformas del cálculo han hecho uso de la computadora para mostrar gráficas dinámicas y así poder ofrecer el antes inimaginable poder de la computación numérica y simbólica, más aún, la tecnología disponible tiene un poder mayor, que permite tanto a estudiantes como a matemáticos dar sentido a las ideas.

Así pues, creemos que es posible ayudar a los estudiantes a construir concepciones de la derivada a través de diferentes representaciones presentes en actividades elaboradas por el software de matemática interactiva dentro del marco teórico de las situaciones didácticas.

La propuesta de investigación está conformada por nueve secciones. En la primera sección se exponen los antecedentes y la literatura correspondiente al concepto de derivada, al uso de las situaciones y la mediación de la tecnología en los procesos de aprendizaje. En la segunda sección se hace el planteamiento del problema de investigación, la pregunta de investigación y los objetivos que se pretenden responder a la luz de las preguntas planteadas. La tercera sección describe el marco teórico de las situaciones didácticas y algunas concepciones epistemológicas

acerca de la derivada, las cuales serán referencia para encaminar el diseño de las actividades que fomentarán la construcción de los conceptos planteados en el problema de investigación. En la cuarta sección se presentan algunas posturas acerca de la noción de representación y cómo influyen estas en el presente trabajo.

La quinta sección muestra las etapas de la ingeniería didáctica como metodología de investigación que se utilizarán en el desarrollo de la investigación, de las cuales abordaremos solo hasta la fase de experimentación. En la sección siete mostraremos cómo se crearon las situaciones a-didácticas a partir del lenguaje de programación JavaScripting (se sugiere revisar el apéndice en esta sección). La sección ocho está constituida por la aplicación de las actividades donde mostramos evidencias del funcionamiento de las retroacciones así como las repuestas de los estudiantes a cuestionarios propuestos en cada actividad. Finalmente, las conclusiones de la investigación se mostrarán en la sección nueve. Termina nuestro documento con las respectivas referencias bibliográficas y los anexos de programación en JavaScripting.

1. Antecedentes

Dado que nuestro trabajo de investigación se fundamenta en el significado de la razón de cambio, la teoría de las situaciones didácticas y la ingeniería didáctica como metodología, presentamos a continuación algunos trabajos relacionados con el concepto de derivada y el uso de tecnología computacional para su enseñanza, así como el marco teórico-metodológico ya mencionado.

1.1 Derivada y el uso de tecnología computacional para su enseñanza

Orton (1983) presenta un trabajo en el cual se identifican tres tipos de errores que cometían los estudiantes en actividades ligadas a la derivada y sus aplicaciones. Un primer tipo de error es el estructural, que relaciona los conceptos implicados; un segundo tipo llamado error arbitrario en el cual el estudiante resuelve problemas sin tener en cuenta los datos; y un tercer tipo nombrado manipulación donde si bien los conceptos relacionados con la derivada pueden ser comprendidos.

El análisis de datos realizado por Orton provenía de la aplicación de entrevistas que estuvieron dirigidas a estudiantes con el objetivo de responder a cuestiones sobre límites, áreas, el significado de cociente incremental, la diferenciación y sus aplicaciones. Particularmente menciona que los estudiantes manifestaron menores dificultades para resolver ítems de aplicaciones de diferenciación que en los concernientes a la comprensión del concepto de diferenciación y la gráfica asociada a la razón de cambio.

Una de las actividades propuestas por el autor considera que la derivada en un punto nos indica la velocidad de cambio, la comprensión de tal idea se apoya en el saber previo de la noción de la razón entre el incremento de x en relación al de y . Para indagar sobre la aprehensión de dicha relación, uno de los ítems de la actividad empleaba una tabla, una gráfica y la descripción de una situación. La posible generalidad sobre los significados de la idea de razón se buscaba viendo la manera en que los estudiantes podían interpretar la razón de cambio en puntos particulares y en generales ($x=T$), considerando a las funciones lineales y no lineales.

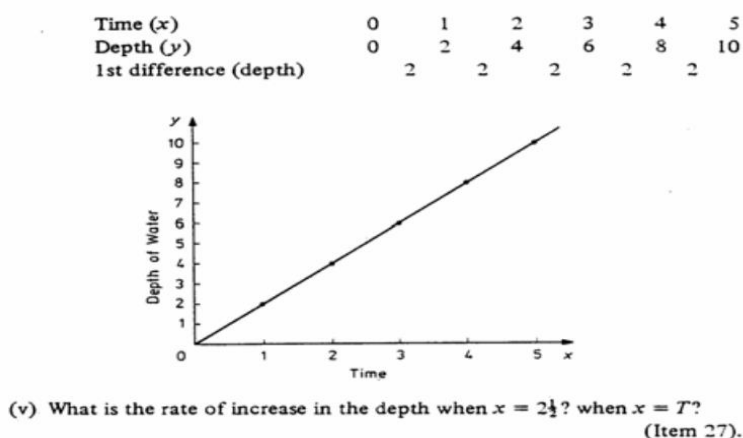


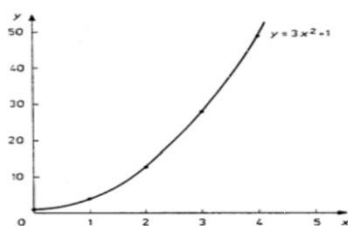
Figura 1. Diferencias para una función lineal

Uno de los errores más comunes de los estudiantes consistió en dar el valor de la abscisa cuando se les preguntaba por la razón de cambio en un punto no dado en la tabla. En otras tareas se observó que la comprensión de la razón de cambio (razón entre el incremento de x y el de y) dependía del tipo de función utilizada (lineales o cuadráticas) y las dificultad de considerar el límite cuando el incremento del intervalo tiende a cero (h tiende a cero en el intervalo $[x, x+h]$). Aunque la mayoría de estudiantes se desarrollaron de manera acertada al preguntarles por la razón de cambio con

funciones lineales, no sucedía lo mismo en tareas donde la función era no lineal, esto debido a una pobre comprensión sobre el concepto de función.

TASK C6

The graph below represents $y = 3x^2 + 1$, from $x = 0$ to $x = 4$.



- (i) What is the value of y when $x = a$? (Item 21).
- (ii) What is the value of y when $x = a + h$? (Item 21).
- (iii) What is the change in y as x increases from a to $a + h$? (Item 21).
- (iv) What is the average rate of change in y in the x -interval a to $a + h$? (Item 28).
- (v) Can you use the result of (iv) to obtain the rate of change of y at $x = 2\frac{1}{2}$? at $x = X$? If so, how? (Item 28).

Figura 2. Diferencias para una función cuadrática

La información que nos brinda esta investigación nos señala la importancia de la relación entre la razón de cambio y el cociente incrementos para la comprensión de la derivada, entendiéndola como una manera de cuantificar el cambio de una magnitud de interés. Por otra parte, en nuestra propuesta nos parece pertinente introducir problemas asociados a fenómenos que se puedan representar mediante una función lineal para mostrar razones de cambio constante para luego proponer como desafío al estudiante problemas con razones de cambio variable.

Azcárate (1992) realiza un trabajo con el objetivo de evaluar el proceso de aprendizaje, en la asignatura de Matemáticas asociado al concepto derivada. El recorrido didáctico de la introducción al concepto de derivada de una función está pensado para estudiantes que no han estudiado previamente los conceptos de continuidad y de límite. Para lograr este objetivo el estudio se enfoca en el concepto de recta tangente, su carácter gráfico y enfoque intuitivo.

La investigación está centrada en el estudio y seguimiento a estudiantes entre 15 y 16 años utilizando un material didáctico planteado sin tener en cuenta los conocimientos previos sobre límite y continuidad para caracterizar las dificultades, errores y esquemas conceptuales asociados a tres conceptos fundamentales relacionados con la noción de derivada: el concepto de pendiente de una recta, el concepto de velocidad instantánea de un movimiento variado y el concepto de tasa instantánea de variación de una función. Se evidenciaron dos errores por parte de los estudiantes al momento de cuantificar el cambio en contextos de velocidad, uno era la existencia de confusión de la pendiente de una recta con su ordenada en el origen; y otro confundir el valor de la velocidad media con la velocidad instantánea en un determinado punto.

Aunque en nuestro trabajo el concepto de límite no será mencionado, si pretendemos que éste aflore de manera implícita cuando el estudiante afronte los problemas propuestos y que tendrán que ver con el cociente de incrementos pequeños.

Villa y Posada (2006) plantean una propuesta didáctica que pretende retomar la noción de variación, los procesos de modelación y los registros semióticos, para lograr la conversión del lenguaje y el registro simbólico a la representación de carácter matemático. Se proponen como objetivo, “determinar las características didácticas y conceptuales de la función lineal”, teniendo componentes metodológicos que apuntan al desarrollo de la ingeniería didáctica. El desarrollo de la investigación está principalmente caracterizado por el esquema experimental basado en análisis preliminares, en la experimentación y la validación. El trabajo experimental se fundamenta en la representación de la función de forma cartesiana, tabulación, simbólica (algebraica) y desde el lenguaje.

Para los autores, la función es una herramienta de gran importancia en el proceso de modelación de fenómenos en los cuales está presente el cambio, tal cual como lo explicitan en el problema de investigación. Inicialmente a los estudiantes se les realizó un prueba diagnóstica que evidenció falencias en el concepto de proporcionalidad, a partir de esta prueba se diseñaron actividades de intervención seleccionando posibles variables didácticas que pretenden dar cuenta de la modelación como proceso inmerso en el concepto de función, la variación como elemento que da sentido al concepto de función, y los diferentes sistemas de representación del concepto de función.

Se plantearon categorías a priori sobre los procesos anteriormente enunciados para clasificar a los estudiantes, dichas categorías están basadas en el modelo matemático de la función lineal pues esta permite el estudio sistemático de la variación entre magnitudes relacionadas por medio de la razón constante de diferencias (proporcionalidad). Para nuestro trabajo tendremos en cuenta algunas categorías que deseamos se vean reflejadas en las actividades mediadas por software, como son la percepción de variación, la cuantificación de la variación y los sistemas de representación.

De las conclusiones de la investigación por parte de los autores rescatamos que la razón de cambio constante sirvió para la interpretación del concepto de función desde un punto de vista variacional y es pertinente para la conversión de diferentes registros de representación.

Villa (2007) en su tesis doctoral realiza un exhaustivo análisis de cómo se desarrolla el proceso de comprensión de la tasa de variación como una manera de ofrecer una interpretación variacional de la derivada en estudiantes de un curso de precálculo. El foco de la investigación se cumple con la ayuda de varios factores, entre ellos la intervención del software dinámico GeoGebra y

Modellus, y el papel que cumplen estos en las diferentes representaciones. El proceso de comprensión de un concepto matemático en el cual desea indagar el investigador está enmarcado en la teoría de Pirie y Kieren que considera la evolución de la comprensión matemática en ocho estratos a saber: El conocimiento primitivo, la construcción de una imagen, la comprensión de la imagen, la formalización, la observación, la estructuración, y por último, la intervención. Resalta entre las conclusiones que el uso de software dinamiza el estudio de fenómenos de cambio al mismo tiempo que se involucran diferentes representaciones (cinemáticas, cartesiana, numérica, geométrica) siempre y cuando la exploración del potencial de los computadores no recaiga en un uso anticuado. De este trabajo retomaremos algunas actividades que tienen por objetivo la noción de cociente de incrementos y su representación gráfica con el fin de adecuarlas a nuestro medio a-didáctico.

Rendón (2009) elabora una investigación para realizar una descripción y análisis a una propuesta, que busca cargar de significado conceptual y contextual, la razón de cambio, esto a partir de los fundamentos de la Enseñanza para la Comprensión (EpC). Se asume esta metodología, ya que su flexibilidad para establecer relaciones entre un campo específico y el contexto es bastante amplia, lo que la convierte en un recurso que cambia las perspectivas del proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Uno de los tópicos generativos definidos en la propuesta metodológica del trabajo es ¿cómo se puede realizar la medición de un cambio? En general, no hay claridad sobre el procedimiento algorítmico que hay inmerso en el hecho de determinar la variación ocurrida en cualquier situación de la vida, estableciendo diferencias entre el resultado final e inicial de un suceso se pretende llegar a comprender como medirlo. Mediante el contraste entre los test (pre-test y post-test) se concluye

que las actividades realizadas durante la investigación posibilitaron la percepción de cambios con respecto a la verbalización, la conceptualización y la solución de problemas planteados con relación al concepto de derivada. Las tareas realizadas por los estudiantes los convierten en protagonistas de la construcción del saber donde se disminuye la algoritmia en beneficio de la interpretación y el análisis.

Compartimos con la autora la idea de diferencias como estrategia para medir el cambio de una variable que luego inducirá al cociente de estas diferencias como el concepto de razón de cambio, será entonces esta una idea inicial para programar en nuestro medio a-didáctico.

Cortés y Guerrero (2012) presentan una línea de investigación enfocada en el uso de programas de cómputo para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, para esto diseñan un software basado en los lenguajes de programación Visual Basic y Java denominado “*Fun_Der*”. La aplicación propone tareas al estudiante que están relacionadas con las diferencias, los incrementos y las razones de incrementos junto con sus respectivas visualizaciones. La noción de diferencia es introducida mediante progresiones aritméticas que poseen diferentes niveles de dificultad para deducir la regla que genera la progresión, la introducción a los incrementos de variables se realiza por medio de un acercamiento gráfico que está relacionado con las actividades de progresiones realizadas previamente por el estudiante. Finalmente la razón de cambio se introduce mediante un acercamiento discreto donde el software se encarga de mostrar un significado gráfico obtenido a partir de cocientes de incrementos. Los autores además de destacar dentro de sus conclusiones el papel significativo de la tecnología computacional como herramienta de graficación y visualización para entender conceptos, que permite cambiar el sistema tradicional de clase por uno

que favorezca los procesos de pensamiento matemático. Actividades presentadas en este trabajo serán replicadas en el nuestro, bajo los conceptos de la teoría de las situaciones didácticas.

Hitt (2013) analiza los ejemplos que utiliza un libro de texto guía para introducir la noción y concepto de derivada, así como la manera en que los profesores se apropian de estos ejemplos para exponerlos en el aula de clase de un Colegio de enseñanza general y profesional en Québec (Canadá). Plantea a su vez que el problema de aprendizaje del cálculo diferencial ha sido reportado por diferentes investigadores en didáctica a partir de la década de 1970, problemas ligados a la intuición de procesos infinitos y al concepto de infinito matemático así como la falta de articulación entre lo visual y la resolución de problemas por parte de los estudiantes. El autor propone la inclusión del uso de la tecnología en el aula para transformar los ejemplos de los textos guías como una situación problema de contexto para los estudiantes. Por ejemplo retoma el problema clásico del lanzamiento vertical de una pelota hacia arriba en el cual se desea conocer la velocidad en un determinado instante de tiempo, que desde el texto guía es abordado de manera estática sin siquiera un dibujo que dé cuenta del fenómeno, seguido se realizan los cálculos aritméticos para hallar diferentes velocidades medias en intervalos de tiempo cada vez más pequeños, definen entonces la velocidad instantánea como un límite e introducen la notación algebraica de derivada puntual sin devolverse al contexto del problema.

El autor invita a contextualizar el problema anterior, proponiendo al estudiante realizar un video del fenómeno con el que posteriormente podrá realizar una toma de datos habiendo identificado las variables en juego, luego se hará uso de la calculadora graficadora para obtener un modelo algebraico de la forma $y = ax^2 + bx + c$, recordando en ese momento que la variable "x" representa el tiempo que la pelota tarda en subir y bajar desde su lanzamiento, y que la variable

"y" representa la altura alcanzada por la pelota para cada instante de tiempo, acordando que cuando la pelota se eleva, la velocidad se puede considerar positiva, mientras que si desciende se considerará negativa; esto es, regresar al contexto. Coincidimos con el autor en la incorporación de la tecnología computacional en el aula y en que el diseño de nuestras situaciones tendrá un enfoque de resolución de problemas que incluyen variables y magnitudes acordes a la situación que debe enfrentar el estudiante.

Flores (2013) realiza un trabajo en el cual se presentan actividades mediadas por herramientas computacionales para que futuros profesores de nivel medio superior puedan adquirir una mejor comprensión de los conceptos del cálculo y así hacerlos enseñables. Las actividades se exploran dentro de un curso de métodos de enseñanza para profesores en formación; entre los temas de cálculo que se tratan en el curso está el de la derivada donde se hace un enfoque gráfico de funciones trabajando con la herramienta *zoom* del software *Graphing Calculator* para visualizar cuáles son localmente rectas además del uso de los cocientes de incrementos para hallar aproximaciones a la función derivada. Señala en sus conclusiones que el aprendizaje que tiene los profesores del cálculo está centrado en lo procedimental y no en lo conceptual, también resalta que el tiempo dedicado en las sesiones del curso no es suficiente para reconstruir sus esquemas pero si para ser conscientes de que los cambios de estos son necesarios en aras de mejorar la enseñanza del cálculo. El medio a-didáctico que emplearemos para nuestro trabajo también posee la herramienta *zoom* y será utilizada en la programación con el fin de proporcionar acercamientos sobre objetos que ayuden a introducir la idea de derivada como un límite.

Zandieh (1997, 2000, citado en Sánchez-Matamoros et al., 2008 y Flores, 2013) realizó un extenso estudio a través de un período instruccional (9 meses, 75 clases), centrando su atención en

una muestra de nueve alumnos de cálculo para observar el proceso de construcción de significados alrededor de la derivada. Para esto se consideraron diferentes representaciones del concepto tales como la gráfica (pendiente de la recta tangente en un punto), la verbal (razón de cambio instantánea), la física (velocidad) y la simbólica (límite del cociente incremental).

El autor propone analizar la comprensión del estudiante sobre el concepto de derivada proponiendo tres niveles para su aprendizaje, el primero es el de la razón, el segundo es el del límite, y el tercero es el de función. Estos niveles aunque no son nuevos, se deben entender de manera *jerárquica* por el estudiante para lograr una comprensión avanzada. Los niveles se describen brevemente a continuación.

- **Nivel uno: razón de incrementos.** La fórmula $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se muestra a los estudiantes como la pendiente de la secante que a su vez es la pendiente de la recta entre dos puntos correspondientes. Se desea que los estudiantes sean capaces de reconocer la razón como un número específico (como un objeto) que resulta del proceso de dividir una diferencia por otra.

- **Nivel dos: el límite:** La expresión $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ es considerada como la pendiente de la tangente a una función en punto x_0 dado, haciendo énfasis en el hecho de que x_0 es un valor particular y no una variable. Para alcanzar este nivel se deben retomar las pendientes de las rectas secantes de x_0 hasta $x_0 + h$ pero tomando a h cada vez más pequeña, donde el límite de los valores de las pendientes de las secantes será la pendiente de la tangente a la curva en x_0 .

- **Nivel tres: la función:** El estudiante deberá ser capaz de calcular la derivada de una función en cualquier punto x_0 , haciéndolo gráficamente y de manera simbólica mediante el cociente de diferencias con el fin de familiarizar la representación $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, posteriormente el objetivo final de este nivel es combinar todos estos puntos en una función total $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Aunque en primera instancia el nivel uno parece contradictorio al planteamiento de Freudenthal (1983) quien afirma que obtener el cociente numéricamente hace que se pierda el estatuto de razón dado que se olvida las magnitudes que se están comparando, obtener la razón como un número también es indispensable cuando se trabaja con razones de cambio que no son constantes. Al respecto el mismo Freudenthal manifiesta:

Uno necesita imperiosamente la fracción como número, que, a propósito, puede haber surgido al aplicar un operador fracción a una unidad.

Las aplicaciones que conservan la razón no sólo sirven en las visualizaciones, sino que también tienen su propia función cognitiva como modelos,... el movimiento uniforme como una aplicación que conserva la razón de la magnitud tiempo sobre la magnitud longitud.

Nuestra investigación intentará seguir estos niveles, con mayor énfasis en los niveles uno y dos, luego no pretendemos que el estudiante deduzca las expresiones formales de la derivada. También concordaremos con Freudenthal cuando convenga realizar el cociente o no en actividades las

actividades que ilustren la conservación de la razón. Producto de reflexiones y experiencias personales de investigación a lo largo de varios años, Tall (2004) propone un marco para el desarrollo a largo plazo del cálculo y el análisis resumido en el siguiente esquema.



Figura 3. Marco conceptual para el desarrollo del cálculo

En este marco, las gráficas y la noción de la pendiente habitan el mundo conceptual personificado de objetos y sus propiedades en términos de continuidad natural y rectitud local. Los conceptos simbólicos de función y derivada yacen en un mundo de simbolismo proceptual. El cálculo elemental se desarrolla en una mezcla de los dos. (Tall, 2004).

Tall (2013) en su trabajo “Una aproximación sensible al cálculo”, propone como base las percepciones de los sentidos humanos (vista y tacto) para desarrollar un futuro cálculo teórico a partir de un cálculo práctico basándose en ideas fundamentales desde orígenes sensibles e intuitivos. Para abordar las ideas del concepto de derivada propone el uso de software que permita estudiar la recta tangente a una curva en un punto de manera perceptiva realizando aumentos significativos sobre ese punto y visualizar que localmente la curva en ese punto es un segmento de

recta, así la gráfica de una función puede *verse y sentirse* como un objeto. En el momento en que el estudiante comprende la unión entre lo visual (dinámicamente) y el simbolismo, se hace adecuado introducir la notación $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Las actividades que se plantearán en nuestro trabajo tienen un gran contenido visual que debe desencadenar acciones por parte del estudiante, consideramos así del marco propuesto por el autor, el mundo de la realización conceptual (Objetos y Propiedades) pues es este el que se basa en las percepciones y acciones humanas para desarrollar imágenes mentales que se pueden verbalizar de manera refinada convirtiéndolas en entidades matemáticas.

1.2 Situaciones didácticas e ingeniería didáctica

Cabañas, Guillén y Galeana (2004) ponen en escena situaciones didácticas con la intención de explorar sus efectos en la comprensión del concepto de número racional en estudiantes del nivel medio superior, dónde inicialmente se realiza una prueba diagnóstica a los estudiantes basada en tres cuestionarios que arrojan como resultados la falta de identificación entre los números racionales e irracionales, la incapacidad de representación en la recta numérica, la dificultad de conversión entre decimal, fracción y fracción mixta entre otros. En el desarrollo de la investigación se diseñaron seis situaciones distintas que identifican como elementos fundamentales al conocimiento, un lenguaje común establecido que propicie la enseñanza y el aprendizaje, la independencia y responsabilidad del estudiante en su propio aprendizaje a través del trabajo individual y en equipo. Concluyen que el interactuar del conocimiento, el medio y el profesor

permitió a los estudiantes formular y validar estrategias a las situaciones propuestas. Se evidenciaron también mejoras en los procesos de comunicación y argumentación. De este trabajo adoptaremos ideas con las que se puso en escena el desarrollo de las situaciones didácticas, especialmente en lo que concierne al trabajo individual y colaborativo de los estudiantes para el planteamiento y la puesta en común de soluciones.

Garay y Swears (2013) muestran un trabajo que tiene como fin modificar la enseñanza de las ecuaciones de primer grado, enseñanza que está basada en un sistema de adiestramiento del estudiante para que domine técnicas que deben seguirse para lograr resultados correctos, por una estrategia que desafía a los estudiantes a explorar, descubrir, formular, validar una matemática funcional que ayude a desarrollar el pensamiento científico. Concretamente el trabajo diseña la situación didáctica que permitirá utilizar la balanza y aplicarla en un grupo de estudiantes evaluando la efectividad de la enseñanza de las ecuaciones de primer grado, siguiendo para ello las fases propias de la Ingeniería Didáctica definidas por Yves Chevallard.

Se concluye que el hecho de utilizar balanzas para resolver ecuaciones de primer grado permite establecer relaciones entre lo concreto y la noción de equivalencia, por otra parte se fomenta el trabajo colaborativo, pues son los estudiantes quienes construyen la noción de ecuación a partir de la interacción con el medio. Tenemos en común con los autores parte de nuestro objetivo de investigación, el cual es el diseño de la situación didáctica y el uso de la ingeniería didáctica como metodología, también tendremos en cuenta el esquema que utilizan para la confrontación del análisis a priori con el análisis a posteriori. A continuación mencionaremos tres trabajos que estudian conceptos propios de la geometría euclidiana, desarrollados en el marco de las situaciones didácticas y que utilizan como medio software de geometría dinámica.

Rueda y Monroy (2009) plantean la utilización de recursos informáticos para hacer énfasis en los procesos de la construcción de los conceptos de simetría axial y traslación, elaborando y aplicando actividades diseñadas en software de Geometría dinámica que les permitan resolver situaciones problema propuestas.

En su problema de investigación desean conocer si estudiantes de cuarto grado de primaria pueden conceptualizar la simetría axial y la traslación mediante el uso de software dinámico, planteándose como objetivos la elaboración y aplicación de actividades diseñadas en Cabri II para el estudio de la traslación y la simetría axial, seguido de un análisis de las estrategias utilizadas por los niños para resolver las tareas propuestas.

El desarrollo del trabajo se realiza bajo la luz de la ingeniería didáctica para el análisis de las situaciones didácticas, diseñando trece actividades que se aplicaron en niños de cuarto grado de escolaridad. Los autores aseguran en las conclusiones que los estudiantes identificaron fenómenos visuales relacionados con las propiedades de la traslación y la simetría axial, ya que Cabri actúa como un medio que reacciona a las acciones de los estudiantes y sus retroacciones cobran sentido para ellos mismos. Bautista y Peralta (2010) diseñaron, aplicaron y evaluaron dos actividades que comprendía una serie de tareas cada una, mediadas por Cabri Elem, teniendo como propósito la conceptualización de la homotecia por parte de los estudiantes mediante el reconocimiento visual de las propiedades como una transformación afín.

Dentro de los resultados de ésta investigación se muestran que los estudiantes de sexto grado que desarrollaron las actividades, identificaron la dependencia entre objeto e imagen, al igual que la conservación de la forma, sin embargo no reconocieron la alineación de una figura, su imagen

y el centro, y el orden de éstos dependiendo del factor de homotecia. No obstante reportan que el software sí favoreció el funcionamiento de las fases a-didácticas, permitiendo así que los estudiantes consiguieran evaluar y tomar decisiones a partir de las retroacciones de Cabri Elem, durante el desarrollo de las actividades, por último se recomienda evaluar las actividades en niveles superiores al sexto grado.

Ibargüen y Realpe (2012) centran su trabajo de grado en la enseñanza y en el aprendizaje de la transformación simetría axial. Se formula la siguiente pregunta de investigación: ¿De qué manera la utilización de artefactos como el simetrizador y el software Cabri Geometry II Plus permite la conceptualización de las propiedades de la simetría axial en niños de tercero de básica primaria?; para responder a esta pregunta, se pretende determinar el papel de la complementariedad de diferentes artefactos (regla, lápiz y papel, Cabri Geometry II Plus y un simetrizador) en la conceptualización de las propiedades de la simetría axial.

Los autores se plantean como hipótesis principal que "la complementariedad de artefactos en un ambiente de aprendizaje favorece la conceptualización de las propiedades de la simetría axial"; para comprobar esta hipótesis se diseñaron e implementaron secuencias didácticas basada en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007) y desarrollada dentro del marco de la micro-ingeniería didáctica.

Aunque los trabajos comentados anteriormente no estudian el concepto de derivada, sí aportan a nuestro trabajo ideas sobre la construcción de las actividades simuladas por software. En particular hemos podido revisar y presenciar el uso de las simulaciones utilizadas en Rueda y Monroy (2009), estas aunque tienen claro el ente geométrico que se desea observar, carecen por

momentos de mecanismos de control que permitan la restricción de acciones al estudiante haciéndose necesario la intervención del profesor en el desarrollo de la situación. Queremos entonces en nuestro trabajo que las simulaciones desarrolladas cuenten con instrumentos de control evidentes para el estudiante con el propósito de disminuir la intervención del profesor hasta que llegue el momento de la institucionalización del conocimiento.

Con la literatura expuesta anteriormente, nos proponemos en nuestro trabajo articular en el diseño de las situaciones, diferentes representaciones de la derivada como razón de cambio mediadas por el uso de software interactivo, deseando minimizar la intervención del profesor en el desarrollo de las actividades a las cuales se debe enfrentar el estudiante y qué tan pertinentes son las actividades en el desarrollo del concepto.

2. Problema de investigación

Diferentes cursos de cálculo (diferencial, integral, multivariable y las ecuaciones diferenciales) que se brindan en instituciones de educación superior suponen el estudio del concepto de derivada así como el de sus diferentes aplicaciones. Es común que los profesores que orientamos dichos cursos terminemos convirtiéndolos en un recital de definiciones formales para memorizar, en algoritmos para reproducir, y en recetas algebraicas para resolver problemas; este comportamiento por parte del profesor en ocasiones es influenciado por los contenidos de los textos guías, en otras ocasiones por la responsabilidad institucional de dar cumplimiento a los contenidos curriculares, también influyen los conocimientos, la identidad y el perfil del profesor entre otros factores.

[...] el estudiante no le encuentra sentido ni significado a la matemática que se le enseña a través de algoritmos y secuenciaciones, lo cual es resultado de que el discurso matemático escolar está fuertemente anclado a los conceptos, y como consecuencia a los algoritmos y fórmulas, tratando de ofrecer a los estudiantes la exactitud y formalismo. (Parra y Cordero, 2008).

El concepto de la derivada no siempre es comprendido por los estudiantes, incluso en aquellos que constantemente hacen uso de ella en áreas afines a las matemáticas, la derivada termina convirtiéndose en un conjunto de reglas aplicadas a funciones algebraicas o fórmulas explícitas.

Los estudiantes exitosos adquieren un dominio de una serie de técnicas para derivar e integrar, y desarrollan habilidad para resolver problemas. Desafortunadamente este dominio de los procedimientos muchas veces no va acompañado de una sólida comprensión conceptual. Incluso los alumnos exitosos tienen con frecuencia problemas para explicar qué significan los conceptos de límite, derivada e integral y cómo se relacionan entre sí. (Flores, 2014).

Nuestro trabajo de investigación tiene un enfoque pragmático, en el sentido de que queremos contribuir a la comprensión del concepto de derivada visto como razón de cambio a través de actividades que permitan en el estudiante concebir ideas intuitivas, a partir de la representación numérica y la visualización mediadas por tecnología computacional. En segunda instancia, queremos corroborar si la puesta en escena de situaciones didácticas automatizadas en gran parte, fomentan el aprendizaje por adaptación del concepto de derivada como razón de cambio. A la luz

del marco teórico de las Situaciones Didácticas planteamos entonces la siguiente pregunta y objetivo para precisar nuestro problema de investigación.

2.1 Pregunta de investigación

¿Cómo diseñar situaciones a-didácticas en un software de matemática interactiva que permitan la coordinación y la conversión entre representaciones de la derivada?

2.2 Objetivo

Diseñar, aplicar y evaluar situaciones a-didácticas para favorecer el aprendizaje de la derivada como razón de cambio.

3. Marco Teórico

3.1 Teoría de las situaciones didácticas

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) desarrollada por Guy Brousseau se centra en la enseñanza de conocimientos matemáticos desde una concepción constructivista, afirmando que estos conocimientos no se construyen de manera sencilla. Al respecto, Brousseau (1986) dice:

El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.

Así pues, el conjunto de todas las relaciones establecidas explícitamente o implícitamente entre un alumno o conjunto de alumnos, un determinado medio (que involucra herramientas y conceptos a enseñar) y un sistema educativo (el maestro) que tienen como finalidad que los alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución, se denomina situación didáctica.

Una aproximación a través de las “situaciones” es finalmente la que ha tenido, sin duda, la influencia más determinante y cuyo padre fundador es G. Brousseau. Esta aproximación ha puesto a la situación de enseñanza en el corazón de la didáctica, como unidad de análisis necesaria, minimal en cierto sentido, para acceder a una comprensión del funcionamiento del alumno. G. Brousseau se sitúa claramente dentro de una perspectiva constructivista con aprendizaje por adaptación a un “medio” que aparece como problemático. No obstante, él afirma que el análisis del comportamiento del alumno y de sus adaptaciones no puede tener sentido sino a través de aquellas variables de la situación dentro de las cuales se produce ese comportamiento. (Artigue et. al., 1995)

3.1.1 Situación a-didáctica. Brousseau (2007) define una situación a-didáctica así:

Los problemas, elegidos de modo tal que el alumno pueda aceptarlos, deben lograr, por su propio movimiento, que actúe, hable, reflexione y evolucione. Entre el momento en que el

alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer... el alumno no habrá adquirido verdaderamente este conocimiento hasta no ser capaz de utilizarlo en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional. Tal situación es llamada situación a-didáctica.

Se trata entonces de que el estudiante aprenda mediante adaptación a un medio pensado y propiciado por el profesor. Tal medio debe ser fuente de contradicciones, desequilibrios, dificultades, pero también puede estar cargado de refuerzos positivos que motiven al estudiante a no abandonar el problema al cual se enfrenta. Los resultados de la adaptación del estudiante serán un conocimiento contextualizado y personal, puesto en manifiesto por sus respuestas nuevas que son la evidencia del aprendizaje.

El profesor pone en marcha una situación a-didáctica; el producto de la interacción entre el estudiante y el medio en esa situación a-didáctica es un conocimiento (personal y contextualizado); luego el profesor debe explicitar las relaciones entre el saber oficial y el conocimiento personal de los estudiantes con el fin de que no banalice ese conocimiento en la medida que no tenga con quién o qué comparar sus respuestas. Este último proceso recibe el nombre de institucionalización.

El papel del estudiante y del profesor es importante durante el desarrollo de la situación a-didáctica. Empero, nuestro trabajo pretende que el profesor se inmiscuya lo menos posible en las tareas que realizará el estudiante con el fin de evitar fenómenos que entorpezcan la actividad de enseñanza tales como el efecto Topaze y el efecto Jourdain (ver Brousseau, 1986).

3.1.2 La validación. Una de las características que define el rasgo a-didáctico de una situación es que el alumno tenga la posibilidad de decidir la validez de las acciones que realiza. Todo el ciclo de interacción de los estudiantes con el medio contribuye a satisfacer esta condición de validez. Para Brousseau (1986), las pruebas y validaciones explícitas se supone que se apoyan unas sobre otras hasta la evidencia, pero la articulación de estas no es siempre automática, los saberes y conocimientos se están actualizando en una constante actividad de búsquedas o pruebas. Esto quiere decir que no puede haber validación, si no se realizan acciones y si no se identifican e interpretan las retroacciones del medio.

Acosta (2010) resalta el concepto de validación en un entorno donde se usa el software de geometría dinámica como medio: “El sujeto valida su acción de acuerdo con la interpretación que hace de las retroacciones del medio. Esta validación puede tomar dos valores. Cuando la acción realizada le permite alcanzar su intención, la validación es positiva.”

3.1.3 La devolución. Para Brousseau (1986), el estudiante no puede resolver de un primer golpe el problema, no importa qué situación a-didáctica el maestro prepare o arregle para los fines didácticos. Luego el profesor busca devolver al estudiante una situación a-didáctica que provoque en él la interacción más independiente y fecunda posible. Las intervenciones del profesor durante una situación a-didáctica deben ser cuidadosas, puesto que podrían afectar el carácter a-didáctico de la situación. La TSD diferencia dos tipos de intervenciones, las que refuerzan el ciclo de interacción, y otras que lo interrumpen. A las intervenciones del primer tipo Brousseau las llama *devolución*.

Margolinas (2009) considera la devolución como un proceso que perdura durante toda la situación a-didáctica, donde el profesor es responsable de la relación a-didáctica del alumno con el problema. Nuestra investigación, posee un carácter empírico, por lo tanto estamos interesados en observar los procesos de validación y devolución. Para que tales procesos sean observables contemplamos el uso del software GeoGebra en el cual mediante programación Guión-script crearemos situaciones problema que apuestan a la validación y devolución de manera automatizada.

3.1.4 El medio. El medio es fundamental, puesto que el aprendizaje por adaptación está determinado por las acciones y retroacciones que este pueda ofrecer, por ende, el medio es un sistema autónomo que se ha preparado con intenciones didácticas para que el estudiante reconozca en él la objetividad de enseñar algo. Entonces el medio también debe inquietar al estudiante aportando aprendizajes que lo modifican a él.

En nuestro trabajo haremos uso de GeoGebra como un medio físico con el cual los estudiantes interactúan para lograr aprendizaje por adaptación. GeoGebra es ya un software muy conocido y difundido por ser de libre acceso, y que además de poseer una interface geométrica también posee una algebraica y numérica (hoja de cálculo), interfaces adecuadas para que el objeto matemático que deseamos abordar (la derivada) pueda ser asimilado por el estudiante. Por otra parte, existen opciones de programación (guión-script) bajo el lenguaje JAVA que permiten desencadenar una o varias acciones al momento de interactuar con algún objeto dentro de una construcción, pretendemos bajo este lenguaje de programación crear los procesos de validación y devolución implícitos en la situación a-didáctica.

Las retroacciones generadas por el software se manifestarán de manera visual en la pantalla del computador, será el caso por ejemplo de ingresar datos y operaciones entre estos para una determinada tarea con la posibilidad de que aparezcan mensajes que afirmen o refuten si los cálculos son correctos. Puede ocurrir también que mediante una acción realizada por el estudiante, la construcción diseñada con el software responda mediante una animación, un zoom, un arrastre, una colección de puntos o una gráfica.

3.2 La derivada y algunas concepciones epistemológicas

A continuación presentamos algunas definiciones formales relacionadas con el concepto de derivada.

3.2.1 Cociente incremental. Sea f una función real definida en un intervalo (a, b) , entonces para dos puntos distintos $x, c \in (a, b)$ se considera el siguiente cociente de diferencias (Purcell, 2001):

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

3.2.2 Derivada en un punto. Sea f una función real definida en un intervalo (a, b) , y supóngase $c \in (a, b)$. Diremos que f es diferenciable en c siempre que el límite exista. El límite denotado por $f'(c)$ se llama derivada de f en c (Purcell, 2001):

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

La colección de todos los límites que se pueden calcular con el método anterior define una nueva función real f' (primera derivada) donde su dominio está contenido en (a, b) .

