

ESPECTRO ELECTRÓNICO DE UN ANILLO CON ALTURA VARIABLE

JERÓNIMO AICARDO GRISALES CERÓN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2010

ESPECTRO ELECTRÓNICO DE UN ANILLO CON ALTURA VARIABLE

TRABAJO DE GRADO
Para optar al título de físico

JERÓNIMO AICARDO GRISALES CERÓN
2032772

DIRECTOR:
Ph.D ILIA DAVIDOVICH MIKHAILOV



CONSTRUIMOS FUTURO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2010

Resumen

TITULO: Espectro electrónico de un anillo con altura variable*

AUTOR: Jerónimo Aicardo Grisales Cerón**

PALABRAS CLAVES: Anillo Cuántico, Cráter, Aproximación Adiabática, Método de Galerkin, Efecto Aharonov-Bohm.

CONTENIDO: En la variedad de los puntos cuánticos, los anillos cuánticos son objeto de numerosos estudios debido a sus posibles aplicaciones en dispositivos ópticos. Los anillos cuánticos experimentalmente fabricados no son circulares, ni absolutamente uniformes. Los anillos circulares uniformes de anchura estrecha con uno o dos electrones, en un campo magnético, muestran una amplia variedad de fenómenos físicos interesantes: Corrientes persistentes, transparencia total para valores específicos de un campo magnético externo, oscilaciones de energía del estado base cuando se incrementa el campo magnético externo, saltos bruscos de la magnetización, etc. En este trabajo se presenta un estudio del espectro energético de un electrón atrapado en un anillo cuántico delgado que tiene forma de un cráter con el grosor que se incrementa linealmente en la dirección radial y puede variarse arbitrariamente en la dirección angular. Para separar en la ecuación de Schrödinger las variables responsables por los movimientos planos y por los movimientos perpendiculares al plano, se aplica la aproximación adiabática. Las ecuaciones separadas se resuelven utilizando el método de Galerkin. Se presentan los resultados de cálculo para las energías de los diferentes niveles energéticos en función del radio, ancho del anillo, su altura y la intensidad de campo magnético, aplicado a lo largo de eje de simetría. Se demuestra que el efecto de Aharonov-Bohm se apaga tanto bajo la influencia de los defectos estructurales, como con la disminución de la pendiente del cráter.

* Proyecto de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Iliá Davidovich Mikhailov

Abstract

TITLE: Electronic spectrum of a ring with variable height*

AUTHOR: Jerónimo Aicardo Grisales Cerón**

Key Words: Quantum ring, crater, adiabatic approximation, Galerkin method, Aharonov-Bohm effect.

CONTENT: In the array of quantum dots, quantum rings are widely studied because of their potential applications in optical devices. The experimentally fabricated quantum rings are not circular, and quite uniform. The circular rings of narrow width consistent with one or two electrons in a magnetic field, show a wide variety of interesting physical phenomena: persistent currents, total transparency for specific values of an external magnetic field, oscillations of the ground state energy with increasing the external magnetic field, sudden jumps of magnetization, etc... This paper presents a study of the energy spectrum of an electron trapped in a thin quantum ring-shaped crater with a thickness that increases linearly in the radial direction and can be varied arbitrarily in the angular direction. To separate the Schrödinger equation the variables responsible for the plane motion and the motion perpendicular to the plane, we apply the adiabatic approximation. The separate equations are solved using the Galerkin method. We present the results of calculation for the energies of the different energy levels depending on the radio, ring width, height and intensity of magnetic field, applied along the axis of symmetry. We show that the Aharonov-Bohm effect goes both under the influence of structural defects, and with the decrease of the slope of the crater.

* Proyecto de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Ilia Davidovich Mikhailov

TABLA DE CONTENIDO

1. Introducción	9
2. Marco Teórico	14
2.1. Hamiltoniano	14
2.2. Efecto Aharonov-Bohm para un anillo 1D	16
2.3. Aproximación adiabática	18
2.4. Modelo con la solución exacta. Funciones de base	19
2.5. Método de Galerkin	24
2.6. Cálculo de las integrales de Fourier	27
2.7. Algoritmo de procedimiento numérico	29
3. Resultados y discusión	30
4. Conclusiones	34
5. Bibliografía	36

LISTA DE FIGURAS

1. Imagen experimental y su simulación para un QR	11
2. Modelo de un volcán con grosor homogéneo	15
3. Modelos de anillos con grosores no-homogéneos	16
a) con un defecto local	
b) con un defecto periódico	
4. Oscilaciones de Aharonov-Bohm en un QR 1D	17
5. Modificación de las curvas de las Oscilaciones de Aharonov-Bohm en QRs 2D a medida de que el radio interno se disminuye y el anillo se transforma en un disco	17
6. Estructura del espectro energético de un volcán de morfología perfecta	21
7. Funciones de onda para un electrón en un volcán de morfología perfecta	21
8. Densidad de distribución en la dirección radial del cráter para diferentes estados	22
9. Niveles energeticos en un volcán para un radio menor	22
10. Funciones de onda en un volcán de radio 100nm	23
11. Densidad de los estados en un volcán de radio 100nm	24
12. Energías del electrón en función del campo magnético para un radio de 100nm, un nivel de morfología igual a cero y la altura variable	31
13. Energías del electrón en función del campo magnético para un radio de 100nm, una altura de 10nm y un nivel de morfología variable	32
14. Energías del electrón en función del campo magnético para un radio de 100nm, una altura de 20nm y un nivel de morfología variable	33

1. Introducción

Un sistema de baja dimensionalidad (SBD) es una estructura donde el movimiento de las micro partículas tales como el electrón, fonón o fotón, etc. es restringido y el número de grados de la libertad en sus movimientos al interior de la estructura es menor que en el mundo actual de tres dimensiones. Los sistemas cuánticos de baja dimensionalidad han sido de enorme interés durante los últimos cuarenta años, proporcionado por un flujo constante de descubrimientos asombrosos y también por el potencial y las posibilidades de realización de nuevas arquitecturas de dispositivo electrónicos de tecnología avanzada.

Richard Feynman fue el primero en hacer referencia a las posibilidades de la nanociencia y la nanotecnología. Esta nueva rama de la ciencia nació en las últimas décadas del s. XX y ha tenido una gran transcendencia tecnológica e industrial. Este nuevo campo de investigación, se dedica a estudiar las propiedades cuánticas en un régimen intermedio entre la física atómica y la física macroscópica que se observa en materiales heterogéneos donde las propiedades se varían bruscamente en juntas separadas una a otra a escala nanométrica. Puesto que las regiones homogéneas de estas heteroestructuras tienen dimensiones de la misma escala que la longitud de onda de De Broglie de los portadores de carga, el comportamiento de estos requiere un análisis netamente cuántico. Los cambios en las propiedades de los materiales en las juntas conducen al confinamiento cuántico de las partículas cargadas y por ende, se restringe el movimiento de estos portadores en diferentes direcciones, según la geometría de la estructura cuántica.

La manera más usual de lograr esta restricción es mediante el crecimiento de una aleación semiconductor, con la composición que varía paulatinamente en máquinas de epitaxia de haces moleculares (MBE). Los elementos semiconductores usados para la elaboración de las estructuras SBD se dividen en los grupos IV, III-V e II-VI. Los materiales del grupo III-V han sido ampliamente estudiados, pero los del grupo IV son más difíciles de realizar por la gran diferencia entre sus constantes de red. Para confinar las partículas en

un espacio de dimensiones nanométricas, se necesitan barreras de potencial suficientemente altas en las fronteras. Una manera de hacer las juntas bien definidas a través del método de crecimiento epitaxial, es tomando las constantes de red muy similares por ambos lados, y otra condición consiste en la posibilidad de variar de una forma controlada los saltos de brecha de potencial en la junta. Para completar la construcción de una nanoestructura, frecuentemente después del crecimiento se utiliza la litografía y selectiva grabación de las superficies preparadas. Después se recubre la superficie del material con un componente protector, sobre el cual se imprime un patrón que debe ser quitado posteriormente en conjunto con el semiconductor subyacente a través de la grabación. Entonces, finalmente se obtiene una nanoestructura que confina los electrones tanto en la dirección de MBE-crecimiento, como perpendicularmente a la dirección del movimiento.