3.2.3 Derivada en Física. La derivada de la función posición $s(t)$ de un móvil en un determinado tiempo t_0 se interpreta como la velocidad instantánea del móvil en ese tiempo (Purcell, 2001).

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

3.2.4 Interpretación geométrica de la derivada. La derivada es la tasa de cambio a la que está cambiando $f(x)$, comparada con respecto a x , luego gráficamente es la pendiente de la recta tangente a la curva en el valor x . El valor de la pendiente de la recta tangente puede aproximarse encontrando la pendiente de la secante calculada por

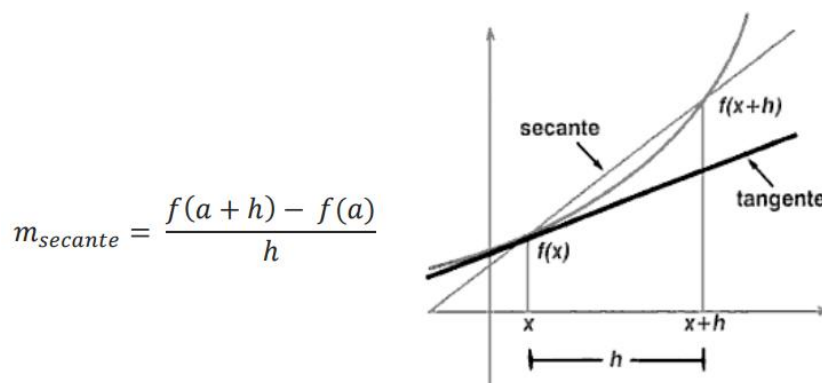


Figura 4. Aproximación geométrica de la derivada

Cuando h se hace muy pequeño, la recta secante se aproxima a la recta tangente en x (Purcell, 2001).

$$m_{tangente} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

3.2.5 Acercamiento a la derivada por Oresme. Para el caso de un cuerpo con movimiento acelerado, dibujaba una curva de velocidad contra tiempo en las que los puntos de una recta horizontal representaban los sucesivos instantes de tiempo iguales, que llamó longitudes, y para cada punto trazaba un segmento (al que llamó latitud) perpendicular a la recta horizontal, cuya longitud representaba la velocidad en ese instante.

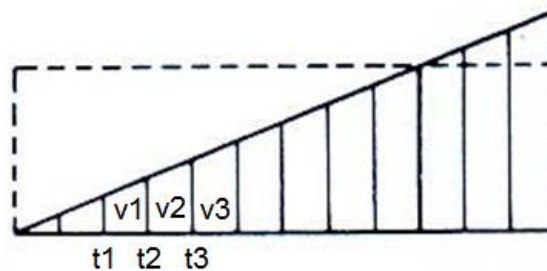


Figura 5. Aproximación geométrica de la derivada según Oresme

Para un movimiento uniformemente disforme que parte del reposo, los extremos superiores de todos esos segmentos están en una recta, y la totalidad de los segmentos velocidades cubren el área de un triángulo rectángulo. Así, caracteriza el movimiento donde la velocidad cambia en forma constante, con respecto al tiempo, como un movimiento de razón constante. (Rendón, 2009)

3.2.6 Método de la pseudo-igualdad de Fermat. Boyer (1986) describe el método que Fermat desarrolló durante 1630 para calcular la pendiente no utilizaba el concepto de límite, en su lugar empleaba un ingenioso término “e”.

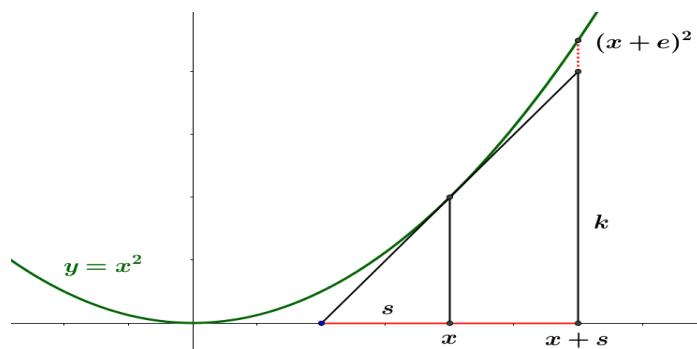


Figura 6. Representación de Fermat para aproximar una tangente

En la ilustración anterior se muestra la idea de Fermat para calcular la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en algún punto (x, x^2) .

Por semejanza de triángulos se obtiene $\frac{x^2}{s} = \frac{k}{s + e}$

Dado que k es aproximadamente igual a $(x + e)^2$ tenemos $\frac{x^2}{s} \simeq \frac{(x + e)^2}{s + e}$

Resolviendo y simplificando se obtiene $x^2 e \simeq (2xe + e^2)s$

Luego $s \simeq \frac{x^2 e}{2xe + e^2}$, dividiendo por e se obtiene $s \simeq \frac{x^2}{2x + e}$

Entonces $\frac{x^2}{s} \simeq 2x + e$

Suprimiendo e y puesto que $\frac{x^2}{s}$ es la pendiente de la recta tangente en el punto (x, x^2) , se concluye que la pendiente es $2x$.

Figura 7. Deducción de la recta tangente por Fermat

3.2.7 Triángulo característico de Barrow. Ponce (2013) muestra como Isaac Barrow describe aparentemente una modificación del método de Fermat para construir rectas tangentes a una curva definida implícitamente por $f(x, y) = 0$

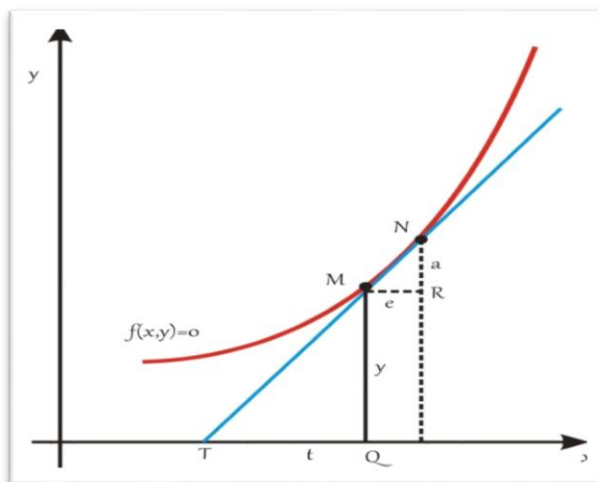


Figura 8. Triángulo característico de Barrow

Considerando un “arco indefinidamente pequeño” MN de la curva; él determina los puntos $M(x, y)$ y $N(x + e, y + a)$, y establece la igualdad $f(x, y) = f(x + e, y + a)$. Siendo M y N ambos puntos de la curva. Entonces elimina “todos los términos que contienen una potencia de a y e mayores que 1 ó productos de éstas (porque estos términos no poseen un valor significativo).”

Finalmente ignorando la distinción entre “arco indefinidamente pequeño” MN y el segmento de recta MN , hace notar la semejanza del triángulo TQM y el “triángulo característico” MRN , para resolver la ecuación $f(x, y) = f(x + e, y + a) = 0$.

Dado que se han eliminado los términos en a y e de grado superior, para la pendiente $(y/t) = (a/e)$ de la recta tangente en M . Así, Barrow emplea el concepto del “triángulo característico” (esencialmente es la idea de recta tangente como la posición límite de la línea secante cuando a y e tienden a 0) y toma el límite ignorando los “*infinitesimales de orden superior*.”

3.2.8 El cociente diferencial de Leibniz. En el trabajo de Pineda (2013) se expone cómo Leibniz trabajó para encontrar un método general que permitiera hallar la tangente a una curva, la cual consideraba como un polígono de infinitos lados. A esta curva se asocia una sucesión de abscisas $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ y una sucesión de ordenadas $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$ donde los puntos (x_i, y_i) están todos sobre la curva y son algo así como los “vértices” de la poligonal de infinitos lados que forma la curva. La diferencia entre dos valores sucesivos de x se llama el diferencial de x y se representa por dx , de manera análoga para dy . El diferencial dx es una cantidad fija, no nula, e infinitamente pequeña en comparación con x , es decir una cantidad infinitesimal. Los lados del polígono que constituye la curva son representados por ds . Resulta así el triángulo característico que ya había sido considerado por Barrow dando origen a la noción de derivada como el cociente incremental o el cociente de diferencias de una función $y = f(x)$,

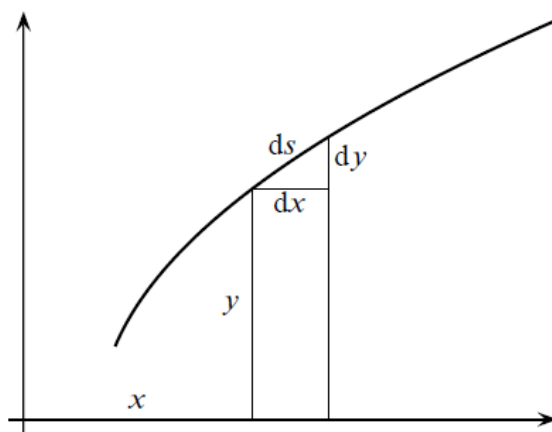


Figura 9. Triángulo característico de Leibniz

Luego el lado ds sobre la curva coincide con la recta tangente en el punto (x, y) , donde la pendiente de dicha tangente está dada por $\frac{dy}{dx}$.

3.2.9 Las fluxiones de Newton. De acuerdo con Grattan-Guinness (1984), Isaac Newton resolvió el problema de la recta tangente utilizando las componentes de la velocidad en un punto que se mueve bajo un sistema cartesiano, considerando una curva como el lugar geométrico generado por el movimiento continuo de un punto. Así las coordenadas (x, y) del punto son cantidades variables que dependen del tiempo, denomina entonces una cantidad variable como “fluente” y su tasa de cambio como “fluxión” del fluente bajo la siguiente notación:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad y \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

Figura 10. Notación de fluente

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}$$

Figura 11. Derivada de y con respecto a x

4. Sobre las Representaciones

Existe un amplio debate sobre la noción de representación por parte de diferentes exponentes en Educación Matemática. Para algunos autores se entiende por representación una señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático, también como signo o marca con el que los

sujetos piensan las matemáticas e, incluso, como aquellos esquemas o imágenes mentales con los que la mente trabaja sobre ideas matemáticas (Rico, 2009).

Se destacan (Skemp, 1980) quien asume la representación a manera de símbolos, (Kieran y Filloy, 1989) como un sistema matemático de signos, (Kaput, 1992) con sus sistemas de notación, (Duval, 1993) con el sistema de registros semióticos. Todos estos prototipos apuntan a entender de manera amplia la representación como el conjunto de herramientas sean estos signos o gráficos que muestran un concepto o procedimiento matemático.

Rico (2009) realiza un análisis acerca de lo conflictivo que es el concepto de representación a raíz de lo objetiva que pueda llegar a ser esta y a la diversidad de representaciones existentes, a todo esto, surgen interrogantes como ¿cuántos tipos de representaciones se pueden establecer? ¿Cuáles son sus principales variedades? ¿Cuándo se puede afirmar que algo representa a un concepto matemático? ¿Cuáles representaciones son más adecuadas? ¿Hay diferencias entre un modelo y una representación del mismo concepto? ¿Las hay en matemáticas?

Así como Rico (2009), no estamos interesados en realizar un estudio exhaustivo del concepto de representación, para esto hay información suficiente en los trabajos de Encarnación Castro (1995), José L. González Marí (1995), Isabel Romero (1995), Eduardo Lacasta (1995), Francisco Fernández (1997), José M. Gairín (1998) y Francisco Ruiz (2000); también en Coriat y Scaglia (2000) hay un uso extenso de estas nociones. Castro y Castro (1997) hacen un análisis conceptual detallado de esta noción, que se ha utilizado en muchos otros trabajos e investigaciones.

Para Duval (1998) los conceptos y entes matemáticos tienen la obligación de utilizar representaciones para ser comprendidos, pasando por diferentes registros representativos que puedan generar actividad matemática sobre los objetos y las propias representaciones.

(...) de una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser sino un aprendizaje conceptual y, de otra parte, es solo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo, quienes están en fase de aprendizaje podrían no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas siendo que ellos no pueden tener relación más que con las representaciones semióticas? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, diferente de cada representación semiótica, hace la confusión casi inevitable. Y, al contrario, ¿cómo pueden ellos adquirir dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifica actividad matemática con actividad conceptual y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas. (Duval, 1993, p.38)

Duval (1988), entre otros, también señala que realizar la conversión desde un sistema algebraico a uno gráfico es más sencillo que el inverso; es decir, del gráfico al algebraico. Para desarrollar esta habilidad de conversión Ruthven (1990, p. 436) diseñó una experimentación utilizando calculadoras graficadoras para explorar el reconocimiento de funciones, evidenciando que este proceso es difícil. La tarea consistía en encontrar la expresión algebraica que describiera la siguiente gráfica.

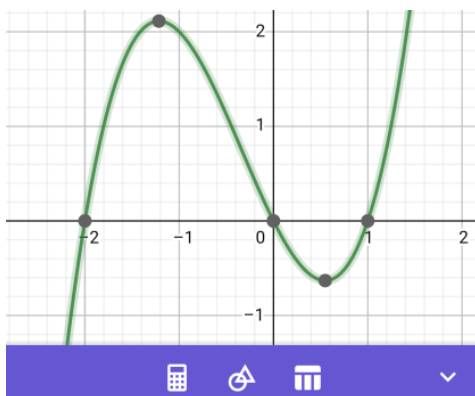


Figura 12. ¿Cuál es la representación algebraica de la gráfica?

La solución puede ser sencilla si el estudiante comprende qué es la raíz de una función y la reconoce gráficamente, por otra parte, también puede pensar en el teorema fundamental del álgebra para poder abstraer un polinomio que satisfaga los cortes con el eje X.

En torno al uso computacional y a las representaciones utilizadas en el cálculo infinitesimal, Tall (1996) considera tres tipos de representaciones: 1) “Representaciones enactivas”: son acciones humanas asociadas a la sensación de cambio, velocidad o aceleración, 2) “Representaciones numéricas y simbólicas”: son representaciones con posible manipulación manual o computacional (incluyendo la posibilidad de ser programadas por los estudiantes), 3) “Representaciones visuales”: son las que pueden ser producidas manualmente de manera aproximada o, más precisamente, con ordenadores dinámicos.

Dado que nuestro trabajo está influenciado en gran medida por el uso computacional, nuestra manera de pensar en las representaciones está más apoyada en las ideas de (Hitt, 1998) acerca de la visualización matemática, las representaciones y el uso de tecnologías, así como las de (Tall,

1998) quien sugiere la utilización de un ambiente que permita al estudiante manipular ejemplos y contra-ejemplos de un concepto matemático específico.

Mostraremos a continuación ejemplos de representaciones propuestos por Hitt (1998) y Tall (1989) en los que se hace necesario el uso de más de una representación y la respectiva coordinación entre estas, especialmente ambientadas por el uso de tecnología, advirtiendo de igual manera que depositar excesiva confianza en los paquetes computacionales puede generar un uso irreflexivo de estos y por consiguiente generar conocimientos erróneos.

En la siguiente gráfica se pide considerar si las dos gráficas se intersecan.

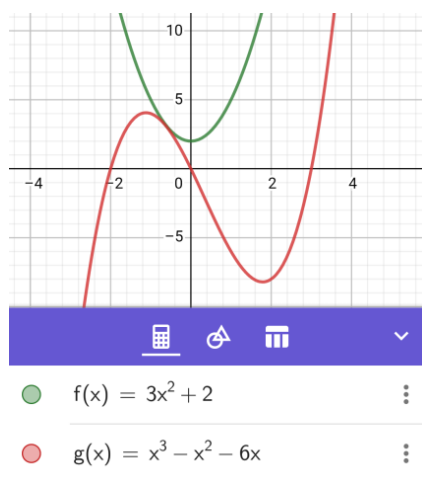


Figura 13. ¿Se intersecan las dos curvas?

En este caso, afirmar que si se intersecan es erróneo, dejarse llevar solo por la primera impresión visual y la creencia de que los resultados del software son irrefutables tiene sus consecuencias. Si el software posee la herramienta zoom se puede inspeccionar la aparente intersección para concluir que en realidad no hay ningún punto en común.

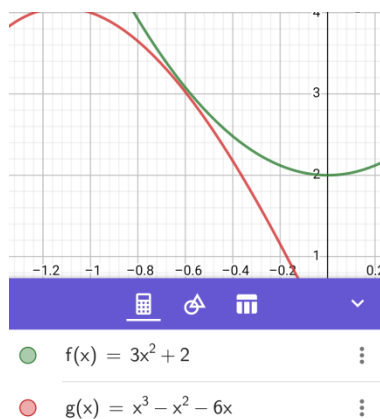


Figura 14. Zoom de acercamiento 1

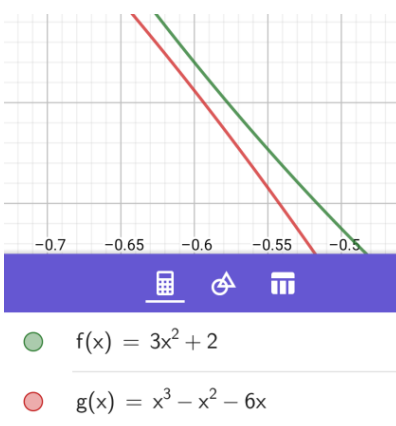


Figura 15. Zoom de acercamiento 2

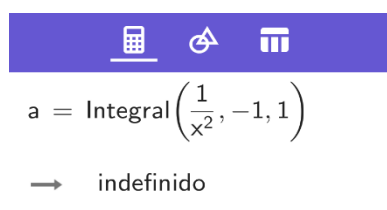
Pero, ¿qué hacer si no se posee la herramienta zoom o el dibujo es estático? ¿Cómo asegurarse de que en realidad no hay intersección? Una coordinación con la representación algebraica es una vía de solución si se resuelve la ecuación $3x^2 + 2 = x^3 - x^2 - 6x$, se obtendrá una solución real $x \approx 5.22$, con este valor nos devolvemos a la gráfica y comparamos si este valor corresponde con la supuesta coordenada en X para el punto de intersección.

Veamos ahora un ejemplo de cambio entre representaciones partiendo de lo algebraico a lo gráfico, para esto se evaluará $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ con el software DERIVE

DERIVE (versión 2.6): cálculo de $\int_{-1}^1 dx$	
1:	$\frac{1}{x^2}$
2:	$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$
3:	-2

Figura 16. Uso de Derive para integrales

La integral que se propone a evaluar es impropia pues no está definida en el punto $x = 0$ que está dentro del intervalo de integración $[-1,1]$, su solución algebraica se resuelve al final mediante el proceso de límite. Es evidente que el software no conoce estas consideraciones pues no es un objeto pensante, también es claro que el software no realiza el proceso de integración mediante reglas conocidas y luego evalúa en los límites dados. Con una versión más actual de la aplicación Geogebra (versión 2019) hemos evaluado la misma integral obteniendo el resultado indefinido.



$a = \text{Integral}\left(\frac{1}{x^2}, -1, 1\right)$
 $\rightarrow$ indefinido

Figura 17. Uso de GeoGebra para integrales 1

Ahora, no aparece el mismo error cometido por DERIVE (versión antigua), pero, ¿qué se entiende por indefinido en la integral? Puede que esto no sea suficientemente claro para un estudiante.

Graficando la función a integrar se puede observar que esta es discontinua en $x = 0$ y simétrica respecto al eje Y, así que se puede considerar plantear dos veces $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ e intentar nuevamente con Geogebra.

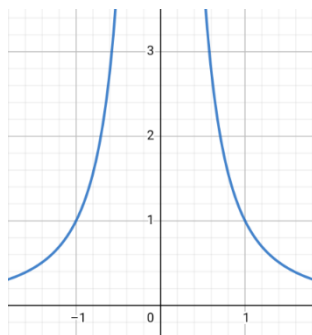


Figura 18. Grafica del integrando

La respuesta del software ahora es

$$a = \text{Integral}\left(\frac{1}{x^2}, 0, 1\right)$$

→ ?

Figura 19. Uso de GeoGebra para integrales 1

Ante la imposibilidad de evaluar en cero, y sin las herramientas de límite se puede optar por un valor “cercano” a cero, por ejemplo empezar por plantear en el software $\int_{0.001}^1 \frac{1}{x^2} dx$ y luego para $\int_{0.000001}^1 \frac{1}{x^2} dx$, así obtenemos los siguiente.

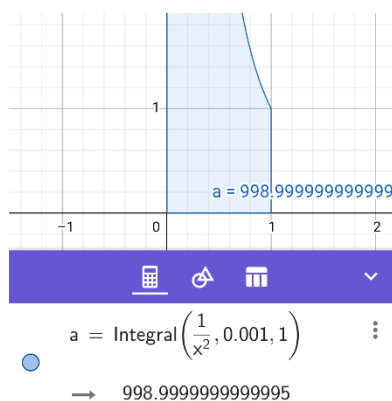


Figura 20. Aproximación a la integral impropia 1

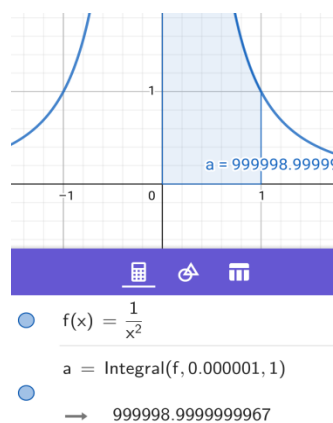


Figura 21. Aproximación a la integral impropia 2

Estos resultados deberían empezar a dar la idea de que el valor de la integral definida (el área) en el intervalo $(0,1]$ crece desmesuradamente, por lo tanto diverge.

Con estos análisis no estamos asegurando que en un estudiante ocurran este tipo de soluciones o maneras de proceder, por lo tanto, es nuestro deber crear actividades que puedan proveer herramientas que pongan en escena diferentes representaciones (por medio de retroacciones) y que mediante secuencias adecuadas (permitidas por la validación) se puedan coordinar entre si y/o permitan el cambio de un registro a otro.

Nuestra investigación está basada en la TSD y en la construcción de actividades sobre un medio computacional que pretende ser lo más eficiente y autónomo posible, aclaramos entonces que la noción de representación es para nuestro trabajo solo un aporte a la manera de construir las actividades con miras a propiciar un mejor desarrollo del concepto de derivada. Luego, nuestro trabajo tendrá en cuenta aquellas representaciones de la razón de cambio que se puedan mostrar como un valor numérico a partir de un cociente de diferencias, también como la representación en el plano coordenado de dichos cocientes de diferencias y por último la representación algebraica que los estudiantes puedan describir a partir de la generalización de estos cocientes.

5. Metodología de Investigación

Por ser nuestra investigación de corte cognitivo, se utilizará una metodología cualitativa de tipo fenomenológico-experimental ya que las experiencias del estudiante sirven como guía y refuerzo del conocimiento que se va construyendo a medida que se ve inmerso en la situación didáctica.

5.1 Población y muestra de estudio

Para lograr el objetivo de la investigación se hará un estudio de casos con dos estudiantes de primer semestre de un curso de Precálculo adscrito a la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.

La investigación tendrá como organismo metodológico la ingeniería didáctica, la cual se fundamenta en las siguientes fases a saber

Análisis preliminar: En Artigue (1995) se contemplan tres facetas desde las cuales se debe realizar el análisis preliminar: la epistemológica, la cognitiva y la didáctica; las cuales están asociadas al saber, al estudiante y al sistema de enseñanza respectivamente.

La literatura revisada previamente en los antecedentes da cuenta de las facetas consideradas anteriormente en especial cuando los autores exponen diferentes obstáculos para el aprendizaje y la enseñanza de la derivada tales como que el predominio algebraico restringe la dimensión epistemológica, la dificultad en la transición de diferentes representaciones se vincula a la dimensión cognitiva, y por último el enfoque tradicional de la enseñanza sin el uso de tecnología computacional afecta la dimensión didáctica.

Análisis a priori: La intervención del investigador sobre algunas variables implícitas en la investigación, y dada una secuencia didáctica; se pretende “precisar las posibilidades que se han seleccionado, los valores de las variables didácticas que se producen como consecuencia de esta

selección y el sentido que pueden tomar los comportamientos previstos teniendo en cuenta estos valores” (Artigue, 1995, p.12).

Artigue (1995) también considera que el análisis a priori está basado principalmente en un conjunto de hipótesis descriptivas y predictivas enfocadas en las características de la situación a-didáctica diseñada para llevar a los alumnos. Por consiguiente en esta fase se analizarán las posibles acciones, selecciones y decisiones del estudiante al interactuar con el medio preparado, así como los mecanismos de control y validación de las cuales dispondrá éste.

Experimentación: Esta fase se destaca por la aplicación de las situaciones a-didácticas diseñadas que atañen a los estudiantes, a observar sus respuestas y justificaciones durante el desarrollo de las mismas, que permitan la recolección de datos a partir del estudio de casos.

Análisis a posteriori: A partir de la base de datos recolectada en la fase de experimentación, se hace la confrontación con el análisis a priori para rechazar o confirmar hipótesis planteadas en la investigación y por otra parte determinar si se han alcanzado los objetivos trazados.

La confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori es entonces lo que constituye la validación de la ingeniería didáctica y determina los resultados de investigación (Artigue, 1995).

6. Análisis Preliminar

En esta sección describiremos las cinco actividades que deberán resolver los estudiantes, así como el planteamiento hipotético de posibles soluciones a cada actividad.

Las actividades o retos desarrollados mediante el software tienen como propósito que el estudiante reconozca la variación ya sea de una variable independiente o dependiente como una diferencia, y que a partir de estas pueda reconocer y formular el cociente de estas diferencias como una manera de resolver retos posteriores.

La construcción de cada una de las actividades está basada en procesos aleatorios para evitar que el estudiante memorice resultados en favor de que pueda generalizar la variación como una diferencia de la forma $(x_{i+1} - x_i)$ y $(y_{i+1} - y_i)$ para luego realizar el cociente o proporción entre estas diferencias $\frac{(y_{i+1}-y_i)}{(x_{i+1}-x_i)}$. Buscamos así que el estudiante se familiarice con este cociente (o uno similar) para que en posteriores actividades pueda resolver problemas que involucren la razón de cambio promedio y el infinitesimal.

Acorde a la TSD, el medio que elaboramos responde a las acciones del estudiante sobre éste mediante retroacciones que le permitan validar que se está cumpliendo con el desafío propuesto. Es decir, el estudiante no podrá avanzar en el desarrollo de las tareas si hace caso omiso a las respuestas proporcionadas por el medio ante procedimientos erróneos. En el caso de refuerzos

positivos por parte del medio a respuestas correctas o procesos coherentes, el estudiante afianzará estrategias de solución para finalizar las tareas.

Así mismo, el pronóstico de acciones que puede realizar el estudiante nos permite predecir en cierta medida las retroacciones del medio, por tanto el análisis de las retroacciones son de particular interés para nuestro trabajo, pues permiten encaminar al estudiante hacia la construcción de un conocimiento. (Pérez, 2017) en su trabajo de investigación distingue tres tipos de retroacciones:

Tipo 1: corresponden al control del funcionamiento de las secuencias de tareas.

Tipo 2: conciernen al control de las acciones

Tipo 3: retroacciones que favorecen el reconocimiento de propiedades que no son fácilmente perceptibles.

Aunque consideraremos este tipo de retroacciones por estar apoyado en el uso de software como medio, nuestro trabajo necesita de otro tipo de retroacciones ya que una de nuestras prioridades es crear actividades mediadas por el software GeoGebra que permitan múltiples retroacciones con el estudiante. Dichas retroacciones se basan en el saber matemático de la derivada y sus diferentes representaciones, así como la coordinación entre estas.

Adicional al saber matemático que necesitamos para las actividades también nos vemos en la necesidad de utilizar un saber de tipo computacional y de programación en Javascript, pues las herramientas que posee GeoGebra como lo son los botones y los menús no son suficientes para realizar múltiples tareas.

Por otra parte, las herramientas comunes del software solo permiten liberar acciones en una sola vía, por ejemplo si se utiliza la herramienta “Punto”, se crea el objeto punto sobre el plano coordenado, si queremos que este actúe o dependa de otros objetos debemos vincularlo mediante más elementos geométricos. Por lo tanto, difícilmente lograremos acciones que vayan en dos sentidos de un objeto a otro y que también realice otro tipo de tareas y representaciones aparte de la visual y geométrica.

En las actividades diseñadas para el aprendizaje de entes pertenecientes al Cálculo diferencial se sugiere la coordinación entre representaciones geométricas, numéricas y algebraicas (Hitt, 2013), lo que representa un mayor reto en la programación de las retroacciones en el software, dado que esto requiere de un cambio de registro de representación a otro y esto no se da de manera natural en el estudiante.

Como hemos mencionado, la necesidad de dotar al medio de varios tipos de retroacciones que impliquen diferentes representaciones de la derivada como una razón es posible mediante la intervención de otro saber disciplinar, como es el de la programación computacional.

Para construir las actividades nos hemos basado en la creación de los Guión- scripting los cuales son una secuencia de comandos, que son ejecutados uno tras otro bajo el lenguaje de programación JavaScript. Dentro de estos guiones hemos programado también funciones que cumplen tareas específicas, tal cual como una función de varias variables reales $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ necesita de variables independientes para dar valor a una variable dependiente, así mismo crear una retroacción R dependerá de una o varias acciones $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$ por parte de quien interactúa con el medio, luego una retroacción será una función $R = f(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$.

También hemos creado otro tipo de retroacciones que liberan varias respuestas secuenciales y/o simultáneas, es decir, ante una o varias acciones por parte del estudiante se liberan varias retroacciones $RM\{R_1, R_2, R_3, \dots, R_m\} = f(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$. A este tipo de retroacciones las denominaremos retroacciones múltiples.

6.1 Actividad 1 – reto de la tortuga

Para la primera actividad se dispone de varios niveles en los que se propone al estudiante desplazar una tortuga por un camino quebrado y continuo dispuesto en coordenadas cartesianas, para lo cual deberá valerse de una tabulación que permitirá hacer el recorrido de la tortuga. Se dispone de herramientas como botones que permiten reiniciar un nuevo recorrido de la tortuga y otros que aumentan o disminuyen la visualización del camino en caso de que aparezca apiñado o acrecentado.

En primera instancia, la tortuga no puede ser desplazada tomándola con el puntero del mouse, así que la tarea solo puede ser resuelta usando la tabla de datos XY que coincide con las coordenadas de los vértices del camino por donde transita la tortuga. Asociamos entonces una retroacción de control de acciones (Pérez, 2017) a la posible intención de mover la tortuga mediante el arrastre.

Se espera entonces que al abandonar la intención de arrastrar a la tortuga, el estudiante visualice que las distancias horizontales y verticales que debe recorrer la tortuga están asociadas con la

diferencia entre las componentes de cada coordenada mostrada en los vértices, diferencias que serán solicitadas por casillas de entrada, la cuales solo permiten ingresar primero las diferencias horizontales (sobre X) y luego las verticales (sobre Y) con el fin de que el estudiante se percate de la dependencia entre los dos desplazamientos. De ser la diferencia solicitada un acierto, el medio responderá mediante una retroacción la cual será desplazar a la tortuga, caso contrario se mostrará un mensaje en el cual se cita que la diferencia es incorrecta.

Si el estudiante desea abandonar el reto reiniciándolo con el botón (reiniciar), se generará un nuevo camino en otra posición del plano con diferentes distancias horizontales y verticales. Esta retroacción de funcionamiento (Pérez, 2017) busca que no se memoricen resultados y que a diferentes caminos distintas diferencias deberán ser calculadas, así el objetivo final será que el estudiante pueda plantear una fórmula o ley de recurrencia que le permita entender cómo se están generando los recorridos.

6.2 Actividad 2 – reto de los móviles 1

Para la actividad 2 se propone una actividad en la que dos móviles A y B deben recorrer una distancia rectilínea de 15 unidades de distancia en 15 unidades de tiempo. Uno de los móviles se mueve con rapidez constante mientras que el otro lo hace con rapidez variable, pero ambos recorren las 15 unidades de distancia en las mismas 15 unidades de tiempo.

La actividad empieza dando clic sobre un botón (inicio) que simula la carrera entre los móviles que se detienen en un tiempo aleatorio, consecuencia de esto se muestra el segmento recorrido

desde el inicio de la carrera hasta el tiempo que se detuvo. También se muestra una tabla para ser completada con los valores del tiempo y la distancia para cada una de los intervalos de tiempo generados aleatoriamente.

El objetivo primordial de la situación es determinar la velocidad media de cada móvil en cada subintervalo de tiempo, así el estudiante deberá medir el cambio en el tiempo y en la posición a través de diferencias correspondientes para luego realizar el cálculo de la velocidad promedio mediante el cociente de diferencias. Los resultados serán validados por el programa; de ser correctos los cálculos, permitirá continuar con el relleno de las casillas; en caso contrario, se habilita una retroacción en forma de mensaje que señala un cálculo mal realizado. Cabe aclarar que el estudiante no podrá forzar la carrera intentando arrastrar los móviles hasta no completar correctamente los valores de las casillas. Reiniciar la actividad tampoco le permitirá avanzar a un intervalo de tiempo posterior, si no por el contrario, generará un nuevo primer subintervalo de tiempo y distancia recorrida.

Hallada la primera velocidad media de manera correcta, el programa muestra en el plano cartesiano la pareja ordenada (tiempo, velocidad media) para cada móvil. Se espera por parte del estudiante una interpretación gráfica o numérica acerca de cuál móvil es más rápido a pesar de que para los dos móviles ha transcurrido el mismo lapso de tiempo con distancias diferentes. La validación de la interpretación se realiza respondiendo en una casilla al cuestionamiento anterior con la respectiva validación.

Si se responde correctamente el programa activa un botón (continuar), que permite retomar la carrera y generar un segundo subintervalo de tiempo y distancia posterior al primero que ya se

superó. Nuevamente se solicitará las diferencias (cambio de tiempo y posición) y velocidad media (razón de cambio entre las diferencias de distancia y tiempo), para luego graficarlas en el plano coordinado junto con el primer par representativo de la velocidad media obtenida previamente.

El proceso consta de un total de cinco iteraciones aleatorias que permiten completar la carrera siempre y cuando se responda acertadamente a los datos solicitados en las casillas. Un resultado importante es que las gráficas obtenidas de velocidades promedio son una primera aproximación a la función derivada por lo menos de forma rústica debido a los pocos datos discretos. A pesar de las pocas razones de cambio representadas gráficamente, estas dan cuenta de información importante pues se puede intuir que un móvil se está desplazando con aparente velocidad constante mientras que el otro con diferentes velocidades, y que estas velocidades no se han obtenido a partir del conocimiento de la función de posición de los móviles ni mediante fórmulas pertenecientes al área de la física o mediante reglas de derivación.

Resaltamos el hecho anterior, pues nuestro trabajo busca mejorar la comprensión de la derivada, más como una colección de razones de cambio y no como una regla algebraica o como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado, ya que estas concepciones se han mostrado como un impedimento epistemológico en diferentes investigaciones

6.3 Actividad 3 – reto de los móviles 2

La solución al problema original de la velocidad instantánea que resolvió Newton resultó de comparar el desplazamiento seguido por una partícula con la duración del intervalo de tiempo $I =$

$(t, t + Dt)$ empleado para realizar dicho desplazamiento a medida que Dt tienda a cero. En otras palabras, es la tasa de cambio infinitesimal de la posición respecto al tiempo.

Aunque Newton utilizó geometría euclidiana para resolver el problema utilizando el cálculo de pendientes de rectas secantes que se aproximaban a la pendiente de la recta tangente en un determinado punto, no se debe perder de vista de que el trasfondo de Newton siempre había sido cómo medir la velocidad instantánea y no calcular la pendiente de la recta tangente a una curva.

Con la tercera actividad queremos empezar a introducir la idea aproximada de infinitesimal de manera parecida como lo hizo Newton (tan pequeño como se desee – momentum – cantidad de movimiento) ya que el concepto formal de infinitesimal es posterior a él.

Retomaremos para este fin la base de la actividad 2, es decir la carrera entre los dos móviles y el objetivo seguirá siendo hacerlos llegar a la meta mediante la solicitud de los cálculos de los cambios de tiempo y posición para luego establecer la velocidad media. La diferencia en esta actividad radica ahora en que no se dará información del tiempo transcurrido ni el desplazamiento realizado por el móvil.

El reto comienza dando clic sobre el botón (inicio), el cual desencadena el desplazamiento de los móviles que luego se detienen en un determinado tiempo aleatorio. A primera vista no se notará ningún segmento de desplazamiento recorrido por el móvil (como si se distinguió en la actividad 2) ya que este ha sido “pequeño”. Debido a que se solicitará en las casillas los cambios de tiempo y posición para poder encontrar la velocidad media y estos no son explícitos en primera instancia, el estudiante deberá buscarlos de alguna manera.

Hemos dispuesto dos herramientas por cada móvil (botones de zoom acercar y zoom alejar), por ejemplo para el móvil A con el botón de (acercar) el programa realiza la acción de zoom sobre dicho móvil, se necesitarán varios acercamientos para percibir el segmento de desplazamiento denotado ahora por los puntos (AA, A) y para que el programa genere otra retroacción la cual será mostrar la pareja (tiempo, desplazamiento) de cada punto del segmento, proporcionado así los datos necesarios para el cálculo de la velocidad media.

En esta primera iteración el lapso de tiempo transcurrido será de una centésima de unidad de tiempo, para la iteración dos se ha dispuesto de un lapso de tiempo de una milésima, en la iteración tres de unas diez milésimas y así sucesivamente hasta una quinta iteración con lapsos de tiempo cada vez más pequeños. Por tanto el estudiante requerirá en cada momento de tiempo una mayor cantidad de acercamientos para descubrir los datos de tiempo y desplazamiento.

Cabe resaltar que si el estudiante desea dar una cantidad excesiva de zooms de manera arbitraria, estos serán realizados pero si sobrepasan una cantidad especificada dentro de la programación para cada iteración no se mostrarán las parejas (tiempo, desplazamiento) de cada punto de los segmentos de desplazamiento. Esto con el fin de evitar que el estudiante realice acercamientos solo porque sí, queremos con esta restricción que el estudiante observe que cada momento de tiempo es diferente, más pequeño, más cercano a cero. También queremos que esto se perciba con cada zoom ya que esta herramienta provoca la sensación de estar cada vez más inmerso en lo muy pequeño del desplazamiento del móvil.

6.4 Actividad 4 – reto de los móviles 3

La actividad cuatro se centrará en el móvil de velocidad variable usado en la actividad 2 y 3. El reto mantiene la misma idea de las actividades anteriores pero ahora se disponen lapsos de tiempo igualmente espaciados de una centésima que permiten generar una sucesión para el tiempo y para el espacio recorrido. Se deberá hacer progresar al móvil en el recorrido usando el cociente de diferencias para el cual se dispone ahora en una hoja de cálculo de todos los subintervalos de tiempo y desplazamiento (1500 subintervalos); también se dispone de los botones de zoom que permiten acercarse al móvil y descubrir las parejas (tiempo - desplazamiento), es decir que ahora se cuenta con información numérica y visual del desplazamiento.

Esperamos que el estudiante se dé cuenta de que para hacer llegar al móvil al final del recorrido deberá hacer 1500 cocientes de diferencias, lo cual es una tarea tediosa. Por tanto hemos dispuesto de un rompecabezas con símbolos de operaciones y términos n -ésimos de las sucesiones tiempo y distancia que permite construir la fórmula de recurrencia del cociente de diferencias. Queremos así, con esta actividad tratar de buscar una generalización para el cociente de diferencias y mostrar una aproximación a la función velocidad (derivada de la función posición).

El funcionamiento de la actividad comienza dando clic sobre el botón “inicio” para que el móvil haga un recorrido en un tiempo de 0.01 unidades, se solicitará la velocidad media a través de dos casillas correspondientes a las diferencias de tiempo - desplazamiento y una más para el cociente (velocidad media). Destacamos nuevamente las retroacciones de control implementadas en las actividades anteriores que consistían en impedir el desplazamiento del móvil mediante el arrastre, el mensaje de error de cálculo para cada casilla y la inhibición del botón “continuar” hasta no cumplir con el cálculo del cociente.

Mediante un botón se podrá validar el cociente y de ser acertado se muestra en dicha velocidad media en el plano coordenado para $t = 0$. Luego se propone deducir la ley de recurrencia mediante el rompecabezas, esta podrá ser validada por otro botón. De no ser acertada la ley de recurrencia, la programación de la actividad habilitará el botón de continuar el cual generará un recorrido para el móvil en el intervalo de tiempo 0.01 a 0.02 para el cual se solicitará nuevamente la velocidad media.

Si el rompecabezas se arma correctamente se mostrarán todas las tasas de cambio media así como la gráfica de estas tasas de cambio versus tiempo y así finalizará el reto.

El móvil de velocidad variable de las actividades 2, 3 y 4 ha sido dotado de una función de posición definida por tramos, pero continua que contiene a su vez funciones trascendentes. Aunque en primera instancia es una función complicada, el propósito de crearla de esta manera es evitar que el estudiante pueda deducir alguna curva conocida (recta o parábola) y por ende utilizar reglas algebraicas de derivación, de paso desmitificamos también que la derivada es una fórmula o regla algebraica.

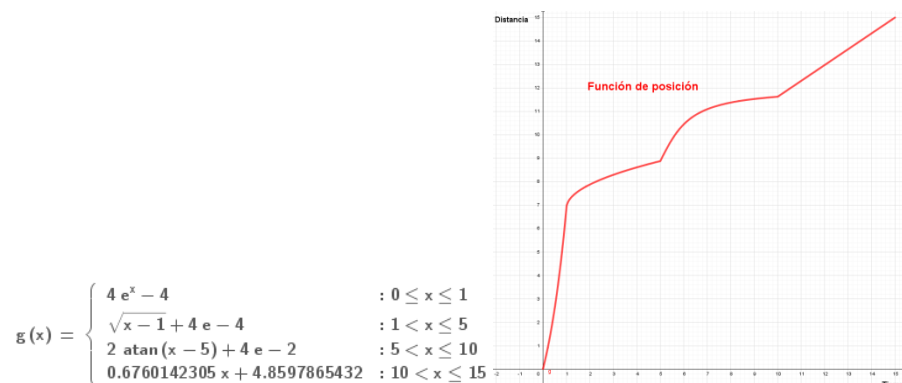


Figura 22. Función posición

Veamos ahora un contraste entre la derivada de la función posición y la aproximación a la derivada que se obtiene mediante la actividad 4

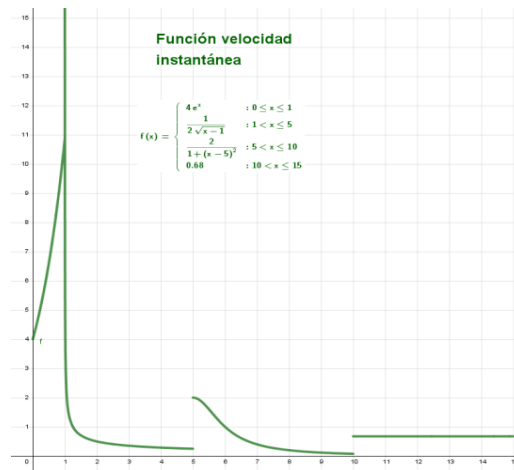


Figura 23. Aproximación discreta a la función derivada mediante tasas medias

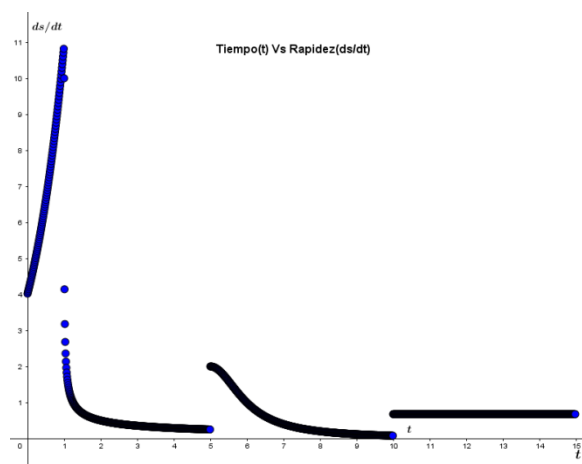


Figura 24. Aproximación discreta a la función derivada mediante tasas medias

Notamos que hay un buen parecido entre la derivada formal y la aproximación que se obtiene por medio de tasas medias propuestas en la actividad. Veamos ahora una superposición de las dos.

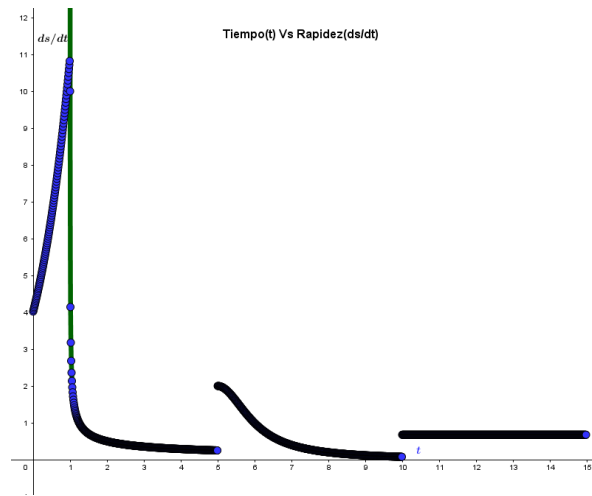


Figura 25. Contraste entre la función derivada y la aproximación por tasas medias

A primera vista parecen coincidentes, pero realizando acercamientos mediante el software observamos que no lo son. Recordemos que el objetivo de nuestra investigación es mostrar de que la derivada es la razón de cambio de una magnitud de interés, en nuestras actividades lo hacemos de manera aproximada claramente, ya que la función derivada como tal se obtiene mediante el proceso de límite. Está claro entonces que sacrificamos lo formal en aras de una mejor comprensión.

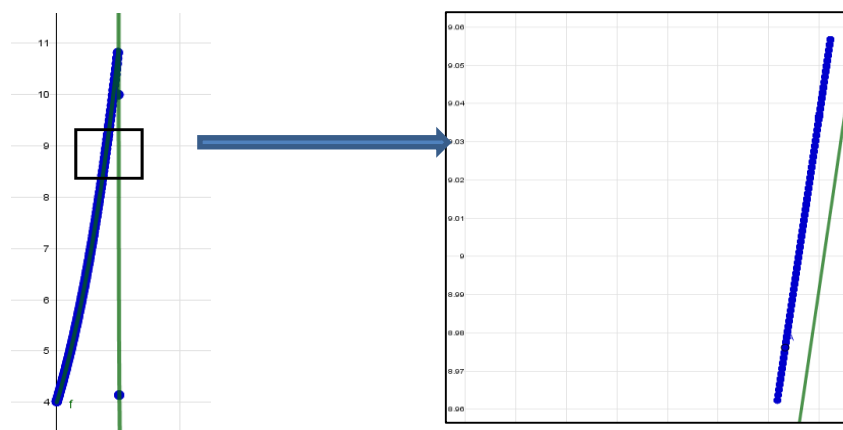


Figura 26. Zoom de contraste entre la derivada y la paroximación por tasas medias

Algo interesante de haber definido la función de posición como se hizo, es que da cuenta de que la función derivada no debe ser continua, incluso puede llegar a no existir en determinados puntos. Este es un valor agregado que puede ser retomado para posibles réplicas y abordajes de otros conceptos que implican a la derivada.

Nuestra apuesta de aproximación a la derivada mediante razones de cambio también está influenciada en la revisión epistemológica de la derivada abordada desde una rama de la matemática conocida como el Análisis Numérico (o Métodos Numéricos) desde la cual se resuelven procesos del mundo real por medio del diseño de algoritmos basados en procesos aritméticos complejos pero que con la capacidad de procesamiento del computador los cálculos se vuelven muy versátiles. Las soluciones obtenidas por esta rama casi siempre son aproximadas junto con un error admisible.

Así el concepto de derivada como razón de cambio en la rama antes mencionada cobra importancia para definir fórmulas de diferenciación numérica de alta exactitud a partir de la serie de Taylor.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{1}{2!}f''(x_i)h^2 + \dots$$

De la anterior expresión se puede despejar $f'(x_i)$ para obtener

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{1}{2!}f''(x_i)h^2 + \dots = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

Nótese que el primer cociente es la tasa media de variación mientras que $O(h)$ son los términos restantes de la serie asumidos como una estimación del error que se vuelve más pequeño si se toman más términos de la serie de Taylor. Por ejemplo si se emplea el término de la segunda derivada, sabiendo de antemano que:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

Y sustituyendo en $f'(x_i)$ se obtiene una fórmula de tres puntos para estimar la derivada en x_i

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

Supongamos que queremos aproximar $f'(2)$, si $f(x) = \sin(x)$ usando la anterior fórmula:

▷ **Fórmula de Tres Puntos:** Si $h = 0.1$ se tiene que

$$\begin{aligned} f'(2) &\approx \frac{-3f(2) + 4f(2+0.1) - f(2+2(0.1))}{2 * (0.1)} \\ &\approx \frac{-3 \times 0.909297427 + 4 \times 0.863209367 - 0.808496404}{0.2} \\ &\approx -0.417756085 \end{aligned}$$

Claramente $f'(2) = \cos(2) \approx -0.416146837$. Lo que permite calcular el error es decir, $E_{f3p} = \left| \frac{-0.416146837 - (-0.417756085)}{-0.416146837} \right| \times 100 \approx 0.38\%$

Figura 27. Desarrollo de la fórmula de tres puntos para la derivada

Por tanto, en la rama del Análisis Numérico la derivada se obtiene de manera aproximada sin utilizar reglas de derivación, lo cual es muy útil si solo se conocen datos experimentales de algún fenómeno físico. De la misma manera, quisimos con la actividad cuatro imitar el hecho de que no es necesario conocer la función de forma algebraica para obtener una aproximación a la función derivada, esta aproximación será tan buena en la medida de que los intervalos de tiempo sean muy pequeños, lo que conlleva a obtener y graficar muchas tasas de variación media que solo son posibles de representar eficientemente a través de un entorno computacional.

6.5 Actividad 5 – flujos

En esta actividad final proponemos describir el modelo gráfico de la cantidad de líquido (volumen vs tiempo) que sale de un grifo a medida que transcurre el tiempo así como la tasa de cambio (rapidez vs tiempo) asociada a este líquido. A su vez, buscamos también que el estudiante relacione un modelo algebraico en cada caso. Bajo la programación en Java-scripting hemos creado cuatro líquidos que tienen colores diferentes (naranja, rojo, verde y azul) y con salidas de volumen

diferentes, cada uno de estos volúmenes los hemos asociado a una única función constante, lineal, cuadrática o cúbica, así, el líquido naranja corresponde a un volumen con modelo constante, el rojo con un modelo lineal, el verde con un modelo cuadrático, y el azul con un modelo cúbico.

Como es habitual en las actividades anteriores, el reto comenzará dando clic sobre un botón (“Observar”), este desencadena una animación que consiste en la salida aleatoria de alguno de los líquidos a través del grifo seguido de la presentación de un deslizador automático de cinco unidades de tiempo, un botón de verificación (Continuar) y un texto con dos casillas de selección en el cual se pregunta si la salida de líquido es constante o variable, este hecho se va a detectar a raíz de que el grosor del hilo de líquido puede cambiar o no.

Luego de terminar la animación en las cinco unidades de tiempo y de seleccionar una de las casillas (opción constante o variable) se procede a verificar con el botón “Continuar”, si se selecciona la opción correcta emergerá una ventana con la leyenda “Correcto”, paso seguido la animación se reinicia volviendo a mostrar la salida del líquido pero a su vez se mostrará una “gráfica 1” que representará el volumen vs tiempo, de manera inmediata también aparecerá un texto con casillas de selección en el cuál se pregunta qué función representa la cantidad de líquido que sale en cada instante de tiempo.

Si se selecciona la respuesta correcta emergerá una ventana con la leyenda “Correcto” y se reiniciará la animación del mismo líquido pero esta vez se detendrá en un intervalo de tiempo pequeño (aproximación al infinitesimal de tiempo) y aleatorio (de la misma forma que se hizo con los móviles de la actividad 3). Una de las coordenadas (tiempo, volumen) de este intervalo se mostrará sobre la “gráfica 1” y se preguntará mediante un nuevo texto la rapidez con la que sale el líquido en ese instante. Se deberán utilizar los botones de “Acercar” y “Alejar” para descubrir la

otra coordenada (tiempo2, volumen2) y así poder calcular el cociente de diferencias, luego de realizar estos cálculos correctamente se pedirá devolver la amplificación del intervalo a la vista estándar (contador de zoom a cero) y se activará el botón de “Continuar”.

Paso seguido se preguntará mediante la aparición de un nuevo texto mediante cuatro casillas de selección ¿qué tan pequeño debe ser el intervalo de tiempo para obtener la rapidez instantánea? (habilitamos en la programación dos posibles repuestas, el valor de 10^{-20} y la tendencia a 0). Escogida alguna de las dos respuestas emergerá una ventana con la leyenda “Correcto” y la programación procederá a realizar de manera simultánea la gráfica de volumen contra tiempo y la de rapidez contra tiempo.

También aparecerá un nuevo texto preguntando por el mejor modelo de función que se ajusta a la gráfica de la rapidez del líquido mediante cuatro casillas de selección con los modelos básicos. Seleccionando la respuesta correcta emergerá la ventana con la leyenda “Correcto” y se iniciará una nueva animación con un líquido diferente al ya utilizado, el reto terminará una vez se hayan explorado los cuatro modelos de volumen y se obtengan las gráficas de rapidez de cada uno de ellos.

En el caso de responder alguna pregunta mal, siempre emergerá una ventana con la leyenda de “Incorrecto” y se sugerirá observar la animación nuevamente, pero el líquido que se animará podrá ser uno diferente y aleatorio (salvo el que ya se haya analizado correctamente) al que se utilizó para incurrir en el error. También se podrá reiniciar totalmente la actividad con el botón “Reiniciar” y se limpiarán los valores almacenados en las variables de la programación.

7. Creación de las Actividades

A continuación mostraremos en detalle cada código con los cuales se realizaron las actividades para que futuros investigadores interesados en diseñar este tipo de tareas tengan una base de partida y también para posibles mejoras en el diseño y la programación. Aclaramos que no explicamos cada línea de comando (para esto revisar la bibliografía web <http://Geogebra.es/cvg/manual/objeto/guion.html>) pero si esquematizamos el conjunto de comandos mostrados de manera dentada que cumplen cierta tarea dentro del código total.

7.1 Actividad 1 – reto de la tortuga / secuencia 3

Para la primera actividad hemos escogido presentar el diseño de la secuencia 3, ya que las secuencias 1 y 2 tienen el mismo formato de programación con la salvedad de que en la secuencia 3 las distancias que recorre la tortuga son variables.

Inicialmente debemos disponer de elementos fijos como los son los botones (Nuevo camino, Zoom Acercar, Zoom Alejar), las casillas de entrada y las tablas para las diferencias de distancias (D_x , D_y), y un punto inicial sobre el que se encuentra la tortuga.

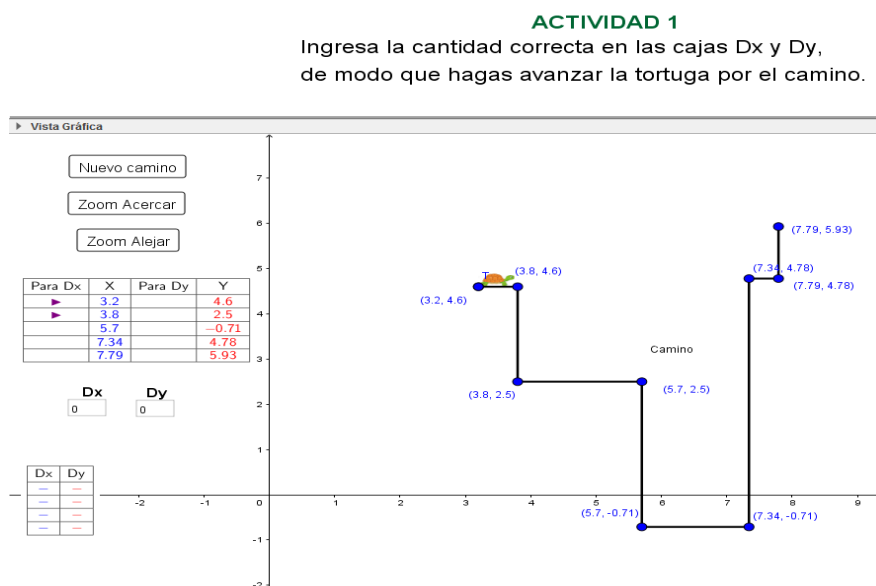


Figura 28. Objetos fijos para la Actividad 1

Paso seguido, mediante clic derecho sobre el botón “Nuevo camino” desplegamos el menú “Propiedades” y escogemos la pestaña “Programa de guión- JavaScript global”

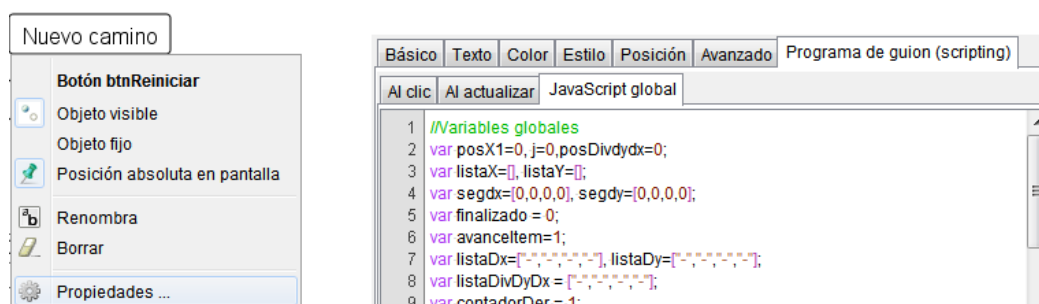


Figura 29. Ventana de programación en JavaScripting

En este espacio escribimos las líneas de programación pensadas en las tareas que deben cumplir respecto de las acciones que se hagan sobre la construcción mostrada anteriormente (Fig. 29), ver Apéndice A.

7.2 Actividad 2 - reto de los móviles 1

Para esta actividad los elementos fijos serán los botones (Reiniciar actividad, Inicio), un deslizador que representa el tiempo (t), dos automóviles (rojo, azul), dos segmentos de recta (distancias a recorrer por cada automóvil), dos tablas (tiempo y distancia recorrido por cada vehículo), las casillas de entrada (Dt , Ds), el texto y casilla de entrada para validar la pregunta (En este instante de tiempo, el vehículo más rápido es:). por último una “vista gráfica 2” que permite representar la rapidez media de cada vehículo de manera gráfica y tabular.

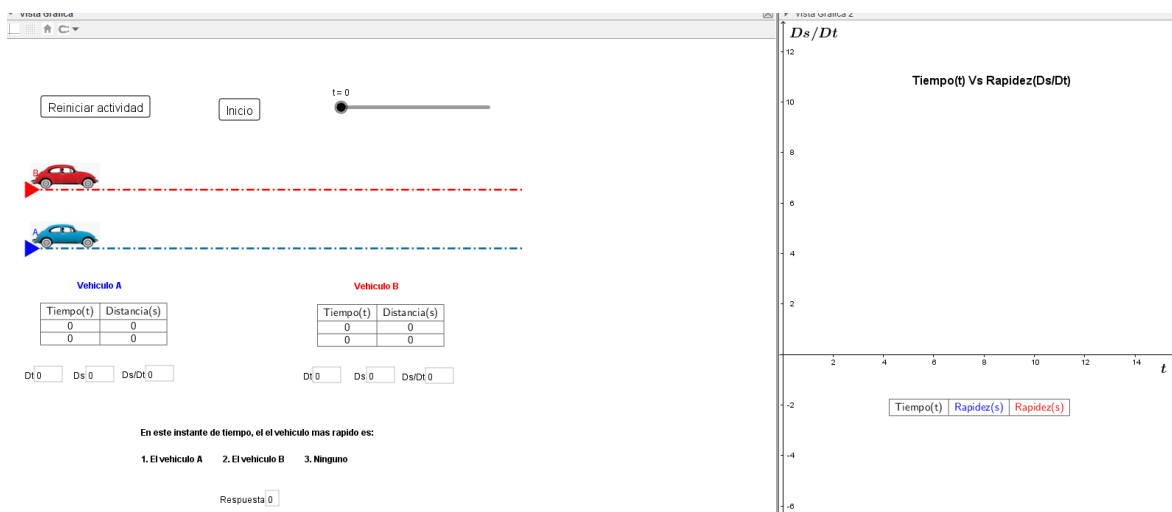


Figura 30. Objetos fijos para la Actividad 2

Mediante clic derecho sobre el botón “Inicio” desplegamos el menú “Propiedades” y escogemos la pestaña “Programa de guión- JavaScript global”. En este espacio escribimos las líneas de programación de la actividad. Ver Apendice B.

7.3 Actividad 3 – reto de los móviles 2

De la misma forma que en la actividad 2, se comparten los elementos fijos como los botones (Reiniciar actividad, Inicio), dos automóviles (rojo, azul), dos segmentos de recta (distancias a recorrer por cada automóvil), dos tablas (tiempo y distancia recorrido por cada vehículo), las casillas de entrada (D_t , D_s), el texto y casilla de entrada para validar la pregunta (En este instante de tiempo, el vehículo más rápido es:), por último una “vista gráfica 2” que permite representar la rapidez media (con tendencia a rapidez instantánea) de cada vehículo de manera gráfica y tabular.



Figura 31. Objetos fijos Actividad 3

Mediante clic derecho sobre el botón “Inicio” desplegamos el menú “Propiedades” y escogemos la pestaña “Programa de gui3n- JavaScript global”. En este espacio escribimos las l3neas de programaci3n de la actividad. Ver Apendice C.

7.4 Actividad 4 – reto de los móviles 3

La base de elementos fijos para esta actividad serán los botones (Reiniciar actividad, Acercar A, Alejar A), un automóvil (azul), un segmento de recta (distancia a recorrer por el automóvil), una tabla (tiempo y distancia recorrido por el vehículo), las casillas de entrada (t_1 , t_2 , s_1, s_2 , D_t , D_s , D_s/D_t), quince cuadrados con notación ($+$, $-$, $\times$, $\div$, s_1 , t_1 , t_n , t_{n+1} , s_n , s_{n+1}), una malla de puntos para el puzzle (Fórmula Recurrente), una “vista gráfica 2” que permite representar la rapidez media (con tendencia a rapidez instantánea) del vehículo de manera gráfica, y por último una tabulación de tiempo y espacio recorrido con su respectiva columna de rapidez media.

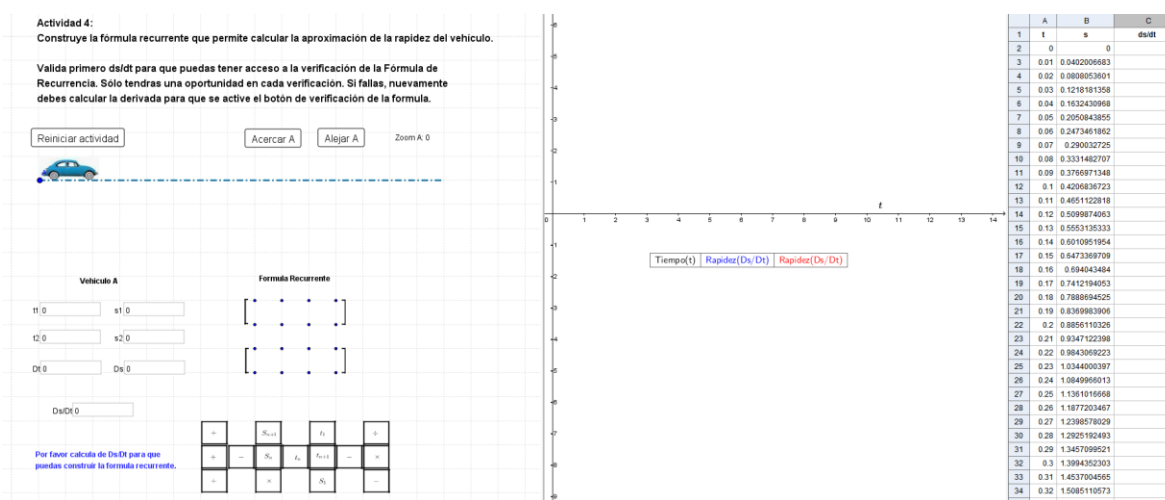


Figura 32. Objetos fijos Actividad 4

Mediante clic derecho sobre el botón “Reiniciar actividad” desplegamos el menú “Propiedades” y escogemos la pestaña “Programa de guión- JavaScript global”. En este espacio escribimos las líneas de programación de la actividad. Ver Apéndice D.

7.5. Actividad 5 – flujos

Los elementos fijos para esta actividad serán los botones (Reiniciar, Observar, Acercar, Alejar), la imagen de un grifo, las casillas de entrada (t_1 , t_2 , v_1 , v_2 , Dt , Dv , Dv/Dt), una “vista gráfica 2” que hemos complementado con la creación de otro sistema de coordenadas ya que el programa GeoGebra no dispone de una tercera vista gráfica para representar gráficamente la rapidez con la que cambia el flujo de cada líquido, y cuatro funciones ocultas (una por cada función de volumen) en la vista algebraica.

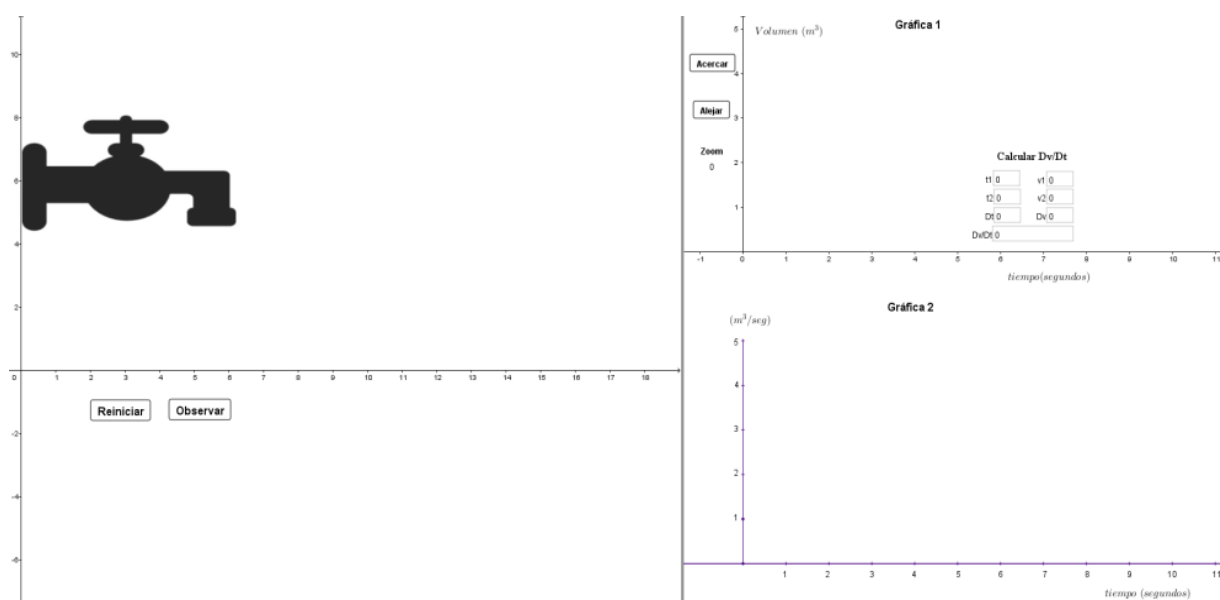


Figura 33. Objetos fijos Actividad 5

Mediante clic derecho sobre el botón “Observar” desplegamos el menú “Propiedades” y escogemos la pestaña “Programa de gui3n- JavaScript global”. En este espacio escribimos las l3neas de programaci3n de la actividad. Ver Ap3ndice E.

8. Aplicaci3n de las Actividades y An3lisis de Acciones y Retroacciones

En este capítulo contrastamos las hipótesis planteadas en el análisis a priori acerca del funcionamiento de las actividades en términos de las acciones y retroacciones, con los resultados obtenidos a partir de la experimentación con cinco de estudiantes de un curso de precálculo de la Universidad Industrial de Santander. Se conformaron dos grupos de dos estudiantes (G1 y G2) y el estudiante restante trabajó de manera individual; además estos estudiantes ya conocen ciertas herramientas del software GeoGebra como el manejo de datos en la hoja de cálculo, la creación de elementos geométricos y la escritura de funciones básicas. Escogimos el grupo G1 para evidenciar ya que fueron los que tuvieron mayores dificultades inicialmente pero también fueron más comunicativos al momento de escribir.

La recolección de los datos se realizó tomando capturas de pantalla, audio, fotografías de los estudiantes durante las prácticas en el computador y respuestas escritas a un cuestionario por cada actividad.

Recordemos que este capítulo tiene como objetivo verificar que las actividades cumplen con los procesos de acciones y retroacciones necesarias para que el estudiante adopte el cociente de diferencias como una estrategia para resolver a futuro problemas asociados a la rapidez media e instantánea (razón de cambio). Luego el uso de diferentes representaciones en las que no se prioriza de manera inmediata la representación algebraica, deben conllevar a una mejor comprensión de la derivada desde una aproximación discreta como tasa de cambio a una de tipo funcional.

Los resultados de la experimentación los exponemos mediante tablas de dos columnas. Dispondremos la primera columna para explicitar las acciones del estudiante y las diferentes retroacciones del medio (en esta columna usaremos la siguiente convención: A_i para las acciones que el estudiante realiza sobre el medio, R_i para las retroacciones de control, RM_i para las retroacciones múltiples). Si hay texto entre paréntesis (), indica que es algo que expresan verbalmente o que se aprecia en el video a través de los gestos que el estudiante realiza; en la segunda columna se mostrarán las imágenes más relevantes de acciones tomadas por los estudiantes y pantallazos del funcionamiento del medio. Indicaremos también las respuestas a las preguntas propuestas luego de finalizar cada actividad.

Cabe resaltar que los cinco estudiantes fueron capaces de resolver todos los retos propuestos, algunos tardaron más tiempo que otros, en particular con la primera actividad. Luego de esta, las soluciones fueron más fluidas.

8.1 Actividad 1

Reto 1. Una tortuga debe recorrer un camino quebrado compuesto por segmentos horizontales y verticales, de manera semejante como se ilustra en la siguiente figura.

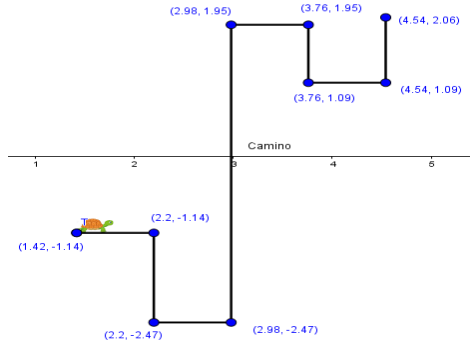


Figura 34. Ilustración 1 del Cuestionario para la actividad 1

Usa las cajas Dx y Dy para ingresar los valores de cada longitud horizontal y vertical. Utiliza las tablas o las coordenadas de los puntos para obtener información, también puedes usar los botones zoom para mejorar la visualización del camino. Una vez hayas logrado el reto, responde las siguientes preguntas.

- ¿Qué representan los valores en la tabla Dx?
- ¿Qué representan los valores en la tabla Dy?
- ¿Cómo se calculan estos valores? Escribe una expresión algebraica que represente cada cálculo.
- ¿Se puede obtener un valor Dy sin antes obtener un valor Dx?
- ¿En qué se diferencian los valores de Dx y Dy?

Reto 2. Una vez finalices el reto 1, selecciona con clic en el botón “Nuevo reto”. Aparecerá una figura semejante a la que se muestra a continuación.

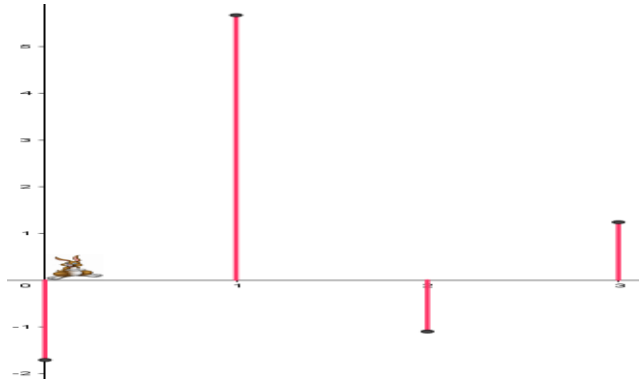


Figura 35. Ilustración 2 del Cuestionario para la actividad 1

Debes lograr que el conejo salte desde el extremo final de cada segmento (marcado con un punto) al extremo final del segmento consecutivo. Para esto, la tortuga ha dejado la tabla de valores Dx y Dy , utilízalos para realizar alguna operación que permita ingresar valores en la casilla Dy/Dx correspondientes a la longitud de cada segmento (color rojo).

- a) ¿Cómo se calculan los valores de la tabla?
- b) ¿Cómo es el comportamiento de cada resultado obtenido?
- c) Escribe una expresión algebraica que represente cada cálculo.

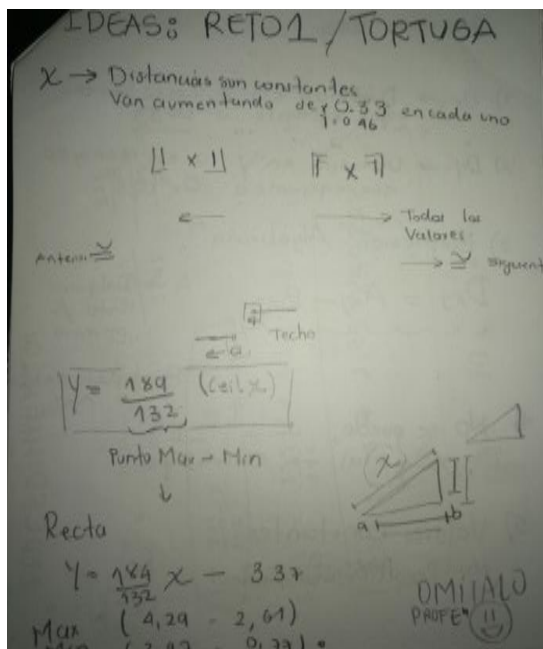
Tabla 1.

Actividad 1.

A1: Intentan arrastrar la tortuga sin éxito.
R1: Deshabilita el arrastre de la tortuga.
A2: Utilizan comandos algebraicos como la función “floor[x]” para generar la función parte entera, pero esta no coincide con el camino quebrado de la tortuga.

Inicialmente los estudiantes, aunque leen las instrucciones de la actividad hacen caso omiso e intentan construir una función que se asemeje al recorrido que debe hacer la tortuga, primero hallando la ecuación de la recta que pasa por el punto inicial hasta el punto final del camino. Luego de convencerse de que esta estrategia no funciona, intentan crear una transformación de la función parte entera que se asemeje a los segmentos horizontales del camino.

R2: La tortuga no se mueve ante comandos algebraicos.