Las heterojuntas fabricadas se pueden clasificar de acuerdo a sus simetrías, como superredes, pozos, hilos o puntos cuánticos. Un pozo cuántico es un potencial que confina en dos dimensiones. Los efectos del confinamiento cuántico se producen cuando el espesor del pozo es comparable a la longitud de onda de De Broglie de los portadores de carga. Los pozos cuánticos se forman por un semiconductor emparedado entre dos capas de materiales con composiciones diferentes. Los pozos cuánticos se usan en la fabricación de diodos laser y también se los utiliza para fabricar transistores de alta movilidad de electrones. La superred es una estructura periódica de pozos cuánticos con grosores de tamaño nanométrico, separados por las barreras cuyos grosores son del mismo orden. Esta estructura se forma a través de dos materiales de semiconductores diferentes, que son depositados alternativamente uno sobre el otro para formar una estructura periódica en la dirección de crecimiento. Desde el momento de la fabricación de la primera superred por Leo Esaki y Rafael Tsu en 1970, se han logrado grandes avances en los estudios tanto experimentales como teóricos de las estructuras cuánticas.

En un hilo cuántico las dimensiones del grosor son muy pequeñas en comparación con la longitud del hilo. Debido al confinamiento en la dirección transversal, su energía transversal es cuantizada y como consecuencia su

resistencia también esta cuantizada, variando con el voltaje de una forma discreta.

Un punto cuántico (QD) es una nanoestructura semiconductor que confina el movimiento en las tres direcciones espaciales. Son aplicados en diodos emisores de luz o LED. Los QDs pueden tener el aspecto de una lente, un disco, un cono o un volcán. El método más usado para fabricar QDs es el auto-ensamblado. En este método, sobre un material, por ejemplo GaAs, se deposita otro tipo de semiconductor con mayor constante de red, por ejemplo InAs. Cuando se depositan una o dos capas, en ellas aparece una tensión adicional, la cual en un momento de deposición produce un colapso formando unas islas del material InAs casi idénticas, separadas una de otra que se llaman QDs. Sus dimensiones laterales varían de 20 a 200nm, mientras la altura de estas islas es del orden de 2-4nm [1-3]. Por esta razón, estas estructuras se consideran como casi-2D. La morfología puede variarse en una forma controlada, a través de régimen térmico y de presión. Adicionalmente, la morfología de estas estructuras se fija mediante de recubrimiento por el material GaAs.

Utilizando técnicas especiales, se puede lograr en el proceso de crecimiento, una transformación de una lente en un volcán. En un régimen especial, un QD en forma de lente empieza a extenderse formando un cráter en el centro. Estas estructuras se llaman anillos cuánticos (QR). Un ejemplo típico de la imagen de QR obtenido a través de Microscopio de Fuerza Atómica y su modelo 3D [4] se presenta en la Fig. 1

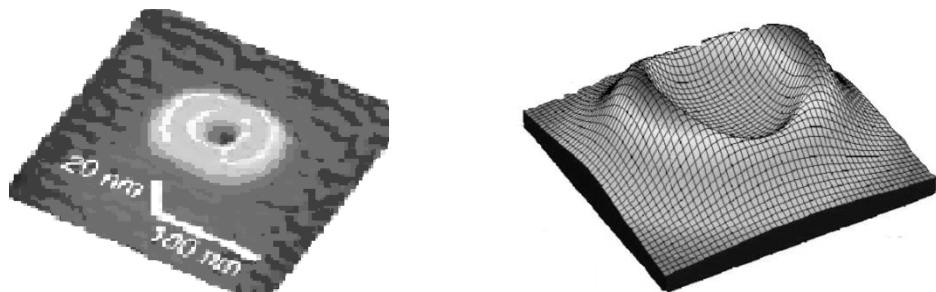


Fig.1 Imagen experimental y su simulación para un QR

Las estructuras cuánticas con simetría anular fabricadas recientemente en la base de diferentes composiciones semiconductoras, han despertado un gran interés tanto de físicos teóricos como experimentalistas. Fue demostrado que estas estructuras tienen unas propiedades específicas, no parecidas a las que tienen otras heterojunturas. Los anillos cuánticos tienen una topología diferente y esto se muestra en cálculos teóricos considerando modelos 2D simplificados, que conducen a nuevas propiedades y fenómenos físicos, tales como las corrientes persistentes, transparencia total para valores específicos de un campo magnético externo, oscilaciones de energía del estado base cuando se incrementa el campo magnético externo, saltos bruscos de la magnetización, etc.

El cálculo más simple que ilustra todas estas propiedades puede realizarse para un modelo de anillo 1D, en el límite cuando el ancho del anillo tiende a cero. Los niveles energéticos para un electrón, como se muestra en el siguiente párrafo, se encuentran de manera exacta, y las propiedades mencionadas anteriormente son evidentes. Como fue encontrado en el artículo [5], la ecuación de Schrödinger para 2 electrones en un anillo 1D, también se puede resolver en una forma exacta, y la solución encontrada, a pesar de que esta es mucho más complicada, conduce a las propiedades del anillo 1D con 1 electrón. Las propiedades específicas de los anillos cuánticos 1D en presencia de un campo magnético externo y específicamente las oscilaciones de la energía del estado base, se llaman el EFECTO DE AHARONOV-BOHM (AB).

El análisis del modelo 2D del anillo con uno y dos electrones [6-8], muestra que a medida que el ancho del anillo se incrementa y el anillo poco a poco se transforma en un disco (el radio interno se disminuye), las oscilaciones de AB se apagan. Es decir, los fenómenos de AB son evidentes solamente cuando el ancho del anillo es suficientemente pequeño en comparación con el radio de la línea central. Una de las tareas del análisis teórico es establecer las condiciones, cuando el efecto de AB se manifiesta. Como fue establecido en los trabajos publicados anteriormente [9-14], cualquier perturbación que rompe la simetría axial de los anillos uno- y bidimensionales, producida por ejemplo

por los defectos estructurales, por la presencia de un campo eléctrico o una impureza, también conducen a un aniquilamiento de las oscilaciones AB.

A pesar de que en la mayoría de los trabajos teóricos, se analizaron modelos 1D y 2D, la morfología real de los QRs, sugiere tener en cuenta la variación de la altura. Como la altura real de los QRs es muy pequeña (de orden de varios nanómetros), cualquier pequeña variación produce un cambio brusco de la energía para un movimiento de los portadores de carga en la dirección transversal y como consecuencia en su localización, y esto puede ser el otro mecanismo de desaparición de las oscilaciones AB. Los QRs fabricados en la realidad tienen la forma de un volcán o de un cráter, y sus alturas varían tanto en la dirección radial como en la dirección angular.

En esta tesis se propone un modelo 3D para QRs, que refleja la morfología de los anillos cuánticos fabricados, mucho mejor que un modelo 2D, utilizados en las publicaciones anteriores. En este modelo la altura del anillo se incrementa linealmente en la dirección radial. Se demostrará que el Hamiltoniano de este modelo 3D es completamente separable y que las funciones de onda para un electrón se encuentran en una forma analítica. Utilizando estas soluciones exactas como funciones de base en el método de Galerkin, nosotros analizaremos la influencia de los defectos estructurales en este modelo sobre las oscilaciones de AB.

2. Marco Teórico

2.1 Hamiltoniano

A continuación, se considera el problema de un electrón atrapado en una heteroestructura con forma de volcán. En la aproximación de la masa efectiva, el Hamiltoniano del sistema en presencia de un campo magnético en la dirección perpendicular al plano del cráter, en unidades adimensionales es:

$$H(\rho, z, \theta) = -\Delta + \frac{\gamma^2 \rho^2}{4} - i\gamma \frac{\partial}{\partial \theta} + V(\rho, z, \theta) \quad (2.1)$$

Aquí el radio de Bohr $a_0^* = \hbar^2 \varepsilon / m^* e^2$, se utiliza como unidad de longitud, el Rydberg efectivo $Ry^* = e^2 / 2\varepsilon a_0^* = \hbar^2 / 2m^* a_0^{*2}$ como unidad de energía y el parámetro $\gamma = e\hbar B / 2m^* c Ry^*$ como la unidad del campo magnético, siendo m^* , la masa efectiva de electrón y ε la constante dieléctrica. El potencial de confinamiento $V(\rho, z, \theta)$ es igual a cero dentro del volcán, se considera igual a cero dentro de él, e infinito fuera del volcán.

Como se menciona anteriormente, la morfología real de un QR es más parecida a la de un cráter. Como parámetros geométricos de esta estructura, se utilizarán en adelante la altura máxima h_0 del volcán y el radio externo R . Además, se considera el modelo en el cual el grosor del anillo se incrementa linealmente en la dirección radial, desde cero en el centro de simetría, hasta el valor máximo h_0 en la frontera exterior del anillo, es decir, la dependencia de la altura $h(\rho)$ de la estructura de un volcán sin defectos es:

$$h(\rho) = \frac{h_0 \rho}{R} \quad (2.2)$$

La imagen de una estructura con esta morfología se presenta en la Fig. 2

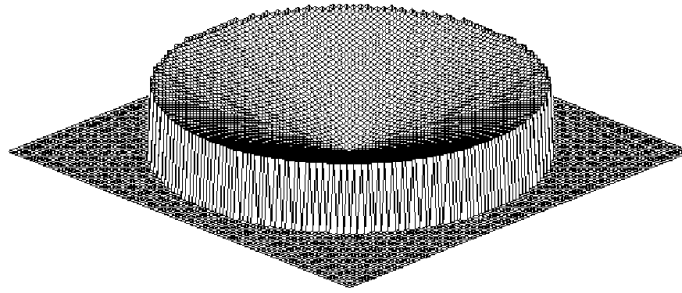


Fig. 2 Modelo de un volcán con grosor homogéneo

Para analizar la influencia de los defectos estructurales, se considera un modelo en el cual la altura del QR depende no solo del radio, sino también del ángulo, a través de la siguiente relación:

$$h(\rho, \vartheta) = \begin{cases} \frac{h_0 \rho}{R \sqrt{1 + \sigma f(\vartheta)}}; & 0 < \rho < R \\ 0; & \rho > R \end{cases} \quad (2.3)$$

Donde $f(\vartheta)$, describe la morfología de los defectos estructurales del QR y el parámetro σ define el nivel de no-homogeneidad del anillo ($0 < \sigma < 1$). En esta tesis se consideran dos diferentes tipos de defectos, relacionados con la formación de los grosores no-homogéneos en el proceso de crecimiento. En el primer modelo, la variación de la altura en la dirección angular está dada por la formula:

$$f(\vartheta) = \vartheta^2 \quad (2.4)$$

La imagen 3D de un volcán con la morfología correspondiente a las formulas (2.3) y (2.4), se presenta en la Fig. 3(a), donde se ve que la altura del QR se incrementa paulatinamente a medida que el ángulo polar crece desde cero hasta π . En el segundo modelo se utiliza la formula

$$f(\vartheta) = \sin^2(\vartheta) \quad (2.5)$$

La imagen 3D correspondiente a esta morfología se presenta en la Fig. 3(b). Se ve que el defecto en este caso separa el anillo en dos partes.

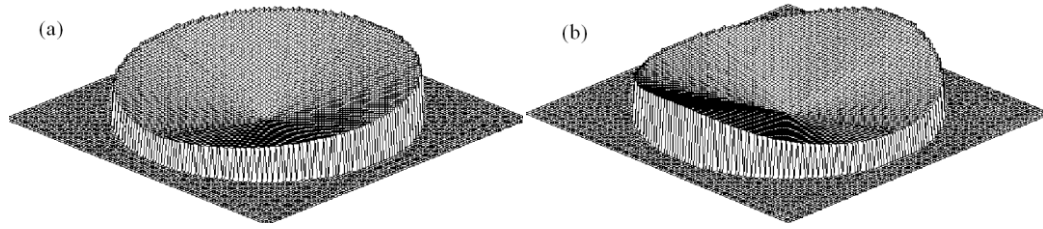


Fig. 3 Modelos de anillos con grosores no-homogéneos: a) con un defecto local; b) con un defecto periódico

El potencial de confinamiento para estos dos modelos se puede escribir en la forma siguiente:

$$V(\rho, z, \theta) = \begin{cases} 0, & 0 < z < h(\rho, \theta) \cup \rho < R \\ \infty, & \text{en otros casos} \end{cases} \quad (2.6)$$

2.2 Efecto Aharonov-Bohm para un anillo 1D.

El Hamiltoniano 3D (2.1) para un volcán no es separable y la solución exacta de la ecuación de Schrödinger no se puede obtener en el caso general. Sin embargo, en un caso límite cuando el ancho del anillo se tiende a cero, es decir para un QR 1D, los movimientos del electrón en las direcciones ρ y z se pueden despreciar. El Hamiltoniano (2.1) en este caso se aproxima como:

$$\frac{1}{R^2} \frac{d^2\Psi(\theta)}{d\theta^2} + i\gamma \frac{d\Psi(\theta)}{d\theta} + \frac{\gamma^2 R^2}{4} \Psi(\theta) = E\Psi(\theta) \quad (2.7)$$

Aquí en el caso unidimensional $\rho \equiv R, z = 0$. Debido a la simetría del sistema y a que el potencial únicamente depende de la coordenada azimutal, la solución de la ecuación (2.6) es muy simple $\Phi_m(\theta) = e^{im\theta}$. Sustituyendo esta función en la ecuación (2.6), enseguida se encuentra la energía del electrón:

$$E(\gamma) = \frac{m^2}{R^2} + \frac{\gamma^2 R^2}{4} + \gamma m; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.8)$$

El término γm en esta expresión corresponde a la energía paramagnética, y el otro, diamagnético, proporcional a $\frac{\gamma^2 R^2}{4}$, siempre produce un aumento de la energía del electrón. La competencia entre estos dos términos conduce a una

oscilación de la energía del estado base en función de la intensidad de campo magnético γ . En la Fig.4 se presentan los gráficos de las energías correspondientes a diferentes números cuánticos magnéticos m en función del campo magnético renormalizado. Se ve que cuando el valor de γR^2 con el aumento del campo magnético se hace igual a un número impar (“número mágico”), el momento magnético del estado base se incrementa bruscamente a saltos, mientras cuando este producto se hace igual a un número par aparecen los corrientes persistentes.

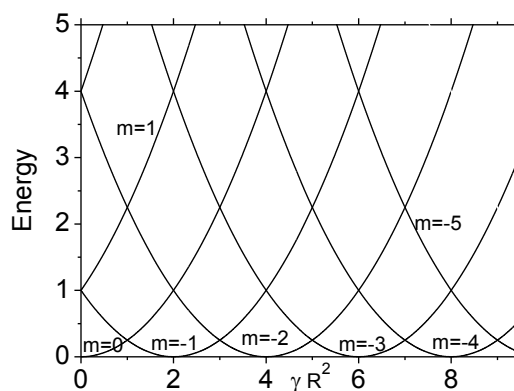


Fig. 4 Oscilaciones de Aharonov-Bohm en un QR 1D

Un conjunto de las propiedades de los QRs 1D relacionados con los gráficos presentados en la Fig. 4, se llama el efecto de Aharonov-Bohm. Hay que anotar que este efecto se presenta únicamente cuando el anillo es muy delgado. Por ejemplo, el análisis de los anillos 2D muestra que cuando el ancho del anillo se incrementa debido a disminución del radio interno, es decir, cuando el anillo paulatinamente se transforma en un disco, las AB oscilaciones desaparecen sucesivamente así como se muestra en la Fig. 5:

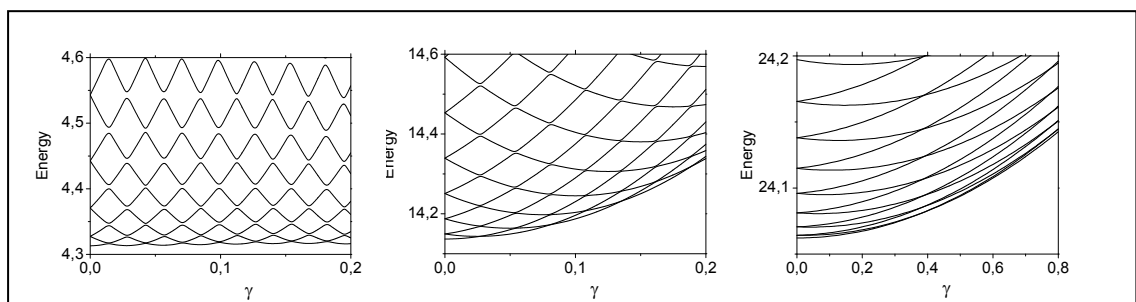


Fig. 5. Modificación de las curvas de las Oscilaciones de Aharonov-Bohm en QRs 2D a medida que el radio interno se disminuye y el anillo se transforma en un disco.