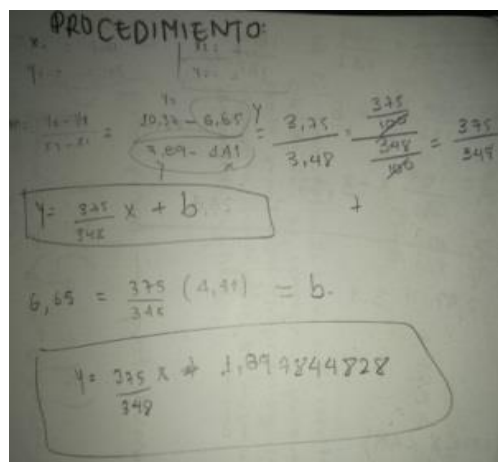


A3: Buscan crear la ecuación de una recta que pase por dos vértices del camino (desde el punto inicial hasta el punto final)

R3: La tortuga no se mueve ante comandos geométricos.

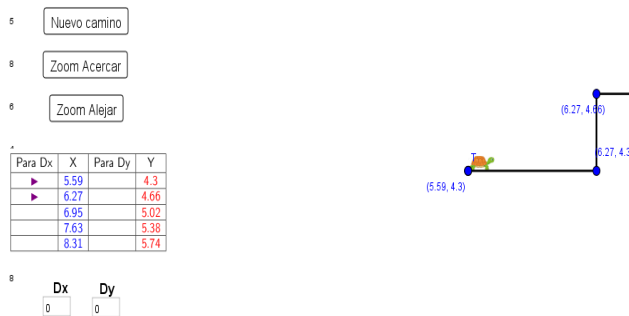
A4: Reinician la actividad con el botón “Nuevo camino”

RM1: La actividad se restaura totalmente con un nuevo camino aleatorio para la tortuga, limpia elementos algebraicos y geométricos ajenos a la programación del medio, se limpian posibles valores numéricos guardados en las cajas Dx, Dy, Dy/Dx, se muestran dos viñetas (color violeta) en las componentes de “x” para cada punto del primer segmento horizontal que debe recorrer la tortuga, se muestran las coordenadas de cada vértice del camino que debe recorrer la tortuga.



A5: Utilizan el botón “Zoom Acercar” para visualizar las coordenadas de la tortuga en el punto inicial.

R4: Se realiza un acercamiento gráfico sobre el punto en el cuál se encuentra la tortuga.



A6: Utilizan una calculadora para ingresar el valor de la diferencia entre las componentes de la coordenada “y” y la coordenada “x” del punto inicial dentro de la casilla “Dx”.

RM2: Emerge una ventana de información que indica que el valor ingresado es incorrecto, la tortuga no se desplaza, la tabla de “Dx Dy” no se actualiza ante valores incorrectos.

Para Dx X Para Dy Y

5.59	4.3
6.27	4.66
6.95	5.02
7.63	5.38
8.31	5.74

Dx Dy

-1.29	0
-------	---

GeoGebra

¡Incorrecto!

Detener el guión OK

Camino

(5.59, 4.3) (6.27, 4.66) (6.95, 5.02) (7.63, 5.38) (8.31, 5.74)

A7: Dan clic sobre “OK” en la ventana emergente e ingresan un nuevo valor, esta vez hacen la diferencia de los valores señalados por las viñetas [dándose cuenta que corresponden a las coordenadas en “x” sobre los puntos del segmento inicial] (cambio de uso de representación gráfica a numérica).

RM3: De manera simultánea, la tortuga se desplaza hasta la segunda coordenada del camino, deja un rastro de color rojo sobre el segmento horizontal recorrido, las viñetas se posicionan sobre las componentes “y” de los siguientes dos puntos consecutivos en el camino, la tabla “Dx Dy” se actualiza y guarda la diferencia consignada en el casilla “Dx”.

Para Dx X Para Dy Y

5.59	4.3
6.27	4.66
6.95	5.02
7.63	5.38
8.31	5.74

Dx Dy

0.68	0.36
------	------

Camino

(5.59, 4.3) (6.27, 4.66) (6.95, 5.02) (7.63, 5.38) (8.31, 5.74)

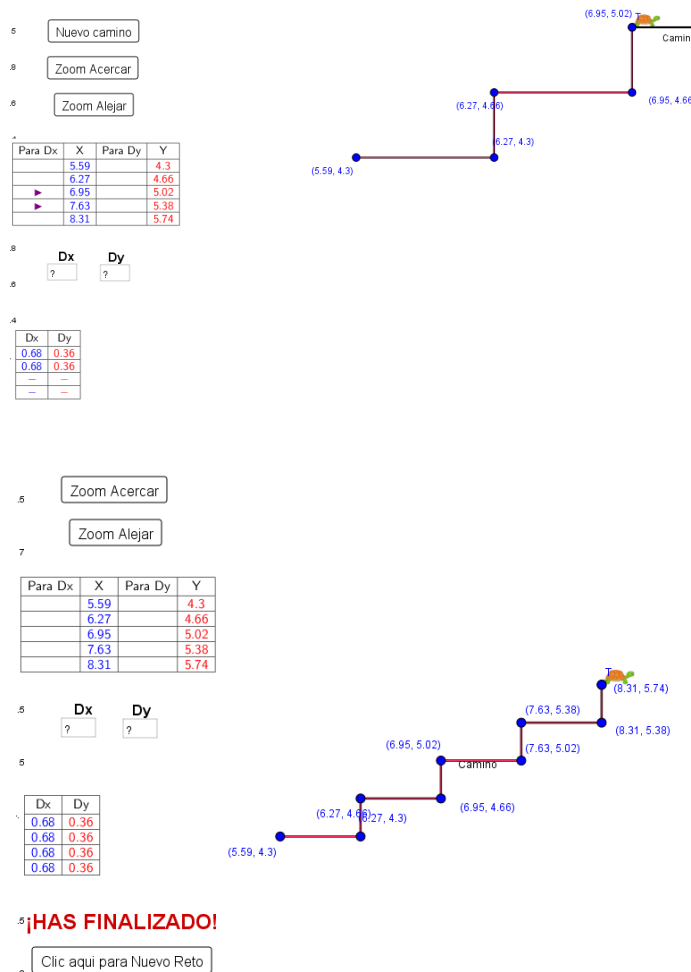
A8: Realizan con la calculadora la diferencia entre las componentes de las coordenadas “y” de los puntos correspondientes al segmento vertical que ahora debe recorrer la tortuga.

RM4: De manera simultánea, la tortuga se desplaza hasta la tercera coordenada del camino, deja un rastro de color rojo sobre el segmento vertical recorrido, las viñetas se posicionan sobre las componentes “x” de los siguientes dos puntos consecutivos en el camino, la tabla “Dx Dy” se actualiza y guarda la diferencia consignada en casilla “Dy”.

En esta instancia han descubierto una estrategia la cual es el cálculo de las diferencias entre las componentes de “x” y las componentes de “y” por cada par de puntos que componen un segmento, posteriormente no realizan las diferencias con la calculadora pues se dan cuenta con la tabla de que estas son constantes para “Dx” y para “Dy”. Por tanto no mostraremos la secuencia de retroacciones hasta el final del reto ya que son las mismas.

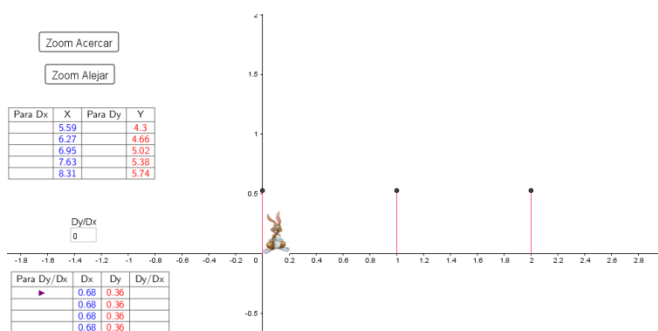
Habiendo completado el reto de llevar la tortuga hasta el final del camino, se muestra la siguiente retroacción.

R5: Aparece el mensaje “Has finalizado” junto con el botón “Clic aquí para Nuevo Reto”.



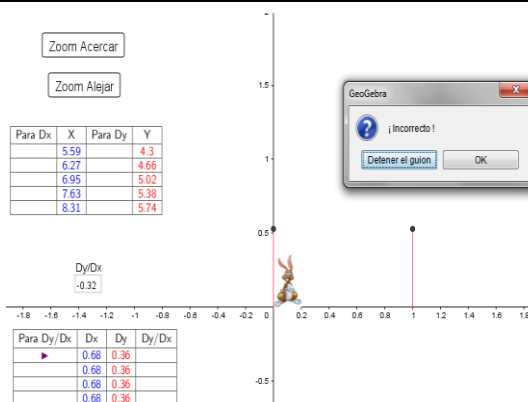
A9: Dan clic sobre el botón “Clic aquí para Nuevo Reto”.

RM5: Se almacenan los datos de la tabla “Dx Dy” de manera fija en una variable del código (esto para utilizarlas como valores iniciales del reto 2), se borra el camino de la tortuga y las casillas de entrada “Dx” y “Dy”, aparece una nueva casilla “Dx/Dy”, aparece un “conejo” sobre el origen de coordenadas, se muestran segmentos verticales ubicados en las coordenadas (n,0) con $n=0,1,2,3$ (uno para cada cociente de diferencias) cuya longitud es el valor del cociente Dy/Dx , también se muestra una tabla con los valores “Dx” y “Dy” que se obtuvieron al superar el reto de la tortuga, por último se muestra una viñeta que indica los valores a utilizar para poder desplazar al “conejo”.



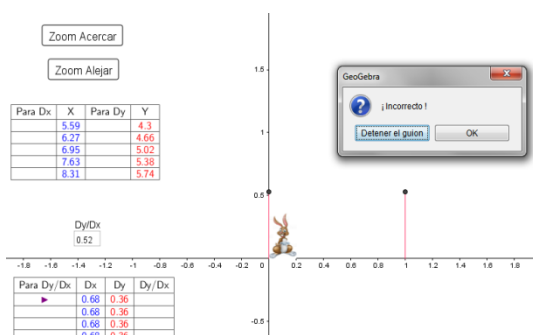
A10: Ingresan en la casilla “Dy/Dx” el valor de la diferencia Dy-Dx utilizando la calculadora.

RM6: Emerge una ventana de información que indica que el valor ingresado es incorrecto, el conejo no salta, la tabla de “Dy/Dx” no se actualiza ante valores incorrectos.



A11: Realizan el cociente Dy/Dx con los datos que aparecen en la tabla.

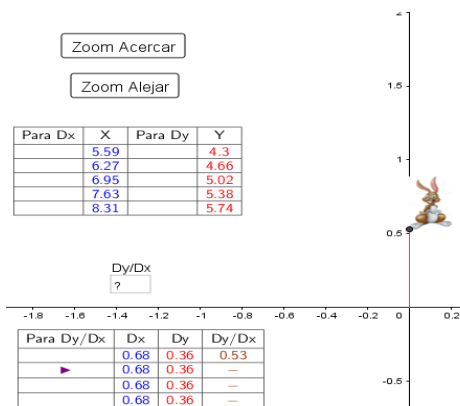
RM7: Emerge una ventana de información que indica que el valor ingresado es incorrecto, el conejo no salta, la tabla de “Dy/Dx” no se actualiza ante valores incorrectos.



I1: El profesor les indica que para este reto deben usar redondeo en el segundo decimal.

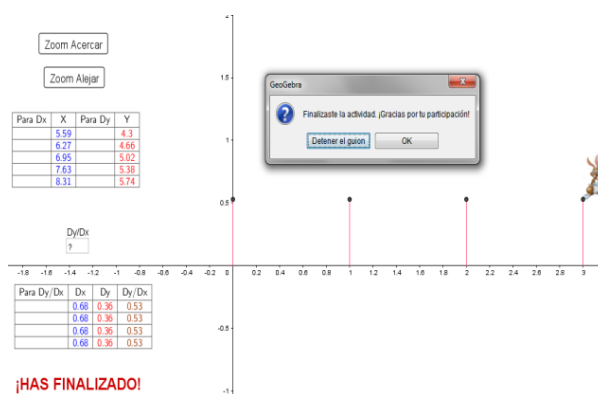
A12: Realizan nuevamente el cálculo “Dy/Dx” y redondean por exceso para este caso.

RM8: De manera simultánea, el conejo salta a la parte superior del segmento vertical donde se encuentra ubicado, la viñeta se posiciona sobre la fila de los siguientes valores “Dx” y “Dy” y guarda el cociente consignado en la casilla “Dy/Dx”.



A13: Advierten que el siguiente cociente les va a dar el mismo valor que el anterior, sin embargo utilizan la calculadora nuevamente para comprobarlo.

RM9: De manera simultánea, el conejo salta a la parte superior del siguiente segmento vertical ubicado en la coordenada (2,0), la viñeta se posiciona sobre la fila de los siguientes valores “Dx” y “Dy” y guarda el cociente consignado en la casilla “Dy/Dx”.



¡HAS FINALIZADO!

(Para los dos cocientes restantes no realizan el cálculo y se limitan a copiar el valor obtenido previamente). Así, finalizan el reto.

R6: Aparece el mensaje “Has finalizado” junto con la ventana emergente que agradece la participación del estudiante.

Los estudiantes cierran la actividad, así que decidieron volver a realizarla para responder las preguntas propuestas en el cuestionario.

Observaciones:

- Hemos omitido imágenes de algunas retroacciones en la tabla anterior debido a que estas ya se han repetido mediante acciones cíclicas de los estudiantes, por ejemplo, no mostramos repetidos mensajes de la ventana “Incorrecto” ante operaciones incorrectas por parte de los estudiantes.
- Es claro también que hubo varios intentos para obtener respuestas correctas pero solo hemos mostrado uno de esos intentos en el que haya fracaso y que evidencia que el medio responde mediante una retroacción.
- Esta actividad contenía dos secuencias adicionales, una segunda donde el camino de la tortuga contenía segmentos horizontales con longitudes constantes y segmentos verticales de longitudes variables, y una tercera donde el camino de la tortuga contenía segmentos horizontales y verticales de longitudes variables.
- Estas secuencias adicionales tienen como reto también lograr que la tortuga finalice el recorrido mediante diferencias Dx y Dy , luego utilizar estas como herramienta para lograr que el conejo salte por los segmentos horizontales que tendrán longitud Dy/Dx .

Las secuencias adicionales tomaron menos tiempo ya que se notó que el estudiante adquirió una estrategia cuidadosa para realizar cálculos.

Respuestas la cuestionario de la actividad 1 luego de finalizar el Reto 1

a) ¿Qué representan los valores en la tabla Dx ?

1) $Dx \rightarrow$ Distancia en X constante que equivale a 0.33

b) ¿Qué representan los valores en la tabla Dy ?

2) $Dy \rightarrow$ Distancia en Y o el recorrido que equivale a 0.46

c) ¿Cómo se calculan estos valores? Escribe una expresión algebraica que represente cada cálculo.

3) Expresión Algebraica.
 $Dx_j = A_{xj} - B_{xj}$
 $A \rightarrow$ Cualquier Punto $\neq$ primero
 $B \rightarrow$ Punto Anterior A_{xj}

d) ¿Se puede obtener un valor Dy sin antes obtener un valor Dx ?

4) No se puede,
 $Dx \rightarrow$ Mal $\rightarrow$ Error $\rightarrow Dy$

d) ¿En qué se diferencian los valores de D_x y D_y ?

5) Valores Constantes.
No Periódicos $\rightarrow$ Decimales

Respuestas a las preguntas del RETO 2

a) ¿Cómo se calculan los valores de la tabla?

a). RESPUESTAS.

$$\frac{D_y}{D_x} = \frac{0.55}{0.46} = 1.1956 \approx 1.2$$

b) ¿Cómo es el comportamiento de cada resultado obtenido?

b). El comportamiento de cada resultado obtenido es constante, porque de un punto final a otro final del siguiente segmento, los separa las mismas distancias, y tienen la misma h .

c) Escribe una expresión algebraica que represente cada cálculo.

c). (punto final - punto inicial)

$$D_x = 1.2 (p_F - p_i)$$

Conclusión de la actividad: A partir de las repuestas proporcionadas por los estudiantes luego de realizar la actividad, observamos los siguientes resultados.

- La manera de medir distancias (que para posteriores actividades medirá el cambio de una variable) se realiza mediante diferencias, y son capaces de proponer una generalización de estas diferencias.
- Se nota que hay claridad en la dependencia de cada una de las variables.
- Son capaces de identificar el comportamiento del resultado de cada diferencia (constante o variable).
- Proponen una expresión algebraica para el cociente de diferencias.

8.2 Actividad 2

Abre el archivo “T2”, da clic sobre el botón inicio y observa atentamente la animación. Debes lograr que los dos móviles completen el recorrido total, para esto, ayúdate con la información que se da en las tablas indicadas para cada vehículo y completa las casillas de entrada con los valores correctos.

OBSERVACIÓN: Para ingresar los valores calculados en las correspondientes casillas debes usar dos cifras decimales con redondeo. Luego de completar el reto responde:

- a) ¿Qué representan los segmentos negros que aparecen sobre el recorrido de los vehículos cada vez que se realiza una animación?
- b) ¿Son estos segmentos idénticos con cada animación?
- c) ¿Qué representan los valores en la casilla D_t ?
- d) ¿Qué representan los valores en la casilla D_s ?
- e) ¿Cómo se calculan estos valores? Escribe una expresión algebraica que represente cada cálculo.
- f) ¿Se puede obtener un valor D_s sin antes obtener un valor D_t ?
- g) ¿Qué representan los valores D_s/D_t ? Escribe una expresión algebraica que represente cada cálculo.
- h) Cada vez que se calcula correctamente un valor D_s/D_t , ¿Qué sucede en el plano cartesiano dispuesto en la ventana derecha?
- i) ¿Qué representa cada punto en el plano cartesiano?
- j) ¿Qué representa la tabla generada debajo del plano cartesiano?
- k) ¿Se puede concluir que hay un vehículo más rápido que otro? Justifica tu respuesta.

l) Según los datos graficados en el plano cartesiano y la correspondiente tabla. ¿Se puede predecir algún comportamiento en las velocidades medias de cada automóvil?

Tabla 2.

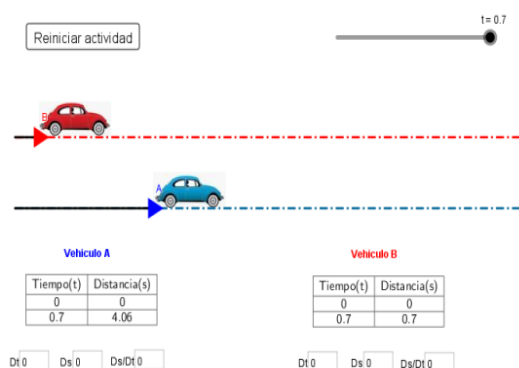
Actividad 2.

A1: Intentan arrastrar los carros, primero el rojo y luego el azul.

R1: Los autos no se pueden arrastrar.

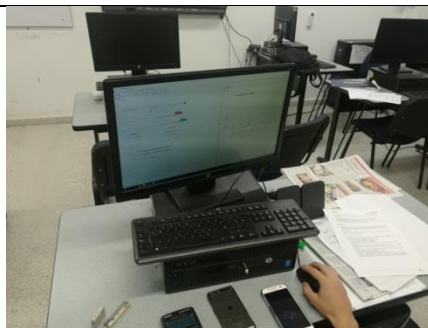
A2: Dan clic sobre el botón “Inicio” y observan.

RM1: El carro rojo y azul comienzan a desplazarse, se dibuja el recorrido de cada uno de los móviles con un segmento de color negro, se muestra en las tablas asociadas a cada móvil la distancia recorrida por cada uno en el tiempo que se detuvo la animación, se deshabilita el botón “Iniciar”.



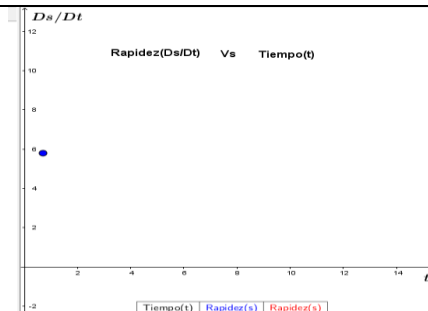
A3: Intentan arrastrar los carros nuevamente intentando hacerlos llegar hasta el final del recorrido.

R2: Deshabilita el arrastre de los dos carros.



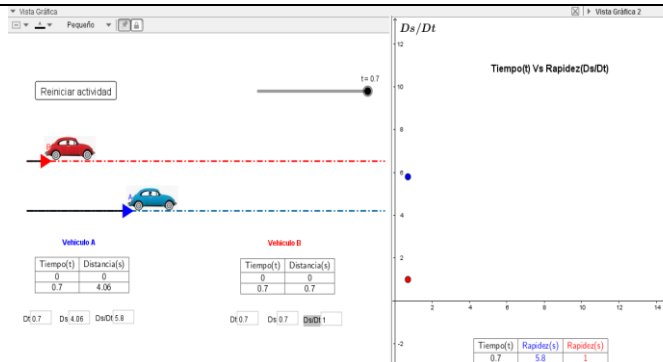
A4: Leen el cuestionario, y dicen que deben utilizar la tabla ya que estos representan los valores precisos para la velocidad, pues los cálculos se deben parecer a los que hicieron con la tortuga. Así, ingresan en la casilla Dt y Ds los valores correspondientes a la segunda línea de cada tabla (notan que hacer la diferencia con $t=0$ y $s=0$ es trivial), luego realizan el cociente para ingresar el valor en la casilla Ds/Dt.

R3: Se representa gráficamente (Vista gráfica 2) con un punto azul de coordenadas la velocidad promedio en el intervalo de tiempo para el móvil azul. (Los estudiantes No se dan cuenta de que se representa a derecha la velocidad promedio del móvil azul en el plano coordenado y proceden a ingresar los valores en las casillas correspondientes al móvil rojo).



A5: ingresan en la casilla Dt y Ds los valores correspondientes a la segunda línea de cada tabla (notan nuevamente que hacer la diferencia con $t=0$ y $s=0$ es trivial), luego realizan el cociente para ingresar el valor en la casilla Ds/Dt.

RM2: Se representa gráficamente con un punto rojo de coordenadas la velocidad promedio en el intervalo de tiempo para el móvil rojo, se comienza a tabular en la vista gráfica 2 cada una de las velocidades promedio (aproximadas para t_1) con los respectivos colores alusivos a cada móvil. (Los estudiantes continúan ignorando lo que aparece en el sistema de coordenadas y proceden a responder la pregunta dispuesta en el medio sobre cuál vehículo es más rápido).



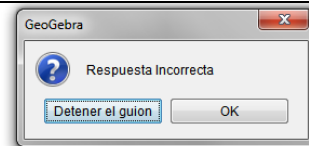
A6: Dicen que el vehículo azul es más rápido porque recorrió más distancia en el mismo tiempo que el vehículo rojo, para esto se apoyan en la imagen de los vehículos detenidos y luego lo aseguran con los valores obtenidos con el cociente Ds/Dt para cada móvil según la tabla, así Ingresan el número 2 en la casilla de “Respuesta”.

R4: Emerge una ventana de respuesta incorrecta. [Los estudiantes no se dieron cuenta que el vehículo rojo es el que estaba etiquetado con la letra B]. Dan clic sobre el botón “OK” de la ventana emergente.

En este instante de tiempo, el el vehiculo mas rapido es:

1. El vehiculo A 2. El vehiculo B 3. Ninguno

Respuesta 2



A7: Observan un momento diciendo que están seguros que el más rápido debe ser el vehículo azul, luego por descarte ingresan el valor 1 en la casilla de “Respuesta”.

RM3: Se guardan en las variables internas del código los valores correspondientes al primer intervalo de tiempo transcurrido, reaparece

En este intervalo de tiempo, el el vehiculo mas rapido es:

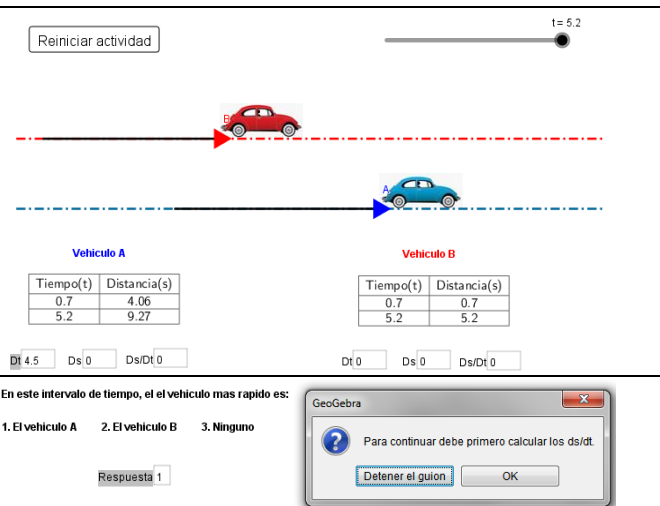
1. El vehiculo A 2. El vehiculo B 3. Ninguno

Respuesta 1

como sustituto del botón “Iniciar” el botón “Continuar”.

A8: Dan clic en el botón continuar y observan la animación.

RM4: El carro rojo y azul comienzan a desplazarse, se dibuja el recorrido de cada uno de los móviles con un segmento de color negro, el tiempo se detiene en un valor aleatorio entre t_1 (ahora fijo) y t_2 segundos, se muestra en las tablas asociadas a cada móvil la distancia recorrida por cada uno en el tiempo que se detuvo la animación, se deshabilita el botón “Continuar”.



A9: Miran los móviles y dicen que el móvil azul sigue siendo más rápido por estar delante del móvil rojo, deciden responder inmediatamente a la pregunta de cuál es el móvil más rápido, pero esta vez asocian que el vehículo A corresponde al carro azul. (Sin embargo, no están conscientes de qué se está preguntando por la rapidez en ese intervalo de tiempo). Ingresan el número 1.

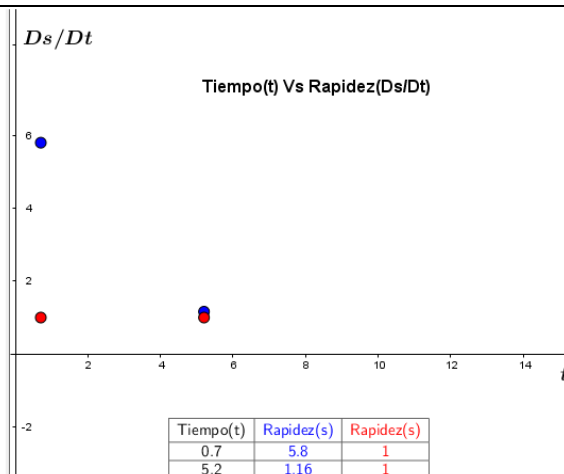
R5: Emerge una ventana que les advierte que para continuar deben realizar los cálculos para Ds/Dt . Dan clic sobre el botón “OK” de la ventana emergente.

A10: Realizan las diferencias para Ds , Dt y luego las ingresan en las casillas correspondientes, así mismo para el valor Ds/Dt pero olvidan redondear a dos cifras el cálculo.

R6: Emerge una ventana de respuesta incorrecta. (Los estudiantes no se dieron cuenta que el vehículo rojo es el que estaba etiquetado con la letra B). Dan clic sobre el botón “OK” de la ventana emergente.

A11: Realizan nuevamente el cálculo y dicen que la división está bien, luego de un momento recuerdan que hay que redondear e ingresan el valor con redondeo por exceso en este caso.

R7: Se representa gráficamente (Vista gráfica 2) con un punto azul de coordenadas la velocidad promedio en el intervalo de tiempo para el móvil azul. (Los estudiantes continúan sin prestar atención a esta representación y proceden a ingresar los valores en las casillas correspondientes al móvil rojo).



A12: Ingresan los valores correspondientes al móvil rojo utilizando la tabla correspondiente y expresan que los valores del tiempo y distancia son los mismos (haciendo alusión a las diferencias), paso seguido dicen que la división les va a dar uno y no realizan el cálculo.

RM5: Se representa gráficamente con un punto rojo de coordenadas la velocidad promedio en el intervalo de tiempo para el móvil rojo, se comienza a tabular en la vista gráfica 2 las siguientes velocidades promedio (aproximadas para t_2) con los respectivos colores alusivos a cada móvil. (Esta vez se dan cuenta de que en la vista gráfica 2 se está gestando la representación cartesiana de los valores Ds/Dt y dicen que es la gráfica de velocidad respecto al tiempo, se toman otro momento para observarla para luego dar clic en “continuar”).

Desde este momento repiten los mismos proceso de cálculos, salvo para el vehículo rojo pues ya se han dado cuenta de que para ambos móviles transcurre el mismo intervalo de tiempo y que el cociente de diferencias para el móvil rojo es 1.

Finalizada la actividad se disponen a responder el cuestionario.

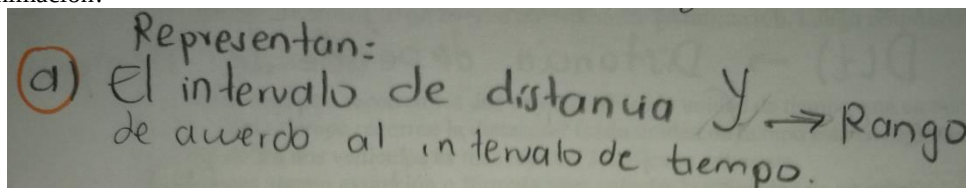


Observaciones:

- Hemos omitido imágenes de algunas retroacciones en la tabla anterior debido a que estas ya se han repetido mediante acciones cíclicas de los estudiantes, por ejemplo, no mostramos repetidos mensajes de la ventana en que se solicita calcular primero el cociente Ds/Dt para poder responder a la cuestión de cuál es el vehículo más rápido.
- También se presentaron varios intentos para obtener respuestas correctas pero solo hemos mostrado uno de esos intentos en el que haya fracaso y que evidencia que el medio responde mediante una retroacción. Así mismo para retroacciones de validación exitosa.
- En la ventana emergente de “Incorrecto” se muestra los botones con las opciones “OK” y “Detener el guión”, si se escoge la segunda opción la actividad deja de funcionar. Por defecto los mensajes de alerta en Java-scripting muestran estas dos opciones y no se pueden editar. Por lo tanto se presentaron episodios en los que la actividad dejó de funcionar debido a la selección de esta opción; el profesor tuvo que intervenir sugiriendo el reinicio de la actividad mediante el botón “Reiniciar”.

Respuestas la cuestionario de la actividad 2 luego de finalizar el Reto

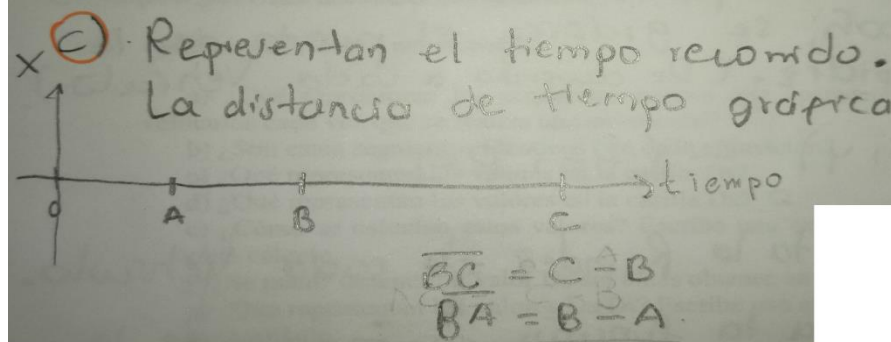
a) ¿Qué representan los segmentos negros que aparecen sobre el recorrido de los vehículos cada vez que se realiza una animación?



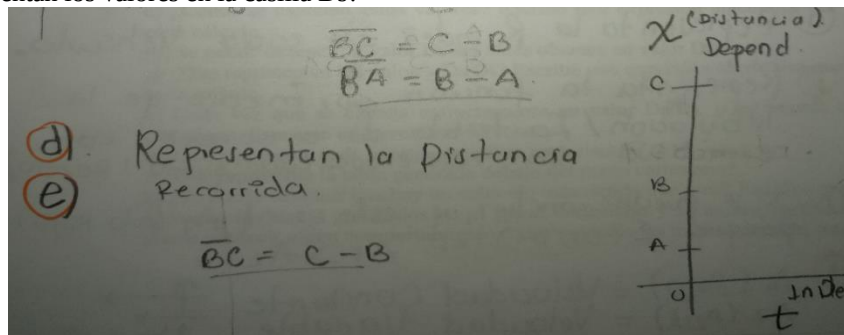
b) ¿Son estos segmentos idénticos con cada animación?

b) No,
 Porque aunque sea el mismo tiempo para A_1 y A_2 , las distancias recorridas son diferentes, determinando la Rapidez.

c) ¿Qué representan los valores en la casilla Dt?



d) ¿Qué representan los valores en la casilla Ds?



e) ¿Cómo se calculan estos valores? Escribe una expresión algebraica que represente cada cálculo.

$$BC = C - B$$

f) ¿Se puede obtener un valor Ds sin antes obtener un valor Dt?

f) No se puede, porque $D(s)$ dependen de $D(t) \rightarrow$ Distancia depende del tiempo

g) ¿Qué representan los valores Ds/Dt ? Escribe una expresión algebraica que represente cada cálculo.

g)

$$\frac{Ds}{Dt} = \text{Rapidez} = \frac{\text{tiempo (t)}}{\text{Distancia (s)}}$$

h) Cada vez que se calcula correctamente un valor Ds/Dt , ¿Qué sucede en el plano cartesiano dispuesto en la ventana derecha?

h) Cada vez que se calcula correctamente la razón, se grafica el punto de la rapidez. (De acuerdo a cada Vehículo).
 $(x, y) = (Dt, Ds)$

i) ¿Qué representa cada punto en el plano cartesiano?

i) Representa la Rapidez de cada Vehículo.

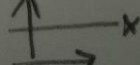
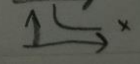
j) ¿Qué representa la tabla generada debajo del plano cartesiano?

j) Representa la función por medio de la Tabulación / La tabla da a conocer con exactitud los valores de cada punto (Punto)

k) ¿Se puede concluir que hay un vehículo más rápido que otro? Justifica tu respuesta.

k) Si se puede concluir, y éste es el A_1 (Alo Rojo) porque $\sum (Ds/Dt)$ es $A_1 > A_2$

l) Según los datos graficados en el plano cartesiano y la correspondiente tabla. ¿Se puede predecir algún comportamiento en las velocidades medias de cada automóvil?

l) A_1 (Rojo) = Velocidad Constante 
 A_2 (Azul) = Velocidad Variable 

Conclusión de la actividad: A partir de las repuestas proporcionadas por los estudiantes luego de realizar la actividad, observamos los siguientes resultados.

- Reconocen la dependencia que los pares de datos dan en la tabulación tiempo y distancia.
- Se abandonan estrategias como el uso de herramientas y escritura de expresiones algebraicas ajenas a la actividad programada.
- Por momentos sacan conclusiones de la rapidez a partir de la animación de los móviles más no de la gráfica o la representación tabular.
- Representan la variación de tiempo y distancia como una diferencia y proponen una expresión algebraica para estas, de igual manera para el cociente de diferencias como una aproximación a la rapidez.
- Asocian la representación numérica de la tabla con la gráfica como la rapidez de cada móvil.
- Se presenta confusión al momento de decidir cuál vehículo es más rápido ya que proponen la sumatoria de todos los Ds/Dt para cada móvil como un indicador concluyente.

Proponen un modelo gráfico de la rapidez para cada móvil con pocos datos para Ds/Dt .

8.3 Actividad 3.

Abre el archivo “T3”, da clic sobre el botón “inicio” y observa atentamente la animación. Debes lograr que los dos móviles completen el recorrido total, para esto obtén información con los botones “zoom” de cada vehículo y completa las casillas de entrada con los valores correctos.

OBSERVACIÓN: Para ingresar los valores calculados en las correspondientes casillas debes usar todos los decimales que se generen en la animación. Luego de completar el reto responde:

- a) Luego de realizar una cantidad de zoom adecuados ¿Qué representan los segmentos negros que aparecen sobre el recorrido de los vehículos cada vez que se realiza una animación?
- b) ¿Qué información representan las parejas sobre cada punto de los correspondientes segmentos?
- c) ¿Qué representan los valores en la casilla Dt ?
- d) ¿Qué representan los valores en la casilla Ds ?
- e) ¿Cómo se calculan estos valores? Escribe una expresión algebraica que represente cada cálculo.
- f) ¿Qué representan los valores Ds/Dt ? Escribe una expresión algebraica que represente cada cálculo.
- g) A medida que se logra el avance de cada vehículo, ¿Cómo se comportan los valores de Dt ? ¿son cada vez más grandes o más pequeños?
- h) ¿Cuántos pasos se necesitaron para completar el recorrido de los automóviles?
- i) Si se necesitaran más pasos para completar el recorrido, ¿A qué valor numérico se acercaría el valor de Dt ?
- j) ¿Qué representa cada punto en el plano cartesiano?

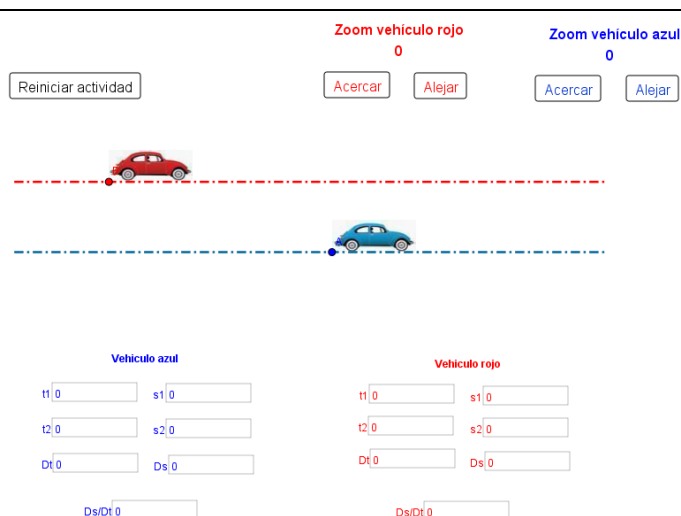
- k) ¿Qué representa la tabla generada debajo del plano cartesiano?
- l) ¿Se puede concluir que hay un vehículo más rápido que otro? Justifica tu respuesta.
- m) Según los datos graficados en el plano cartesiano y la correspondiente tabla. ¿Se puede predecir algún comportamiento en las velocidades “instantáneas” de cada automóvil?