Más adelante se analizan propiedades similares en las estructuras 3D. Este análisis se simplifica en el marco de la aproximación adiabática, si uno tiene en cuenta que los QRs reales con morfologías similares a un volcán, tienen una altura muy pequeña, mucho menor que sus dimensiones laterales.

2.3 Aproximación adiabática

Como el confinamiento en la dirección Z es mucho más fuerte que confinamiento lateral, el movimiento del electrón en esta dirección es mucho más rápido que en la dirección lateral. Teniendo este hecho en cuenta y siguiendo el procedimiento estándar de la aproximación adiabática, se puede buscar la solución de la ecuación de Schrödinger 3D:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \Psi(\rho, z, \theta) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + i\gamma \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} + \left[\frac{\gamma^2 \rho^2}{4} + V(\rho, z, \theta) \right] \Psi = E\Psi \quad (2.9)$$

En la forma siguiente:

$$\Psi(\rho, z, \theta) = f(z, \rho, \theta)\Phi(\rho, \theta) \quad (2.10)$$

La función $f(z, \rho, \theta)$ en esta relación describe el movimiento rápido en la dirección vertical del cráter y es la solución de la siguiente ecuación de onda:

$$-\frac{\partial^2 f(\rho, z, \theta)}{\partial z^2} + V(\rho, z, \theta)f(\rho, z, \theta) = E_0(\rho, \theta)f(\rho, z, \theta) \quad (2.11)$$

Como el potencial $V(\rho, z, \theta)$ en la dirección Z presenta un pozo cuántico de barrera infinita y de ancho $h(\rho, \theta)$, la ecuación (2.11) tiene una solución analítica. Particularmente, la función de onda $f(\rho, z, \theta)$ y la energía $E_0(\rho, \theta)$ correspondiente al estado base que describen el movimiento rápido del electrón, tienen la forma:

$$f_0(\rho, z, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sen} \frac{\pi z}{h(\rho, \theta)}; \quad E_0(\rho, \theta) = \frac{\pi^2}{h^2(\rho, \theta)} \quad (2.12)$$

Siguiendo el procedimiento de la aproximación adiabática, en el segundo paso se analiza el movimiento en el plano del anillo y se encuentra la función $\Phi(\rho, \theta)$ que describe el movimiento lento. La ecuación de onda para esta

función se obtiene al sustituir la expresión (2.10) en (2.11) y teniendo en cuenta la igualdad (2.11).

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \Phi(\rho, \theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - i\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \left[\frac{\gamma^2 \rho^2}{4} + E_0(\rho, \theta) \right] \Phi = E\Phi \quad (2.13)$$

El modelo que se considera en esta tesis tiene una ventaja esencial. La ecuación diferencial (2.13) para este modelo puede separarse completamente debido a que la función $E_0(\rho, \theta)$ es inversamente proporcional a ρ e igual al segundo término en (2.13). En efectivo, utilizando las expresiones (2.12) y (2.3) se tiene:

$$E_0(\rho, \vartheta) = \frac{\pi^2}{h^2(\rho, \vartheta)} = \frac{\pi^2 R^2}{h_0^2 \rho^2} (1 + \sigma f(\vartheta)) = V_0(\rho) + V_p(\rho, \vartheta); \quad (2.14)$$

$$V_0(\rho) = \frac{\pi^2 R^2}{h_0^2 \rho^2} \quad (2.15)$$

$$V_p(\rho, \vartheta) = \sigma f(\vartheta) V_0(\rho) \quad (2.16)$$

Aquí $V_0(\rho)$ es un potencial de confinamiento que describe un cráter de forma homogénea (perfecta), mientras que $V_p(\rho, \vartheta)$ es una perturbación relacionada con los defectos estructurales. La ecuación (2.13) en el caso general no es separable y su solución no es posible encontrar en forma analítica. De manera contraria para un cráter de forma perfecta, esta ecuación se puede resolver de forma exacta.

2.4 Modelo con la solución exacta. Funciones de base

La ecuación de Schrödinger para un cráter de forma perfecta es:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi_0(\rho, \theta) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi_0(\rho, \theta)}{\partial \theta^2} + \frac{\pi^2 R^2}{h_0^2 \rho^2} \Phi_0(\rho, \vartheta) = E\Phi_0(\rho, \vartheta) \quad (2.17)$$

En esta ecuación se pueden separar las variables angular y radial usando la sustitución:

$$\Phi_0(\rho, \vartheta) = e^{im\vartheta} F(\rho) \quad (2.18)$$

Al sustituir (2.18) en (2.17) se encuentra que la función $F(\rho)$ satisface la ecuación de Bessel

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dF(\rho)}{d\rho} + \frac{\nu^2}{\rho^2} F(\rho) = EF(\rho); \quad \nu^2 = m^2 + \frac{\pi^2 R^2}{h_0^2} \quad (2.19)$$

La solución general de esta ecuación sin singularidades en el origen se expresa en términos de la función de Bessel de orden fraccionaria:

$$F(\rho) = \mathfrak{J}_\nu(\rho\sqrt{E}); \quad \nu = \sqrt{m^2 + \frac{\pi^2 R^2}{h_0^2}} \quad (2.20)$$

Según las condiciones de frontera, esta función debe anularse en el punto $\rho = R$, es decir:

$$\mathfrak{J}_\nu(X_{n,\nu}) = 0; \quad X_{n,\nu} = R\sqrt{E} \quad (2.21)$$

Aquí $X_{n,\nu}$ es un cero de número n ($n=1,2,\dots$) de la función de Bessel de orden ν .

Usando la relación (2.21) se obtiene la siguiente fórmula para los niveles de energía del electrón confinado en la estructura:

$$E_{n,m} = \frac{X_{n,\nu}^2}{R^2} \quad (2.22)$$

Existen expresiones analíticas para los ceros de las funciones de Bessel de órdenes ν grandes [17]

$$\begin{aligned} X_{1,m} &\approx \nu + 1.855757\nu^{1/3} + 1.03315\nu^{-1/3} \\ X_{2,m} &\approx \nu + 3.2247\nu^{1/3} + 3.1584\nu^{-1/3} \\ X_{3,m} &\approx \nu + 4.3817\nu^{1/3} + 5.7598\nu^{-1/3} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Finalmente las funciones de onda encontradas son:

$$\Phi_0^{(n,m)}(\rho, \theta) = J_\nu(\rho X_{n,m}/R) e^{im\theta}; \quad \nu = \sqrt{m^2 + \frac{\pi^2 R^2}{h^2}} \quad (2.24)$$

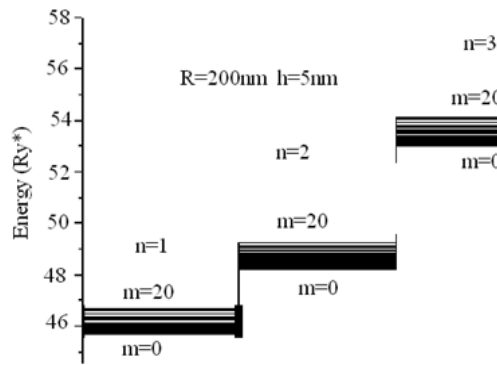


Fig. 6 Estructura del espectro energético de un volcán de morfología perfecta

En la figura 6, se observan los niveles energéticos para un cráter con un radio de 200nm y una altura de 5nm. Se graficaron los niveles para los números cuánticos $n=1, 2, 3$ y $m=1, 2, 3, \dots, 20$. Se ve que los niveles energéticos correspondientes a diferentes números cuánticos radiales n , forman unas bandas con subniveles m , separadas una de otra. En la fig. 7, se representan las funciones de onda del electrón atrapado en la misma heteroestructura y con los mismos parámetros de radio y altura, pero en este caso los números cuánticos son $n=1, 2, 3$ y $m=0$ y $m=10$. Se ve que las funciones de onda con diferentes momentos angulares casi coinciden y la modificación de forma de la función de onda está relacionada únicamente con el cambio del número cuántico radial.

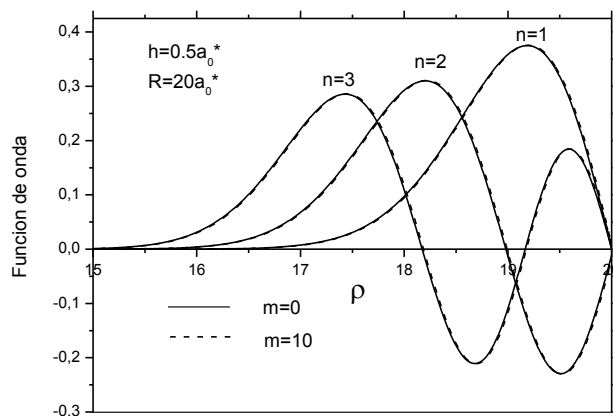


Fig. 7 Funciones de onda para un electrón en un volcán de morfología perfecta

A continuación en la figura 8 se muestra la densidad de distribución en la dirección radial del cráter para el caso anterior, en donde se ve que el electrón

se ubica con una probabilidad apreciable solamente a partir de un radio de 155nm para $n=1$, de 165nm para $n=2$ y de 175nm para $n=3$. También se puede apreciar que el electrón tiene una alta probabilidad de encontrarse a un radio de 190nm aproximadamente para $n=1$, a un radio de 180nm para $n=2$ y a un radio de 170nm para $n=3$.

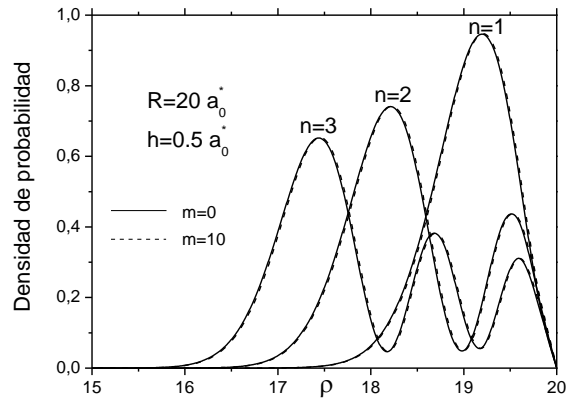


Fig.8 Densidad de distribución en la dirección radial del cráter para diferentes estados

A medida que se disminuye el radio, se observa un mayor espaciamiento entre los niveles de energía como se puede ver en la fig. 5, donde se presentan los resultados para un volcán con el radio dos veces menor, $R=100\text{nm}$, siendo la altura la misma $h=5\text{nm}$. Se representan las energías para tres sub-bandas inferiores correspondientes a los números cuánticos radiales $n=1, 2, 3$ y con veinte y un subniveles, correspondientes a los momentos angulares $m=0,1,\dots,20$.

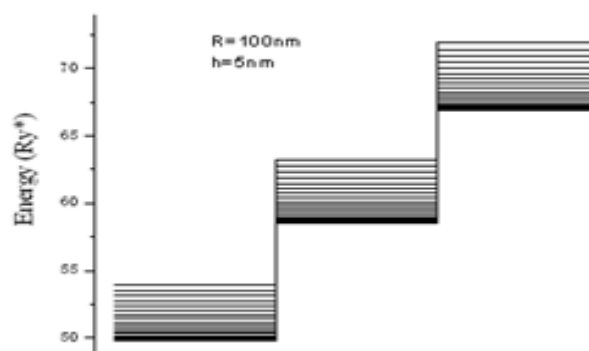


Fig.9 Niveles energeticos en un volcán para un radio menor

En la figura 6 se grafican las funciones de onda $\Phi_0^{(n,m)}(\rho, \theta)$ para diferentes números cuánticos n y m . En este caso (fig 9), las funciones de onda para diferentes momentos angulares y los mismos números cuánticos radiales se distinguen entre sí mejor que en el caso del radio de 200 nm, pero aun así la diferencia es muy pequeña entre ellas.

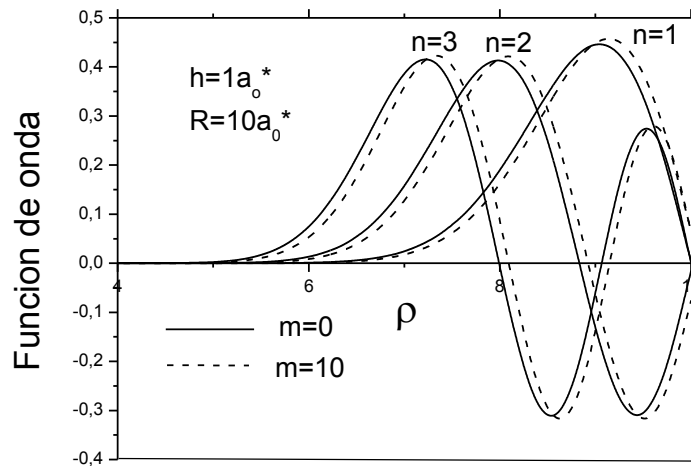


Fig. 10 Funciones de onda en un volcán de radio 100nm

La densidad de los estados correspondiente a las funciones de onda anteriores se muestra a continuación en la fig. 11. Se observa que el electrón aproximadamente se encuentra de manera más probable en un radio de 95nm para los estados con el número cuántico radial uno, a una distancia desde el eje de simetría de 85 nm para los estados con el número cuántico radial dos, y a la distancia de 80 nm para los estados con el número cuántico radial tres.

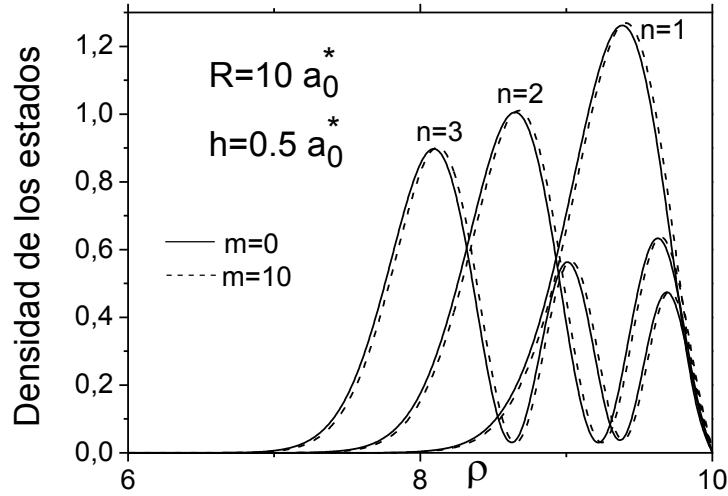


Fig.11 Densidad de los estados en un volcán de radio 100nm

2.5 Método de Galerkin

Se considera ahora un cráter de morfología diferente a la considerada en nuestro modelo, cuyo potencial de confinamiento $V(\rho, \theta)$ difiere del potencial de nuestro modelo $V_0(\rho)$. La diferencia entre estos dos potenciales se nombra como la perturbación estructural

$$V_e(\rho, \theta) = V_0(\rho) - V(\rho, \theta) \quad (2.25)$$

Además se incluye un campo magnético aplicado a lo largo del eje de simetría cuya intensidad en las unidades adimensionales se denota γ . El potencial adicional que introduce el campo se considera como una perturbación relacionada con el campo magnético

$$V_m(\rho, \theta) = \frac{\gamma^2 \rho^2}{4} - i\gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.26)$$

Aquí dos términos corresponden a los aportes en la energía total de la parte diamagnética y paramagnética, respectivamente.

Utilizando estas notaciones se puede representar el Hamiltoniano de un electrón confinado en un volcán de forma arbitraria como:

$$H = H_0 + U; \quad U = V_e(\rho, \theta) + V_m(\rho, \theta) \quad (2.27)$$

En la sección anterior se demostró que para los niveles más bajos que corresponden al número cuántico radial $n=1$, las funciones de onda $|\Phi_m\rangle$ para diferentes momentos angulares y los niveles energéticos correspondientes se definen a través de las formulas siguientes:

$$H_0|\Phi_m\rangle = E_m^0|\Phi_m\rangle \quad (2.28)$$

$$|\Phi_m\rangle = J_\nu \left(\frac{\rho X_{1,\nu}}{R} \right) e^{im\theta}; \quad \nu = \sqrt{m^2 + \frac{\pi^2 R^2}{h^2}} \quad (2.29)$$

$$E_{1,m} = \frac{X_{1,\nu}^2}{R^2} \quad (2.20)$$

Estas funciones serán utilizadas en adelante como las funciones de base para encontrar las funciones propias y los niveles energéticos del Hamiltoniano H , que incluye los términos de perturbación, relacionados con los defectos estructurales y con el campo magnético externo. Se buscaran las funciones propias del Hamiltoniano H como una combinación lineal de estas funciones de base:

$$\Psi = \sum_m C_m |\Phi_m\rangle \quad (2.31)$$

En el marco del método de Galerkin, se analiza la siguiente discrepancia:

$$|\hat{D}\rangle = (\hat{H} - E)|\Psi\rangle = (\hat{H}_0 + U - E) \sum_m C_m |\Phi_m\rangle \quad (2.32)$$