Tabla 3.

Actividad 3.

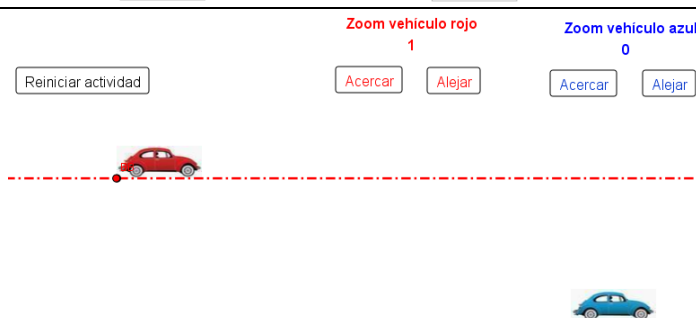
A1: Dan clic sobre el botón “Inicio” (No intentan arrastrar los móviles como en la actividad anterior).

RM1: El carro rojo y azul comienzan a desplazarse, se detienen en un intervalo pequeño y no visible de tiempo aleatorio t_1 y t_2 segundos, se activa un contador de acercamientos para el vehículo rojo.



A2: Observan por un tiempo (y se preguntan cómo llenar las casillas ya que no tienen una tabla de datos, luego de un momento uno de ellos dice: [démosle en “Acercar” a ver qué pasa]). Dan clic en “Acercar” para el vehículo rojo.

R1: Se realiza un zoom (escala 2) sobre el vehículo rojo.



A3: (Uno de ellos dice que no pasó nada, inténtelo con el otro), dan clic en “Acercar” para el vehículo azul (manifiestan que no ven nada).

I1: El profesor les recomienda que si van a hacer zoom sobre el vehículo azul deben devolver a cero el zoom del vehículo rojo.

A4: Deciden dar clic en “Reiniciar la actividad”.

R2: Los vehículos se devuelven a sus posiciones iniciales y los valores aleatorios de los intervalos se reinician a cero.

A5: Vuelven a dar clic sobre el botón “Acercar” para el vehículo rojo (esperan un momento y uno de ellos dice que dé más clics sobre el botón “Acercar”). Dan clics de manera repetida y sin pausa.

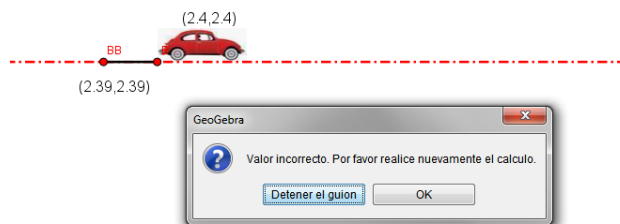
RM2: En el zoom número 6 y 7 se muestra el segmento $[BB, B]$ de espacio recorrido por el móvil, para cada uno de los extremos de este intervalo se muestra el tiempo y espacio como una pareja ordenada $BB(t_1, s_1)$ y $B(t_2, s_2)$, si no se alcanza el zoom 6 o se excede el zoom 7 no se mostrará la información en los puntos BB y B.

A6: (“Espere!, devuélvase, vi algo”, exclama uno de ellos), se detienen en el zoom número 9 y luego dan clic en el botón “Alejar” hasta el contador 7. Usan los datos del punto $BB(t_1, s_1)$ para llenar las casillas de t_1 y t_2 .

R3: Emerge una ventana de respuesta incorrecta. (Dan clic sobre “OK”).

A7: Cortan el valor ingresado en t_2 y lo pegan en la casilla s_1 . (Uno de ellos expresa que un valor es el tiempo y el otro la distancia), ingresan los valores para t_2 y s_2 usando los valores del punto B.

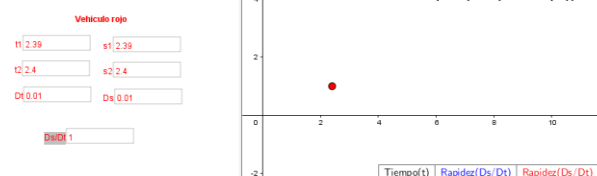
R4: Emerge una ventana de respuesta incorrecta. (Dan clic sobre “OK”). Se dan cuenta que están ingresando los valores del carro rojo para el vehículo azul.



Vehículo azul		Vehículo rojo	
t_1 2.39	s_1 0	t_1 0	s_1 0
t_2 2.39	s_2 0	t_2 0	s_2 0
Dt 0	Ds 0	Dt 0	Ds 0
Ds/Dt 0		Ds/Dt 0	

A8: Corrigen e ingresan los valores para el vehículo rojo así como el cociente Ds/Dt .

R5: Se representa gráficamente (Vista gráfica 2) con un punto rojo de coordenadas la velocidad promedio en el intervalo de tiempo para el móvil rojo.



A9: Devuelven el zoom para el carro rojo hasta cero y ahora utilizan el botón “Acercar” para el vehículo azul (esta vez tienen cuidado de no pasarse de 7 clics).

I2: Dado que el móvil azul se utilizaron diez cifras decimales, el profesor les recomienda utilizar la calculadora que trae incorporada GeoGebra “CAS” para agilizar los cálculos ya que se pueden utilizar los comandos de copiar y pegar, además del redondeo automático.



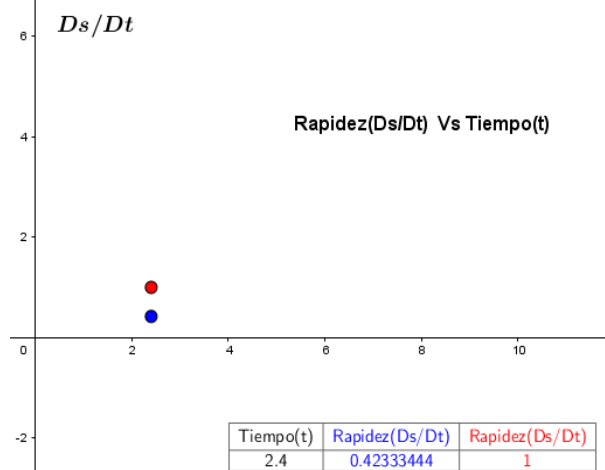
A10: Utilizan el CAS para obtener D_s y D_s/D_t .

RM3: Se representa gráficamente con un punto azul de coordenadas la velocidad promedio en el intervalo de tiempo para el móvil azul, se comienza a tabular en la vista gráfica 2 las velocidades promedio (aproximadas para t_2) con los respectivos colores alusivos a cada móvil.

1	8.0563432705-8.0521099261
2	$\frac{10583361}{2500000000}$
3	≈ 0.0042333444
4	$\frac{10583361}{2500000000}$
5	≈ 0.42333444
6	0.42333444

A11: Responden a la pregunta cuál es el vehículo más rápido en el intervalo de tiempo dado. (Para esta ocasión se les ve utilizando los puntos graficados señalando con los dedos sobre la pantalla.) Uno de ellos dice que el más rápido es el rojo porque está encima del azul (refiriéndose a la posición de los puntos en el plano coordenado). Ingresan el número 2 en la casilla de “Respuesta”.

R6: Aparece el botón “Continuar”



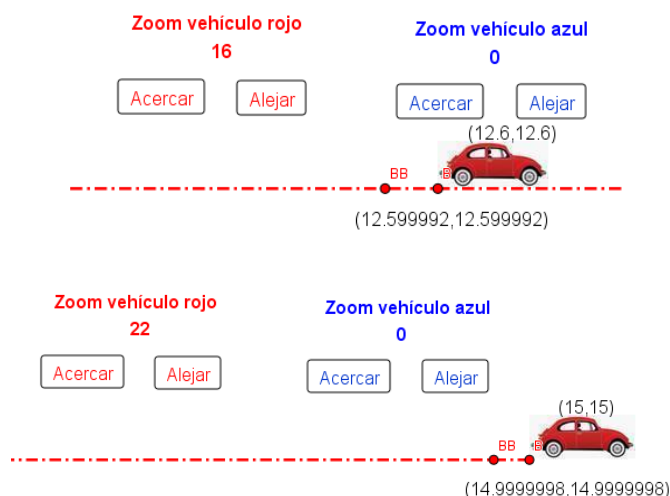
A12: Dan clic sobre el botón “Continuar”

R7: Emerge una ventana que advierte que deben devolver los valores de cada zoom de los vehículos a cero. (Dan clic sobre “OK”)

A13: Proceden a dar clic sobre el botón “Alejar” del vehículo azul hasta que el contador se pone en cero, luego dan clic sobre el botón “Continuar”.

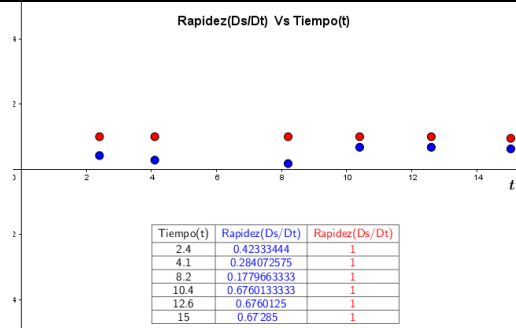
R8: Se reinicia la animación para los dos móviles, se detienen en un intervalo de tiempo aleatorio (pequeño y no visible) t_2 y t_3 segundos.

A14: Utilizan el botón “Acercar” para el vehículo rojo, se detienen en el zoom 7, luego se devuelven al zoom 6 (se detienen un momento y vuelven a dar clic hasta el zoom número 16 pero al parecer no les pareció trascendente el hecho de necesitar más acercamientos). Toman los datos del intervalo y los digitan de manera correspondiente en las casillas t_1 , s_1 , t_2 y s_2 . De manera análoga proceden para el móvil azul.



Adquirida la estrategia de solución a partir de la obtención de los datos a partir de un zoom adecuado sobre cada vehículo y realizar los cálculos correctos para las diferencias Dt , Ds y el cociente Ds/Dt finalizan el reto.

RM4: Los móviles finalizan el recorrido del segmento, se muestra en la Vista Gráfica 2 la representación gráfica de las velocidades promedio de cada intervalo analizado así como su correspondiente representación numérica.



Observaciones:

- Hemos omitido imágenes de algunas retroacciones en la tabla anterior debido a que estas ya se han repetido mediante acciones cíclicas de los estudiantes, por ejemplo, no mostramos repetidos mensajes de la ventana “Incorrecto” ante operaciones incorrectas por parte de los estudiantes.
- También se presentaron varios intentos para obtener respuestas correctas pero solo hemos mostrado uno de esos intentos en el que haya fracaso y que evidencia que el medio responde mediante una retroacción. Así mismo para retroacciones relevantes de validación exitosa.
- No se evidencian intentos de arrastre con los móviles para hacer que finalicen el recorrido como en la actividad 2.
- Hubo intervenciones por parte del profesor recordando a los estudiantes leer las instrucciones que se iban apareciendo durante la actividad, en específico para los retrocesos del contador de zoom y el uso de la calculadora CAS que trae integrado el software con el fin de dar agilidad y precisión a los cálculos.

Respuestas al cuestionario de la actividad 3 luego de finalizar el Reto

a) Luego de realizar una cantidad de zoom adecuados ¿Qué representan los segmentos negros que aparecen sobre el recorrido de los vehículos cada vez que se realiza una animación?

a). Las Distancias que recorre el vehículo de acuerdo al tiempo, y están representadas en el eje y.

b) ¿Qué información representan las parejas sobre cada punto de los correspondientes segmentos?

b) Representan el tiempo (t) y la distancia (s)
 B Final (t, s)
 BB Inicial (t, s)

c) ¿Qué representan los valores en la casilla Dt?

c) La Diferencia entre t_2 y $t_1 \rightarrow$ Intervalo de tiempo

d) ¿Qué representan los valores en la casilla Ds?

d) La Diferencia entre s_2 y $s_1 \rightarrow$ Intervalo de Distancia

e) ¿Cómo se calculan estos valores? Escribe una expresión algebraica que represente cada cálculo.

e)
 $D(t) = t_2 - t_1$
 $D(s) = s_2 - s_1$
 t_2, s_2 { Puntos Finales
 t_1, s_1 { Puntos Iniciales (Anteriores).

f) ¿Qué representan los valores Ds/Dt ? Escribe una expresión algebraica que represente cada cálculo.

f) $\frac{Ds}{Dt} \rightarrow \frac{t}{s} =$ Rapidez
 lo que representan.

g) A medida que se logra el avance de cada vehículo, ¿Cómo se comportan los valores de Dt? ¿Son cada vez más grandes o más pequeños?

g) Los valores son más grandes, pero con una cantidad mínima de un milímetro.
 $t_1 = 13,999$ $t_2 = 14$ $\rightarrow Dt = 0,001$

h) ¿Cuántos pasos se necesitaron para completar el recorrido de los automóviles?

h) Se necesitaron 6 pasos (INTERVALOS)
 Incluyen el punto final y el punto inicial

i) Si se necesitaran más pasos para completar el recorrido, ¿A qué valor numérico se acercaría el valor de Dt?

i) Se va a acerca a $\bigcirc$
 $D(t) \rightarrow \bigcirc$ #pasos Aumenta
 $\rightarrow$ Para cada paso aumenta un $\bigcirc$ después de la $\bigcirc$

j) ¿Qué representa cada punto en el plano cartesiano?

j) Las coordenadas (tiempo y distancia) de acuerdo a la rapidez.

k) ¿Qué representa la tabla generada debajo del plano cartesiano?

k) La función expresada en tabulación, las coordenadas de la rapidez y el comportamiento de acuerdo al t.

l) ¿Se puede concluir que hay un vehículo más rápido que otro? Justifica tu respuesta.

l) Si, el vehículo más rápido sería el Azul, pues recorre mayor distancia en el mismo tiempo que el vehículo rojo.

m) Según los datos graficados en el plano cartesiano y la correspondiente tabla. ¿Se puede predecir algún comportamiento en las velocidades “instantáneas” de cada automóvil?

m) VELOCIDADES:
 • Auto Rojo $\rightarrow$ Velocidad Constante  $v = 1 \text{ m/seg}$
 • Auto Azul $\rightarrow$ Velocidad Variable  $v = \text{Variable m/seg}$

Conclusión de la actividad: A partir de las repuestas proporcionadas por los estudiantes luego de realizar la actividad, observamos los siguientes resultados.

- Reconocen que los pares de puntos que conforman el segmento de recta recorrido por cada móvil representan la relación de dependencia entre la distancia y el tiempo, aunque existe confusión con la representación gráfica 1, pues manifiestan que el eje Y es la distancia recorrida cuando esta en realidad en el eje Y se está representando la rapidez media.
- Utilizan la diferencia como una manera de medir pequeños intervalos de tiempo y distancia.
- Por momentos se afianza más el uso de la representación gráfica que de la tabular para concluir qué vehículo es más rápido.
- Expresan de manera algebraica como calcular D_s y D_t .
- Aunque reconocen el cociente D_s/D_t como la rapidez de cada móvil, también se presenta confusión en su escritura algebraica pues proponen la rapidez como el cociente t/s .
- Perciben en el avance de cada móvil que cada diferencia D_t se hace cada vez más pequeña y reconocen que si se realizara una mayor partición de subintervalos la tendencia de D_t sería cero.

-
- Se muestra que no hubo coordinación entre la representación gráfica de la rapidez y su representación tabular. La gráfica la interpretan como la distancia vs tiempo mientras que la tabulación como la rapidez vs tiempo.
 - Hay confusión también para concluir qué vehículo es más rápido luego de obtener las 6 velocidades medias generadas por el medio.
 - Describen la velocidad del móvil rojo como una función constante, y la del móvil azul como una aparente función exponencial y decreciente.
-

8.4 Actividad 4

Abre el archivo “T4”, da clic sobre el botón “inicio” y observa atentamente la animación. Debes lograr que el móvil complete el recorrido total, para esto, obtén información con los botones de “Zoom” y completa las casillas de entrada con los valores correctos. Luego organiza los cuadros necesarios del rompecabezas sobre la malla de puntos para construir una fórmula de recurrencia que represente la velocidad del vehículo. No olvides comprobar la validez de tu fórmula con el botón “Verificar”.

Observación: Para ingresar los valores calculados en las correspondientes casillas debes usar todos los decimales que se generen en la animación. Luego de completar el reto responde:

- a) Si no se completa el reto mediante la ley de recurrencia, ¿Cuántos valores de Ds/Dt se deberían realizar?
- b) ¿Qué información representan los datos en la ventana “Hoja de Cálculo”? ¿Cuántos datos hay?
- c) ¿Cómo son los valores hallados para Dt ?
- d) Reescribe la fórmula recurrente
- e) ¿Qué representan los puntos graficados en el plano cartesiano?

- f) ¿Para qué intervalos de tiempo la velocidad del móvil es creciente? ¿Para cuáles decreciente?
- ¿Para cuáles constante?
- g) ¿Se puede trazar una gráfica continua con los puntos obtenidos y que sea una función?
- h) A qué valor debe aproximarse Δt para que la gráfica sea representante de la velocidad instantánea del automóvil?

Tabla 4.

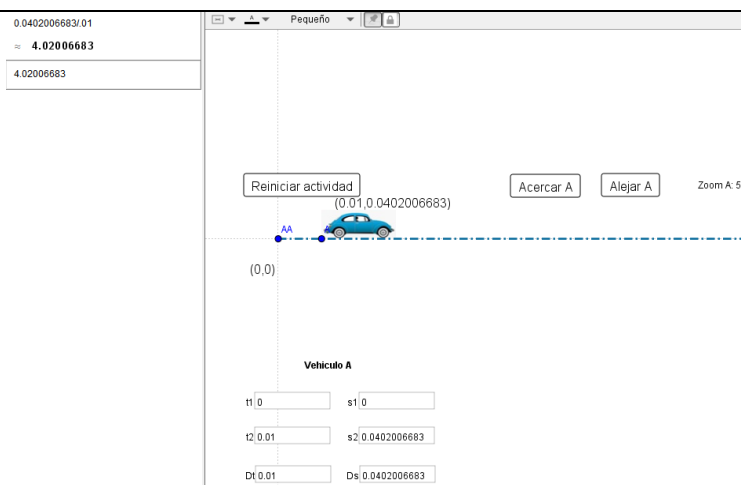
Actividad 4.

A1: Clic sobre el botón “Inicio”.

RM1: Se realiza una animación en el intervalo de tiempo $[0, 0.01]$. El auto se desplaza una distancia de 0.0402 unidades aproximadamente pero no son perceptibles a simple vista. Se desactiva el botón de “Inicio”.

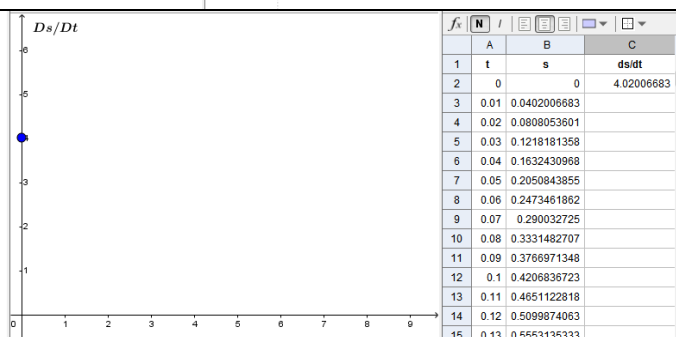
A2: (Los estudiantes dudan si el vehículo se ha movido, luego de un esperar un momento deciden dar clic en el botón “Acercar A” dado que no ven el botón “Inicio”). Dan clic en el botón “Acercar A” varias veces.

RM2: Se realizan zoom de escala 2 sobre el vehículo, se activa el contador de Zoom, en el Zoom número 5 se muestran las parejas de tiempo y desplazamiento para cada punto del segmento $[AA, A]$ recorrido por el móvil.



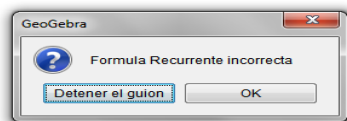
A3: Obtienen los datos en el Zoom 5 y los digitan en las correspondientes casillas t_1 , s_1 , t_2 y s_2 . Luego evalúan las diferencias de tiempo y espacio recorrido utilizando CAS para finalmente hallar Ds/Dt .

RM3: Se representa en la vista gráfica 2 el primer cociente de diferencias divididas con un punto azul, se muestra en la hoja de cálculo el cociente obtenido en la columna ds/dt , aparece el botón “Verificar”.



A4: Dan clic en el botón verificar sin devolver el contador de Zoom a cero.

R1: Emerge una ventana que indica que han calculado mal la fórmula de recurrencia.



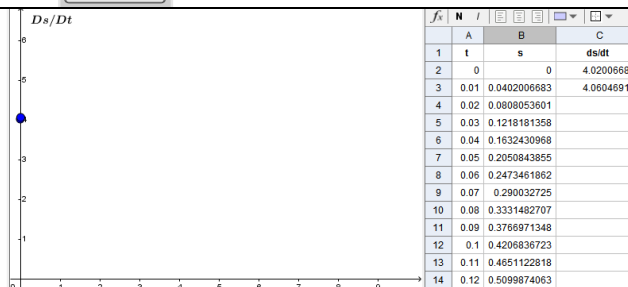
Verificar

A5: Discuten aseverando que han realizado bien los cálculos.

I1: El profesor les indica que no deben olvidar devolver el contador de Zoom a cero y que vuelvan a leer las indicaciones del reto.

A6: Dan clic sobre “OK” en la ventana emergente, devuelven el contador de zoom a cero con el botón “Alejar”, luego clic en “Continuar”.

RM4: Se realiza una animación en el intervalo de tiempo $[0.01, 0.02]$. El auto se desplaza una distancia de 0.0406 unidades aproximadamente pero no son perceptibles a simple vista. Se desactiva el botón de “Inicio”.



A7: Obtienen los datos en el Zoom 5 como en la iteración anterior y los digitan en las correspondientes casillas t_1 , s_1 , t_2 y s_2 . Luego evalúan las diferencias de tiempo y espacio recorrido utilizando CAS para finalmente hallar Ds/Dt .

RM5: Se representa en la vista gráfica 2 el segundo cociente de diferencias divididas con un punto azul, se muestra en la hoja de cálculo el cociente obtenido en la columna ds/dt para el segundo cociente, aparece el botón “Verificar”.

7	203023459 / 50000000	
8	0.0406046918/0.01	
9	4.06046918	
10	203023459 / 50000000	
11	203023459 / 5000000000	
12	0.0406046918/0.01	

Vehículo A

t1 0.01 s1 0.0402006683

t2 0.02 s2 0.0808053601

Dt 0.01 Ds 0.0406046918

Ds/Dt 4.06046918

A8: Realizan un intento de construcción del cociente de diferencias y luego clic en “Verificar”.

RM6: Cada vez que se mueve un cuadro con la simbología $(+, -, \times, \div)$, $s_1, t_1, t_n, t_{n+1}, s_n, s_{n+1}$, las bases de estos se iluminan de color rojo para indicar que sus vértices se encuentran bien posicionados sobre dos puntos de la malla en la cual hay que construir la fórmula de recurrencia. Luego de clic en “Verificar”, emerge una ventana que indica que se ha calculado mal la fórmula de recurrencia.

Vehículo A

t1 0.01 s1 0.0402006683

t2 0.02 s2 0.0808053601

Dt 0.01 Ds 0.0406046918

Ds/Dt 4.06046918

Formula Recurrente

$$\frac{s_1 - s_n}{t_1 - t_n}$$

÷

$$\frac{s_1 - s_n}{t_1 - t_n}$$

Verificar

+

-

×

÷

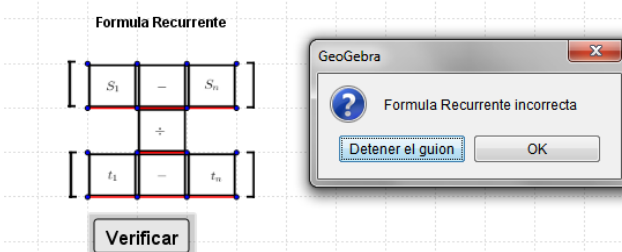
A9: Dan clic sobre “OK” en la ventana emergente, devuelven el contador de zoom a cero con el botón “Alejar”, luego clic en “Continuar”. Luego de un tercer intento fallido con el rompecabezas se han dado cuenta de que los valores de los puntos coinciden con los datos de las columnas t y s en la hoja de cálculo, además han expresado que para finalizar el reto deberían realizar muchos cálculos.

A10: Deciden calcular ds/dt utilizando la tabla con los valores de t y s , para esto digitan en la casilla C3 el cociente de diferencias $(B4-B3)/(A4-A3)$, luego copian la fórmula arrastrándola a las demás casillas inferiores de la columna ds/dt .

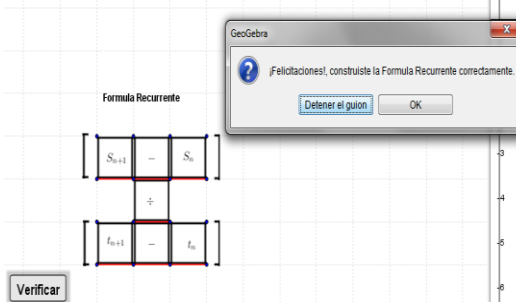
R2: El medio, aunque permite el cálculo del cociente diferencial mediante la hoja de cálculo, no permite generar la gráfica de la aproximación a la función velocidad.

	A	B	C
1	t	s	ds/dt
2	0	0	4.0200668337
3	0.01	0.0402006683	4.060469177
4	0.02	0.0808053601	4.1012775707
5	0.03	0.1218181358	4.1424960955
6	0.04	0.1632430968	4.1841288735
7	0.05	0.2050843855	4.2261800677
8	0.06	0.2473461862	4.2686538835
9	0.07	0.290032725	4.3115545683
10	0.08	0.3331482707	4.3548864121
11	0.09	0.3766971348	4.3986537482
12	0.1	0.4206836723	4.4428609533
13	0.11	0.4651122818	4.4875124482
14	0.12	0.5099874063	4.5326126981
15	0.13	0.5553135333	4.578166213
16	0.14	0.6010951954	4.6241775484
17	0.15	0.6473369709	4.6706513054
18	0.16	0.694043484	4.7175921314
19	0.17	0.7412194053	4.7650047206
20	0.18	0.7888694525	4.8128938142
21	0.19	0.8369983906	4.8612642012
22	0.2	0.8856110326	4.9101207186
23	0.21	0.9347122398	4.9594682523
24	0.22	0.9843069223	5.0093117368
25	0.23	1.0344000397	5.0596561568
26	0.24	1.0849966013	5.1105065465
27	0.25	1.1361016668	5.1618679912
28	0.26	1.1877203467	5.213745627
29	0.27	1.2398578029	5.2661446417
30	0.28	1.2925192493	5.3190702752
31	0.29	1.3457099521	5.3725278202

I2: Los estudiantes replican al profesor que han conseguido todos los valores ds/dt pero que no obtienen la gráfica de los puntos. Se les indica que el reto no consiste en llenar la tabla, pero que de la misma manera que pudieron construir la fórmula en la hoja de cálculo deben poder armar el rompecabezas de la fórmula de recurrencia. Se les recomienda reiniciar la actividad ya que el hecho de completar la columna ds/dt de forma manual interfiere con la programación.



A11: Dan clic en “Reiniciar”, luego en “Inicio”, calculan rápidamente el primer cociente de diferencias. Se toman un tiempo para comparar los ensayos anteriores con el rompecabezas, comparan con la fórmula que ingresaron para la hoja de cálculo. Repiten este proceso una vez más ya que vuelven a fallar, prefiriendo reiniciar la actividad que continuar con el cálculo del segundo cociente de diferencias.

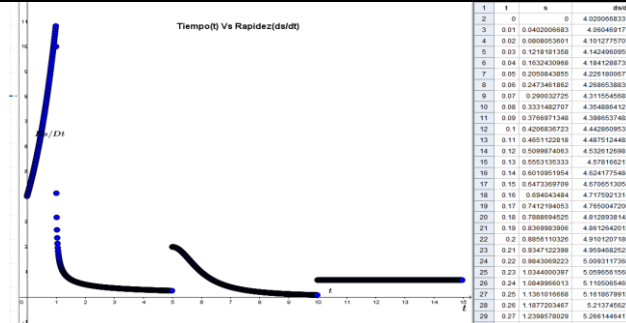


A12: Ubican finalmente de manera correcta los cuadros de tal manera que al dar clic en “Validar” terminan el reto.

R3: Emerge una ventana de felicitación por construir la fórmula de recurrencia.

R4: Dan clic en “Ok” de la ventana emergente.

RM: Emerge una ventana en la que se pide esperar mientras se dibujan los datos de la rapidez respecto al tiempo, en la programación se guardan los datos de ds/dt y se grafican todos estos de manera simultánea respecto a t .



Observaciones:

- Hemos omitido imágenes de algunas retroacciones en la tabla anterior debido a que estas ya se han repetido mediante acciones cíclicas de los estudiantes, por ejemplo, no mostramos repetidos mensajes de la ventana “Incorrecto” ante operaciones incorrectas por parte de los estudiantes.
- También se presentaron varios intentos para obtener respuestas correctas pero solo hemos mostrado uno de esos intentos en el que haya fracaso y que evidencia que el medio responde mediante una retroacción. Así mismo para retroacciones relevantes de validación exitosa.
- No se evidencian intentos de arrastre con los móviles para hacer que finalicen el recorrido como en la actividad 2.
- Sobresale una estrategia de solución por parte de los estudiantes utilizando un cambio de representación cuando deciden utilizar los 1500 valores de t y s dados en la hoja de cálculo, digitando y copiando la fórmula $= (B4-B3)/(A4-A3)$ equivalente al cociente de diferencias.
- Los estudiantes presentaron episodios de frustración cuando consideraban que para finalizar el reto se debía calcular alrededor de 1500 operaciones por cada casilla t_1 , s_1 , t_2 y s_2 . La intervención del profesor fue siempre invitarlos a leer y entender muy bien las instrucciones.

Respuestas al cuestionario de la actividad 4 luego de finalizar el Reto

a) Si no se completa el reto mediante la ley de recurrencia, ¿Cuántos valores de Ds/Dt se deberían realizar?

a) Se debería realizar el proceso de $\frac{Ds}{Dt}$, 1499 veces para hallar uno a uno los cálculos.

b) ¿Qué información representan los datos en la ventana “Hoja de Cálculo”? ¿Cuántos datos hay?

b) Representan las Distancias que el carro va recorriendo de acuerdo al tiempo, hay 1501 datos, que hacen referencia a la trayectoria para que el carro llegue al punto final.

c) ¿Cómo son los valores hallados para Dt ?

-
- A partir de la solución del rompecabezas reescriben una generalización del cociente de diferencias como una sucesión.
 - A diferencia de la actividad anterior, esta vez expresan que la rapidez vs tiempo está representada mediante el mapeo de los 1500 datos en el plano coordenado.
 - Utilizan la gráfica para observar dónde la velocidad del móvil crece y decrece, proponiendo intervalos aproximados para cada comportamiento.
 - Reconocen la velocidad del móvil como una función discontinua.
 - No se evidenció la idea de límite para Δt como una cantidad que debería tender a cero, aspecto que si se vió reflejado en la actividad anterior.
-

8.5 Actividad 5

Abre el archivo “T5”, da clic sobre el botón “Observar” y analiza atentamente la animación. Luego responde acertadamente las preguntas que aparecerán durante el desarrollo del reto. Luego de completar el reto responde:

- a) ¿Qué representa la gráfica 1?
- b) ¿Qué representa la gráfica 2?
- c) ¿Cómo se logra obtener la gráfica 2? Describe el proceso.
- d) ¿Cuántas curvas y de qué tipo aparecen en la gráfica 1? Escribe una expresión algebraica que represente cada curva.
- e) ¿Cuántas curvas y de qué tipo aparecen en la gráfica 2? Escribe una expresión algebraica que represente cada curva.
- f) ¿Qué relación hay entre las expresiones algebraicas de la gráfica 1 con las de la gráfica 2?

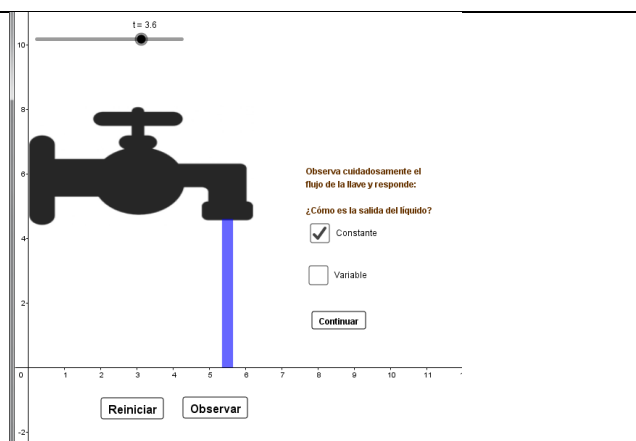
Tabla 5.

Actividad 5.

A1: Clic en “Observar”.

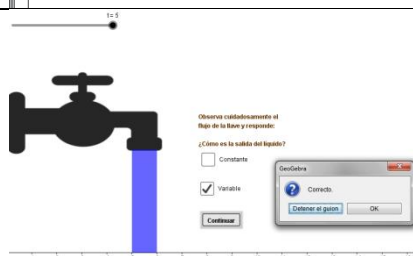
RM1: Inicia animación de la salida de un líquido aleatorio por el grifo (de color azul en este caso), se muestra un cuadro de texto el cual se pregunta por el comportamiento del líquido, aparece un deslizador de tiempo t que varía entre 0 y 5 segundos, se muestran también dos casillas de selección para escoger una única respuesta correcta.

A2: Luego de observar que la caída del líquido cambia de grosor, escogen la opción variable.

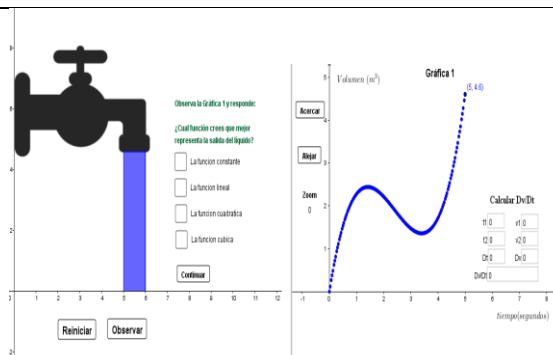


R1: Emerge una ventana con la leyenda “Correcto”.

A3: Dan clic en “Ok” sobre la ventana emergente y luego clic en “Continuar”.

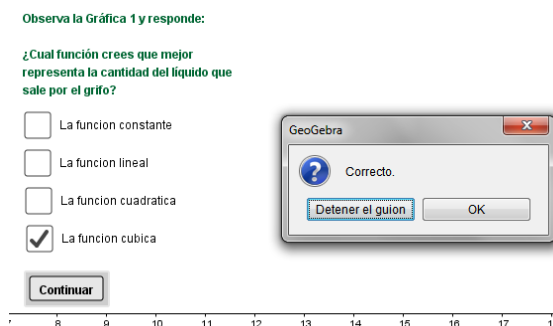


RM2: Se anima nuevamente la salida del mismo líquido y a su vez en la vista gráfica 1 se va animando también el volumen que sale del grifo respecto al tiempo, se muestra un cuadro de texto el cual se pregunta qué modelo de función representa mejor la salida de líquido, se muestran también cuatro casillas de selección para escoger la respuesta correcta.



A4: Seleccionan la casilla “La función cúbica” luego de conversar entre ellos y descartar que no puede ser una función constante ni lineal ya que la gráfica es una curva, luego descartan la cuadrática porque aseguran que la gráfica no es una parábola.

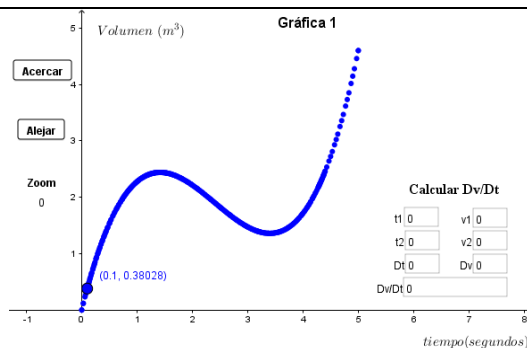
R2: Emerge una ventana con la leyenda “Correcto”.



A3: Dan clic en “Ok” sobre la ventana emergente y luego clic en “Continuar”.

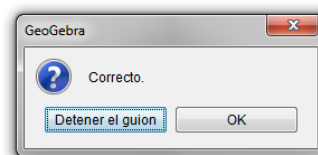
RM3: Se anima nuevamente la salida del mismo líquido y a su vez en la vista gráfica 1 se va animando también el volumen que sale del grifo respecto al tiempo, pero ahora la animación se detiene en un tiempo aleatorio en el intervalo [0,5].

Se muestra un cuadro de texto en el cual se pide observar nuevamente la Gráfica 1 y se pregunta por la rapidez con la que sale el líquido en ese instante de tiempo.



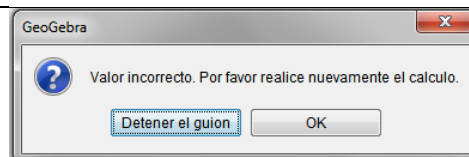
A4: Permanecen un tiempo observando la gráfica después de haberse detenido la animación y dicen que se parece al ejercicio de los carros donde hay que obtener información para llenar las casillas. Utilizan el botón de “Acercar” para aproximarse a la coordenada (tiempo1, volumen1).

R3: Se realiza un zoom de acercamiento de escala 2 por cada clic, a partir del zoom número 7 se puede visualizar otro par de coordenadas (tiempo2, volumen2) que complementan la información para las casillas $t_1, t_2, v_1, v_2, Dt, Dv, Dv/Dt$.