Lo ideal sería que esta discrepancia fuera igual a cero, en este caso lograríamos encontrar la solución de la ecuación de onda exacta. Pero como la base escogida es incompleta, esto es imposible. La única opción consiste en lograr que esta discrepancia al menos sea igual a cero en el subespacio de las funciones $|\Phi_m\rangle$, es decir, que las funciones correspondientes deben cumplir las condiciones:

$$\langle \Phi_{m'} | \hat{D} \rangle = 0; \quad m' = 1, 2, \dots, m_p \quad (2.33)$$

Aquí m_p es el número de las funciones base escogidas. Sustituyendo (2.32) en (2.33) se tiene:

$$\langle \Phi_{m'} | H_0 + U - E | \sum_m C_m \Phi_m \rangle = 0; \quad m' = 1, 2, \dots, m_p \quad (2.34)$$

De aquí:

$$\sum_m \left[(E_m^0 - E) \delta_{m,m'} + U_{m,m'} \right] C_m = 0; \quad m' = 1, 2, \dots, m_p \quad (2.35)$$

Aquí:

$$U_{m,m'} = \langle \Phi_m | V_e(\rho, \theta) + V_m(\rho, \theta) | \Phi_{m'} \rangle \quad (2.36)$$

Las ecuaciones (2.35) y (2.36) nos permiten reducir el problema inicial al problema de valores y vectores propios de una matriz.

$$D_{m,m'} = E_m^0 \delta_{m,m'} + U_{m,m'} \quad (2.37)$$

Los valores y vectores propios de esta matriz dan los niveles energéticos, y los vectores propios definen las funciones de onda a través de la igualdad (2.31)

$$V_{m,m'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im'\theta} d\theta \int_0^R \rho J_\nu^2 \left(\rho \frac{X_{1,\nu}}{R} \right) \left[V(\rho, \theta) - V_0(\rho) + \frac{\gamma^2 \rho^2}{4} - i\gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \right] e^{-im\theta} d\rho d\theta \quad (2.38)$$

Teniendo en cuenta los resultados de cálculo presentados en las Fig. 3 y 7, de aquí en adelante se desprecian las diferencias en las funciones de onda para diferentes momentos angulares y ponemos en las funciones de Bessel el valor de ν correspondiente a $m=0$

$$\nu = \pi R / h_0 \quad (2.39)$$

Teniendo en cuenta la identidad de Poisson

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-m')\theta} d\theta = \delta_{m,m'} \quad (2.40)$$

La ecuación (2.38) se reduce a la siguiente fórmula:

$$V_{m,m'} = \int_0^R \rho J_\nu^2 \left(\rho \frac{X_{1,\nu}}{R} \right) \left[\tilde{V}_{m,m'}(\rho) + \left(\frac{\gamma^2 \rho^2}{4} - \gamma m \right) \delta_{m,m'} \right] \quad (2.41)$$

Donde:

$$\tilde{V}_{m,m'}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [V(\rho, \theta) - V_0(\rho)] e^{i(m-m')\theta} d\theta \quad (2.42)$$

$$\tilde{V}_{m,m'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta V e^{i(m-m')\theta} d\theta; \quad \Delta V = V(\rho, \theta) - V_0(\rho) \quad (2.43)$$

2.6 Cálculo de las integrales de Fourier:

Modelo I:

La primera función que define la morfología del cráter es la siguiente:

$$f(\theta) = \theta^2 \quad (2.44)$$

Entonces, se calcula la siguiente integral para este modelo en particular.

$$\tilde{V}_{m,m'} = \frac{\pi^2 R^2}{h_0^2 \rho^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 e^{i(m-m')\theta} d\theta \quad (2.45)$$

Se simplifica la expresión anterior por medio del término $A_{m-m'}$

$$\tilde{V}_{m,m'} = \frac{\pi^2 R^2}{h_0^2 \rho^2} I_{m-m'} = \frac{A_{m-m'}}{\rho^2}; \quad I_{m-m'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 e^{i(m-m')\theta} d\theta; \quad A_{m-m'} = \frac{\pi^2 R^2}{h_0^2} I_{m-m'} \quad (2.46)$$

Luego se calcula el término $I_{m-m'}$

$$I_{m-m'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 e^{i(m-m')\theta} d\theta = \frac{2 \cdot (-1)^{m-m'}}{(m-m')^2} \quad (2.47)$$

Y por lo tanto, se deduce lo siguiente:

$$A_{m-m'} = \frac{2\pi^2 R^2}{h_0^2} \frac{(-1)^{m-m'}}{(m-m')^2} \quad (2.48)$$

Se introduce el término en la ecuación y se procede a calcular una nueva integral:

$$V_{m,m'} = \int_0^R \rho J_\nu^2 \left(\rho \frac{X_{1,\nu}}{R} \right) \left[\frac{A_{m-m'}}{\rho^2} + \left(\frac{\gamma^2 \rho^2}{4} - \gamma m \right) \delta_{m,m'} \right] d\rho \quad (2.49)$$

Esta integral se separa en tres integrales:

$$V_{m,m'} = A_{m,m'} \int_0^R \frac{1}{\rho} J_\nu^2 \left(\rho \frac{X_{1,\nu}}{R} \right) d\rho + \frac{\gamma^2}{4} \int_0^R \rho^3 J_\nu^2 \left(\rho \frac{X_{1,\nu}}{R} \right) d\rho - \gamma m \int_0^R \rho J_\nu^2 \left(\rho \frac{X_{1,\nu}}{R} \right) d\rho \quad (2.50)$$

La expresión anterior se puede hacer más simple, reescribiéndola de la siguiente forma:

$$V_{m,m'} = A_{m-m'} P_{-1} + \left[\frac{\gamma^2}{4} P_3 - \gamma m P_1 \right] \delta_{m,m'}; \quad P_k = \int_0^R \rho^k J_\nu^2 \left(\rho \frac{X_{1,\nu}}{R} \right) d\rho \quad (2.51)$$

Modelo 2:

Para el modelo 2, la función que da la morfología del cráter tiene una doble no-homogeneidad

$$f(\theta) = \text{sen}^2 \theta \quad (2.52)$$

El potencial que incluye las imperfecciones que dan la morfología del cráter es el siguiente:

$$\Delta V = V(\rho, \theta) - V_0(\rho) = \frac{\pi^2 R^2}{h_0^2 \rho^2} \sigma^2 \text{sen}^2 \theta; \quad -\pi < \theta < \pi \quad (2.53)$$

Entonces, se introduce el potencial en el siguiente término y se calcula la integral

$$\tilde{V}_{m,m'} = \frac{\pi^2 R^2 \sigma^2}{h_0^2 \rho^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-m')\theta} \text{sen}^2 \theta d\theta \quad (2.54)$$

$$\Delta V = \frac{\pi^2 R^2 \sigma^2}{h_0^2 \rho^2} I_{m-m'}; \quad I_{m-m'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-m')\theta} \text{sen}^2 \theta d\theta \quad (2.55)$$

$$I_{m-m'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-m')\theta} \left[\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right] d\theta \quad (2.56)$$

$$I_{m-m'} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-m')\theta} d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-m')\theta} \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} d\theta \right\} \quad (2.57)$$

La integral da este resultado

$$I_{m-m'} = \frac{1}{2} \delta_{m,m'} + \frac{1}{4} \delta_{m,m'-2} + \frac{1}{4} \delta_{m,m'+2} \quad (2.58)$$

Y se procede a simplificar la expresión a través de $A_{m-m'}$

$$\Delta V = \frac{\pi^2 R^2}{h_0^2 \rho^2} \sigma^2 \left[\frac{1}{2} \delta_{m,m'} + \frac{1}{4} \delta_{m,m'+2} + \delta_{m,m'-2} \right] = \frac{A_{m-m'}}{\rho^2} \quad (2.59)$$

$$A_{m-m'} = \frac{\pi^2 R^2}{h_0^2} \sigma^2 \left[\frac{1}{2} \delta_{m,m'} + \frac{1}{4} \delta_{m,m'+2} + \delta_{m,m'-2} \right] \quad (2.60)$$

Reduciendo el cálculo a estas tres integrales

$$V_{m,m'} = A_{m-m'} P_{-1} + \left[\frac{\gamma^2}{4} P_3 - \gamma m P_1 \right] \delta_{m,m'} \quad (2.61)$$

$$P_k = \int_0^R \rho^k J_\nu^2 \left(\rho \frac{X_{1,\nu}}{R} \right) d\rho; \quad k = -1, 1, 3 \quad (2.62)$$