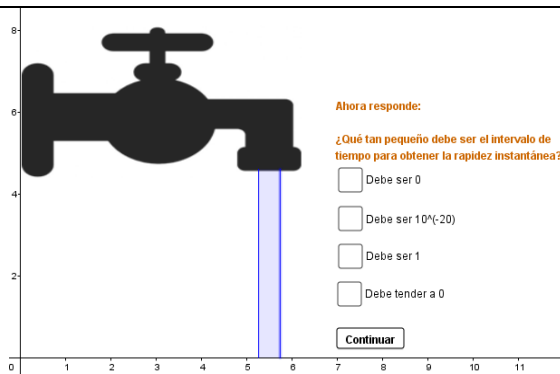
A5: Ingresan los correspondientes valores en las casillas de entrada y realizan los cálculos para $Dt, Dv, Dv/Dt$.

R4: Cuando se ingresan valores incorrectos en las casillas ya sea por digitación o por error de cálculo emerge una ventana con la leyenda “Incorrecto”. Si el cálculo final en la casilla Dv/Dt es correcto emerge una ventana con la leyenda “Correcto”. Aparece también un texto en el cual se pide devolver el contador de Zoom a cero y luego dar clic en “Continuar” para poder avanzar.



A6: Dan clic en “Ok” sobre la ventana emergente, devuelven el contador de Zoom a cero y luego dan clic en “Continuar”.

R5: Se muestra un cuadro de texto en el cual se pregunta a qué tan pequeño debe ser el intervalo de tiempo para obtener la rapidez instantánea rapidez instantánea del líquido, se muestran también cuatro casillas de selección para escoger dos posibles respuestas correctas.



A7: Seleccionan la casilla con el valor de 10^{-20} .

R6: Emerge una ventana con la leyenda “Correcto”.

Ahora responde:

¿Qué tan pequeño debe ser el intervalo de tiempo para obtener la rapidez instantánea?

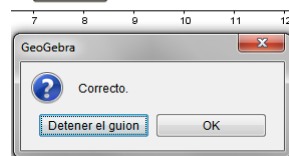
☐ Debe ser 0

☒ Debe ser $10^{(-20)}$

☐ Debe ser 1

☐ Debe tender a 0

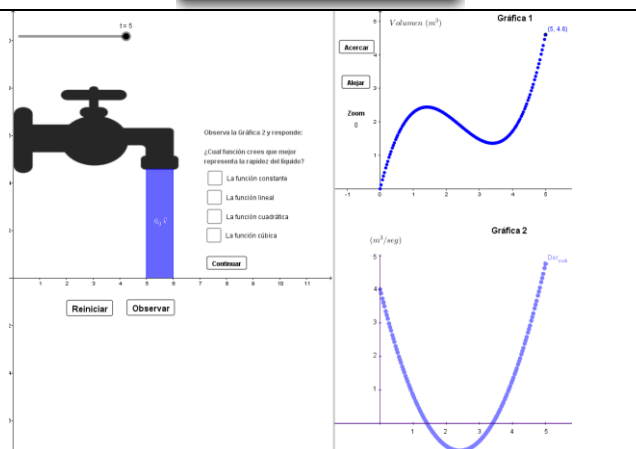
Continuar



A8: Dan clic en “Ok” sobre la ventana emergente.

RM4: Se anima nuevamente la salida del mismo líquido en el intervalo $[0,5]$ y a su vez, en la vista gráfica 1 y vista gráfica 2 se va animando el volumen que sale del grifo en cada instante t , así como la rapidez con la que sale este volumen respecto al tiempo.

Se muestra un cuadro de texto en el cual se pregunta por el modelo funcional que mejor se ajusta a la rapidez con la que sale el líquido (Gráfica 2), se muestran también cuatro casillas de selección para escoger la respuesta correcta.



A9: Escogen la opción de la función cúbica.

R7: Emerge una ventana con la leyenda “Incorrecto”.

Observa la Gráfica 2 y responde:

¿Cual función crees que mejor representa la rapidez del líquido?

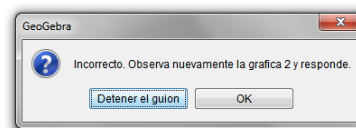
☐ La función constante

☐ La función lineal

☐ La función cuadrática

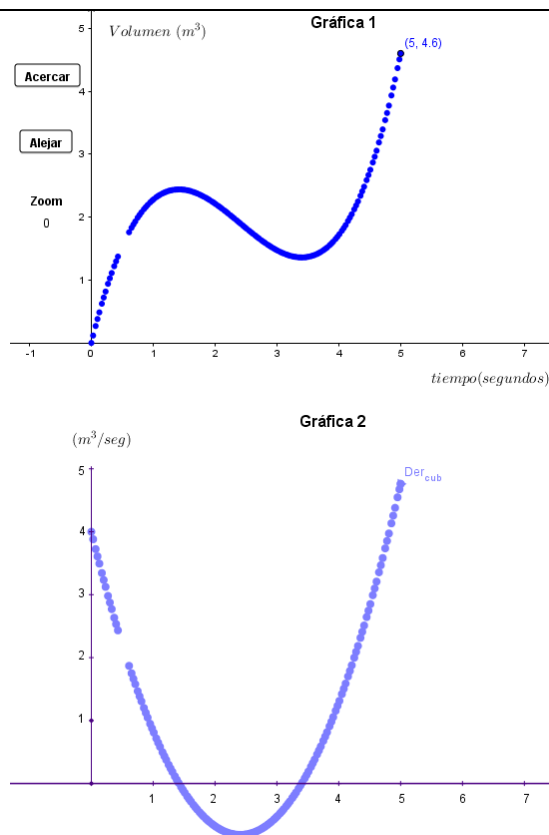
☒ La función cúbica

Continuar



A10: Dan clic en “OK” sobre la ventana emergente y se cuestionan porqué les quedó mal la selección. Concluyen que el error está en que han leído mal la pregunta ya que se pide el modelo para la Gráfica 2.

R8: Se anima nuevamente la salida del mismo líquido en el intervalo $[0,5]$ y a su vez, en la vista gráfica 1 y vista gráfica 2 se va animando el volumen que sale del grifo en cada instante t , así como la rapidez con la que sale este volumen respecto al tiempo.



A11: Escogen ahora la opción de la función cuadrática manifestando que la Gráfica 2 es una parábola.

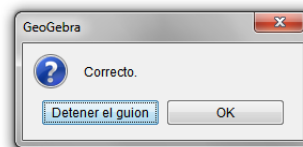
R8: Emerge una ventana con la leyenda “Correcto”.

Observa la Gráfica 2 y responde:

¿Cual función crees que mejor representa la rapidez del líquido?

- ☐ La función constante
- ☐ La función lineal
- ☒ La función cuadrática
- ☐ La función cúbica

Continuar

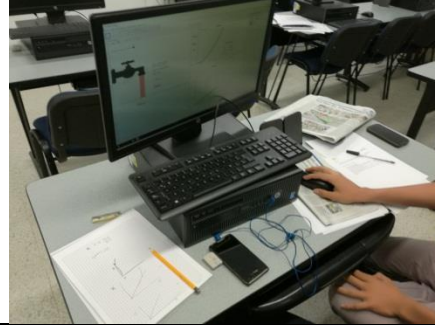


A11: Dan clic en “OK” sobre la ventana emergente y luego clic en “Continuar”.

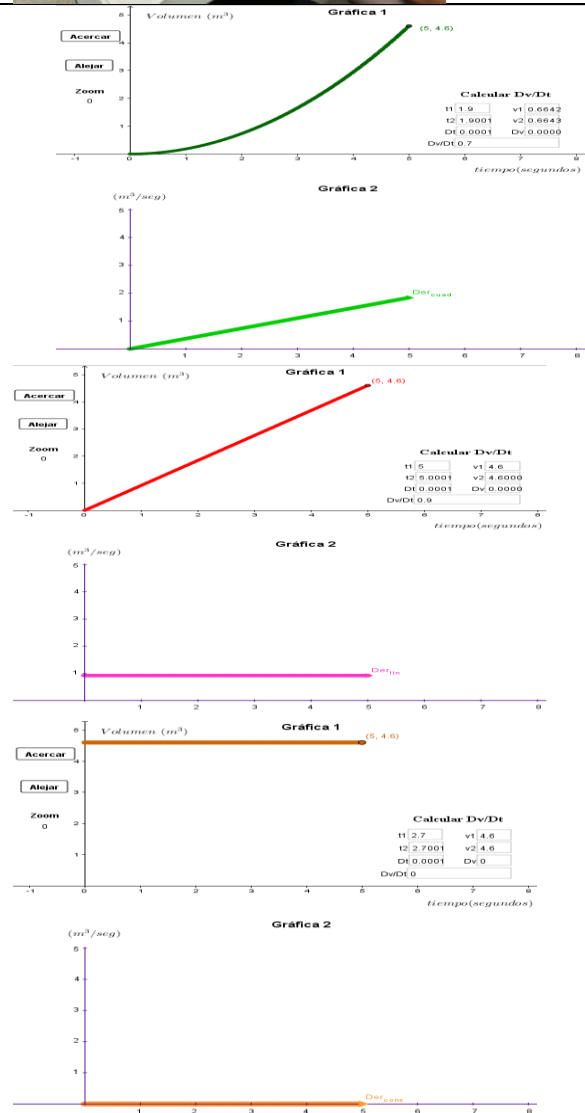
RM3: El líquido de color azul (su programación) queda almacenada en una de las variables iniciales y se descarta para el proceso aleatorio en la posterior animación.

Se anima la salida de un nuevo líquido aleatorio seleccionado entre los tres líquidos restantes (rojo, naranja, verde) en el intervalo $[0,5]$. Aparece el líquido de color verde.





Desde este momento repiten los mismos proceso de cálculos para la obtención de las gráficas de rapidez instantánea de cada uno de los líquidos restantes (verde, rojo y naranja).



Observaciones:

- Hemos omitido imágenes del ciclo final de retroacciones para los líquidos restantes pues luego de que los estudiantes han resuelto la secuencia para el primer líquido se repite de manera similar el proceso para los líquidos restantes.
- En esta actividad los estudiantes se mostraron más cómodos ya que para desarrollar el reto recordaron varias ya estrategias aplicadas así como el aprovechamiento de herramientas dispuesta en las actividades anteriores.
- En esta actividad no se presentaron intervenciones por parte del profesor.

Respuestas al cuestionario de la actividad 5 luego de finalizar el Reto

a) ¿Qué representa la gráfica 1?

a) La Rapidez = Dv vs Dt

$$\text{Rapidez} = \frac{Dv}{Dt}$$

b) ¿Qué representa la gráfica 2?

b) Representa el Volumen (V) del líquido

c) ¿Cómo se logra obtener la gráfica 2? Describe el proceso.

c) Después de calcular $\frac{Dv}{Dt}$

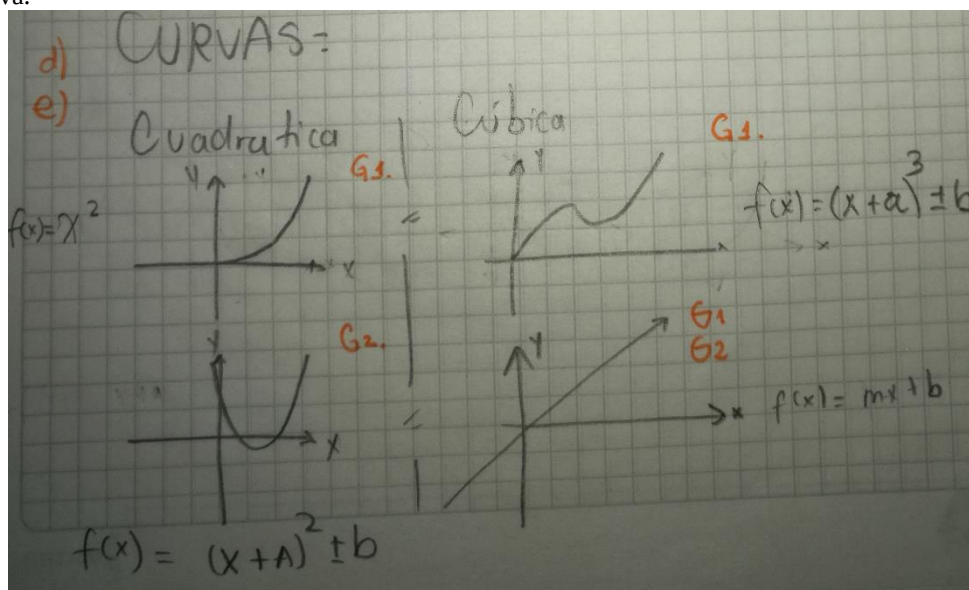
PROCESO:

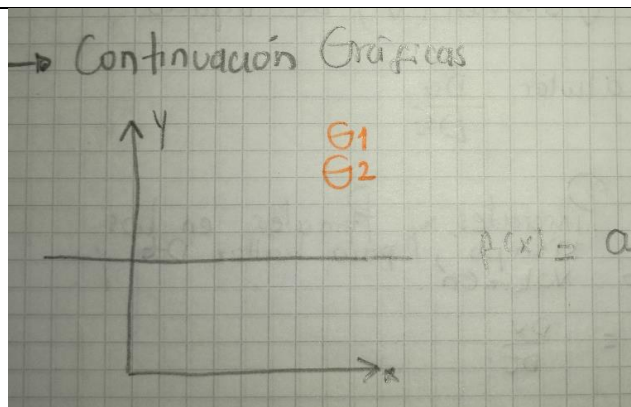
- Identificar Puntos y Puntos en los intervalos de tiempo, para hallar Dt y Dv (Respecto Volumen).

para calcular = $\frac{Dv}{Dt}$

d) ¿Cuántas curvas y de qué tipo aparecen en la gráfica 1? Escribe una expresión algebraica que represente cada curva.

e) ¿Cuántas curvas y de qué tipo aparecen en la gráfica 2? Escribe una expresión algebraica que represente cada curva.





f) ¿Qué relación hay entre las expresiones algebraicas de la gráfica 1 con las de la gráfica 2?

A) Relaciones:-

Gráfica 1 = Volumen vs tiempo
 m^3 / seg

Gráfica 2 = Rapidez vs tiempo
 (m^3/seg) / seg

Conclusión de la actividad: A partir de las repuestas proporcionadas por los estudiantes luego de realizar la actividad, observamos los siguientes resultados.

- No hay claridad todavía en la nomenclatura que utilizan para expresar la rapidez, dado que la expresan como Dv vs Dt seguidamente como Dv/Dt .
- Si es evidente un proceso mecanizado, traído de las actividades anteriores en el cual ya parece entenderse la razón Dv/Dt como un cociente de diferencias.
- Se distingue un conocimiento para asociar un modelo gráfico con su respectiva representación gráfica, incluso muestran algunos modelos como una transformación de los modelos básicos cuadrático y cúbico.
- En la respuesta f) hay aparente claridad de lo que representa cada gráfica, esto contradice lo respondido en los ítems a) y b)
- Se esperaba que encontraran alguna relación entre el modelo algebraico del volumen y el de la rapidez con el que sale este del grifo.

9. Conclusiones

En general, hemos logrado desarrollar situaciones a-didácticas creando un medio que permite diferentes tipos de acciones y retroacciones como una manera no convencional de enseñar la derivada como razón de cambio y que deberían repercutir en un mejor aprendizaje. También se

han integrado diferentes representaciones del mismo ente matemático en las que no priorizamos el uso de la representación algebraica y las reglas de derivación para resolver problemas.

La dificultad de integrar la TSD con el problema de la derivada y sus diferentes representaciones e interpretaciones radica en que la teoría y la mayoría de medios computacionales funcionan muy bien bajo representaciones geométricas, más el uso y sincronización de otras representaciones es bastante escaso. Hemos conseguido en gran parte, mediante programación en Java-scripting el funcionamiento de la TSD con representaciones no solo geométricas sino también con las de tipo numérico y algebraico, aunque estas últimas no se muestran de manera explícita en las actividades.

Desarrollamos en nuestro trabajo un nuevo tipo de retroacciones las cuales hemos denominado retroacciones múltiples, estas tienen diferentes objetivos, por momentos servir de almacenamiento de datos a diferentes acciones realizadas por el estudiante, otras veces brindar ayudas visuales que permiten la validación, y por último integrar diferentes representaciones semióticas del cociente de diferencias para llegarlo a entender como una rapidez media.

Las retroacciones múltiples mencionadas, complementan el esquema básico de la TSD donde se entiende que por cada acción del estudiante el medio responde con una retroacción. Para nuestro trabajo, además de existir una retroacción por cada acción hecha por el estudiante, también se muestran varias respuestas del medio por una acción realizada, de igual manera se programaron retroacciones que necesitan de varias acciones y validaciones por parte del estudiante. Damos a entender con esto que el ciclo estudiante-acción sobre el medio-retroacción del medio, se da en nuestras actividades bajo el requerimiento de varias acciones por parte del estudiante y la liberación de varias retroacciones en respuesta a dicho conjunto de acciones.

Las actividades aplicadas en el orden que se desarrollaron tenían por objetivo ser fiel a la literatura revisada, es decir, construir la noción de razón de cambio partiendo de un cociente de diferencias, luego proponiendo estas diferencias más pequeñas para aproximar la idea de diferencial y por último mostrando la colección de estos cocientes de diferencias pequeñas como una aproximación a la función derivada. Con esta secuencia de aplicación creemos que evitamos el salto brusco que se da en los textos de cálculo donde se parte de la tasa media y se expone de manera casi inmediata la función derivada mediante el proceso formal de límite.

Intentamos en nuestras actividades programadas tener en cuenta los tres registros principales de representación, aunque el estudiante utilizó en mayor parte el registro numérico y gráfico. No quiere decir que el registro algebraico no estuviese presente, pues este se encuentra implícito dentro de la programación del medio y en los cuestionarios aplicados después de cada actividad, con esto, despojamos de cierto privilegio que se da a la representación algebraica en la enseñanza de la derivada.

Durante el desarrollo de las actividades hubo manifestaciones por parte de los estudiantes a realizar cambios y/o coordinación entre representaciones con el objetivo de dar solución a los retos propuestos, esto muestra que se puede abordar la noción de derivada no solo desde un aspecto algorítmico algebraico sino también como un algoritmo asociado a razones de cambio consecutivas, mostrándolas como una colección de datos (cuando se evalúa el cociente) y como una colección de puntos en el plano (cuando se grafican).

Muchas de las operaciones que debieron realizar los estudiantes durante las actividades contenían aproximaciones a números irracionales, por lo cual hubo la necesidad de estar constantemente redondeando y tomando cierta cantidad de cifras significativas dependiendo del propósito de la actividad, en especial cuando necesitamos de la noción del límite de una diferencia que tienda a cero. Utilizar estos números también fue importante ya que en otros trabajos como en (Sánchez y Camacho, 2004) se utilizan tablas de valores estáticos y de preferencia enteros o decimales finitos, creemos que utilizar muy a menudo este tipo de números en la enseñanza de conceptos pertenecientes al cálculo suele inclinar el pensamiento de los estudiantes hacia una concepción en la que todos los números son “redondos”, entendemos claro está, que por razones operacionales ofrecen mayor practicidad este tipo de cantidades, pero es el conjunto de los irracionales el que le da al conjunto de los reales la calidad de conjunto denso y no enumerable. Estas cantidades irracionales también son producto de la programación en Javas-scripting a raíz de que el medio termina mostrando valores aleatorios para cada una de las actividades.

Creemos que hay evidencias de aprendizaje por adaptación en la medida que se fue progresando en el desarrollo y superación de las actividades. En las respuestas a los cuestionarios se muestra que los estudiantes tienen criterios para valorar la dependencia entre variables, la noción de límite cuando tiende a cero, la asociación de una expresión algebraica con una gráfica y finalmente el uso del cociente de diferencias como herramienta para superar los retos y expresar la rapidez de manera aproximada.

Es claro que conocimiento adquirido por los estudiantes es un saber descontextualizado, ya que no se realizó en la investigación la fase de institucionalización del conocimiento. Recomendamos

para posteriores trabajos basados en nuestra propuesta, retomar y dar continuidad a las actividades ya programadas, realizando esta vez la retroalimentación correspondiente y el análisis a posteriori de los resultados en pro de formalizar y diferenciar los conceptos de diferencial, derivada puntual y la función derivada.

Sugerimos mejorar algunas de las preguntas de los cuestionarios propuestos luego de cada actividad, pues reconocemos que propusimos preguntas muy abiertas y esto hizo que los estudiantes evitaran justificar de manera adecuada.

Además de contar con el código fuente para cada actividad, también publicaremos en la página oficial de geogebra, sección materiales (www.geogebra.org/materials) las actividades elaboradas como archivos .ggb. Queremos que haya acceso a esta documentación pues para nuestro trabajo fue difícil encontrar recursos elaborados en Geogebra que tuvieran programación adecuada en Java-scripting, por lo tanto, se debió realizar un estudio independiente del lenguaje Java y a partir de este experimentar sucesivos ensayos de programación.

Referencias Bibliográficas

- Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 132-142). Universidad Industrial de Santander.
- al concepto de derivada. *Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Antioquia, Medellín-Colombia.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59), Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Azcárate, C. (1992). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona. Barcelona. España.
- Bautista, L. y Peralta, M. (2011). *Conceptualización de la homotecia en estudiantes de sexto grado*. Tesis de especialización no publicada, Universidad Industrial de Santander.
- Boyer, C. (1986). Historia de la matemática. Alianza Editorial. Madrid.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en didactique des mathematiques*, 7(2), 33-115.
- Cabañas, G., Galeana, M., & Guillén, F. (2004). Situaciones didácticas en la comprensión del concepto de número racional en alumnos de nivel medio superior. *Reportes de*

- investigaciones terminadas* (pp. 181-187). CIMATE - Universidad Autónoma de Guerrero, México.
- Camargo, L., y Guzmán, A. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional: Relaciones entre la pendiente y la razón de cambio*. Bogotá, D.C: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Cortés, J. y Guerrero, M. (2012). Programas de cómputo interactivos para crear ambientes tecnológicos para el aprendizaje de las matemáticas. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive* (volume 17, p. 117-136).
- Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Francia. Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M.
- Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.
- Farfán, RM. (Ed.) (1993). IV Seminario Nacional de Investigación en Didáctica del Cálculo. Monterrey, mayo 1993, México: CINVESTAVIPN.
- Flores, A. (2013). Ayudando a futuros profesores a mejorar la comprensión conceptual del cálculo. *La enseñanza del cálculo diferencial e integral: Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa* (pp. 43-82). México: Pearson.

- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados*. México: CINVESTAV, 2001.
- Garay, L, y Swear, Y. (2013). Micro-ingeniería didáctica adecuando una Balanza para enseñar a los estudiantes a descubrir y desarrollar estrategias que les permita resolver ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros. *Actas del VII CIBEM* ISSN, 2301(0797), 1397.
- Godino, J. Batanero, C. (2013). *La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño*, Universidad de Granada.
- Grattan Guinnes, I. (1980). *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos*. Madrid. Editorial Alianza.
- Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. Edición Especial: Educación Matemática.
- Hitt, F. (2014). Un análisis sobre la enseñanza del concepto de derivada en el nivel preuniversitario, del rol de un libro de texto y su posible conexión con el uso de tecnología. *Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa* (pp. 19-40). México: Pearson.
- Ibarguen Y. y Realpe, J. (2013). *La enseñanza de la simetría axial a partir de la complementariedad de artefactos*. Tesis de pregrado. Universidad del Valle.
- Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander Ediciones.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, pp. 235-250.
- Parra, T. y Cordero, F. (2008). La derivada como razón de acumulación o agotamiento. CINVESTAV. México.
- Pérez, L. Á. (2015). Cabri Elem como medio adidáctico para la enseñanza de la homotecia. Tesis de posgrado. Universidad Industrial de Santander.
- Ponce, J. C. (2013). Isaac Barrow y su versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 83, 123-130.
- Posada, F. y Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. Doctoral dissertation, Tesis de maestría no publicada, Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Medellin-Colombia.
- Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2001). *Cálculo*. Pearson Education.
- Rendón, P. (2009). *Conceptualización de la Razón de Cambio en el marco de la Enseñanza para la Comprensión*. Trabajo de investigación de maestría no publicado. Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Medellín-Colombia.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *pna*, 4(1), 1-14.
- Rueda, K. y Monroy, M. (2009). *Conceptualización de la simetría axial y la traslación con el programa CabriGeometry II*. Tesis de pregrado no publicada, Universidad Industrial de Santander.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(2), 267-296.

- Tall, D. (2013). Una aproximación sensible al cálculo. *Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa* (pp. 127-157). México: Pearson.
- Tall, D.: (1996). Functions and Calculus, en A.J. Bishop y otros (eds.): *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer A.P.
- Villa, J. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación*.
- Vrancken, S., & Engler, A. (2013). Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 53-70.
- Zandieth, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. In E. Dubinsky, A. Shoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. IV CBMS Issues in Mathematics Education* (volume 8, pp. 103–127). Providence, USA: American Mathematical Society.

Apéndices

Apéndice A. Programación actividad 1

//Variables globales

var posX1=0, j=0,posDivdydx=0; // Guarda y cambia la posición de las casillas Dx, Dy, y el cociente DX/Dy

var listaX=[], listaY=[]; // Guardan los valores de las coordenadas (x,y) de la tortuga

var segdx=[0,0,0,0], segdy=[0,0,0,0]; // Guardan y cambian las distancias recorridas por la tortuga

var finalizado = 0; // Finaliza la actividad

var avanceItem=1; // Avanza al siguiente reto dentro de la actividad (conejo)

var listaDx=["-","-","-","-"], listaDy=["-","-","-","-"]; // Guardan los valores de las coordenadas (x,y) del conejo

var listaDivDyDx = ["-","-","-","-"]; // Guarda y cambia la posición de las casillas y el cociente DX/Dy para el conejo

var contadorDer = 1; // Reinicia la actividad

//Función que se ejecuta al iniciar el programa.

function ggbonInit() {

 ggbApplet.setVisible("btnReiniciar",true);

 hacerVisibleElementos();

 resetearValores();


```
desfijarPuntos();  
listaValores();  
fijarPuntos();  
generarCamino();  
tablaValores(listaX,listaY,0,"X");  
tablaDxDy(1);  
}
```

//función que permite validar dx.

```
function validarDx(posX){  
    var dx=0, caldx=0, pini=0, pfin=0, indice=-1;  
    if(finalizado==0){  
        indice = listaX.indexOf(posX);  
        dx=listaX[indice+1]-listaX[indice];  
        dx = Math.round(dx * 100) / 100;  
        caldx = ggbApplet.getValue("dx");  
        if(caldx==dx){  
            pini="("+listaX[indice]+","+listaY[indice]+")";  
            pfin="("+listaX[indice+1]+","+listaY[indice]+")";  
            sx="sx"+indice+"=Segment["+pini+","+pfin+"]";  
            ggbApplet.evalCommand(sx);  
            nombreSegmento="sx"+indice;  
            ggbApplet.setLabelVisible(nombreSegmento,false);  
        }  
    }  
}
```

```

        ggbApplet.setColor(nombreSegmento,255,51,102);

        ggbApplet.setVisible(nombreSegmento,true);

        moverTortuga(listaX[indice+1],listaY[indice]);

        segdx[indice]=1;

        ggbApplet.setValue("dx","-");

        tablaValores(listaX,listaY,avanceItem-1,"Y");

        listaDx[indice]=dx;

        tablaDxDy(1);

    }else{

        alert("¡ Incorrecto !");

    }

}

}

```

//función que permite validar dy.

```

function validarDy(posX){

    var dy=0, caldy=0, pini=0, pfin=0, indice=-1;

    if(finalizado==0){

        indice = listaX.indexOf(posX);

        if(segdx[indice]==1){

            dy=listaY[indice+1]-listaY[indice];

            dy = Math.round(dy * 100) / 100;

```

```
caldy = ggbApplet.getValue("dy");  
if(caldy==dy){  
    pini="("+listaX[indice+1]+","+listaY[indice]+")";  
    pfin="("+listaX[indice+1]+","+listaY[indice+1]+")";  
    sy="sy"+indice+"=Segment["+pini+","+pfin+"]";  
    ggbApplet.evalCommand(sy);  
    nombreSegmento="sy"+indice;  
    ggbApplet.setLabelVisible(nombreSegmento,false);  
    ggbApplet.setColor(nombreSegmento,255,51,102);  
    ggbApplet.setVisible(nombreSegmento,true);  
    moverTortuga(listaX[indice+1],listaY[indice+1]);  
    segdy[indice]=1;  
    if(segdx[3]==0){  
        txtposx="posX="+listaX[indice+1];  
        ggbApplet.evalCommand(txtposx);  
    }  
    ggbApplet.setValue("dy","-");  
  
    if(avanceItem<4){  
        avanceItem+=1;  
    }else{  
        avanceItem+=2;  
    }  
}
```

```

        tablaValores(listaX,listaY,avanceItem-1,"X");

        listaDy[indice]=dy;

        tablaDxDy(1);

    }else{

        alert("¡ Incorrecto !");

    }

}

}else{

    alert("¡ Debe calcular primero Dx !");

}

if(segdy[3]==1){

    finalizado=1;

    ggbApplet.setVisible("mensajeFinalizado",true);

    ggbApplet.setVisible("btnNuevoReto",true);

    ggbApplet.setVisible("btnReiniciar",false);

}

}

}

```

//Función que permite generar la lista de valores iniciales.

```

function listaValores(){

    var listax="",listay="";

    var i=0,k=1;

    var puntoInicial = "", puntoFinal = "";

```

```
listaX = generarListaValores(-2,8,"variable");

listaX.sort();

listaY = generarListaValores(-3,7,"variable");


for(i=0;i<=4;i++){

    puntoInicial = "P_"+k+"=("+listaX[i]+","+listaY[i]+")";

    ggbApplet.evalCommand(puntoInicial);

    ggbApplet.setLabelStyle("P_"+k,2);

    if (k<=7){

        puntoFinal = "P_"+(k+1)+"=("+listaX[i+1]+","+listaY[i+1]+")";

        nombrePunto = "P_"+(k+1);

        ggbApplet.evalCommand(puntoFinal);

        ggbApplet.setLabelStyle("P_"+(k+1),2);

    }

    k=k+2;

}

x = listaX[0];

y = listaY[0];

txtposx="posX="+x;

ggbApplet.evalCommand(txtposx);

moverTortuga(x,y);

}
```

//Función que permite generar la lista de valores iniciales según un intervalo dado.

```
function generarListaValores(a,b,tipo){  
    var xi=0,xx=0;  
    var listaNum=[];  
    switch (tipo){  
        case "variable":  
            for(i=1;i<=5;i++){  
                listaNum.push(Math.round(numRand(a,b)*100)/100);  
            }  
            break;  
        case "constante":  
            xi=Math.round(numRand(a,b)*100)/100;  
            listaNum.push(xi);  
            paso = Math.abs(Math.round(numRand(0,1)*100)/100);  
            i=1;  
            while(i<=4){  
                xx =xi+Math.round( i*paso*100)/100;  
                listaNum.push(xx);  
                i++;  
            }  
            break;  
    }  
}
```

```
    return listaNum;  
}
```

//Función que obtiene un número aleatorio según un intervalo.

```
function numRand(min,max){  
    return Math.random()*(max-min)+min;  
}
```

//Función que permite mover la tortuga.

```
function moverTortuga(x,y){  
    ggbApplet.setFixed("T",false);  
    ggbApplet.setCoords("T",x,y);  
    ggbApplet.setFixed("T",true);  
}
```

//Función que permite mover la liebre.

```
function moverLiebre(x,y){  
    ggbApplet.setFixed("L",false);  
    ggbApplet.setCoords("L",x,y);  
    ggbApplet.setFixed("L",true);  
}
```

//Función que permite crear la tabla de valores.

```

function tablaValores(listaX,listaY,pos,variable){

    var k=0, txtDatos="{\"Para Dx\", \"X\", \"Para Dy\", \"Y\"}";

    var tablaXY="";

    for(k=0;k<listaX.length;k++){

        if(k>=pos && k<=(pos+1) && variable=="X"){

            txtDatos

            += "\"\\purple{\\blacktriangleright}\"\", \"\\blue{\"+redondear(listaX[k])+\"}\"\", \"\\red{\"+redond
            ear(listaY[k])+\"}\"\"}, ";

            }else if(k>=pos && k<=(pos+1) && variable=="Y"){

            txtDatos

            += "\"\\\", \"\\blue{\"+redondear(listaX[k])+\"}\"\", \"\\purple{\\blacktriangleright}\"\", \"\\red{\"+redond
            ear(listaY[k])+\"}\"\"}, ";

            }else{

            txtDatos

            += "\"\\\", \"\\blue{\"+redondear(listaX[k])+\"}\"\", \"\\\", \"\\red{\"+redondear(listaY[k])+\"}\"\"}, ";

            }

        }

        txtDatos += "\"c|_\"";

        tablaXY = "tablaXY=TableText["+txtDatos+"]";

        ggbApplet.evalCommand(tablaXY);

    }
}

```

//Función que permite seleccionar la tabla segun el tipo de reto.


```

function tablaDxDy(reto){
  switch (reto){
    case 1:
      var k=0, txtDatos="{\"Dx\",\"Dy\"},";
      var tabladxdy="";
      for(k=0;k<listaDx.length;k++){
        txtDatos += "\"\blue{"+listaDx[k]+"}\"\",\"\red{"+listaDy[k]+"}\"\",";
      }
      txtDatos += "\"c|_\"";
      tabladxdy = "tablaDxDy=TableText["+txtDatos+"]";
      break;
    case 2:
      var k=0, txtDatos="{\"Para Dy/Dx\",\"Dx\",\"Dy\",\"Dy/Dx\"},";
      var tabladxdy="";
      for(k=0;k<listaDx.length;k++){
        if(k==0){
          txtDatos
+= "\"\purple{\blacktriangleright}\",\"\blue{"+listaDx[k]+"}\"\",\"\red{"+listaDy[k]+"}\"\",\",\",
";
        }else{
          txtDatos += "\"\",\"\blue{"+listaDx[k]+"}\"\",\"\red{"+listaDy[k]+"}\"\",\",\",";
        }
      }
    }
  }
}

```

```

txtDatos += "\"c|\"";

tabladx dy = "tablaDxDy=TableText["+txtDatos+"]";

ggbApplet.setVisible("txtDyDx",true);

ggbApplet.setVisible("dydx",true);

dibujarGraficaDyDx();

break;

}

ggbApplet.evalCommand(tabladx dy);

}

```

//Función que permite crear una tabla genérica.

```

function tablaDyDxGenerica(posDiv){

    var k=0, txtDatos="{\"Para Dy/Dx\", \"Dx\", \"Dy\", \"Dy/Dx\"}";

    var tabladx dy="";

    for(k=0;k<listaDx.length;k++){

        if(posDiv==k){

            txtDatos

+= "\"\\purple{\\blacktriangleright}\", \"\\blue{ "+listaDx[k]+" }\", \"\\red{ "+listaDy[k]+" }\", \"\\br

own{ "+listaDivDyDx[k]+" }\", ";

        }else{

            txtDatos

+= "\"\\\", \"\\blue{ "+listaDx[k]+" }\", \"\\red{ "+listaDy[k]+" }\", \"\\brown{ "+listaDivDyDx[k]+" }\\

\", ";

        }
    }
}

```

```

    }
}

txtDatos += "\"c|_\"";

tabladx dy = "tablaDxDy=TableText["+txtDatos+"]";

ggbApplet.evalCommand(tabladx dy);

if(posDiv==listaDx.length){

    ggbApplet.setVisible("mensajeFinalizado",true);

}

}

```

//Función que permite resetear algunos valores claves.

```

function resetearValores(){

    posDivdydx=0;

    ggbApplet.setValue("dx",0);

    ggbApplet.setValue("dy",0);

    ggbApplet.setValue("divdydx",0);

    ggbApplet.setVisible("mensajeFinalizado",false);

    for(j=0;j<=3;j++){

        sx="sx"+j+"=Segment[(0,0),(0,0)]";

        ggbApplet.evalCommand(sx);

        ggbApplet.setVisible("sx"+j,false);

        sy="sy"+j+"=Segment[(0,0),(0,0)]";

        ggbApplet.evalCommand(sy);
    }
}

```

```
    ggbApplet.setVisible("sy"+j,false);  
  }  
}
```

//Función que permite fijar puntos.

```
function fijarPuntos(){  
  var trazo="";  
  for(i=1;i<=9;i++){  
    ggbApplet.setFixed("P_"+i,true);  
  }  
  ggbApplet.setFixed("T",true);  
}
```

//función que permite generar el camino de la tortuga.

```
function generarCamino(){  
  var trazo="Camino=PolyLine[";  
  for(i=1;i<=9;i++){  
    if(i != 9){  
      trazo += "P_"+i+", "  
    }else{  
      trazo += "P_"+i+"]";  
    }  
  }  
}
```

```
ggbApplet.evalCommand(trazo);  
}
```

//Función contraria a la función fijarPuntos().

```
function desfijarPuntos(){  
    for(i=1;i<=9;i++){  
        ggbApplet.setFixed("P_"+i,false);  
    }  
    ggbApplet.setFixed("T",false);  
}
```

//Función que permite ocultar ciertas variables claves.

```
function hacerVisibleElementos(){  
    var k = 0;  
    for(i=1;i<=9;i++){  
        ggbApplet.setVisible("P_"+i,true);  
        if(i<=4){  
            k = i-1;  
            ggbApplet.setVisible("sx"+k,true);  
            ggbApplet.setVisible("sy"+k,true);  
            ggbApplet.setVisible("dif"+k,false);  
            ggbApplet.setVisible("sdif"+k,false);  
        }  
    }
```

```
}  
  
ggbApplet.setVisible("Camino",true);  
  
ggbApplet.setVisible("T",true);  
  
ggbApplet.setVisible("tortuga",true);  
  
ggbApplet.setVisible("caldx",true);  
  
ggbApplet.setVisible("caldy",true);  
  
ggbApplet.setVisible("txtDx",true);  
  
ggbApplet.setVisible("txtDy",true);  
  
ggbApplet.setVisible("txtDyDx",false);  
  
ggbApplet.setVisible("dydx",false);  
  
ggbApplet.setVisible("btnNuevoReto",false);  
  
ggbApplet.setVisible("L",false);  
  
ggbApplet.setVisible("liebre",false);  
  
ggbApplet.setVisible("conejo",false);  
  
ggbApplet.setVisible("titulo1",true);  
  
ggbApplet.setVisible("enunciadoActividad1",true);  
  
ggbApplet.setVisible("titulo2",false);  
  
ggbApplet.setVisible("enunciadoActividad2",false);  
  
}
```