2.7 Algoritmo de procedimiento numérico

El algoritmo propuesto consiste en tres pasos:

Dadas las funciones de onda $|\Psi_m\rangle$ y los niveles energéticos E_m^0 , se calculan:

a) Tres integrales $P_k = \int_0^R \rho^k J_\nu^2 \left(\rho \frac{X_{1,\nu}}{R} \right) d\rho; \quad k = -1, 1, 3$ tomando $\nu = \pi R/h_0$

b) Elementos matriciales $A_{m,m'}$ según las formulas

$$A_{m-m'} = \frac{2\pi^2 R^2}{h_0^2} \frac{(-1)^{m-m'}}{(m-m')^2} \text{ Para modelo I}$$

$$A_{m-m'} = \frac{\pi^2 R^2}{h_0^2} \sigma^2 \left[\frac{1}{2} \delta_{m,m'} + \frac{1}{4} \delta_{m,m'+2} + \delta_{m,m'-2} \right] \text{ Para modelo II}$$

c) Elementos matriciales $A_{m,m'}$ según la formula

$$V_{m,m'} = A_{m-m'} P_{-1} + \left[\frac{\gamma^2}{4} P_3 - \gamma m P_1 \right] \delta_{m,m'}$$

d) Elementos matriciales de la matriz

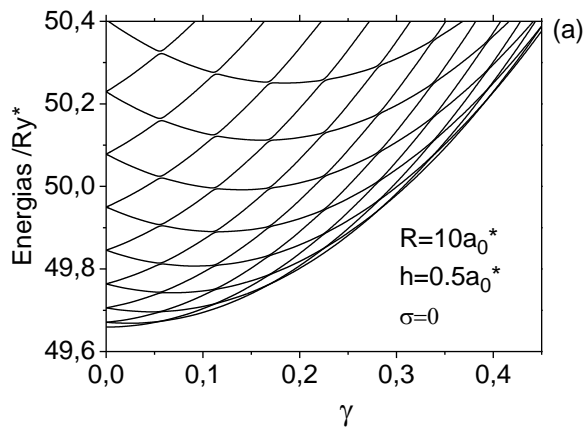
$$D_{m,m'} = E_m^0 \delta_{m,m'} + V_{m,m'}$$

Finalmente se encuentran los valores propios de la matriz D , los cuales definen el espectro energético de cráter con los defectos y en presencia del campo magnético externo

3. Resultados y discusión

Se analizaran los cráteres correspondientes a los dos modelos propuestos y se explicara qué pasa con las energías cuando se varían el radio, la altura y el nivel de morfología del cráter.

Entonces, se parte de un cráter con un radio de 100nm, una altura de 5nm y un valor de σ igual a cero. Al realizar incrementos de la altura, se observa como el efecto Aharonov-Bohm empieza a comportarse típicamente como en el caso de un disco (ver fig. 5) y luego con una altura mayor se desempeña como el efecto típico para un anillo cuántico (ver fig. 4). Claramente se ven las oscilaciones de la energía en la figura 12, y se pueden conocer los mínimos energéticos de acuerdo a la teoría. El electrón atrapado en el cráter puede realizar cambios de nivel energético sin adquirir energía, fenómeno conocido como transparencia aparente del anillo ante el flujo magnético, y con el aumento de este, el estado base se transforma en una mezcla de diferentes estados de la energía que corresponden a diferentes números cuánticos angulares. En las figuras 12a y 12b se puede detallar que no se da el fenómeno de las corrientes persistentes o corrientes de baja temperatura, pero en la figura 12c visiblemente se contempla que las curvas para diferentes números angulares toman el mismo valor en sus mínimos, y esto está relacionado con las corrientes persistentes que anteriormente fueron mencionadas, fenómeno similar que también se da en los superconductores.



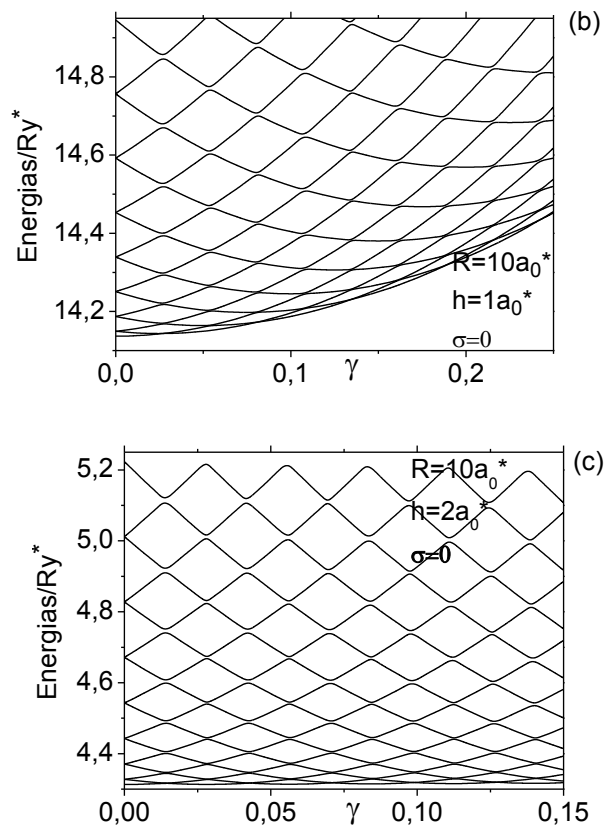


Fig. 12 Energías del electrón en función del campo magnético para un radio de 100nm, un nivel de morfología igual a cero y la altura variable

A continuación se ilustran tres figuras, en donde se han mantenido constantes los parámetros del radio y la altura. Se contempla notoriamente que a medida que se aumenta el nivel de morfología del cráter, empiezan a aparecer estados localizados, es decir que el efecto Aharonov-Bohm desaparece para los primeros niveles de energía y las oscilaciones se presentan en estados más excitados. Esto se debe a la pérdida de simetría del cráter y a la variación de la distribución de probabilidad de encontrar el electrón dentro de la estructura. En este caso de un radio de 100nm y una altura de 10nm, el cráter presenta el efecto como si fuera un disco cuántico.

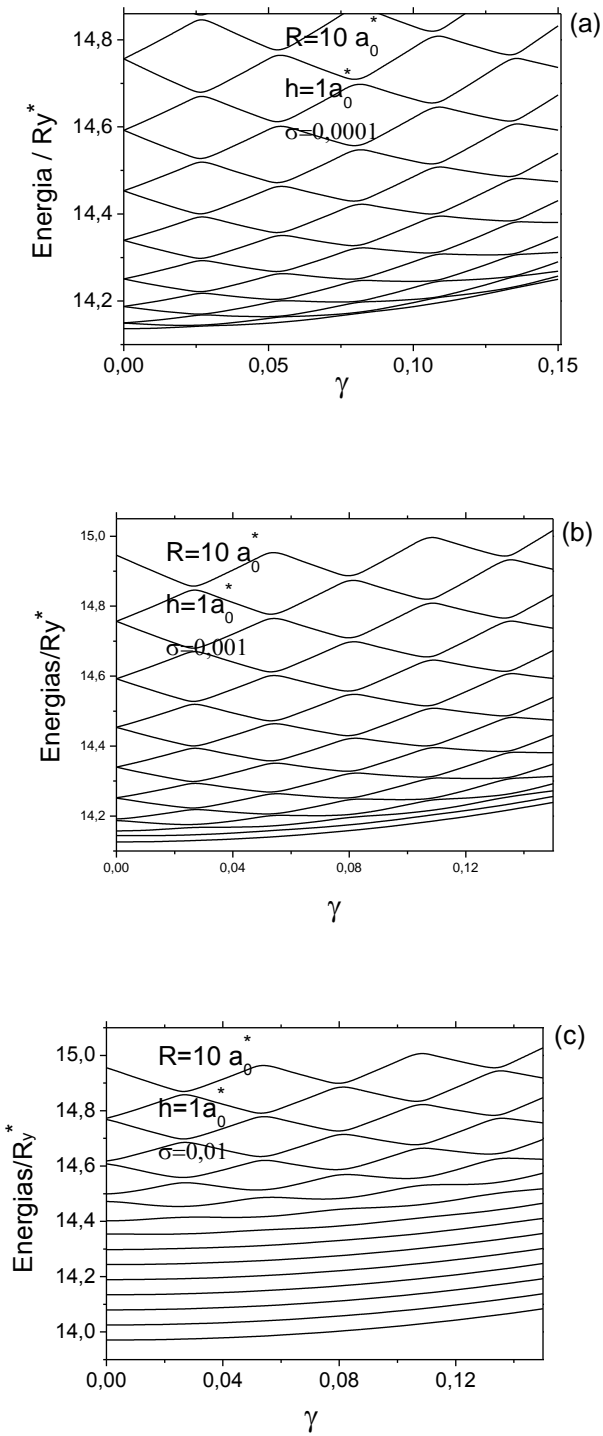


Fig.13 Energías del electrón en función del campo magnético para un radio de 100nm, una altura de 10nm y un nivel de morfología variable.