//Función que permite resetear algunas variables.

```
function limpiar(){  
  
    var k = 0,i=1;
```

```
for(i=1;i<=9;i++){  
    ggbApplet.setVisible("P_"+i,false);  
    if(i<=4){  
        k = i-1;  
        ggbApplet.setVisible("sx"+k,false);  
        ggbApplet.setVisible("sy"+k,false);  
    }  
}  
  
ggbApplet.setVisible("Camino",false);  
ggbApplet.setVisible("T",false);  
ggbApplet.setVisible("tortuga",false);  
ggbApplet.setVisible("caldx",false);  
ggbApplet.setVisible("caldy",false);  
ggbApplet.setVisible("txtDx",false);  
ggbApplet.setVisible("txtDy",false);  
ggbApplet.setVisible("btnNuevoReto",false);  
ggbApplet.setVisible("mensajeFinalizado",false);  
ggbApplet.setVisible("titulo1",false);  
ggbApplet.setVisible("enunciadoActividad1",false);  
ggbApplet.setVisible("titulo2",true);  
ggbApplet.setVisible("enunciadoActividad2",true);  
ggbApplet.setValue("dx",0);  
ggbApplet.setValue("dy",0);
```

```
ggbApplet.setValue("divdydx",0);  
}
```

//función que permite dibujar puntos

```
function dibujarGraficaDyDx(){  
    var i=0, der=0;  
    var puntodydx="",sdif="";  
  
    for(i=0;i<listaDx.length;i++){  
        der=parseFloat(listaDy[i])/parseFloat(listaDx[i]);  
        der=Math.round( der*100)/100;  
        puntodydx = "dif"+i+"=Point[{ "+i+", "+der+"}]";  
        ggbApplet.evalCommand(puntodydx);  
        ggbApplet.setLabelStyle("dif"+i,2);  
        sdif="sdif"+i+"=Segment[( "+i+",0),( "+i+", "+der+")]";  
        ggbApplet.evalCommand(sdif);  
        ggbApplet.setVisible("dif"+i,true);  
        ggbApplet.setVisible("sdif"+i,true);  
    }  
    moverLiebre(0,0);  
    ggbApplet.setVisible("conejo",true);  
}
```


//Función que permite validar el cociente dy/dx.

```
function validarDivDyDx(posDer,divdydx){  
    var der=0,nombreSegmento="";  
  
    der=parseFloat(listaDy[posDer])/parseFloat(listaDx[posDer]);  
    der=Math.round( der*100)/100;  
  
    if(parseFloat(divdydx)==der){  
        moverLiebre(posDer,der);  
        nombreSegmento="sdif"+posDer;  
        ggbApplet.setColor(nombreSegmento,255,51,102);  
        listaDivDyDx[posDivdydx]=der.toString();  
        posDivdydx+=1;  
        tablaDyDxGenerica(posDivdydx);  
        ggbApplet.setValue("divdydx","-");  
        if(contadorDer<4){  
            contadorDer++;  
        }else{  
            alert("Finalizaste la actividad. ¡Gracias por tu participación!");  
            ggbApplet.setVisible("btnReiniciar",true);  
        }  
    }else{  
        alert("¡ Incorrecto !");  
    }  
}
```

```
}
```

```
}
```

```
//Función que permite redondear números a dos dígitos.
```

```
function redondear(x){
```

```
    return Math.round(x*100)/100;
```

```
}
```

Apéndice B. Programación actividad 2

//Variables globales

inicioPrograma=true;

i=0;

listaTiempo=[0,0,0,0,0,15];

listaT1="0";

listaD1="0";

listaT2="0";

listaD2="0";

dt1=0;

ds1=0;

dsdt1=0;

dt2=0;

ds2=0;

dsdt2=0;

valDif1=[0,0,0];

valDif2=[0,0,0];

listaDsDt1="0";

listaDsDt2="0";

listaDeRespuestas="I";

dsdt1Full=0;

dsdt2Full=0;

```
function ggbOnInit() {  
    valoresIniciales();  
}
```

//Esta función permite configurar valores iniciales

```
function valoresIniciales(){  
    ggbApplet.setValue("t","0");  
    ggbApplet.setValue("dt1","0");  
    ggbApplet.setValue("ds1","0");  
    ggbApplet.setValue("dsdt1","0");  
    ggbApplet.setValue("dt2","0");  
    ggbApplet.setValue("ds2","0");  
    ggbApplet.setValue("dsdt2","0");  
    ggbApplet.setValue("respuesta","0");  
    ggbApplet.setFixed("A",true);  
    ggbApplet.setFixed("B",true);  
    for(var k=1;k<=6;k++){  
        ggbApplet.setVisible("A"+k,false);  
        ggbApplet.setVisible("B"+k,false);  
    }  
    crearListaDeTiempos();  
}
```

//Función que ejecuta la animación al hacer clic en el botón [Inicio]

```
function iniciarAnimacion(inicio){
  if(inicio){
    ggbApplet.setFixed("A",false);
    ggbApplet.setFixed("B",false);
    inicioPrograma=false;
    ggbApplet.setValue("inicio","false");
    ggbApplet.setCaption("btnIniciar","Continuar");
    ggbApplet.setVisible("btnIniciar",false);
    animarVehiculo(0,listaTiempo[i]);
    ggbApplet.setFixed("A",true);
    ggbApplet.setFixed("B",true);
  }else{
    if(i<=4){
      ggbApplet.setFixed("A",false);
      ggbApplet.setFixed("B",false);
      ggbApplet.setVisible("btnIniciar",false);
      if(i==4){
        animarVehiculo(listaTiempo[4],15);
      }else{
        animarVehiculo(listaTiempo[i],listaTiempo[i+1]);
      }
      i++;
    }
  }
}
```

```

        ggbApplet.setFixed("A",true);

        ggbApplet.setFixed("B",true);

    }else{

        alert("La actividad finalizo.");

        ggbApplet.setCaption("btnIniciar","Finalizado");

    }

}

}

```

//Función que permite crear una lista de valores aleatorios de t.

```

function crearListaDeTiempos(){

    var a=0,b=0;

    for(var i=1;i<=5;i++){

        b=3*i;

        listaTiempo[i-1] = Math.round((a+Math.random()*(b-a))*10)/10;

        a=b;

    }

}

```

//Función usada dentro de la función "iniciarAnimacion(inicio)" para que se desplacen los vehículos.

```

function animarVehiculo(tInicio,tFinal){

    var comando = "t=Slider("+tInicio+", "+tFinal+", 0.1, 2, 200, false, true, true, false)";

```

```

ggbApplet.evalCommand("StartAnimation(t,true)");
ggbApplet.evalCommand(comando);
dibujarSegmento("sa","g",tInicio,tFinal,4);
dibujarSegmento("sb","f",tInicio,tFinal,6);
actualizarListaTA(tFinal);
actualizarListaTB(tFinal);
}

```

//Función usada en la función "animarVehiculo(tInicio,tFinal)" para dibujar el rastro de los vehículos.

```

function dibujarSegmento(segmento,fun,ini,fin,y){
    var si=0, sf=0;

    ggbApplet.setValue("tiempoFinal",fin)
    ggbApplet.evalCommand("sIni="+fun+"("+ini+")");
    si=redondear(ggbApplet.getValue("sIni"));
    ggbApplet.evalCommand("sFin="+fun+"("+fin+")");
    sf=redondear(ggbApplet.getValue("sFin"));
    s=segmento+"=Segment[("+si+", "+y+"),("+sf+", "+y+")]";
    ggbApplet.evalCommand(s);
    ggbApplet.setLabelVisible(segmento,false);
}

```

//Función que permite actualizar la lista de tiempo del vehículo A.

```
function actualizarListaTA(tiempoFinal){
    ggbApplet.evalCommand("d1=g("+tiempoFinal+"");
    t=tiempoFinal;
    t=redondear(t);
    listaT1+=(","+t);
    d1=redondear(ggbApplet.getValue("d1"));
    listaD1+=(","+d1);

    actualizarTablaA(listaT1,listaD1);
}
```

//Función que permite actualizar los datos de la tabla de valores del vehiculo A.

```
function actualizarTablaA(listaT,listaD){
    listT = listaT.split(",");
    listD = listaD.split(",");
    var k=0, txtDatos="{\"Tiempo(t)\",\"Distancia(s)\",\"";
    var tabla1="";

    txtDatos += "\""+listT[listT.length-2]+"\", \""+listD[listT.length-2]+"\", \"";
    txtDatos += "\""+listT[listT.length-1]+"\", \""+listD[listT.length-1]+"\", \"";
    txtDatos += "\"c|_\"";
    tabla1 = "tablaDatos1=TableText["+txtDatos+"]";
```



```

ggbApplet.evalCommand(tabla1);

dt1 = parseFloat(listT[listT.length-1])-parseFloat(listT[listT.length-2]);

dt1 = redondear(dt1);

ds1 = parseFloat(listD[listD.length-1])-parseFloat(listD[listD.length-2]);

ds1 = redondear(ds1);

dsdt1 = ds1/dt1;

dsdt1 = redondear(dsdt1);

}

```

//Función que permite actualizar los datos de la tabla de valores del vehículo B.

```

function actualizarListaTB(tiempoFinal){

    ggbApplet.evalCommand("d2=f("+tiempoFinal+")");

    t=tiempoFinal;//ggbApplet.getValue("t");

    t=redondear(t);

    listaT2+=(","+t);

    d2=redondear(ggbApplet.getValue("d2"));

    listaD2+=(","+d2);


    actualizarTablaB(listaT2,listaD2);

}

```

//Función que permite actualizar los datos de la tabla de valores del vehículo A.

```

function actualizarTablaB(listaT,listaD){

```

```

listT = listaT.split(",");
listD = listaD.split(",");
var k=0, txtDatos="{\"Tiempo(t)\",\"Distancia(s)\",\"";
var tabla2="";

txtDatos += "\""+listT[listT.length-2]+"\", \""+listD[listT.length-2]+"\", \"";
txtDatos += "\""+listT[listT.length-1]+"\", \""+listD[listT.length-1]+"\", \"";
txtDatos += "\"c|_\"";
tabla2 = "tablaDatos2=TableText["+txtDatos+"]";
ggbApplet.evalCommand(tabla2);
dt2 = parseFloat(listT[listT.length-1])-parseFloat(listT[listT.length-2]);
dt2 = redondear(dt2);
ds2 = parseFloat(listD[listD.length-1])-parseFloat(listD[listD.length-2]);
ds2 = redondear(ds2);
dsdt2 = ds2/dt2;
dsdt2 = redondear(dsdt2);
}

function redondear(x){
    return Math.round(x*100)/100;
}

```

//INICIO - Para los datos de la primera tabla

```
function validarDt1(cvdt1){  
    if(cvdt1==dt1){  
        valDif1[0]=1;  
    }else{  
        valDif1[0]=0;  
        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
    }  
}  
  
function validarDs1(cvds1){  
    if(valDif1[0]==1){  
        if(cvds1==ds1){  
            valDif1[1]=1;  
        }else{  
            valDif1[1]=0;  
            alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
        }  
    }else{  
        alert("Por favor complete primero dt");  
    }  
}  
  
function validarDsDt1(cvdsdt1){
```

```
if(valDif1[1]==1){
    if(cvdsdt1==dsdt1){
        valDif1[2]=1;

        puntoA = "A"+(i+1)+"=("+listaTiempo[i]+","+dsdt1+")";

        ggbApplet.evalCommand(puntoA);

        ggbApplet.setVisible("A"+(i+1),true);

        if(inicioPrograma==false){

            listaDsDt1+=(","+dsdt1);

            dsdt1Full=1;

            if(dsdt1Full==1 && dsdt2Full==1){

                ggbApplet.evalCommand("SetActiveView[2]");

                agregarDatosTablaTiempoRapidez();

            }

        }

    }else{

        valDif1[2]=0;

        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");

    }

}

}

}

//return flag;

}
```

//FIN - Para los datos de la primera tabla

//INICIO - Para los datos de la segunda tabla

```
function validarDt2(cvdt2){  
    if(cvdt2==dt2){  
        valDif2[0]=1;  
    }else{  
        valDif2[0]=0;  
        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
    }  
}  
  
function validarDs2(cvds2){  
    if(valDif2[0]==1){  
        if(cvds2==ds2){  
            valDif2[1]=1;  
        }else{  
            valDif2[1]=0;  
            alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
        }  
    }else{  
        alert("Por favor complete primero dt");  
    }  
}
```

```
}
```

```
function validarDsDt2(cvdsdt2){  
  if(valDif2[1]==1){  
    if(cvdsdt2==dsdt2){  
      valDif2[2]=1;  
      puntoB = "B"+(i+1)+"=("+listaTiempo[i]+","+dsdt2+")";  
      ggbApplet.evalCommand(puntoB);  
      ggbApplet.setVisible("B"+(i+1),true);  
      if(inicioPrograma==false){  
        listaDsDt2+=(","+dsdt2);  
        dsdt2Full=1;  
        if(dsdt1Full==1 && dsdt2Full==1){  
          ggbApplet.evalCommand("SetActiveView[2]");  
          agregarDatosTablaTiempoRapidez();  
        }  
      }  
    }else{  
      valDif2[2]=0;  
      alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
    }  
  }else{  
    alert("Por favor complete primero ds");  
  }  
}
```

```
}  
}  
  
//FIN - Para los datos de la segunda tabla  
  
//Función que permite generar la respuesta de la pregunta.
```

```
function generarRespuesta(){  
    var solPregunta=0;  
    if(dsdt1>dsdt2){  
        solPregunta=1;  
    }else if (dsdt2>dsdt1){  
        solPregunta=2;  
    }  
    return solPregunta;  
}
```

```
//Función que permite agregar la respuesta a la tabla de Tiempo Vs Rapidez
```

```
function agregarRespuestaTabla(){  
    listT = listaT1.split(",");  
    listR = listaDeRespuestas.split(",");  
    var k=0, txtDatos="{\"Tiempo\\\", \"Respuesta\\\"},\";  
    var tablaR=\"\";  
    for(k=1;k<listT.length;k++){  
        txtDatos += \"{\\\"+listT[k]+\"\\\",\\\"+listR[k]+\"\\\"},\";  
    }
```

```

    }

    txtDatos += "\"c|_\"";

    tablaR = "tablaRespuestas=TableText["+txtDatos+"]";

    ggbApplet.evalCommand(tablaR);
}

```

//Función que permite agregar la respuesta a la tabla de Tiempo Vs Rapidez

```

function agregarDatosTablaTiempoRapidez(){

    listDsDt1 = listaDsDt1.split(",");

    listDsDt2 = listaDsDt2.split(",");

    var k=0, txtDatos="{\"Tiempo(t)\",\"\\blue{Rapidez(s)}\", \"\\red{Rapidez(s)}\", ";

    var tabla3 = "";

    for(k=1;k<listDsDt2.length;k++){

        txtDatos += "\""+listaTiempo[k-

1]+ "\",\"\\blue{\""+listDsDt1[k]+"}\"\", \"\\red{\""+listDsDt2[k]+"}\"\", ";

    }

    txtDatos += "\"c|_\"";

    tabla3 = "tablaDatos3=TableText["+txtDatos+"]";

    ggbApplet.evalCommand(tabla3);

    dsdt1Full=0;

    dsdt2Full=0;

}

```


//INICIO - Validar respuesta

```
function validarRespuesta(){  
    var flag = false;  
  
    var t1 = ggbApplet.getValue("dt1");  
    var t2 = ggbApplet.getValue("dt2");  
  
    if(valDif1[2]==1 && valDif2[2]==1 && t1>0 && t2>0 ){  
        respuesta = ggbApplet.getValue("respuesta");  
        if(generarRespuesta()==respuesta){  
            if(respuesta=="1"){  
                listaDeRespuestas += ",A";  
            }else if(respuesta=="2"){  
                listaDeRespuestas += ",B";  
            }else{  
                listaDeRespuestas += ",IGUALES";  
            }  
            agregarRespuestaTabla();  
            valDif1=[0,0,0];  
            valDif2=[0,0,0];  
            ggbApplet.setValue("dt1","0");  
            ggbApplet.setValue("dt2","0");  
            ggbApplet.setValue("ds1","0");  
            ggbApplet.setValue("ds2","0");  
            ggbApplet.setValue("dsdt1","0");  
        }  
    }  
}
```

```
        ggbApplet.setValue("dsdt2","0");

        flag = true;

        if(listaTiempo[i]==15){

            ggbApplet.setCaption("btnIniciar","Finalizado");

            alert("La actividad finalizó.");

        }

    }else{

        alert("Respuesta Incorrecta");

    }

}

}else{

    var dst1 = ggbApplet.getValue("dsdt1");

    var dst2 = ggbApplet.getValue("dsdt2");

    if(inicioPrograma==false){

        alert("Para continuar debe primero calcular los ds/dt.");

    }else{

        inicioPrograma=false;

    }

    flag=false;

}

ggbApplet.setValue("respuesta","0");

return flag;

}
```

//FIN - Validar Respuesta

Apéndice C. Programación actividad 3

//Variables globales

```
inicioPrograma=true;
```

```
i=0;
```

```
k=0;
```

```
n=2;
```

```
z=-1;
```

```
listaTiempo=[0,0,0,0,0,15];
```

```
listaDistanciaA=[0,0,0,0,0,0];
```

```
listaDistanciaB=[0,0,0,0,0,0];
```

```
listaTiempoAA=[0,0,0,0,0,0];
```

```
listaTiempoBB=[0,0,0,0,0,0];
```

```
listaDistanciaAA=[0,0,0,0,0,0];
```

```
listaDistanciaBB=[0,0,0,0,0,0];
```

```
listaZoomMin=[2,5,6,10,13,16,19];
```

```
listaZoomMax=[3,6,7,13,16,19,22];
```

```
listaDistanciasZoom=[1,0.1,0.01,0.001,0.0001,0.00001,0.000001];
```

```
valT1=false;
```

```
valT2=false;
```

```
valT3=false;
```

```
valT4=false;
```

```
valS1=false;
```

```
valS2=false;
valS3=false;
valS4=false;
listaT1="0";
listaD1="0";
listaT2="0";
listaD2="0";
dt1=0;
ds1=0;
dsdt1=0;
dt2=0;
ds2=0;
dsdt2=0;
valDif1=[0,0,0];
valDif2=[0,0,0];
listaDsDt1="0";
listaDsDt2="0";
listaDeRespuestas="I";
dsdt1Full=0;
dsdt2Full=0;
```

//Función que se ejecuta al iniciar el programa

```
function ggbonInit() {
```

```
valoresIniciales();  
}
```

//Función que permite configurar valores iniciales. Se ejecuta en la función ggbOnInit().

```
function valoresIniciales(){  
    ggbApplet.setCaption("btnIniciar","Inicio");  
    ggbApplet.setValue("t","0");  
    ggbApplet.setValue("dt1","0");  
    ggbApplet.setValue("ds1","0");  
    ggbApplet.setValue("dsdt1","0");  
    ggbApplet.setValue("dt2","0");  
    ggbApplet.setValue("ds2","0");  
    ggbApplet.setValue("dsdt2","0");  
    ggbApplet.setValue("respuesta","0");  
    ggbApplet.setFixed("A",true);  
    ggbApplet.setFixed("B",true);  
    for(var k=1;k<=6;k++){  
        ggbApplet.setVisible("A"+k,false);  
        ggbApplet.setVisible("B"+k,false);  
    }  
    crearListaDeTiempos();  
}
```

//Función permite crear dos listas: una de tiempos y otra los valores que se obtienen al ser evaluados en una función.

```
function crearListaDeTiempos(){
    var a=0,b=0;
    for(var i=1;i<=5;i++){
        b=3*i;
        listaTiempo[i-1] = Math.round((a+Math.random()*(b-a))*10)/10;
        listaDistanciaA[i-1]=redondearNdigitos(evaluarEnFuncionSinRedondeo("g",listaTiempo[i-1]),10);
        listaDistanciaB[i-1]=redondearNdigitos(evaluarEnFuncionSinRedondeo("f",listaTiempo[i-1]),10);
        a=b;
    }
}
```

//Función que permite configurar la animación de los vehículos

```
function iniciarAnimacion(inicio){
    var zoomA = ggbApplet.getValue("zoomA");
    var zoomB = ggbApplet.getValue("zoomB");
    if(zoomA==0 && zoomB==0 ){
        if(inicio){
            inicioPrograma=false;
            ggbApplet.setValue("inicio","false");
        }
    }
}
```

```
ggbApplet.setCaption("btnIniciar","Continuar");

ggbApplet.setVisible("btnIniciar",false);

ggbApplet.setFixed("A",false);

ggbApplet.setFixed("B",false);

animarVehiculo(0,listaTiempo[i]);

z++;

}else{

    k++;

    if(i<=4){

        ggbApplet.setVisible("btnIniciar",false);

        n++;

        if(i==4){

            animarVehiculo(listaTiempo[4],15);

        }else{

            animarVehiculo(listaTiempo[i],listaTiempo[i+1]);

        }

        i++;

        z++;

    }else{

        alert("La actividad finalizo.");

        ggbApplet.setCaption("btnIniciar","Finalizado");

    }

}
```

```

    }else{

        alert("Por favor vuelva el Zoom A y el Zoom B a 0, haciendo clic sobre Acercar o Alejar
segun corresponda.");

    }

}

```

//Función que permite animar el avance del vehículo.

```

function animarVehiculo(tInicio,tFinal){

    var comando = "t=Slider("+tInicio+","+tFinal+", 0.1, 2, 200, false, true, true, false)";

    ggbApplet.evalCommand("StartAnimation(t,true)");

    ggbApplet.evalCommand(comando);

    ggbApplet.setVisible("t",false);

    tInicio=redondearNdigitos(tFinal-dxRandom(n),n);

    ggbApplet.setValue("tInicio",tInicio);

    ubicarPunto("AA",evaluarEnFuncionSinRedondeo("g",tInicio),4);

    ubicarPunto("BB",evaluarEnFuncionSinRedondeo("f",tInicio),6);

    dibujarSegmento("sa","g",tInicio,tFinal,4);

    dibujarSegmento("sb","f",tInicio,tFinal,6);

    generarValoresAABB(tInicio);

}

```

//Función que permite dibujar el segmento una vez avanza el vehículo.

```

function dibujarSegmento(segmento,fun,ini,fin,y){

```



```

var si=0, sf=0;

ggbApplet.setValue("tiempoFinal",fin);
ggbApplet.evalCommand("sIni="+fun+"("+ini+"");
si=redondear(ggbApplet.getValue("sIni"));
ggbApplet.evalCommand("sFin="+fun+"("+fin+"");
sf=redondear(ggbApplet.getValue("sFin"));
s=segmento+"=Segment[("+si+", "+y+"),("+sf+", "+y+")]";
ggbApplet.evalCommand(s);
ggbApplet.setLabelVisible(segmento,false);
}

```

//Función que ubica un punto de la grafica

```

function ubicarPunto(Punto,x,y){
    ggbApplet.setFixed(Punto,false);
    ggbApplet.setCoords(Punto,x,y);
    ggbApplet.setFixed(Punto,true);
}

```

//Función permite crear dos listas: una de tiempos y otra los valores que se obtienen al ser evaluados en una función.

```

function generarValoresAABB(tInicio){
    listaTiempoAA[k] = tInicio;

```

```
listaTiempoBB[k] = tInicio;

listaDistanciaAA[k]=redondearNdigitos(evaluarEnFuncionSinRedondeo("g",tInicio),10);

listaDistanciaBB[k]=redondearNdigitos(evaluarEnFuncionSinRedondeo("f",tInicio),10);

}
```

//Función que permite evaluar la función (ecuación) que se encuentra en la vista algebraica.

```
function evaluarEnFuncion(f,x){

    ggbApplet.evalCommand("v="+f+"("+x+")");

    v=redondear(ggbApplet.getValue("v"));

    return v;

}
```

//Evalúa la función anterior pero con redondeo.

```
function evaluarEnFuncionSinRedondeo(f,x){

    ggbApplet.evalCommand("v="+f+"("+x+")");

    v=ggbApplet.getValue("v");

    return v;

}
```

//Función que permite generar un número aleatorio y lo redondea según cantidad de dígitos ingresados.

```
function dxRandom(n){

    num=0;
```

```
while(num==0){  
    num = Math.trunc(Math.random()*10)/Math.pow(10,n);  
}  
  
return num;  
}
```

// Función que permite redondear un número, solo que en este caso el número no es aleatorio.

```
function redondearNdigitos(x,n){  
    return Math.round(x*Math.pow(10,n))/Math.pow(10,n);  
}
```

//Función que redondea un numero a dos digitos

```
function redondear(x){  
    return Math.round(x*100)/100;  
}
```

//INICIO - Validación para los datos de la primera tabla

```
function validart1(){  
    var t1 = ggbApplet.getValue("t1");  
    if(listaTiempoAA[k]==t1){  
        valT1=true;  
    }else{  
        valT1=false;  
    }  
}
```

```
        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
    }  
}
```

```
function validart2(){  
    var t2 = ggbApplet.getValue("t2");  
    if(listaTiempo[k]==t2){  
        valT2=true;  
    }else{  
        valT2=false;  
        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
    }  
}
```

```
function validars1(){  
    var s1 = ggbApplet.getValue("s1");  
    if(listaDistanciaAA[k]==s1){  
        valS1=true;  
    }else{  
        valS1=false;  
        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
    }  
}
```

```
function validars2(){  
    var s2 = ggbApplet.getValue("s2");  
    if(listaDistanciaA[k]==s2){  
        valS2=true;  
    }else{  
        valS2=false;  
        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
    }  
}
```

```
function validarDt1(){  
    if(inicioPrograma==false){  
        var t1 = ggbApplet.getValue("t1");  
        var t2 = ggbApplet.getValue("t2");  
        var dt1 = ggbApplet.getValue("dt1");  
        var dt=redondearNdigitos(t2-t1,n);  
  
        if(dt1==dt){  
            valDif1[0]=1;  
        }else{  
            valDif1[0]=0;  
            alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
        }  
}
```

```
}  
}
```

```
function validarDs1(){  
    if(inicioPrograma==false){  
        var s1 = ggbApplet.getValue("s1");  
        var s2 = ggbApplet.getValue("s2");  
        var ds1 = ggbApplet.getValue("ds1");  
        var ds=redondearNdigitos(s2-s1,10);  
  
        if(ds1==ds){  
            valDif1[1]=1;  
        }else{  
            valDif1[1]=0;  
            alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
        }  
    }  
}
```

```
function validarDsDt1(){  
    if(inicioPrograma==false){  
        var ds1 = ggbApplet.getValue("ds1");  
        var dt1 = ggbApplet.getValue("dt1");
```

```
var dsdt1 = ggbApplet.getValue("dsdt1");

var dsdt=redondearNdigitos(ds1/dt1,10);


if(valDif1[0]==1 && valDif1[1]==1){

    if(dsdt1==dsdt){

        valDif1[2]=1;

        puntoA = "A"+(i+1)+"=("+listaTiempo[i]+","+"dsdt1+")";

        ggbApplet.evalCommand(puntoA);

        ggbApplet.setVisible("A"+(i+1),true);

        listaDsDt1+=(","+"dsdt1);

        dsdt1Full=1;

        if(dsdt1Full==1 && dsdt2Full==1){

            ggbApplet.evalCommand("SetActiveView[2]");

            agregarDatosTablaTiempoRapidez();

        }

    }else{

        valDif1[2]=0;

        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");

    }

}else{

    alert("Por favor complete primero dt y ds");

}

}
```

```
}
```

```
//FIN - Para los datos de la primera tabla
```

```
//INICIO - Validación para los datos de la segunda tabla
```

```
function validart3(){  
    var t3 = ggbApplet.getValue("t3");  
    if(listaTiempoBB[i]==t3){  
        valT3=true;  
    }else{  
        valT3=false;  
        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
    }  
}
```

```
function validart4(){  
    var t4 = ggbApplet.getValue("t4");  
    if(listaTiempo[i]==t4){  
        valT4=true;  
    }else{  
        valT4=false;  
        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
    }  
}
```



```
function validars3(){  
    var s3 = ggbApplet.getValue("s3");  
    if(listaDistanciaBB[i]==s3){  
        valS3=true;  
    }else{  
        valS3=false;  
        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
    }  
}
```

```
function validars4(){  
    var s4 = ggbApplet.getValue("s4");  
    if(listaDistanciaB[i]==s4){  
        valS4=true;  
    }else{  
        valS4=false;  
        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
    }  
}
```

```
function validarDt2(){  
    if(inicioPrograma==false){  
        var t3 = ggbApplet.getValue("t3");
```

```
var t4 = ggbApplet.getValue("t4");  
var dt2 = ggbApplet.getValue("dt2");  
var dt=redondearNdigitos(t4-t3,n);  
  
if(dt2==dt){  
    valDif2[0]=1;  
}else{  
    valDif2[0]=0;  
    alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
}  
}  
}  
  
function validarDs2(){  
    if(inicioPrograma==false){  
        var s3 = ggbApplet.getValue("s3");  
        var s4 = ggbApplet.getValue("s4");  
        var ds2 = ggbApplet.getValue("ds2");  
        var ds=redondearNdigitos(s4-s3,10);  
  
        if(ds2==ds){  
            valDif2[1]=1;  
        }else{
```

```
        valDif2[1]=0;

        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");

    }

}

}
```

```
function validarDsDt2(){

    if(inicioPrograma==false){

        var ds2 = ggbApplet.getValue("ds2");

        var dt2 = ggbApplet.getValue("dt2");

        var dsdt2 = ggbApplet.getValue("dsdt2");

        var dsdt=redondearNdigitos(ds2/dt2,10);

        if(valDif2[0]==1 && valDif2[1]==1){

            if(dsdt2==dsdt){

                valDif2[2]=1;

                puntoB = "B"+(i+1)+"=("+listaTiempo[i]+","+dsdt2+")";

                ggbApplet.evalCommand(puntoB);

                ggbApplet.setVisible("B"+(i+1),true);

                listaDsDt2+=(","+dsdt2);

                dsdt2Full=1;

                if(dsdt1Full==1 && dsdt2Full==1){

                    ggbApplet.evalCommand("SetActiveView[2]");
```

```
        agregarDatosTablaTiempoRapidez();
    }
    }else{
        valDif2[2]=0;
        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");
    }
    }else{
        alert("Por favor complete primero dt y ds");
    }
}
}
```

//FIN - Para los datos de la segunda tabla

//Función que permite generar la respuesta según las tasas medias de los dos vehículos.

```
function generarRespuesta(){
    var solPregunta=0;
    var dsdt1 = ggbApplet.getValue("dsdt1");
    var dsdt2 = ggbApplet.getValue("dsdt2");

    if(dsdt1>dsdt2){
        solPregunta=1;
    }else if (dsdt2>dsdt1){
```

```

        solPregunta=2;
    }
return solPregunta;
}

```

//Función que permite agregar la respuesta a la tabla.

```

function agregarRespuestaTabla(){
    listT = listaT1.split(",");
    listR = listaDeRespuestas.split(",");
    var k=0, txtDatos="{\"Tiempo\",\"Respuesta\"},";
    var tablaR="";
    for(k=1;k<listT.length;k++){
        txtDatos += "\""+listT[k]+"\", \""+listR[k]+"\"},";
    }
    txtDatos += "\"c|\"";
    tablaR = "tablaRespuestas=TableText["+txtDatos+"]";
    ggbApplet.evalCommand(tablaR);
}

```

//Función que permite agregar la respuesta a la tabla.

```

function agregarDatosTablaTiempoRapidez(){
    listDsDt1 = listaDsDt1.split(",");
    listDsDt2 = listaDsDt2.split(",");

```

```

var k=0, txtDatos="{\"Tiempo(t)\",\"\\blue{Rapidez(Ds/Dt)}\\\",\"\\red{Rapidez(Ds/Dt)}\\\", \"\";

var tabla3 ="";

for(k=1;k<listDsDt2.length;k++){

    txtDatos                                     +=\"{\\\"+listaTiempo[k-
1]+\"\\\",\"\\blue{\"+listDsDt1[k]+\"}\\\",\"\\red{\"+listDsDt2[k]+\"}\\\", \"\";

}

txtDatos += \"\\c|_\\\";

tabla3 = \"tablaDatos3=TableText[\"+txtDatos+\"]\";

ggbApplet.evalCommand(tabla3);

dsdt1Full=0;

dsdt2Full=0;

}

```

//INICIO - Validar respuesta

```

function validarRespuesta(){

    var flag = false;

    var t1 = ggbApplet.getValue(\"dt1\");

    var t2 = ggbApplet.getValue(\"dt2\");

    if(valDif1[2]==1 && valDif2[2]==1 && t1>0 && t2>0 ){

        respuesta = ggbApplet.getValue(\"respuesta\");

        if(generarRespuesta()==respuesta){

            if(respuesta==\"1"){

                listaDeRespuestas += \",A\";

```

```
}else if(respuesta=="2"){  
    listaDeRespuestas += ",B";  
}  
else{  
    listaDeRespuestas += ",IGUALES";  
}  
agregarRespuestaTabla();  
valDif1=[0,0,0];  
valDif2=[0,0,0];  
ggbApplet.setValue("t1","0");  
ggbApplet.setValue("t2","0");  
ggbApplet.setValue("t3","0");  
ggbApplet.setValue("t4","0");  
ggbApplet.setValue("s1","0");  
ggbApplet.setValue("s2","0");  
ggbApplet.setValue("s3","0");  
ggbApplet.setValue("s4","0");  
ggbApplet.setValue("dt1","0");  
ggbApplet.setValue("dt2","0");  
ggbApplet.setValue("ds1","0");  
ggbApplet.setValue("ds2","0");  
ggbApplet.setValue("dsdt1","0");  
ggbApplet.setValue("dsdt2","0");  
flag = true;
```

```
        if(listaTiempo[i]==15){  
            ggbApplet.setCaption("btnIniciar","Finalizado");  
            alert("La actividad finalizó.");  
        }  
    }else{  
        alert("Respuesta Incorrecta");  
    }  
}else{  
    var dst1 = ggbApplet.getValue("dsdt1");  
    var dst2 = ggbApplet.getValue("dsdt2");  
    if(inicioPrograma==false){  
        alert("Para continuar debe primero calcular los ds/dt.");  
    }else{  
        inicioPrograma=false;  
    }  
    flag=false;  
}  
ggbApplet.setValue("respuesta","0");  
  
return flag;  
}
```

//FIN - Validar Respuesta


```
function acercarA(){  
    if(z>-1 && z<=5){  
        ggbApplet.evalCommand("ZoomIn[2, pma]");  
        var zoomA = ggbApplet.getValue("zoomA");  
        zoomA=zoomA+1;  
        ggbApplet.setValue("zoomA",zoomA);  
        var pos=obtenerPosicionZoom("A");  
        if(zoomA>=listaZoomMin[pos] && zoomA<=listaZoomMax[pos]){  
            ggbApplet.setValue("mostrarTextoZoomA",1);  
        }else{  
            ggbApplet.setValue("mostrarTextoZoomA",0);  
        }  
    }  
}
```

//Función que permite hacer zoom para acercar móvil A

```
function alejarA(){  
    if(z>-1 && z<=5){  
        ggbApplet.evalCommand("ZoomOut[2, pma]");  
        var zoomA = ggbApplet.getValue("zoomA");  
        zoomA=zoomA-1;  
        ggbApplet.setValue("zoomA",zoomA);  
        var pos=obtenerPosicionZoom("A");
```

```
if(zoomA>=listaZoomMin[pos] && zoomA<=listaZoomMax[pos]){  
    ggbApplet.setValue("mostrarTextoZoomA",1);  
}else{  
    ggbApplet.setValue("mostrarTextoZoomA",0);  
}  
}  
}
```

//Función que permite hacer zoom para acercar móvil B

```
function acercarB(){  
    if(z>-1 && z<=5){  
        ggbApplet.evalCommand("ZoomIn[2, pmb]");  
        var zoomB = ggbApplet.getValue("zoomB");  
        zoomB=zoomB+1;  
        ggbApplet.setValue("zoomB",zoomB);  
        var pos=obtenerPosicionZoom("B");  
        if(zoomB>=listaZoomMin[pos] && zoomB<=listaZoomMax[pos]){  
            ggbApplet.setValue("mostrarTextoZoomB",1);  
        }else{  
            ggbApplet.setValue("mostrarTextoZoomB",0);  
        }  
    }  
}
```

//Función que permite hacer zoom para alejar el móvil A

```
function alejarB(){
    if(z>-1 && z<=5){
        ggbApplet.evalCommand("ZoomOut[2, pmb]");
        var zoomB = ggbApplet.getValue("zoomB");
        zoomB=zoomB-1;
        ggbApplet.setValue("zoomB",zoomB);
        var pos=obtenerPosicionZoom("B");
        if(zoomB>=listaZoomMin[pos] && zoomB<=listaZoomMax[pos]){
            ggbApplet.setValue("mostrarTextoZoomB",1);
        }else{
            ggbApplet.setValue("mostrarTextoZoomB",0);
        }
    }
}
```

//Función que permite hacer zoom para alejar el móvil B.

```
function obtenerPosicionZoom(vehiculo){
    var distancia = ggbApplet.getValue("distanciaRecorrida"+vehiculo);
    var posicion=0;
    for(var i=6;i>=0;i--){
        if(distancia<=listaDistanciasZoom[i]){
            posicion = i;
        }
    }
}
```

```
        break;  
    }  
}  
return posicion;  
}
```