En las siguientes graficas se advierte el típico efecto Aharonov-Bohm para un anillo cuántico. Las graficas se distinguen entre sí, porque a medida que se

aumenta el nivel de morfología, manteniendo los parámetros constantes (radio y altura), se manifiestan estados localizados.

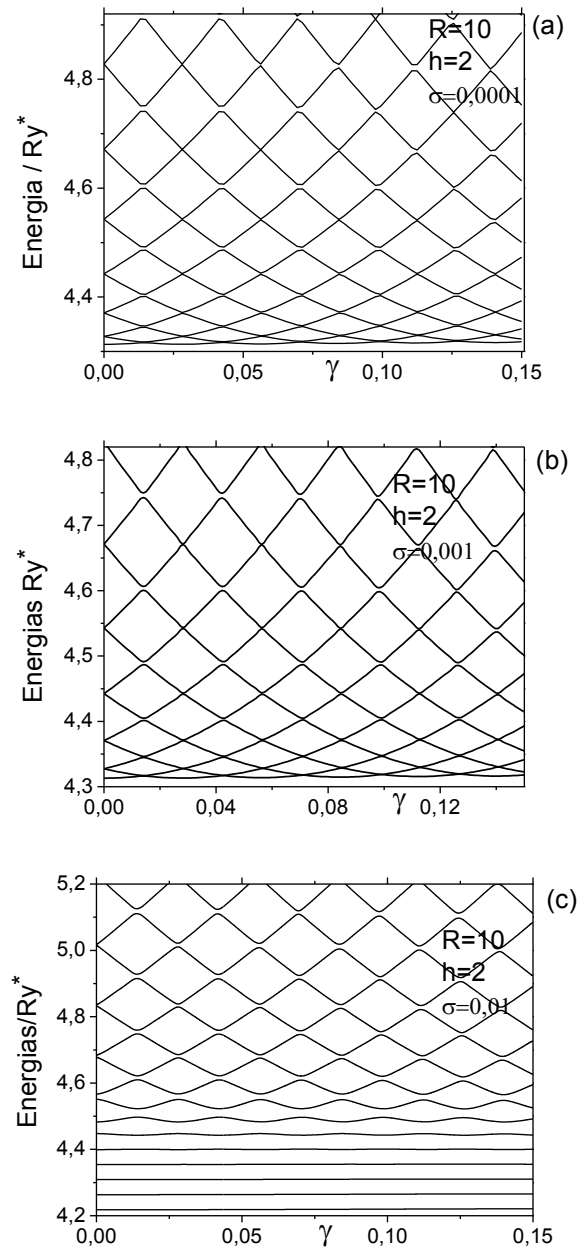


Fig. 14 Energías del electrón en función del campo magnético para un radio de 100nm, una altura de 20nm y un nivel de morfología variable.

4. Conclusiones

Se propuso un modelo 3D que, por un lado, describe adecuadamente la morfología de los anillos cuánticos fabricados experimentalmente y, por otro lado, permite encontrar las energías y las funciones de onda para un electrón confinado en esta heteroestructura en forma exacta. La geometría de este modelo es parecida a la de un volcán con un cráter, en el cual la altura se incrementa linealmente en la dirección radial. Además, en el trabajo estas soluciones exactas se utilizaron para analizar la influencia de diferentes tipos de perturbaciones producidas por los defectos estructurales y el campo magnético externo en el marco del método numérico de Galerkin (con frecuencia los físicos lo llaman diagonalización exacta)

El análisis del espectro para esta estructura sin perturbaciones muestra que los niveles más bajos forman sub-bandas correspondientes a diferentes números cuánticos radiales con los subniveles en ellas, correspondientes a diferentes momentos angulares que son casi continuas. Se encontró además que las partes radiales de las funciones de onda para diferentes momentos angulares y los mismos números cuánticos radiales son prácticamente indistinguibles y esto simplifica significativamente aplicación de método de Galerkin.

Se presentaron los resultados de cálculo de los niveles energéticos en función del campo magnético para los volcanes con diferentes dimensiones y niveles de desordenamiento. El análisis teórico del modelo muestra que el comportamiento de estas curvas depende fuertemente de la razón entre la altura de cráter y su radio. Cuando esta razón es muy grande las curvas son muy similares a las de un anillo 1D, es decir tienen presentes las oscilaciones Aharonov-Bohm, corrientes persistentes, números mágicos, etc. En otro extremo cuando esta razón se hace muy pequeña todos estos efectos poco a poco desaparecen y las curvas se hacen muy parecidas a las de un disco.

Para analizar el efecto de desordenamiento se considero dos tipos de perturbaciones relacionadas con las variaciones locales de la altura del cráter, en el primer caso la variación alrededor de una solo línea radial y en el segundo caso a lo largo de dos líneas radiales. En ambos casos en los

resultados de cálculo presentados se observa con evidencia el apagamiento de las oscilaciones de Aharonov-Bohm y la formación en la parte inferior del espectro de niveles localizados en los cuales el electrón ya no está rotándose alrededor de eje de simetría sino esta oscilando cerca del defecto. A mayor el nivel de la perturbación, mayor es el número de los niveles energéticos con las oscilaciones de Aharonov-Bohm apagadas.

5. Bibliografía

- [1] D. Leonard, K. Pond, P.M Petroff, Phys. Rev. B 50 (1994) 11 687.
- [2] J.M. García et al., Appl. Phys. Lett. 73 (1997) 2014.
- [3] H. Pettersson, R.J. Warburton, A. Lorke, K. Karrai, J. P. Kotthaus, J. M. Garcia, P.M. Petroff, Physica E 6 (2000) 510-513.
- [4] V. M. Fomin,* V. N. Gladilin,† S. N. Klimin, and J. T. Devreese, N. A. J. M. Kleemans and P. M. Koenraad, Phys. Rev. B **76**, 235320 (2007)
- [5] J.-L. Zhu and Zh. Dai, Two electrons in one-dimensional nanorings, Phys. Rev. B **68**,045324(2003).
- [6] Y. Aharonov and D. Bohm, Significance of Electromagnetic Potential in the quantum Theory, Phys. Rev. Vol. 115 No. 3, (1959).
- [7] J. Planelles, J.I.Climente, F.Rajadell, Quantum rings in tilted magnetic fields, Phys E 33 (2006) 370-375.
- [8] S. Viefers, P. Koskinen, P. S. Deo, M. Manninen, Phys. E (Amsterdam) 21, 1 (2004).
- [9] A. Bruno-Alfonso and A. Latgé, Phys. Rev. B 61, 15 887 (2000).
- [10] Z. Barticevic, M.Pacheco, and A. Latgé, Phys. Rev, B 62, 6963 (2000).
- [11] Y. V. Pershin and C. Permarocchi, Persistent and radiation-induced currents in distorted quantum rings, Phys. Rev. B **72**, 125348(2005).
- [12] A. Bruno-Alfonso and A. Latgé, Quantum rings of arbitrary shape and non-uniform width in a threading magnetic field, Phys. Rev. B **77**, 205303(2008).
- [13] A. Bruno-Alfonso and A. Latgé. AharonovBohm oscillation in a quantum ring: Eccentricity and electric field effects, Phys. Rev. B 71,125312 (2005).
- [14] F. García, J. H. Marín, H. Paredes and I. D. Mikhailov, Phys. Stat, Sol. (c) 2, No. 10, 3630-3633 (2005).
- [15] R. C. T. da Costa, Phys. Rev A 23, 1982 (1981).
- [16] S. N. Shevehenko and Yu. A. Kolesnichenko, JETP 92, 811 (2001).
- [17] Eugene Jahnke, Fritz Emde, Tables of Functions with Formulae and Curves , Dover, 2004