Apéndice D. Programación actividad 4

//Variables globales

var k=1;

var validar = false;

var valT1 = false;

var valT2 = false;

var valS1 = false;

var valS2 = false;

var valDt = false;

var valDs = false;

inicioPrograma=true;

i=0;

f=3;

n=2;

z=-1;

listaTiempo=[];

listaDistanciaA=[];

listaTiempoAA=[];

listaDistanciaAA=[];

listaZoomMin=[2,5,6,10,13,16,19];

listaZoomMax=[3,6,7,13,16,19,22];

```
listaDistanciasZoom=[1,0.1,0.01,0.001,0.0001,0.00001,0.000001];
```

```
listaT1="0";
```

```
listaD1="0";
```

```
listaT2="0";
```

```
listaD2="0";
```

```
dt1=0;
```

```
ds1=0;
```

```
dsdt1=0;
```

```
valDif1=[0,0,0];
```

```
valDif2=[0,0,0];
```

```
validDsDt=false;
```

//Función que se ejecuta al iniciar el programa.

```
function ggbOnInit() {  
    valoresHojaCalculo();  
    valoresIniciales();  
    alert("Por favor haga Clic en el boton Inicio para empezar la actividad. ");  
}
```

//Función que se ejecuta en ggbOnInit() y permite hacer algunas configuraciones iniciales.

```
function valoresIniciales(){  
    ggbApplet.setCaption("btnIniciar","Inicio");  
    ggbApplet.setValue("t","0");
```

```

ggbApplet.setValue("dt1","0");
ggbApplet.setValue("ds1","0");
ggbApplet.setValue("dsdt1","0");
ggbApplet.setValue("zoomA","0");
ggbApplet.setVisible("btnVerificarFormRec",false);
ggbApplet.setValue("verTextoCalcular",1);
crearListaDeTiempos();
}

```

//Función que permite crear valores en la hoja de calculo de GeoGebra

```

function valoresHojaCalculo(){
    var comando="";
    for(var k=0;k<=1500;k++){
        var comando="SetValue(A" + (k+2) + ", "(0.01*k) + ")";
        ggbApplet.evalCommand(comando);
        var comando="SetValue(B" + (k+2) + ", " + evaluarEnFuncionSinRedondeo("g",0.01*k) + ")";
        ggbApplet.evalCommand(comando);
    }
}

```

//Función que permite crear dos listas: una de tiempos y otra los valores que se obtienen al ser evaluados en otra función.

```

function crearListaDeTiempos(){

```

```

listaTiempo[0]=0; listaDistanciaA[0]=evaluarEnFuncionSinRedondeo("g",listaTiempo[0]);

for(var i=1;i<=1500;i++){

    listaTiempo[i] =0.01*i;

listaDistanciaA[i]=redondearNdigitos(evaluarEnFuncionSinRedondeo("g",listaTiempo[i]),10);

    listaDistanciaAA[i-
1]=redondearNdigitos(evaluarEnFuncionSinRedondeo("g",listaTiempo[i-1]),10);

}

}

```

//Paso 1: Iniciar

```

function iniciarAnimacion(){

    ggbApplet.setValue("verTextoCalcular",1);

    var zoomA = ggbApplet.getValue("zoomA");

    if(zoomA==0 ){

        if(k==1){

            ggbApplet.setValue("inicio","false");

            ggbApplet.setCaption("btnIniciar","Continuar");

            ggbApplet.setVisible("btnIniciar",false);

            animarVehiculo(listaTiempo[i],listaTiempo[i+1]);

            k++;

            validar=true;

            z++;

```



```
}else{

    validar=true;

    i++;

    if(i<=1500){

        ggbaApplet.setVisible("btnIniciar",false);

        if(i==1500){

            animarVehiculo(listaTiempo[i-1],15);

        }else{

            animarVehiculo(listaTiempo[i],listaTiempo[i+1]);

        }

        z++;

    }else{

        alert("La actividad finalizo.");

        ggbaApplet.setCaption("btnIniciar","Finalizado");

    }

}

}else{

    alert("Por favor vuelva el Zoom A , haciendo clic sobre Acercar o Alejar segun corresponda.");

}

return false;

}
```

//Paso 2: Animar vehiculo

```
function animarVehiculo(tInicio,tFinal){  
    var comando = "t=Slider("+tInicio+","+tFinal+", 0.1, 2, 200, false, true, true, false)";  
    ggbApplet.evalCommand("StartAnimation(t,true)");  
    ggbApplet.evalCommand(comando);  
    ggbApplet.setVisible("t",false);  
    ggbApplet.setValue("tInicio",tInicio);  
    ubicarPunto("AA",listaDistanciaAA[i],4);  
}
```

//Paso 3: Validación de datos

//INICIO - Para los datos de la primera tabla

```
function validart1(){  
    var t1 = ggbApplet.getValue("t1");  
    if(listaTiempo[i]==t1){  
        valT1=true;  
    }else{  
        valT1=false;  
        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
    }  
}  
  
function validart2(){
```

```
var t2 = ggbApplet.getValue("t2");  
if(listaTiempo[i+1]==t2){  
    valT2=true;  
}  
else{  
    valT2=false;  
    alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
}  
}
```

```
function validars1(){  
    var s1 = ggbApplet.getValue("s1");  
    if(listaDistanciaAA[i]==s1){  
        valS1=true;  
    }  
    else{  
        valS1=false;  
        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
    }  
}
```

```
function validars2(){  
    var s2 = ggbApplet.getValue("s2");  
    if(listaDistanciaA[i+1]==s2){  
        valS2=true;
```

```
}else{  
    valS2=false;  
    alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
}  
}  
  
function validarDt1(){  
    if(validar){  
        var t1 = ggbApplet.getValue("t1");  
        var t2 = ggbApplet.getValue("t2");  
        var dt1 = ggbApplet.getValue("dt1");  
        var dt=redondearNdigitos(t2-t1,10);  
  
        if(dt1==dt){  
            valDt = true;  
        }else{  
            valDt = false;  
            alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
        }  
    }  
}  
  
function validarDs1(){
```

```
if(validar){  
    var s1 = ggbApplet.getValue("s1");  
    var s2 = ggbApplet.getValue("s2");  
    var ds1 = ggbApplet.getValue("ds1");  
    var ds=redondearNdigitos(s2-s1,10);  
  
    if(ds1==ds){  
        valDs = true;  
    }else{  
        valDs = false;  
        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
    }  
}  
}
```

```
function validarDsDt1(){  
    var ds1 = ggbApplet.getValue("ds1");  
    var dt1 = ggbApplet.getValue("dt1");  
    var dsdt1 = ggbApplet.getValue("dsdt1");  
    var dsdt=redondearNdigitos(ds1/dt1,10);  
    if(validar){  
        if(valDt && valDs){  
            if(dsdt1==dsdt){
```

```
ggbApplet.setValue("verTextoCalcular",0);

valT1 = false; valT2 = false;

valS1 = false; valS2 = false;

valDt = false; valDs=false;

validar = false;


ggbApplet.setVisible("btnVerificarFormRec",true);


ggbApplet.evalCommand("SetActiveView[2]");
var punto = "Punto"+(i+1)+"=("+listaTiempo[i]+","+dsdt1+")";
ggbApplet.evalCommand(punto);
ggbApplet.setVisible("Punto"+(i+1),true);
ggbApplet.evalCommand("ShowLabel(Punto"+(i+1)+", false)");


ggbApplet.evalCommand("SetActiveView[\"S\"]");
var fila=f-1;
var comando="C"+fila+"="+dsdt1;
ggbApplet.evalCommand(comando);
}else{
    alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");
}
}else{
    alert("Por favor complete primero Dt y Ds");
```

```
    }  
  }  
}
```

//FIN - Para los datos de la primera tabla

//Paso 4: Verificación de la formula de recurrencia.

```
function verificar(){  
    var distDV = ggbApplet.getValue("distDV");  
    var distFB1 = ggbApplet.getValue("distFB1");  
    var distLD1 = ggbApplet.getValue("distLD1");  
    var distNF1 = ggbApplet.getValue("distNF1");  
  
    var distIC1 = ggbApplet.getValue("distIC1");  
    var distIL1 = ggbApplet.getValue("distIL1");  
    var distEA1 = ggbApplet.getValue("distEA1");  
    var distME1 = ggbApplet.getValue("distME1");  
    var distEN1 = ggbApplet.getValue("distEN1");  
    var distMN1 = ggbApplet.getValue("distMN1");  
    var distEE1 = ggbApplet.getValue("distEE1");  
    var distMA1 = ggbApplet.getValue("distMA1");  
  
    if(distDV==0 && distFB1==0 && distLD1==0 && distNF1==0 ){  
        var EAC = distME1 + distEA1+ distIC1;
```

```
var EAL = distME1 + distEA1+ distIL1;
```

```
var AEL = distMA1 + distEE1+ distIL1;
```

```
var AEC = distMA1 + distEE1+ distIC1;
```

```
var NAC = distMN1 + distEA1+ distIC1;
```

```
var NAL = distMN1 + distEA1+ distIL1;
```

```
var ENC = distME1 + distEN1+ distIC1;
```

```
var ENL = distME1 + distEN1+ distIL1;
```

```
var ANC = distMA1 + distEN1+ distIC1;
```

```
var ANL = distMA1 + distEN1+ distIL1;
```

```
var NEC = distMN1 + distEE1+ distIC1;
```

```
var NEL = distMN1 + distEE1+ distIL1;
```

```
if(EAC==0 || EAL ==0 || AEL==0 || AEC==0 || NAC==0 || NAL==0 || ENC==0 || ENL==0 ||
ANC==0 || ANL==0 || NEC==0 || NEL==0){
```

```
    alert("¡Felicitaciones!, construiste la Formula Recurrente correctamente.");
```

```
    alert("Espere un momento mientras se generan todos los valores de Ds/Dt en la hoja de
calculo y la grafica de t Vs Ds/Dt .");
```

```
    calcularDsDt();
```

```
    graficarTabla();
```

```
    validDsDt=false;
```

```
    ggbApplet.setVisible("btnVerificarFormRec",false);
```

```
    ggbApplet.setVisible("btnIniciar",false);
```

```
    return false;
```



```

    }else{

        alert("Formula Recurrente incorrecta");

    }

}else{

    alert("Formula Recurrente incorrecta");

}

ggbApplet.setVisible("btnVerificarFormRec",false);

ggbApplet.setVisible("btnIniciar",true);

f++;

}

```

//Función que permite dibujar el avance del movil una vez ha avanzado.

```

function dibujarSegmento(segmento,fun,ini,fin,y){

    var si=0, sf=0;

    ggbApplet.setValue("tiempoFinal",fin);

    ggbApplet.evalCommand("sIni="+fun+"("+ini+")");

    si=redondear(ggbApplet.getValue("sIni"));

    ggbApplet.evalCommand("sFin="+fun+"("+fin+")");

    sf=redondear(ggbApplet.getValue("sFin"));

    s=segmento+"=Segment[("+si+", "+y+"),("+sf+", "+y+")]";

    ggbApplet.evalCommand(s);

    ggbApplet.setLabelVisible(segmento,false);

```

```
}
```

//Función que permite ubicar los puntos en la grafica

```
function ubicarPunto(Punto,x,y){  
    ggbApplet.setFixed(Punto,false);  
    ggbApplet.setCoords(Punto,x,y);  
    ggbApplet.setFixed(Punto,true);  
}
```

//Evalua la función

```
function evaluarEnFuncion(f,x){  
    ggbApplet.evalCommand("v="+f+"("+x+")");  
    v=redondear(ggbApplet.getValue("v"));  
    return v;  
}
```

//Evalua la función sin redondeo

```
function evaluarEnFuncionSinRedondeo(f,x){  
    ggbApplet.evalCommand("v="+f+"("+x+")");  
    v=ggbApplet.getValue("v");  
    return v;  
}
```

//Función que permite generar un número randomico y lo redondea según cantidad de digitos ingresados.

```
function dxRandom(n){  
    num=0;  
    while(num==0){  
        num = Math.trunc(Math.random()*10)/Math.pow(10,n);  
    }  
    return num;  
}
```

//Similar a la función anterior, solo que en este caso el numero no es randomico.

```
function redondearNdigitos(x,n){  
    return Math.round(x*Math.pow(10,n))/Math.pow(10,n);  
}
```

//Función que redondea un numero a dos digitos

```
function redondear(x){  
    return Math.round(x*100)/100;  
}
```

//Función que permite hacer zoom para acercar

```
function acercarA(){
```

```

if(z>-1 && z<=5){

    ggbApplet.evalCommand("ZoomIn[2, pma]");

    var zoomA = ggbApplet.getValue("zoomA");

    zoomA=zoomA+1;

    ggbApplet.setValue("zoomA",zoomA);

    var pos=obtenerPosicionZoom("A");

    if(zoomA>=listaZoomMin[pos] && zoomA<=listaZoomMax[pos]){

        ggbApplet.setValue("mostrarTextoZoomA",1);

    }else{

        ggbApplet.setValue("mostrarTextoZoomA",0);

    }

}

}

```

//Función que permite hacer zoom para alejar

```

function alejarA(){

    if(z>-1 && z<=5){

        ggbApplet.evalCommand("ZoomOut[2, pma]");

        var zoomA = ggbApplet.getValue("zoomA");

        zoomA=zoomA-1;

        ggbApplet.setValue("zoomA",zoomA);

        var pos=obtenerPosicionZoom("A");

        if(zoomA>=listaZoomMin[pos] && zoomA<=listaZoomMax[pos]){

```

```
        ggbApplet.setValue("mostrarTextoZoomA",1);  
    }else{  
        ggbApplet.setValue("mostrarTextoZoomA",0);  
    }  
}  
}
```

//Función que permite resetear el zoom hecho.

```
function obtenerPosicionZoom(vehiculo){  
    var distancia = ggbApplet.getValue("distanciaRecorrida"+vehiculo);  
    var posicion=0;  
    for(var i=6;i>=0;i--){  
        if(distancia<=listaDistanciasZoom[i]){  
            posicion = i;  
            break;  
        }  
    }  
    return posicion;  
}
```

//Función que calcula la derivada ds/dt

```
function calcularDsDt(){
    var x1=0,x2=0,y1=0,y2=0,dsdt=0;

    var comando="";

    ggbApplet.evalCommand("SetActiveView[\"S\"]");

    for(var i=0;i<1499;i++){

        x1=ggbApplet.getValue("Cell(1,"+(i+2)+")");
        y1=ggbApplet.getValue("Cell(2,"+(i+2)+")");
        x2=ggbApplet.getValue("Cell(1,"+(i+3)+")");
        y2=ggbApplet.getValue("Cell(2,"+(i+3)+")");

        dsdt = (y2-y1)/(x2-x1);

        comando="SetValue(C"+(i+2)+", "+dsdt+"");

        ggbApplet.evalCommand(comando);

    }
}
```

//Función que permite agregar datos a la tabla

```
function graficarTabla(){

    ggbApplet.evalCommand("SetActiveView[2]");

    for(var i=0;i<1499;i++){

        var x=ggbApplet.getValue("Cell(1,"+(i+2)+")");
        var y=ggbApplet.getValue("Cell(3,"+(i+2)+")");

        var punto = "Punto"+(i+1)+"=("+x+", "+y+")";
```

```
ggbApplet.evalCommand(punto);  
ggbApplet.setVisible("Punto"+(i+1),true);  
ggbApplet.evalCommand("ShowLabel(Punto"+(i+1)+", false)");  
}  
}
```

Apéndice E. Programación actividad 5

//Variables globales

var tipoFuncion = 0;

var tipoDerivada = 0;

var valT1=false;

var valT2=false;

var valS1=false;

var valS2=false;

var valDt=false;

var valDs=false;

var funciones=[0,0,0,0];

var cantidadFunciones=0;

var funcionActual=0;

var sumaPuntos=0;

//Función de GeoGebra que permite cargar valores iniciales.

```
function ggbOnInit() {  
    valoresIniciales();  
}
```

//Función creada para configurar valores iniciales.

```
function valoresIniciales(){
```



```
//Resetear valores
```

```
ggbApplet.setValue("t",0);
```

```
//Ocultar Preguntas:
```

```
//Pregunta 1:
```

```
ggbApplet.setValue("P1Constante",0);
```

```
ggbApplet.setValue("P1Variable",0);
```

```
ggbApplet.setValue("ControlesP1",0);
```

```
//Pregunta 2:
```

```
ggbApplet.setValue("P2Constante",0);
```

```
ggbApplet.setValue("P2Lineal",0);
```

```
ggbApplet.setValue("P2Cuadratica",0);
```

```
ggbApplet.setValue("P2Cubica",0);
```

```
ggbApplet.setValue("ControlesP2",0);
```

```
//Pregunta 3:
```

```
ggbApplet.setValue("ControlesP3",0);
```

```
//Pregunta 4:
```

```
ggbApplet.setValue("P4Opcion1",0);
```

```
ggbApplet.setValue("P4Opcion2",0);
```

```
ggbApplet.setValue("P4Opcion3",0);
```

```
ggbApplet.setValue("P4Opcion4",0);  
ggbApplet.setValue("ControlesP4",0);
```

```
//Pregunta 5:
```

```
ggbApplet.setValue("P5Constante",0);  
ggbApplet.setValue("P5Lineal",0);  
ggbApplet.setValue("P5Cuadratica",0);  
ggbApplet.setValue("P5Cubica",0);  
ggbApplet.setValue("ControlesP5",0);
```

```
//Puntos que generan graficas en Grafica 1
```

```
ggbApplet.setValue("control_{cons}",0);  
ggbApplet.setValue("control_{lin}",0);  
ggbApplet.setValue("control_{cuadra}",0);  
ggbApplet.setValue("control_{cubi}",0);
```

```
//Puntos que generan graficas en Grafica 2
```

```
ggbApplet.setValue("derCons",0);  
ggbApplet.setValue("derLin",0);  
ggbApplet.setValue("derCuad",0);  
ggbApplet.setValue("derCubi",0);
```

```
//Punto para calcular rapidez
```

```
ggbApplet.setValue("zoom",0);
ggbApplet.setVisible("pIni",false);

//Ocultar botón "continuar actividad"
ggbApplet.setValue("verContinuarActividad",0);
ggbApplet.setValue("verMensajeErrorZoom",0);
}

//Función que permite cargar la animación del flujo en el grifo.
function iniciarAnimacion(inicio){
    if(inicio){
        tipoFun = genNumAleatoreo(1,4); funcionActual=tipoFun;
        if(esNuevaLaFuncion(tipoFun)){
            mostrarFlujoDeAguaInicial(tipoFun);
            animarSalidaDeAgua(0,5);
            ggbApplet.setValue("ControlesP1",1);
            cantidadFunciones++;
        }else{
            var inicio = ggbApplet.getValue("inicio");
            iniciarAnimacion(inicio);
        }
    }else{
        alert("La actividad finalizo. ¡Gracias por participar!");
    }
}
```

```
}  
}
```

//Función usada en la función "iniciarAnimacion()". Esta función construye el deslizador de tiempo.

```
function animarSalidaDeAgua(tInicio,tFinal){  
    var comando = "t=Slider("+tInicio+", "+tFinal+", 0.01, 1, 200, false, true, true, false)";  
    ggbApplet.evalCommand("StartAnimation(t,true)");  
    ggbApplet.evalCommand(comando);  
}
```

//Función usada en la función "iniciarAnimacion()". Permite seleccionar el tipo de función.

```
function mostrarFlujoDeAguaInicial(x){  
    tipoFuncion = x;  
    switch(x) {  
        case 1: //Función constante  
            ggbApplet.setValue("flujoCons",1);  
            ggbApplet.setValue("flujoLin",0);  
            ggbApplet.setValue("flujoCuadra",0);  
            ggbApplet.setValue("flujoCubi",0);  
            tipoDerivada = 0;  
            break;  
        case 2: //Función lineal
```

```
        ggbApplet.setValue("flujoCons",0);  
        ggbApplet.setValue("flujoLin",1);  
        ggbApplet.setValue("flujoCuadra",0);  
        ggbApplet.setValue("flujoCubi",0);  
        tipoDerivada = 0;  
        break;  
  
    case 3: //Función cuadrática  
        ggbApplet.setValue("flujoCons",0);  
        ggbApplet.setValue("flujoLin",0);  
        ggbApplet.setValue("flujoCuadra",1);  
        ggbApplet.setValue("flujoCubi",0);  
        tipoDerivada = 1;  
        break;  
  
    case 4: //Función cúbica  
        ggbApplet.setValue("flujoCons",0);  
        ggbApplet.setValue("flujoLin",0);  
        ggbApplet.setValue("flujoCuadra",0);  
        ggbApplet.setValue("flujoCubi",1);  
        tipoDerivada = 2;  
        break;  
    }  
}
```

//Función similar a "mostrarFlujoDeAguaInicial()", solo que esta se ejecuta a partir del segundo ejemplo.

```
function mostrarFlujoDeAgua(x){  
  switch(x) {  
    case 1: //Función constante  
      ggbApplet.setValue("control_{cons}",1);  
      ggbApplet.setValue("control_{lin}",0);  
      ggbApplet.setValue("control_{cuadra}",0);  
      ggbApplet.setValue("control_{cubi}",0);  
      break;  
    case 2: //Función lineal  
      ggbApplet.setValue("control_{cons}",0);  
      ggbApplet.setValue("control_{lin}",1);  
      ggbApplet.setValue("control_{cuadra}",0);  
      ggbApplet.setValue("control_{cubi}",0);  
      break;  
    case 3: //Función cuadratica  
      ggbApplet.setValue("control_{cons}",0);  
      ggbApplet.setValue("control_{lin}",0);  
      ggbApplet.setValue("control_{cuadra}",1);  
      ggbApplet.setValue("control_{cubi}",0);  
      break;  
    case 4: //Función cúbica
```

```
ggbApplet.setValue("control_{cons}",0);  
ggbApplet.setValue("control_{lin}",0);  
ggbApplet.setValue("control_{cuadra}",0);  
ggbApplet.setValue("control_{cubi}",1);  
break;  
}  
}
```

//Función que permite verificar el tipo de solución seleccionada por el estudiante.

```
function esNuevaLaFuncion(tipoFun){  
  var i=tipoFun-1;  
  
  if(funciones[i]==0){  
    funciones[i]=1;  
    return true;  
  }else{  
    return false;  
  }  
}
```

//Como su nombre lo indica, esta función permite validar si la respuesta a la pregunta 1 es correcta.

```
function validarPregunta1(){  
  var estadoConstante = ggbApplet.getValue("P1Constante");
```

```
var estadoVariable = ggbApplet.getValue("P1Variable");

if(estadoConstante){
    if(tipoFuncion == 1){
        alert("Correcto.");
        ggbApplet.setValue("ControlesP1",0);
        ggbApplet.setValue("ControlesP2",1);
        graficarFuncion(tipoFuncion);
    }else{
        alert("Incorrecto. Haga clic en boton Reiniciar y Observar nuevamente.");
    }
}

if(estadoVariable){
    if(tipoFuncion != 1){
        alert("Correcto.");
        ggbApplet.setValue("ControlesP1",0);
        ggbApplet.setValue("ControlesP2",1);
        graficarFuncion(tipoFuncion);
    }else{
        alert("Incorrecto. Haga clic en boton Reiniciar y Observar nuevamente.");
    }
}
```



```
}
```

//Como su nombre lo indica, esta función permite validar si la respuesta a la pregunta 2 es correcta.

```
function validarPregunta2(){  
  
    var estadoConstante = ggbApplet.getValue("P2Constante");  
  
    var estadoLineal = ggbApplet.getValue("P2Lineal");  
  
    var estadoCuadratica = ggbApplet.getValue("P2Cuadratica");  
  
    var estadoCubica = ggbApplet.getValue("P2Cubica");  
  
  
    if(estadoConstante){  
  
        if(tipoFuncion == 1){  
  
            alert("Correcto.");  
  
            ggbApplet.setValue("ControlesP2",0);  
  
            ggbApplet.setValue("ControlesP3",1);  
  
            graficarFuncionTiempoAleatorio(tipoFuncion);  
  
        }else{  
  
            alert("Incorrecto. Observa nuevamente la grafica 1 y responde.");  
  
            graficarFuncion(tipoFuncion);  
  
        }  
  
    }  
  
}  
  
  
if(estadoLineal){
```

```
if(tipoFuncion == 2){  
    alert("Correcto.");  
    ggbApplet.setValue("ControlesP2",0);  
    ggbApplet.setValue("ControlesP3",1);  
    graficarFuncionTiempoAleatorio(tipoFuncion);  
}else{  
    alert("Incorrecto. Observa nuevamente la grafica 1 y responde.");  
    graficarFuncion(tipoFuncion);  
}  
}  
  
if(estadosCuadratica){  
    if(tipoFuncion == 3){  
        alert("Correcto.");  
        ggbApplet.setValue("ControlesP2",0);  
        ggbApplet.setValue("ControlesP3",1);  
        graficarFuncionTiempoAleatorio(tipoFuncion);  
    }else{  
        alert("Incorrecto. Observa nuevamente la grafica 1 y responde.");  
        graficarFuncion(tipoFuncion);  
    }  
}
```

```
if(estadoCubica){  
    if(tipoFuncion == 4){  
        alert("Correcto.");  
        ggbApplet.setValue("ControlesP2",0);  
        ggbApplet.setValue("ControlesP3",1);  
        graficarFuncionTiempoAleatorio(tipoFuncion);  
    }else{  
        alert("Incorrecto. Observa nuevamente la grafica 1 y responde.");  
        graficarFuncion(tipoFuncion);  
    }  
}  
}
```

//Inicio: Graficar funciones:

```
function graficarFuncion(tipoFun){  
    mostrarFlujoDeAgua(tipoFun);  
    ggbApplet.setValue("t",0);  
    var comando = "t=Slider(0,5, 0.01, 2, 200, false, true, true, false)";  
    ggbApplet.evalCommand("StartAnimation(t,true)");  
    ggbApplet.evalCommand(comando);  
}
```

```
function graficarFuncionTiempoFijo(tipoFun){
```

```
mostrarFlujoDeAgua(tipoFun);  
var tFin=ggbApplet.getValue("t");  
ggbApplet.setValue("t",0);  
var comando = "t=Slider(0,"+tFin+", 0.01, 2, 1000, false, true, true, false)";  
ggbApplet.evalCommand("StartAnimation(t,true)");  
ggbApplet.evalCommand(comando);  
}
```

```
function graficarFuncionTiempoAleatorio(tipoFun){  
    mostrarFlujoDeAgua(tipoFun);  
    var t=genNumAleatoreo2(0,5);  
    ggbApplet.setValue("t",0);  
    var comando = "t=Slider(0,"+t+", 0.01, 2, 200, false, true, true, false)";  
    ggbApplet.evalCommand("StartAnimation(t,true)");  
    ggbApplet.evalCommand(comando);
```

//Cordenada del punto pIni

```
var sFin = redondearNdigitos(obtener_fIni(t),5);  
ggbApplet.setValue("sFin",sFin);  
var tIni = t+0.0001;  
ggbApplet.setValue("tIni",tIni);  
var sIni = redondearNdigitos(obtener_fIni(tIni),5);  
ggbApplet.setValue("sIni",fIni);
```

```

ggbApplet.evalCommand("SetActiveView[2]");
puntopini = "pIni=Point[{ "+tIni+", "+sIni+"}]";
ggbApplet.evalCommand(puntopini);
ggbApplet.setVisible("pIni",false);
}

```

```

function graficarDerivadaFuncion(tipoFun){
    mostrarDerivada(tipoFun);
    ggbApplet.setValue("t",0);
    var comando = "t=Slider(0,5, 0.01, 2, 200, false, true, true, false)";
    ggbApplet.evalCommand("StartAnimation(t,true)");
    ggbApplet.evalCommand(comando);
}

```

//Fin: Graficar funciones:

//Función que permite mostrar la derivada según el tipo

```

function mostrarDerivada(x){
    switch(x) {
        case 1: //Función constante
            ggbApplet.setValue("derCons",1);
            ggbApplet.setValue("derLin",0);
            ggbApplet.setValue("derCuad",0);
            ggbApplet.setValue("derCubi",0);

```

```
        break;

    case 2: //Función lineal

        ggbApplet.setValue("derCons",0);

        ggbApplet.setValue("derLin",1);

        ggbApplet.setValue("derCuad",0);

        ggbApplet.setValue("derCubi",0);

        break;

    case 3: //Función cuadrática

        ggbApplet.setValue("derCons",0);

        ggbApplet.setValue("derLin",0);

        ggbApplet.setValue("derCuad",1);

        ggbApplet.setValue("derCubi",0);

        break;

    case 4: //Función cúbica

        ggbApplet.setValue("derCons",0);

        ggbApplet.setValue("derLin",0);

        ggbApplet.setValue("derCuad",0);

        ggbApplet.setValue("derCubi",1);

        break;

    }

}
```

```
function obtener_fIni(tIni){  
    fIni = null;  
    switch(tipoFuncion){  
        case 1:  
            ggbApplet.evalCommand("fIni=y_{cons}("+tIni+"");  
            fIni = ggbApplet.getValue("fIni");  
            break;  
        case 2:  
            ggbApplet.evalCommand("fIni=y_{lin}("+tIni+"");  
            fIni = ggbApplet.getValue("fIni");  
            break;  
        case 3:  
            ggbApplet.evalCommand("fIni=y_{cuad}("+tIni+"");  
            fIni = ggbApplet.getValue("fIni");  
            break;  
        case 4:  
            ggbApplet.evalCommand("fIni=y_{cub}("+tIni+"");  
            fIni = ggbApplet.getValue("fIni");  
            break;  
    }  
    return fIni;  
}
```

//Función que permite hacer Zoom de acercamiento dependiendo del tipo de función.

```
function zoomAcercar(){  
  switch(tipoFuncion){  
    case 1:  
      ggbApplet.evalCommand("ZoomIn[3, cons]");  
      break;  
    case 2:  
      ggbApplet.evalCommand("ZoomIn[3, lin]");  
      break;  
    case 3:  
      ggbApplet.evalCommand("ZoomIn[3, cuad]");  
      break;  
    case 4:  
      ggbApplet.evalCommand("ZoomIn[3, cubi]");  
      break;  
  }  
  
  zoom = ggbApplet.getValue("zoom");  
  zoom=zoom+1;  
  ggbApplet.setValue("zoom",zoom);  
}
```

//Función que permite hacer Zoom de alejamiento dependiendo del tipo de función.

```
function zoomAlejar(){
```



```
switch(tipoFuncion){  
    case 1:  
        ggbApplet.evalCommand("ZoomOut[3, cons]");  
        break;  
    case 2:  
        ggbApplet.evalCommand("ZoomOut[3, lin]");  
        break;  
    case 3:  
        ggbApplet.evalCommand("ZoomOut[3, cuad]");  
        break;  
    case 4:  
        ggbApplet.evalCommand("ZoomOut[3, cubi]");  
        break;  
}  
zoom = ggbApplet.getValue("zoom");  
zoom=zoom-1;  
ggbApplet.setValue("zoom",zoom);  
}
```

//INICIO - Para los datos del cálculo de la derivada Dv/Dt .

```
function validart1(){  
    var tIni = redondearNdigitos(ggbApplet.getValue("t"),5);  
    var t1 = ggbApplet.getValue("t1");
```

```
if(tIni==t1){  
    valT1=true;  
}  
else{  
    valT1=false;  
    alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
}  
}
```

```
function validart2(){  
    var tFin = redondearNdigitos(ggbApplet.getValue("tIni"),5);  
    var t2 = ggbApplet.getValue("t2");  
    if(tFin==t2){  
        valT2=true;  
    }else{  
        valT2=false;  
        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
    }  
}
```

//Valida el valor para v1

```
function validars1(){  
    var sIni = redondearNdigitos(ggbApplet.getValue("sFin"),5);  
    var s1 = ggbApplet.getValue("s1");
```

```
if(sIni==s1){  
    valS1=true;  
}  
else{  
    valS1=false;  
    alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
}  
}
```

//Valida el valor para v2

```
function validars2(){  
    var sFin = redondearNdigitos(ggbApplet.getValue("sIni"),5);  
    var s2 = ggbApplet.getValue("s2");  
    if(sFin==s2){  
        valS2=true;  
    }else{  
        valS2=false;  
        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
    }  
}
```

```
function validarDt(){  
    var t1 = ggbApplet.getValue("t1");
```

```
var t2 = ggbApplet.getValue("t2");  
var dt = ggbApplet.getValue("dt");  
var dtreal=redondearNdigitos(t2-t1,5);  
  
if(dtreal==dt){  
    valDt=true;  
}  
else{  
    valDt=false;  
    alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");  
}  
}
```

//Valida el valor para Dv

```
function validarDs(){  
    var s1 = ggbApplet.getValue("s1");  
    var s2 = ggbApplet.getValue("s2");  
    var ds = ggbApplet.getValue("ds");  
    var dsreal=redondearNdigitos(s2-s1,5);  
  
    if(dsreal==ds){  
        valDs=true;  
    }else{  
        valDs=false;  
    }  
}
```

```
        alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");
    }
}

//Valida el valor para Dv/Dt

function validarDsDt(){

    var ds = ggbApplet.getValue("ds");
    var dt = ggbApplet.getValue("dt");
    var dsdt = ggbApplet.getValue("dsdt");
    var dsdtreal=redondearNdigitos(ds/dt,5);

    if(valDt && valDs){
        if(dsdtreal==dsdt){
            alert("Correcto.");
            ggbApplet.setValue("verContinuarActividad",1);
        }else{
            alert("Valor incorrecto. Por favor realice nuevamente el calculo.");
        }
    }else{
        alert("Por favor complete primero Dt y Dv");
    }
}
```

//FIN - Para los datos de la tabla

//Función asociada al botón btnContinuarActividad ("continuar actividad")

```
function continuarActividad(){  
    zoom = ggbApplet.getValue("zoom");  
    if(zoom==0){  
        ggbApplet.setValue("verMensajeErrorZoom",0);  
        ggbApplet.setValue("verContinuarActividad",0);  
        ggbApplet.setValue("ControlesP3",0);  
        ggbApplet.setValue("ControlesP4",1);  
    }else{  
        ggbApplet.setValue("verMensajeErrorZoom",1);  
    }  
}
```

//Como su nombre lo indica, función que permite validar si la pregunta 4 es correcta.

```
function validarPregunta4(){  
    var estadoOpcion1 = ggbApplet.getValue("P4Opcion1");  
    var estadoOpcion2 = ggbApplet.getValue("P4Opcion2");  
    var estadoOpcion3 = ggbApplet.getValue("P4Opcion3");  
    var estadoOpcion4 = ggbApplet.getValue("P4Opcion4");  
  
    if(estadoOpcion1){
```

```
graficarFuncionTiempoFijo(tipoFuncion);

alert("Incorrecto. Observa nuevamente la grafica 1 y responde.");

}

if(estadoOpcion2){

    alert("Correcto.");

    ggbApplet.setValue("ControlesP4",0);

    graficarDerivadaFuncion(tipoFuncion);

    ggbApplet.setValue("ControlesP5",1);

}

if(estadoOpcion3){

    graficarFuncionTiempoFijo(tipoFuncion);

    alert("Incorrecto. Observa nuevamente la grafica 1 y responde.");

}

if(estadoOpcion4){

    alert("Correcto.");

    ggbApplet.setValue("ControlesP4",0);

    graficarDerivadaFuncion(tipoFuncion);

    ggbApplet.setValue("ControlesP5",1);

}

}
```

//Como su nombre lo indica, función que permite validar si la pregunta 5 es correcta.

```
function validarPregunta5(){  
  
    var estadoConstante = ggbApplet.getValue("P5Constante");  
  
    var estadoLineal = ggbApplet.getValue("P5Lineal");  
  
    var estadoCuadratica = ggbApplet.getValue("P5Cuadratica");  
  
    var estadoCubica = ggbApplet.getValue("P5Cubica");  
  
  
    if(estadoConstante){  
  
        if(tipoDerivada == 0){  
  
            bloqueCodigo();  
  
        }else{  
  
            alert("Incorrecto. Observa nuevamente la grafica 2 y responde.");  
  
            graficarDerivadaFuncion(tipoFuncion);  
  
        }  
    }  
  
  
    if(estadoLineal){  
  
        if(tipoDerivada == 1){  
  
            bloqueCodigo();  
  
        }else{  
  
            alert("Incorrecto. Observa nuevamente la grafica 2 y responde.");  
  
            graficarDerivadaFuncion(tipoFuncion);  
  
        }  
    }  
}
```



```
}

if(estadoCuadratica){
    if(tipoDerivada == 2){
        bloqueCodigo();
    }else{
        alert("Incorrecto. Observa nuevamente la grafica 2 y responde.");
        graficarDerivadaFuncion(tipoFuncion);
    }
}

if(estadoCubica){
    if(tipoDerivada == 3){
        bloqueCodigo();
    }else{
        alert("Incorrecto. Observa nuevamente la grafica 2 y responde.");
        graficarDerivadaFuncion(tipoFuncion);
    }
}

}
```

//Función usada en la función validarPregunta5(), que permite resetear la actividad.

```
function bloqueCodigo(){  
    alert("Correcto.");  
    ggbApplet.setValue("ControlesP5",0);  
  
    sumaPuntos = funciones[0]+funciones[1]+funciones[2]+funciones[3];  
    if(sumaPuntos<4){  
        valoresIniciales();  
        ggbApplet.setVisible("reseterActividad",false);  
    }else{  
        ggbApplet.setValue("inicio",0);  
        ggbApplet.setVisible("reseterActividad",true);  
    }  
  
    var inicio = ggbApplet.getValue("inicio");  
    iniciarAnimacion(inicio);  
}
```

//Función que permite calcular numeros aleatorias sobre el intervalo [a,b], usada en la función "iniciarAnimacion()".

```
function genNumAleatoreo(a,b){  
    return Math.round(a+Math.random()*(b-a));  
}
```

//Función que permite calcular números aleatorias sobre el intervalo [a,b], usada en la función

"graficarFuncionTiempoAleatorio()"

```
function genNumAleatoreo2(a,b){  
    return Math.round((a+Math.random()*(b-a))*10)/10;  
}
```

//Función que permite redondear números según cantidad de dígitos

```
function redondearNdigitos(x,n){  
    return Math.round(x*Math.pow(10,n))/Math.pow(10,n);  
}
```